



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---

---

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN OPTICA AC

E F E C T O   D E   L A   D I F U S I O N   E N  
L A   P R O P A G A C I O N   R E S O N A N T E  
D E   P U L S O S

TESIS QUE PRESENTA

RUBEN RAMOS GARCIA

PARA OBTENER EL GRADO DE :

MAESTRO EN CIENCIAS (OPTICA)

LEON, GTO.

ENERO DE 1992.

---

## ABSTRACTO

---

Se estudia el efecto de difusión de la inversión de población en la propagación resonante de pulsos mediante la solución de las ecuaciones de Maxwell-Bloch. Se propone una técnica perturbativa que introduce el Teorema del Area de McCall y Hahn en las ecuaciones base. La solución de dichas ecuaciones nos muestran una modificación del Teorema del Area y una modulación tanto en la inversión de población como en el dipolo eléctrico. Se encuentra que los puntos de estabilidad son una función del radio del perfil del campo y del coeficiente de difusión. Se reproducen los resultados de McCall y Hahn en el centro de perfil en el caso de un frente de onda Gaussiano.

*A mis padres:*

*Roque y Rosy*

*cuyo sacrificio me dio lo mejor la vida*

*A mi segunda madre*

*Gloria*

*A mis hermanos:*

*Celso, Apolinar y Manuel*

*por su confianza, soporte económico y moral.*

*A un gran amigo:*

*Paco*

*A mis cuñadas*

*Elvia, Rafa y Armida.*

*A mis sobrinos*

*Paulina, Paco, Rosy, Octavio, Rafael  
Tania, Diana, Rubén y Claudia*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera especial al brillante e incansable Dr. J.J. Sánchez Mondragón por haber dirigido mi trabajo y sobre todo por su gran soporte y confianza.

Mi más sincero agradecimiento a G.E. Torres Cisneros por sus consejos y amistad.

A mis grandes amigos del CIO: Carlos Treviño, Luis Alfonso, Julio, Cuauhtemoc, Elder, Arturo, José Luis, Noé, Abundio, Martín Salazar, Jaime, Argeo, Villa y Donato. Agradezco el soporte de Hilda, Angeles y del Lic. Antonio Martínez.

Agradezco a mis amigos del grupo de fotónica: Gabriel Arroyo, Vicente Sánchez, Luis Torres, Antonio Meneses, Sabino Chavez, Hector Moya, Edgar Miguel, Rashit, Serguei y Jenia. Especialmente a David y Gloria.

Especialmente agradezco el apoyo y hospitalidad del Dr. J. Ojeda Castañeda así como al personal de la Biblioteca, Computo y Electrónica del INAOE por su valiosa ayuda.



<b>CAPITULO 4.- ECUACIONES DE BLOCH CON DIFUSION</b>	
4.1.- Introducción .....	45
4.2.- Descripción del método .....	48
4.3.- Efectos transversales sobre el Teorema del Area..	49
4.4.- Solución de las ecuaciones de Bloch con difusión.	51
<b>CAPITULO 5.- CONCLUSIONES .....</b>	<b>76</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>80</b>
<b>APENDICE .....</b>	<b>84</b>

## CAPITULO 1

---

### INTRODUCCION

---

Desde la creación del laser en los años 60's, han aparecido un gran número de trabajos estudiando la propagación de señales ópticas en diferentes medios. El campo electromagnético generado por laser es lo suficientemente intenso como para poner de manifiesto efectos ópticos hasta entonces no observados, como efectos no lineales coherentes, en los cuales la polarización ya no depende linealmente del campo. Entre estos, podemos considerar a los fenómenos coherentes cuanto-mecánicos tales como generación de armónicos, conjugación de fase y eco de fotones, pero especialmente, al encontrarse que las no linealidades pueden cancelar la dispersión lineal permitiendo la propagación de pulsos luminosos a distancias que linealmente no serían posibles, como

es el caso de transparencia auto-inducida, así como los efectos no lineales de la propagación de pulsos en medios resonantes, y de solitones en fibras ópticas. La propagación de pulsos cortos y ultracortos en fibras ópticas y medios resonantes [McCall, 1969], son dos de los ejemplos no lineales de más interés, debido a sus amplias aplicaciones en comunicaciones a grandes distancias. Sin embargo, en ambos casos la no linealidad es de origen muy distinto, el primero surge de debido a no linealidades macroscópicas del material y el segundo debido a la dinámica no lineal y microscópica de átomos resonantes.

Desde este punto de vista, el principal problema de propagación de la luz para fines de transmisión de información, son las pérdidas de energía del pulso, ya que limitan la longitud de propagación. Los mecanismos usuales que la provocan son la dispersión, absorción y difusión. Las pérdidas por dispersión y absorción y la manera de reducirlas o compensarlas por medio de procesos no lineales ya han sido ampliamente estudiadas sobre todo en fibras, [Agrawal, 1989], sin embargo esto no ha ocurrido con difusión.

En materiales resonantes, tales como gases, líquidos, cristales y semiconductores, los efectos de la difusión son conocidos desde tiempo atrás, por ejemplo, en líquidos se usan para medir tiempos de difusión radial y orientacional

[Phillion, 1972], o en semiconductores donde se usan para medir velocidades de recombinación hueco-electrón [Kasariuskas, 1980]. En ninguno de estos trabajos se ha tomado en cuenta la dependencia radial de esta, ignorando la principal característica de la difusión durante la propagación de un haz de luz con un perfil transversal. La difusión es un ejemplo típico de efecto transversal, que redistribuye, de zonas de alta concentración hacia zonas de baja concentración, ya sea energía, calor, cargas, iones, etc.

Cabe señalar que los efectos de difusión espacial en dinámica coherente no han sido estudiados en el caso óptico a pesar de ser ya conocidos en el caso magnético [Torrey, 1956], no así en el caso incoherente, donde el efecto de la difusión de centros activos en la propagación en amplificadores laser ha sido ampliamente estudiado [Aboites, 1988]. Torrey utilizó una señal intensa - pero no lo suficiente como para seguir considerando válida la aproximación dipolar-, de radiofrecuencia en resonancia con el dipolo magnético, para estudiar la difusión de la magnetización debida a inhomogeneidades espaciales del campo. Sin embargo, el tipo de difusión considerado por Torrey (auto-difusión del momento nuclear) da una reducida importancia a la interrelación de difusión e intensidad del campo al considerar que las variaciones transversales son pequeñas, predominando la

difusión en el eje  $z$ . Wherrett retoma el problema e introduce el término de difusión en la energía a través de las ecuaciones de Bloch, [Wherrett, 1983], sin embargo, únicamente plantea las ecuaciones de Bloch con difusión y las resuelve usando una solución iterativa de tercer orden en la matriz de densidad de un sistema de tres niveles (dos niveles y un nivel de bombeo) en la presencia de un pulso intenso monocromático. Suponiendo, sin embargo, que el medio es lo suficientemente delgado como para que la aproximación perturbativa dipolar sea válida, esto es, el tensor de campo es independiente de  $r$ . En las soluciones que presenta no se incluye difusión, sin embargo, plantea el problema de difusión tanto espacial como rotacional.

Tal perspectiva, nos llevó a estudiar los efectos de la difusión en la propagación resonante de pulsos, introduciendo el modelo de difusión propuesto por Wherrett pero considerando en forma integrada pulsos intensos. En particular, estamos interesados en medios con baja difusión, donde la introducción de tal término, puede verse como un término perturbativo, pero que sin embargo no esté restringido a medios delgados como lo propuso Wherrett.

La importancia del trabajo, también radica en el método mismo para resolver las correspondientes ecuaciones de Bloch con difusión. En analogía con el método sin difusión, donde el

teorema del área es una condición resultante de la solución auto-consistente de las ecuaciones de Maxwell- Bloch, por ende adecuado a campos intensos (vease Cap. III), y que al gobernar la propagación puede substituir a las ecuaciones de Maxwell-Bloch parcialmente haciendo innecesaria su solución directa. Nosotros proponemos válidas las ecuaciones de Maxwell-Bloch con difusión y la existencia de una generalización del Teorema del Area (TA). Entendiéndose como tal que la solución de las ecuaciones de Bloch con difusión introducen una modificación en el TA. Finalmente, el TA se utiliza para encontrar el campo en las ecuaciones de Maxwell, completando así, el ciclo para hacer al método auto-consistente. Este uso simultáneo de las ecuaciones deja a las ecuaciones de Maxwell a un nivel inferior en la secuencia de solución perturbativa, en el que, el TA juega el papel de estas, ya que describe la dinámica canónica del pulso mediante el área del pulso y no del pulso en sí.

La solución de las ecuaciones de Bloch, muestran una modificación del TA de McCall y Hahn, es decir, una modificación de la dinámica del pulso en el medio. La forma gráfica del TA para varios radios, es equivalente a tener un coeficiente de Beer como función del radio. Este resultado tiene aplicaciones inmediatas en aquellos problemas donde la permanencia del perfil es importante, por ejemplo en

Conjugación de Fase (CF) por Mezcla Degenerada de Cuatro Ondas (MDCO) en materiales tipo Kerr [Pepper, 1983]. En cuyo caso la calidad de la imagen conjugada dependerá de la difusión [Ramos, 1991]. En general el método, abre una perspectiva bastante amplia para poder estudiar los efectos transversales debido a difusión, ya que muy pocos problemas difusivos han sido resueltos.

En el capítulo II se plantean las bases para el estudio de los fenómenos no lineales mediante las ecuaciones de Maxwell y se deducen las ecuaciones de Bloch, las que su vez rigen la interacción radiación con materia. En el capítulo III se acoplan las ecuaciones de Maxwell y Bloch sin difusión, las que describen la propagación no lineal de campos electromagnéticos en medios de dos niveles considerando dos tipos de no linealidades, resonantes y no resonantes. Indicando claramente los parámetros importantes que las gobiernan. En el capítulo IV se describe la metodología para resolver las ecuaciones de Bloch con difusión y finalmente en el capítulo V se presentan resultados y conclusiones. También se incluye un apéndice, donde se resuelven completamente las ecuaciones de Bloch con difusión siguiendo el método planteado en el capítulo IV.

## CAPITULO 2

---

### OPTICA NO LINEAL MACROSCOPICA Y MICROSCOPICA

---

#### 2.1.- INTRODUCCION

En este capítulo, se plantearán los principios del análisis no lineal, en sus dos formas típicas, perturbativas no lineales y funcionales del campo, que caracterizan básicamente a procesos incoherentes y coherentes. Estos formalismos servirán de base para estudiar la propagación en medios no lineales e indicar los conceptos y parámetros relevantes.

Se establecerán las ecuaciones de Maxwell, para identificar los términos responsables de la no linealidad del medio. Se deducen las ecuaciones de Bloch, para describir la interacción entre radiación y materia a nivel atómico, en este contexto, se incluye la susceptibilidad atómica, emisión

inducida, emisión espontánea y mecanismos de ensanchamiento de línea de emisión debido a la temperatura, emisión espontánea entre otros.

## 2.2.- ECUACIONES DE MAXWELL EN UN MEDIO NO LINEAL.

Cuando las ecuaciones de Maxwell son combinadas con la Segunda Ley de Newton proporcionan una descripción completa de la dinámica clásica de la interacción de partículas cargadas y campos electromagnéticos. En particular, en este marco, la interacción de radiación intensa con materia y la consecuente polarización del medio, constituye el campo de la óptica no lineal macroscópica.

El estudio de los fenómenos no lineales se empieza a partir de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

donde  $\mathbb{J}$  y  $\rho$  son densidades de corriente y densidad de carga respectivamente, las cuales estan relacionadas a través de la ecuación de conservación de la carga [Jackson, 1962].

La polarización inducida en el medio, genera un campo que se suma al aplicado, de esta manera la polarización contribuye al transporte de carga en el medio, produciendo una densidad de carga, la cual a su vez, se suma a la densidad generada por el campo externo, esto es,

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_0 + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbb{J}_0$  es la densidad de corriente directa y  $\mathbb{P}$  es la polarización inducida del medio. Para campos electromagnéticos débiles, la polarización depende linealmente del campo y las ecuaciones de Maxwell describen muy bien la refracción y reflexión en medios dieléctricos, metales y gases [Born, 1980], dándole a la óptica convencional un caracter lineal. Esta descripción prevaleció hasta la aparición del laser en los años 60's, cuando tal descripción fué incapaz de explicar los nuevos fenómenos debidos a la propagación de campos eléctricos intensos en dichos medios.

### 2.3.- MECANISMOS FISICOS DE POLARIZACION MACROSCOPICA NO LINEAL.

En esta sección se dará una descripción de la polarización no lineal de un material dopado resonante en un substrato no lineal, como resultado de la interacción de campos intensos con la materia. En este caso, la polarización no lineal se puede escribir como

$$P = P^l + P^{nl} + P^{res} \quad (2.3)$$

donde  $P^{nl}$  representa las contribuciones no lineales y no resonantes de la polarización, usualmente asociadas con el substrato, y  $P^{res}$  es la polarización no lineal generada por resonancia. Este último término describe la interacción los átomos dopantes, que estan en resonancia con el campo. Una característica determinante para la presencia y tipo de no linealidades es la cercanía o no a la resonancia atómica. En caso de resonancia, la dinámica misma es frecuentemente modificada, siendo la óptica macroscópica incapaz de explicar tal modificación. Dado la importancia de este término en nuestro trabajo, esta polarización se estudiará con detalle en el siguiente capítulo. En esta sección sólo haremos una breve revisión del origen macroscópico de la polarización no lineal, así como sus limitaciones.

En el caso de medios con respuesta instantánea, en donde la dinámica atómica no es modificada, la polarización se escribe como una función polinomial del campo,

$$P_1^{NL} = \chi_{1jk} E_j E_k + \chi_{1jkl} E_j E_k E_l + \chi_{1jklm} E_j E_k E_l E_m + \dots \quad (2.4)$$

donde  $\chi$  es el tensor de la permitividad. Sin embargo, en el caso de medios que no responden instantáneamente al campo, la Ec.(2.4) debe ser generalizada. El caso de polarización más general se escribe como [Shen, 1984],

$$\begin{aligned} P(r, t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(r-r', t-t') \cdot E(r, t') dr dt' \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(2)}(r-r_1, t-t_1; r-r_2, t-t_2) E(r_1, t_1) E(r_2, t_2) dr_1 dr_2 dt_1 dt_2 + \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(r-r_1, t-t_1; r-r_2, t-t_2; r-r_3, t-t_3) E(r_1, t_1) E(r_2, t_2) E(r_3, t_3) \\ & \times dr_1 dr_2 dr_3 dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

La Ec.(2.5) toma en cuenta que la respuesta del medio en un punto  $(r, t)$  esta determinada no sólo por el campo en ese punto, sino también por el campo generado en puntos vecinos, es decir, la Ec.(2.5) toma en cuenta la dispersión temporal y espacial del campo.

