



Universidad de Guanajuato

Centro de Investigaciones en Óptica, A. C.

Técnicas Computacionales para la Deflectometría de Moiré.

Tesis presentada por

M. C. Ricardo Legarda Sáenz

como requisito parcial para obtener
el grado de Doctor en Ciencias (Óptica)

Asesores:

Dr. Ramón Rodríguez Vera (CIO).

Dr. Mariano José Juan Rivera Meraz (CIMAT).

León, Guanajuato. Julio del 200

TÉCNICAS COMPUTACIONALES PARA LA DEFLECTOMETRÍA DE MOIRÉ.

Resumen

En este trabajo se analizó la deflectometría de moiré sin utilizar las aproximaciones usuales en la literatura y se obtuvo el modelo general de la deflectometría de moiré en modo finito. Al obtener este modelo general, las técnicas computacionales utilizadas en la deflectometría de moiré, basadas en el modelo aproximado, ya no pueden ser utilizadas. Con el fin de tener herramientas computacionales compatibles con el modelo general, en este trabajo de tesis se proponen dos técnicas computacionales adecuadas a los trabajos que se realizan en la deflectometría de moiré.

La primera técnica propuesta es una funcional de costo para interpolar datos con gran eficiencia y exactitud. Esta funcional se basa en la relación que existe entre la superficie y el vector normal a esta. Esta funcional está orientada a la reconstrucción de la distribución del camino óptico utilizando la información de rayos que fueron trazados a través de un medio bajo estudio.

La segunda técnica propuesta es otra funcional de costo cuyo fin es la integración de la información obtenida de los patrones de franjas de la deflectometría de moiré. Esta funcional tiene un mejor desempeño que los métodos tradicionales de integración, aún en condiciones de niveles altos de ruido. La formulación de la funcional permite utilizar la información de varios patrones de franjas sin afectar en su eficiencia computacional.

Agradecimientos.

Quiero dejar esta constancia de mi gratitud a todas las personas que me ayudaron en este trabajo. Sin la colaboración de ellos, mi limitada capacidad no habría dado "el ancho" para terminar esta tesis.

- Gracias Ramón y Mariano: sus consejos, algunas veces desoidos, sirvieron para clarificar mis ideas.
- Gracias Pedro, Jorge, Chuy C., Chuy V., Pepe, Gerardo, Pancho C., y demás compañeros: su apoyo, sus consejos y sus críticas templaron mi ánimo para luchar contra las adversidades que hay en estos caminos.
- Gracias grupo de metrología óptica: con su soporte se pudo terminar esto.
- Gracias Roberto, Olivia, Diana, Jorge, Arturo, Octavio, Roberto, Juan Gabriel y Jorge C.: a pesar de la distancia, su amor siempre estuvo conmigo.
- Gracias Raúl y Alicia: su apuesta a ciegas a este mono no fue en vano.
- Gracias CONACYT y CONCYTEG: su soporte económico fue vital para la terminación de este trabajo.
- Gracias CIO: sus contradicciones me ayudan a ver el mundo como es.

A ti, Xóchitl.

ÍNDICE.

Resumen.	i
Agradecimientos.	iii
Índice.	vii
Capítulo I. Introducción general y justificación del trabajo.	1
I.1. Principios de la metrología óptica.	1
I.2. La deflectometría de moiré.	2
I.3. Objetivos del trabajo.	10
I.4. Referencias.	11
Capítulo II. Reconstrucción de superficies y distribución del camino óptico.	13
II.1. Superficies paramétricas.	13
II.2. Reconstrucción de superficies mediante interpolación estándar.	14
II.3. Reconstrucción de superficies mediante funcional de costo.	18
II.4. Reconstrucción de la distribución del camino óptico utilizando información del trazo de rayos.	29
II.5. Conclusiones.	39
II.6. Referencias.	41

Capítulo III. Integración de los campos de gradientes obtenidos en la deflectometría de moiré.	45
III.1. Análisis de los patrones de franjas generados por la deflectometría de moiré.	45
III.2. Funcional de costo para integrar campos de gradientes obtenidos de los deflectogramas.	48
III.3. Reconstrucción de una superficie asimétrica utilizando la funcional de costo propuesta.	55
III.4. Conclusiones.	62
III.5. Referencias.	63
Capítulo IV. Conclusiones generales.	67
IV.1. Trabajos a futuro.	69
IV.2. Referencias.	71
Apéndice.	73
A. Trabajos generados en la investigación doctoral.	73

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN GENERAL Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO DE TESIS.

En este capítulo se analizó la deflectometría de moiré sin utilizar las aproximaciones usadas en la mayoría de los trabajos realizados con esta técnica y se obtuvo el modelo general de funcionamiento en modo finito. A partir de este modelo, se describe el trabajo realizado para mejorar y hacer más eficiente la técnica de la deflectometría de moiré.

I.1. Principios de la metrología óptica.

La metrología óptica es un conjunto de técnicas ópticas utilizadas para medir diversas magnitudes físicas de los objetos bajo estudio, como puede ser composición química, temperatura, forma, entre otros. Estas mediciones se basan en la cuantificación de los cambios en el camino óptico de una onda U al propagarse e interactuar con el objeto bajo estudio. Analíticamente, la onda de luz monocromática U se expresa como [1,2]

$$U = U_0 \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \Phi\right]$$

donde U_0 es la amplitud, λ es la longitud de onda del haz de luz y Φ es la distribución del camino óptico. La dirección de propagación de la onda U está dada por el vector unitario del gradiente del camino óptico, definido como [2]

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (\text{I.1})$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ son los cosenos directores del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$.

Los cambios en el camino óptico de la onda \mathbf{U} son producto de la variación en el índice de refracción del objeto analizado. Esto se expresa como [2]

$$\Phi = \int n(x, y, z) ds \quad (\text{I.2})$$

donde $n(x, y, z)$ representa el índice de refracción del objeto o el medio y ds es una diferencial de camino del rayo. A la superficie definida por $\Phi(x, y, z) = \text{constante}$ se le denomina frente de onda.

Los cambios en el camino óptico pueden ser obtenidos por diversas técnicas ópticas, como son [3,4]: holografía interferométrica, métodos de moteado y técnicas de moiré. El uso de estas técnicas depende del grado de precisión y el tipo de magnitud física a ser medida.

I.2. La deflectometría de moiré.

La deflectometría de moiré es una de las técnicas que toma su nombre del efecto moiré. El principio general de esta técnica se publicó por primera vez a principios de los años 80's [5] y se basa en colocar el objeto a analizar (objeto de fase o especular) en la trayectoria de un haz de luz, usualmente colimado. Después del objeto, el haz de luz incide sobre una rejilla de transmisión. Esta rejilla se proyecta sobre una segunda rejilla separada de la

primera una distancia Talbot [6] y, debido al efecto moiré, se forman franjas. Este patrón de franjas es llamado comúnmente deflectograma. El esquema de la técnica se muestra en la figura I.1, donde la rejilla G_1 está situada en el plano $Z = z_1$ y la rejilla G_2 en el plano $Z = z_1 + D$. Los cambios en la dirección de proyección de la primera rejilla son debido a las variaciones del índice de refracción del objeto y se pueden relacionar con propiedades físicas de éste, como pueden ser: temperatura, composición química, etc. [7,8].

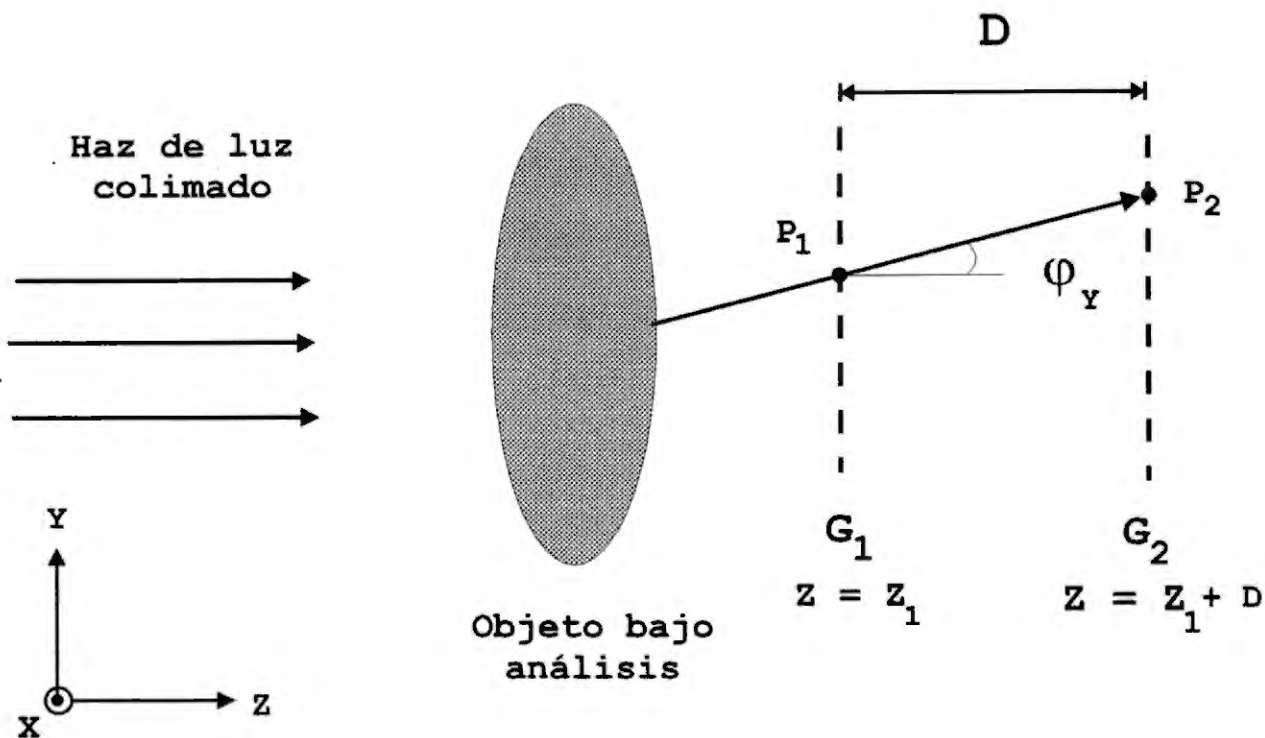


Figura I.1. Esquema de la deflectometría de moiré.

Si se analiza la deflectometría de moiré dentro del régimen de validez de la óptica geométrica [2,5,7,8], se tiene que un punto $P_1(x,y,z_1)$ de la rejilla G_1 se proyecta geoméricamente a la rejilla G_2 . La posición del punto proyectado en la rejilla G_2 será

$P_2(x+\Delta_x, y+\Delta_y, z_1+D)$, y la dirección de esta proyección está dada por los cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{\Delta_x}{|P_1P_2|}, \quad \cos \beta = \frac{\Delta_y}{|P_1P_2|}, \quad \cos \gamma = \frac{D}{|P_1P_2|}$$

donde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Los términos Δ_x y Δ_y de las ecuaciones anteriores pueden ser expresados como

$$\Delta_x = |P_1P_2| \cos \alpha = D \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \tag{I.3}$$

$$\Delta_y = |P_1P_2| \cos \beta = D \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

Cuando los términos $\Delta_x = \Delta_y = 0$, la dirección de la proyección del vector $P_1 P_2$ es paralela al eje Z ; esto es $\cos \gamma = 1$.

La dirección del haz de luz es la dirección de proyección de la rejilla G_1 . Cuando no existe objeto en la trayectoria del haz de luz, se asume que la dirección del haz es paralela al eje Z , por lo que la dirección de proyección es $\hat{u} = (0,0,1)$. Por otro lado, cuando se inserta el objeto bajo estudio en la trayectoria del haz, éste cambia de dirección debido a la variación del índice de refracción en el objeto (ecuación (I.2)). Estos cambios están definidos por el campo de gradiente del camino óptico Φ , esto es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \tan \phi_x = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = W_x \tag{I.4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \tan \phi_y = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = W_y$$

donde φ_x y φ_y son los ángulos en los planos XZ y YZ respectivamente, tal como se muestra en la figura I.2.

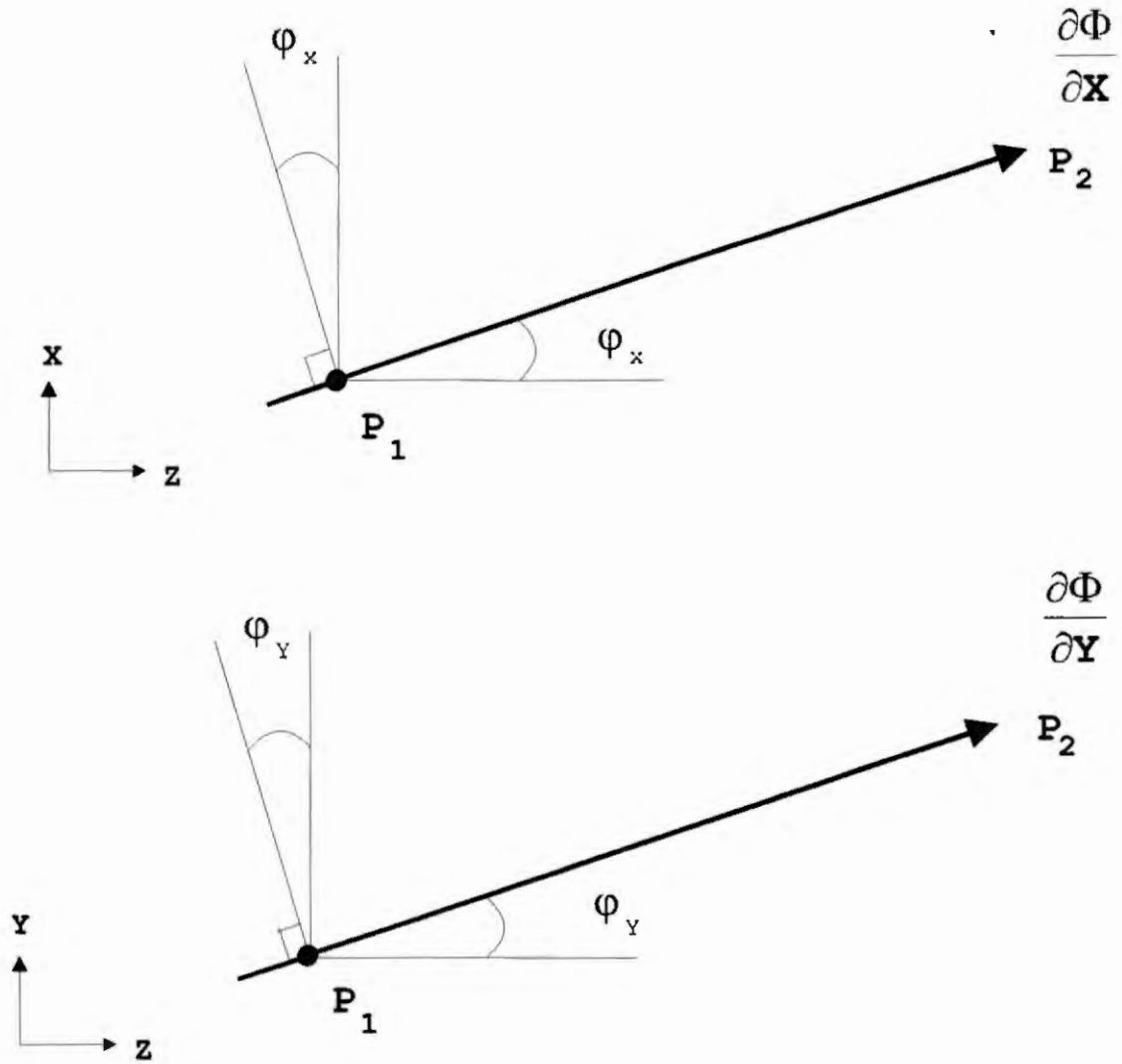


Figura I.2. Relación entre la dirección de proyección y el gradiente del camino óptico Φ .

A partir de la ecuación (I.4), la ecuación (I.3) se puede escribir ahora como

$$\Delta_x = D \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = D W_x \quad (I.5)$$

$$\Delta_y = D \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = D W_y$$

En la deflectometría de moiré generalmente se utilizan rejillas de Ronchi [5,7,8], las cuales se pueden expresar por medio de ecuaciones indiciales como [8]

$$y \cos \theta/2 - x \sin \theta/2 = kp \quad (I.6a)$$

$$y \cos \theta/2 + x \sin \theta/2 = mp \quad (I.6b)$$

donde p el período de las rejillas, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y θ es el ángulo entre las rejillas tal que $\theta \neq 0$. Las franjas de moiré son el resultado de superponer las rejillas descritas en la ecuación (I.6); esto es, proyectar la rejilla (I.6a) sobre la rejilla (I.6b). Cuando no existe objeto bajo análisis, las franjas de moiré estarán descritas por

$$x = \frac{(m - k)p}{2 \sin \theta/2}$$

donde las franjas son paralelas al eje Y . Este tipo de franjas se denominan franjas de moiré en modo finito [8].

