Universidad de Guanajuato

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN OPTICA, A. C.

PRUEBA DE SUPERFICIES ASFERICAS CON INTERFEROMETRIA DIGITAL

Tesis presentada por el
Ing. Jorge Luis García Márquez
como requisito para obtener
el grado de:

Maestro en Ciencias (Optica)

León, Gto *Agosto 1995*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado para la realización de estos estudios, sin olvidar el apoyo de la dirección de formación académica del C.I.O. bajo la dirección del Sr. Fís. Xavier Garzón.

De la misma manera agradezco el apoyo de todo el personal técnico, tanto del taller óptico como del mecánico, por el apoyo prestado en la asesoría y construcción de piezas fundamentales en el interferómetro.

Agradezco también a los profesores que han influenciado en mí, ya sea por su trabajo, sus charlas y/o la impartición de asignaturas (Dr. Daniel Malacara, Zacarías Malacara, Manuel Servín, Sergio Calixto, Alejandro Cornejo y Ricardo Flores).

INDICE

Prefacio iii

1. Interferometría Digital 1
1.1 Introducción 1
Referencias 5

2. Interferometría de Corrimiento de Fase 6
2.1 Introducción 6
2.1.1 Conceptos Básicos 8
2.2 Técnicas Para Hacer el Corrimiento de Fase 10
2.3 Algoritmos Para Medir la Fase 13
2.3.1 Cruce por Cero 13
2.3.2 Amarre de Fase 13
2.3.3 Corrimiento Discontinuo en la Fase 15
2.3.4 Integración del Corrimiento de Fase 15
2.3.4.1 Algoritmo de Cuatro Pasos 17
2.3.4.2 Algoritmo de Tres Pasos 18
2.3.4.3 Algoritmo de Dos más un Pasos 19
2.3.4.4 Algoritmo de Carré 20
2.3.4.5 Algoritmo de Hariharan 21
2.3.5 Detección Síncrona 22
2.4 Desenvolvimiento de la Fase 24
2.5 Interferometría de Sub-Nyquist 27
2.5.1 El teorema de muestreo 27
Referencias 30

3. Análisis con Portadora Espacial 32
3.1 Introducción 32
3.2 Interferometría con una Portadora Espacial Lineal 33
3.3 Interferometría con una Portadora Espacial Circular 37
3.4 Medición de Frentes de Onda Asféricos 38
3.5 Interferometría de Fourier 40

Referencias 45

4. Limitaciones en la Interferometría Dígital con Superficies Asféricas 47

4.1 Prueba de Superficies Fuertemente Asféricas 47
4.1.1 Introducción 47
4.1.2 Breve Análisis de las Pruebas 47
4.2 Pruebas a Frentes de Onda con Aberración Esférica Primaria 48
4.2.1 Pruebas Mediante Interferometría de Corrimiento de Fase 49
4.2.2 Pruebas Analizando el Interferograma con Portadora Espacial Lineal 51
4.2.3 Pruebas Analizando el Interferograma con Portadora Espacial Circular 52
4.2.4 Propuesta para el Análisis con Interferometría de Sub-Nyquist 54
Referencias 54

5. Aspectos de Diseño Optico en el Interferómetro de Shack 56
5.1 El Interferómetro de Shack 56
5.1.1 Principios de Operación 56
5.1.2 Viabilidad 57
5.2 Sistema Optico 58
5.2.1 Diseño Básico 58
5.2.2 Evaluación del Sistema Optico 59
5.2.3 Diseño Final 60
Referencias 61

Conclusiones 63

Apéndice I 67

Apéndice II 69

Bibliografía Adicional 75

PREFACIO

Las superficies asféricas son utilizadas principalmente en los espejos para telescópios, aunque este tipo de superficies son utilizadas por otras industrias ópticas. Estas superficies generalmente tienen altos requisitos en su calidad, requisitos que solo pueden ser conseguidos mediante pruebas confiables. Por lo tanto, la calidad en la fabricación de superficies asféricas, depende, aparte de la manufactura, del método interferométrico empleado para efuctuar la prueba.

En la presente tesis, se ha hecho una revisión de algunos métodos para hacer el análisis de interferogramas, basando principalmente el trabajo de titulación en dos puntos:

1) Un estudio sobre las limitaciones de la interferometría digital en la prueba de superficies asféricas, y

2) El diseño y la construcción de un interferómetro (del tipo Fizeau) para probar mediante una computadora los interferogramas de la superficie bajo prueba proyectados a una cámara de T.V. (CCD). Esto es lo que se entiente por interferometría digital.

La aportación al presente trabajo se encuentra en los capítulos cuatro y cinco. Estos capítulos fueron presentados en los congresos anuales de The International Society for Optical Engineering en 1994 (capítulo cuatro) y en 1995 (capítulo cinco), trabajos que quedaron impresos como memorias de congreso en los volumenes 2263 y 2545 de los Proceedings of SPIE respectivamente.

1. Interferometría Digital

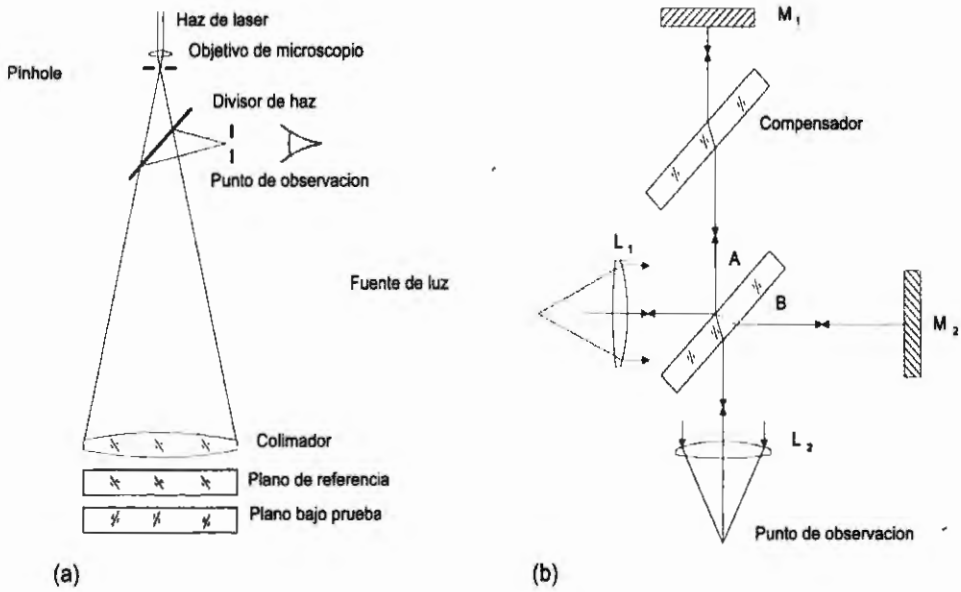
1.1 Introducción

En los últimos años, la aparición de computadoras personales más poderosas, de cámaras de televisión de estado sólido (CCD) y circuitos electrónicos que permiten la digitalización de imagenes, ha permitido a los investigadores aplicar nuevas técnicas, usando estos instrumentos al análisis de franjas.

Como es bien sabido, las franjas sobre un punto de observación son producidas por el fenómeno de interferencia de haces luminosos, siendo ésto de interés debido a la posibilidad de hacer mediciones en el rango de las longitudes de onda del espectro visible. En óptica se le llama interferómetro al dispositivo para generar el fenómeno de interferencia con el propósito de efectuar medidas. Hay disponibles en la actualidad una cantidad importante de configuraciones interferométricas e interferómetros comerciales empleados en los talleres de pruebas de superficies ópticas (Malacara 1990; Malacara 1992), por mencionar algunos, se encuentran los del tipo Twyman-Green, los interferómetros básicos del tipo Newton, los que siguen la configuración Fizeau, entre los que se pueden citar los ya comercializados Wyko y Zygo. Se tienen bastantes configuraciones para interferómetros de camino común, de desplazamiento lateral, radial u rotacional, los hay de paso sencillo, de multiple paso y de multiple haz. Asi mismo, son de gran ayuda en el taller de pruebas ópticas las pruebas de Foucault, de Hartmann, de Ronchi, de la navaja y otras. La figura 1.1 muestra dos interferómetros del tipo (*a*) Fizeau y (*b*) Twyman-Green.

La interferometría digital se auxilia de varias de estas configuraciones y de equipo computacional y de dispositivos CCD para conseguir la digitalización, esto es, la conversión de cada intensidad luminosa capturada por cada uno de los elementos (pixeles) del arreglo matricial de la cámara o sensor. Esto se traduce en código numérico suceptible de ser tratado por algorítmos computacionales. Las cámaras CCD y las tarjetas de adquisición de imagen muestran limitantes debido a la resolución en el arreglo de sus detectores ya sea, por el tamaño físico de cada uno de los pixeles, o por el número de estos en el *dispositivo de carga acoplada* o CCD (*Charge Coupled Devices* por sus siglas en inglés). La principal función de la tarjeta de adquisición de datos, es tomar una imagen proveniente de una TV o de un CCD en 1/25 de segundo (Crennell 1993) y cargar el valor de cada uno de los pixeles en la memoria de la computadora. La imagen grabada en

memoria puede entonces ser desplegada en tiempo real en un monitor de TV. La computadora puede de esta manera accesar ciertos valores numéricos de los pixeles de interés, donde cada pixel muestra el promedio de la intensidad luminosa capturada por el



area del detector.

Fig. 1.1 Interferómetros (a) tipo Fizeau y (b) tipo Twyman-Green

Si se colocara el dispositivo CCD en el punto de interferencia, se estaría sensando el patrón de franjas y geométricamente algunos sectores de pixeles tomarían valores proporcionales a la brillantes y otros no. Se puede interpretar a las franjas como moduladas en fase. El proceso matemático posterior utilizado para analizar el patrón de franjas y representar la forma del objeto es conocido como desenvolvimiento de la fase. Hay una cantidad considerable de métodos empleados en la interferometría digital, como el de interferometría de corrimiento de fase PSI que se estudiará en el capítulo 2, el de interferometría directa como lo son el análisis con portadora espacial lineal (generación de inclinación) el análisis con portadora espacial circular (defoco) y el análisis de Fourier, que se verán en el capítulo 3. Estos métodos pueden llevarse a cabo ya sea por el arreglo experimental, por programación o por una combinación de ambos.

En la interferometría digital es importante el dispositivo de captura de imágenes, entre otras cosas, por la resolución del sensor. Comercialmente se pueden encontrar

dispositivos desde 256 por 240, 256 por 256, 512 por 480, 512 por 512, hasta dispositivos más completos con resoluciones de 2048(H) por 2048(V) pixeles y tamaños de pixel de 9.0(H) por 9.0(V) μm o incluso de 3088(H) por 2056(V) pixeles y tamaño de pixel de 9.0(H) por 9.0(V) μm. Donde los niveles de gris manejables son generalmente para 6 bits, 64 niveles o para 8 bits, 256 niveles.

Si se desea analizar entonces el patrón de franjas, es conveniente que éste se encuentre abierto, ésto significa, que las franjas deben ser lo mas rectas y paralelas que se pueda (ver figura 1.2), de tal manera que al momento del muestreo del patrón, ninguna franja se cierre sobre el interferograma e introduzca un indeseable error al confundir el orden de la franja. Esto puede ser evitado dando una inclinación al interferograma, algo que además ayudaría para determinar el signo (esto significa, la pendiente del objeto en determinada posición) del interferograma. La inclinación puede ser hecha experimentalmente si, se inclina la placa de referencia o, puede ser hecha, por programación añadiendo numéricamente la constante deseada.

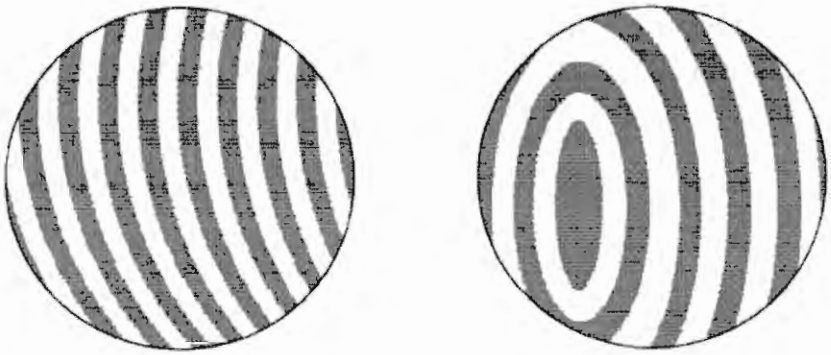


Fig. 1.2 Posible forma de las franjas en un interferograma

La localización del centro de la franja puede ser complicada, si el contraste de las franjas no es bueno, si hay variación en la visibilidad de las franjas, o si la imagen es ruidosa por causas de polvo en los elementos ópticos o el efecto de moteado del láser. Esto hace necesario preprocesar la imagen para compensar los evidentes efectos en la localización del centro de la franja, observese que que cada franja tiene un valor de 180 grados. El ruido de alta frecuencia como el de moteado (Malacara y DeVore 1992) puede ser reducido con filtraje de pasa-bajos. Esta es una técnica que reemplaza el valor de la intensidad de cada pixel por el valor promedio de todos los pixeles en una ventana específica en los alrededores del pixel reemplazado. Incrementando el tamaño de la ventana, obviamente se incrementará el grado de la suavización de la imagen. Unas

ventanas bastante suavizadas, podrían remover casi en su totalidad a las franjas, dejando solo a las variaciones de baja frecuencia espacial que, podrían ser substraidas como parte de la imagen preprocesada.

Al probar superficies asféricas mediante interferometría digital, algunas limitaciones se hacen presentes debido a la naturaleza geométrica de la superficie y a la resolución del sensor. Si se analiza gráficamente la sagita tanto para una esfera y una asfera se puede observar que en el caso de la asfera la pendiente, a partir de un cierto valor, comienza a crecer más rapídamente que en el caso de una esfera (ver figura 1.3). En este punto, el sensor comienza a verse débil ya que, las franjas de interferencia que describen a la superficie se juntarán de una manera proporcional al crecimiento de la pendiente y en el interferograma mostrará en las orillas una gran concentración de franjas. Justo en los bordes del plano de interferencia, los detectores del CCD tendrán la tarea de interpretar la irradiancia y convertirla en valor numérico y de acuerdo con el teorema de muestreo de Nyquist, al menos se necesita saber el valor de dos puntos en un ciclo como para predecir la forma de la onda. De esta manera si la pendiente es fuerte, o la superficie óptica es grande, y debido al tamaño finito del sensor y a la separación entre sus detectores, las limitaciones para la aplicación de la interferometría digital en la prueba de superficies asféricas se harán presentes.

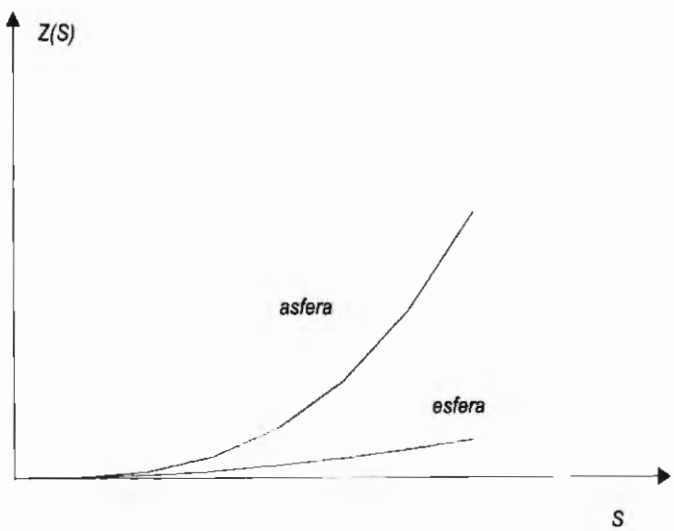


Fig. 1.3 Crecimiento de la zagita tanto para una esfera como para una asfera

El capitulo 4 describe lo referente a estas limitaciones lo cual es también el objetivo del presente trabajo.

El capitulo 5 trata sobre las superficies asféricas y el método interferométrico empleado para probar este tipo de óptica.

Referencias

Malacara, D., Ed., *Optical Shop Testing*, Wiley, New York, 1992.

Malacara, D. Ed., *Selected Papers on Optical Shop Metrology*, SPIE Optical Engeenering Press, Vol. MS18, 1990.

Crennell, K., "Introductory Digital Image Processing", *Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement Techniques*, Robinson, D. and G. Reid, Ed., IOP Publishing Ltd, Bristol, 1993.

Malacara, D. and DeVore, S.L., "Interferogram Evaluation and Wavefront Fitting", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Womack, K. H., "Interferometric Phase Measurement Using Spatial Synchronous Detection", *Opt. Eng.*, **23**, 391 (1984).

2. Interferometría de Corrimiento de Fase

2.1 Introducción

La interferometría permite al personal de un taller de pruebas ópticas medir las formas de superficies ópticas con un buen grado de precisión, donde la longitud de onda se utiliza como unidad de medida.

Un tipo de superficies que es con el paso del tiempo más común entre los diseñadores ópticos, es el de las asferas, estas superficies pueden reducir o eliminar aberraciones. Tanto como tres o cuatro superfices esféricas son necesarias (Malacara 1990) para la misma labor. Entre algunos tipos de superficies asféricas se encuentran las elipses, las parábolas o las hipérbolas, aunque pueden ser generados otros tipos de asféras (*i.e.* la cámara Schmidt). Se debe considerar que es más difícil la manufactura de una superficie cónica que la de una esférica y el técnico experto en la generación de superficies, necesita de pruebas tanto más eficientes como más fuerte necesite hacer la asfera. Es bien sabido que el avance en la construcción de ópticas con superficies cónicas, depende del avance de las técnicas para la prueba de superficies en el taller óptico.

La introducción de las computadoras en los métodos de la interferometría de pruebas ópticas ha resultado de gran valía a esta área. Es de hacer notar, que este método llegó hace aproximadamente veiticinco años dando lugar a lo que hoy en día se conoce básicamente como interferometría de corrimiento de fase PSI (*Phase Shifting Interferometry* por sus siglas en inglés). El impacto de esta area se puede ver reflejado en más de 100 artículos científicos (Carré 1966; Crane 1969; Bruning et al. 1974, Wyant 1975, Johnson y Moore 1977 y otros más), mientras que las aplicaciones de la interferometría de corrimiento de fase incluyen además de las pruebas ópticas, la detección de frentes de onda en tiempo real para óptica activa, interferometría de medición de distancias y microscopía (Greivenkamp y Bruning, 1992).

Al probar una superficie mediante interferometría, la forma y la calidad de la superficie bajo prueba puede ser obtenida de un interferograma. Un interferómetro como el de la Fig. 2.1 puede ayudar a este propósito. Una parte del haz colimado, pasará a través del divisor de haz para arribar a la superficie en prueba, será reflejada por ésta y desviada hacia el plano de observación. En el trayecto de regreso, el haz se deformará debido a las irregularidades en la superficie bajo prueba. El otro haz será desviado por el divisor hacia

una superficie plana de referencia, para regresar por el mismo camino, libre de aberraciones e interferir en el plano ya mencionado. En el caso dado de que la superficie sea perfecta, el sistema esté bien alineado y sin errores entonces el interferograma mostrará franjas paralelas, derechas y equidistantes. En otro caso, las franjas en el interferograma no serán como se ha mencionado.

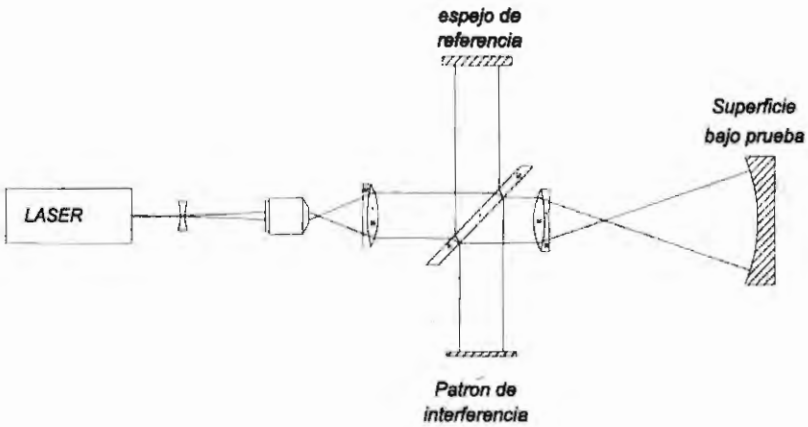


Fig. 2.1 Interferómetro Twyman-Green

Los métodos tradicionales empleados en el análisis de franjas, requieren de la medición de una gran cantidad de puntos sobre el centro de las franjas, puntos que por ajuste polinómico (Malacara et al. 1992; Malacara and DeVore 1992; etc.) representarán un mapa del frente de onda. Estas mediciones se pueden obtener mediante tarjetas digitalizadoras, microscópios o camaras de video conectadas a una computadora entre otras formas. La sensibilidad de la prueba dependerá de la separación entre las franjas ya que un error de una longitud de onda (puede leerse como *de una lamda* λ) en el frente de onda, distorsionará la forma de la franja por una cantidad igual a la separación entre las franjas. Si se toma como parámetro el hecho de que las deformaciones de las franjas pueden en general ser medidas con una precisión de 1/10 de su separación, ejemplo de este requisito (Bruning et al. 1974) son las lentes usadas para la fotolitografía en los circuitos integrados de baja densidad (*i.e.* la serie de los circuitos lógicos integrados 74xx). La sensibilidad medida en las deformaciones del frente de onda estará limitada igulamente por 1/10 de una longitud de onda, claro que se requiere que las franjas en el interferograma tengan suficiente separación entre ellas. Cuando el interferograma muestre franjas con una separación espacial pequeña, la densidad de puntos necesarios para hacer la medición será

grande y ello resultará en una prueba con poca precisión.