Tomando la transformada de Fourier bidimensional de la Ec.(2.5) se obtiene una expresión mucho más simple y útil, ya que describe el comportamiento espectral de la polarización y la permitividad. Esto es importante porque la permitividad describe todo efecto lineal y no lineal,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\mathbb{P}}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{\mathbb{P}}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{\mathbb{P}}^{(3)}(\mathbf{k}, \omega) + \dots \quad (2.6)$$

con

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\chi}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.7a)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\chi}^{(2)}(\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega = \omega_1 + \omega_2) \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \quad (2.7b)$$

donde  $\sim$  significa transformada de Fourier. La transformada bidimensional de la susceptibilidad esta dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(n)}(\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \dots + \mathbf{K}_n, \omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1; \dots; \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - t_n) \exp(-i \sum_1 (\mathbf{k}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \omega_1(t - t_1)) \\ \times d\mathbf{r}_1 dt_1 \dots d\mathbf{r}_n dt_n. \end{aligned} \quad (2.7c)$$

Si la susceptibilidad es conocida, en principio se puede conocer el n-ésimo efecto no lineal, por ejemplo,  $\tilde{\chi}^{(2)}$  describe entre otros la generación del segundo armónico, rectificación óptica y efecto Pockels;  $\tilde{\chi}^{(3)}$  la generación del tercer armónico, Mezcla Degenerada de Cuatro Ondas (MDCO) y efecto Kerr entre otros. En resumen las ecuaciones de Maxwell dan una descripción bastante completa de una amplia variedad de fenómenos no lineales y no resonantes, si la polarización está dada por la Ec.(2.7).

#### 2.4.- FORMALISMO DE LA MATRIZ DE DENSIDAD.

Continuando con la idea de la sección anterior, en esta sección se establecerán las bases para la formulación de la polarización no lineal resonante. En esta sección derivaremos una expresión para describir el valor de expectación de un observable, usando el formalismo de la matriz de densidad.

La susceptibilidad depende de la estructura atómica y molecular del medio, de aquí la necesidad de encontrar las expresiones microscópicas para la susceptibilidad no lineal que nos permitan una descripción completa del comportamiento del medio. El formalismo de la matriz de densidad es probablemente el más adecuado para tales cálculos y es más correcto usarlo

cuando se incluyen efectos de relajación. [Bloemberger, 1965]. La ventaja de usar el formalismo de la matriz de densidad ofrece dos ventajas: primero, los cálculos resultantes son muy simples y segundo, cuando la función de onda del ensamble de sistemas no es conocida, pero las probabilidades de obtener diferentes funciones de onda son conocidas, el ensamble puede ser descrito por una suma pesada de matrices de densidad individuales.

Empecemos nuestro estudio considerando un sistema cuántico discreto estacionario que puede ser descrito por un Hamiltoniano  $H_0$ , con eigenestados  $|\psi_n\rangle$  independientes del tiempo y con eigenvalores de energía  $E_n$ , los cuales son soluciones de la ecuación del Schrödinger, es decir,

$$H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle. \quad (2.8)$$

Si los eigenestados forman un conjunto completo de funciones ortonormales, entonces cualquier vector de estado se puede escribir como una combinación lineal de eigenestados. La dependencia temporal de los eigenestados se puede encontrar expandiéndolo en la base con coeficientes dependientes del tiempo,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle, \quad (2.9)$$

$c_n$  dan la probabilidad de encontrar al sistema  $|\psi(t)\rangle$  en el estado  $|\psi_n\rangle$  en el tiempo  $t$ .

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo sujeta a una perturbación dependiente del tiempo  $H_1(t)$ , se escribe como

$$(H_0 + H_1) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) \quad (2.10)$$

donde  $|\psi(t)\rangle$  esta por la Ec.(2.9). Haciendo uso de la Ec.(2.8) y (2.9), la Ec.(2.10) se transforma en una ecuación diferencial en los coeficientes  $c_n$ 's.

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) &= -i/\hbar \sum_K \langle \psi_k | H_0 + H_1 | \psi_n \rangle \\ &= -i/\hbar \left( E_n + \sum_K \langle \psi_k | H_1 | \psi_n \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otro lado, si  $A$  es un observable con elementos de matriz  $\langle \psi_k | A | \psi_n \rangle = A_{kn}$ , el valor de expectación medio de  $A$  al instante  $t$  es ;

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n,k} c_n^*(t) c_k(t) A_{nk}. \quad (2.12)$$

Esta relación muestra que los coeficientes aparecen en el valor

medio a través de expresiones cuadráticas del tipo  $c_n^* c_k$ , es decir, que el observable puede conocerse si se conocen las probabilidades de encontrarlo en cada eigenestado. Estos elementos forman la matriz del operador  $|\psi\rangle\langle\psi|$ , esto es, el operador de proyección sobre el ket  $|\psi(t)\rangle$ . Observese que

$$\langle\psi_n|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\psi_k\rangle = c_n^*(t)c_k(t), \quad (2.13)$$

por lo tanto, es natural introducir el operador de densidad, definido como,

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.14)$$

El operador de densidad es presentado en la base ortonormal  $\{|n\rangle\}$ , por una matriz, llamada la matriz de densidad, cuyos elementos estan dados por el término de la derecha de la Ec. (2.13). Como se señalo anteriormente el formalismo de la matriz de densidad es suficiente para caracterizar el estado cuántico del sistema, es decir, podemos hacer todas las predicciones físicas que pueden ser calculadas de  $|\psi(t)\rangle$ , [Cohen, 1977]. Para mostrar esta última aseveración, recuérdese que las eigenfunciones forman un conjunto completo, esto es,

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum \rho_{nn}(t) = \text{Tr}(\rho(t)) = 1 \quad (2.15)$$

de la Ec.(2.12) se obtiene que

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr}(\rho(t)A). \quad (2.16)$$

Finalmente, la evolución temporal del operador  $\rho(t)$  es descrita por la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i/\hbar [H(t), \rho(t)]. \quad (2.17)$$

De esta manera, se demuestra la equivalencia entre el formalismo de la matriz de densidad y el de Schrödinger. La Ec. (2.17) es especialmente útil cuando un ensamble de sistemas que será descrito se encuentra sujeto al mismo Hamiltoniano.

## 2.5.- EFECTO DE LOS TERMINOS DE AMORTIGUAMIENTO

Cualquier sistema bajo consideración, está sujeto a perturbaciones aleatorias, las cuales, en promedio, son responsables de los fenómenos de amortiguamiento. El origen físico de estas perturbaciones es diverso: perturbaciones debido a agitación térmica, vibraciones en la red de un cristal, emisión espontánea de la luz, decaimiento no radiactivo por emisión espontánea de fonones, etc. A frecuencias ópticas, estas perturbaciones forzan a los átomos

excitados a decaer más rápidamente, modificando la respuesta atómica del medio de manera importante.

En esta sección, modificaremos la Ec.(2.17) para tomar en cuenta los efectos de perturbaciones aleatorias mediante la inclusión de los tiempos de vida medios de ambos estados (excitados y base) así como en los elementos fuera de la diagonal

Estaremos interesados en sistemas diluidos, en los cuales la energía de interacción entre partículas es pequeña comparada con la separación energética entre los dos niveles de transición. La interacción con campos aleatorios o radiación térmica y las vibraciones de la red, incluyen los efectos de emisión espontánea. Bajo estas circunstancias el efecto del Hamiltoniano aleatorio en la dinámica de la matriz de densidad es dada fenomenológicamente por términos de amortiguamiento. En resumen, el Hamiltoniano de cualquier sistema perturbado puede escribirse como

$$H(t) = H_0 + H_1 + H_{al} \quad (2.18)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano sin perturbar,  $H_1$  es el Hamiltoniano de interacción entre el campo y el átomo y  $H_{al}$  describe todas las perturbaciones aleatorias promediadas del

medio sobre el sistema. La interacción entre el campo y el átomo es dipolar,

$$H(t) = er \cdot E(t) \quad (2.19)$$

donde  $r$  es la separación entre las cargas, calculada sobre todo el espacio, lo cual representa la probabilidad de que las cargas esten separadas una distancia  $r$  entre los estados  $|\psi_n\rangle$  y  $|\psi_m\rangle$ .

Usando la Ec.(2.18), la Ec.(2.17) puede escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i/\hbar [H_0 + H_1, \rho] + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{a1} \quad (2.20)$$

donde  $(\partial \rho / \partial t)_{a1} = -i/\hbar [H_{a1}, \rho]$ , cuyos elementos de matriz se escribir como [Bloembergen, 1962],

$$\left(\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t}\right)_{a1} = \sum_n R_{11nn} \rho_{nn} = \sum_n (W_{1n} \rho_{nn} - W_{n1} \rho_{11}), \quad i=1,2 \quad (2.21)$$

donde  $W_{1n}$  representa las probabilidades de transición entre los niveles 1 y 2, mientras que los elementos fuera de la diagonal son

$$\left(\frac{\partial \rho_{1j}}{\partial t}\right)_{a1} = -R_{1j1j} \rho_{1j} = -\Gamma_{1j} \rho_{1j} \quad (2.22)$$

El trabajo de Bloembergen es notable en este aspecto, porque presenta un análisis natural y directo para incluir los efectos de amortiguamiento.

Los  $n$  elementos de la diagonal se relajan en una forma combinada, dejando  $n-1$  tiempos de relajación, cuyos inversos son los eigenvalores del determinante  $W_{in}$ , mientras que los elementos fuera de la diagonal decaen con un tiempo de relajación transversal  $\Gamma_{ij}^{-1}$ , los cuales, en general, tienen contribuciones adiabáticas y no adiabáticas. Las últimas causadas por el tiempo de vida finito relacionado a las probabilidades de transición  $W_{in}$  y  $W_{ni}$ . En el caso de dos niveles se tiene que  $\Gamma_{noad} = 1/2T_1 = W_{ij} + W_{ji}$ . En equilibrio térmico  $\rho_{nm}^0$  esta dada por una distribución térmica de la población (distribución de Boltzman), en el caso de átomos y moléculas, en los cuales la relajación de los estados excitados es debido a transiciones inducidas térmicamente. Notemos que el decaimiento de los elementos de la diagonal esta asociado a la emisión espontanea mientras que el decaimiento de los elementos fuera de la diagonal esta asociado con coherencia, pues estos determinan la presencia de la polarización dipolar.

En resonancia magnética nuclear (RMN) la relajación de la

población es conocida como el tiempo de relajación longitudinal y la relajación de los elementos fuera de la diagonal es conocida como tiempo de relajación transversal [Slichter, 1950].

En principio, la Ec.(2.17) es soluble si  $H_0$ ,  $H_1$  y  $H_{aleat}$  son conocidos. Sin embargo, en general, no es fácil combinar la Ec.(2.17) y la Ec. (2.12) para obtener una ecuación de movimiento para la polarización  $\langle P \rangle$ . En ciertos casos es posible obtener soluciones completas [Shen, 1984], como por ejemplo, para el caso estacionario.

## 2.6.- ECUACIONES DE BLOCH

En el caso de átomos de dos niveles, su interés no es únicamente por su simplicidad matemática, sino también, por su importancia física, pues muestra un comportamiento cuántico que puede ser verificado experimentalmente. En el caso de interacción resonante, y cercanamente resonante, de luz coherente con átomos de dos niveles, el comportamiento atómico dista mucho del real y una función polinomial no sería útil en este caso. Se han descubierto fenómenos resonantes interesantes como son transparencia autoinducida, rompimiento de pulsos [McCall, 1969] y cuasi-resonante en dos o más pulsos, conjugación de fase [Chen, 1989], y múltiples aplicaciones a la

espectrometría [Shen, 1984].

Todos estos fenómenos pueden ser descritos apartir de las ecuaciones de Bloch, las que deduciremos usando el formalismo de la matriz de densidad.

Empezemos por definir el campo eléctrico con el que interactúa el átomo,

$$E(r,t) = 1/2 \{ \hat{e} E_0(r,t) \exp(-i\omega t) + c.c. \} \quad (2.23)$$

donde se ha supuesto que la envolvente varía lentamente comparada con un periodo de oscilación del campo; sobre este punto volveremos más tarde en el siguiente capítulo. Para el caso en que  $n = 2$ , la Ec. (2.11) se reduce a,

$$\dot{c}_i = -i/\hbar [ E_i c_i(t) + \Omega_{ij} c_j ], \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2 \quad (2.24)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de Rabi y esta dada por,

$$\Omega_{ij} = -er_{ij}(1-\delta_{ij}) \cdot E \quad (2.25)$$

$r$  da el desplazamiento dipolar y  $\delta_{ij}$  es la función delta de Dirac. Usando el formalismo de la matriz de densidad, la Ec. (2.24) se puede escribir como,

$$\dot{\rho}_{ij} = -\left(\frac{1}{T_2} + ai\Delta\right)\rho_{ij} + ai\frac{\Omega^*}{2} (\rho_{jj} - \rho_{ii}) \quad i \neq j, \quad a = \begin{cases} 1, & i < j \\ -1, & i > j \end{cases} \quad (2.26)$$

con  $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ ,  $T_2$  es el tiempo de relajación debido a colisiones elásticas y  $\Delta$  es el desentonamiento,  $\Delta = \omega_{12} - \omega$ .  $\omega$  es la frecuencia del campo y  $\omega_{12}$  es la frecuencia de resonancia entre los niveles 1 y 2. La inclusión de colisiones inelásticas tiene el efecto de despoblar los niveles 1 y 2 a otros diferentes, a una razón fija  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente, como se describió en la sección anterior.

Las ecuaciones de Bloch tal como se han planteado hasta el momento, no son muy útiles porque no se ha tomado en cuenta el efecto de la emisión espontánea, el cual puede verse como un caso especial de "colisiones", que transfiere la población entre los niveles 1 y 2. Incluyendo emisión espontánea, las poblaciones de los niveles 1 y 2 se escriben como,

$$\dot{\rho}_{11} = -\Gamma_1 \rho_{11} + A_{21} \rho_{22} - i/2(\Omega \rho_{12} - \Omega^* \rho_{21}) \quad (2.27)$$

$$\dot{\rho}_{22} = -(\Gamma_2 + A_{21}) \rho_{22} + i/2(\Omega \rho_{12} - \Omega^* \rho_{21}) \quad (2.28)$$

mediante los siguientes cambios de variables  $u = \rho_{21} + \rho_{12}$ ,  $v =$

$i(\rho_{21} - \rho_{12})$  y  $w = \rho_{22} - \rho_{11}$ , aplicados a las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28) se obtienen las ecuaciones de Bloch, escritas en una forma conveniente para el estudio de la propagación, además de darnos una interpretación física clara de los parámetros, ya que  $w$  representa la energía y  $(u + iv)$  la polarización inducida [Allen, 1985]. Incluyendo el tiempo de vida medio de la inversión de población  $T_1$ , las ecuaciones de Bloch son,

$$\dot{u} = -\Delta v - \frac{u}{T_2} \quad (2.29)$$

$$\dot{v} = \Delta u - \frac{v}{T_2} + \Omega w \quad (2.30)$$

$$\dot{w} = -\frac{w - w_{eq}}{T_1} - \Omega v. \quad (2.31)$$

Estas ecuaciones, salvo pequeñas modificaciones de notación fueron formuladas por Bloch en 1956, quien las propuso para describir una interacción magnética entre el spin del átomo y el campo magnético aplicado.