Cuando se coloca algún objeto en la trayectoria del haz de luz, la dirección de proyección de la primera rejilla cambia de la siguiente forma

$$(y + \Delta_y) \cos \theta/2 - (x + \Delta_x) \sin \theta/2 = kp$$

$$y \cos \theta/2 - x \sin \theta/2 + D \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cos \theta/2 - D \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \sin \theta/2 = kp \quad (I.7)$$

$$y \cos \theta/2 - x \sin \theta/2 + D W_y \cos \theta/2 - D W_x \sin \theta/2 = kp$$

donde D , Δ_x , Δ_y , W_x y W_y están definidas en las ecuaciones (I.3) y (I.5). Las franjas de moiré obtenidas al superponerse la rejilla anterior sobre la segunda rejilla, ecuación (I.6b), serán descritas por

$$x = \frac{(m - k)p}{2 \operatorname{sen} \theta/2} + \delta x \quad (\text{I.8})$$

$$\delta x = -\frac{D \cos \alpha}{2 \cos \gamma} + \frac{D}{2 \tan \theta/2} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \quad (\text{I.9})$$

donde

$$= -\frac{D}{2} W_x + \frac{D}{2 \tan \theta/2} W_y$$

La ecuación (I.8) es el modelo general del funcionamiento de la técnica de la deflectometría de moiré en modo finito [9]. Como se aprecia en la ecuación (I.9), es necesario utilizar 2 deflectogramas, cada uno con un ángulo θ distinto y diferente de cero, para conocer el campo de gradiente del camino óptico producido por el objeto analizado [9].

En la mayoría de las aplicaciones publicadas en la deflectometría de moiré se utilizan sólo un deflectograma para simplificar los cálculos [7,8]; esto equivale a aproximar la ecuación (I.9) como

$$\delta x = \frac{D \varphi_y}{\theta} \quad (\text{I.10})$$

donde φ_y son las deflexiones del haz de luz con respecto al eje Z , en el plano YZ .

Las aproximaciones utilizadas para reducir la ecuación (I.9) y obtener la ecuación (I.10) son las siguientes [9]:

1. Si la rejilla definida en (I.7) se coloca casi paralela al eje X , los cambios en este eje no podrán ser detectados. Esto implica que $\Delta_x \approx 0$ y, por tanto, el primer término de la ecuación (I.9) será igual a cero.

2. Dado que $\Delta_x \approx 0$, se tiene que $\beta \approx 90^\circ - \gamma$ y se puede hacer $\cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma$. La ecuación (I.9), después de aplicar los dos puntos anteriores, quedará cómo

$$\delta x = \frac{D \tan \gamma}{2 \tan \theta^2} \quad (\text{I.11})$$

3. Como normalmente los ángulos θ y γ son muy pequeños, tal que las aproximaciones $\tan \theta/2 \approx \theta/2$ y $\tan \gamma \approx \gamma$ son válidas, se puede reducir la ecuación (I.11) a $\delta x = \frac{D \gamma}{\theta}$, que es la ecuación (I.10).

Como se puede ver, los valores calculados para el ángulo ϕ , con la ecuación (I.10) son una aproximación del valor verdadero del ángulo γ [9]. Normalmente se utiliza la información conocida del experimento como son el modelo del objeto, arreglo del experimento, entre otros, para procesar la información calculada con la ecuación (I.10) y obtener el valor verdadero de γ .

El campo de gradiente del camino óptico sólo puede ser conocido a partir de la información obtenida de 2 deflectogramas con distinta orientación entre sí. Al utilizar la ecuación (I.10), es necesario tomar 2 deflectogramas con las franjas paralelas al eje X y Y , respectivamente [7,8]. Los valores calculados para ϕ_x y

Φ_y se consideran los gradientes en las direcciones de los ejes utilizados; sin embargo, este gradiente sigue siendo una aproximación del gradiente verdadero [9]. Una alternativa para calcular el campo de gradiente es el uso de la ecuación (I.9), donde sólo se varía el ángulo de separación entre las rejillas para obtener los 2 deflectogramas necesarios. El procedimiento para calcular el gradiente verdadero es tan simple como resolver un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas [9].

La finalidad de la metrología óptica es conocer el valor del camino óptico Φ del objeto analizado. Sin embargo, la única información obtenida mediante la deflectometría de moiré es el campo de gradiente de Φ , como se puede ver en los términos de la ecuación (I.9). El valor del camino óptico se puede calcular mediante los pasos:

1. Se integran los gradientes obtenidos de los deflectogramas. Existen varias técnicas de integración [10,11]; sin embargo, todos estos algoritmos asumen que la información obtenida del patrón de franjas es directamente W_x y W_y , por lo que se utiliza el modelo aproximado de la deflectometría de moiré (ecuación I.10) para tener un modelo similar a la prueba de Ronchi o la interferometría de desplazamiento [12].
2. El resultado de la integración de los gradientes se puede considerar como la diferencia entre el camino óptico que recorre la luz con y sin objeto a analizar; utilizando la ecuación (I.2), se puede definir esta diferencia como

$$\delta\Phi = \int [n(x, y, z) - n.] ds \quad (I.12)$$

donde n_0 es el índice de refracción del medio cuando el objeto analizar no se encuentra en la trayectoria del haz. Una vez calculado el valor de $\delta\Phi$ a partir de la integración, y conociendo el arreglo experimental usado, se puede conocer el valor del índice de refracción del objeto.

I.3. Objetivos del trabajo.

En el análisis realizado en la sección anterior, se obtuvo el modelo general de la deflectometría de moiré en modo finito, expresado en las ecuaciones (I.8) y (I.9), y que fue publicado recientemente [9]. Al desarrollar este modelo general, las técnicas usadas habitualmente en la simulación de la propagación de la luz y el cálculo de la información experimental ya no pueden ser utilizadas, ya que fueron desarrolladas pensando en el modelo aproximado (ecuación I.10) de la deflectometría de moiré [5,7,8].

En este trabajo de tesis se proponen dos técnicas computacionales, cuyo fin es tener las herramientas de trabajo compatibles con el modelo general de la deflectometría de moiré. En el capítulo II se propone una funcional de costo para interpolar datos con gran eficiencia. Esta funcional utiliza la relación existente entre la superficie y el vector normal a esta. Esta técnica de interpolación se puede aplicar directamente en la reconstrucción de la distribución del camino óptico utilizando la información de pocos rayos, haciendo más rápido el proceso de

propagar rayos a través de objetos bajo estudio. En el capítulo III, se propone una funcional de costo para integrar el campo de gradiente del camino óptico, obtenido a partir de la información de los deflectogramas. Esta integración se basa en el modelo general expresado en las ecuaciones (I.8) y (I.9). La funcional propuesta tiene un desempeño superior a los métodos tradicionales de integración, aún en condiciones de altos niveles de ruido. Además, esta funcional permite utilizar la información de varios patrones de franjas sin verse afectada su eficiencia computacional. Por último, en el capítulo IV, se recapitulan los resultados obtenidos y se plantean posibles líneas de trabajo a seguir en el futuro.

I.4. Referencias.

1. B. E. A. Saleh & M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, (Wiley, New York, 1991), sec. 2.2.
2. M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon Press, Oxford, 1993), sec. 3.1.2 y 3.2.1.
3. K. J. Gásvik, *Optical Metrology*, (Wiley, Chichester, 1987).
4. G. L. Cloud, *Optical Methods of Engineering Analysis*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
5. O. Kafri, "Noncoherent method for mapping phase objects," *Opt. Lett.* **5**, 555 - 557 (1980).
6. K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications," *Progress in Optics XXVII*, 1 - 108 (1989).

7. O. Kafri and I. Glatt, "Moiré deflectometry: A ray deflection approach to optical testing", *Opt. Eng.* **24**, 944 - 960 (1985).
8. O. Kafri & I. Glatt, *The Physics of Moiré Metrology*, (Wiley, New York, 1990), cap. 6 y 7.
9. R. Legarda-Sáenz, R. Rodríguez-Vera, M. Rivera, "Nonparaxial method for computing the gradient field of a wavefront using moiré deflectometry," *Opt. Comm.* **160**, 214 - 218 (1999).
10. D. L. Fried, "Least-squares fitting of wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurement," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370 - 375 (1977).
11. R. H. Hudgin, "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 375 - 378 (1977).
12. D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, (Marcel Dekker Inc, New York, 1998).

CAPÍTULO II. RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES Y DISTRIBUCIÓN DEL CAMINO ÓPTICO.

En este capítulo se propone una funcional de costo para interpolar datos con un mayor desempeño y eficiencia que los métodos estándar. En esta funcional se utiliza la relación existente entre la posición y el vector normal para reconstruir una superficie. Para demostrar la eficiencia de la funcional, se realizaron reconstrucciones de superficies complejas. Con esta misma funcional se reconstruyó la distribución del camino óptico con la información obtenida del trazo de rayos.

II.1. Superficies paramétricas [1-3].

Una superficie en el espacio puede ser descrita en forma de una función vectorial como

$$f(u,v) = \{ X(u,v), Y(u,v), Z(u,v) \} \quad (\text{II.1})$$

para $a_1 \leq u \leq a_2, \quad b_1 \leq v \leq b_2$

donde a_1, a_2, b_1, b_2 son los límites de los parámetros continuos (u,v) en alguna región de valor acotada y cerrada, donde $X, Y,$ y Z son las coordenadas rectangulares de un punto en la superficie f . Los parámetros (u,v) de la función f no tienen relación con la estructura de la superficie, por lo que para cualquier transformación de coordenadas la forma de la superficie quedará sin modificar.

La función f que describe una superficie tiene derivadas parciales con respecto a (u,v) , tal que

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0 \quad (\text{II.2})$$

para $u \neq v$. Esta condición asegura la existencia de suavidad en la superficie, además de asegurar la existencia e independencia lineal de cada derivada parcial de la ecuación (II.2).

Cada derivada parcial es tangente a la superficie y forman un plano tangente a la superficie para un punto (u_0, v_0) dado. El vector normal a la superficie en el punto (u_0, v_0) es

$$N(u_0, v_0) = \frac{\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}}{\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}} \quad (\text{II.3})$$

El vector normal a la superficie es una propiedad intrínseca de la superficie y es invariante a cualquier transformación de coordenadas.

II.2. Reconstrucción de superficies mediante interpolación estándar.

Considérese una función vectorial f_1 que define una superficie en el espacio, expresada en la misma forma que la ecuación (II.1). Asíumase que se conocen sólo algunos de los puntos de la superficie f_1 ; esto es, una muestra de esta superficie. Esta muestra estará definida como

$$Q(u_j, v_j) = f_1(u, v) h(u, v)$$

donde

$$h(u, v) = \sum_i \sum_j \delta(u - iT, v - jT)$$

es la función *shah* bidimensional [4], con un período de muestra T . La función de muestra \mathcal{Q} tiene una dimensión $m \times n$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$ y $j = 0, 1, \dots, n-1$. Conforme aumente el valor de T , se reducirá el número de muestras en la función \mathcal{Q} y será una representación cada vez más burda de la superficie f_1 .

Si se quiere aumentar la densidad de datos de la superficie representada por \mathcal{Q} , se puede realizar una interpolación con los datos conocidos. Sin embargo, cuántos menos valores se conozcan de la superficie (muestras tomadas con un período T muy grande), menor exactitud se tendrá en la reconstrucción. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo:

Se define una superficie en forma de función vectorial como

$$f_1(u, v) = \{ u, v, u \exp(-u^2 - v^2) \} \quad (\text{II.4})$$

$$-3 \leq u \leq 3, \quad -3 \leq v \leq 3$$

La superficie descrita por la función f_1 se muestra en la figura II.1. De esta función se tomaron muestras para distintos valores de T . Cada función de muestra fue utilizada para reconstruir la superficie mostrada en la figura II.1, mediante métodos estándares de interpolación, como son interpolación local y bicúbica [5,6]. En la tabla II.1 mostramos los errores MSE (siglas en inglés de MEAN SQUARE ERROR) obtenidos al reconstruir la superficie utilizando varios valores de T e interpolando con los métodos mencionados. Las superficies reconstruidas con la interpolación local, utilizando

las muestras de los periodos $T = 0.75$ y $T = 1.5$, se muestran en las figuras II.2 y II.3, respectivamente.

Tabla II.1. MSE obtenido en la reconstrucción con interpolación estándar.

T ($m \times n$)	Interpolación local	Interpolación bicúbica
0.300 (21x21)	2.716e-8	2.717e-7
0.375 (17x17)	1.787e-7	1.310e-6
0.500 (13x13)	2.154e-6	9.667e-6
0.750 (9x9)	8.704e-5	1.580e-4
1.50 (5x5)	0.005	0.006

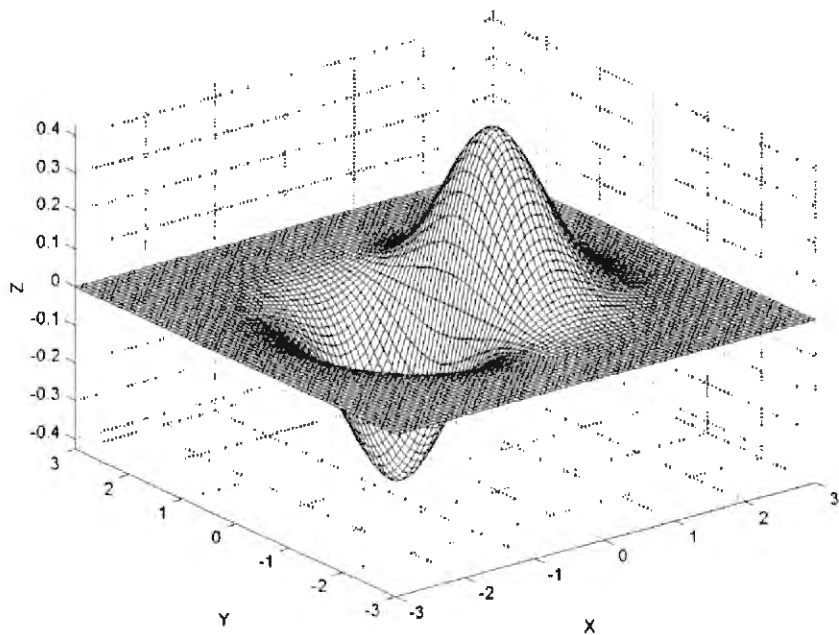


Figura II.1. Superficie definida por la ecuación (II.4).

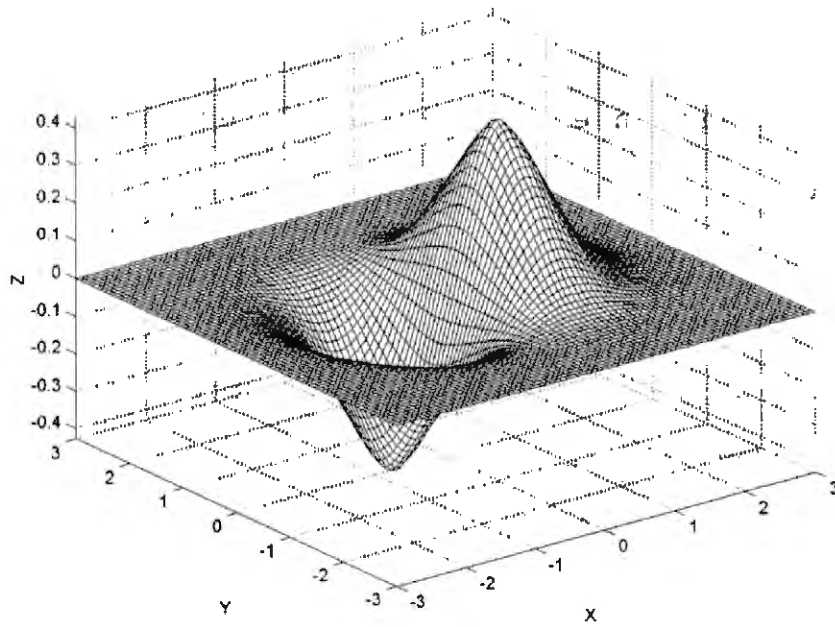


Figura II.2. Superficie reconstruida con las muestras del periodo $T = 0.75$,
utilizando interpolación local.

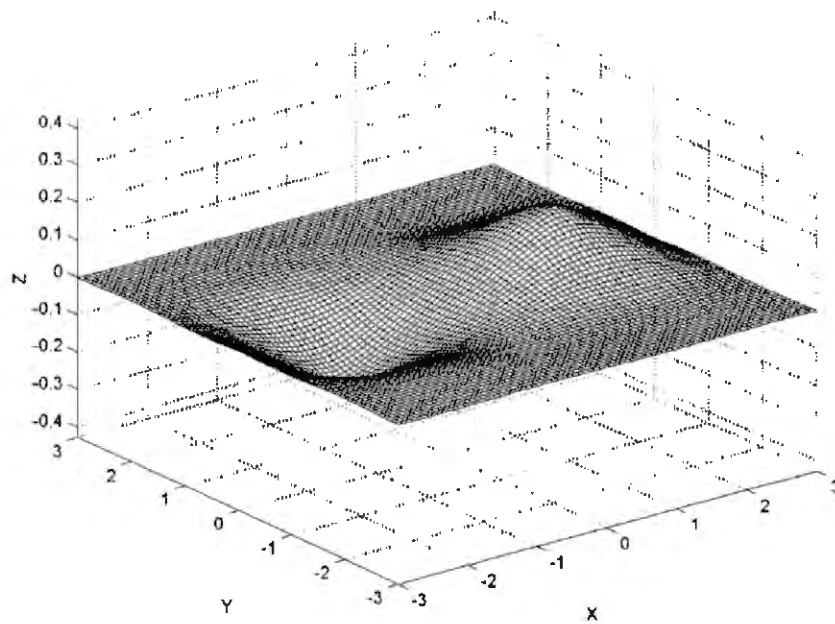


Figura II.3. Superficie reconstruida con las muestras del periodo $T = 1.5$,
utilizando interpolación local.