Este tipo de problemas pueden ser evitados mediante el uso de la interferometría de corrimiento de fase en la cual, la densidad de puntos, la calidad y la sensibilidad son constantes en todo el frente de onda.

2.1.1 Conceptos Básicos

La idea fundamental en la interferometría de corrimiento de fase es la de variar el frente de onda de referencia a lo largo de su dirección de propagación con respecto al frente de onda bajo prueba, cambiando de esta manera su diferencia de fase. Los interferogramas tomados durante la variación de los caminos ópticos mostrarán, un desplazamiento en la posición de las franjas. A partir de las variables tomadas de cada interferograma se puede determinar el frente de onda. Es preferible (Greivenkamp y Bruning 1992) hacer el análisis empleando la fase del frente de onda ya que entonces se puede ser independiente de configuraciones ópticas específicas .

Las expresiones generales para los frentes de onda de referencia y de prueba en el interferómetro son, respectivamente

$$w_1(x,y,t) = w_{01}(x,y)e^{i[(\phi_1(x,y) - \delta(t)]} \tag{2.1}$$

y

$$w_2(x,y) = w_{02}(x,y)e^{i\phi_2(x,y)}, \tag{2.2}$$

donde $w_{01}(x,y)$ y $w_{02}(x,y)$ son las amplitudes de los frentes de onda, ϕ (x,y) y ϕ (x,y) son las fases de los frentes de onda y $\delta(t)$, es el desplazamiento de la fase en distinto tiempo introducido en el haz de referencia. En otras palabras, $\delta(t)$ es el desplazamiento relativo en la fase entre los dos haces, lo que puede resultar de cambios ya sea en el haz de referencia o en el de prueba. El patrón de intensidad resultante en el punto x,y es

$$I(x,y,t) = |w_1(x,y,t) + w_2(x,y)|^2 \tag{2.3}$$

o

$$I(x,y,t) = I_1(x,y,t)+I_2(x,y)+2\sqrt{I_1(x,y)I_2(x,y)}\cos[\phi(x,y)+\delta(t)] \tag{2.4}$$

donde $I_1(x,y,t)$ e $_2I\,(x,y)$ son las irradiancias del haz de referencia y del de prueba respectivamente, la diferencia de fase entre los frentes de onda es $\phi(x,y) = \phi_2(x,y)-\phi_1(x,y)$.

La figura 2.2 muestra tanto los valores descritos, como los máximos y mínimos de la función senoidal dados por

$$I_{máx}(x,y,t) = I_1(x,y,t)+I_2(x,y)+2\sqrt{I_1(x,y)I_2(x,y)} \tag{2.5}$$

y

$$I_{min}(x,y,t) = I_1(x,y,t)+I_2(x,y)-2\sqrt{I_1(x,y)I_2(x,y)} \tag{2.6}$$

y un valor promedio, $I_A = I_1 + I_2$.

La ecuación (2.4) es fundamental en interferometría de corrimiento de fase, de esta ecuación se puede observar, que la intensidad en cada punto varía como una función senoidal de la fase introducida $\delta(t)$ con un fondo temporal dado por la fase del frente de

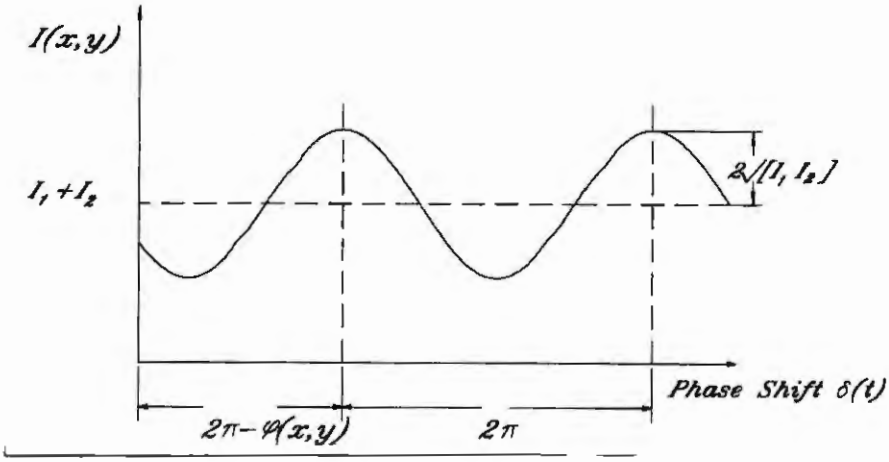


Fig. 2.2 Representación de las ecuaciones (2.5) y (2.6)

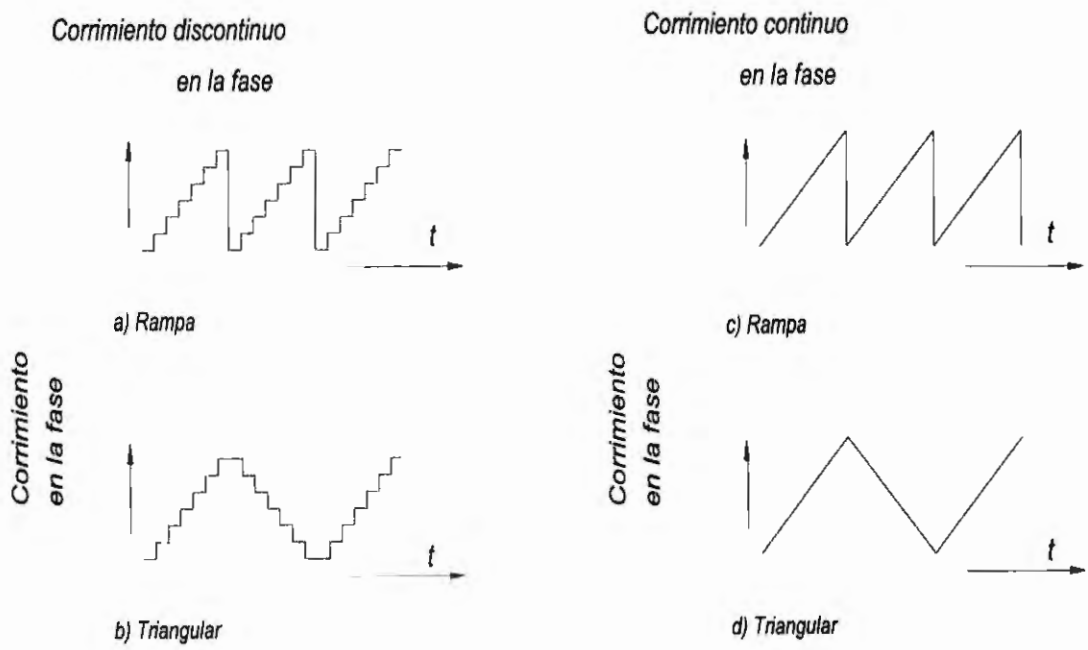
onda desconocido. De la figura (2.2), se puede observar que la intensidad en un punto de

medición individual varía senoidalmente con la fase (o el tiempo) y las tres incógnitas se pueden identificar facilmente. El termino constante $I_A(x,y)$ es la intensidad de fondo u intensidad promedio, $2\sqrt{[I_1(x,y)I_2(x,y)]} = I_B$, es la mitad de la modulación de la intensidad pico a valle ó la modulación de franjas (también conocida como modulación de intensidad) y la incógnita en la fase $\phi(x,y)$ se relaciona con el corrimiento temporal en la fase de la variación senoidal.

2.2 Técnicas Para Hacer el Corrimiento de Fase

De entre todas las técnicas para lograr un corrimiento en la fase, dos son los procedimientos generales, ya sea al correr la fase de una forma continua mediante la introducción de un corrimiento continuo de la frecuencia en el haz de referencia o bien, en una manera discontinua mediante el cambio periódico de la diferencia de camino óptico (*DCO*), con una oscilación de la fase por cualquiera de dos maneras: i) en forma de rampa (Figs. 2.3a y 2.3c) y ii) en forma triangular (Figs. 2.3b y 2.3d).

Fig. 2.3 Formas para introducir el corrimiento en la fase



Una de las técnicas más comunes para hacer el corrimiento de la fase en el tiempo, es mediante el acoplamiento de un transductor piezoeléctrico a una de las superficies

ópticas (el primer procedimiento de los mencionados); generalmente a la de referencia (Fig. 2.4a). Al aplicar una diferencia de potencial al cristal piezoeléctrico, éste moverá al espejo de referencia a lo largo de la trayectoria de la luz a una velocidad v, la frecuencia de la luz reflejada se desplazará en una cantidad igual a $\Delta\nu=2v/\lambda$ (Malacara et al. 1969).

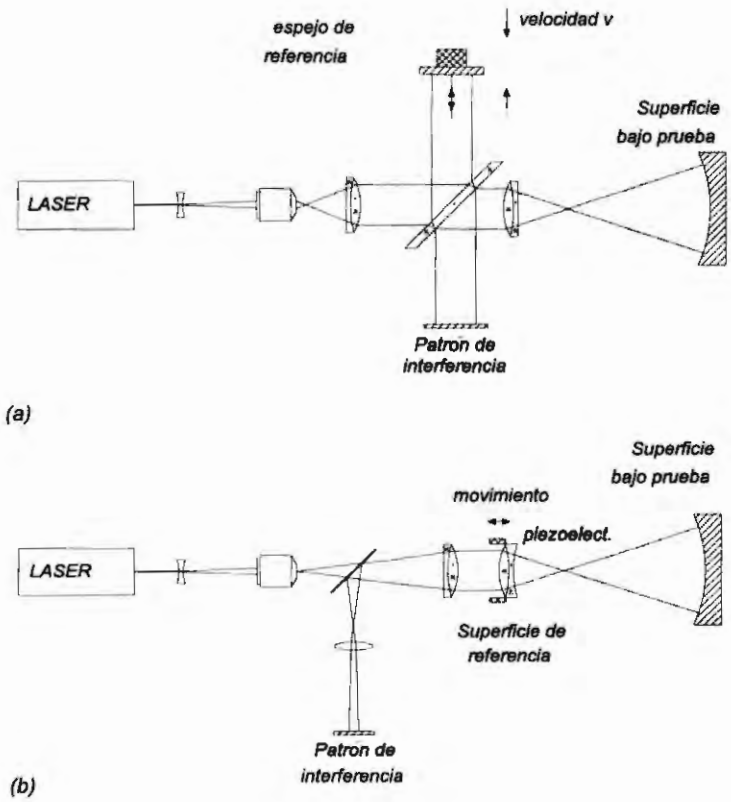


Fig. 2.4 Dos configuraciones comunes de interferometros (a) Twyman-Green y (b) Fizeau

Aparte de la configuración interferométrica del tipo Twyman-Green se pueden utilizar la de Mach-Zender y la de Fizeau. La configuración Fizeau (Fig. 2.4b), tiene ventajas sobre la de Twyman-Green ya que se puede evitar la introducción de aberraciones por parte del divisor de haz debido a que éste no se localiza entre el haz de referencia y la superficie bajo prueba. En esta configuración, el corrimiento de la fase se efectúa en la superficie de referencia la cual es concéntrica con la superficie bajo prueba. Para números F rápidos, pudierán resultar errores y no uniformidades en el corrimiento de la fase debido a que los rayos que van a la orilla de la pupila no son paralelos a la dirección del movimiento.

Existen más métodos, como el de una placa de vidrio rotando, cuyo espesor

retardará via índice de refracción al haz; por medio de un láser emitiendo dos frecuencias, ν y ν+Δν; mediante polarizadores o por medio de rejillas de difracción. Si una rejilla de difracción se mueve perpendicularmente como lo muestra la Fig. 2.5a. Se puede observar que la fase del haz difractado está desplazada *m* veces el número de rendijas por las que pasa el haz a través de un punto fijo, *m* representa el orden de difracción. El corrimiento en la frecuencia será igual a la velocidad de la rejilla dividida por el período *d* de la rejilla o $\Delta\nu = mv/d$. Es de notarse que los haces difractados en la misma dirección de la traslación causan un incremento frecuencial positivo. La luz difractada en sentido opuesto al movimiento de la rejilla decrece la frecuencia. Se selecciona uno de los ordenes difractados y se hace interferir con la frecuencia original para producir una interferencia con corrimiento en la fase. Este método para lograr el corrimiento en la fase puede ser realizado mediante rejillas giratorias con las ranuras en la dirección radial, o mediante rejillas cilíndricas.

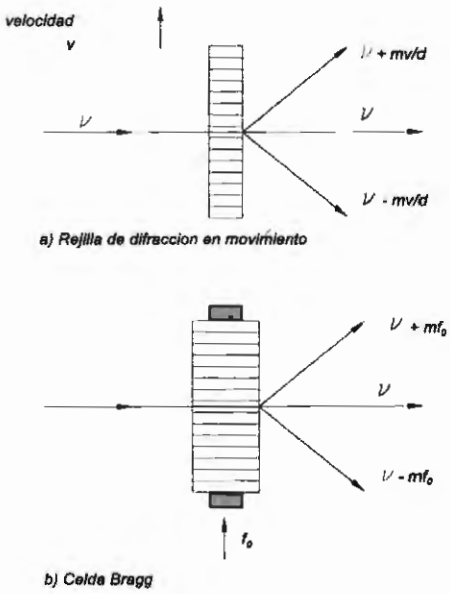


Fig. 2.5 Generación del corrimiento de la fase mediante rejillas de difracción

También puede ser usada una celda Bragg opto-acústica en el método difractivo. En la Fig. 2.5b, un transductor acústico produce vibraciones ultrasónicas en el líquido de la celda. Estas vibraciones debidas a la presión del sonido, producen cambios periódicos en el índice refractivo por el movimiento del líquido y ésto se puede interpretar como una rejilla de difracción. Donde la velocidad dividida por el período de las ondas es igual a la frecuencia acústica *f*, de esta manera, el corrimiento en la frecuencia para el modulador

opto-acústico esta dado por $\Delta\nu = mf$.

2.3 Algorítmos Para Medir la Fase

Las principales diferencias entre las distintas formas de detectar el corrimiento en la fase son: las maneras en las cuales la fase de referencia se varía y el número de veces en que el patrón de interferencia se mide, donde el mejor método para determinar la fase depende en como es hecho el corrimiento en la frecuencia (o fase). Hay tres diferentes posibilidades para conseguir el corrimiento en la fase: a) la frecuencia es desplazada en forma permanente dando como resultado una salida senoidal continua, b) la fase varía en forma de rampa, cambiando abruptamente la fase de la salida senoidal con la interrupción en la subida de la pendiente del corrimiento en forma de rampa, c) es la idea básica de b), pero con un cambio en la fase de forma triángular.

2.3.1 Cruce por Cero

Este método detecta el momento en que la irradiancia graficada en la Fig. 2.2 pasa por cero cuando cambia la diferencia de fase entre las dos ondas en interfrerencia. El paso por cero no significa cero irradiancia, más sin embargo, el eje de simetría de la función tiene un valor igual a I_A el cual, es un valor intermedio entre $\pm I_B$. El punto de cruce por el eje de simetría (o punto de cruce por cero) se puede encontrar al amplificar la función de irradiancia a un nivel de saturación. De esta manera, la forma senoidal de la función se conviertirá en una función cuadrada.

La forma del frente de onda puede ser obtenida al medir la fase $\phi(x,y)$ en algunos puntos de referencia en el frente de onda de la señal de referencia y en seguida en varios puntos del frente de onda bajo prueba.

2.3.2 Amarre de Fase

En el método de amarre de fase, una diferencia de fase adicional es añadida a la fase inicial $\phi(x,y)$, donde esta fase adicional cuenta con dos componentes, una de ellas con un valor fijo y la otra con una variación senoidal en el tiempo. Ambas componentes pueden tener valores deseados predeterminados. Así

$$\Phi = \phi(x,y) + \delta(x,y) + A \sin\omega t. \tag{2.7}$$

y la irradiancia $I(x,y)$ estará dada por

$$I(x,y,t) = I_A(x,y,t)+I_B(x,y,t) \cos[\phi(x,y) + \delta(t) + A\ sen\omega t] \tag{2.8}$$

la cual puede ser expandida usando la identidad

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - sen a\ sen b$$

y

$$\begin{aligned} \cos(x\ sen\theta) &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta) \\ sen(x\ sen\theta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\ sen[(2n-1)\theta] \end{aligned} \tag{2.9}$$

con lo que la función $I(x,y)$ puede finalmente ser expresada por

$$\begin{aligned} I(x,y) &= I_A+I_B\cos[\phi(x,y)+\delta(t)][J_0(A)+2J_2(A)\cos 2\omega t+...] \\ &-I_B sen[\phi(x,y)+\delta(t)][2J_1(A)sen\omega t+2J_3(A)sen3\omega t+...]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde J_n es la función Bessel de orden n. La primera parte de esta expresión representa las componentes armónicas de orden par y la segunda parte, representa componentes armónicas de orden non.

Se puede asumir que la amplitud de las oscilaciones de la fase Asenωt son mucho más pequeñas que π. Si se ajusta la fase fija δ a un valor tal que $\phi+\delta=n\pi$, entonces el término sen($\phi+\delta$) será cero y quedarán como función de $I(x,y)$ solo las componentes armónicas pares. En la práctica ésto se puede lograr cambiando lentamente el valor de δ mientras se mantenga la oscilación de Asenωt, hasta que la mínima amplitud del primer armónico o frecuencia fundamental sea obtenida.

2.3.3 Corrimiento Discontinuo de la Fase

Este método se basa en la medición de los valores de la irradiancia para varios incrementos conocidos en la fase. Debido a que los fotodetectores tienen un determinado tiempo de respuesta, al momento de hacer la medición en la irradiancia, la fase debe ser estacionaria a fin de dar tiempo a que el detector pueda efectuar la lectura con certidumbre. La fase puede ser cambiada entre dos mediciones consecutivas, tan pronto como se deseé, para medir la siguiente fase con el menor retardo posible. Asumiendo que una irradiancia $I(x,y)$ se mide hasta que la fase ha sido incrementada desde su valor inicial ϕ en una cantidad δ_i, como es mostrado en la Fig. 2.6, de esta manera,

$$I_i = I_A + I_B \cos(\phi + \delta_i). \tag{2.11}$$

El problema de éste método es, que los cambios súbitos en la posición del espejo pueden introducir algunas vibraciones en el sistema. Las distintas versiones de este método se describirán posteriormente.

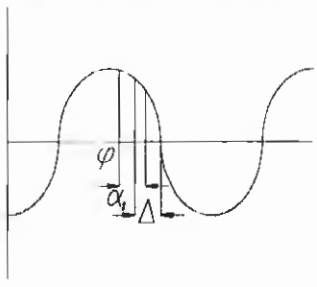


Fig. 2.6 Medición del promedio de la fase mediante la integración del corrimiento de la fase

2.3.4 Integración del Corrimiento de Fase

Este método también recibe el nombre de integración por *efecto cubeta* (del inglés bucket) y es similar al método de corrimiento discontinuo en la fase, con la única diferencia, de que la fase cambia en forma continua y no en forma discreta.

Mediante este método, el detector está tomanto continuamente mediciones de la irradiancia durante un intervalo temporal fijo, sin paros en la fase y como la fase cambia continuamente, solo el valor promedio puede ser medido. Debido a ésto, el método de integración de la fase en forma discontinua, puede ser matemáticamente considerado, como

un caso particular del método de corrimiento discontinuo en la fase, si es que se usa un detector con un tiempo de respuesta infinitesimalmente corto tal que, el intérvalo temporal de la medición sea reducido a cero. De la misma manera que en la sección 2.3.3, la fase puede ser desplazada a efecto de evitar cambios bruscos, si son usadas, la forma de rampa (Fig. 2.3c), o la forma triángular (Fig. 2.3d).