Las ecuaciones de Bloch no son fáciles de resolver analíticamente, salvo en algunos casos donde el campo eléctrico es independiente del tiempo (caso estacionario) [Allen, 1985a]. El caso en que la frecuencia de Rabi sea dependiente del

tiempo, las ecuaciones de Bloch se han resuelto usando una aproximación adiabática [Crisp, 1973], es decir, donde la envolvente del campo varía lentamente. Hasta el momento no se han resuelto para el caso pulsado, salvo bajo ciertas condiciones [McCall, 1969a].

La difusión espacial de la inversión de población, en nuestro caso, se toma en cuenta la dependencia radial y a lo largo del eje  $z$ , además estase supondrá independiente del ángulo. Así, las ecuaciones de Bloch con difusión [Wherrett, 1983] se escriben como,

$$\dot{u} = -\Delta v - \frac{u}{T_2} \quad (2.32)$$

$$\dot{v} = \Delta u - \frac{v}{T_2} + \Omega w \quad (2.33)$$

$$\dot{w} = -\frac{w - w_{eq}}{T_1} - \Omega v + D \nabla^2 w \quad (2.34)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión, el cual podemos usar como un parámetro de pequeñez. En particular estaremos interesados en los efectos coherentes resonantes ( $\Delta = 0$ ), es decir, cuando el dipolo atómico sigue al campo eléctrico y emite en fase con el, y donde el ancho del pulso  $\tau$  es mucho

menor que  $T_1$  y  $T_2$ . Bajo estas suposiciones, las ecuaciones de Bloch se reducen a solo un par de ecuaciones, ya que  $u = 0$ .

$$\dot{v} = \Omega w \quad (2.35)$$

$$\dot{w} = -\Omega v + D\nabla^2 w \quad (2.36)$$

Este sistema, de ecuaciones será resuelto en el siguiente capítulo. Conviene señalar la complejidad, de obtener soluciones analíticas a este conjunto de ecuaciones debido a la dependencia radial de la difusión.

## CAPITULO 3

---

### INTERACCION COHERENTE DE UN CAMPO DE RADIACION Y UN SISTEMA ATOMICO

---

#### 3.1.- INTRODUCCION

En este capítulo, se establecen las bases para el estudio de la propagación de pulsos coherentes en medios resonantes (absorbentes y amplificadores). El material de este capítulo junto con el anterior completan una descripción semiclásica de la interacción radiación materia y además permite mostrar que las ecuaciones de Maxwell-Bloch son auto-consistentes en los estudios de propagación.

En situaciones que involucran campos intensos y/o tiempos de relajación grandes, nos interesa la respuesta atómica al campo en escalas de tiempo más cortos que los tiempos de

colisión. En tales casos, la polarización atómica no es una función explícita del campo eléctrico instantáneo, haciendo necesario una nueva manera para calcular la polarización.

Un número de nuevos fenómenos ocurren en este régimen y su estudio requiere nuevas herramientas analíticas. El método seguido aquí, supone que el campo eléctrico es dado inicialmente, entonces se encuentra la polarización de un sistema de dos niveles mediante la ecuación de Schrödinger en la formulación de la matriz de densidad. Después, se resuelve el campo eléctrico a través de la ecuación de onda generado por la polarización del medio. De esta manera, el conjunto de ecuaciones es auto-consistente (Vease Fig.3.1). Esto nos da la solución buscada para la forma del pulso, energía y velocidad del mismo.

### 3.2.- TEOREMA DEL AREA

Como se señaló en el capítulo II, la polarización de un medio no lineal dopado se puede escribir como una parte lineal, una no lineal resonante y otra no resonante. Cuando los efectos son resonantes, la expresión para la polarización Ec.(2.4) puede no ser válida, porque términos de orden arbitrariamente más alto pueden ser significativos. El tratamiento adecuado de tal sistema, involucra resolver las ecuaciones dinámicas de

movimiento del material. Una representación más adecuada para la polarización del medio a la frecuencia  $\omega$  se escribe como [McCall y Hahn, 1969],

$$P(z,t) = Nd(u(z,t) + iv(z,t)) \quad (3.1)$$

donde  $N$  es la densidad dipolar y  $d$  es el vector del momento dipolar. En general el valor medio de los dipolos no será el mismo para todos los átomos, en virtud de que cada átomo puede tener una frecuencia de transición efectiva diferente de los demás, debido tanto a impurezas del medio, como a efectos térmicos. Para considerar esta idea, supondremos que las frecuencias de transición atómicas están distribuidas alrededor de la frecuencia del campo de excitación, según la función normalizada  $g(\Delta\omega)$ . Por lo tanto la polarización se debe promediar sobre esta distribución de frecuencias, así la Ec.(3.1) se escribe como

$$P(z,t) = Nd \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) (u(z,t) + iv(z,t)) d\Delta\omega. \quad (3.2)$$

Ahora estamos en posibilidad de acoplar las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Bloch. De las Ecs. (2.1)-(2.4) y (3.2), se obtiene la ecuación de onda

la primera ecuación es una forma linearizada que nos describe la propagación del pulso y su análisis se encuentra en la siguiente sección. La segunda señala a un aspecto crecientemente importante en los fenómenos no lineales, a una velocidad característica de propagación.

Usando la conservación de probabilidad y resolviendo las Ecs.(1.29), (1.30) y (1.31), se obtienen las correspondientes soluciones no lineales a la dinámica atómica,

$$v(z,t,0) = -v_0 \text{sen } \theta(z,t) \quad (3.7)$$

$$w(z,t,0) = -w_0 \text{cos } \theta(z,t) \quad (3.8)$$

aquí se ha supuesto que el campo esta en resonancia con el medio y que el ancho temporal del pulso es mucho menor que cualquiera de los tiempos de amortiguamiento. El ángulo de  $\theta$  llamado de inclinación (representa la rotación del vector de Bloch respecto a su posición original), esta dado por

$$\theta(z,t) = \kappa \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(z,t') dt', \quad (3.9)$$

en el caso límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , la Ec.(3.9) es idéntica al área del pulso. Notemos que la diferencia de una no linealidad

polinomial, cuyo efecto se encontraría en las amplitudes, en cambio en resonancia la forma funcional de la no linealidad modifica la dinámica íntima de los materiales.

Analizemos el caso a un tiempo  $\underline{t}$ , después de que el pulso ha pasado por el punto de observación  $z$ , esto no necesariamente significa que las componentes individuales de la polarización hallan desaparecido, sino que mutuamente interfieren, dando como resultado que la polarización neta sea nula, debido al rango espectral dado en la Ec.(3.2). Tomemos la Ec.(3.5) e integrémosla desde menos infinito hasta el tiempo  $\underline{t}$ ,

$$\frac{\partial \theta(z, \underline{t})}{\partial z} = \frac{\pi N \hbar k^2 k^2}{2K} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta \omega) d\Delta \omega \int_{-\infty}^{\underline{t}} v(z, t; \Delta). \quad (3.10)$$

Usando la Ec.(3.7) en el caso resonante, y tomando el límite cuando  $\underline{t} \rightarrow \infty$ , en la Ec.(3.10), el resultado es conocido como el "Teorema del Area" (TA) de McCall y Hahn, que expresa la dinámica de la propagación en medios resonantes, en lugar del campo mismo como parámetro de propagación,

$$\frac{\partial \theta(z, \underline{t})}{\partial z} = -\frac{1}{2} \alpha \text{ sen } \theta(z, \underline{t}) \quad (3.11)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de absorción, el cual es el coeficiente de absorción de la ley de Beer,

$$\alpha = \frac{\pi N h \kappa^2 k^2}{2K} g(0). \quad (3.12)$$

donde  $g(0)$  es el perfil de línea en resonancia. Es común llamar a  $\alpha$  el recíproco de la longitud de absorción de Beer. En el límite de campos débiles (áreas pequeñas), el teorema del área se convierte en una relación lineal, es decir, que el área del pulso decae exponencialmente, al mismo tiempo, en el límite de campos débiles, el átomo no es excitado significativamente, por lo que un átomo cerca de su estado base obedece ecuaciones puramente clásicas. Así, en el límite el coeficiente  $\alpha$  cuántico debe coincidir con el coeficiente  $\alpha$  clásico.

La solución general de la Ec.(3.11) es conocida como el *Teorema del área* y constituye una herramienta fundamental en la práctica de propagación de pulsos, dado por la expresión

$$\theta(z) = 2 \operatorname{atan}[\tan(\theta_0) \exp(-\frac{1}{2} \alpha z)] \quad (3.13)$$

la cual define  $\theta_0$  como el ángulo de rotación del vector ficticio  $P(0,0,t)$  para los dipolos con  $\Delta\omega = 0$  y  $z = 0$ , es decir, en la cara de entrada del material.

La solución analítica obtenida es para  $\theta(z)$ , pero en general no proporciona soluciones analíticas para  $\mathcal{E}(z,t)$ , ver Ec. (3.9), excepto en el caso límite estacionario cuando

$\partial\theta/\partial z = 0$ , como se mostrará en la siguiente sección.

La solución gráfica de la Ec.(3.13) es mostrada en la Fig.3.2. Nótese que el área del pulso tiende hacia cero para valores iniciales del área  $\theta_0 < \pi$ , ( $\alpha$  positivo). Si la muestra inicialmente esta excitada ( $\alpha$  negativo),  $\theta(z)$  crece conforme el pulso se propaga y se estabiliza para distancias mucho mayores que la distancia de absorción.

El Teorema del Area exhibe explícitamente la forma en que duración e intensidad estan estrechamente relacionados en la dinámica coherente no lineal, lo cuál tiene importantes aplicaciones prácticas. Por ejemplo, Gibbs y Slusher [Gibbs, 1971], usaron exitosamente las implicaciones de la tercera rama de la curva de la Fig.3.2, para comprimir y amplificar pulsos intensos propagándolos en medios absorbentes. Si un pulso con  $\theta = 3\pi$ , se propaga en el medio, tenderá hacia un pulso cuya área es  $\theta = 2\pi$ . Si el pulso es más corto que 10 nseg, casi no hay pérdidas energéticas, es decir, el pulso prácticamente no interactua con ningún grupo de átomos y por lo tanto conserva su energía sin importar el área. Una justificación para esta aproximación viene de la simulación numérica de McCall y Hahn [McCall y Hahn, 1965] que muestran que la razón de pérdida de energía de un pulso de  $3\pi$  es aproximadamente 0.1 de la razón  $\alpha$ , la cual entra en la ecuación de la Ley de Beer. Como

consecuencia, es cierto que la energía del pulso de entrada  $3\pi$  es igual a la energía del pulso sucesor  $2\pi$ . Para pulsos cuadrados se tiene que  $3\pi\epsilon_{3\pi} = 2\pi\epsilon_{2\pi}$ , de aquí que,

$$\tau_{2\pi} = \frac{4}{9} \tau_{3\pi} \quad (3.14)$$

lo cual muestra que el pulso  $3\pi$  se ha vuelto sensiblemente más delgado tanto como más intenso en su evolución hacia un pulso  $2\pi$  (Fig.3.3).

Puesto que el área del pulso y el ángulo de rotación del dipolo son idénticos, Ec.(3.9), es claro que un pulso de área  $2n\pi$  regresará al dipolo a su estado original, es decir, el dipolo no puede tomar energía del pulso, lo que origina el rompimiento del pulso en  $n$  pulsos de area  $2\pi$ . De los mismos resultados, McCall y Hahn se dieron cuenta que no solamente el área del pulso es estable, sino también su forma, después de haber viajado varias longitudes de absorción en el medio. Estos pulsos se comportan como si el medio fuera transparente, por lo que McCall y Hahn llamaron a este fenómeno Transparencia Auto-Inducida ( SIT ), el efecto es mostrado gráficamente en la Fig. 3.4. SIT fué propuesta como un sistema de transporte eficiente de energía en comunicaciones antes del presente auge de las fibras opticas, donde otro fenómeno no lineal las suplantó. Por esta razón, es conveniente determinar la forma

analítica de tales soluciones.

### 3.3.- SOLUCIONES DEL CAMPO EN EL CASO ESTACIONARIO.

Un pulso estacionario a parte de presentar un área constante ( $\partial\theta/\partial z = 0$ ), debe también presentar el mismo perfil a cualquier observador. La única manera de asegurar el estado estacionario, es pedir que las envolventes del campo y el dipolo dependan del tiempo y del espacio sólo a través del tiempo local,  $\zeta = t - z/V$ , donde  $V$  es la velocidad del pulso. Aplicando esta condición a las Ec.(3.4) y (3.5) se tiene,

$$2 \left( \frac{K}{V} - \frac{k}{c} \right) \dot{\mathcal{E}} = -2\pi k^2 N d \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) v d\Delta\omega \quad (3.15)$$

$$(K^2 - k^2) \mathcal{E} = 2\pi k^2 N d \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) u d\Delta\omega. \quad (3.16)$$

Las Ec. (3.15) y (3.16) han sido resueltas por Matulic y Eberly [Matulic, 1972] usando el teorema de la factorización, cuyas soluciones establecen una relación entre la inversión atómica, el flujo de energía del pulso, el campo y la amplitud del dipolo en fase:

$$w(\zeta; \Delta) = w_0(\Delta) + \frac{1}{2} \mu^2 F(\Delta) \mathcal{E}^2(\zeta) \quad (3.17)$$

$$u(\zeta; \Delta) = u_0(\Delta) + \frac{\Delta}{\kappa} \mu^2 F(\Delta) \varepsilon(\zeta) \quad (3.18)$$

donde  $w_0(\Delta)$  y  $u_0(\Delta)$  representan la inversión de población y el dipolo en equilibrio respectivamente,  $F(\Delta)$  es la función de la respuesta espectral del dipolo y  $\mu$  esta dada por,

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{\pi (w/c)^2 N(d/\kappa)}{K/V - k/c} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) v d\Delta\omega \quad (3.19)$$

De la Ec.(3.17) se observa que la inversión de población prácticamente tiene la misma forma temporal que la del cuadrado pulso. El próximo paso es obtener una ecuación para la envolvente del pulso mismo, la cual puede obtenerse de la Ec.(3.18) a saber,

$$\dot{\varepsilon}^2 = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \varepsilon^2 [M^2 - \varepsilon^2] \quad (3.20)$$

donde  $M$  esta dada por

$$M^2 = \frac{4}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2}{\mu^2 F} - \Delta^2 \right]. \quad (3.21)$$

De la Ec.(3.21), se observa que, para que  $\dot{\varepsilon}^2 > 0$ ,  $\varepsilon^2$  debe estar restringido en el intervalo  $[0, M^2]$  y que  $M$  es el valor máximo de  $\varepsilon$ . Además, para el caso de campos débiles la Ec.(3.20) predice un crecimiento exponencial a una razón de

$(1/2)\kappa M$ . Así,  $M$  a parte de fijar el máximo valor de  $\varepsilon$ , controla la razón a la cual este máximo es alcanzado. Este doble juego de  $M$ , es equivalente a una restricción del área del pulso [Allen, 1985].