II.3. Reconstrucción de superficies mediante funcional de costo [7].

Como se mostró en el ejemplo de la sección anterior, conforme se reduce el número de muestras, la exactitud de la reconstrucción se ve afectada. Esto obliga a tomar un número grande de muestras para aumentar la exactitud, pero puede resultar inconveniente cuando se está limitado por el tiempo de proceso y/o espacio en la memoria de la computadora.

Una alternativa para mejorar el desempeño de la interpolación con pocos datos es incorporar en las muestras alguna información sobre la forma de la superficie. Un valor intrínseco que caracteriza la forma de la superficie en un punto (u_i, v_i) es el vector normal, ecuación (II.3). Este vector se ha utilizado en la reconstrucción de superficies [8]. En el trabajo reportado en la ref. 8 se calculan los puntos de la superficie por medio de generalizaciones de esplines y se penalizan los cambios no suaves de la superficie. El cálculo de la discrepancia y penalización de los datos se realiza por medio de los gradientes, calculados solamente con los puntos de la superficie.

La variante para interpolar propuesta en este trabajo es utilizar la relación existente entre el vector normal y el plano tangente a la superficie [7]. El vector normal a la superficie es perpendicular al plano tangente, y este plano está formado por las derivadas parciales con respecto a u y v ; por tanto, el vector normal debe ser perpendicular a cada derivada parcial, tal como se expresa en la siguiente ecuación

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial u} = 0$$

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial v} = 0$$
(II.5)

Si conocemos el valor del vector normal en un punto (u, v) , podemos conocer los valores de las derivadas parciales utilizando la ecuación (II.5). Si se utiliza las primeras diferencias centradas, definidas como

$$\frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial u} \approx \frac{\mathbf{f}(u + \delta, v) - \mathbf{f}(u - \delta, v)}{2\delta}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial v} \approx \frac{\mathbf{f}(u, v + \delta) - \mathbf{f}(u, v - \delta)}{2\delta}$$

para aproximar las derivadas parciales de la ecuación (II.5), se tendrá que

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\mathbf{f}(u + \delta, v) - \mathbf{f}(u - \delta, v)}{2\delta} = 0$$

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\mathbf{f}(u, v + \delta) - \mathbf{f}(u, v - \delta)}{2\delta} = 0$$
(II.6)

Las relaciones expresadas por las ecuaciones (II.5) y (II.6) se pueden ver gráficamente en la figura II.4. Como se puede observar en la ecuación (II.6) y en la figura II.4b, la aproximación de la derivada parcial involucra los puntos que pertenecen a la superficie \mathbf{f} y están alrededor del vector normal. Si se asume que al tomar muestras de la superficie \mathbf{f} se incluyen el valor del vector normal en el conjunto de datos de muestra, se pueden calcular valores de la superficie \mathbf{f} que están alrededor del vector normal a la superficie utilizando la ecuación (II.6).

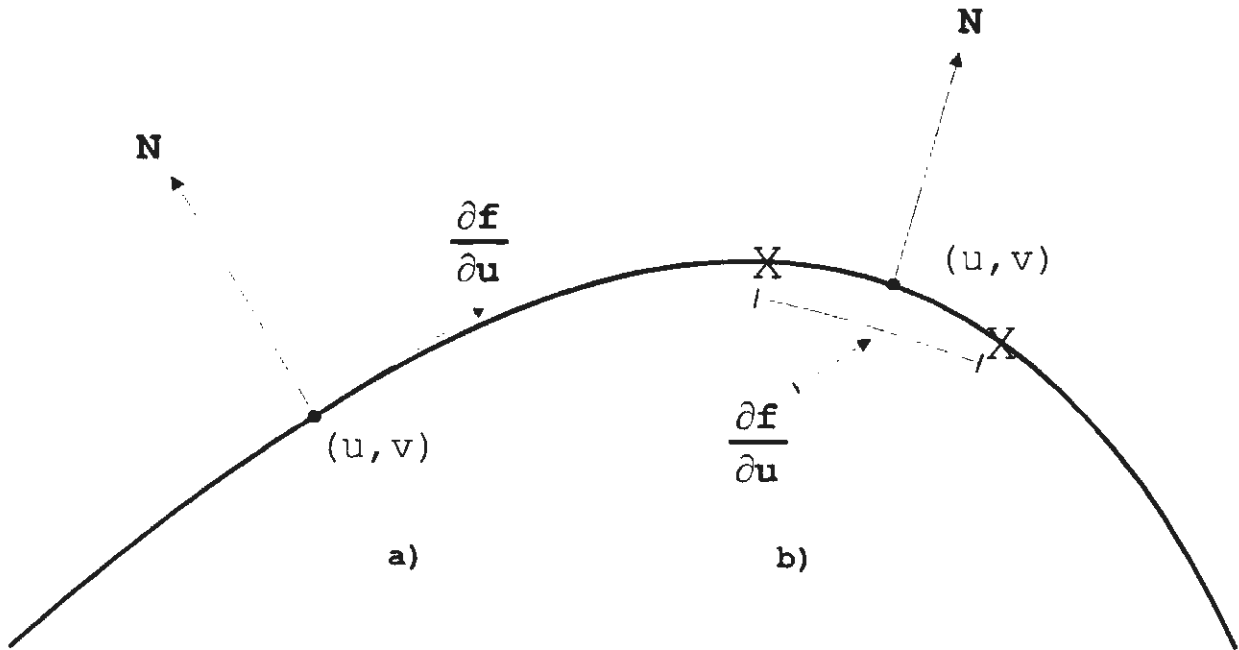


Figura II.4. Representación a) exacta y b) aproximada de la relación entre la derivada parcial y el vector normal a la superficie.

El procedimiento propuesto para reconstruir una superficie W se inicia al tener una muestra de la superficie f definida en forma discreta como

$$Q_{i,j} = \{ p_{i,j}, n_{i,j} \}$$

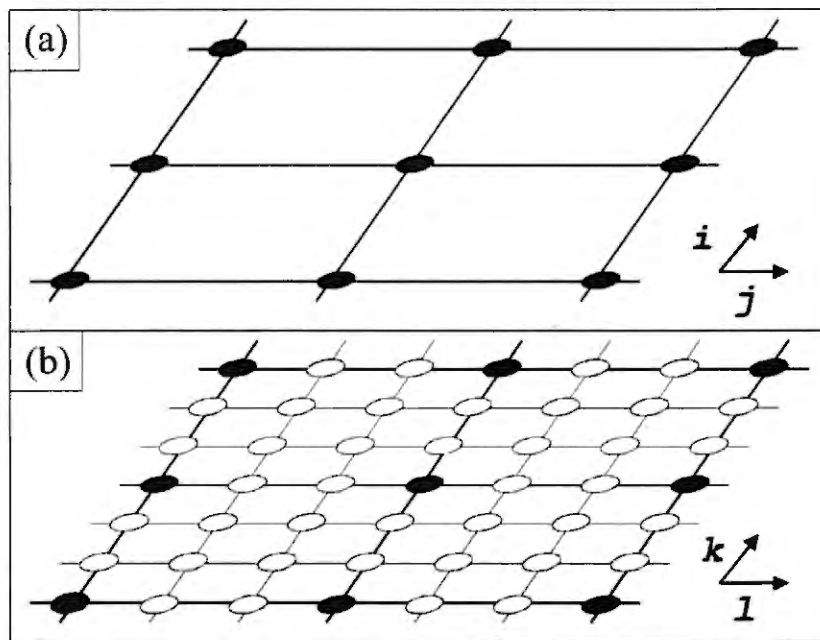
donde $i = 0, 1, \dots, m-1$ y $j = 0, 1, \dots, n-1$ son las coordenadas de la muestra con dimensión $m \times n$; $p_{i,j} = \{ X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j} \}$ es la posición y $n_{i,j} = \{ a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \}$ es el vector normal de superficie donde a, b, c son los cosenos directores.

La superficie a reconstruir W está definida como

$$W_{i,j} = \{ p_{i,j}, n_{i,j} \}$$

donde p es la posición y n es la dirección del vector normal a W , tal como se definió para Q . Las coordenadas de la superficie a

reconstruir W están definidas como $L = \{(k,l) : k = 0,1,\dots,M-1 \text{ y } l = 0,1,\dots,N-1\}$. Si se asume que la resolución de la muestra es aumentada homogéneamente por un entero en ambas direcciones de i y j , se tiene que existen dos constantes tales que $M = m q_1$ y $N = n q_2$. La figura II.5 ilustra la relación entre los espacios (i,j) y (k,l) .



- Información de muestra
- Información a reconstruir

Figura II.5. Relación entre espacios utilizados en la reconstrucción.

La superficie a reconstruir \mathbf{W} es calculada al minimizar la funcional de costo U , definida como

$$\mathbf{W}' = \min_{\mathbf{W}} \{U(\mathbf{W})\}$$

donde $U(\mathbf{W}) = D(\mathbf{W}) + R(\mathbf{W})$. El término de datos $D(\mathbf{W})$ establece que la reconstrucción de \mathbf{W} debe ser consistente con los datos de \mathbf{Q} . El término de regularización $R(\mathbf{W})$ penaliza cualquier violación de la información *a priori* utilizada en la funcional.

El término $D(\mathbf{W})$ inicialmente está definido como

$$D(\mathbf{W}) = \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} |w_{s_1, s_2} - q_{s_1, s_2}|$$

donde $s_1 = \text{mod}(k/q_1)$, $s_2 = \text{mod}(l/q_2)$, donde $\text{mod}()$ es el operador de módulo. Desarrollando el término $D(\mathbf{W})$, tenemos que

$$D(\mathbf{W}) = \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} |p_{k,l} - p_{s_1, s_2}| + \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} |n_{k,l} - n_{s_1, s_2}| \quad (\text{II.7})$$

La ecuación (II.7) indica que los datos de la muestra deben ser incluidos en la superficie a reconstruir; es decir, sólo se copian datos de \mathbf{Q} en \mathbf{W} . Este procedimiento no involucra la información de la forma de la superficie, por lo que no se explota al máximo la información contenida en los vectores normales. Para involucrar la forma de la superficie, se modificó el segundo término de la parte derecha de la ecuación (II.7). En esta modificación se incluyó la ecuación (II.6), ya que esta expresión involucra los vectores normales y posiciones de la superficie, tal como se explicó anteriormente.

El cambio en el término de datos será de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{p}) = & \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} \left| \mathbf{p}_{k,l} - \mathbf{p}_{s_1, s_2} \right|^2 \mathbf{s}_{k,l} \\
& + \sum_{\substack{(k+1,l) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k-1,l)}} \left| \mathbf{n}_{s_1, s_2} \cdot \frac{\mathbf{p}_{k+1,l} - \mathbf{p}_{k-1,l}}{2} \right|^2 \mathbf{s}_{k,l} \\
& + \sum_{\substack{(k,l+1) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l-1)}} \left| \mathbf{n}_{s_1, s_2} \cdot \frac{\mathbf{p}_{k,l+1} - \mathbf{p}_{k,l-1}}{2} \right|^2 \mathbf{s}_{k,l}
\end{aligned} \tag{II.8}$$

donde \mathbf{p} y \mathbf{n} son los datos de la muestra definidos anteriormente, y \mathbf{p} es el término de posición de la superficie a reconstruir. Los valores de $\mathbf{s}_{k,l}$ están definidos como $\mathbf{s}_{k,l} = 1$ cuando el valor es parte de la muestra y $\mathbf{s}_{k,l} = 0$ en cualquier otro caso. Esta condición asegura que se calculan sólo las posiciones alrededor del vector normal que pertenece a la muestra, aplicando la ecuación (II.6). Esta funcional sólo depende del valor de \mathbf{p} , así que cuando se tenga todos los valores de \mathbf{p} calculados, se puede utilizar la ecuación (II.6) para tener la información normal a la superficie reconstruida \mathbf{W} .

El término de regularización $R(\mathbf{W})$ impone la condición de que los cambios sean suaves en la superficie a reconstruir. Esta condición está basada en la suavidad expresada en la ecuación (II.2). Este término de regularización permite relacionar los datos que no son vecinos de los vectores normales de la muestra y, por tanto, no pueden ser calculados por medio de la funcional de la ecuación (II.8). Además, este término tiene la función de regularizar el problema de la interpolación y convertirlo en un problema bien planteado, con una única solución [9]. Este criterio

lo expresamos por medio de una funcional de costo conocida como la funcional del potencial de segundo orden o funcional de placa [8,10]. Este término es una aproximación de la segunda derivada y penaliza severamente las grandes variaciones en los datos, permitiendo ajustar los datos entre dos planos tangentes, calculados por la ecuación (II.8). Esto es útil para formar las curvaturas existentes en la superficie; si se hubiera utilizado una aproximación de la primera derivada en el término de penalización, los resultados obtenidos serían un ajuste menos severos y los datos calculados tenderían a seguir los planos tangentes y se tendría curvaturas de la superficie poco burdas.

El término $R(\mathbf{W})$ esta dado por

$$R(\mathbf{W}) = \rho \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbf{L} \\ (k+1,l) \\ (k,l-1)}} |\mathbf{W}_{k+1,l} - 2\mathbf{W}_{k,l} + \mathbf{W}_{k-1,l}|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l}) + \rho \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l+1) \\ (k,l-1)}} |\mathbf{W}_{k,l+1} - 2\mathbf{W}_{k,l} + \mathbf{W}_{k,l-1}|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l})$$

donde $\mathbf{S}_{k,l}$ fue definido anteriormente y ρ es el peso que tiene la suavidad en la funcional. Debe notarse que la funcional es multiplicada por el término $(1 - \mathbf{S}_{k,l})$, esto asegura la aplicación de la funcional sólo en los datos a interpolar. Dado que la funcional de la ecuación (II.8) esta en función de \mathbf{p} , se puede escribir el término $R(\mathbf{W})$ como

$$R(\mathbf{p}) = \rho \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbf{L} \\ (k+1,l) \\ (k,l-1)}} |\mathbf{p}_{k+1,l} - 2\mathbf{p}_{k,l} + \mathbf{p}_{k-1,l}|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l}) + \rho \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l+1) \\ (k,l-1)}} |\mathbf{p}_{k,l+1} - 2\mathbf{p}_{k,l} + \mathbf{p}_{k,l-1}|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l}) \tag{II.9}$$

La funcional completa U , propuesta para reconstruir la superficie W , está compuesta por las ecuaciones (II.8) y (II.9), esto es [7]

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{p}) = & \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} |\mathbf{p}_{k,l} - \mathbf{p}_{s_1, s_2}|^2 \mathbf{s}_{k,l} \\
 & + \sum_{\substack{(k+1,l) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k-1,l)}} \left| \mathbf{n}_{s_1, s_2} \cdot \frac{\mathbf{p}_{k+1,l} - \mathbf{p}_{k-1,l}}{2} \right|^2 \mathbf{s}_{k,l} + \sum_{\substack{(k,l+1) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l-1)}} \left| \mathbf{n}_{s_1, s_2} \cdot \frac{\mathbf{p}_{k,l+1} - \mathbf{p}_{k,l-1}}{2} \right|^2 \mathbf{s}_{k,l} \\
 & + \rho \sum_{\substack{(k+1,l) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k-1,l)}} |\mathbf{p}_{k+1,l} - 2\mathbf{p}_{k,l} + \mathbf{p}_{k-1,l}|^2 (1 - \mathbf{s}_{k,l}) + \rho \sum_{\substack{(k,l+1) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l-1)}} |\mathbf{p}_{k,l+1} - 2\mathbf{p}_{k,l} + \mathbf{p}_{k,l-1}|^2 (1 - \mathbf{s}_{k,l})
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

Los valores que minimicen la funcional de la ecuación (II.10) serán aquellos que correspondan a la superficie a reconstruir. Dado que esta funcional es cuadrática, se puede minimizar utilizando algoritmos iterativos para cálculo de sistemas lineales como es el Gauss-Seidel o el descenso de gradiente [11]. Una vez obtenidos los valores de \mathbf{p} , se pueden calcular los vectores normales a la superficie por medio de la ecuación (II.6) para completar la información de W .

Para probar el desempeño de la funcional propuesta en la ecuación (II.10) se realizaron la reconstrucción de 2 superficies. La primera superficie es la definida en la ecuación (II.4). Se utilizó un valor de $T = 0.75$ para tomar datos de muestra y valores $q_1 = q_2 = 9$ para generar la superficie a reconstruir. Las muestras utilizadas para la reconstrucción se pueden observar en la figura II.6. La funcional fue minimizada para varios valores de ρ , que se muestran en la tabla II.2. El valor óptimo del peso ρ es altamente

dependiente del problema a solucionar; para encontrar el valor óptimo se pueden utilizar varios criterios de selección [12]. La superficie reconstruida con el valor $\rho = 1$ se muestra en la figura II.7 y el MSE obtenido se muestran en la tabla II.2.

Una segunda reconstrucción se realizó con la superficie definida como

$$(\mathbf{f}_2)_{u,v} = \left\{ u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right\} \quad (\text{II.11})$$

$$-2 \leq u \leq 2, \quad -2 \leq v \leq 2$$

y que se muestra en la figura II.8. Se utilizó datos de muestra tomados para $T = 0.5$ y valores $q_1 = q_2 = 9$ para generar la superficie a reconstruir. Las muestras de esta superficie se pueden observar en la figura II.9. Los errores obtenidos en la reconstrucción se muestran en la tabla II.2 y la superficie así reconstruida para $\rho = 1$ se muestra en la figura II.10.