Si se asume que (Fig. 2.6) el promedio de la medición es tomado en el intervalo de $\delta=\delta_i-\Delta/2$ a $\delta=\delta+\Delta/2$, con un valor central de δ, entonces el valor promedio de la irradiancia se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$I_i = \frac{1}{\Delta}\int_{\delta_i-\Delta/2}^{\delta_i+\Delta/2} [I_A + I_B \cos(\phi + \delta)]d\delta, \tag{2.12}$$

con δ_i como el corrimiento de la fase en el centro del período de integración, e I es el número de interferograma grabado. El término $1/\Delta$ normaliza el resultado para que el promedio de la señal grabada sea independiente de Δ. Integrando se tiene

$$I_i = I_A + \frac{1}{\Delta}I_B\left[\, sen\left(\phi+\delta_i+\frac{\Delta}{2}\right) - sen\left(\phi+\delta_i-\frac{\Delta}{2}\right)\right] \tag{2.13}$$

las variables I_i, I_A, I_B y ϕ dependen todas de las coordenadas x,y. Por identidad trigonométrica se tiene,

$$I_i = I_A + I_B\, sinc(\Delta/2)\cos(\phi + \delta_i) \tag{2.14}$$

donde

$$sinc(\Delta/2) = \frac{sen(\Delta/2)}{\Delta/2}.$$

siendo esta expresión idéntica a la ec. (2.11) cuando $\Delta=0$, ya que la función sinc tiene un valor unitario. Si el intervalo de integración es diferente a cero, la única diferencia entre el significado de las ecuaciones es la reducción en el aparente contraste de las franjas y se puede considerar a esta expresión, como la más general.

2.3.4.1 Algorítmo de Cuatro Pasos

Este algorítmo requiere del proceso de grabado y digitalización de cuatro diferentes interferogramas, que se lograrán, introduciendo un corrimiento óptico de 90° en la fase del haz de referencia entre cada una de las cuatro grabaciones de interferogramas. Ya que el proceso en las mediciones pasa a ser discreto, la dependencia en el tiempo tiene que ser cambiada por los pasos i en el índice de la fase. La función $\delta(t)$ es adquirida discretamente por cuatro diferentes valores

$$\delta_i = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2; \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

sustituyendo cada uno de estos valores en la ec. (2.4) se tiene

$$I_I(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{2.15a}$$

$$I_{II}(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)+\pi/2], \tag{2.15b}$$

$$I_{III}(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)+\pi], \tag{2.15c}$$

y

$$I_{IV}(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)+3\pi/2]. \tag{2.15d}$$

se pueden expresar las anteriores ecuaciones como

$$I_I(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{2.16a}$$

$$I_{II}(x,y) = I_A(x,y) - I_B(x,y)sen[\phi(x,y)], \tag{2.16b}$$

$$I_{III}(x,y) = I_A(x,y) - I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)], \tag{2.16c}$$

y

$$I_{IV}(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)sen[\phi(x,y)]. \tag{2.16d}$$

El conjunto de cuatro ecuaciones con tres incógnitas [$I_A(x,y)$, $I_B(x,y)$ y $\phi(x,y)$] pueden ser resueltas para valores de $\phi(x,y)$ en cada punto en el interferograma. Si se observa en el número de incógnitas se ve que una ecuación es redundante, pero se utiliza por facilidad computacional. Si el término de intensidad de fondo $I_A(x,y)$ se elimina, por substracción de ecuaciones bajo la misma función trigonométrica se tiene

$$I_{IV} - I_{II} = 2I_B(x,y)sen[\phi(x,y)],$$

$$y$$

$$I_I - I_{III} = 2I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)].$$

dividiendo la ecuación a efecto de eliminar la modulación de intensidad $I_B(x,y)$ y obtener un resultado que contenga a las cuatro mediciones de la intensidad y como incógnita unicamente a la fase $\phi(x,y)$:

$$\frac{I_{IV} - I_{II}}{I_I - I_{III}} = \frac{sen[\phi(x,y)]}{\cos[\phi(x,y)]} = \tan[\phi(x,y)] \tag{2.17}$$

la cual se puede expresar como

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{I_{IV}(x,y) - I_{II}(x,y)}{I_I(x,y) - I_{III}(x,y)}\right]. \tag{2.18}$$

Para obtener el mapa del frente de onda medido se aplica simplemente esta ecuación donde el resultado es así mismo independiente del intérvalo de integración.

2.3.4.2 Algorítmo de Tres Pasos

Al tener solamente tres incógnitas en la Ec. (2.11), se requieren al menos tres mediciones en la intensidad del interferograma a efecto de reconstruir el mapa de fase del frente de onda.

$$I_I = I_A + I_B\ sinc(\Delta/2)\ \cos(\phi+\pi/4), \tag{2.19a}$$

$$I_{II} = I_A - I_B\ sinc(\Delta/2)\ \sin(\phi+3\pi/4) \tag{2.19b}$$

y

$$I_{III} = I_A - I_B \; sinc(\Delta/2) \; \cos(\phi + 5\pi/4) \tag{2.19c}$$

las cuales, desarrollandolas se pueden expresar como

$$I_I = I_A + I_B \; sinc(\Delta/2)[\cos\phi - sen\phi]/\sqrt{2} \; , \tag{2.20a}$$

$$I_{II} = I_A + I_B \; sinc(\Delta/2)[-\cos\phi - sen\phi]/\sqrt{2} \tag{2.20b}$$

y

$$I_{III} = I_A + I_B \; sinc(\Delta/2)[-\cos\phi + sen\phi]/\sqrt{2} \; . \tag{2.20c}$$

De estas relaciones se puede obtener

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{I_{III}(x,y) - I_{II}(x,y)}{I_I(x,y) - I_{II}(x,y)}\right] . \tag{2.21}$$

Aunque aquí solo se ha descrito un algorítmo de tres pasos a 90°, se puede reconstruir el mapa de fase en base mediciones a 120°. El lector puede consultar sobre estas técnicas en Malacara (1990), Greivenkamp y Bruning (1992) y Creath (1993).

2.3.4.3 Algorítmo de Dos Mas Un Pasos

Este algorítmo de tres pasos es aplicable a sistemas con vibraciones, como en la prueba de grandes espejos astronómicos (Wizinowich 1989). Es sistema consiste en una rápida conmutación entre dos valores separados por $\pi/2$, de la fase de uno de los haces. La conmutación debe ser lo suficientemente rápida para reducir los efectos de la vibración. La tercer lectura puede tomarse en cualquier momento posterior para medir, solo la suma de las irradiancias de los haces, independientemente de su fase relativa y usando un intérvalo de integración $\Delta=2\pi$. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$I_I = I_A + I_B \; sinc(\Delta/2)\cos(\phi), \tag{2.22a}$$

$$I_{II} = I_A + I_B\ sinc(\Delta/2)\cos(\phi-\pi/2), \\ = I_A + I_B\ sinc(\Delta/2)sen\phi \tag{2.22b}$$

y

$$I_{III} = I_A. \tag{2.22c}$$

Donde el valor para la fase es:

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{I_{II}(x,y) - I_{III}(x,y)}{I_I(x,y) - I_{III}(x,y)}\right]. \tag{2.23}$$

2.3.4.4 Algorítmo de Carré

Cuando se supone que los corrimientos en la fase entre las mediciones son conocidos, se está idealizando al sistema, ya que si el corrimiento difiere del valor esperado se pueden introducir errores en la reconstrucción de mapa de fase. Carré (1966) desarrolló un algorítmo para minimizar los efectos de las variaciones en el corrimiento de la fase. En este método se toman cuatro mediciones igualmente espaciadas, dos incrementando la fase y dos mas decrementandola, ver la Fig. 2.7d siendo α el ángulo de incremento.

$$I_I = I_A + I_B\ sinc(\Delta/2)\ \cos\left(\phi-\frac{3}{2}\alpha\right), \tag{2.24a}$$

$$I_{II} = I_A + I_B\ sinc(\Delta/2)\ \cos\left(\phi-\frac{1}{2}\alpha\right), \tag{2.24b}$$

$$I_{III} = I_A + I_B\ sinc\ (\Delta/2)\ \cos\left(\phi + \frac{3}{2}\alpha\right) \tag{2.24c}$$

y

$$I_{IV} = I_A + I_B\ sinc\ (\Delta/2)\ \cos\left(\phi + \frac{1}{2}\alpha\right). \tag{2.24d}$$

De estas ecuaciones resulta para la fase

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\tan\frac{\alpha}{2}\frac{(I_{II} - I_{III}) + (I_I - I_{IV})}{(I_{II} - I_{III}) - (I_I - I_{IV})}\right]. \tag{2.25}$$

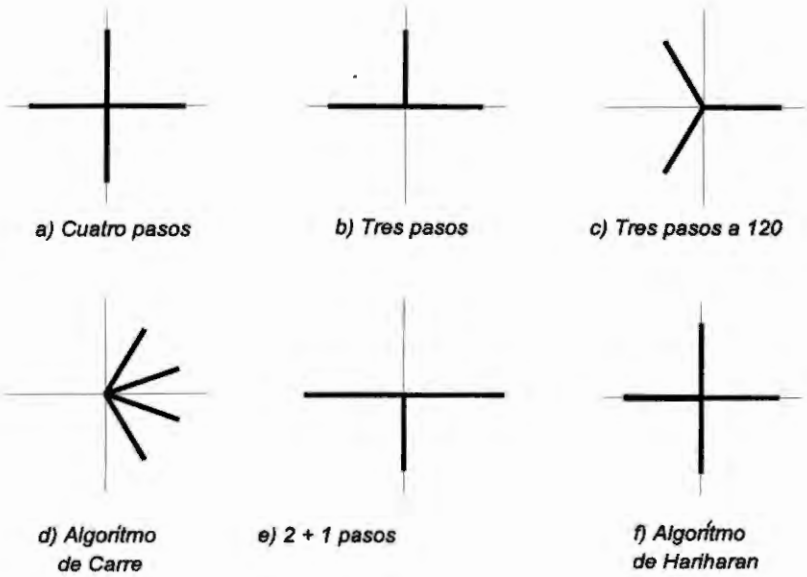


Fig.2.7 Seis pasos distintos para desplazar la fase

2.3.4.5 Algorítmo de Hariharan

Se puede uilizar así mísmo un método propuesto por Hariharan et al. (1987a). Mediante este algorítmo se utilizan cinco mediciones de la intensidad del interferograma asumiendo también un corrimiento lineal de la fase de α entre cada captura de imagenes, $\delta_i = -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha$; e $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$I_I = I_A + I_B \cos(\phi - 2\alpha) , \tag{2.26a}$$

$$I_{II} = I_A + I_B \cos(\phi - 2) , \tag{2.26b}$$

$$I_{III} = I_A + I_B \cos(\phi) , \tag{2.26c}$$

$$I_{IV} = I_A + I_B \cos(\phi+\alpha) , \tag{2.26d}$$

y

$$I_V = I_A + I_B \cos(\phi+2\alpha) . \tag{2.26e}$$

de estas ecuaciones se puede llegar a la siguiente expresión

$$\frac{I_{II} - I_{IV}}{2I_{III} - I_V - I_I} = \frac{\tan\phi}{2\ sen\alpha}. \tag{2.27}$$

Ya que se puede elegir cualquier corrimiento de fase α, es posible hacer la elección tal para minimizar las variaciones en el corrimiento de la fase. Al derivar la ec. (2.27) con respecto a α, se encuentra

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\tan(\phi)}{2\ sen(\alpha)}\right] = \frac{-\cos(\alpha)\tan(\phi)}{2sen^2(\alpha)}, \tag{2.28}$$

la cual va a cero cuando $\alpha=\pi/2$. Cuando se usa este valor en los corrimientos de fase, la ec. (2.27) se vuelve insensitiva a los errores en la calibración del corrimiento de la fase y se llega al último algorítmo,

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{2(I_{II} - I_{IV})}{2I_{III} - I_V - I_I}\right]. \tag{2.29}$$

2.3.5 Detección Síncrona

La teoría de comunicaciones ha demostrado ser multidiciplinaria y una de las ramas de la óptica que se ha visto favorecida es la interferometría. El método de detección síncrona es aplicable en interferometría, cuando en una señal como la de la Fig. 2.2 se

conocen la frecuencia y la longitud de onda por medio de la volocidad con la cual, se hace el corrimiento a la fase del frente de onda. El método consiste en recobrar la fase de una señal desconocida al correlacionar esta señal con una señal senoidal de una frecuencia igual a la de la señal a ser detectada. Un método matemático equivalente (Bruning et al. 1974) es hacer un muestreo a la función de irradiancia y ajustar después los puntos a una curva senoidal con frecuencia conocida.

Para una referencia lineal en el corrimiento de la fase, el patrón de intensidad en el interferograma en

$$I(x,y,t) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)+\alpha t], \tag{2.30}$$

donde α es la razón del cambio de la fase de referencia. Al controlar la fase de referencia, α es conocida y pueden ser generadas señales senoidales y cosenoidales. La señal cosenoidal es correlacionada con la intensidad del interferograma en cada punto:

$$<I^A(x,y)> = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(x,y,t)\cos(\alpha t), \tag{2.31}$$

la que se reduce a

$$<I^A(x,y)> = I_B(x,y)\cos[\phi(x,y)]. \tag{2.32}$$

de una forma similar, con la correlación de una señal senoidal se obtiene

$$<I^B(x,y)> = - I_B(x,y)sen[\phi(x,y)]. \tag{2.33}$$

El modulo 2π de la fase del frente de onda puede ser encontrado por medio del arctan de la relación de los dos resultados:

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{-<I^B(x,y)>}{<I^A(x,y)>}\right]. \tag{2.34}$$

El promedio de la operación de correlación en el sistema sirve como rechazo al ruido.

De una manera similar la correlación se puede conseguir por muestreo temporal de

datos. Por este método se pueden obtener n mediciones de la intensidad con cambios en la fase de referencia de, $\alpha_i = i2\pi/n$, con i=1,2,3,...,n. Es posible demostrar mediante análisis por series de Fourier que la fase ϕ se encuentra dada por

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{-\sum I_i sen(\alpha_i)}{\sum I_i \cos(\alpha_i)}\right], \tag{2.35}$$

donde la suma crece de 1 a n.

2.4 Desenvolvimiento de la Fase

La información de la fase contenida en el mapa bidimensional del interferograma es uno de los objetivos primordiales en el análisis de interferogramas, ya que con ella, se conoce la forma de la superficie bajo prueba. Antes de que la fase $\phi(x,y)$ pueda ser mostrada y evaluada, es necesaria una operación más conocida como *desenvolvimiento de la fase*. El propósito de esta operación es el de corregir las discontinuidades presentadas durante el calculo de la fase como resultado de la operación arcotangente. Esta función arcotangente está definida y limitada en el intervalo de $-\pi$ a π. Aparentemente la limitación en el intervalo podría restringir las mediciones de la *DCO* a no más de un medio de la longitud de onda. Afortunadamente se cuenta con suficiente información en los calculos para remediar la situación y proveer un rango de medidas satisfactorio. Aún más, se sabe que el frente de onda de la superficie es de hecho continuo y excede con mucho al intervalo.

El método común en el desenvolvimiento de la fase involucra una comparación espacial de los valores de la fase entre los pixeles adyacentes. Suponiendo un mapa de fase como el mostrado en la figura 2.8(a), donde se supondrá que la franja clara representa $-\pi$ y la oscura $+\pi$. Dada la fase en el pixel A, la fase en cualquier otro pixel (B) puede ser desenvuelta contando el número de discontinuidades 2π a lo largo del camino (ya sea U o V) por recorrer entre los pixeles A y B. La secuencia de los valores de la fase a lo largo del camino es $\phi(i)$ (i=0,1,2,..,N), el número de discontinuidades $d(i)$ (i=1,2,...,N) entre dos pixeles adyacentes, i-1 e i, pueden ser calculados como

$$d(x,y) = [\{\phi(i) - \phi(i-1)\}/2\pi], \tag{2.36}$$

los parentesis [ ] implican el redondeo al entero más próximo. En la detección de los bordes

de las franjas se asume implicitamente que el muestreo debe ser de al menos el doble de la más alta frecuencia espacial en el patrón de franjas, de acuerdo con el teorema del muestreo.

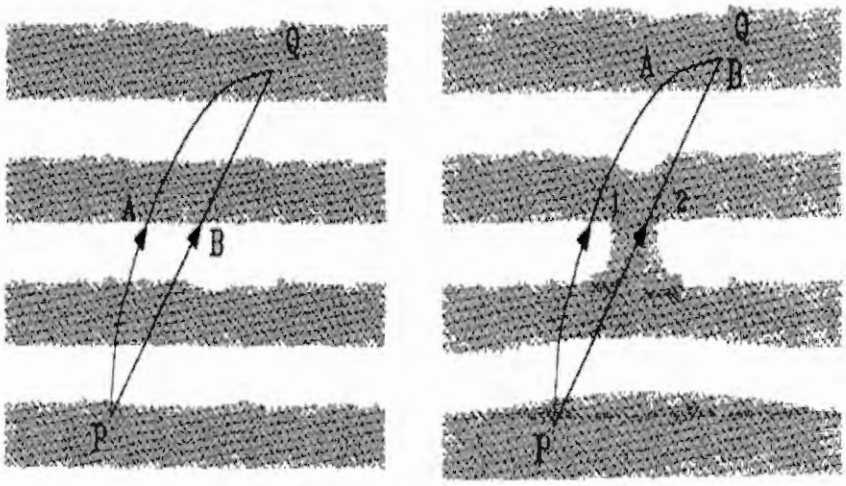


Fig. 2.8 Método convensional del desenvolvimiento de la fase.

Como la fase cambia entre los dos pixeles colindantes, i-1 e i, debe conservase en el intervalo de -π a π, por consiguiente, los valores que caen fuera de este intervalo indican la presencia de una discontinuidad 2π entre los dos pixeles teniendose como resultado un valor para la discontinuidad d de -1 o +1. Calculandose el número total de discontinuidades a lo largo del camino (1 o 2) mediante

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{N} d(i), \tag{2.37}$$

sustrayendose entonces 2πΥ de la fase en el pixel Q. En la Fig. 2.8 (a) Υ=-3. El desenvolvimiento de la fase puede ser obtenido por cualquiera de los caminos ya que la distribución fundamental de la fase es una función univaluada de posición en la imagen. El método de Takeda et al. (1982) que a la vez es el más sencillo involucra el desenvolvimiento de cada fila, las filas entonces se ajustan en fase entre si haciendose el desenvolvimiento a lo largo de una columna sencilla. El ruido es una de las causas por las que el ajuste de la fase pudiera no coincidir con el valor verdadero de la fase. En la Fig 2.8 (b) se puede observar una brecha en una de las franjas, donde las fronteras de la brecha en la franja (1 y 2) son (o se pueden considerar) fuentes de discontinuidades ya que esto impide al algorítmo determinar el comienzo o el final de la discontinuidad 2π. El valor de Υ depende del camino por el cual se ejecute el desenvolvimiento: P tiene un valor Υ_A = -3,

mientras que para Q, $\Upsilon_B = -2$. La presencia de ruido puede, por consiguiente, traer como resultados grandes errores de fase (2π) en regiones de la imagen alejadas del ruido.

Las fuentes de discontinuidad pueden presentarse en el interferograma por otras razones. Si las franjas no son muestreadas a una suficientemente alta frecuencia espacial, la fase real cambiará entre pixeles que puedan quedar fuera del rango $-\pi$ a π con lo que se obtendrá una mala interpretación en el desenvolvimiento de la fase. Una segunda posibilidad es que el patrón de franjas tenga discontinuidades inherentes; *i. e.* objetos que contengan agujeros o fracturas, o que esten formados por componentes independientes. En la actualidad hay disponibles una cantidad considerable de soluciones para los problemas con discontinuidades (Ghiglia, D. C., G. A. Mastin y L. A. Romero, 1987; Huntley, J. M. y H. Saldn, 1993; Servín, M. y Rodríguez-Vera, R., 1994 etc.).