Por convención, para pulsos débiles el crecimiento de la envolvente del campo se denota por  $1/\tau$  (llamado factor de forma), de aquí que  $M^2 = 4/(\kappa^2\tau^2)$ . De la Ec.(3.21) y de la condición  $F(0) = 1$ , se encuentra una expresión para  $F(\Delta)$  y  $\mu^2$ :

$$F(\Delta) = \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} \quad (3.22)$$

y

$$\mu^2 = \kappa^2\tau^2 \quad (3.23)$$

es decir, la respuesta espectral dipolar es una lorentziana. Finalmente integrando la Ec.(3.20) se obtiene la forma temporal de la envolvente del campo, esta solución representa a un solitón que se propaga en el medio, es decir, un pulso que conserva tanto su energía como su forma,

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{2}{\kappa\tau} \operatorname{sech}\left(\frac{\zeta}{\tau}\right). \quad (3.24)$$

Usualmente la amplitud del solitón, conoce como el orden del solitón. Sustituyendo este resultado en la Ec.(3.9) e

integrando desde menos a mas infinito se observa que el área de  $\mathcal{E}$  es  $2\pi$ , e independiente de  $\kappa$  y  $\tau$ .

### 3.4.- VELOCIDAD DEL PULSO EN EL REGIMEN ESTACIONARIO.

La presencia de no linealidades afectará la velocidad del pulso en el medio resonante, lo cual puede verse de las Ecs.(3.19) y (3.23)

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{c} + \frac{\pi N \hbar \omega \kappa}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega) d\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (1/\tau)^2} \quad (3.25)$$

aquí hemos usado la aproximación  $K \cong k = w/c$ . Usualmente es más conveniente usar el coeficiente de absorción dado por la Ec.(3.12), cuando la longitud del pulso es sustancialmente más largo que el tiempo de desfaseamiento  $T_2$ , la integral en la Ec.(3.25) puede aproximarse suponiendo que  $g(\Delta\omega)$  es lo suficientemente suave y ancho para ser evaluada en el origen y removerla de la integral, así

$$c/V = 1 + 1/2 \alpha c \tau \quad (3.26)$$

es decir, que la velocidad del pulso es directamente proporcional su ancho temporal, este resultado no tiene análogo clásico y revela nuevas implicaciones en la propagación de pulsos. Puesto que  $c\tau$  puede ser del orden de varios metros y

$\alpha^{-1}$  es del orden de centímetros, la velocidad del pulso en el medio puede ser considerablemente más pequeña que  $c$ . Esto significa que un pulso de salida sufre un retardo temporal respecto al pulso de entrada. Esta es una de las características distintivas de SIT. Valores típicos de  $v$ , pueden llegar a ser hasta  $c/1500$  o más [Slusher, 1972].

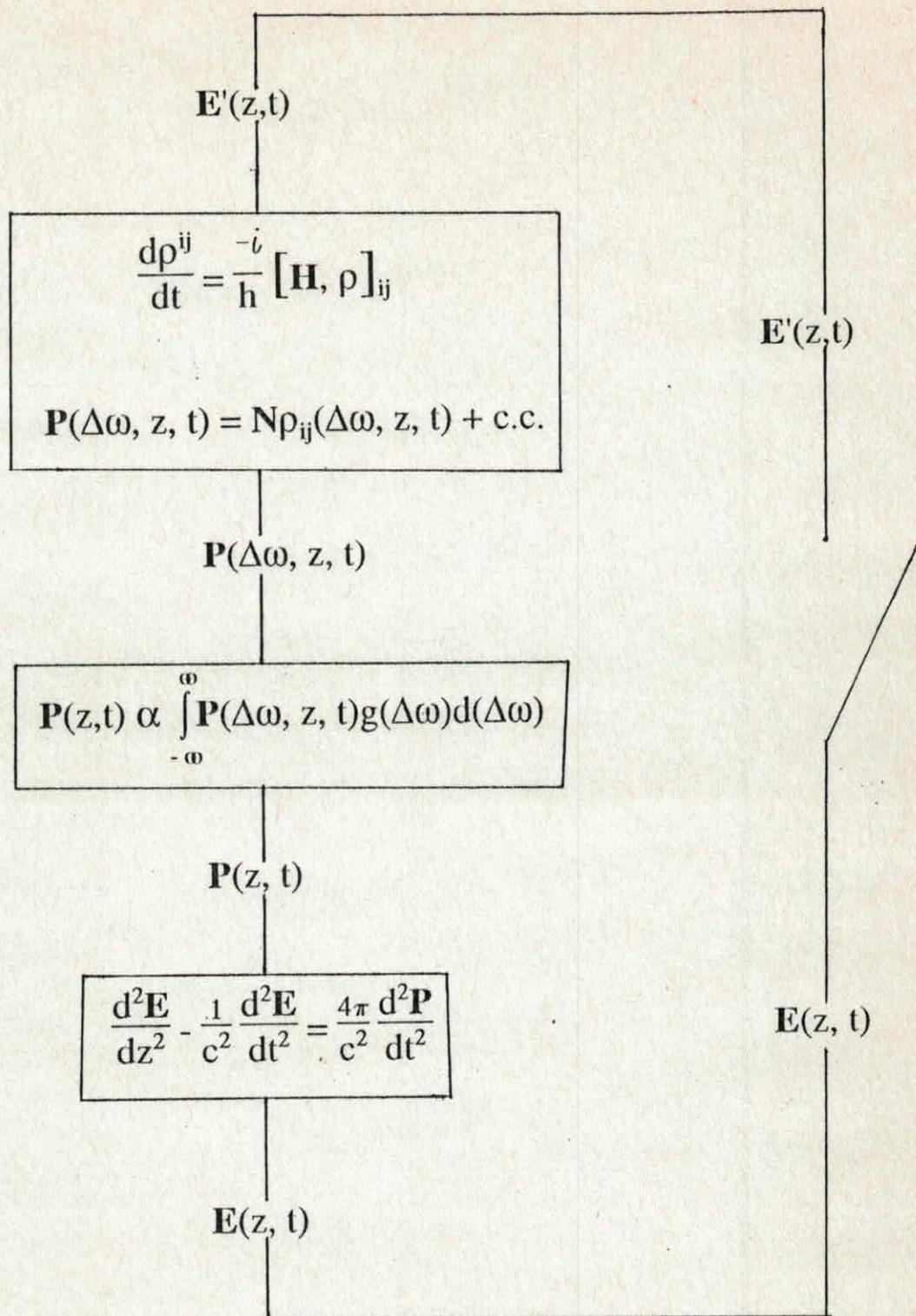


Figura 3.1.- Esquema mostrando la auto-consistencia de las soluciones que describen el acoplamiento de radiación con un absorbedor resonante. Este esquema es usado para estudiar la SIT y propagación de pulsos en fibras ópticas.

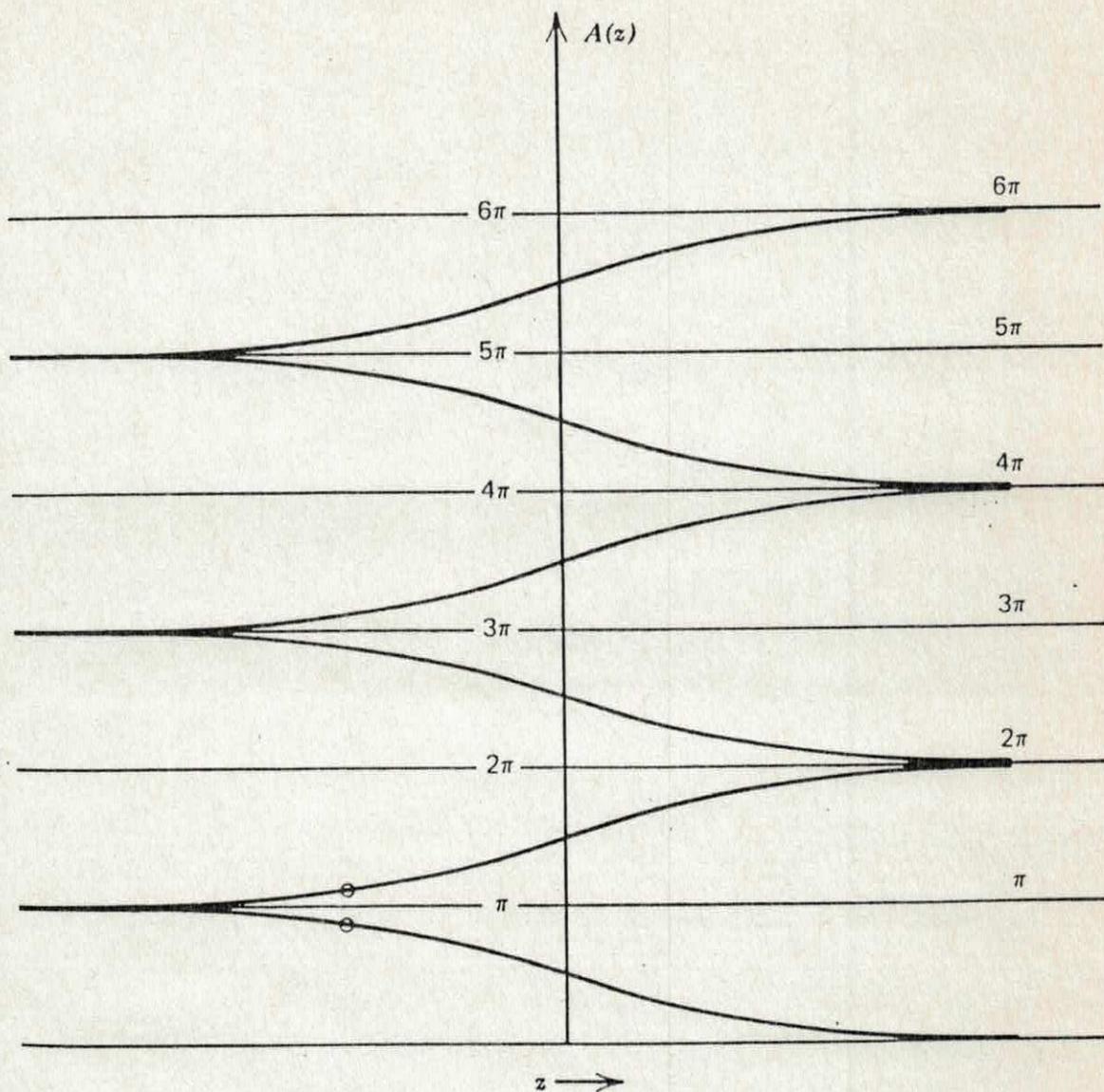


Figura 3.2.- Teorema del Area de McCall y Hahn. Se muestran varias ramas de la solución a la Ec.(3.11), graficando el área en función de la distancia de penetración. El valor de  $z$  que corresponde a la cara de entrada, esta determinada por el area de entrada. En este caso, la cara de entrada esta señalada por los círculos pequeños sobre las curvas del primer punto de ramificación.

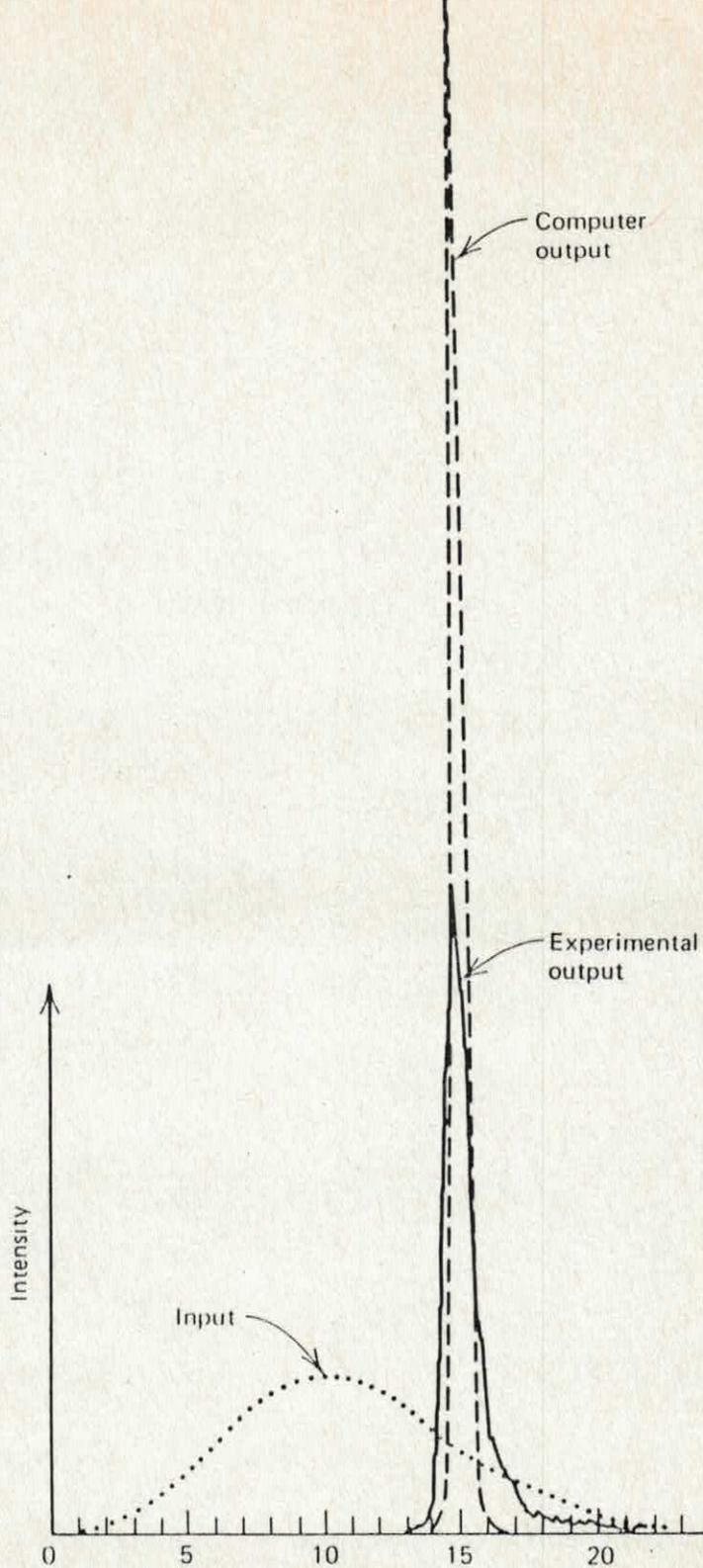


Figura 3.3. Compresión y amplificación de pulso por propagación en un absorbedor pasivo. La línea sólida y la rayada corresponden a los pulsos de salida, mientras que la línea punteada, representa un pulso de entrada de área  $3.5\pi$ .