Tabla II.2. MSE obtenido en la reconstrucción con la ecuación (II.10).

Valores del peso	Superficie $f_1, T = 0.75$	Superficie $f_2, T = 0.5$
$\rho = 0.1$	8.27499e-5	1.48168e-4
$\rho = 0.25$	7.72038e-5	1.11897e-4
$\rho = 0.5$	6.99601e-5	8.57566e-5
$\rho = 0.75$	6.44573e-5	8.21472e-5
$\rho = 1.00$	6.01453e-5	8.99189e-5
$\rho = 1.50$	5.38411e-5	1.20436e-4

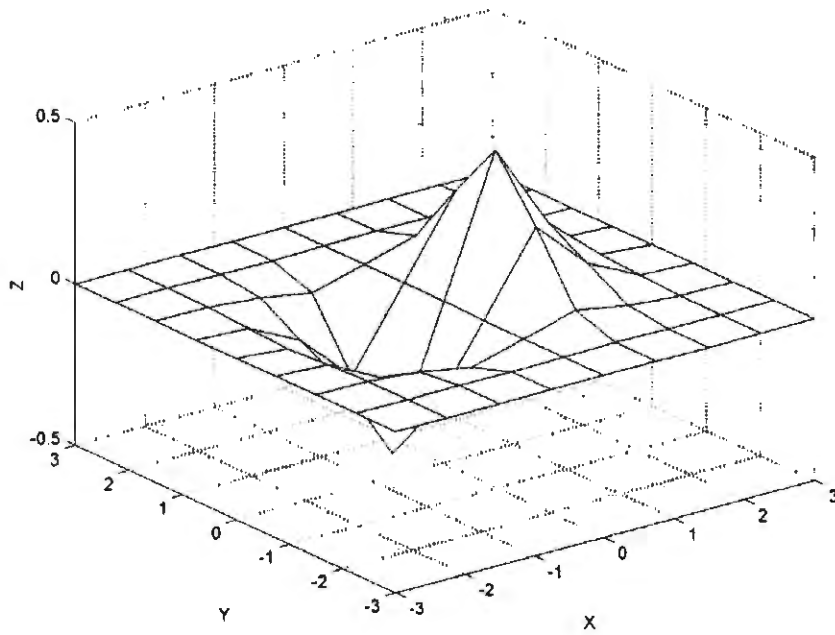


Figura II.6. Muestras utilizadas en la reconstrucción de la función f_1 , tomadas para $T = 0.75$.

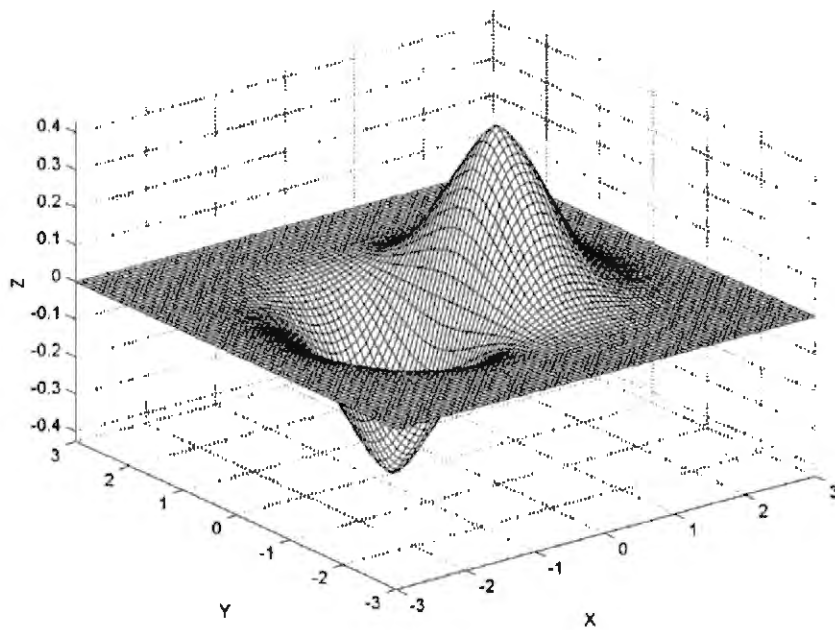


Figura II.7. Superficie reconstruida con muestras de la función f_1 para el período $T = 0.75$, utilizando ecuación (II.10).

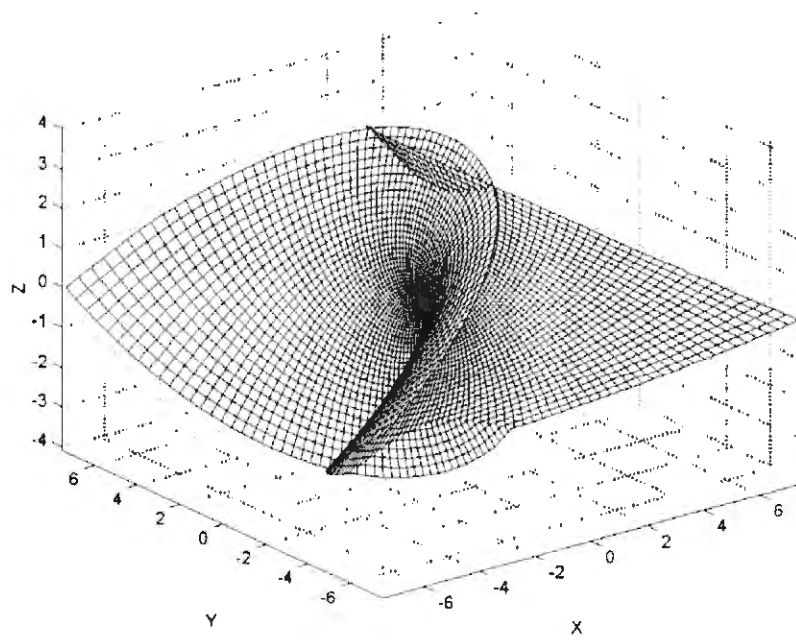


Figura II.8. Superficie definida por la ecuación (II.11).

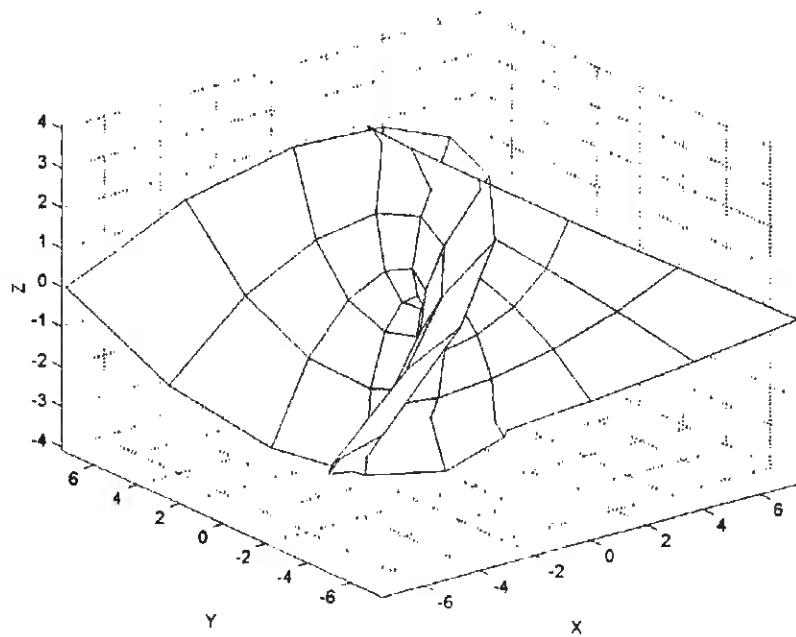


Figura II.9. Muestras utilizadas en la reconstrucción de la función f_2 , tomadas para $T = 0.5$.

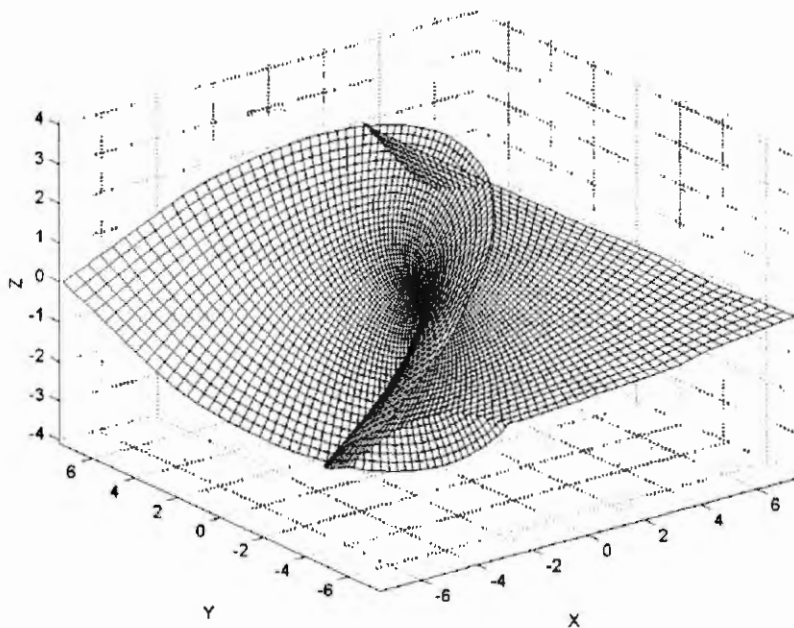


Figura II.10. Superficie reconstruida las muestras de la función f_2 para el período $T = 0.5$, utilizando ecuación (II.10).

II.4. Reconstrucción de la distribución del camino óptico utilizando información del trazo de rayos.

Tal como se mencionó en el primer capítulo, el principal objetivo de la metrología óptica es la cuantificación del camino óptico de una onda que se propagó a través del medio bajo análisis. En el caso de la simulación de la propagación de la luz, existen dos alternativas: el trazo de rayos o la propagación de ondas. La propagación de ondas consiste en resolver la ecuación escalar de Helmholtz, definida como [13]

$$\nabla^2 \mathbf{U} + k_0 n^2 \mathbf{U} = 0$$

donde \mathbf{U} es la onda que se propaga, k_0 es el número de onda y $n = n(x,y,z)$ es el índice de refracción en el espacio. Los métodos numéricos usados para resolver la ecuación anterior tienen gran dependencia de la forma del índice de refracción y generalmente consumen mucho tiempo computacional debido a su complejidad [13]. Por otro lado, el trazo de rayos es otra alternativa para realizar simulaciones. Aunque el trazo de rayos es una aproximación de la propagación de ondas [14], estos métodos tienen ventajas computacionales sobre la propagación de ondas debido a su independencia del índice. Además, existen algoritmos eficientes y fáciles de implementar [15,16]. Un ejemplo de la propagación de los rayos se muestra en la figura II.11 para un frente de onda que se propaga en un medio con índice de refracción homogéneo, después de atravesar un medio inhomogéneo. Para los siguientes desarrollos, el modelo de la propagación mostrada en la figura II.11 se utilizará como referencia.

Las ventajas del trazo de rayos se pierden cuando se requiere de una distribución del camino óptico con una gran resolución, ya se necesita trazar una gran cantidad de rayos a través del medio a analizar y con esto, el costo computacional se incrementa. Para conservar las ventajas del uso de los rayos se puede trazar pocos rayos a través del medio bajo estudio e interpolar la información necesaria. Una alternativa para interpolar información es utilizar la funcional propuesta en la ecuación (II.10), ya que la información obtenida del trazo de rayos consiste en datos de posición y dirección [15,16], tal como está planteada la funcional

mencionada. Antes de mostrar el uso de la funcional en la reconstrucción de la distribución del camino óptico, se revisarán los fundamentos del trazo de rayos y la relación existente entre los rayos y la distribución del camino óptico.

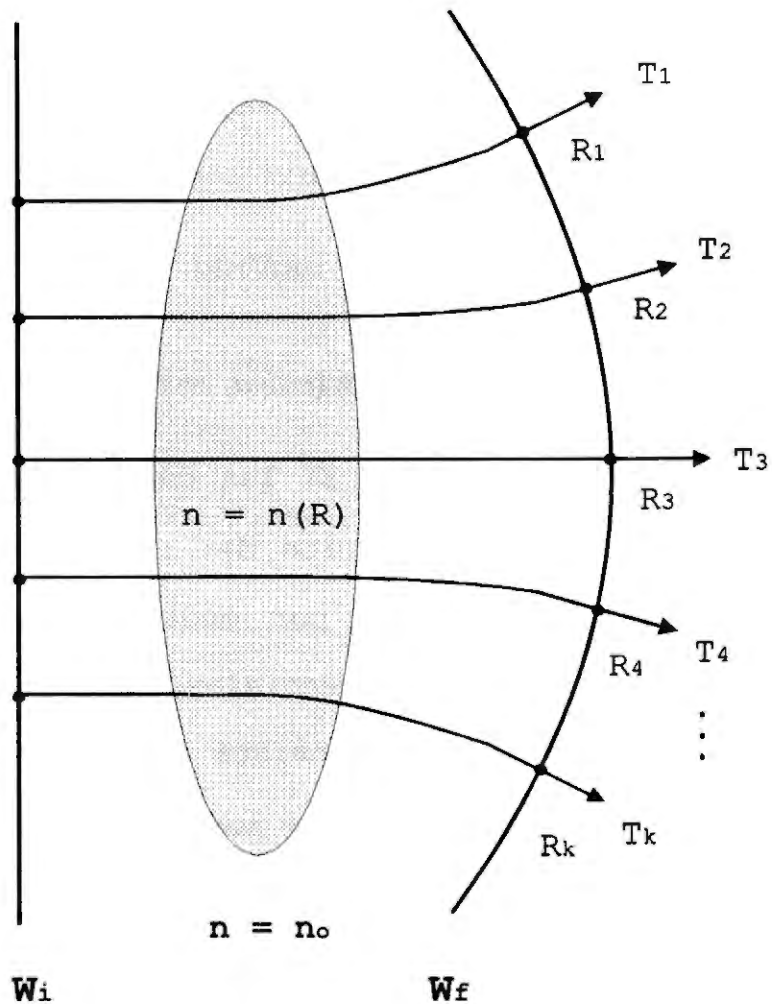


Figura II.11. Propagación de rayos a través de un medio no homogéneo teniendo un frente de onda inicial W_i y final W_f .

II.4.1. Propagación de la luz a través de medios no homogéneos.

La ecuación diferencial que describe la propagación de rayos a través de un medio no homogéneo está definida como [17]

$$\frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{R}) \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{R})$$

donde $\mathbf{R} = (x, y, z)$ es la posición de un punto en el rayo, $n(\mathbf{R})$ es el índice de refracción del medio en el punto \mathbf{R} y ds es la diferencial de la longitud de arco a través del rayo. Definiendo $dt = ds / n$, la ecuación anterior se puede escribir como [15,16]

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = n(\mathbf{R}) \nabla n(\mathbf{R}) \quad (\text{II.12})$$

donde $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = n(\mathbf{R}) \frac{d\mathbf{R}}{ds} = n(\mathbf{R})(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (\text{II.13})$

es la dirección óptica del rayo. Si las condiciones iniciales $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)$ son conocidas, la propagación del rayo puede ser calculado resolviendo la ecuación (II.12) por medio de métodos numéricos estándar para ecuaciones diferenciales [15,16]. La solución numérica de la ecuación (II.12) consiste en una sucesión de puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, los cuales describen la posición y dirección del rayo a través del medio [16]. Conociendo las posiciones y direcciones de un rayo que atravesó el medio, se puede calcular la longitud de camino óptico utilizando la ecuación (I.2). Para el cálculo de la longitud óptica existen algoritmos que utilizan los puntos (\mathbf{R}, \mathbf{T}) del trazo de un rayo [18,19].

II.4.2. Relación entre la información del trazo de rayos y la distribución del camino óptico.

Dentro del régimen de validez de la óptica geométrica [17], la distribución del camino óptico se conoce al trazar varios rayos a través del objeto analizado, desde un plano $Z = 0$ hasta un plano $Z = z_1$. La información de la distribución del camino óptico se puede expresar por medio de la siguiente función vectorial

$$\mathbf{Rr}(u, v) = \{ \mathbf{X}(u, v) \ \mathbf{Y}(u, v) \ \Phi(u, v) \}$$

donde \mathbf{X} , \mathbf{Y} son las coordenadas rectangulares de un punto y Φ es la distribución del camino óptico para las posiciones definidas por (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) . El vector normal a la distribución de camino óptico está definido

$$\mathbf{Nr}(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{Rr}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{Rr}(u, v)}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{Rr}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{Rr}(u, v)}{\partial v} \right|} \quad (\text{II.14})$$

Esta relación implica que [1]

$$\mathbf{Nr} \cdot \frac{\partial \mathbf{Rr}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{Nr} \cdot \frac{\partial \mathbf{Rr}}{\partial v} = 0 \quad (\text{II.15})$$

Dado que el vector normal a la distribución de camino óptico, ecuación (I.2), es paralelo a la dirección de los rayos [17], se puede escribir

$$\mathbf{Nr} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad (\text{II.16})$$

por lo que, si se substituye la ecuación (II.16) en las ecuaciones (II.15), se tendrá que

$$\begin{aligned}
 (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \cdot \frac{\partial \mathbf{Rr}}{\partial u} &= 0 \\
 (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \cdot \frac{\partial \mathbf{Rr}}{\partial v} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.17}$$

esto es, el vector de dirección de los rayos, \mathbf{T} , es normal al plano tangente formado por las derivadas parciales de \mathbf{Rr} con respecto a u y v .