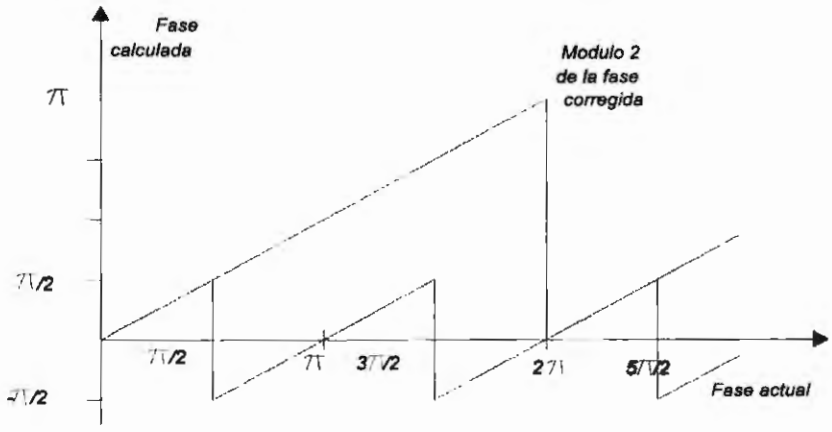


Fig. 2.9 La conversión de la fase calculada por el arcotangente del modulo 2π de la fase del frente de onda

Gráficamente se puede mostrar la conversión de la fase calculada por el arcotangente al modulo 2π de la fase del frente de (considerandose por el momento solo el caso unidimencional), este proceso es mostrado en la figura 2.9. La remoción de las discontinuidades de 2π presentes en el modulo de fase o desenvolvimiento de la fase o integración de la fase es explicado en la Fig. 2.10.

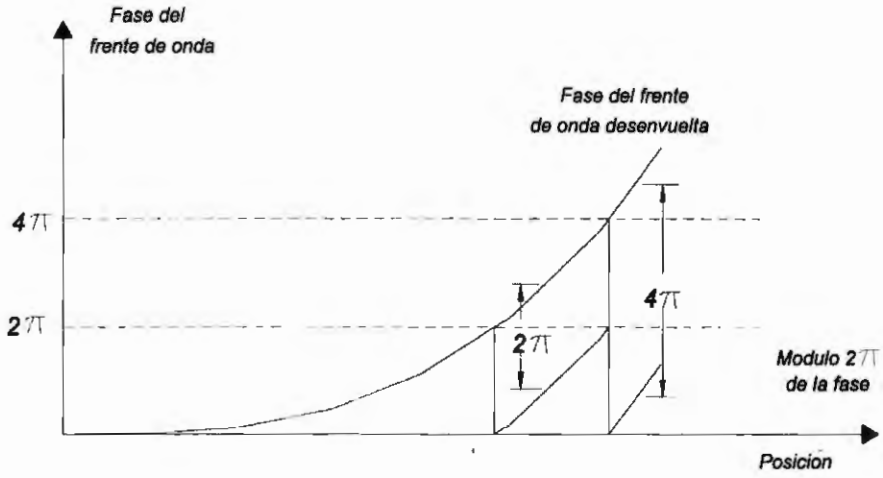


Fig. 2.10 El proceso del desenvolvimiento de la fase en una dimensión

2.5 Interferometría de Sub-Nyquist

2.5.1 El teorema de muestreo

Una operación de procesamiento de señales frecuentemente usada en los sistemas de comunicaciones, es el muestreo. Esta operación se puede describir matemáticamente como

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \qquad (4.1)$$

donde $x(t)$ es la señal a ser muestreada, y $x_s(t)$ es la señal muestreada la cual consiste de una secuencia de impulsos separados en el tiempo por T_s. Al reciproco de T_s, $f_s = 1/T_s$, se le llama la *frecuencia de muestreo.*

La transformada de Fourier de la señal muestreada puede ser obtenida mediante

$$\mathscr{F}[x_s(t)] = \mathscr{F}\left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right]$$

$$= X(f) * \mathscr{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right)$$

$$= X(f) * \left(f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)\right)$$

al completar la operación de convolución en el último paso, se obtiene

$$\mathscr{F}[x_s(t)] = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \ . \qquad (4.2)$$

Dada la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$, se puede obtener la transformada de Fourier $X_s(f)$ de $x_s(f)$ transladando $f_s X(f)$ por 0, $\pm f_s$, $\pm 2f_s$,... y añadiendo las componentes transladadas juntas. La Figura 2.11 ilustra la operación de muestreo en el dominio de la frecuencia y revela que si el espectro de una señal extendida hasta f_x y muestreada en una razón mayor

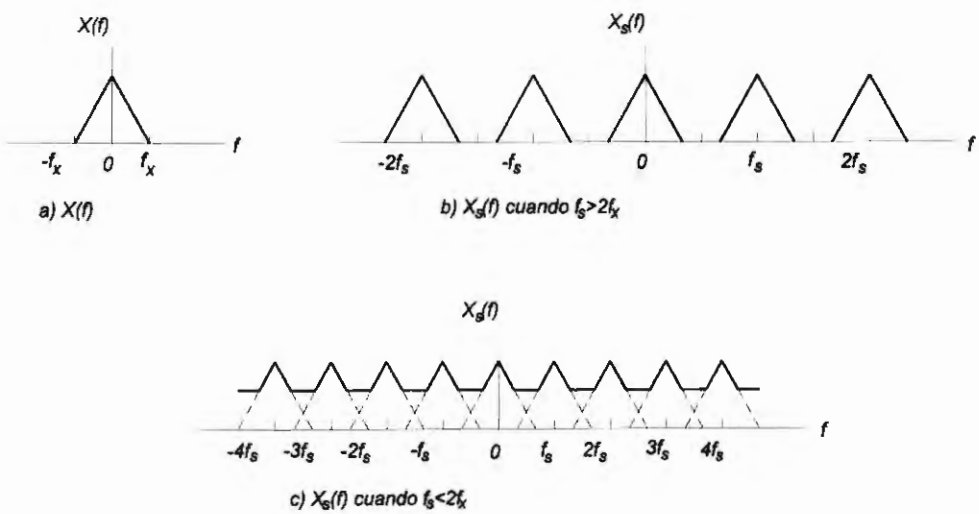


Fig. 2.11 Muestreo en el dominio de la frecuencia. (a) X(f). (b) $X_s(f)$ cuando $f_s>2f_x$ y (c) $X_s(f)$ cuando $f_s<2f_x$.

que $2f_x$, entonces el espectro de la señal muestreada consiste de repeticiones periódicas de $X(f)$. Si la razón de muestreo es menor a $2f_x$, entonces las componentes recorridas $X(f)$ se traslaparán y el espectro de la señal muestreada no tendrá semejanza con el espectro de la señal original. El efecto de transposición (traslape) espectral es conocido como *aliasing*,

y la razón de muestreo $2f_x$ bajo la cual se origina el *aliasing* es conocida como *razón de Nyquist*.

Si la razón de muestreo es mayor que la razón de Nyquist, $X_s(f)$ mantendrá intacta a $X(f)$. Al menos teoricamente, es posible recobrar a $X(f)$ y a $x(t)$ a partir de $X_s(f)$ pasando la señal filtrada a través de un dispositivo (conocido como filtro pasabajas), el cual dejará pasar unicamente las componentes espectrales que se encuentren en el intérvalo de $-f_x$ a f_x.

En la interferometría de sub-Nyquist, se han usado ciertos sensores diseñados exprofeso en los cuales, el area de detección de cada pixel se ha reducido, y la distancia entre detector y detector es amplia ver por ejemplo la Fig. 2.12 (Greivenkamp, 1987). El hecho de tener detectores con un area reducida se debe primordialmente a obtener un arreglo puntual de detectores y evitar que cada detector tome un promedio en un frente de detección amplio. Contrariamente, si el detector es cuasipuntual, la irradiancia promedio del punto bajo detección representará con mejor presisión el punto en cuestión y por consiguiente la forma del frente de onda.

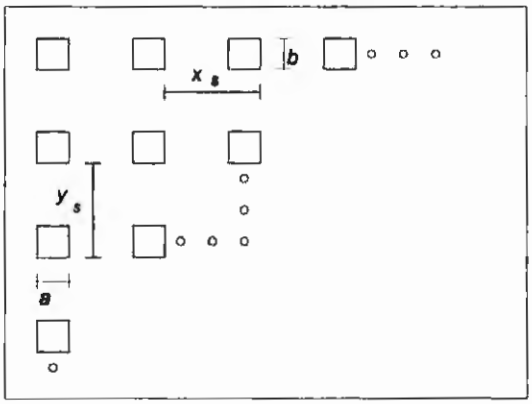


Fig. 2.12 Geometría del sensor

La interferometría de sub-Nyquist es un método de análisis y colección de datos capaz, de extender substancialmente el rango de medición en la interferometría de corrimiento de fase mediante el uso de una información *a priori* (Greivenkamp 1987).

Una de las limitaciones más importantes de la interferometría de corrimiento de fase convencional, es la imposibilidad de medir superficies fuertemente asféricas. La interferometría de Sub-Nyquist aplicada a la prueba de este tipo de superficies, usa la simple suposición de que el frente o la superficie bajo prueba es suave y por lo tanto tienen derivadas continuas. Esta información adicional permite el análisis en la interpretación de

las franjas que ocurran por debajo de la frecuencia de Nyquist. Las diferencias entre La interferometría de corrimiento de fase y la de sub-Nyquist ocurre durante el desenvolvimiento de la fase de los datos del modulo 2π. La técnica de sub-Nyquist requiere que las derivadas del frente de onda reconstruido no tengan cambios significativos de un pixel a otro. Esta condición en la continuidad de la pendiente limita el cambio de la pendiente del frente de onda a π por pixel. Por esta restricción solo pueden ser probadas las superficies o frentes de onda que solo se desvíen un poco de la esfera de referencia.

Para superficies fuertemente asféricas, los cambios en el frente de onda serán demasiado rápidos para que el algorítmo de reconstrucción pueda resolverlos.

Referencias

Malacara, D., "Phase Shifting Interferometry", *Rev. Mex. de Fís.*, **36**, 6 (1990).

Greivenkamp, J. E. and J. H. Bruning, "Phase Shifting Interferometry", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Greivenkamp, J. E., "Sub-Nyquist Interferometry", *Appl. Opt.*, **26**, 5245 (1987).

Bruning, J. H., D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D.P. Rosenfeld, A. D. White and D. J. Bragganccio, "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses", *Appl. Opt.*, **13**, 2693 (1974).

Malacara, D., Ignacio Rizo and Arquimedes Morales, "Interferometry and the Doppler Effect", *Appl. Opt.*, **8**, 1746 (1969).

Creath, K., "Temporal Phase Measurement Methods", *Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement Techniques*, Robinson, D. and G. Reid, Ed., IOP Publishing Ltd, Bristol, 1993.

Wizinowich, P. L., "System for Phase Shifting Interferometry in the Presence of Vibration", *Proc. SPIE*, **1164**, 25 (1989).

Carré, P., "Installation et Utilization du Comparateur Photoelectrique et Interferentiel du Bureau International des Poids de Mesures", *Metrologia*, **2**, 13 (1966).

Hariharan, P., B. F. Oreb, y T. Eiju, "Digital Phase-Shifting Interferometry: A Simple Error-Compensating Phase Calculation Algorithm", *Appl. Opt.*, **26**, 2504 (1987).

Servín, M. y R. Rodríguez-Vera, "Two-Dimensional Phase Locked Loop Demodulation of Interferograms", J. Mod. Optics, **40**, 2087 (1994).

Ghiglia, D. C., G. A. Mastin y L. A. Romero, "Cellular-Automata Method for Phase Unwrapping", *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 267 (1987).

Huntley, J. M. And H. Saldner, "Temporal Phase-Unwrapping Algorithm for Automated Interferogram Analysis", *Appl. Opt.*, **32**, 3047 (1993).

3. Análisis con Portadora Espacial

El método de evaluar la diferencia de fase de un interferogramas mediante portadora espacial (también llamado interferometría directa) que ha sido investigado en la última decada ha demostrado algunas importantes ventajas sobre otros métodos de detección de fase, como por ejemplo, la interferometría de desplazamiento o de corrimiento de fase (*PSI*). Algunas de las ventajas son:

- Sólo un interferograma es necesario para la obtención de la información de la fase de interés,
- Se presciende de los elementos no mecánicos con los que se logra el corrimiento de fase,
- La construcción de un interferómetro de éste tipo resulta relativamente barata.

3.1 Introducción

El análisis de un interferograma puede ser realizado por diversas maneras. Uno de los primeros métodos consiste, en la medición de una gran cantidad de puntos sobre las franjas del interferograma. Al localizar el centro de cada franja, se le asigna un número a cada franja y el frente de onda puede así ser evaluado.

La diferencia de camino óptico (*DCO*) en el centro de cualquier franja, es un multiplo m de la longitud de onda λ ($DCO = m\lambda$), donde m es el número (orden) de la franja. Para obtener la deformación del frente de onda, solo se hace importante el valor relativo al orden de la franja, donde la elección afecta unicamente el signo de la *DCO*. Una desventaja importante del análisis mediante un solo interferograma, es que el signo de la *DCO* no puede ser obtenido. Esta información solo se puede obtener si el signo para la deformación del frente de onda (inclinación o defoco) es determinado previamente.

Cuando en general las franjas están ampliamente separadas, se hace necesaria la interpolación puntos a fin de estimar la deformación en el frente de onda entre los puntos medidos.

Otro método para el análisis de un interferograma, es el de la introducción de una portadora espacial y la interpretación de la deformación de las franjas como una demodulación de fase de una frecuencia portadora y complementariamente, el uso de la

información de la irradiancia sobre todo el interferograma. Desafortunadamente la incertidumbre en el signo permanece.

Aunque varios autores han desarrollado métodos basados en una portadora espacial circular, otros autores han propuesto otros procedimientos basados en una portadora espacial circular y en una portadora modulada en fase (Malacara et al, 1994), para compensar la aberración esférica primaria en una superficie esférica. Obteniendose estonces un frente de onda del interferograma sin ninguna interpolación. La imagen del interferograma se toma directamente con un sensor del tipo CCD, de donde si existe una inclinación entre los frentes de onda, el interferograma mostrará muchas franjas.

Un interferograma tiene como analogía a un holograma del frente de onda, supongase que, si el holograma se ilumina con el haz de referencia que sirvió para su formación, se puede entonces obtener al frente de onda bajo prueba. Es fácil de ver que si en la producción del holograma no existió inclinación entre los dos frentes de onda, se tiene así a un holograma de linea, en cuyo caso contrario, suponiendo a un holograma fuera de eje, se podrán separar los frentes de onda introduciendo una inclinación entre ellos. La analogía entre un interferograma modulado en fase y un holograma fué identificada primeramente por Ichioka e Inuiya (1972) e introducida en las pruebas ópticas recientemente en el diseño del interferómetro Zeiss Interferometer Direct 100.

3.2 Interferometría con una Portadora Espacial Lineal

Si se considera que en un interferograma como el de la figura 3.1a, la irradiancia se mide a lo largo del eje x y, esta irradiancia solamente puede ser una función senoidal si, el frente de onda es perfecto, esto es, que las franjas son derechas, paralelas y equidistantes. Bajo cualquier otra circunstancia, esta función aparecera como una onda con la fase modulada. La función moduladora de fase es la forma del frente de onda $W(x,y)$. La inclinación θ_o entre los frentes de onda se elige de tal manera que en el interferograma no aparezcan franjas cerradas. La función de la irradiancia $I(x,y)$ se puede expresar como

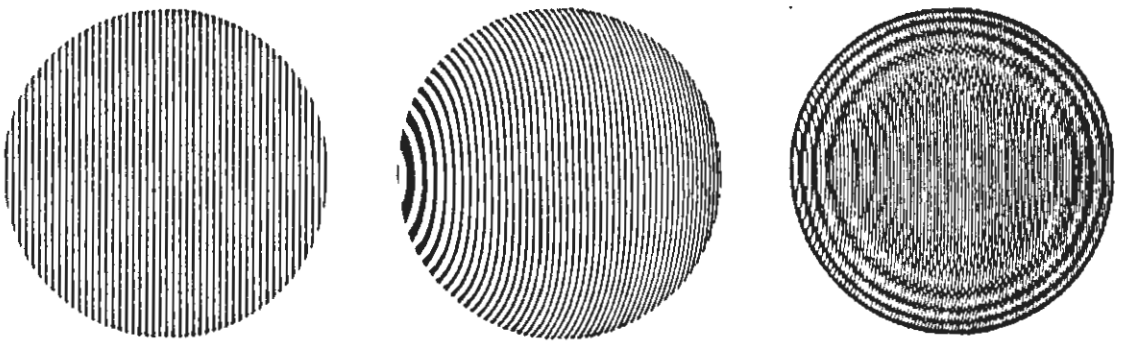
$$I(x,y) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos k\,[x\ sen\ \theta_o + W(x,y)]$$

$$= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}\, e^{i\,k\,[x\ sen\ \theta_o + W(x,y)]} + \sqrt{I_1 I_2}\, e^{-i\,k\,[x\ sen\ \theta_o + W(x,y)]}\ . \qquad (3.1)$$

Se puede considerar a este patron de franjas como una fracuencia portadora espacial modulada, por el frente de onda u objeto fase. La fase $\varphi(x,y)$ de la función moduladora de fase es

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= k\,[x\ sen\ \theta_o + W(x,y)] \\ &= 2\pi f_o X + \varphi_m(x,y)\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $f_o = \text{sen}\theta_o / \lambda$ es la frecuencia portadora espacial y $\varphi_m(x,y) = kW(x,y)$, la modulación de la fase.



3.1a) $a+b\cos(1.2x)$ *3.1b)* $a+b\cos(1.2x+30\rho^4)$ *3.1c)* Moiré de (*1a*) y (*1b*).

Fig. 3.1 En la secuencia, (a) portadora lineal, (b) interferograma con aberración de esfericidad y (c) el moiré de (a) y (b)

Se debe eligir una inclinación θ_o entre los dos frentes de onda tal que en el interferograma no aparezcan franjas cerradas, esto significa que ninguna franja dentro del interferograma, ya sea positiva o negativa, deben de sufrir cambio en su signo. Mediante esta condición para las franjas y para todos los puntos x,y dentro de la abertura, se tiene que todos los valores de y de la función modulada por la fase deben crecer monotonicamente con los valores de x. Por lo tanto esto se expresa como

$$\begin{aligned}&\frac{\partial[x\ sen\ \theta_o + W(x,y)]}{\partial x} > 0 \\ &sen\ \theta_o + \frac{\partial W}{\partial x} > 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

o lo que es lo mismo

$$2\pi f_o > máx\ |\ \nabla W\ |.$$

Con esto se quiere decir que, la inclinación del frente de onda de referencia tiene que ser

mayor que la pendiente del frente de onda bajo prueba en la dirección x, en cualquier punto (x,y) del interferograma. Bajo esta condición se puede saber que ninguna franja en el interferograma cruzará más de una vez cualquier linea que pase paralela al eje x en el interferograma. Analogamente, en un holograma la condición equivale a un ángulo entre los haces objeto y referencia lo suficientemente grandes como para satisfaces la reconstrucción.

El interferograma puede ser interpretado de varias maneras, como un holograma del frente de onda $W(x,y)$, cuya inclinación en el frente de onda de referencia puede expresarse como θ_R. El frente de onda puede entonces ser reconstruido si se ilumina al holograma con un frente de onda de referencia, plano, W_R con un ángulo θ_R dado por

$$E_R(x,y) = e^{ik(x \text{ sen } \theta_R)}. \tag{3.4}$$

De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} E_R(x,y)\cdot I(x,y) &= I(x,y)\cdot e^{ik(x \text{ sen } \theta_R)} \\ &= (I_1 + I_2)e^{(ik\, x \text{ sen } \theta_R)} \\ &- \sqrt{I_1 I_2}\; e^{i\,k\,[x \text{ sen } \theta_o + x \text{ sen } \theta_R + W(x,y)]} - \sqrt{I_1 I_2}\; e^{-i\,k\,[x \text{ sen } \theta_o - x \text{ sen } \theta_R + W(x,y)]}\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La irradiancia en el interferograma a lo largo de una linea recta y paralela al eje x será perfectamente senoidal solo si el frente de onda a ser medido es plano. Así, las franjas serán rectas, paralelas y equidistantes. Una interpretación alterna es que la irradiancia $I(x,y_o)$, con y_o como una constante, es una función de fase modulada con la frecuencia portadora determinada por la inclinación entre los dos frentes de onda. La función moduladora de fase es determinada por las deformaciones del frente de onda. Las técnicas más comunes en teoria de comunicaciones, para demodular una función modulada en fase $I(x,y)$ requieren de la multiplicación de esta función por ambas, una función coseno y por una función seno con frecuencias muy similares a la de la portadora. El resultado matemático es idéntico a la ecuación (3.5).