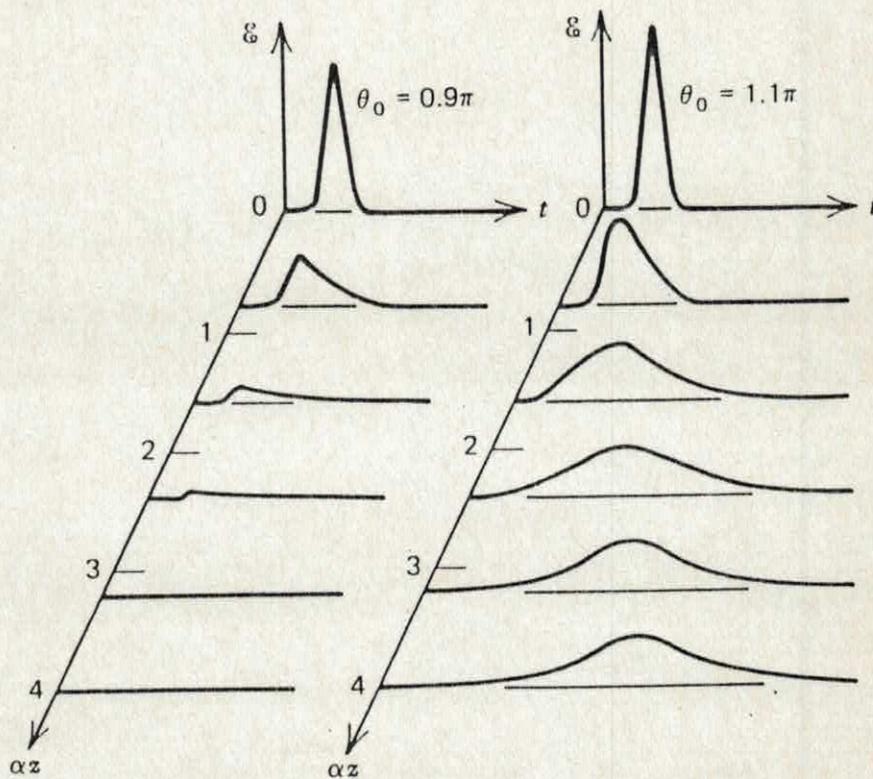


Figura 3.4.- Area del pulso mostrando un comportamiento anómalo predicho por el TA. Un pulso con área ligeramente menor que  $\pi$  es rápidamente atenuado hasta que eventualmente se absorbe totalmente, mientras que un pulso con área ligeramente mayor que  $\pi$ , es ligeramente absorbido mientras evoluciona hacia un pulso "Sech" de área  $2\pi$ .

## CAPITULO IV

---

### EFECTO DE LA DIFUSION EN LA PROPAGACION RESONANTE DE PULSOS

---

#### 4.1.- INTRODUCCION.

Resolver las ecuaciones de Bloch en condiciones generales y sin aproximaciones es prácticamente imposible como hemos detallado en el capítulo anterior. El método de solución de las ecuaciones de Bloch con difusión para resonancia magnética no considera la riqueza de fenómenos que hemos analizado en el capítulo anterior en la propagación de pulsos ópticos. Esto resulta de la consideración implícita de linealidad en la forma del dipolo presupuesto como solución en el caso magnético, pero que sin embargo, resultaría inadecuada en el régimen óptico donde las distancias de propagación son extremadamente largas. La base de la solución presentada por Slichter [Slichter, 1980]

está basada en la suposición de que el dipolo magnético  $\sigma_M$  en la presencia de difusión esta dada por

$$\sigma_M = A(t) e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

donde  $A(t)$  es la solución perturbativa de las ecuaciones de Bloch con difusión. De nuestra discusión anterior podemos reconocer claramente dos aproximaciones:

- a).- Se esta suponiendo que el dipolo se encuentra en el dominio lineal, i. e.  $\sim e^{i\omega t}$ , sin ninguna dependencia de la amplitud del pulso.
- b).- La descripción de la propagación del pulso corresponde al orden más básico de las ecuaciones de onda, i.e. una onda plana, implicando una jerarquización en la solución de las ecuaciones acopladas Maxwell-Bloch.

La primera suposición no considera la estrecha e inseparable simbiosis entre la duración del pulso y su intensidad, característica de los problemas no lineales resonantes, y que se encuentra plasmada en el teorema del área. La segunda suposición constituye una metodología práctica que no esta restringida por la primera y que es adecuada para aquellos procesos en los que la difusión es un proceso

perturbativo. Sin embargo, y como es frecuente en procesos de evolución dinámica, su efecto en la evolución a tiempos largos, o distancias, es significativo.

Suponer que es posible resolver en forma integral y al mismo nivel las ecuaciones de Maxwell y Bloch esta mas allá de cualquier expectativa real actual, y por otra parte de dudable importancia. En este capítulo se supone un método para resolver las ecuaciones de Bloch con difusión, en su régimen no lineal, acopladas a las ecuaciones de Maxwell para describir la propagación del pulso. Esquemáticamente esto corresponde a proponer que la solución tenga la forma,

$$\sigma = P(t) e^{i\omega t}, \quad (4.2)$$

donde  $P(t)$  es la solución al sistema de ecuaciones Maxwell Bloch acoplado. Suponer que la aproximación para  $P(t)$ , sin ninguna condición adicional, tiene la forma,

$$P(t) \sim A(t) p(t) \quad (4.3)$$

donde  $p(t)$  es la solución de las ecuaciones de Bloch, sin embargo abandonar el acoplamiento y los efectos no lineales sobre el perfil transversal del pulso. De aquí que propongamos resolver en forma perturbativa pero integral este sistema y

hacerlo por otra técnica que la que aquí proponemos implica varias y complejas metodologías cuya exploración por sí mismas están más allá de los objetivos de esta tesis.

#### 4.2.- DESCRIPCION DEL METODO

En este trabajo se propone un método para resolver las ecuaciones de Bloch-Maxwell con difusión mediante una técnica perturbativa que mantiene estrechamente relacionada la duración e intensidad del pulso, al sustentarse en el teorema del área y sus modificaciones por difusión para integrar en este nuevo proceso los efectos transversales. Como resultado, se obtiene en forma inmediata información de interés práctico sobre la distribución transversal del TA y la modulación de la energía y la polarización. Las características de transportabilidad de este método a otros muchos problemas donde átomos dopantes con difusión tienen especial importancia requieren de un mejor análisis, sin embargo la sencillez de usar técnicas perturbativas sobre el teorema del área le da una gran potencialidad a este método como ya ha sido remarcado [N. Bloembergen, 1991] En la fig.4.1 se muestra esquemáticamente el método.

#### 4.3.- EFECTOS TRANSVERSALES EN EL TEOREMA DEL AREA.

Las ecuaciones de Bloch permiten explicar una gran variedad de fenómenos cuánticos sumamente interesantes, tales como nutación óptica, eco de fotones, transparencia auto-inducida y conjugación de fase entre otros. En todos estos efectos se ha supuesto que el campo eléctrico esta formado de ondas planas. En condiciones más reales, se trabaja en la región paraxial del haz, como una aproximación a ondas planas, sin embargo, cuando el haz se deja pasar completo surgen varios fenómenos que dependen de la naturaleza transversal del campo, como autoenfocamiento, desenfocamiento y autoatrapamiento en medios resonantes [McCall y Hahn, 1969, Grischkowsky, 1970].

McCall y Hahn fueron los primeros en estudiar los efectos del perfil radial en la propagación de pulsos resonantes manifestada a través del TA, también explicaron los efectos de auto-atrapamiento y auto-enfocamiento en medios resonantes como resultado de tal dependencia [McCall y Hahn, 1969]. McCall y Hahn encontraron que el TA se modifica dependiendo de la forma del pulso, en particular, para perfiles Gaussianos el TA se escribe como

$$\frac{d\theta}{dz} = \alpha \frac{1 - \cos\theta}{\theta} - \frac{1}{2} \sigma\theta, \quad (4.4)$$

donde  $\sigma$  es un factor de pérdidas y  $\alpha$  es el coeficiente de absorción. Si bien, la difusión no es un fenómeno de pérdidas, en un punto fijo del pulso, puede verse como tal, por lo que la Ec.(4.4) predice un decaimiento exponencial en el área del pulso en presencia de difusión, si bien hasta el momento no existe ninguna evidencia experimental de tal afirmación. Esta expresión se dedujo promediando el valor del dipolo en todo el perfil, por lo que la expresión resultante no depende explícitamente de  $r$ . En el caso de áreas pequeñas, el pulso es absorbido a una razón que depende del tipo de pérdidas del medio. Para áreas más grandes, el punto de estabilidad cambia, dependiendo de la razón de pérdidas  $\sigma/\alpha$ , siendo menor cuando  $\sigma/\alpha$  crece, y originando que un pulso  $.9\pi$  se absorba más rápidamente, en consecuencia, se genera una asimetría en el TA.

Nuestro interés se centra en los efectos transversales de la propagación resonante de pulsos, pero como resultado de la difusión, fenómeno inherentemente radial. El modelo que seguimos para describir la difusión es el propuesto por Wherrett [Wherrett, 1983]. Dicho modelo propone difusión en la inversión de población, es decir, variaciones espaciales en la inversión de población, y no en el dipolo como lo propuso Torrey [Torrey, 1954], ya que en el caso óptico es más importante la inversión de población que el dipolo magnético, contrastando en este punto con el modelo de difusión propuesto

por Torrey.

#### 4.4.- SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE BLOCH CON DIFUSION.

Antes de empezar a resolver las ecuaciones de Bloch empezaremos definiendo nuestro sistema de coordenadas. La selección de coordenadas cilíndricas es natural, ya que la mayoría de los lasers trabajan en el modo  $TE_{00}$ , cuya distribución de intensidad radial presenta simetría azimutal. En particular, nuestros resultados numéricos se presentaran para perfiles transversales Gaussianos.

Supondremos que la dependencia radial del campo estará dada por una función  $R(r)$  que no presenta cambios bruscos y que el campo esta dado por,

$$\mathcal{E}_r(r, z, t) = R(r)\mathcal{E}(z, t) \quad (4.5)$$

donde  $\mathcal{E}(z, t)$  es la envolvente del campo dada por la Ec.(3.24).

De acuerdo a la definición del área del pulso, Ec.(3.9), y la forma del campo, se encuentra que el área  $\Theta(r, z)$ , sólo estará escalada por el perfil transversal del campo

$$\Theta(r, z) = R(r)\theta(z), \quad (4.6)$$

donde  $\theta$  esta dado por la Ec.(3.11). Esto significa que el TA es válido en cada punto del perfil radial (Vease la Fig. 4.2), lo que nos permite usar la Ec.(4.6) como argumento en las ecuaciones de Bloch sin difusión. Nótese que en el centro del perfil, se recuperan las Ec.(3.7)-(3.8). Por otro lado, definiendo  $q = w + iv$  y sumando las Ec.(3.7)-(3.8) se encuentra,

$$\frac{dq}{dt} = ( -i\Omega + \frac{D}{q} \nabla^2 w ) q \quad (4.7)$$

donde  $q = q(r,z,t)$  y  $\Omega$  es la frecuencia de Rabi, cuya dependencia radial se da través del campo. Esta ecuación constituye el punto clave de este trabajo, ya que contiene la información sobre la variación espacial y temporal de la inversión de población, la cual se resolverá siguiendo el método planteado en la sección 4.2. La solución a la ecuación Ec.(4.7) sólo puede hallarse numéricamente, sin embargo, mediante técnicas perturbativas es posible encontrar soluciones analíticas en base a soluciones analíticas sin difusión, siendo esto la base del método que presentamos.

Para resolver la Ec.(4.7), nos colocaremos en el frente de un pulso viajero, donde existe una equivalencia espacio-temporal, es decir, la distancia de propagación es

equivalente al tiempo de propagación,  $z = Vt$ , donde  $V$  es la velocidad del frente del pulso en el medio en esa posición radial. Así, integrando la Ec.(4.7) desde el tiempo  $t$ , al cual asignaremos arbitrariamente como nuestro origen, hasta un tiempo  $t$ , resulta en una representación formal del dipolo de la forma

$$q(r,t) = q(0)A(r,t)\exp(-i(\theta(t) - \delta\theta(r,t))) \quad (4.8)$$

donde  $q(0)$  es el valor de  $q$  en  $t = 0$ ,  $\theta$  es el área dada por la Ec.(3.11), y

$$A(t) = \exp\left(D \int_0^t \frac{w\nabla^2 w}{|q|^2} dt'\right) \quad (4.9)$$

$$\delta\theta(t) = D \int_0^t \frac{v\nabla^2 w}{|q|^2} dt'. \quad (4.10)$$

Si expandemos la Ec.(4.5) y separamos en parte real y parte imaginaria, obtenemos un par de ecuaciones similares a las Ecs.(3-7) y (3.8), esto es,

$$w = q(0)A(t)\cos(\theta - \delta\theta(t)) \quad (4.11)$$

$$v = q(0)A(t)\text{sen}(\theta - \delta\theta(t)), \quad (4.12)$$

inmediatamente, podemos darnos cuenta que el efecto de la difusión se presenta como un efecto modulador en las Ec.(3.7) y (3.8) y no como un simple producto de soluciones no perturbadas. Estos resultados apuntan al resultado más importante que se obtiene por este método: una modificación al TA de McCall y Hahn con todas sus implicaciones, es decir, una alteración transversal de la dinámica atómica que gobierna la evolución del pulso mismo. Notemos que si el pulso es muy débil ( $\theta \ll \pi$ ),  $A(t)$  corresponde a la solución de la amplitud de difusión obtenida por Slichter.