II.4.3. Funcional de costo utilizada para reconstruir la distribución del camino óptico a partir de la información del trazo de rayos.

La relación existente entre la dirección de los rayos y la distribución del camino óptico, expresado en la ecuación (II.17), es la misma relación que hay entre el vector normal y los vectores tangentes a la superficie, ecuación (II.5). Dada esta igualdad, se puede utilizar la funcional propuesta en la ecuación (II.10) para reconstruir la distribución del camino óptico utilizando la información del trazo de rayos, dado que ésta contiene toda la información necesaria.

La información a utilizar por la funcional se obtiene al trazar pocos rayos que cubran la totalidad del objeto a analizar; la información del trazo de rayos se agrupa en matrices definidas como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,j} &= \{ \mathbf{X}_{i,j} \quad \mathbf{Y}_{i,j} \quad \Phi_{i,j} \} \\
 \mathbf{t}_{i,j} &= n_i \{ \mathbf{ca}_{i,j} \quad \mathbf{cb}_{i,j} \quad \mathbf{cg}_{i,j} \}
 \end{aligned}$$

donde $i = 0, 1, \dots, m-1$ y $j = 0, 1, \dots, n-1$ son las coordenadas de la muestra con dimensión $m \times n$ rayos; \mathbf{X} , \mathbf{Y} son las coordenadas

rectangulares de un punto y Φ es la distribución del camino óptico de cada rayo; ca , cb , cg son las direcciones de los rayos y n_0 es el índice de refracción del medio homogéneo. Los términos \mathbf{r} y \mathbf{t} fueron definidos de igual manera que los términos de posición y normal en \mathbf{Q} . Para reconstruir una distribución de mayor dimensión que la obtenida por los rayos trazados, se incrementó la dimensión de la muestra en la misma forma que se hizo para \mathbf{W} en la sección anterior y se mostró en la figura II.5.

Escribiendo la funcional definida en la ecuación (II.10) con los términos del trazo de rayos, se tendrá que

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}) = & \sum_{(k,l) \in \mathbf{L}} \left| \mathbf{r}_{k,l} - \mathbf{r}_{c_{k,l}} \right|^2 \mathbf{S}_{k,l} \\
 & + \sum_{\substack{(k+1,l) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k-1,l)}} \left| \mathbf{t}_{\sigma_1, \sigma_2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{k+1,l} - \mathbf{r}_{k-1,l}}{2} \right|^2 \mathbf{S}_{k,l} + \sum_{\substack{(k,l+1) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l-1)}} \left| \mathbf{t}_{\sigma_1, \sigma_2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{k,l+1} - \mathbf{r}_{k,l-1}}{2} \right|^2 \mathbf{S}_{k,l} \\
 & + \rho \sum_{\substack{(k+1,l) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k-1,l)}} \left| \mathbf{r}_{k+1,l} - 2\mathbf{r}_{k,l} + \mathbf{r}_{k-1,l} \right|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l}) + \rho \sum_{\substack{(k,l+1) \\ (k,l) \in \mathbf{L} \\ (k,l-1)}} \left| \mathbf{r}_{k,l+1} - 2\mathbf{r}_{k,l} + \mathbf{r}_{k,l-1} \right|^2 (1 - \mathbf{S}_{k,l})
 \end{aligned}
 \tag{II.18}$$

donde \mathbf{r} y \mathbf{t} es la información agrupada del trazo de rayos y \mathbf{r} es la distribución del camino óptico a reconstruir con una dimensión $M \times N$. En este caso, \mathbf{S} indica si se utiliza o no la información obtenida del trazo de rayos en el cálculo.

Para probar el desempeño de la funcional propuesta en la simulación de experimentos con la deflectometría de moiré, se realizó la propagación de varios rayos a través de un medio que emula la flama de un mechero y se obtuvo el deflectograma

correspondiente. El esquema utilizado para la deflectometría de moiré fue el mostrado en la figura I.1, donde las rejillas de Ronchi utilizadas fueron de 100 líneas por pulgadas, con una rotación de 1° entre sí, y una separación entre ellas de una distancia de Talbot, utilizando un haz de luz de un láser de HeNe. Los deflectogramas fueron generados utilizando las ecuaciones (I.8) y (I.9). El objeto de fase fue modelado con la siguiente expresión

$$T(x, y, z) = 25 + \frac{225}{1 + \left(\frac{\sqrt{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2}}{0.75} \right)^6} \quad (\text{II.19})$$

donde (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del centro de la flama. La distribución de la temperatura para $Z = 0$ y centrada en el origen se muestra en la figura II.12.

Para calcular el índice de refracción, se utilizó la siguiente relación entre temperatura e índice de refracción válida para un láser HeNe en el experimento [20]

$$n = 1 + \frac{0.29201 \times 10^{-3}}{1 + (\text{Temperatura } ^\circ\text{C}) \cdot 0.368184 \times 10^{-2}}$$

La flama fue centrada en las coordenadas $(0,0,15)$ y el trazo de los rayos se inició en el plano $Z = 0$ con dirección paralela al eje Z , hasta el plano $Z = 30$. Se trazaron dos grupos de rayos linealmente espaciados en un área de 5×5 , donde las dimensiones de longitud empleadas en la simulación fueron centímetros. Los tiempos empleados para los dos grupos de rayos se muestran en la tabla II.3. Estos tiempos fueron obtenidos en una computadora personal Pentium™ a 133 Mhz, utilizando los algoritmos propuestos

en las referencias 15, 17 y 18, con un incremento temporal de $\Delta t = 0.01$. El deflectograma obtenido para el trazo de 81×81 rayos se muestra en la figura II.13.

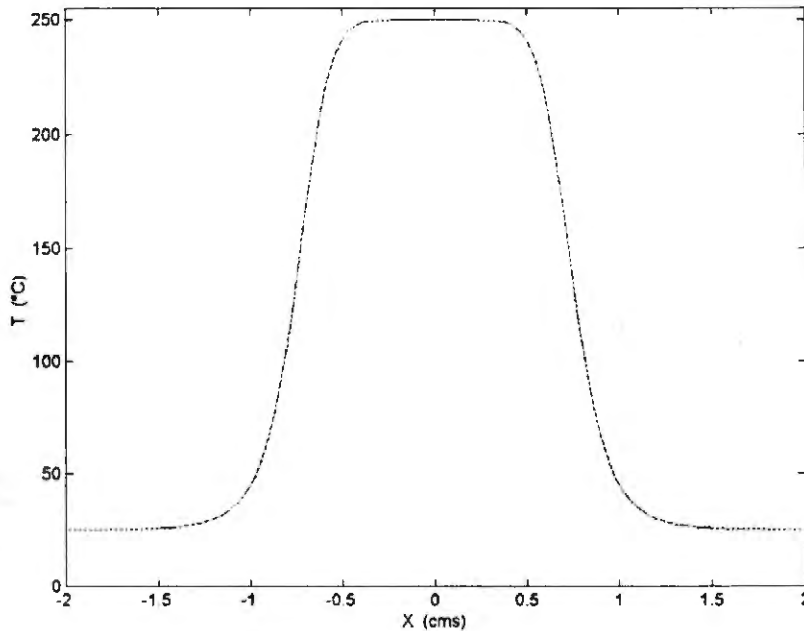


Figura II.12. Distribución de temperatura definida por la ecuación (II.19) para $Z = 0$ y centrada en el origen.

La información producida por el trazo de 9×9 rayos se utilizó para reconstruir un deflectograma con las mismas dimensiones que tiene el deflectograma mostrado en la figura II.13. Para esto, se utilizó valores $q_1 = q_2 = 9$ para obtener la resolución deseada y se reconstruyó utilizando la funcional de la ecuación (II.18), con $\rho = 1$, y fue minimizada resolviendo por medio del algoritmo de Gauss-Seidel [11]. El tiempo empleado por el algoritmo Gauss-Seidel fue 1395.67 segundos en la misma computadora y el MSE

obtenido en la reconstrucción 7.7965×10^{-8} . El deflectograma producido por la reconstrucción se muestra en la figura II.14.

Tabla II.3. Tiempos empleados en el trazo de rayos.

Número de rayos trazados	Tiempo (seg.)
81 x 81	15696.423
9 x 9	193.78

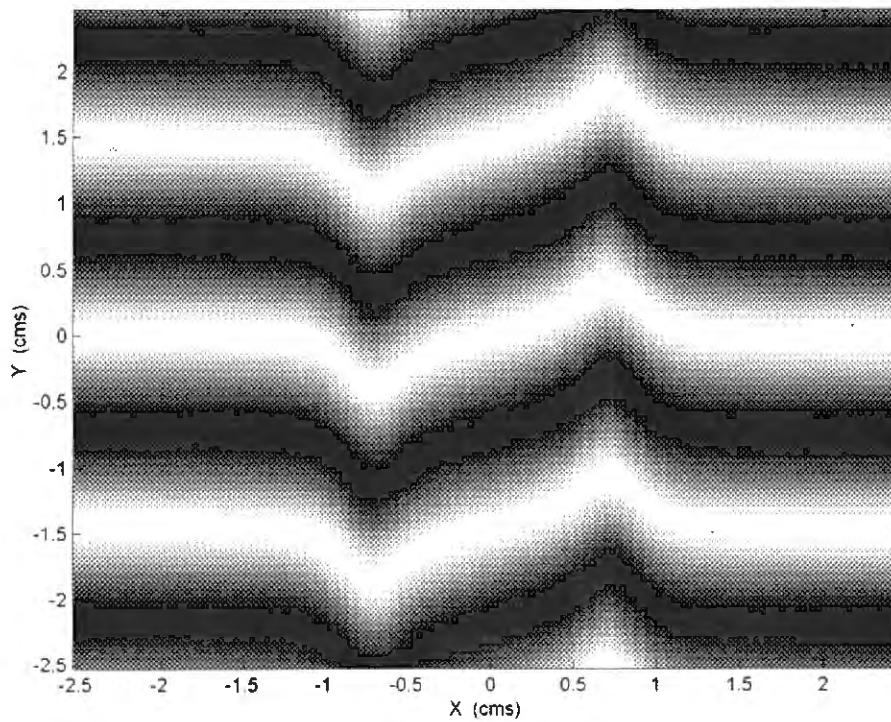


Figura II.13. Frente de onda reconstruido con el trazo de 81 x 81 rayos.

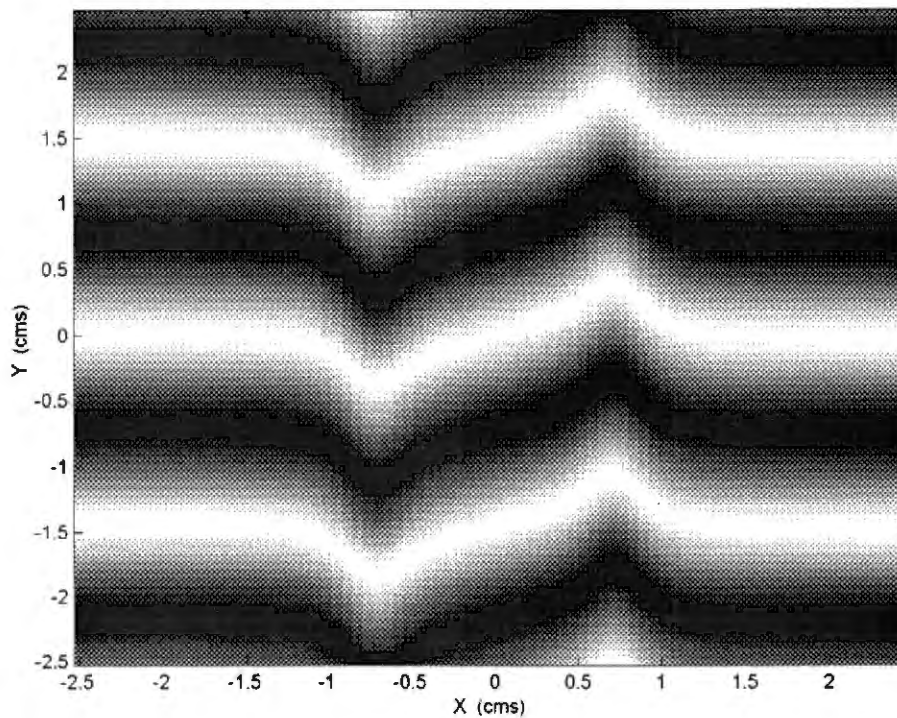


Figura II.14. Frente de onda reconstruido con la información del trazo de 9×9 rayos y la ecuación (II.18).

II.5. Conclusiones.

En este capítulo se propuso una funcional de costo, ecuación (II.10), para reconstruir superficies y la distribución del camino óptico con gran exactitud y con un gran ahorro de tiempo. Como se vio en los ejemplos expuestos en la sección II.3, el error obtenido por la funcional propuesta es menor al error obtenido por los métodos estándar de interpolación. Esto se puede apreciar claramente al comparar los resultados mostrados en las tablas II.1 y II.2. En la reconstrucción realizada con la función f_2 se muestra la capacidad de la funcional para reconstruir superficies complicadas con un mínimo de error.

El gran desempeño de la funcional se debe al término utilizado para relacionar los datos de la superficie y el vector normal a esta (ecuación (II.8)). Este término relaciona el vector normal y las derivadas tangentes de la superficie, obligando a los datos a interpolar a seguir la forma establecida por el vector normal. Además, esta funcional incluye un término para regularizar el problema de la interpolación, utilizando la información conocida de una superficie como es la suavidad y continuidad existente, definida por la ecuación (II.2). Este término de regularización obliga a los datos calculados a seguir la forma del plano tangente y agruparse cerca de las pendientes; con esto, se modela mejor la forma de la superficie.

Una aplicación de la funcional propuesta es la reconstrucción de la distribución del camino óptico, a partir de la información del trazo de rayos, tal como se describe en la sección II.4. En esta aplicación, se relacionó la información de la distribución del camino óptico con la información obtenida al trazar rayos a través de un medio inhomogéneo. Se demostró el uso de la funcional propuesta al reconstruir la distribución del camino óptico cuando se propagó un haz de luz a través de una flama. En esta simulación muestra el tiempo ahorrado al propagar pocos rayos y realizar la reconstrucción con gran exactitud a partir de la información obtenida.

Hasta donde se pudo investigar, este tipo de algoritmos para reconstruir superficies y frentes de onda no se encuentran en la literatura; generalmente se hacen desarrollos analíticos de

superficies bien definidas y en dos dimensiones lo que facilita el trabajo.

II.6. Referencias.

1. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*, (Academic Press, New York and London, 1972), cap. IX & XI.
2. G. A. Korn & T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*, (McGraw-Hill, New York, 1968), sec. 17.3.
3. C. Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, (Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1995), cap. 8.
4. R. N. Bracewell, *Two-Dimensional Imaging*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995), cap. 3 y 7.
5. A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995), sec. 8.7 y 8.16.
6. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), cap. 3.
7. R. Legarda-Sáenz, M. Rivera, R. Rodriguez-Vera, "Regularized quadratic cost functional for wavefront interpolation," bajo revisión en Opt. Comm.
8. D. Terzopoulos, "The Computation of Visible-Surface Representation," IEEE Trans. on Pattern Anal. Mach. Intell. PAMI-10, 417 - 438 (1988).

9. A. N. Thikonov, "Solution of incorrect formulated problems and regularization method," *Sov. Math. Dokl.* 4, 1035 - 1038 (1963).
10. J. L. Marroquin and M. Rivera, "Quadratic regularization functionals for phase unwrapping," *J. Opt. Soc. Am. A*, 12, 2393 - 2400 (1995).
11. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, (The John Hopkins University Press, Baltimore, 1996), cap. 10.
12. M. Bertero and P. Boccaci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1998), sec. 5.6.
13. J. Martin, "Simulation of Wave Propagation in Random Medium: Theory and Applications," in *Wave Propagation in Random Medium (Scintillation)*, V. I. Tatarskii, A. Ishimaru, V. U. Zavorotny, eds., (SPIE Press and Institute of Physics Publishing, Seattle, 1992), p. 463 - 486.
14. B. E. A. Saleh & M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, (Wiley, New York, 1991), sec. 2.3.
15. B. D. Stone and G. W. Forbes, "Differential ray tracing in inhomogeneous medium," *J. Opt. Soc. Am. A* 14, 2824 - 2836 (1997).
16. A. Sharma, D. Vizia Kumar and A. K. Ghatak, "Tracing rays through graded-index medium: a new method," *Appl. Opt.* 21, 984 - 987 (1982).
17. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon Press, New York, 1993), sec. 3.2.1.

18. A. Sharma, "Computing optical path length in gradient-index media: a fast and accurate method," *Applied Optics* 24, 4367 - 4370 (1985).
19. R. Legarda S., Ramón Rodríguez V., Manuel Servín G., "Reconstrucción del frente de onda a partir de trazo de rayos". III Reunión Iberoamericana de óptica. Cartagena de Indias, Colombia. 1998. Ediciones electrónicas especiales (ISBN 958-9205-32-1).
20. C. M. Vest, *Holographic Interferometry*, (Wiley, New York, 1979), sec. 6.4.3.

CAPÍTULO III. INTEGRACIÓN DE LOS CAMPOS DE GRADIENTE OBTENIDOS EN LA DEFLECTOMETRÍA DE MOIRÉ.