De la última expresión, la frecuencia espacial f de cada término se relaciona con la pendiente de la fase φ en la dirección x de cada término por

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{k\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,. \tag{3.6}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.5), representa el frente de onda no difractado (orden 0) y tiene una inclinación como la del frente de onda de referencia, con una frecuencia f_R (igual a la de la portadora), dada por

$$f_R = \frac{sen\theta_R}{\lambda} . \tag{3.7}$$

El segundo término representa el frente de onda conjugado y su frecuencia f_{-1} está expresada por

$$f_{-1} = \frac{sen\theta_o + sen\theta_R}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial x} > \frac{sen\theta_R}{\lambda} \tag{3.8}$$

el cual, como se puede observar de la ec. (3.3), es mayor que la frecuencia f_R. Se puede asumir que antes de introducir cualquier inclinación, la mayor pendiente positiva del frente de onda en la dirección x es aproximadamente igual en magnitud a la mayor pendiente negativa. Por lo tanto se puede demostrar que el tercer término representa al frente de onda bajo prueba con una frecuencia f_{-1} igual a

$$f_{+1} = \left|\frac{sen\theta_o - sen\theta_R}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial x}\right| < \left|\frac{sen\theta_R}{\lambda}\right| \tag{3.9}$$

El inverso de la frecuencia portadora espacial es igual al mínimo espaciamiento de las franjas en el interferograma. Si todas las frecuencias iguales o mayores que la frecuencia portadora son removidas con un filtro pasabajas, solo quedaría el último término, cuyas componentes real e imaginaria son las señales $S(x,y)$ y $C(x,y)$ definidos por

$$S(x,y) = -\sqrt{I_1 I_2}\ sen\ k[x\ sen\ \theta_o - x\ sen\ \theta_R + W(x,y)] \tag{3.10}$$

y

$$C(x,y) = \sqrt{I_1 I_2}\ \cos\ k[x\ sen\ \theta_o - x\ sen\ \theta_R + W(x,y)] \tag{3.11}$$

y el frente de onda $W(x,y)$ estará dado por

$$W(x,y) = -\frac{1}{k}\tan^{-1}\left[\frac{S(x,y)}{C(x,y)}\right], \tag{3.12}$$

que es el resultado deseado.

Una tercer manera posible de demodulación es, formar el patrón de moiré entre el interferograma aberrado y el interferograma no aberrado, ambos con la misma cantidad de inclinación, como se muestra en la Fig. 3.1c.

3.3 Interferometría con una Portadora Espacial Circular

Introduciendo una cantidad grande de defoco en lugar de una inclinación, la imagen de la fase modulada tiene la forma

$$I(x,y) = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos k[D_o(x^2 + y^2) + W(x,y)] \ . \tag{3.13}$$

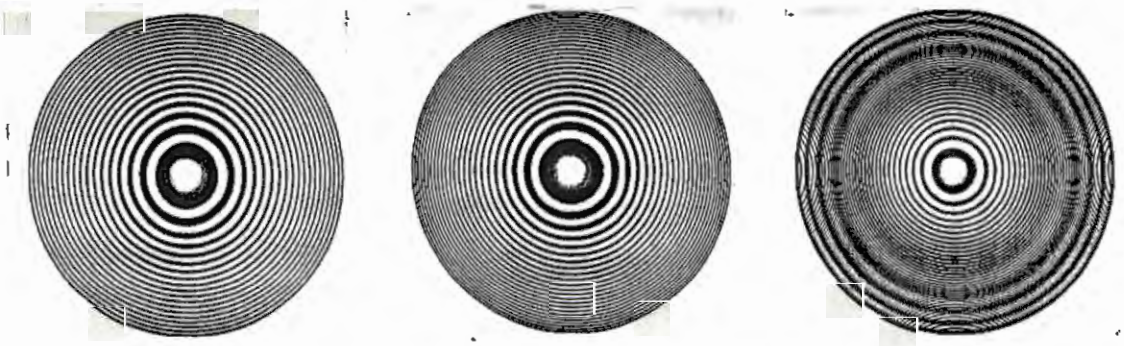
La Fig. 3.2a muestra un interferograma con portadora espacial circular no aberrado. El interferograma puede ser demodulado en el dominio espacial con un frente de onda esférico dado por

$$R(x,y) = e^{[ikD_o(x^2 + y^2)]} = e^{[ikD_o S^2]} \tag{3.14}$$

donde $S^2 = x^2 + y^2$, con la condición

$$2D_o S > \frac{\partial \varphi}{\partial S} \ . \tag{3.15}$$

La condición impide que alguna franja pueda cruzar más de una vez cualquier linea trazada desde el centro del interferograma a uno de sus bordes. En las vecindades del centro del interferograma no es posible hacer una demodulación confiable de la fase debido, a que la frecuencia portadora es muy pequeña. Esta es la desventaja del este método.



3.2a) $a+b\cos(120\rho^2)$ *3.2b)* $a+b\cos(120\rho^2+30\rho^4)$ *3.2c)* Moiré de (*2a*) y (*2b*).

Fig. 3.2 (a) portadora circular, (b) se añade un término ρ^4 y (c) , el moiré de ambos interferogramas

El producto entre la irradiancia del interferograma $I(x,y)$ y el frente de onda de referencia $R(x,y)$ es

$$I(x,y)\cdot R(x,y) = (I_1 + I_2)e^{[ik\, D_o S^2]}$$
$$+ \sqrt{I_1 I_2}\; e^{ik\,[2D_o(x^2 + y^2) + W(x,y)]} + \sqrt{I_1 I_2}\; e^{-ik\,[W(x,y)]} \; . \tag{3.16}$$

Utilizando un filtro pasa-bajas digital se llega a

$$C(x,y) + i\, R(x,y) = \sqrt{I_1 I_2}\; e^{-ik\,[W(x,y)]}$$
$$= \sqrt{I_1 I_2}\; [\cos kW(x,y) - i\; sen\; kW(x,y)] \; . \tag{3.17}$$

con una distribución de la fase

$$W(x,y) = -\frac{1}{k}\tan^{-1}\left[\frac{S(x,y)}{C(x,y)}\right] . \tag{3.18}$$

Como en el caso de la portadora espacial lineal, hay también un moiré equivalente cuando el interferograma es puesto sobre un interferograma con defoco de un frente de onda esférico (placa zonal de Fresnel), como es ilustrado en la evolución de la Fig. 3.2.

3.4 Medición de Frentes de Onda Asféricos

La mayoría de los tipos de interferómetros más comunes, con la excepción de los interferómetros de desplazamiento lateral o rotacional, producen patrones de interferencia cuyas franjas son paralelas, rectas y equidistantes cuando el frente de onda bajo prueba es perfecto. Y esféricas, con el mismo radio de curvatura del frente de onda de referencia.

Si la superficie bajo prueba no tiene una forma perfecta, las franjas no serán rectas y su separación será variable. Las deformaciones del frente de onda pueden ser determinadas mediante una examinación matemática de la forma de las franjas. Ya que la separación de las franjas no es constante, en algunos lugares las franjas estarán ampliamente separadas pero en otros lados, estarán muy juntas.

Es deseable que la aberración esférica del frente de onda bajo prueba esté de alguna manera compensada a fin, de que las franjas aparezcan paralelas, rectas y equidistantes tal

como en un frente de onda perfecto. A esto se le llama prueba nula y puede ser efectuada por medio de algunas configuraciones especiales. Cualquiera de estas configuraciones especiales puede ser utilizada para obtener la prueba nula de una superficie cónica. Por lo general estas superficies tienen simetría de rotación. Es propósito de la presente tesis utilizar los métodos de interferometría directa con compensación matemática en las pruebas nulas, lo que a continuación se describirá.

Debido a que un interferograma puede ser interpretado como un holograma del frente de onda con una inclinación θ, el frente plano de referencia puede ser reconstruido si se ilumina al interferograma con el frente de onda $W(x,y)$. De aquí se obtiene la prueba nula si se ilumina con un frente de onda asférico ideal $W_R(x,y)$ con la forma:

$$E_R(x,y) = e^{[ikx\ sen\ \theta_R + W_R(x,y)]} \quad . \tag{3.19}$$

con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} E_R(x,y)\cdot I(x,y) &= I(x,y)\ e^{i[kx\ sen\ \theta_R + kW_R(x,y)]} \\ &= (I_1 + I_2)\ e^{i[kx\ sen\ \theta_R + kW_R(x,y)]} \\ &+ \sqrt{I_1 I_2}\ e^{i[kx\ sen\ \theta_o + kx\ sen\ \theta_R + kW(x,y) + kW_R(x,y)]} \\ &- \sqrt{I_1 I_2}\ e^{i[-\ kx\ sen\ \theta_o + kx\ sen\ \theta_R + kW(x,y) - kW_R(x,y)]} \end{aligned} \tag{3.20}$$

El primer término después de la igualdad representa al frente de onda asférico ideal con inclinación, con una frecuencia igual a la de la portadora. El segundo término representa un frente de onda con una cantidad grande de asféricidad y una frecuencia igual al doble de la frecuencia portadora. El último término representa un frente de onda con una forma igual a la diferencia entre el actual frente de onda medido y el frente de onda asférico ideal. Si todos los términos en esta ecuación, con frecuencias iguales o mayores que la frecuencia portadora son removidos por medio de un filtro pasabajas, solo permanece el último término cuyas componentes real e imaginaria están dadas por las señales $S(x,y)$ y $C(x,y)$

$$S(x,y) = -\sqrt{I_1 I_2}\ sen\ k[-x\ sen\theta_o + x\ sen\theta_R + W(x,y) - W_R(x,y)] \tag{3.21}$$

y

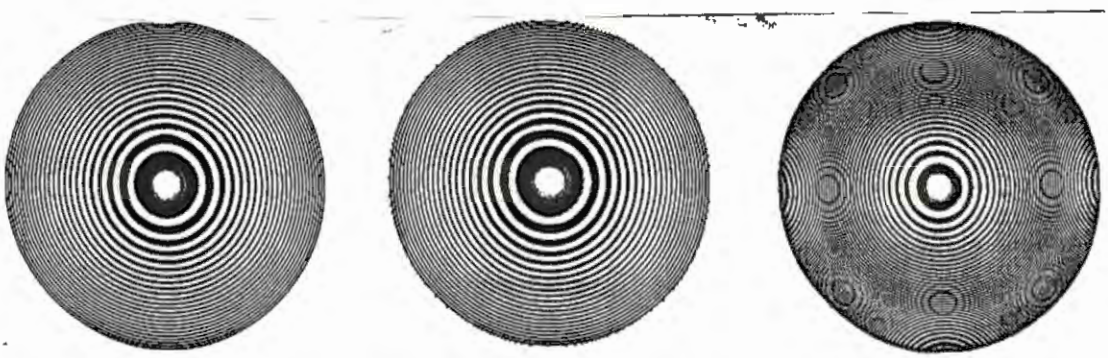
$$C(x,y) = \sqrt{I_1 I_2} \cos k[-x\ sen\theta_o + x\ sen\theta_R + W(x,y) - W_R(x,y)] \tag{3.22}$$

con lo que la diferencia entre los dos frentes de onda $W(x,y)$ - $W_R(x,y)$ está dada por

$$W(x,y) - W_R(x,y) = -\frac{1}{k}\tan^{-1}\left[\frac{S(x,y)}{C(x,y)}\right] \tag{3.23}$$

que son las desviaciones del frente de onda con respecto al frente asférico ideal.

El moiré equivalente de esta prueba se da con la superposición del interferograma sobre el interferograma del frente asférico perfecto con una inclinación grande, e igual en magnitud a la inclinación del interferograma bajo prueba (ver la secuencia en la Fig. 3.3).



3.3a) $a+b\cos(120\rho^2+30\rho^4)$ *3.3b)* $a+b\cos(120\rho^2+30\rho^4-10\rho^2)$ *3.3c)* Moiré de (*3a*) y (*3b*).

Fig. 3.3 Otro ejemplo de superposición de interferogramas con portadora y aberraciones indicadas en los incisos

3.5 Interferometría de Fourier

Cuando se analizan interferogramas por el método de la localización del centro de las franjas, se hace necesaria la interpolación de la *DCO* entre las franjas para completar el mapa de la *DCO*. Si el espaciamiento entre franjas es considerable, este método puede no resultar en una interpretación satisfactoria. Este problema se puede evitar haciendo uso de la información de la *DCO* entre las franjas, información que está contenida en la modulación senoidal de la intensidad del interferograma. Esto se puede realizar más facilmente si el fondo y la visibilidad varían lentamente en comparación con las franjas.

Si es introducida una inclinación a uno de los haces de interferencia en un

interferómetro, se hace posible el uso de las técnicas de filtraje de la frecuencia espacial (Fourier) para demodular el interferograma. Varios grupos de investigación han trabajado al respecto (Takeda et al. 1982; Mertz, 1983; Macy, 1983; Womack, 1983, 1984; Roddier y Roddier, 1987). El grupo de Takeda utilizó un método en base a la transformada de Fourier para analizar una linea unidimensional en un interferograma, Macy lo extendió a dos dimenciones.

Compactando la notación y haciendo los términos

$$I_A(x,y) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$$

$$I_B(x,y) = 2\sqrt{I_1(x,y)I_2(x,y)}$$

se puede escribir el término de la irradiancia del patrón de franjas (ec. (2.4)) como

$$g(x,y) = I_A(x,y) + I_B(x,y)\cos[2\pi f_0 x + \phi(x,y)], \tag{3.24}$$

donde la fase $\phi(x,y)$ contiene la información de la forma del objeto (fase del frente de onda). $I_A(x,y)$ es la iluminación de fondo e $I_B(x,y)$ es la modulación de las franjas. La introducción de una inclinación considerablemente grande entre el haz de referencia y el del frente de onda bajo prueba produce franjas de frecuencia f_0, la cual en este contexto, será tratada como una frecuencia portadora espacial. Es evidente que si el interferograma carece de inclinación, el término del coseno que depende de f_0, se hará cero.

Haciendo un análisis del espectro de Fourier de un patrón de franjas como el dado por (3.1), se pueden resolver los problemas de determinación de signo en el interferograma (Frankowski *et al.*, 1989), la sensibilidad de variaciones de fase menores que 2π pueden ser detectadas y pueden ser sorteados algunos problemas de impresición causados por $I_A(x,y)$ e $I_B(x,y)$.

De acuerdo con la siguiente identidad,

$$\cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2},$$

se puede reescribir la ec. (3.1) como:

$$g(x,y) = I_A(x,y) + I_C(x,y)\, e^{(2\pi i f_0 x)} + I_C^*(x,y)\, e^{-(2\pi i f_0 x)}, \tag{3.25}$$

donde

$$I_C(x,y) = \frac{1}{2} I_B(x,y)\ e^{i\phi(x,y)}. \tag{3.26}$$

y el símbolo * significa el complejo conjugado. Aplicando la transformada de Fourier a la ec. (3.25) con respecto a x,

$$\mathscr{F}[g(x,y)] = \mathscr{F}[I_A(x,y)] + \int_{-\infty}^{\infty} I_C(x,y) e^{-2\pi i(f-f_0)} dx$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} I_C^*(x,y) e^{-2\pi i(f+f_0)} dx$$

por lo que

$$\hat{G}(f_x,y) = \hat{I}_A(f_x,y) + \hat{I}_C(f_x-f_0,y) + \hat{I}_C^*(f_x+f_0,y) \tag{3.27}$$

Donde $G(f_x, y)$ es el espectro de Fourier (transformada)$_x$ y f es la coordenada de la frecuencia espacial en la dirección x. Mientras que las variaciones de $I_A(x,y)$, $I_B(x,y)$ y $\phi(x,y)$ sean lentas en comparación con la frecuencia portadora espacial f_0, el espectro de Fourier estará separado por f_0 como se muestra en la Fig. 3.4 (a). Haciendo uso de la función filtro pasabandas $H(f_x-f_0, y)$ en el espacio de las frecuencias, la función $\hat{I}_C(f_x-f_0, y)$ puede ser aislada y trasladada por f_0 para remover la portadora y obtener $\hat{I}_C(f_x, y)$ como se muestra en la Fig. 3.4 (b), con lo que también se erradica a la intensidad promedio $I_A(x,y)$. Si se aplica en seguida la transformada de Fourier inversa de $\hat{I}_C(f_x, y)$ se obtiene como resultado la función compleja $I_C(x,y)$ dada en la ec. (3.26). La fase puede ser entonces obtenida por medio de dos operaciones equivalentes, en la primera, se calcula el logarítmo complejo de $I_C(x,y)$,

$$\log[I_c(x,y)] = \log\left[\frac{1}{2} I_B(x,y)\right] + i\phi(x,y)\ . \tag{3.28}$$

En esta expresión, la fase en la parte imaginaria está separada del término de modulación de intensidad (ó modulación de franjas) $I_B(x,y)$ en la parte real. Mediante la segunda operación, se pueden separar las partes real e imaginaria de $I_C(x,y)$ como:

$$I_C(x,y) = \frac{1}{2} I_B(x,y)\ \cos\phi(x,y) + \frac{1}{2} I_B(x,y\ )isen\phi(x,y). \tag{3.29}$$

y obtener la fase mediante

$$\phi(x,y) = \tan^{-1} \frac{Im\ [I_C(x,y)]}{Re\ [I_C(x,y)]} \tag{3.30}$$

donde *Re* e *Im* representan respectivamente a las partes real e imaginaria de $I_C(x,y)$. La fase así obtenida se encuentra aún envuelta en el intérvalo de -π a π y deben ser corregidas mediante algún algorítmo de desenvolvimiento de fase. El desenvolvimiento del mapa de fase remueve a las discontinuidades que aparecen cuando la fase pasa repentinamente de un valor de -π a otro de π. Con este último proceso, finaliza el análisis de interferogramas por el método de la transformada de Fourier. Una interpretación física de este método es la de ver al interferograma como un holograma para reconstruir el frente de onda. De esta manera se generan tres interferogramas: uno es el frente de onda de referencia (plana), otro el frente de onda bajo prueba y un tercero el conjugado del frente bajo prueba, donde $\hat{I}_A(f_x, y)$ es el orden cero, $\hat{I}_C(f_x-f_0, y)$ y $\hat{I}_C^*(f_x-f_0, y)$ son los ordenes +1 y -1 o, frente de onda de prueba y de referencia respectivamente.

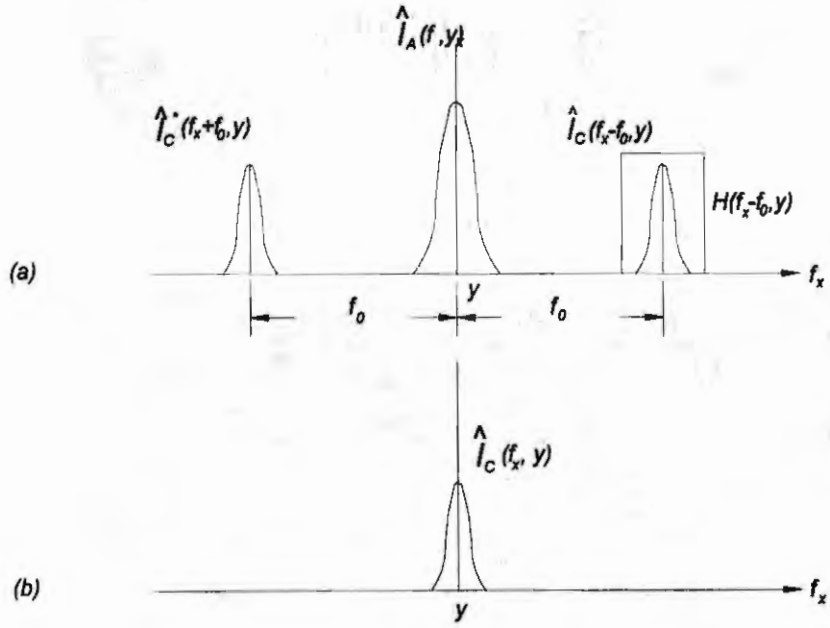


Fig. 3.4 (a) Espectro de Fourier de un patrón de franjas. (b) espectro sencillo seleccionado y llevado a el origen. El eje *y* es normal a la figura

La interferometría de Fourier se puede ejemplificar en la secuencia de la figura 3.5, la imagenes fueron obtenidas mediante el programa computacional Intercho (C. Treviño-Palacios, 1992). La toma 3.5 (a) es de un interferograma simulado con cantidades de

aberración esférica igual a 1.8; coma, -1.2 y astigmatísmo, 1.4, al introducir cierta inclinación tal que aparezcan franjas abiertas [Fig. 3.5 (b)] y filtrar con un pasabandas al interferograma [Fig. 3.5 (c)], se obtiene la transformada de Fourier como lo indica la Fig. 3.5 (d). Posteriormente el orden uno se translada al origen para remover la portadora y obtener $\hat{I}_C(f_x, y)$ [Figs. 3.5 (e) y (f)]. Aplicando en seguida la transformada de Fourier inversa de $\hat{I}_C(f_x, y)$ se obtiene como resultado la función compleja $I_C(x,y)$], con la cual la fase puede ser calculada [Fig. 3.5 (g) usando cualquiera de las ecuaciones (3.29) o (3.30).