Las condiciones iniciales en las Ecs.(4.11)-(4.12) permiten determinar  $q(0)$ . En la entrada del material ( $t = 0$ ), se cumple que  $A(t) = 1$  y  $\delta\theta = 0$ , entonces comparando las Ec.(4.11) y (4.12) con las Ec.(3.7) y (3.8), se concluye que  $q(0) = -1$ .

Por otro lado, la solución de las Ec.(4.9) y (4.10), no son muy complicadas de obtener, pero sí muy tediosas debido a los largos cálculos algebraicos - para más detalles vease el apéndice A - involucrados. Por conveniencia, en esta sección únicamente presentaremos las soluciones de las Ecs.(4.9) y (4.10). Por comodidad, empecemos con la solución de la Ec.(4.9), que nos proporciona la variación de la amplitud del

dipolo debida a la difusión;

$$\begin{aligned}
 A(r, z) = \exp \left( -D \left\{ g_1 \arctan(y) + g_2 \frac{y}{1+y^2} + g_3 \frac{y}{(1+y^2)^2} + \right. \right. \\
 - g_4 \frac{y}{(1+y^2)^3} + g_5 \frac{1}{1+y^2} - g_6 \frac{1}{(1+y^2)^2} \\
 \left. \left. + g_7 \frac{1}{(1+y^2)^3} \right\} z \right) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

donde  $y = \tan \left( R(r) \frac{1}{2} \theta_0 \right) e^{-\alpha z'/2}$ . Las funciones  $g_i$  únicamente dependen del radio y del área pulso inicial, las cuales están dadas por las Ecs. (A.28) - (A.35).

La forma de la Ec. (4.13) es bastante compleja, sin embargo, para varias distancias de absorción, únicamente sobrevive el primer término de la Ec. (4.13), es decir, el argumento de la Ec. (4.13) queda determinada por una función muy similar al teorema del área en el estado estacionario, en consecuencia A depende de las condiciones de un punto de estable, dependiente del radio y del coeficiente de difusión, y que discutiremos a continuación. Cuando hagamos referencia a los valores del coeficiente de difusión, diremos que un medio de baja difusión serán aquellos donde los átomos presentan poca movilidad (el caso límite  $D \rightarrow 0$ , corresponde a sólidos a bajas temperaturas), mientras que medios de alta difusión serán

aquellos donde los átomos presentan alta movilidad (equivalentemente, el caso  $D \rightarrow \infty$ , corresponde a gases a baja presión).

En la Fig.4.3 se muestra el comportamiento de la Ec.(4.13) para varios valores del radio con pulsos de área inicial  $.9\pi$  y  $1.1\pi$  en el centro del perfil (en este caso de un perfil Gaussiano) para medios de baja difusión ( $D = 0.0001$ ). Nótese que en ambos casos  $A(r,z)$  alcanza un valor estacionario alrededor de  $\alpha z = 1$ , siendo menor esta distancia, cuanto mayor se este alejado del centro del perfil. Nótese además, que las variaciones en  $A(r,z)$  son muy pequeñas, una buena aproximación en este caso, es tomar  $A(r,z)$  constante, reduciendo el efecto de la difusión a una modificación del TA. Sin embargo, para sistemas más difusores, el efecto modulador de la Ec.(4.13) se hace más patente como puede verse en la Fig.4.4, que sin embargo, exhibe un comportamiento idéntico al de la Fig.4.3, como puede verse de la Ec.(4.13), únicamente escalado en  $D$ . Esto significa que los átomos excitados se redistribuyen más rápidamente, en consecuencia la inversión de población y dipolos encontrados por el pulso serán menores que  $w_0$  conforme el pulso se propaga. En el caso límite, cuando  $D \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow 0$ , y por lo tanto el pulso, es absorbido. Obsérvese que en el centro del perfil, el pulso sufre una brusca modulación cerca de la cara de entrada, mientras que para radios mayores que cero, el

efecto modulador de la difusión disminuye, estabilizándose para distancias de propagación menores que 1, con un valor mínimo para  $A(r,z)$  en  $r = .3$ . En el límite, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow 1$ , es decir, no existe modulación en  $A(r,z)$  para puntos muy alejados del centro del perfil del pulso, como es de esperarse para pulsos débiles. Nótese que existe una diferencia entre las curvas de la Fig.4.3, pues mientras que la Fig.4.3a, tiene un mínimo y un máximo absoluto, la Fig.4.3b, tiene un mínimo y un máximo local, además de un mínimo absoluto. Puesto que  $A$  esta asociada con la amplitud del pulso, pulsos con  $\theta = .9\pi$ , presentarán un hueco alrededor del centro perfil, mientras que pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , presentarán un pico alrededor de la misma región, que para medios con coeficiente de difusión pequeño no serán apreciables. Sin embargo, como se muestra en la Fig.4.4, el pulso se dispersa y puede llegar a romperse después de unas pocas distancias de propagación ( $\alpha z \approx 1 - 2$ ).

En el caso de la Ec.(4.10), su solución corresponde a las modificaciones del área del pulso y esta dada por, (vease Apéndice A)

$$\delta\theta = D \left\{ -p_4 \arctan(y) + p_1 \frac{y}{1+y^2} \right. \\ \left. + p_2 \frac{y}{(1+y^2)^2} - p_3 \frac{y}{(1+y^2)^3} + p_5 \frac{1}{1+y^2} + p_6 \frac{1}{(1+y^2)^2} \right.$$

$$+ p_7 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \Bigg|_0^z \quad (4.14)$$

donde  $y$  esta dada igual que en (4.13) y las funciones  $p_i$  son similares a las funciones  $g_i$ , las cuales estan dadas por las Ecs.(A.19) - (A.25). Usando el argumento de la Ec.(3.8) o (3.9), se encuentra que el teorema del área modificado por difusión está dado por,

$$\begin{aligned} \Theta = & 2(1 - \frac{D}{2} p_4) \arctan(y) + D p_4 R \frac{1}{2} \Theta + D \left\{ \frac{p_1}{8} \frac{y}{1 + y^2} \right. \\ & + p_2 \frac{y}{(1 + y^2)^2} - p_3 \frac{y}{(1 + y^2)^3} + p_5 \frac{1}{1 + y^2} + p_6 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \\ & \left. + p_7 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \right\} \Bigg|_0^z \quad (4.15) \end{aligned}$$

Nótese que, esta expresión es bastante compleja también, sin embargo, su comportamiento es muy similar al caso anterior. Por ejemplo, para varias distancias de absorción, únicamente sobreviven los dos primeros términos de la derecha de la Ec.(4.15) y la Ec.(4.15), en este caso toma una forma muy parecida al TA sin difusión en el estado estacionario.

A diferencia de la amplitud dipolar  $A$ , el área de un pulso

es posiblemente el parámetro más importante de la dinámica de la propagación no lineal coherente, por lo que le daremos un cuidadoso análisis. Los conceptos más importantes de estabilidad y sus trayectorias que surgen del teorema del área son tres, todos ellos estrechamente relacionados. De acuerdo con esto, existen áreas estables que corresponden a pulsos de área nula o absorción, o bien pulsos de área estable que bien pueden conducirnos a la existencia de pulsos estables; áreas de inestabilidad donde se definen las trayectorias de estabilidad y finalmente las trayectorias que unen áreas inestables y estables en forma simétrica y que corresponden a la propagación misma. Esperamos que esto tenga una dependencia transversal como función del coeficiente de difusión, por lo que en un pulso de área grande podemos, a través de su perfil, recorrer todos los posible casos del teorema del área sin difusión, que en el caso lineal correspondería a valores 0 y  $2\pi$ .

Primero analizaremos los puntos de estabilidad y sus trayectorias en forma gráfica, ya que como nos demuestra la experiencia práctica, es la forma más útil de visualizar el TA. Los resultados se mostrarán en el siguiente orden: se presentará el TA con difusión para radios pequeños y áreas grandes con el fin de comparar los resultados con el TA sin difusión de McCall y Hahn, y posteriormente para radios más grandes, donde eventualmente se alcanza un punto de transición,

si el área inicial del pulso es mayor que  $\pi$ .

En la Fig.4.5 se muestra el TA (en  $r = 0$ ) como función de la difusión y se compara con el TA original sin difusión. Observese la similitud entre ambas curvas. En particular, en la Fig.4.5 se muestra que el TA con difusión coincide con el TA original para un amplio intervalo de  $D$ . En particular para  $D = 0.1$  ambas curvas (con y sin difusión) difieren muy poco. Nótese que en el centro del perfil, el TA con difusión grande, tiene la misma forma que el TA original, modificándose ligeramente el punto de estabilidad, pero conservando su simetría, reproduciendo el TA sin difusión en el centro del perfil. Sin embargo, fuera del centro del perfil, para un  $r$  fijo ( $r = .2$ ), se observa una clara modificación de los puntos de estabilidad y una pérdida de la simetría del TA, como se muestra en la Fig.4.6. Obsérvese que el punto de estabilidad es menor que  $2\pi$ , conforme  $D$  crece, pero el TA conserva su forma, pero no su simetría, en concordancia con los resultados de McCall y Hahn. Sin embargo, para pulsos con área inicial menor que  $\pi$ , el efecto de la difusión no es apreciable, ya que el pulso se absorbe prácticamente a la misma razón con difusión que sin difusión, como puede observarse en la parte inferior de la Fig.4.6.

En la Fig.4.7, se muestra gráficamente la Ec.(4.15), para

áreas grandes en sistemas de baja difusión ( $D = 0.0001$ ) y radios pequeños, en la que ya se muestra una sensitiva, aunque aún no drástica variación con respecto al TA sin difusión. En la misma figura se muestran varias curvas del área alrededor de  $\pi$ , para valores pequeños de  $r$ , pero no significativamente cercanas al punto de inestabilidad. La simetría del teorema del área sin difusión se pierde en este caso, sin embargo no es muy diferente del TA original, contrariamente a lo que pasa en la Fig.4.8, donde se ha aumentado el coeficiente de difusión y donde la modificación del punto de estabilidad es más notoria, ya que este, se modifica también en función de  $r$ . Se observa que conforme  $r$  aumenta, un pulso con área  $.9\pi$  (en  $r = 0$ ) se absorbe más rápidamente, mientras que un pulso de área  $1.1\pi$  (en  $r = 0$ ) necesita una mayor distancia propagación para amplificarse y alcanzar su punto de estabilidad. Debemos notar aquí, que existe una dependencia radial en el área de estabilidad, siendo menor conforme aumenta  $r$ . Esto indica claramente que durante la propagación, el área del pulso adquiere un perfil estable, no constante, como función de  $r$ .

Por otro lado, pulsos con área menor que  $\pi$ , se absorben prácticamente a la misma razón con difusión que sin ella, como se muestra en las Fig.4.7 y 4.8.. Esta es una importante diferencia que junto con la Fig. 4.6, enfatiza las cuidadosas diferencias que se deben hacer en los tratamientos

perturbativos para pulsos de áreas grandes y pequeñas en otros problemas donde se espera difusión durante la propagación. Claramente esto apunta a un reanálisis del tratamiento promediado de McCall y Hahn [1969].

El comportamiento del área dada por la Ec.(4.13) en función del radio, sugiere un desplazamiento de la parte inferior al punto de inestabilidad hacia la izquierda y la parte superior a la derecha. Mostrando gran sensibilidad a cambios en  $r$ , en el caso de pulsos de área mayor que  $\pi$ , aún para medios con baja difusión, mientras que en el caso de pulsos menores que  $\pi$  (en  $r = 0$ ), conservan su forma para todo  $r$ , únicamente se desplazan a la entrada del medio, de acuerdo al perfil radial, como puede verse en la parte inferior de la Fig.4.7- 4.8. Comparando nuestros resultados con los obtenidos por McCall y Hahn (Ec.(4.3)), observamos una gran similitud. A diferencia de McCall y Hahn obtenemos un TA en función del radio y obtenemos una modificación del punto de estabilidad, en función tanto de  $D$  como de  $r$ . Esta última dependencia, es equivalente en nuestro caso a tener un coeficiente de absorción dependiente del radio. En cierta manera, esto es equivalente a modificar la razón de pérdidas  $\sigma/\alpha$  de McCall y Hahn.

La Fig.4.9 - 4.10, presentamos un caso análogo al de la Fig. 4.7, para radios mayores, tales que permitan analizar el

punto de transición  $\pi$ , radialmente alcanzado. Para pulsos de área menor a  $\pi$ , observamos el esperado comportamiento de absorción con escasa influencia de la difusión en ambas figuras. Sin embargo, observamos que cuando un pulso  $1.1\pi$  (en  $r = 0$ ) tiende hacia  $\pi$  radialmente, se espera que nos aproximemos a un punto de transición o de inestabilidad, en los que habrá de especificar su comportamiento. En la Fig.4.9 ( $D = 0.0001$ ), se observa un transición monótona, para  $r$  en  $[\.28, \.31]$ . Observese que para  $r = \.28$ , la ganancia en la energía del pulso es pequeña hasta  $\alpha z \approx 5$ , después adquiere una ganancia lineal y finalmente cerca de  $\alpha z = 10$  el pulso alcanza su punto de estabilidad; esta misma situación se presenta en la Fig.4.10. Sin embargo, en este figura, se observa que para  $r = \.31$  el área pulso cruza el punto de inestabilidad  $\pi$  en  $\alpha z = 5.7$  y después se amplifica ligeramente. Así, en la presencia de difusión, el pulso se vuelve cuasi estable y no monótono, sin apuntar a puntos de estabilidad preestablecidos. Esta cuasiestabilidad es un resultado poco usual no considerado previamente. Al aumentar  $r$  a  $\.33$ , el pulso adquiere un área ligeramente menor que  $\pi$ , y por lo tanto se absorbe, después de este punto en la forma esperada.

El TA muestra inestabilidades más pronunciadas si el coeficiente de difusión es mayor, como era de esperarse ya que tales perturbaciones se hacen más significativas. Sin embargo,

igual que antes el TA se recupera para  $r$  pequeños dentro de  $[0,28]$ , aun para un rango grandes de valores del coeficiente de difusión, como se mostró en la Fig.4.6.