Con base en el modelo general de la deflectometría de moiré en modo finito, en este capítulo se propone una técnica para integrar la información obtenida de múltiples fases y obtener una buena estimación de las diferencias de camino óptico, cuando se utiliza información altamente ruidosa. Se probó este método con datos sintéticos y experimentales.

III.1. Análisis de los patrones de franjas generados por la deflectometría de moiré.

En la deflectometría de moiré usualmente se utilizan rejillas de Ronchi. Estas rejillas se pueden definir en dos formas: por medio de ecuaciones indiciales [1], ecuación (I.6); o por medio de series de Fourier de la siguiente manera [2]

$$G(\mathbf{r}) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left[\frac{2\pi}{p} m \mathbf{r} \cdot \mathbf{V}\right]$$

con $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\mathbf{V} = (\cos \phi, \sin \phi)$, donde a_0, a_m son los coeficientes de Fourier, \mathbf{r} es la posición, \mathbf{V} es el vector de dirección normal a las líneas de la rejilla con un ángulo de rotación ϕ con respecto a \mathbf{x} y p es el período de la rejilla.

Tal como se explicó en el capítulo I, los patrones de franjas (deflectogramas) obtenidos de la deflectometría de moiré son el

producto de la superposición de dos rejillas, como la definida anteriormente. Las rejillas utilizadas en el arreglo de la deflectometría de moiré, mostradas en la figura I.1, están definidas como

$$G_1(\mathbf{r}) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left[\frac{2\pi}{p} m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 + D\nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_1) \right]$$

$$G_2(\mathbf{r}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left[\frac{2\pi}{p} n \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_2 \right]$$

con $\mathbf{v}_1 = (\cos \phi, \sin \phi)$, $\mathbf{v}_2 = (\cos (\phi+\theta), \sin (\phi+\theta))$, y $\nabla\Phi = (W_x, W_y)$, donde D es la distancia entre rejillas, θ es el ángulo entre las rejillas, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son los vectores de dirección de cada rejilla, y W_x , W_y son los gradientes del camino óptico Φ , tal como se definieron en las primeras ecuaciones del capítulo I (ec. (I.3)-(I.6)). La transmisión resultante de la superposición de las rejillas está dada por

$$T(\mathbf{r}) = a_0 + a_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left[\frac{2\pi}{p} m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 + D\nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_1) \right] + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left[\frac{2\pi}{p} n \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_2 \right] \quad (\text{III.1})$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_n \cos \left[\frac{2\pi}{p} m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 + D\nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{p} n \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_2 \right]$$

En la expresión anterior, los términos de baja frecuencia generan las denominadas franjas de moiré en modo finito. Bajo cualquiera de las siguientes condiciones [3]:

- Baja resolución del sistema de detección,
- Procesamiento apropiado de las franjas (filtraje),
- Traslación de la rejilla durante la captura de la imagen,

los términos de alta frecuencia son eliminados de la ecuación (III.1) y el modelo de las franjas de moiré es semejante al modelo utilizado en la interferometría, esto es

$$I_{\text{moiré}}(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \cos \left[\frac{2\pi}{p} (\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + D\nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_1) \right] \quad (\text{III.2})$$

donde a es la iluminación de fondo, b es la modulación de las franjas, y el argumento del coseno es el término de fase. El modelo de franjas mostrado en la ecuación (III.2) se puede procesar con relativa facilidad, ya que existe una gran cantidad de técnicas para el análisis de franjas en la literatura [3,4].

Comúnmente, el modelo de las franjas en la ecuación (III.2) no se utiliza; en su lugar, se utiliza un modelo aproximado [1,2]. Este modelo se basa en las ecuaciones (I.8) y (I.10), esto es

$$I_{\text{moiré}}(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \cos \left[\frac{2\pi}{p} (\mathbf{x} \theta + D \phi_y) \right] \quad (\text{III.3})$$

donde el valor de ϕ_y es una aproximación de \mathbf{W}_y , tal como se explicó en el primer capítulo. Como se puede apreciar, este modelo es muy parecido a los modelos de la prueba de Ronchi y la interferometría de desplazamiento [4]. Debido a este parecido, el modelo aproximado es ampliamente utilizado en la deflectometría de moiré, ya que se puede obtener directamente el gradiente aproximado para integrarlo con las técnicas aplicadas a la prueba de Ronchi y la interferometría de desplazamiento [5-7].

III.2. Funcional de costo para integrar campos de gradiente obtenidos de los deflectogramas [8].

Como se mostró en la sección anterior, los deflectogramas tienen modelos similares a las franjas de interferometría y, por tanto, pueden ser procesados por técnicas estándar de análisis de franjas [3,4]. La fase desenvuelta, obtenida de los deflectogramas modelados por la ecuación (III.2), tiene la siguiente forma

$$\Theta = \frac{2\pi}{p} D\nabla\Phi \cdot \mathbf{V}_1 + n$$

Como $\nabla\Phi \cdot \mathbf{V}_1 = w_x \cos\phi + w_y \sin\phi$, se obtiene

$$\Theta = \frac{2\pi}{p} D(w_x \cos\phi + w_y \sin\phi) + n \quad (\text{III.4})$$

donde los términos de la ecuación fueron definidos en la sección anterior y n es el ruido. Como se aprecia en la ecuación (III.4), la fase obtenida de los deflectogramas es el gradiente del camino óptico, pesado por la dirección de la rejilla 1. Esto equivale a la derivada direccional de \mathbf{W} en la dirección de \mathbf{V}_1 .

Como se mencionó en el primer capítulo, es necesario contar con 2 deflectogramas con distinta orientación para conocer el campo completo de gradientes [9]. Una vez obtenido el campo de gradiente, el siguiente paso es su integración. Usualmente, las técnicas de integración utilizan la información de 2 fases con ϕ igual a 0° y 90° [5-7]. Esto sería equivalente a tener

$$\Theta_{\gamma^*} = \frac{2\pi}{p} D \mathbf{W}_x + \mathbf{n}_{\gamma^*}$$

$$\Theta_{\gamma_0^*} = \frac{2\pi}{p} D \mathbf{W}_y + \mathbf{n}_{\gamma_0^*}$$

Utilizando la información de las fases anteriores, se puede estimar el valor de la diferencia de camino óptico utilizando mínimos cuadrados, definidos como [5-7]

$$U(\hat{\mathbf{W}}) = \sum_{\substack{(i,j) \\ (i+1,j) \in \mathbf{L}}} \left[(\hat{W}_{i+1,j} - \hat{W}_{i,j}) - \frac{p}{2\pi D} (\Theta_{\gamma_0^*})_{i,j} \right]^2$$

(III.5)

$$+ \sum_{\substack{(i,j) \\ (i,j+1) \in \mathbf{L}}} \left[(\hat{W}_{i,j+1} - \hat{W}_{i,j}) - \frac{p}{2\pi D} (\Theta_{\gamma^*})_{i,j} \right]^2$$

donde $\hat{\mathbf{W}}$ es la estimación de la diferencia de camino óptico descrita en la sección I.3 y \mathbf{L} es la región de validez de los valores discretos de la fase para $i = 0, 1, \dots, m-1$ y $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Como se puede apreciar en la ecuación (III.5), el buen desempeño de esta funcional está directamente relacionado con el nivel de ruido que exista en las fases calculadas. Cuando el SNR (siglas en inglés de Signal to Noise Ratio) es bajo, los resultados de la integración serán excesivamente ruidosos, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Se utilizó la superficie definida en la ecuación (II.4) y que se muestra en la figura II.1. A esta superficie se le sumó ruido gaussiano tal que el SNR = -3 db, y se calculó sus gradientes. Al integrar los gradientes con la funcional de la ecuación (III.5), el resultado que se obtiene es totalmente ruidoso, como se puede apreciar en la figura III.1.

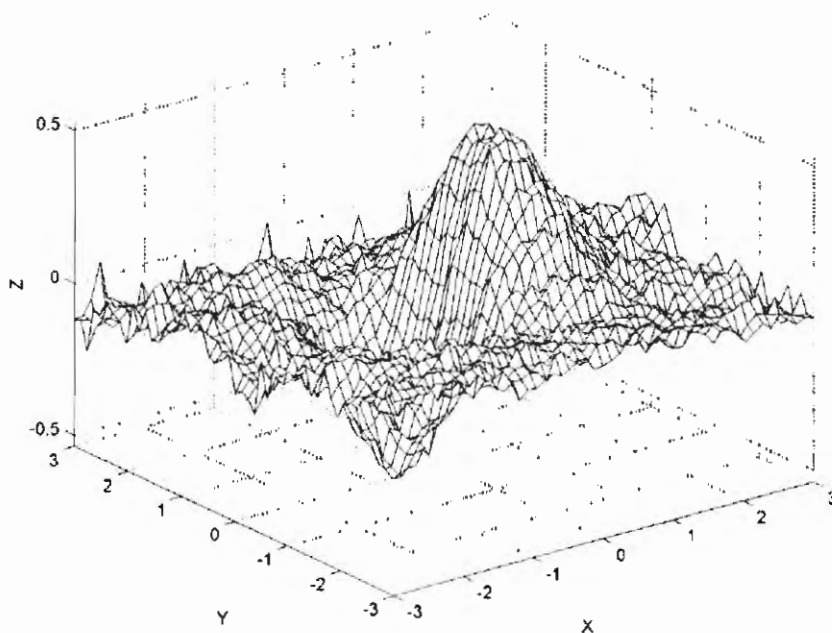


Figura III.1. Resultado de integrar gradientes ruidosos utilizando la ecuación (III.5).

Para mejorar la estimación de \hat{W} , cuando los niveles de ruido son grandes, se propuso utilizar la información de un número K de fases a diferentes direcciones [8]. Esta funcional de costo fue inspirada en un trabajo recientemente publicado, donde se utilizan un gran número de fases para obtener un desenvolvimiento robusto al ruido [10].

En este trabajo de tesis, la fase se considera que está definida como

$$\Theta^k = \frac{2\pi}{p} D (\mathbf{w}_x \cos \phi^k + \mathbf{w}_y \sin \phi^k) + n^k$$

para $k = 1, \dots, K$. La funcional de costo propuesta está definida como [8]

$$U_m(\hat{W}) = \sum_k \sum_{\substack{(i,j) \\ (i+1,j) \in L \\ (i,j+1)}} \left[(\hat{W}_{i+1,j} - \hat{W}_{i,j}) \cos \phi^k + (\hat{W}_{i,j+1} - \hat{W}_{i,j}) \sin \phi^k - \frac{P}{2\pi D} (\Theta^k)_{i,j} \right]^2 \quad (\text{III.6})$$

donde Θ^k es la fase para un ángulo ϕ^k dado. Se puede ver para el caso $K = 2$ con $\phi^1 = 0^\circ$, $\phi^2 = 90^\circ$, la funcional propuesta es la misma funcional de la ecuación (III.5).

La mejor estimación será aquella que minimice la funcional de la ecuación (III.6). La minimización de esta ecuación está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m(\hat{W})}{\partial \hat{W}_{i,j}} &= 0 \\ &= ((\hat{W}_{i,j} - \hat{W}_{i-1,j})C_1 + (\hat{W}_{i-1,j+1} - \hat{W}_{i-1,j})C_2 - A_{i-1,j}) \\ &\quad - ((\hat{W}_{i+1,j} - \hat{W}_{i,j})C_1 + C_2) + (\hat{W}_{i,j+1} - \hat{W}_{i,j})C_2 + C_3 - A_{i,j} - B_{i,j}) \\ &\quad + ((\hat{W}_{i+1,j-1} - \hat{W}_{i,j-1})C_2 + (\hat{W}_{i,j} - \hat{W}_{i,j-1})C_3 - B_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_k (\cos \phi^k)^2, & C_2 &= \sum_k (\cos \phi^k \sin \phi^k), & C_3 &= \sum_k (\sin \phi^k)^2 \\ A_{i,j} &= \sum_k (\cos \phi^k \Theta_{i,j}^k) & B_{i,j} &= \sum_k (\sin \phi^k \Theta_{i,j}^k) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Como se puede apreciar, los términos descritos en la ecuación (III.8) permiten acumular la información de las fases utilizadas en la estimación en un paso previo al proceso de minimización. Esto hace que el proceso de minimización de la ecuación (III.7) no dependa del número de fases utilizadas en los experimentos y pueda ser solucionada por técnicas muy conocidas en la literatura [11]. Si se observan los términos de la ecuación (III.8), se puede ver que la funcional actúa como un promedio pesado de los gradientes de

cada fase, donde primero se calcula los componentes de los gradientes y después se promedia con el peso de la dirección utilizada.

Para mostrar la eficiencia de la funcional propuesta, se utilizó la misma superficie del ejemplo anterior. Se le añadió ruido con las mismas características del ejemplo mencionado y se calcularon varias derivadas direccionales dentro del rango de 0° y 150°. Se agrupó la información en las variables de la ecuación (III.8) y se integró utilizando la ecuación (III.7). Para resolver esta ecuación, se utilizó una versión de multi-malla del gradiente conjugado [11]. El resultado de utilizar varias derivadas direccionales se puede observar claramente en las siguientes figuras. El nivel de ruido disminuye conforme se utilizan más derivadas en la estimación, tal como se aprecia en la figura III.6. El comportamiento del error en la integración es similar al error esperado cuando se estima la media con muestras finitas: El error de estimación se reduce conforme se aumenta el número de muestras; este comportamiento se expresa como [12]

$$\text{error} = \frac{\sigma}{\sqrt{K}}$$

donde σ es la desviación del experimento y K el número de muestras. Los errores estimados y obtenidos se muestran en la figura III.6.

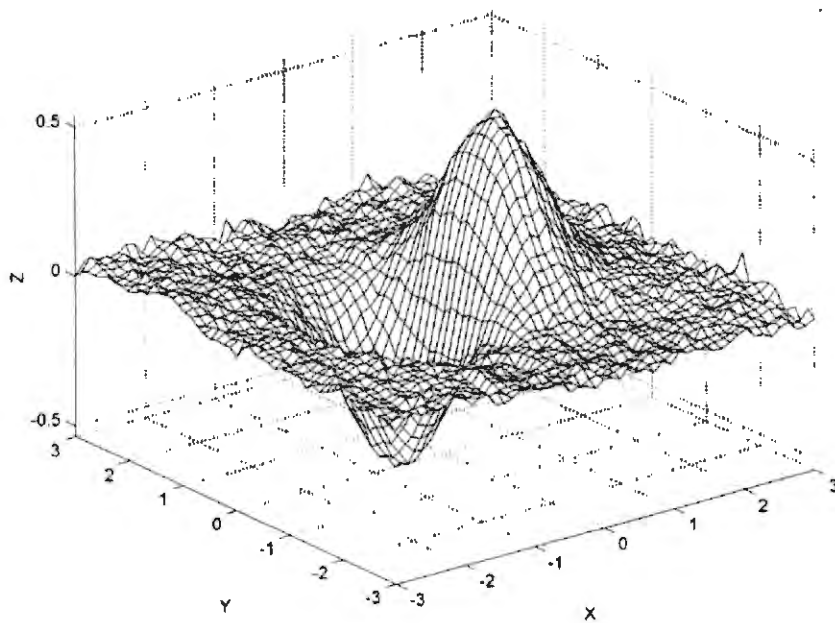


Figura III.2. Resultado de integrar gradientes ruidosos utilizando la ecuación (III.6) para $K = 4$.

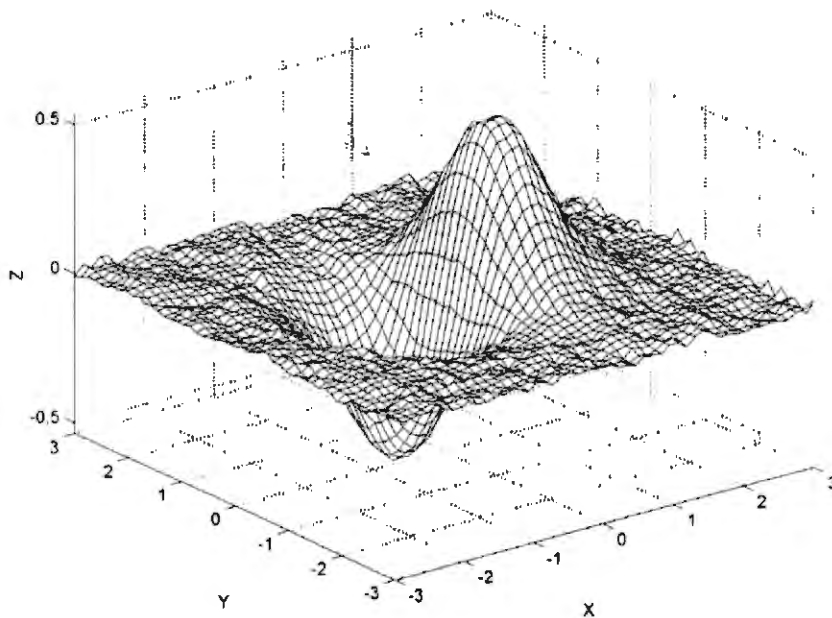


Figura III.3. Resultado de integrar gradientes ruidosos utilizando la ecuación (III.6) para $K = 8$.