Finalmente con un algorítmo de desenvolvimiento de la fase (Takeda et. al., 1982) se recupera la forma del objeto del mapa de fase envuelta [Fig. 3.5 (h)].

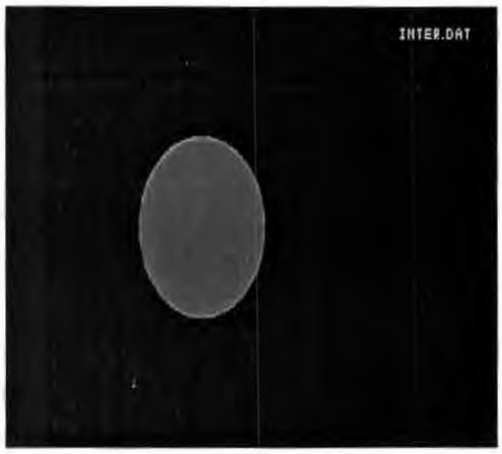
(a)

(b)

(c)

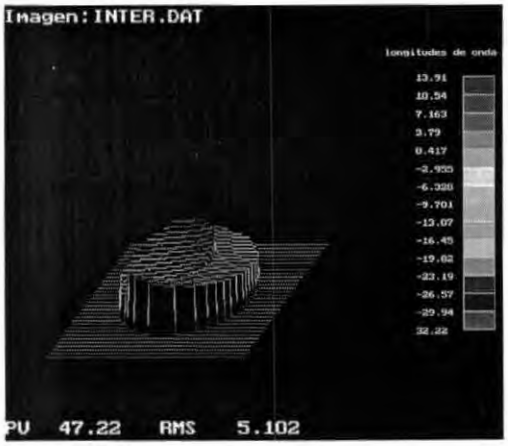
(d)

(e)



(f)

(g)



(h)

Fig. 3.5 Interferometría de Fourier

Referencias

Frankowski, G., I. Stobbe, W. Tischer, y F. Schillke, "Investigation of Surface Shapes Using a Carrier Frequency Based Analysis System", Proc. SPIE, **1121**, 89, (1989).

Greivenkamp, J. E. and J. H. Bruning, "Phase Shifting Interferometry", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Kujawinska, M., "Spatial Phase Measurement Methods", *Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement Techniques*, Robinson, D. and G. Reid, Ed., IOP Publishing Ltd, Bristol, 1993.

Malacara, D., V. I. Vlad y M. Servin, "Spatial Carrier Analysis of Interferograms with Aspheric Wavefronts", Proc. SPIE, Interferometry 94, Warsaw, Poland (1994).

Takeda, M., H. Ina y S. Kobayashi, "Fourier-Transform Method of Fringe-Pattern Analysis for Computer-Based Topography and Interferometry", J. Opt. Soc. Am., **72**, 156, (1982).

Treviño-Palacios, C., "Interferometría de Fourier", Tesis de grado (M.C), C.I.O. - U.G., (1992).

4. Limitaciones en la Interferometría Digital con Pruebas Asféricas

4.1 Prueba de Superficies Fuertemente Asféricas

Cuando se prueba un frente de onda asférico mediante el uso de cualquier método de evaluación digital como lo son, la interferometría de corrimiento de fase, la interferometría de Fourier, o, mediante el análisis con portadora espacial, se encuentra que hay un límite del máximo grado de asfericidad en la prueba si no es utilizado un compensador nulo.

4.1.1 Introducción

Ha sido sugerido muchas veces en la literatura que un frente de onda asférico puede ser interferométricamente probado en una configuración interferométrica no nula, usando un compensador asférico en la computadora. Esta aproximación tiene una desventaja que es la introducción de muchas franjas en la computadora. Si el interferograma es muestreado con un sensor con p x p elementos de detección (pixeles), entonces habrá un límite en el número de franjas que podrán probarse proporcional al espaciamiento entre franjas. En este capítulo se estudiarán estas limitaciones para diferentes métodos de análisis de interferogramas.

4.1.2 Análisis de Posibilidades

Cuando se prueban superficies fuertemente asféricas asumiendo en éstas solo aberración esférica primaria, se presenta un problema, ésto es, el número de franjas de interferencia es grande justo en el sector donde la pendiente del frente de onda es muy aguda. Existen tres posibilidades para realizar la prueba:

a) Analizar el interferograma sin ningún tipo de compensación y obtener el frente de onda deformado respecto de la esfera osculadora.

b) Compensar matemáticamente la aberración esférica mediante el uso de la computadora (Servin, Malacara y Rodríguez-Vera, 1994; Greivenkamp, 1987; Womack, 1984) para obtener la deformación con respecto a la esféra ideal.

c) Hacer la compensación de la aberración esférica usando componentes ópticas (lentes, espejos, hologramas, etc.) con la aberración opuesta. Este método asume que:

i) el compensador está bien diseñado y bien terminado. Aunque no es muy difícil de lograr, incrementa el costo.

ii) el sistema óptico tiene que ser cuidadosamente alineado evitando un descentramiento ó un desplazamiento a lo largo del eje óptico. Este es el problema principal de los compensadores y también una importante fuente de errores. Como se puede observar, es deseable no depender de compensadores ópticos y sí del desarrollo de los métodos basados en **a)** y **b)**. Desafortunadamente estos dos métodos tienen algunas limitaciones que se describirán aquí.

Cuando se prueba una superficie asférica con aberración esférica primaria, el frente de onda puede ser representado a lo largo del eje x por

$$W = Ax^4 + Dx^2 + Ex \tag{4.1}$$

donde A, D y E son los coeficientes de Kingslake (1925-1926) para el frente de onda con aberración esférica, defoco e inclinación en el eje y respectivamente. Aunque el número de franjas sea extremadamente alto, se puede corregir si se introduce la cantidad adecuada de defoco, dependiendo del método de análisis de interferogramas que se utilice.

Hay tres posibles métodos para el análisis:

1. Interferometría de corrimiento de fase
2. Análisis de interferogramas introduciendo una portadora lineal
3. Análisis de interferogramas mediante la introducción de una portadora circular.

Se estudiarán los tres métodos para la prueba de los frentes de onda asféricos en el presente capítulo.

4.2 Prueba a Frentes de Onda con Aberración Esférica Primaria

El máximo valor permisible de la densidad de franjas (franjas por unidad de longitud) esta limitado por la resolución del detector. Del teorema de muestreo se sabe que el período de una franja debe ser más grande que el doble de la separación entre pixeles. Como un factor de seguridad se pueden tomar tres pixeles por período. Por otro lado, la densidad de franjas se incrementa linealmente con la pendiente del frente de onda con respecto del frente de referencia. De aquí que, dada la resolución de un detector, la máxima

asfericidad del frente de onda está fija.

Asumiendo que la aberración principal del frente de onda es esférica primaria y no tiene defoco, la aberración del frente de onda a lo largo de un diámetro en el eje x puede ser representada por

$$W(x,0) = Ax^4 \tag{4.2}$$

con una pendiente máxima dada por

$$m_o = \frac{dW(x,0)}{dx} = 4Ax_{máx}^3 = \frac{4W_o}{x_{máx}} \tag{4.3}$$

o

$$m_o = \nu_o \lambda \tag{4.4}$$

de aquí, la máxima densidad de franjas ν_0 es

$$\nu_o = \frac{4W_o}{\lambda x_{máx}} \tag{4.5}$$

Si el interferograma carece de defoco y de inclinación, se puede ver en la Fig. 4.1 (a) que la máxima densidad de franjas ν_0 se encontrará cerca de la orilla. W_0 es la deformación del frente de onda en la orilla.

4.2.1 Pruebas Mediante Interferometría de Corrimiento de Fase

En el método interferométrico de corrimiento de fase (Greivenkamp y Bruning, 1992), el interferograma puede ser ajustado a el mínimo posible local de la frecuencia espacial (el máximo valor del mínimo espaciamiento entre franjas) con la introducción de la correcta cantidad de defoco. La deformación del frente de onda con un término de defoco está dada por

$$W(x,0) = Ax^4 + Dx^2 \tag{4.6}$$

Con el término de defoco ya incluido, la condición ideal es aquella en la cual la máxima pendiente es la curva sea tan pequeña como sea posible (García-Márquez, Malacara y Servín, 1994). Esto ocurre cuando las pendientes en los puntos **A** y **B** mostrados en la Fig.

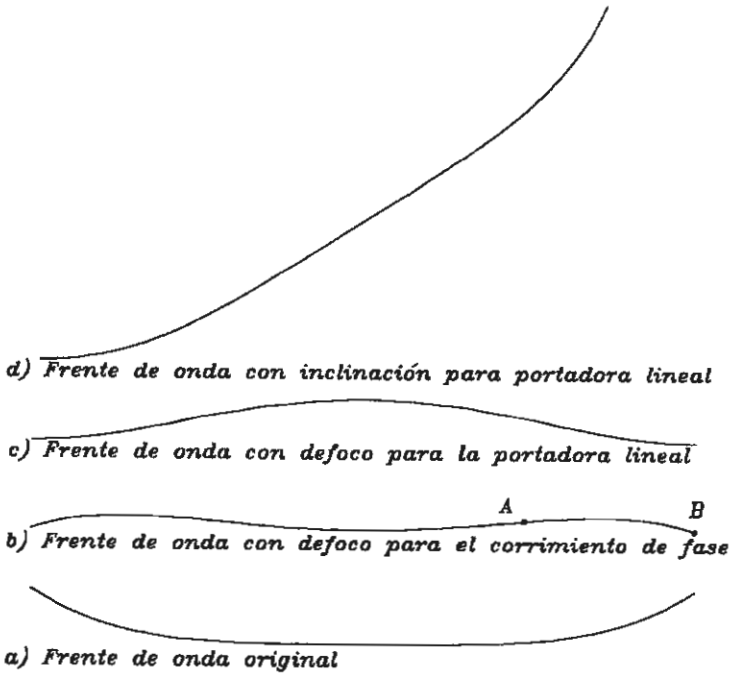


Fig. 4.1 Sección cruzada de los frentes de onda a ser analizados

4.1 (b) tengan la misma pendiente pero signos opuestos. Así queda impuesta la condición en la que ambas pendientes satisfagan

$$\left[\frac{dW(x,0)}{dx}\right]_A = -\left[\frac{dW(x,0)}{dx}\right]_B \tag{4.7}$$

que es la igualación del punto de inflexión en **A** y menos la derivada del punto **B** en la orilla del interferograma. Con lo que se llega a los resultados intermedios

$$m(x_{máx}) = 4Ax^3_{máx} + 2Dx_{máx} , \tag{4.8}$$

y

$$m(x_i) = 4A\left(-\frac{D}{6A}\right)^{3/2} + 2D\left(-\frac{D}{6A}\right)^{1/2} ,$$
$$x_i = \sqrt{-\frac{D}{6A}} . \tag{4.9}$$

Aplicando la ec. (4.7) se obteniene la siguiente relación

$$-2\left(\frac{2}{27}\right)^{1/2}\sigma^3 - \sigma^2 x_{máx} + 2x_{máx}^3 = 0 \tag{4.10}$$

donde

$$\sigma = \left(-\frac{D}{A}\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

La máxima frecuencia espacial se reduce entonces al mínimo valor posible con esta cantidad de defoco. Otra expresión para obtener la máxima separación entre franjas, aunque no es muy exacta, es simple de calcular, se obtiene si se impone la condición de que la desviación sea cero en la orilla. Es fácil ver que con esta condición se obtiene

$$W(x,0) = Ax^4 - Ax_{máx}^2 x^2 \tag{4.12}$$

Entonces, la máxima frecuencia espacial ocurre en la orilla, para un valor de la pendiente de

$$m_s = \left[\frac{dW(x,0)}{dx}\right]_{x_{máx}} = 2Ax_{máx}^3 \tag{4.13}$$

obteniendo la separación entre las franjas dada por

$$m_s = \nu_s \lambda \tag{4.14}$$

donde la máxima densidad entre franjas está dada por

$$\nu_s = \frac{2W_o}{\lambda x_{máx}} = \frac{\nu_o}{2} \tag{4.15}$$

4.2.2 Pruebas Analizando el Interferograma con Portadora Espacial Lineal

Si es introducida una portadora espacial lineal con la mínima inclinación necesaria y haciendo uso de la condición dada por

$$\frac{\partial[x sen\theta_o + W(x,y)]}{\partial x} > 0 \tag{4.16}$$

la nueva expresión para $W(x,0)$ es

$$W(x,0) = A(x^3 + 4x_{máx}^2)x = \frac{W_o}{x_{máx}^4}(x^3 + 4x_{máx}^2)x \tag{4.17}$$

la cual produce una pendiente con un máximo local m_l igual a

$$m_l = \frac{dW(x,0)}{dx} = 8Ax_{máx}^3 = \frac{8W_o}{x_{máx}} \tag{4.18}$$

ó

$$m_l = \nu_l\lambda = 2\nu_o\lambda = 2m_o \tag{4.19}$$

y la máxima densidad de franjas es

$$\nu_l = \frac{8W_o}{\lambda x_{máx}} = 2\nu_o \tag{4.20}$$

donde ν_l es la densidad local de franjas en la región donde esta densidad tiene un valor mínimo (Fig. 1 (d)).

4.2.3 Pruebas Analizando el Interferograma con Portadora Espacial Circular

En el caso de la portadora espacial circular, si se introduce un defoco tal que la condición $2D_rS > \partial\phi/\partial S$ garantice que ninguna franja en toda la abertura del interferograma cruce más de una sola vez cualquier linea que cubra de orilla a orilla el interferograma, (Malacara, Vlad y Servín, 1994), ver por ejemplo la Fig. 4.2. La nueva expresión para el frente de onda con defoco es

$$W(x,0) = A(x^2 + 2x_{máx}^2)x^2 = \frac{W_o}{x_{máx}^4}(x^2 + 2x_{máx}^2)x^2 \tag{4.21}$$

que produce un máximo local de la pendiente igual a

$$m_c = \frac{dW(x,0)}{dx} = \frac{32Ax_{máx}^3}{9\sqrt{3}} = \frac{32W_o}{9\sqrt{3}\ x_{máx}} \tag{4.22}$$

ó la expresión equivalente

$$m_c = \nu_c\lambda = \frac{8\nu_o\lambda}{9\sqrt{3}} = \frac{8m_o}{9\sqrt{3}} \tag{4.23}$$

con un máximo en la densidad de franjas dado por

$$\nu_c = \frac{32W_o}{9\sqrt{3}\ \lambda x_{máx}} = \frac{8\nu_o}{9\sqrt{3}} \tag{4.24}$$

como en la figura 4.1 (c), donde ν_c es el máximo local en la densidad de franjas es esta región. De esta manera, la densidad de franjas es más pequeña en el caso de la portadora circular en un factor dado por

$$\frac{\nu_l}{\nu_c} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3.897 \tag{4.25}$$

La conclusión es que para probar superficies asféricas, el método que permite probar pendientes más fuertes en la superficie, es el de interferometría de corrimiento de fase, desgraciadamente este método requiere de un mayor desarrollo instrumental. La portadora circular permite probar frentes de onda asféricos con un grado de asféricidad aproximadamente cuatro veces mayor comparandolo con la portadora lineal. Si se asume ahora que un sensor con 1024 x 1024 detectores es usado para proyectar la imagén de todo el interferograma, según el teorema del muestreo, al menos dos pixeles deben ser tomados por cada franja en la región de máxima frecuencia espacial como factor de seguridad. Por el teorema del muestreo, la máxima densidad de franjas permitida es

$$\nu_{máx} = \frac{p}{2x_{máx}}. \tag{4.26}$$

Así, usando interferometría de corrimiento de fase, se puede probar un frente de onda asférico con un valor máximo de aberración esférica primaria dado por

$$\frac{W_o}{\lambda} = \frac{p}{4} = 256\ \textit{franjas} \tag{4.27}$$

Por medio de portadora circular, el máximo valor para el frente de onda asférico de la aberración esférica primaria estará dado por

$$\frac{W_o}{\lambda} = \frac{p}{16} = 64 \; franjas \tag{4.28}$$

en franjas que pueden ser probadas. Usando portadora circular, el máximo valor de aberración esférica es

$$\frac{W_o}{\lambda} = \frac{9\sqrt{3}\,p}{64} = 0.2435\,p = 250 \; franjas \tag{4.29}$$

podrán probarse.

4.2.4 Propuesta para el Análisis con Interferometría de Sub-Nyquist

El máximo grado de asféricidad que puede ser probado, se puede extender aún más por medio del método interferométrico de sub-Nyquist[2]. De acuerdo con el teorema del muestreo o de Nyquist, el interferograma debe ser muestreado en al menos dos veces por cada franja, a fin de reconstruir el objeto por medio de las técnicas del desenvolvimiento de la fase. Esta suposición básica puede ser solucionada con un conocimiento *a priori* de la superficie a ser probada. Greivenkamp ha demostrado que si se supone a la superficie bajo prueba como una superficie sin discontinuidades, puede aún ser reconstruída si las franjas son muestreadas a menos de la frecuencia de Nyquist. Desgraciadamente el sensor utilizado en el análisis del método interferométrico de sub-Nyquist, es un sensor con sus detectores separados entre sí y con un muy especial diseño y construcción. Cada pixel en este sensor se aproxima a un detector puntual tal que no más de una mitad de franja yace sobre el elemento de detección (pixel). Este método permite probar grados de asfericidad sustancialmente mayores.

Referencias

Servin, M., D. Malacara y R. Rodríguez-Vera, "Phase Locked Loop Interferometry Applied to Aspheric Testing Using a Computer Stored Compensator", Appl. Opt., **33**, 2589 (1994).

Greivenkamp, J., "Sub-Nyquist Interferometry", Appl. Opt., **26**, 5245 (1987).

Womack, K. H., "Interferometric Phase Measurement Using Spatial Synchronous Detection", Opt. Eng., **23**, 391 (1984).

Kingslake, R., "The interferometer Patterns Due to the Primary Aberrations", Trans. Opt. Soc., **27**, 94 (1925-1926).

Greivenkamp, J. E. and J. H. Bruning, "Phase Shifting Interferometry", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Malacara, D., V. I. Vlad y M. Servin, "Spatial Carrier Analysis of Interferograms with Aspheric Wavefronts", Proc. SPIE, Interferometry 94, Warsaw, Poland (1994).

García-Márquez, J., D. Malacara y M. Servin, "Limit to the Degree of Asphericity When Testing Wavefronts Using Digital Interferometry", Proc. SPIE, **2263**, 274 (1994).

5. Aspectos de Diseño Optico en el Interferómetro de Shack

5.1 El interferómetro de Shack

Existen bastantes posibilidades para probar superficies asféricas (Mallick, 1992) ya que son varias configuraciones las que lo permiten, por ejemplo Twyman-Green, Fizeau, Smart (o Linnik), Burch o Shack (1979) el cual es una variante del Fizeau. De todos los interferómetros, el del tipo Twyman-Green es el más caro y requiere de componentes de alta presición. El Fizeau tiene la ventaja que su divisor de haz no necesita ser tan preciso como el Twyman-Green ya que tanto la superficie bajo prueba como la de referencia no encuentran ninguna componente óptica entre ellas. Otra opción son los interferómetros comerciales del tipo Fizeau (Wyko, Zygo y Phase Shift Technology) pero su precio es también bastante alto.

El interferómetro de Shack, es un pequeño instrumento basado en una configuración Fizeau. Con este interferómetro (Fig. 5.1), se puede obtener un interferograma sin la distorsión causada por el divisor de haz ya que, el efecto de interferencia tiene lugar entre la superficie bajo prueba y la superficie de referencia sin ningún elemento óptico entre ellas.

El uso de una fuente de luz laser con una longitud de coherencia grande, permite una separación considerable entre la superficie bajo prueba y la de referencia. Como la superficie bajo prueba es asférica y la de referencia es esférica, se hace necesaria una *prueba nula* y por consecuencia insertarse en el arreglo un corrector nulo. Es bien sabido, que la introducción de más superficies ópticas en un sistema puede introducir errores por lo cual es preferible el uso de las *pruebas no nulas*.