En resumen, el pulso se comporta como el TA original sólo en el caso de radios pequeños,  $r \in [0,25]$  y un amplio rango de valores del coeficiente de difusión. Sin embargo, para  $r$  fuera de este intervalo, en medios con coeficiente de difusión menores que 0.0001, pulsos con  $\theta = 1.1\pi$  (en  $r, z = 0$ ), cruzan el punto de inestabilidad monótonamente, mientras que pulsos con la misma área inicial, en medios más difusivos ( $D > 0.0001$ ), después de ciertos valores de  $r$  (alrededor de  $r \approx .31$ ), el pulso se vuelve inestable y empieza a oscilar ligeramente alrededor del punto de transición. Para  $r > .31$ , el pulso se comporta y absorbe como lo predice el TA sin difusión. Esto significa que la parte central se propaga normalmente y que el resto del pulso se absorbe, con la aparición de "alas" alrededor del punto central, originando que el pulso se cuadre, a partir de  $r > .31$ , esto es algo experimentalmente reportado [Fill, 1984] y teóricamente explicado en base a un simple modelo fenomenológico, si bien en este modelo no se han considerado efectos coherentes [Aboites, 1988]. En medios altamente difusivos, tales oscilaciones se hacen significativas y las trayectorias de inestabilidad siguen direcciones no preestablecidas.

De esta manera se ha demostrado la viabilidad del método propuesto para resolver las ecuaciones de Maxwell-Bloch, introduciendo perturbaciones en el TA, lo que abre la posibilidad de aplicación del método en problemas donde átomos dopantes presentan difusión espacial.

Una aplicación del TA se obtiene de la equivalencia de  $\alpha = \alpha(r)$ , esto implica que diferentes partes del pulso sufren distintos retardos temporales, lo que causa un rompimiento temporal del pulso, lo que dificulta la compresión de pulsos en medios difusores.

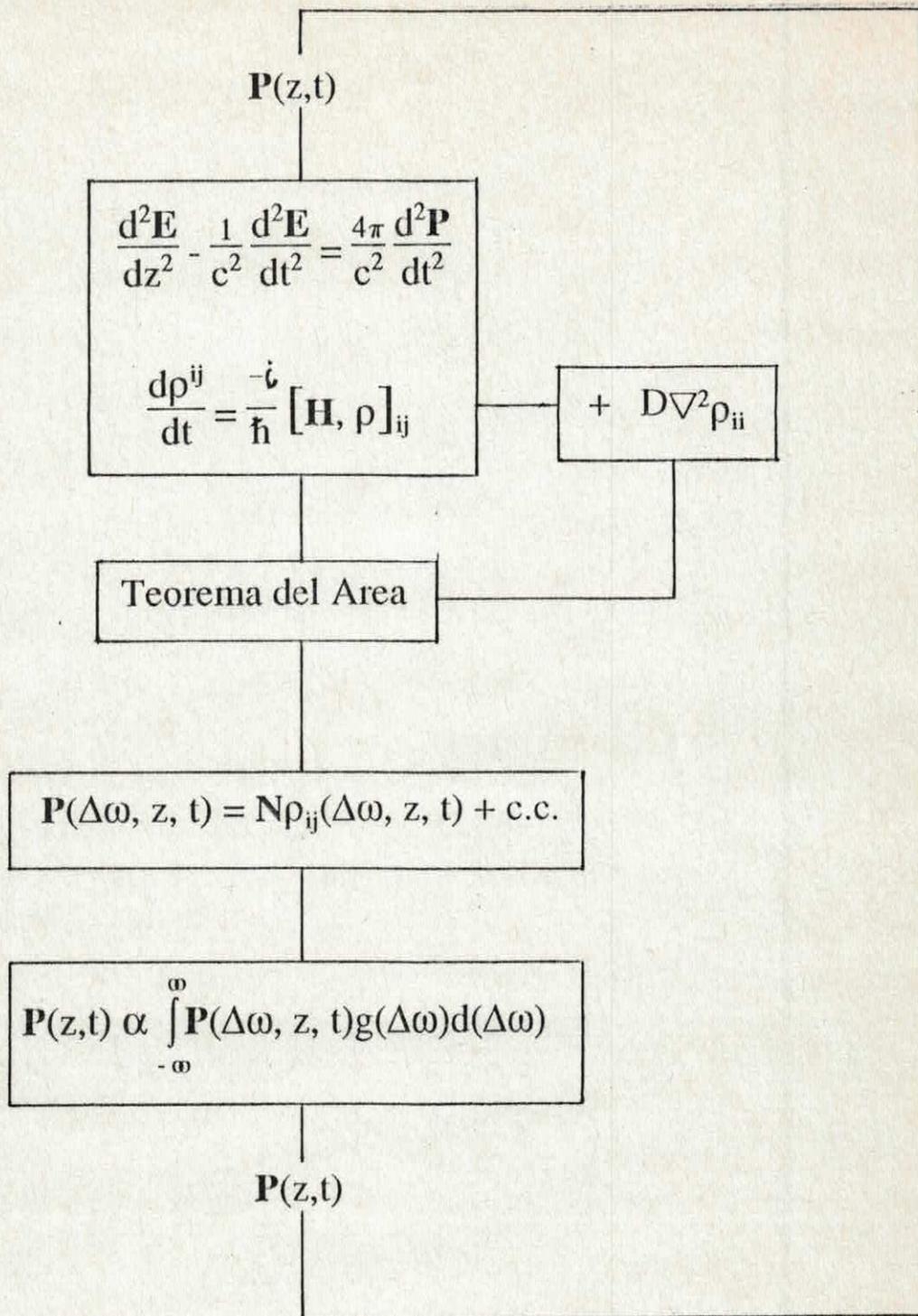


Figura 4.1.- Diagrama del método propuesto para la solución de las ecuaciones de Maxwell-Bloch con difusión. Se ha agregado el TA a las ecuaciones base y la difusión se ha agregado como un término perturbativo.

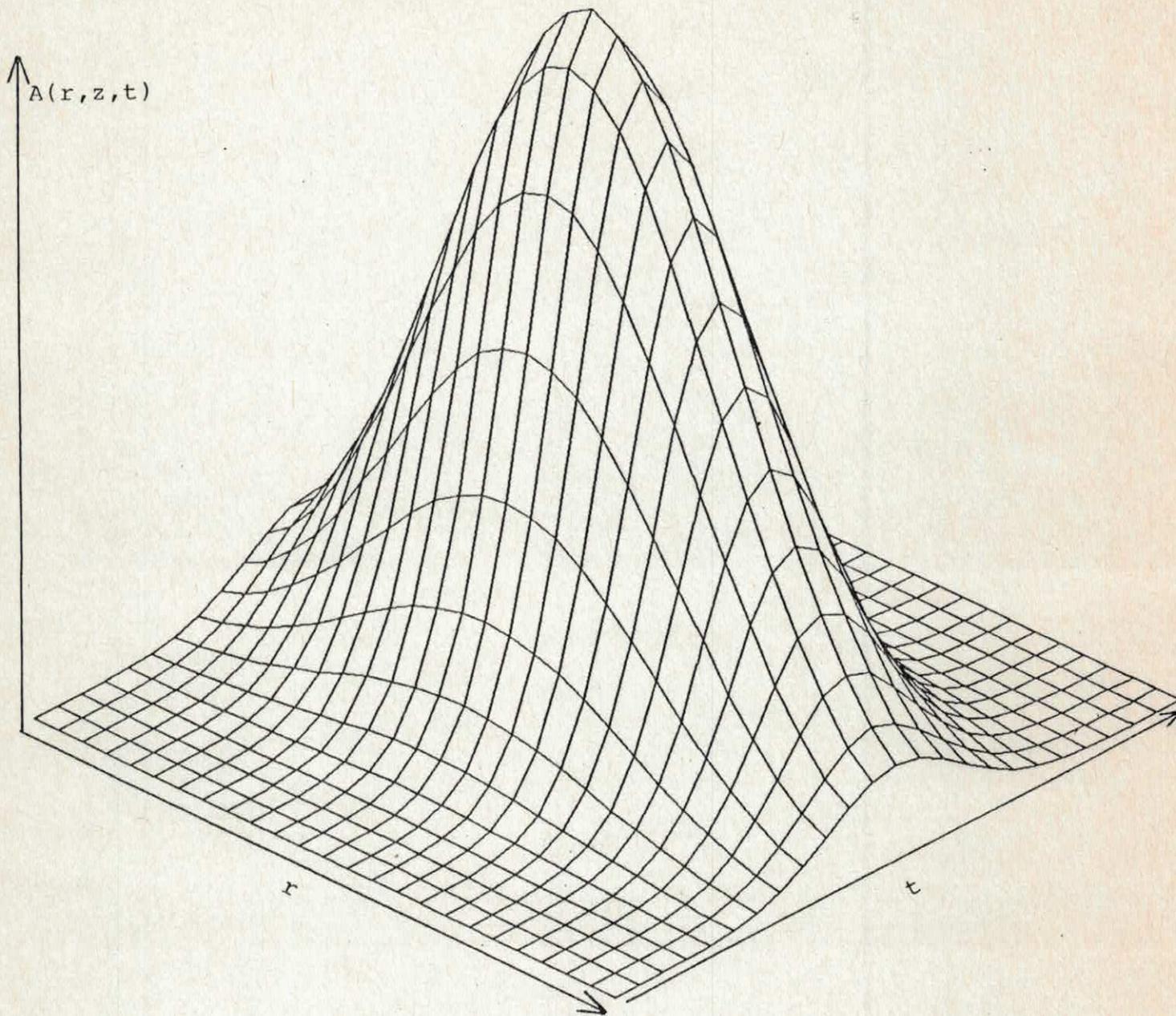
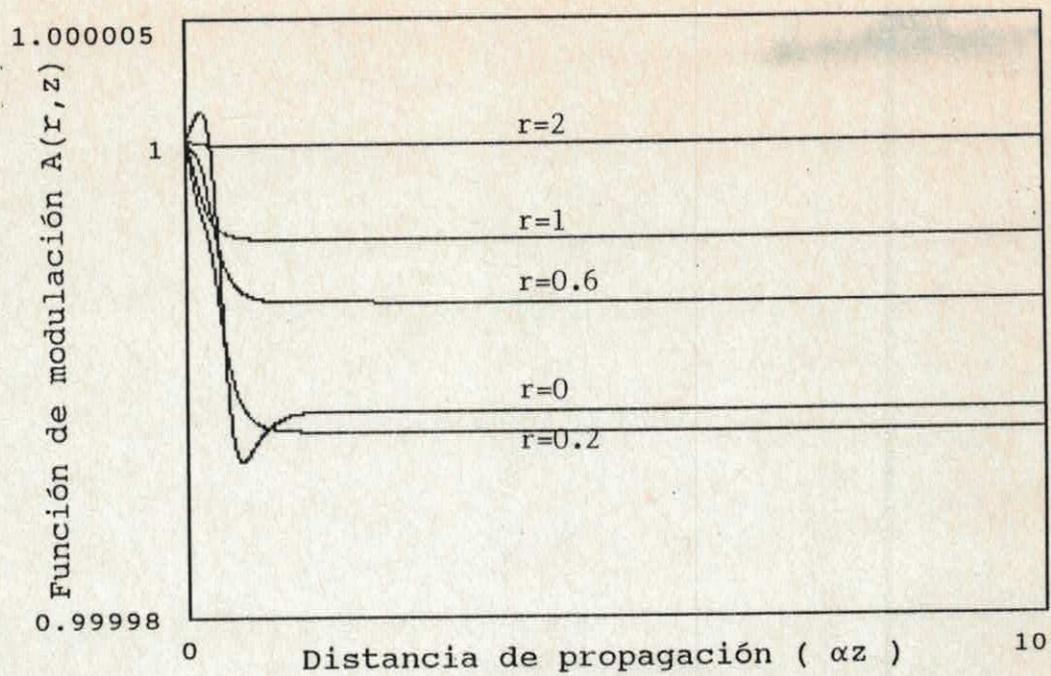
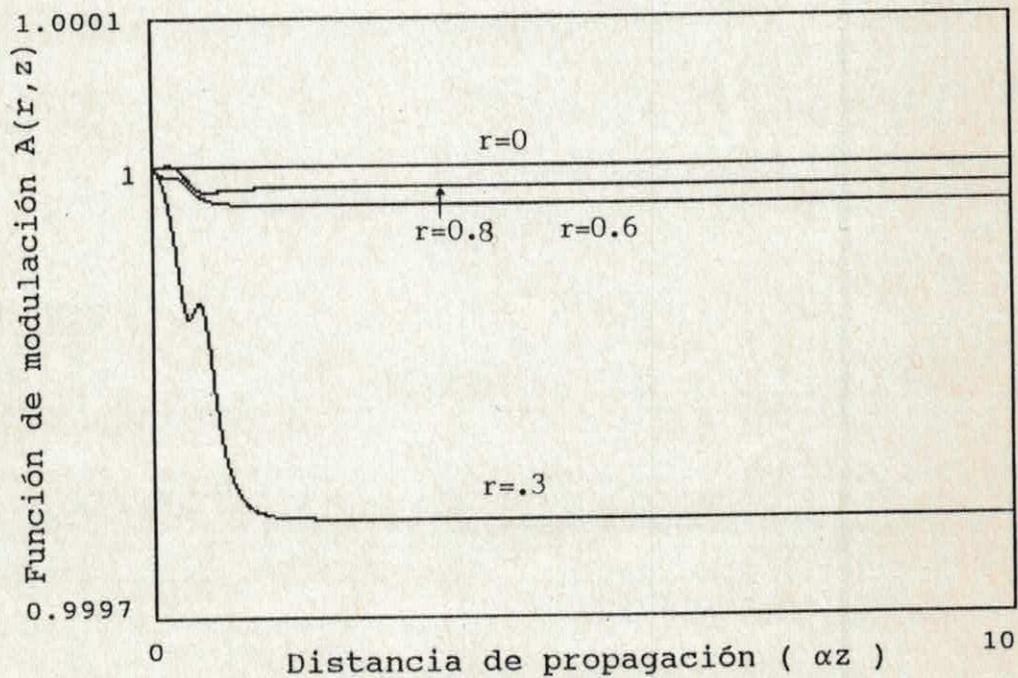


Figura 4.2.- Perfil radial y temporal del área del pulso. En cada punto del perfil radial es válido el TA, como lo demuestra la Ec.(4.6).



(a)



(b)

Figura 4.3.- En (a) se muestra la función de modulación para pulsos con  $\theta = .9\pi$  y en (b) para pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , para varios radios. El coeficiente de difusión es  $D = .0001$ .