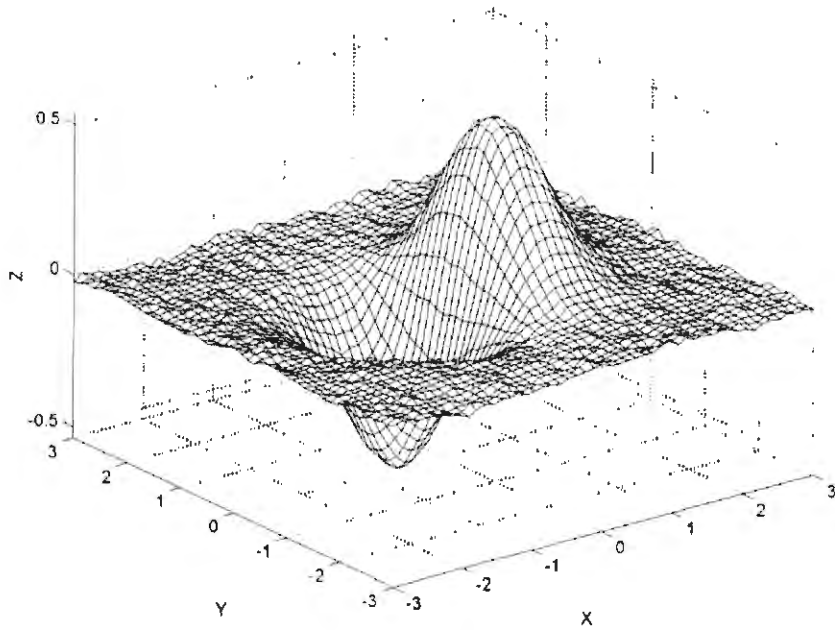


Figura III.4. Resultado de integrar gradientes ruidosos utilizando la ecuación (III.6) para $K = 16$.

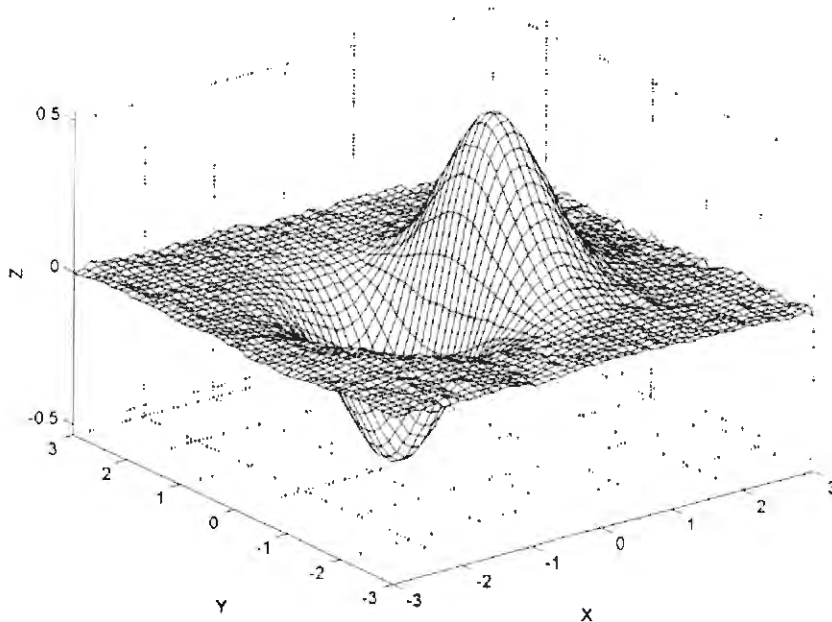


Figura III.5. Resultado de integrar gradientes ruidosos utilizando la ecuación (III.6) para $K = 32$.

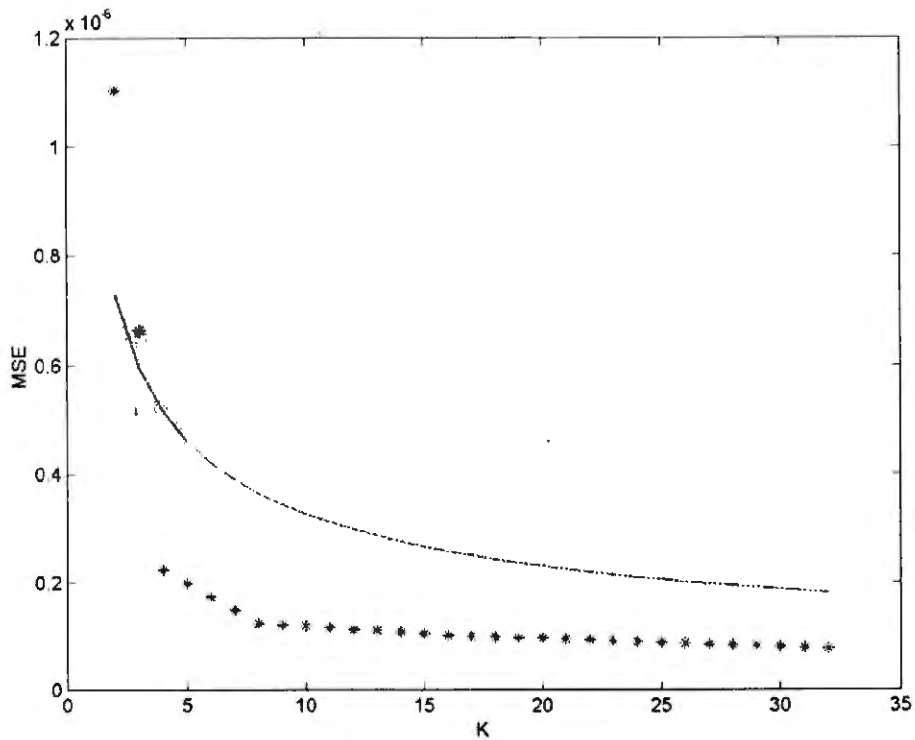


Figura III.6. Comportamiento del MSE para diferentes valores de K:

(*) valor obtenido, (-) valor esperado.

III.3. Reconstrucción de una superficie asimétrica utilizando la funcional de costo propuesta.

Una aplicación de la funcional propuesta en la ecuación (III.6) es la estimación de diferencias de camino óptico a partir de información experimental, la cual generalmente es ruidosa. Para mostrar la eficiencia de la funcional propuesta, se probó reconstruir la superficie de una lente progresiva [13,14], a partir de la información obtenida de la deflectometría de moiré. Estas lentes se caracterizan por tener superficies esféricas sin ninguna

clase de simetría. Para medir este tipo de lentes generalmente se utiliza la deflectometría de moiré [15,16].

La lente progresiva utilizada en los experimentos fue una Varilux PI/+1.25 de Essilor International [17]. El arreglo experimental empleado es el mostrado en la figura I.1, donde se utilizaron rejillas de 200 líneas por pulgada con una distancia $D = 50$ mm entre ellas. Las rejillas y la lente fueron iluminadas con un haz de luz colimado de He-Ne ($0.632 \mu\text{m}$), con 47 mm de diámetro. Ejemplos de los deflectogramas obtenidos en el experimento se muestran en las figuras III.7 y III.8.

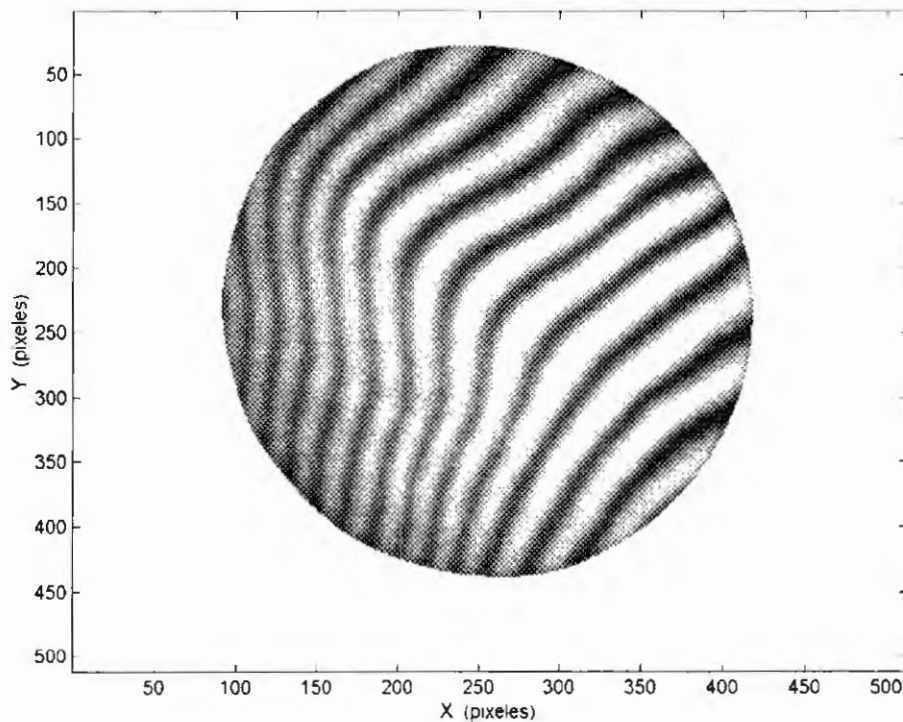


Figura III.7. Deflectograma de la lente progresiva obtenido para $\phi = 48^\circ$.

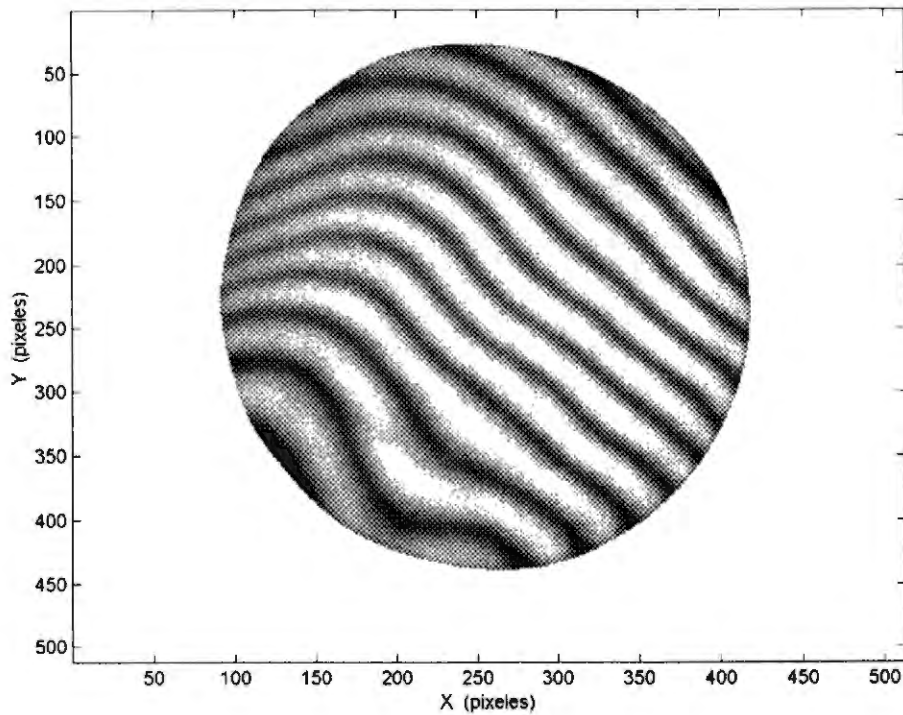


Figura III.8. Deflectograma de la lente progresiva obtenido para $\phi = 144^\circ$.

Para obtener la información de fase de los deflectogramas obtenidos en los experimentos, se aplicaron técnicas estándar de análisis de franjas [3,4]. Para la demodulación de las franjas se utilizó una variante del método de Fourier [18], y un algoritmo de seguimiento de ruta para el desenvolvimiento [19]. Algunos resultados del procesamiento de las franjas se muestran en las figuras III.9 y III.10. Estas figuras muestran resultados típicos del procesamiento de los deflectogramas del experimento. Como se puede observar, existe regiones con inconsistencias que generan ruido en las fases desenvueltas.

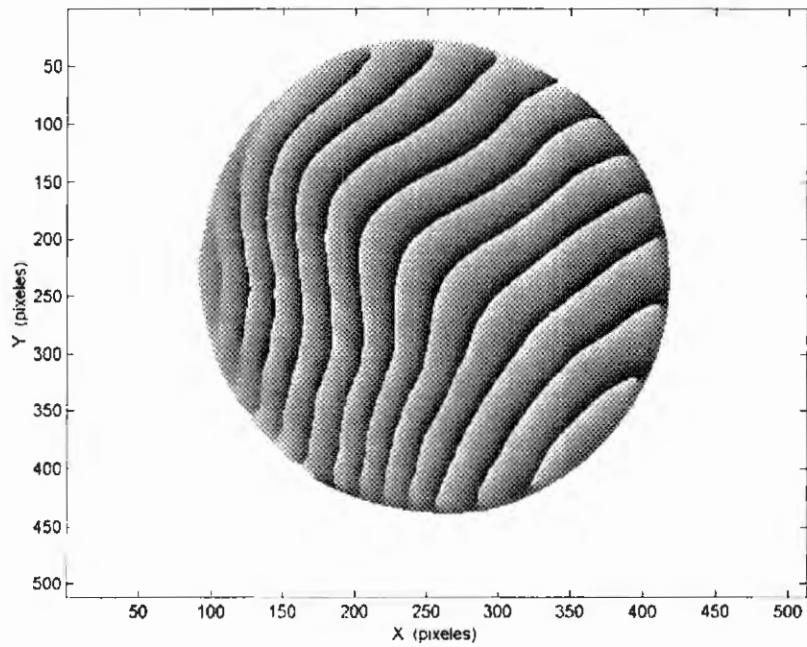


Figura III.9. Fase envuelta del deflectograma de la figura III.7.

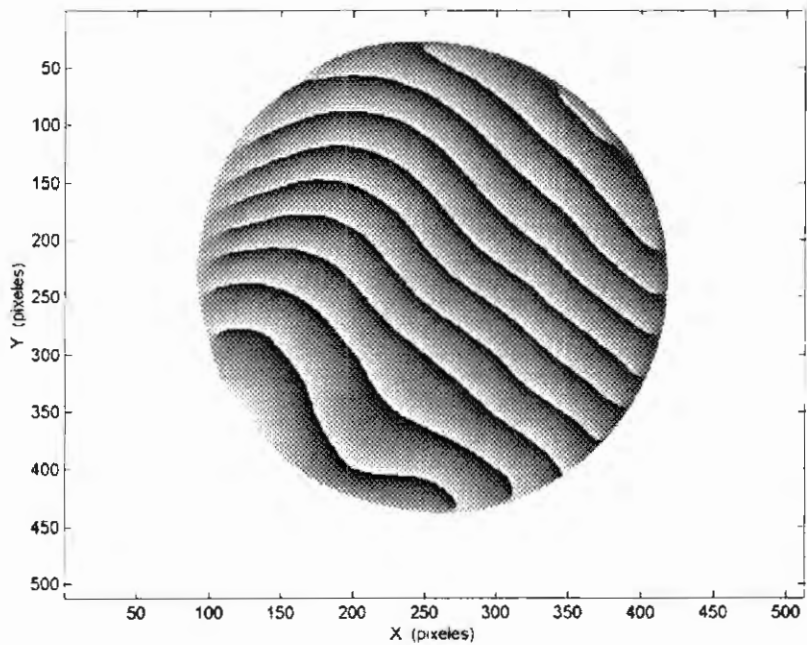


Figura III.10. Fase envuelta del deflectograma de la figura III.8.

Para estimar la superficie de la lente por medio de la ecuación (III.6), se utilizaron varias fases cuyos valores de rotación de la primera rejilla estuvieron en el rango de $0^\circ \leq \phi < 180^\circ$. Estos valores se agruparon en los términos de la ecuación (III.8) y se minimizó la ecuación (III.7) con el mismo algoritmo que se mencionó en el ejemplo anterior. El tiempo empleado para obtener la estimación fue alrededor de 150 segundos en una computadora personal Pentium™ a 133 Mhz. Los resultados de las diferentes estimaciones se muestran en las figuras III.11 a la III.13.

Debido a que no se pudo realizar una medición de la superficie de la lente para comparar los resultados obtenidos, se tuvo que estimar la calidad de los resultados obtenidos. Dado que no se conoce la superficie real y tampoco el ruido existente, queda únicamente probar que tan "buena" o "mala" fue cada estimación por medio de una prueba no paramétrica [20]. Este tipo de pruebas se utilizan cuando no se cuentan con una medición real, no se conoce la distribución del ruido y se tienen pocas muestras. Por medio de la prueba del signo, se calculó el porcentaje de pixeles "buenos" de cada estimación. Los resultados obtenidos de la prueba del signo se muestran en la tabla III.1.

Como se puede apreciar en los resultados de la prueba del signo, conforme se utilizan un mayor número de derivadas direccionales, el número de pixeles "buenos" aumenta. Además, la estimación de la superficie de la lente, conforme se utilizan mas

derivadas en la integración, se aproxima a la forma esperada de la lente progresiva [13,14,17].

En el caso de la integración con solo 0° y 90° (figura III.11), se obtiene una buena estimación de la superficie; sin embargo, los detalles finos de la superficie no se obtienen. Esto se puede apreciar especialmente en la zona de visión cercana, donde las curvas de nivel no son suaves y es un área pequeña en comparación al diseño. También se puede apreciar lo angosto y torcido de la zona de visión media [14,17]. Estos errores de baja frecuencia son debido a los errores en la demodulación en las franjas y los errores en la rotación de las rejillas, ya que los instrumentos utilizados en el experimento para rotar las rejillas son de mala calidad.

Tabla III.1. Porcentaje de pixeles "buenos" para diferentes estimaciones.