5.1.1 Principios de Operación

El interferómetro solo requiere de una componente de presición, ésta es esférica y concéntrica con la superficie bajo prueba. El esquema básico se muestra en la figura 5.1,donde una fuente coherente de luz es enfocada en una lente plano convexa la cual formará una fuente puntual en el conjugado de el objetivo de microscopio. El foco del objetivo está sobre el *pinhole* que se encuentra sobre una cara del cubo divisor de haz. Este elemento tiene en su otra cara, una lente plano convexa cementada y de alta calidad con

centro de curvatura en el mismo punto que el elemento de prueba, sobre la cara posterior del cubo. Una parte del haz lleva la trayectoria hacia la superficie en prueba cuyo frente de onda interferirá con el correspondiente frente de onda reflejado de la superficie esférica de referencia con radio de curvatura r_1. Es por esta razón que se requiere una alta calidad en la lente plano convexa, el camino de ambos frentes de onda hacia el centro de curvatura es el mismo. El cubo de shack (que se puede considerar como una lente viconvexa muy gruesa) formará la imagén y el patrón de interferencia de los dos frentes de onda sobre un dispositivo de carga acoplada (CCD), el cual según las especificaciones tiene 66 μm. de lado (en la dirección y).

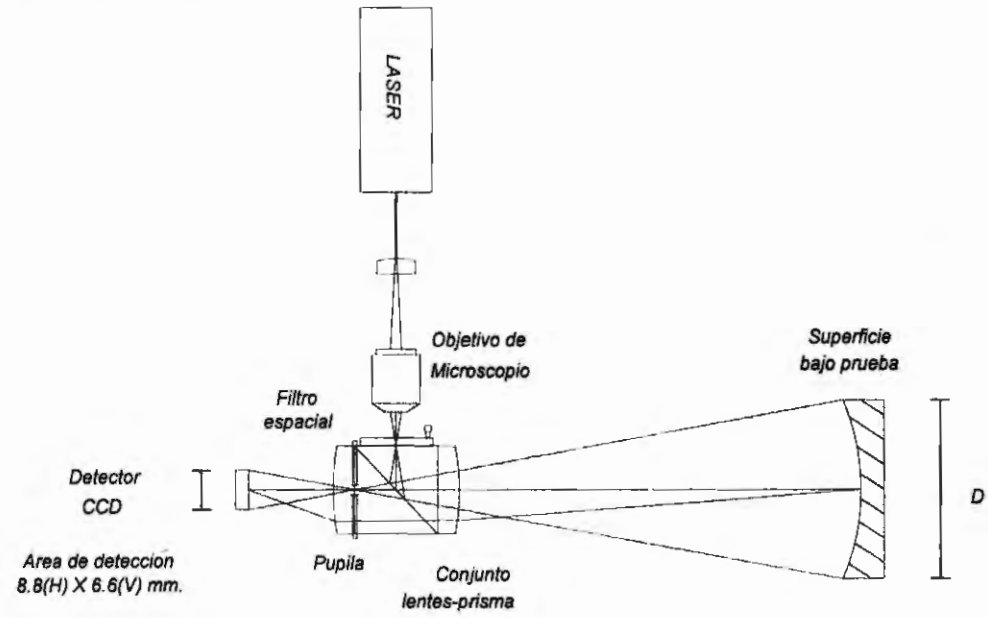


Fig. 5.1 Diagrama del interferómetro Shack-Fizeau

5.1.2 Viabilidad

Una importante consideración, es que en el sistema debe de haber óptica adicional para producir la imagén de la superficie bajo prueba en el sensor CCD. Esto se puede lograr cementando en la cara posterior del cubo una lente plano convexa con radio de curvatura r_2. El sistema tiene ciertas ventajas, i.e., es un arreglo óptico simple que, usandose acompañado del análisis con portadora circular, carece del movimiento de sus partes como sucede con la interferometría de corrimiento de fase; se puede hacer el análisis mediante un solo interferograma.

5.2 Sistema Optico

Se ha diseñado y construido el Interferometro Shack-Fizeau (1979) mostrado en la Fig. 5.1 con el propósito de probar espejos telescópicos paraboloidales, como se mencionó al principio de este capítulo. Para evitar introducir algunas posibles fuentes de error, se ha prescindido de compensar al interferómetro de aberración esférica. El diseño del interferómetro ha seguido los siguientes pasos:

5.2.1 Diseño Básico

a) El radio de curvatura r_1 de la superficie de referencia se definió con un valor igual al grueso t_3 del prisma más el espesor elegido de la lente de referencia r_1.

b) El segundo paso fué calcular el radio de curvatura r_2 de la lente formadora de imagen cementada al igual que r_1 en el prisma. Una vez ensambladas tanto r_1 como r_2 al prisma, se puede considerar al conjunto como una lente gruesa de espesor T como se puede observar de la Fig 5.2. Considerando que la distancia del espejo bajo prueba es muy grande comparada con la distancia al detector, la aproximación del semi-diámetro angular de la abertura del interferómetro está expresada como

$$\tan\theta = \frac{D}{2R} \tag{5.1}$$

este semi-diámetro angular debe ser igual a

$$\tan\theta = \frac{d}{2F} \tag{5.2}$$

donde d es el máximo tamaño posible de la imagen en el detector y F es la distancia focal efectiva del ensamble prisma-lentes. De estas dos expresiones se puede encontrar que la distancia focal efectiva F está dada por

$$F = \frac{Rd}{D} \ . \tag{5.3}$$

Cualquier texto sobre Optica geométrica representa la distancia focal efectiva como

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{T(n-1)^2}{n\, r_1 r_2} \tag{5.4}$$

de aquí se puede llegar a

$$r_2 = \frac{(n-1)\,F}{r_1 - (n-1)\,F}\left[\frac{T(n-1) - nr_1}{n}\right] \tag{5.5}$$

quedando completo el diseño de los elementos ópticos.

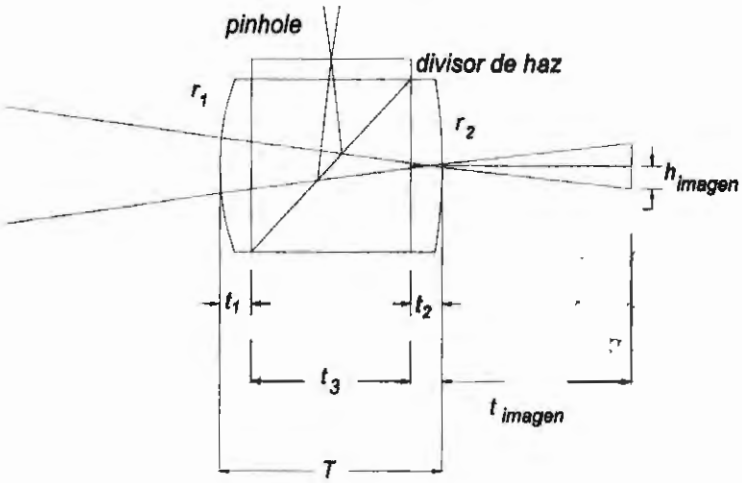


Fig. 5.2 Diagrama

5.2.2 Evaluación del Diseño Optico

Para evaluar numericamente la calidad de la imagen en el interferómetro, el primer paso consiste en calcular la posición y el diámetro de la caustica, de un espejo paraboloide característico a ser probado. El diámetro w de la cintura está dado (Malacara, 1992) por

$$w = \frac{1}{16}\,\frac{KD^3}{r^2} \tag{5.6}$$

donde K es la constante de conicidad, r es el radio de curvatura en el vertice y D es el diámetro del espejo. La distancia L de esta cintura desde el centro de curvatura del espejo es

$$L = \frac{3}{16}\frac{KD^2}{r} . \tag{5.7}$$

Es necesario que el interferómetro forme una imagen libre de distorsión (Malacara y Malacara, 1995) de la superficie bajo prueba sobre el plano del detector. Esta propiedad fué confirmada mediante un programa para evaluar el diseño de lentes (Code V), considerando que el objeto es el paraboloide. El diámetro de la pupila de entrada y la posición son los de la cintura de la caustica para el espejo paraboloide a ser probado, como se calculo por medio de las Ecs. 5.6 y 5.7.

Otro método equivalente para evaluar y calibrar el sistema fué mediante el programa de diseño de lentes. Donde un objeto puntual fué puesto en la posición especificada de la fuente puntual de luz. El plano objeto no fué considerado en la imagen para este objeto, en lugar de esto, el plano de observación fué puesto en el plano del detector. La intersección de los rayos para el haz de rayos axial fué calculada en el espejo bajo prueba y en el plano del detector. Idealmente, debe de haber una relación lineal entre las alturas correspondientes en esos dos planos. Cualquier desviación de la linealidad in la altura de los rayos en el plano imagen, debe ser mas pequeña que la separación de pixeles en el detector. Este fué el caso, de otro modo, las no linealidades pueden ser tomadas en cuenta y compensadas en los cálculos.

5.2.3 Diseño Final

Los valores finales para el diseño del cubo del interferómetro Shack-Fizeau fueron los mostrados en la siguiente tabla

Especificaciones: Cubo Shack-Fizeau

Superficie	Radio	Espesor	Vidrio	Abertura
Objeto	1498,0000	1467,6000		
Pupila	30,4000	5,0000	BK7	0,4991
2	Infinito	25,4000	BK7	0,6971
3	Infinito	5,0000	BK7	1,7037

4	-72,8385	30,0301		1,9009
Imagen	Infinito	0		3,3002

Dist. focal efectiva	47,1347	Dist. pupila de entrada	0,0000
Dist. focal posterior	28,4746	ϕ pupila de salida	1,1979
Dist. focal anterior	-39,3467	Dist. pupila de salida	-27,9897
F/número	47,1347	Altura de la imagen parax.	3,3002
Angulo de campo	3,9069	Dist. de la imagen parax.	30,0301
Dist. imagen	-30,0301	λ de ref. [=] nm.	632,8
Relación de amplif.	0,0330	Camino total	-1533,0301
F/número finito	48,4332	Dist. objeto	1567,6000
ϕ pupila de entrada	1,0000	ϕ del espejo	210,0000

La gráfica de aberración transversal se muestra en la Fig. 5.3

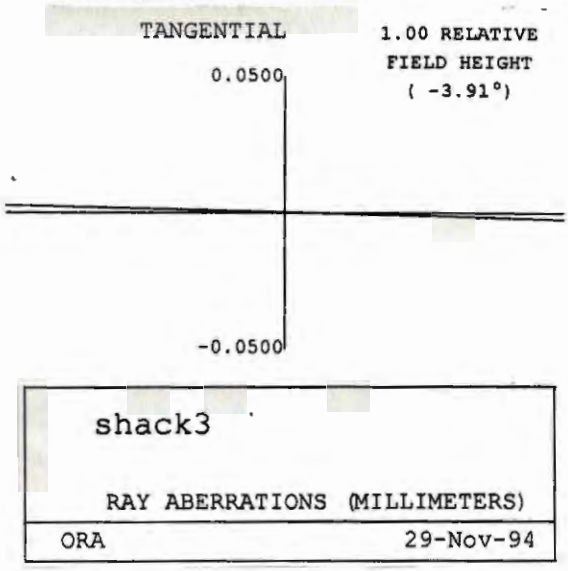


Fig. 5.3 Gráfica de la aberración transversal del sistema

Referencias

Mallick, S., "Common-Path Interferometers", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Shack, R. V. y G. W. Hopkins, "The Shack Interferometer", *Opt. Eng.*, **18**(2), 226, (1979).

Malacara, D. y Z. Malacara, *Handbook of Lens Design*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.

Malacara, Z. y D. Malacara, "Design of Lenses to Project the Image of the Pupil in Optical Testing Interferometers", *Appl. Opt.*, **34**, 739 (1995).

García-Márquez, J., D. Malacara-Hernández y D. Malacara-Doblado, "Some Results and Problems Encountered in the Practical Implementation of a Shack-Fizeau Interferometer", Proc. SPIE, **2545** (1995).

Conclusiones

Esta tesis cubre el campo de la interferometría digital de manera muy amplia y general. Sin embargo, las contribuciones principales del autor se encuentran descritas en los capítulos cuatro y cinco.

El capítulo cuatro describe los límites en el grado de asfericidad del frente de onda para permitir la digitalización de la imagen sin necesidad de compensadores. Estos límites se analizan para los tres tipos básicos de interferometría, que son, la de desplazamiento de fase, con portadora espacial lineal y con portadora espacial circular.

El capítulo cinco describe una aplicación práctica de los métodos interferométricos en un interferómetro de Shack-Fizeau. La contribución del autor en este capítulo es el método de diseño para evitar la distorsión del interferograma al formar su imagen sobre el detector. Los diferentes elementos ópticos se han diseñado usando el programa de diseño óptico *Code V*.

Finalmente, se construyó y ensambló el interferómetro, probando su funcionamiento en una superficie parabólica de 20 cms. de diámetro.

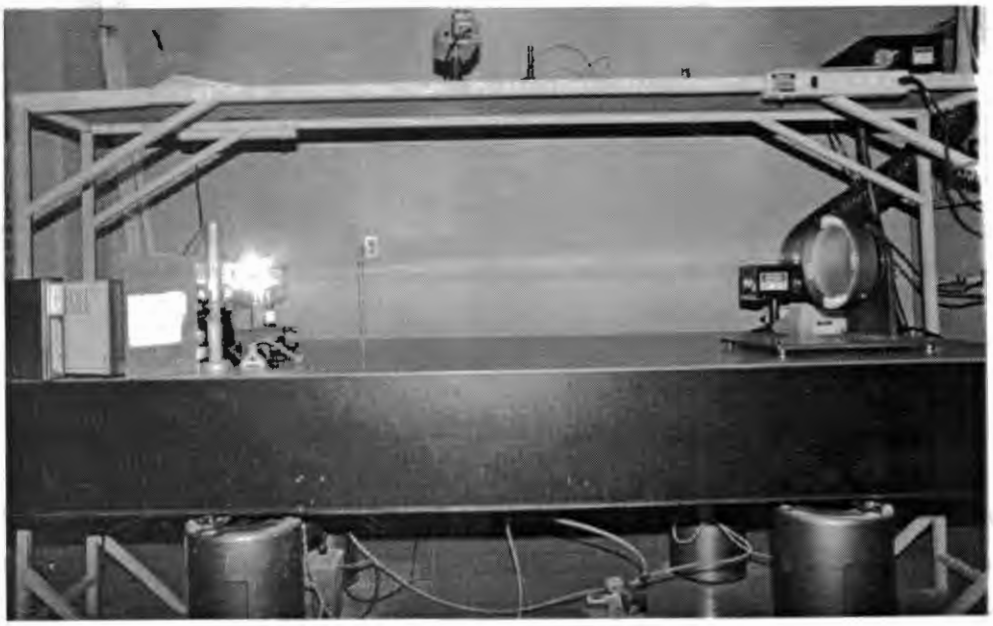


Fig. C1. Trayectoria del haz en el interferómetro Shack-Fizeau

Por otro lado, se muestra en las figuras C1 y C2, las fotografías con acercamiento

del ensamble cubo de Shack-cámara CCD y la configuración del interferómetro incluida la superficie a ser probada. Mediante el programa computacional que aparece en el apéndice 2, se analizaron las imágenes previamente digitalizadas del interferómetro de Shack-Fizeau. Como se puede observar de ellas (figura C3a), las franjas solo cubren parcialmente a la captura de la imagen, esto es, la imagen del espejo es proyectada a la mitad del dispositivo CCD. Este problema es relativamente fácil de corregir ya que es debido casi en su totalidad a una alineación deficiente del sistema óptico. El asunto de la alineación pasa a afectar no solo a la proyección de la imagen en el area del detector, sino también, al contraste de las franjas.

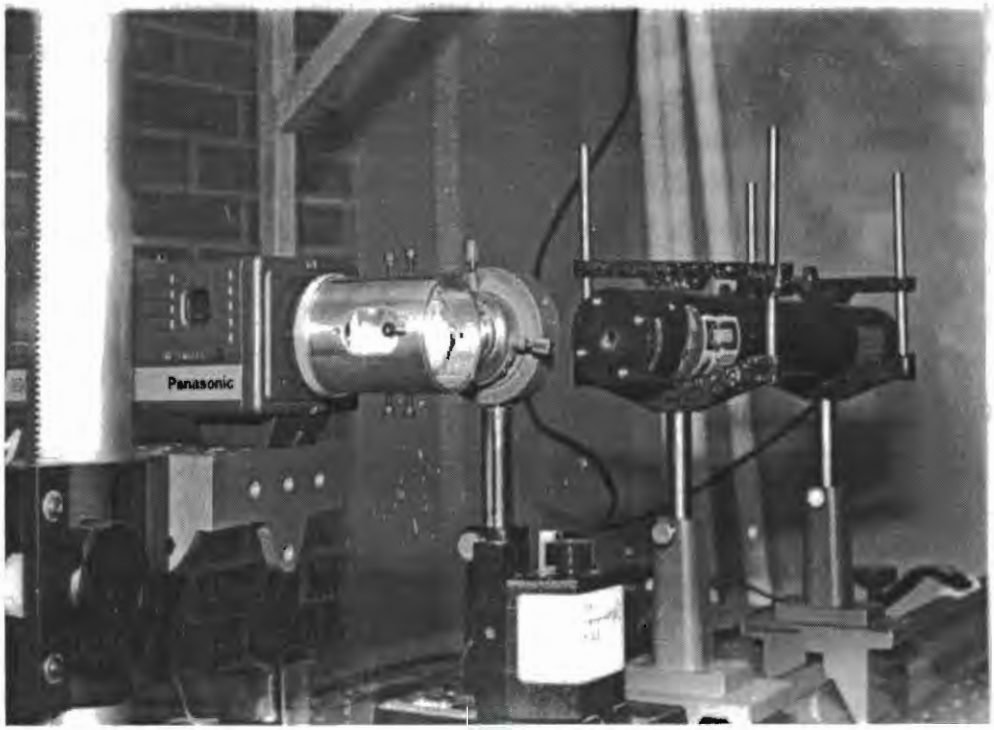


Fig. C1. Vista del ensamble Cubo de Shack-CCD

Si acaso se tuviera una alineación aceptable y un haz de luz aceptablemente filtrado, y el problema del contraste persistiera, habría que revisar que el laser fuera unimodal, esto permitiría tener un buen grado de coherencia temporal en la fuente luminosa y una longitud de coherencia suficiente como para cubrir la trayectoria Fizeau del interferómetro. En la figura C3d, se observa que el algorítmo para obtener el arcotangente de la fase no puede resolver satisfactoriamente el pobre contraste del patrón de franjas. Aunque el bajo contraste se debe a los problemas con la alineación, algo similar podría ocurrir si no se tiene un buen grado de coherencia en la fuente luminosa.

La introducción de las portadoras lineal (Fig. C4) y circular (Fig. C5), fué realizada en la superficie bajo prueba generando cierta cantidad de inclinación y defoco respectivamente.

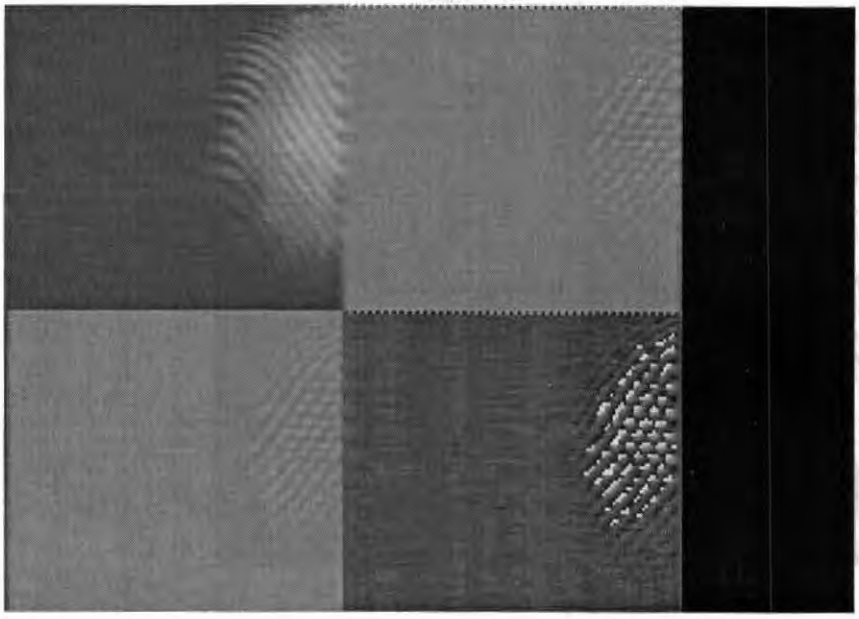


Fig. C3. De izquierda a derecha y de arriba hacía abajo, (a), (b), (c) y (d).

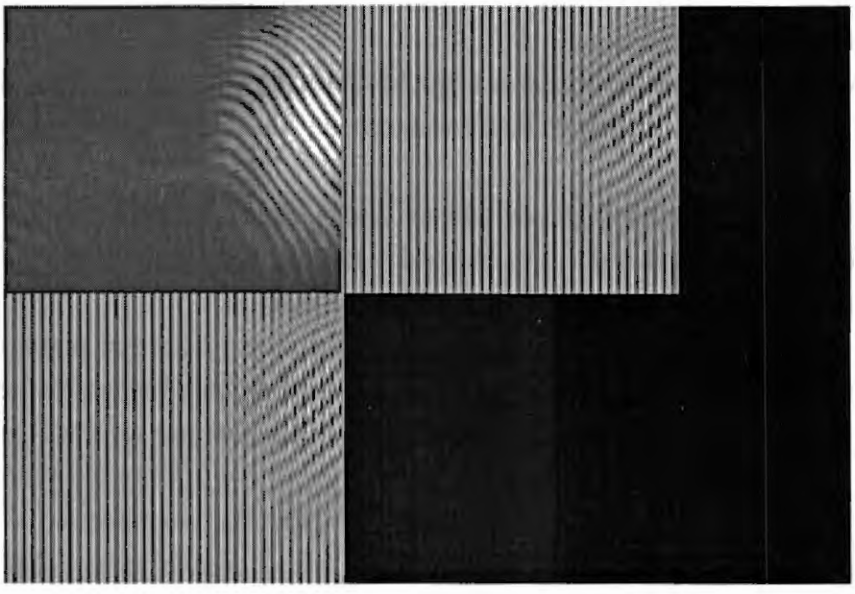


Fig. C4. Introducción de una portadora espacial lineal

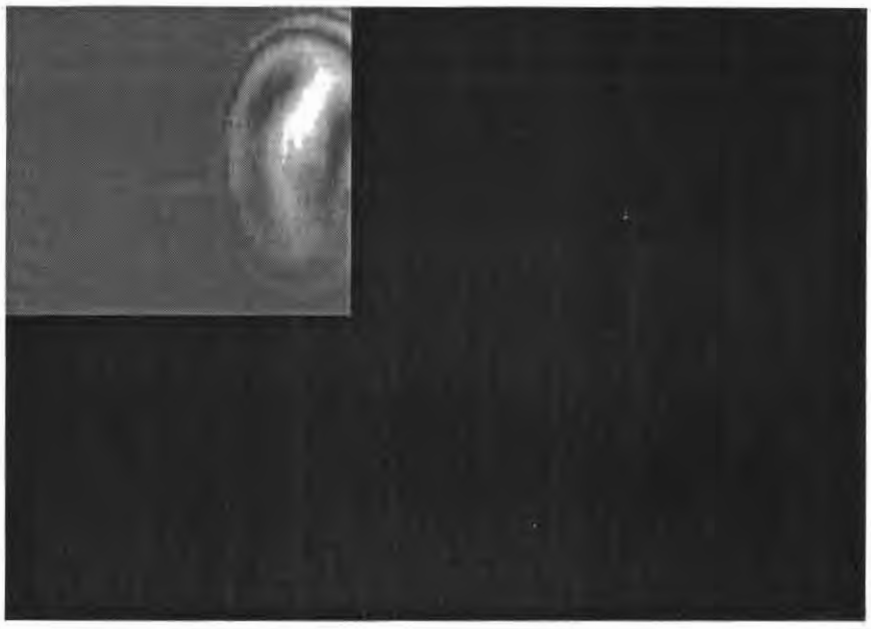


Fig. C5. Introducción de una portadora espacial circular

Se mencionó sobre el algorítmo para el procesamiento de franjas del apéndice 1 y ahora brevemente se pretende explicar.

-Como primer paso, el patrón de franjas es adquirido directamente por el dispositivo CCD sobre el cual como se ha dicho, el interferómetro de Shack-Fizeau proyecta la imagen.

-En seguida, el interferograma (modulado en fase y con la información de las deformaciones del frente de onda) es multiplicado por dos frecuencias, una senoidal y otra cosenoidal, con una frecuencia igual a la frecuencia de la inclinación.

-Se efectúa la multiplicación de cada una de estas funciones pixel por pixel y se despliegan en el monitor, en él, se tienen dos patrones de moiré de baja frecuencia junto con un patrón de franjas de alta frecuencia, mismos que son pasados por un filtro pasa-bajas.

-El arcotangente del cociente del filtraje da como resultado la fase deseada.

-Como la fase se encuentra envuelta, entonces se procede a desenvolverle y obtener así la forma del frente de onda.

APENDICE I

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <agraficas.h>
int GraphMode;
int GraphDriver;
unsigned char buffer[256];
unsigned char far *scrn=(unsigned char far*) 0xA0000000;
rnain()
{
 int numwrite,i,j,pix,Is[l00],ii,jj,it;
 float DC,cont,sum,r,alfa,Il,I2,I3,CTE,W,RES,fase=0,wd[128],frec=7.9;
 unsigned char w[100][127];
 FILE *infile;
 char filename[80];
 printf("Dame el nombre de la imagen:\n");
 gets(filename);
 agraficas();
 if ((infile=fopen(filename,"rb"))==NULL) {printf("No encontre archivo"); exit(0)
 for(i=0;i<=l99;i++)
 {
  numwrite=fread((void *)buffer,sizeof(char),256,infile);
  for(j=0;j<=127;j++)
    scrn[320*((int) i/2)+j]=buffer[j*2]/4;
 }
getch();
for(i=0;i<=99;i++)
for(j=0;j<=127;j++)
   scrn[320*i+j+127]=(scrn[320*i+j]-32)*sin(frec*j)+32;
for(i=0;i<=99;i++)
for(j=0;j<=127;j++)
   scrn[320*(i+100)+j]=(scrn[320*i+j]-32)*cos(frec*j)+32;
getch();
for(it=l;it<=7;it++)
  for(i=l;i<=l99;i++)
  for(j=l;j<=254;j++)
  {
   sum=0;
   for (jj=j-1;jj<=j+l;jj++)
   sum=sum+((float) scrn [320*i+jj] );
```

```
  sum= sum/3.0;
  scrn[320*i+j]=(int) sum;
 }

for (i=0;i<=99,i++)
for(j=0;j<=127;j++)
 {
 Il=scrn [320*i+j +127]-32+0.5;
 I2=scrn [320* (i+100) +j]-32;
 scrn[320*(i+100)+j+127]=l0*atan2(I2,I1)+32;
 w[i][j]=32+10*atan2(I2,Il);
 }
getchar ( );
initgraph(&GraphDriver,&GraphMode," ");
setgraphmode(2);
wd[0]=0;
for(i=l;i<=98;i++)
{
 for(j=l;j<=127; j++)
 {
  fase= (w[i][j]-32)/l0.;
  wd[j]=wd[j-1]+sin(2*(fase-wd[j-1]));
 }
 for(j=30;j>=l;j--)
 {
  fase=(w[i][j]-32)/10.;
  wd[j-1]=wd[j]+sin(2*(fase-wd[j]));
 }
 for(j=l;j<=127;j++)
  line(4*(j-1)+(120-i) ,150-l0*wd[j-1]+3*i,4*j+(120-i) ,150-l0*wd[j]+3*i);
 }
 getch ();
 }
```

APENDICE II

A.II.1 Superficies Opticas Esféricas y Asféricas

Al considerar una superficie esférica y refractora, cualquier rayo que vaya del centro de curvatura hacía cualquier punto de la esfera, regresará nuevamente al centro de curvatura, tomando en cuenta la ausencia de aberraciones. En el caso de superficies cónicas lo expuesto no se cumple, el rayo ya no puede regresar al centro de curvatura debido a que la constante de conicidad correspondiente a las diferentes formas cónicas no es igual a uno ($K \neq 1$).

Cualquier superficie con simetría rotacional se puede representar, tomando al eje z como el eje de revolución, de la manera:

$$z = \frac{cS^2}{1+[1-(K+1)c^2S^2]^{1/2}} + A_1S^4 + A_2S^6 + A_3S^8 + A_4S^{10}, \qquad \text{(A.1)}$$

con $S^2=x^2+y^2$ y $c=1/r$, r es el radio de curvatura. Los términos constantes A_1, A_2, A_3 y A_4 representan las deformaciones asféricas, K es una función de la excentricidad e de una superficie conica ($K=-e^2$). Si los términos A_i son cero, se tiene entonces una superficie cónica de revolución de acuerdo con:

$K<-1$	Hipérbola
$K=-1$	Parábola
$-1<K<0$	Elipse rotada sobre su eje mayor
$K>0$	Elipse rotada sobre su eje menor
$K=0$	Esfera

La constante de conicidad no esta definida para una superficie con radio de curvatura infinito. Para superficies cónicas de revolución, se puede simplificar (A.1) a:

$$z = \frac{1}{K+1}\left[\, r-\sqrt{r^2-(K+1)S^2}\,\right] t. \qquad \text{(A.2)}$$

la cual es aplicable para cualquier superficie cónica a excepción de la parábola en la que después de simplificar queda como:

$$z = \frac{S^2}{2r}. \tag{A.3}$$

Las posiciones del foco para las superficies cónicas son funciones del radio r y de la constante K, y están dadas por:

$$d_1 = \frac{r}{K+1}, \tag{A.4a}$$

$$d_2 = \frac{r}{K+1}(2\sqrt{K}), \tag{A.4b}$$

$$d_3, d_4 = \frac{r}{K+1}(1 \pm \sqrt{-K}), \tag{A.4c}$$

$$d_5 = \frac{r}{2}, \tag{A.4d}$$

$$d_6, d_7 = \frac{r}{K+1}(\sqrt{-K} \pm 1). \tag{A.4e}$$

estas posiciones se muestran en la figura A1.

En el caso de la figura A1 *a*). la elipse no corresponde a un sistema óptico que posea simetría de rotación puesto que, tanto el objeto como la imagen están fuera de eje, por lo que la imagen es astigmática.

Algunos autores de textos de pruebas ópticas o de diseño óptico (Malacara y Malacara, 1994) mencionan que en algunos casos es conveniente considerar a una superficie asférica o cónica como a la suma de la esfera osculadora más, algunos términos de deformaciones.

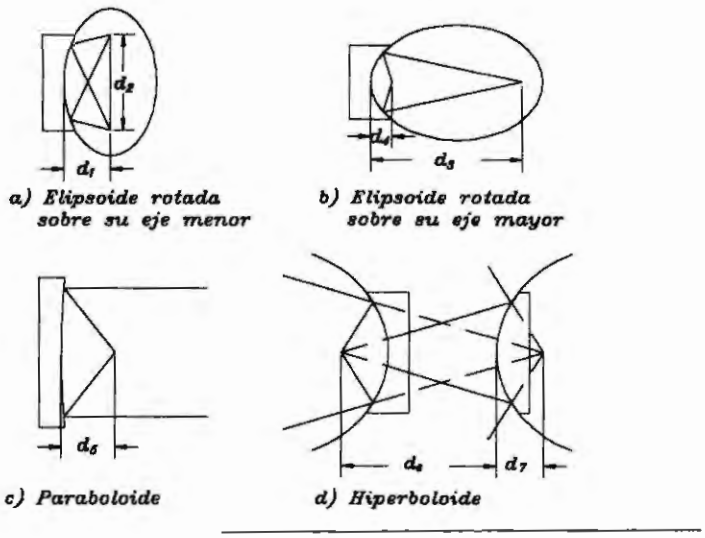


Fig. A1. Parámetros para superficies cónicas

A.II.1.1 Aberración de Normales a la Superficie Asférica

La aberración de las normales a la superficie asférica se da cuando la normal a la superficie intersecta al eje óptico a una distancia z_n del centro de curvatura. Para calcular este valor ne debe encontrar primeramente a la derivada de z con respecto a S,

$$\frac{dz}{dS} = \frac{cS}{\sqrt{1-(K+1)c^2S^2}} + 4A_1S^3 + 6A_2S^5 + 8A_3S^7 + 10A_4S^9 \qquad \text{(A.5)}$$

luego de la Fig. A2 se observa que la distancia L_n es

$$L_n = \frac{S}{dz/dS} + z \qquad \text{(A.6)}$$

para superficies cónicas L_n se hace

$$L_n = \frac{1}{c} - zK \tag{A.7}$$

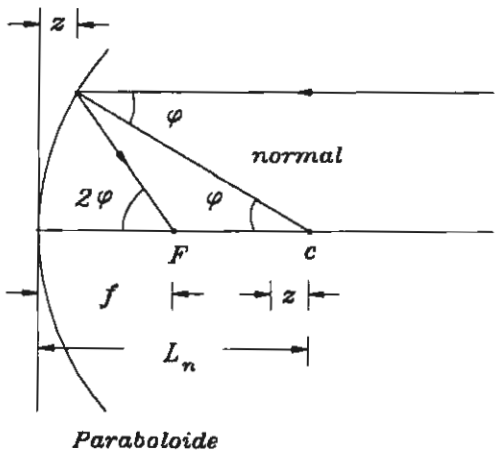


Fig. A2. Aberración de las normales a la superficie asférica

En la Fig. A2 se describe la aberración de las normales para un paraboloide con f como la distancia focal, ϕ es el ángulo de la normal desde el centro de curvatura c hasta el punto de la sagita z en la parábola.

$$L_n = \frac{1}{c} + z = \frac{1}{c} + f\tan^2\varphi \tag{A.8}$$

de la misma figura, considerando el paraboloide se observa que z_n es igual a la sagita z. Generalizando, para cualquier superficie asférica, la intersección de las normales es aproximadamente

$$L_n = \frac{1}{c} - \frac{(Kc^3 + 8A_1)S^2}{2c^2}. \tag{A.9}$$

A.II.1.2 Aberración Transversal en un Espejo Parabólico

Cuando se compara a una superficie esférica con una cónica (i.e. la parábola), ambas reflejando un rayo que incide a ellas a un mismo ángulo a a una misma altura y, la posición de la intersección del rayo de cada una de estas superficies con el eje óptico será

distinta. Si se traza una normal del punto de intersección del rayo proveniente de la parábola hasta que intersecte con la prolongación del correspondiente de la esfera, se tiene entonces la magnitud de la aberración transversal $TA(y)$, tal como lo muestra la figura A3.

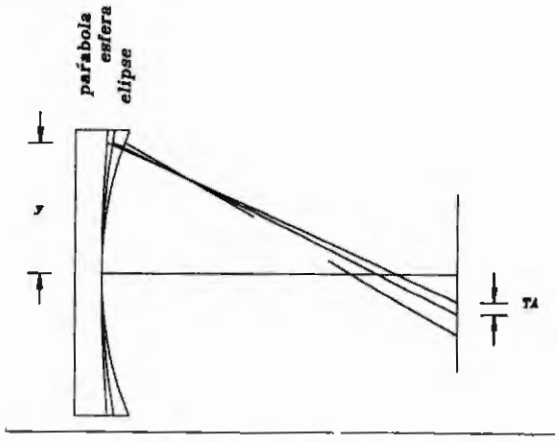


Fig. A3. Aberración transversal para tres distintas superficies

Un espejo parabólico se encuentra libre de aberración esférica cuando el objeto se encuentra en el infinito, pero si el objeto se encuentra en el centro de curvatura, la aberración esférica aparece. La expresión exacta para la aberración longitudinal de las normales al espejo esta dada por

$$TA_{normal} = f \tan^2\varphi \qquad \text{(A.10)}$$

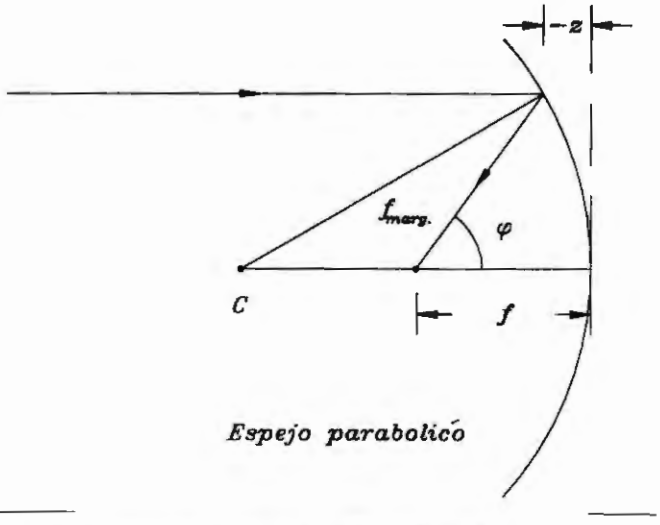


Fig. A4. Algunos parámetros para el espejo paraboloide

lo que se puede observar de la figura A4. La aberración esférica de la parábola cuando el

objeto está en el centro de curvatura es aproximadamente el doble de la aberración de las normales.

$$LA = 2f\frac{y^2}{r^2} = \frac{y^2}{r} = -\frac{D^2}{8f} \tag{A.11}$$

En la esfera, el plano de observación está a una distancia $-f = r/2$ mientras que en la parábola la distancia es r. De la relación

$$\frac{TA}{LA} = \frac{D/2}{r} \tag{A.12}$$

Para el caso de la parábola bajo prueba, con D=200 mm. y r = 1498 mm. se tiene

$$TA = \frac{D}{4f}LA = 0.445632 \tag{A.13}$$

mientras que con el auxilio del paquete computacional de diseño óptico, haciendo trazo de rayos el valor de $TA(y)$ = 0.442670 (ver Fig. A5).

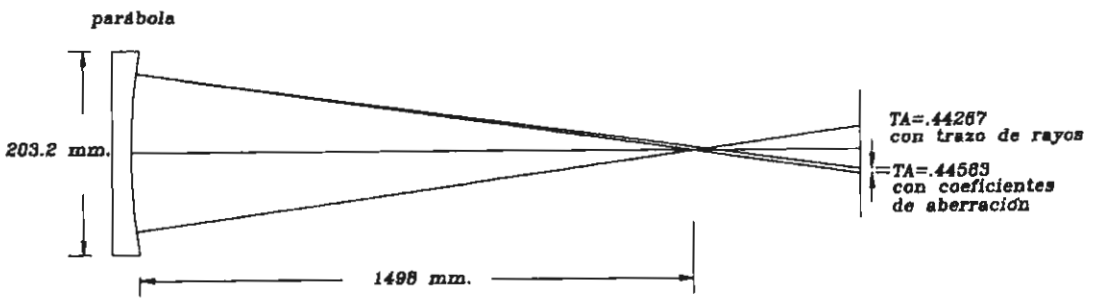


Fig. A5. La aberración transversal en la parábola a probar.

Bibliografía Adicional

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego, 1985.

Bone, D. J., H. A. Bachor and R. J. Sandeman, "Fringe-Pattern Analysis Using a 2-D Fourier Transform", *Appl. Opt.*, **25**, 1653 (1986)

Burge, J. H., D. S. Anderson, D. A. Ketelsen y S. C. West, "Null Test Optics for the MMT and Magellan 6.5-m *f*/1.25 Primary Mirrors", Proc. SPIE, **2199**, 658 (1994).

Crane, R., "Interference Phase Measurement", *Appl. Opt.*, **8**, 538 (1969).

Ichioka, Y. y M. Inuiya, "Direct Phase Detecting System", *Appl. Opt.*, **11**, 1507 (1972).

Johnson, G. W. and D. T. Moore, "Design and Construction of a Phase-Locked Interference Microscope", *Proc. SPIE*, **103**, 76 (1977).

Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, New York, 1978.

Mantravadi, M, V., "Lateral Shearing Interferometers", *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., Wiley, New York, 1992.

Schmit, J., Creath, K., y Kujawinska, M., "Spatial and Temporal Phase Measurement Techniques: a Comparison of Major Sources in One Dimension", *Proc. SPIE*, **1755**, 203, (1992).

Servin, M., D. Malacara, Z. Malacara y V. I. Vlad, "Sub-Nyquist Null Aspheric Testing Using a Computer-Stored Compensator", *Appl. Opt.*, **33**, 4103 (1994).

Shanmugam, K. S., *Digital and Analog Comminication Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

Shough, D., "Beyond Fringe Analysis", *Proc. SPIE*, **2003**, 208, (1993).

Wan, D.S., "Decenter and Defocus for Testing Aspheric Surfaces", Proc. SPIE, **1776**, 140, (1992).

Wyant, J. C., "Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer with Real-Time Wavefront Correction Systems", *Appl. Opt.*, **14**, 2622 (1975).