Direcciones utilizadas. (número muestras)	Porcentaje de pixeles "buenos" %
0, 90 (2)	28.6252
0, 60, 120 (3)	71.2400
0, 48, 90, 132 (4)	99.5109
0, 30, 60, 90, 120, 150 (6)	99.8746
0, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168 (8)	99.9886

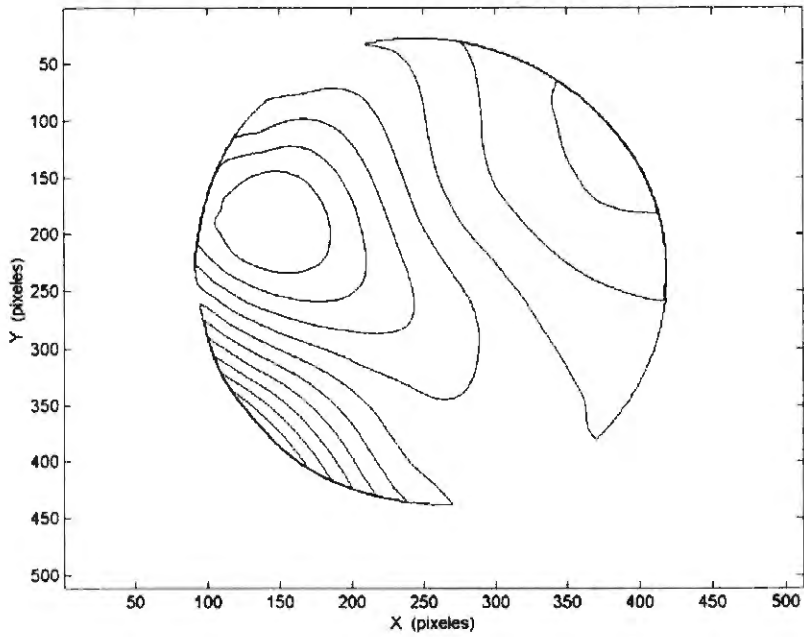


Figura III.11. Estimación de la superficie utilizando la ecuación (III.6) para ϕ igual a 0° y 90° ($K = 2$).

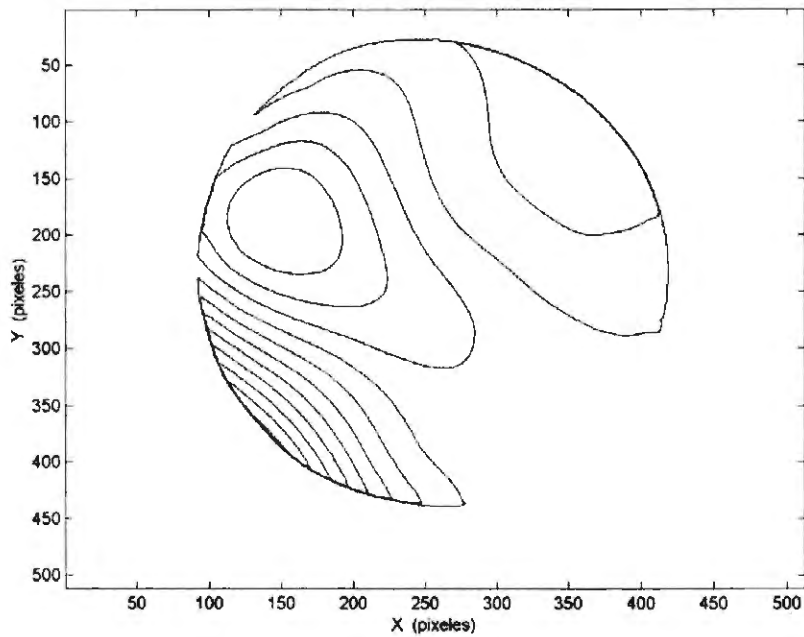


Figura III.12. Estimación de la superficie utilizando la ecuación (III.6) para ϕ de 0° a 135° con incrementos de 45° ($K = 4$).

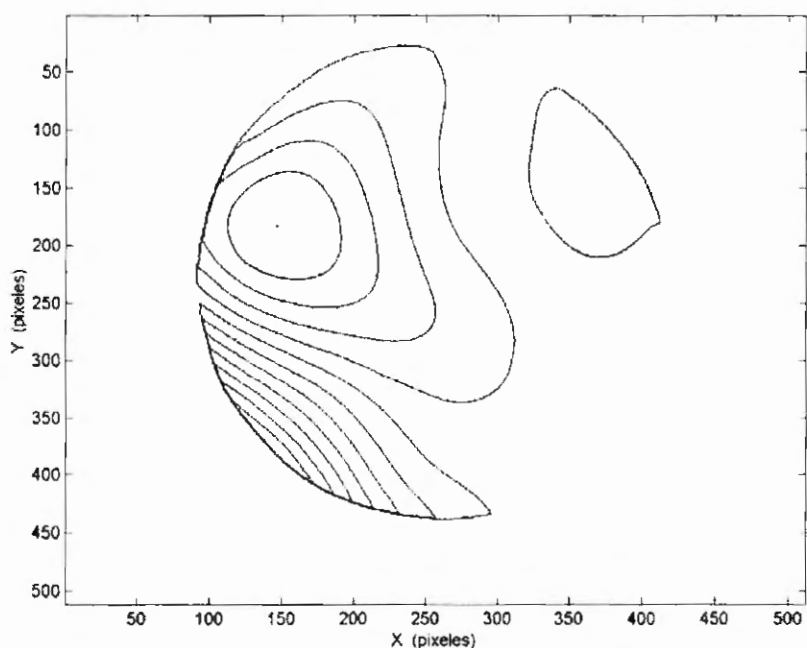


Figura III.13. Estimación de la superficie utilizando la ecuación (III.6) para ϕ de 0° a 168° con incrementos de 24° ($K = 8$).

III.4. Conclusiones.

En este capítulo se propuso una funcional de costo, ecuación (III.6), para integrar la información obtenida de la deflectometría de moiré con un buen desempeño. Esta funcional está planteada de tal manera que es independiente del número de fases utilizadas, lo que permite acumular la información en etapas previas a la integración, como podría ser durante el experimento. La estimación de las diferencias de camino óptico se realiza con algoritmos que son ampliamente conocidos en la literatura y han sido optimizaciones para reducir el tiempo de procesamiento.

El buen desempeño de la funcional propuesta en la ecuación (III.6) está directamente relacionado con el número de derivadas

direccionales utilizadas. Conforme aumenta el número de derivadas, los niveles de ruido disminuyen, como se puede apreciar en los ejemplos de la sección III.2. Este comportamiento se demostró con datos experimentales ruidosos, donde se reconstruyó la superficie de una lente progresiva. La estimación de la superficie, conforme se utilizaron más fases en la integración, fue cada vez más similar a las características de su diseño [17].

III.5. Referencias.

1. O. Kafri & I. Glatt, *The Physics of Moiré Metrology*, (Wiley, New York, 1990), cap. 6.
2. K. Patorski, *Handbook of the Moiré Fringe Technique*, (Elsevier, Amsterdam, 1993), cap. 1.
3. Ref. 2, cap. 13.
4. D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, (Marcel Dekker Inc, New York, 1998).
5. D. L. Fried, "Least-squares fitting of wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurement," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370 - 375 (1977).
6. R. H. Hudgin, "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 375 - 378 (1977).
7. Ref. 4, cap. 10.
8. R. Legarda-Sáenz, M. Rivera, R. Rodriguez-Vera, Gerardo Trujillo-Schiaffino, "Robust wavefront estimation procedure from

multiple directional derivatives," aceptado para publicación en Optics Letters.

9. R. Legarda-Sáenz, R. Rodríguez-Vera, M. Rivera, "Nonparaxial method for computing the gradient field of a wavefront using moiré deflectometry," *Opt. Comm.* **160**, 214 - 218 (1999).
10. M. Rivera, J. L. Marroquín, S. Botello, M. Servín, "Robust Spatiotemporal Quadrature Filter for Multiphase Stepping," *App. Opt.* **39**, 284 - 292 (2000).
11. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), cap. 10.
12. B. Roy Frieden, *Probability, Statistical Optics, and Data Testing. A Problem Solving Approach*. (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983), sec. 9.3.
13. B. Bourdoncle, J. P. Chauveau, J. L. Mercier, "Traps in displaying optical performances of a progressive-addition lens," *App. Opt.* **31**, 3586 - 3593 (1992).
14. C. W. Fowler, "Method for the design and simulation of progressive addition spectacle lenses," *App. Opt.* **32**, 4144 - 4146 (1993).
15. H. Canabal, J. A. Quiroga, E. Bernabeu, "Improved phase-shifting method for automatic processing of moiré deflectograms," *App. Opt.* **37**, 6227 - 6233 (1998).

16. J. A. Quiroga, D. Crespo, E. Bernabeu, "Fourier transform method for automatic processing of moiré deflectograms," *Opt. Eng.* **38**, 974 - 982 (1999).
17. Essilor International, "Progressive Multifocal Ophthalmic Lens," U. S. Patent 5,272,495 (Dec. 21,1993).
18. J. B. Liu, P. D. Ronney, "Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis," *App. Opt.* **36**, 6231 - 6241 (1997).
19. D. C. Ghiglia, M. D. Pritt, *Two-Dimensional Phase Unwrapping. Theory, algorithms, and Software.* (Wiley, New York, 1998), cap. 4.
20. W. J. Dixon, F. J. Massey Jr., *Introduction to Statistical Analysis,* (McGraw-Hill, Tokyo, 1969), cap. 17.

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES GENERALES.

En este trabajo de tesis se analizó la técnica de la deflectometría de moiré en modo finito y se obtuvo su modelo general, expresado en las ecuaciones (I.8) y (I.9). En este modelo se eliminaron las aproximaciones que se usan ampliamente en la literatura, las cuales reducen la exactitud de los resultados obtenidos por la deflectometría de moiré. Debido a que no se utilizan aproximaciones en las ecuaciones (I.8) y (I.9), las herramientas computacionales para procesar la información experimental y simular la propagación de la luz dejaron de ser útiles, ya que están basadas en el modelo aproximado de la deflectometría de moiré, ecuación (I.10). Para subsanar esto, en este trabajo de tesis se propusieron dos técnicas computacionales, cuyo fin es tener las herramientas de trabajo compatibles con el modelo general de la deflectometría de moiré.

En el capítulo II se analizó la relación entre la superficie y el vector normal a esta. A partir de esta relación, se propuso una funcional de costo para interpolar datos, expresada en la ecuación (II.10). Esta funcional tiene una mejor eficiencia y exactitud con respecto a los métodos estándar de interpolación. Además, puede reconstruir superficies complejas, tal como se puede apreciar en la sección II.3, donde mostramos reconstrucciones de superficies complejas. Esta funcional se puede aplicar directamente en la reconstrucción de la distribución del camino óptico utilizando la

información de pocos rayos, con lo que el proceso de propagar rayos a través de objetos bajo estudio sea más rápido. En la sección II.4. se mostró un ejemplo típico de propagación de la luz a través de un medio no homogéneo utilizando trazo de rayos. Hasta donde se pudo conocer, este tipo de aplicación en el trazo de rayos y reconstrucciones de la distribución del camino óptico no se ha realizado y se puede pensar que se tiene un gran potencial en la simulación de experimentos.

En el capítulo III se analizó los modelos de la información de fase de los deflectogramas. En este análisis se mostró las diferencias que existen al utilizar un modelo aproximado y el modelo general de la deflectometría de moiré. Al utilizar las ecuaciones (I.8) y (I.9) para modelar la información de los deflectogramas, se encontró que los métodos de integración utilizados habitualmente no se podrían aplicar directamente. De esto surgió la funcional de costo expresada en la ecuación (III.6). Esta funcional integra derivadas direccionales obtenidas de la información de fase de los deflectogramas, sin tener la restricción de usar una dirección de rotación de las rejillas en especial. Además, la formulación de la funcional permite no depender del número de fases utilizadas, por lo que la solución se puede realizar con métodos muy conocidos en la literatura. Con esta funcional se pueden obtener buenas estimaciones de las diferencias de camino óptico, aún con información altamente ruidosa, como se puede ver en la sección III.3, donde se estima con bastante exactitud la superficie de una lente progresiva. Esta funcional

puede ser utilizada inclusive con la información obtenida de las pruebas de Ronchi e interferometría de desplazamiento.

IV.1. Trabajos a futuro.

Los resultados obtenidos en la investigación realizada ofrecen muy buenas perspectivas para realizar desarrollos más amplios en las técnicas aquí presentadas. Algunas de las posibles líneas de trabajo son las siguientes:

1. Analizar las fuentes de error en la herramienta propuesta para integrar las derivadas direccionales. Como se aprecia en las figuras de las superficies estimadas, existen detalles que hacen pensar que el error en la rotación de la rejilla produce cambios de baja frecuencia en la superficie estimada. Con este análisis del error permitirá estimar el número de derivadas necesarias para una experimento en especial.
2. Insertar la funcional propuesta en la ecuación (II.10) en los métodos iterativos de la tomografía óptica [1-3]. Los métodos iterativos utilizados en la tomografía óptica son altamente dependientes del algoritmo de trazo de rayos [1-3]. Generalmente se publican trabajos con objetos que tienen algún tipo de simetría y esto permite reducir el problema a dos dimensiones. En el caso de objetos asimétricos, el tiempo utilizado en trazar rayos es demasiado y generalmente se opta por utilizar métodos de propagación de ondas [4]. Al utilizar convenientemente la ecuación (II.10), se puede reducir los tiempos computacionales y

aprovechar las facilidades que otorga el uso del trazo de rayos en el análisis de objetos (sec. II.4).

3. Reconstruir frentes de onda en medios no homogéneos. Tal como se puede apreciar en la sección II.4 y en la figura II.11, la funcional propuesta en la ecuación (II.10) está planteada para reconstruir el frente de onda después de propagarse a través del objeto bajo estudio y encontrarse en un medio homogéneo. Este tipo de reconstrucción de frentes de onda es muy común en la literatura [5,6]. Sin embargo, el problema de reconstruir un frente de onda en un medio inhomogéneo es un problema no trivial [6-8], debido a la inclusión de la dependencia del índice de refracción. Una variante de la funcional, que incluya la dependencia del índice, puede ayudar a realizar esta tarea.
4. Plantear una técnica que procese los deflectogramas para obtener directamente las diferencias de camino óptico. Existen trabajos que proponen formulaciones para calcular directamente la fase desenvuelta de un patrón de franjas [9]. La posibilidad de formular una técnica que utilice varios patrones fue planteada recientemente para la proyección de franjas [10]. Esto se puede extender para la deflectometría de moiré para integrar directamente las derivadas direccionales y obtener la diferencia de camino óptico desenvuelta de manera directa.

IV.2. Referencias.

1. S. Cha, C. M. Vest, "Interferometry and reconstruction of strongly asymmetric-refractive-index fields," *Opt. Lett.* **4**, 311 - 313 (1979).
2. C. M. Vest, "Tomography for properties of materials that bend rays: a tutorial," *App. Opt.* **24**, 4089 - 4094 (1985).
3. B. K. P. Horn, "Density reconstruction using arbitrary ray-sampling schemes," *Proc. IEEE* **66**, 551 - 562 (1978).
4. J. Martin, "Simulation of Wave Propagation in Random Medium: Theory and Applications," in *Wave Propagation in Random Medium (Scintillation)*, V. I. Tatarskii, A. Ishimaru, V. U. Zavorotny, Ed. (SPIE Press and Institute of Physics Publishing, Seattle, 1992), p. 463 - 486.
5. O. N. Stavroudis, "The k function in geometrical optics and its relationship to the archetypal wavefront and the caustic surface," *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1010 - 1016 (1995).
6. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*, (Academic Press, New York and London, 1972), cap. VII.
7. M. A. Alonso, G. W. Forbes, "Asymptotic estimation of the optical wave propagator. I. Derivation of a new method," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 1329 - 1340 (1998).
8. G. W. Forbes, M. A. Alonso, "Asymptotic estimation of the optical wave propagator. II. Relative validity," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 1341 - 1354 (1998).

9. J. L. Marroquín, M. Rivera, S. Botello, R. Rodríguez-Vera, M. Servín, "Regularization methods for processing fringe-pattern images," *App. Opt.* **38**, 788 - 794 (1999).
10. M. Rivera, J.L. Marroquín, S. Botello, M Servín, "Robust spatiotemporal quadrature filter for multiphase stepping," *App. Opt.* **39**, 284 - 292 (2000).

APÉNDICE.

A. Trabajos generados en la investigación doctoral.

- R. Legarda-Sáenz, M. Rivera, R. Rodríguez-Vera. "Regularized quadratic cost functional for wavefront interpolation," en revisión en Optics Communications.
- R. Legarda-Sáenz, M. Rivera, R. Rodríguez-Vera, Gerardo Trujillo-Schiaffino, "Robust wavefront estimation procedure from multiple directional derivatives," aceptado para publicación en Optics Letters.
- R. Legarda-Saenz, R. Rodríguez-Vera, M. Rivera, "Nonparaxial method for computing the gradient field of a wavefront using moire deflectometry". Optics Communications, Vol. 160 no. 4-6 p. 214-218. 15 February 1999.
- III Reunión Iberoamericana de óptica. Cartagena de Indias, Colombia. Septiembre 1998. "Reconstrucción del frente de onda a partir de trazo de rayos".
- XL Congreso Nacional de Física. Monterrey, N.L. Octubre 1997. "Generación del frente de onda a partir de simulación de trazo de rayos".