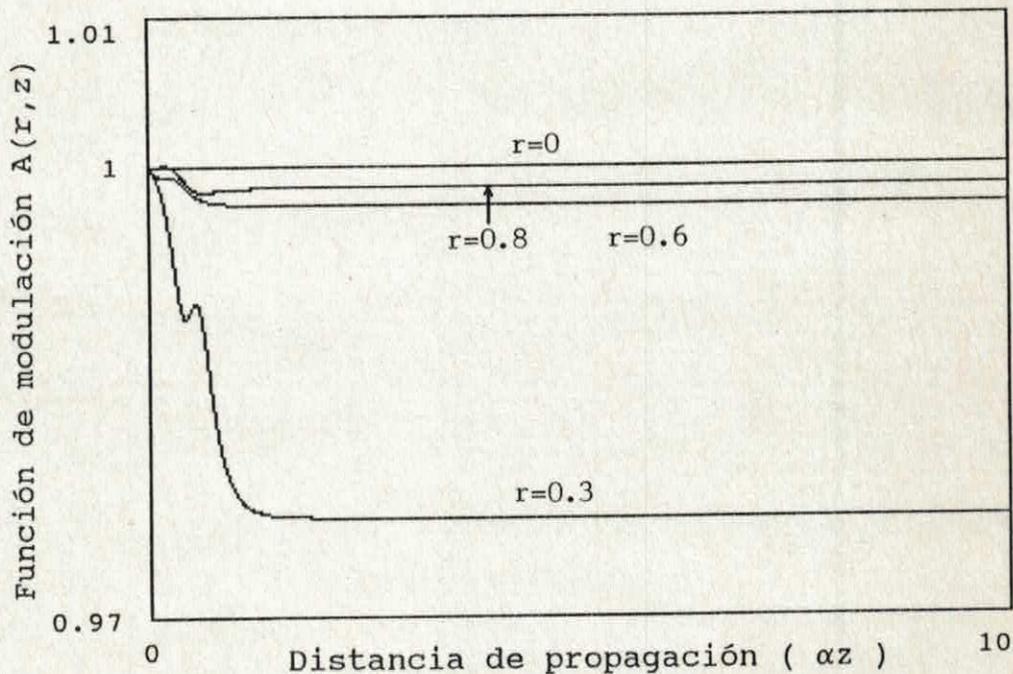
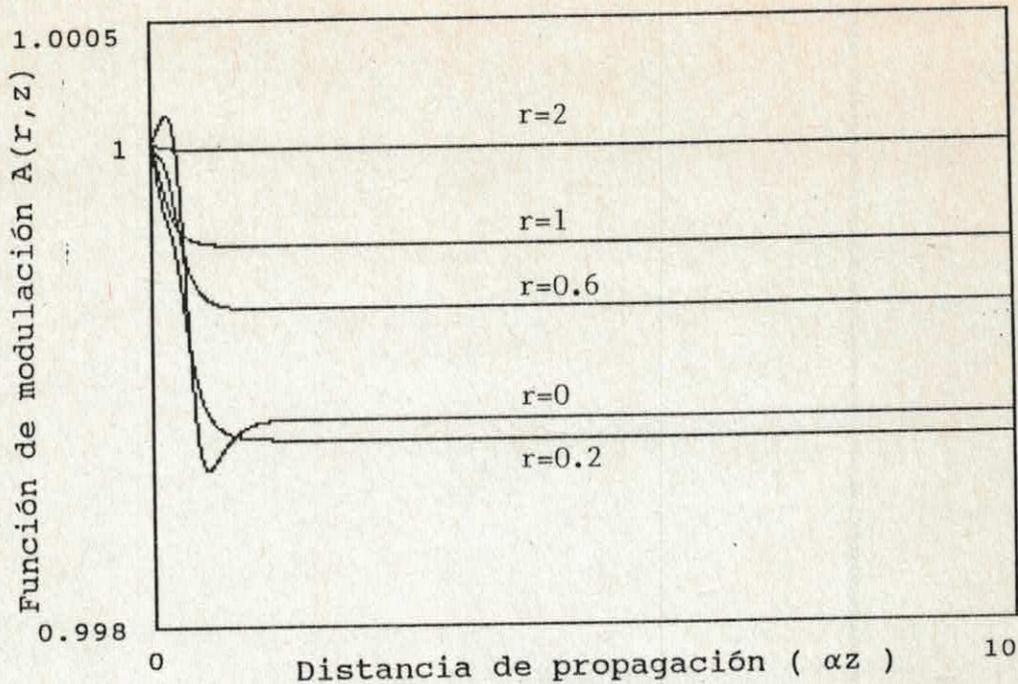


Figura 4.4.- Igual que antes, en (a) se muestra  $A(r,z)$  para pulsos con  $\theta = .9\pi$  y en (b) para pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , en el centro del perfil radial y a la entrada del medio. El coeficiente de difusión es  $D = .01$ . Nótese que las curvas de la Fig.4.3, son idénticas, sólo están escaladas por el coeficiente de difusión, como puede verse de la Ec.(4.13).

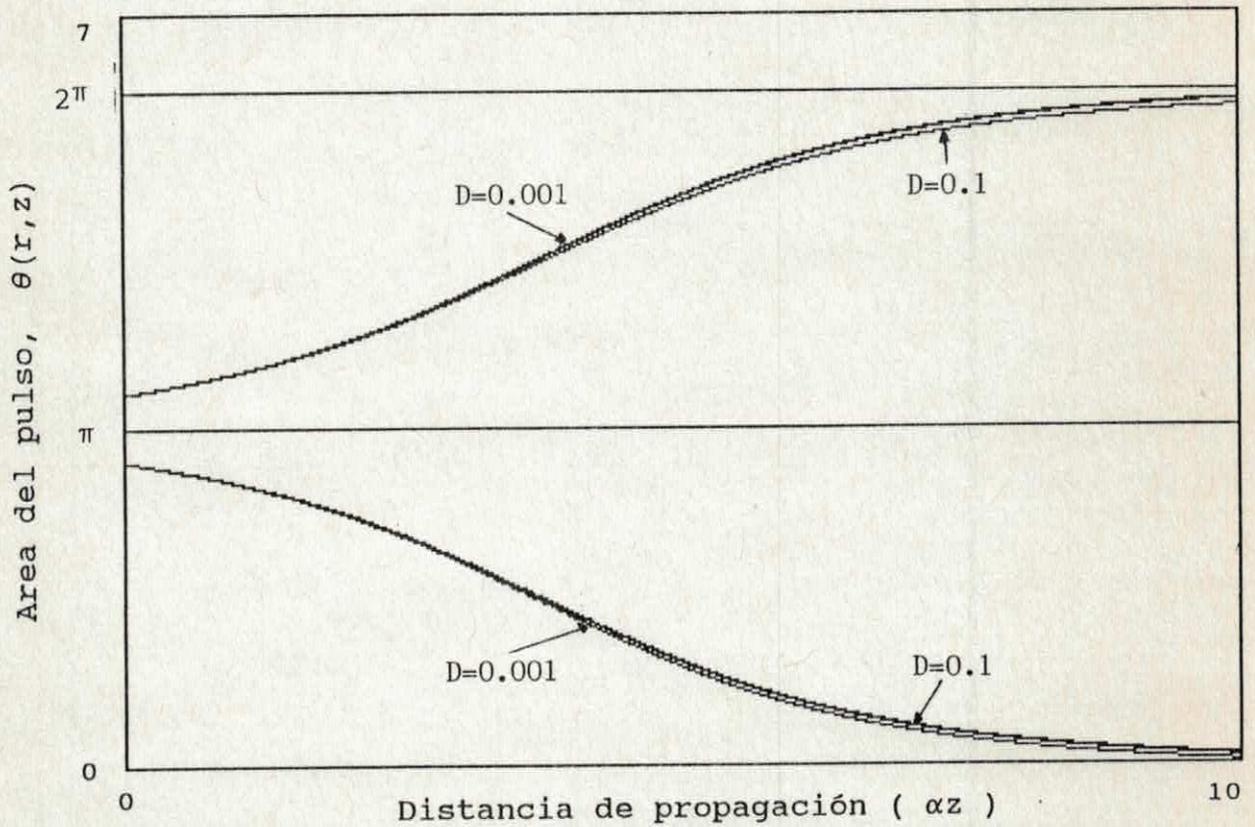


Figura 4.5.- Teorema del área sin difusión (a) y Teorema del Área con difusión (en  $r = 0$ ) en función del coeficiente de difusión. Nótese que ambas curvas coinciden, excepto  $D = 0.01$ .

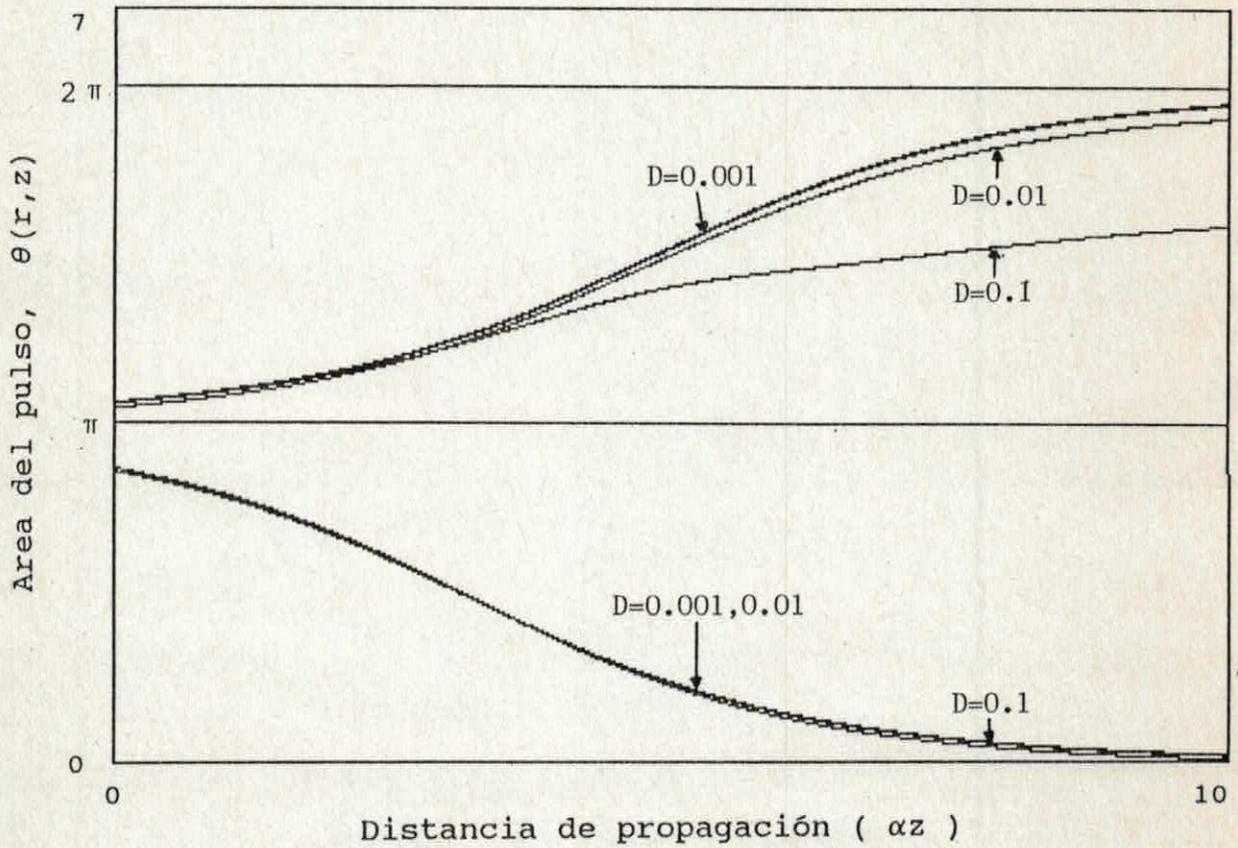


Figura 4.6.- Teorema del Area en función del coeficiente de difusión para un  $r$  ( $= .2$ ) fijo. En este caso, se pierde la simetría del TA original y se da una modificación del punto de estabilidad.

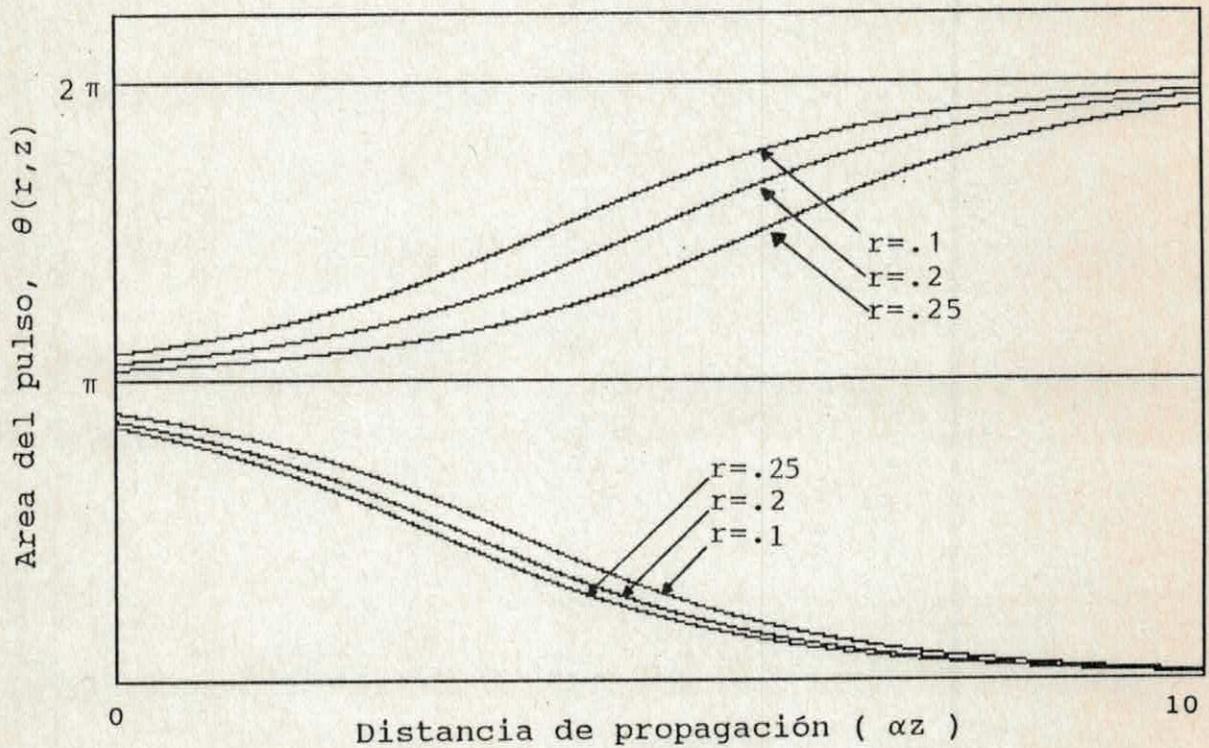


Figura 4.7.- Teorema del Area en función de  $r$  para  $D$  fijo. En esta gráfica se observa una asimetría del TA debido a una modificación de los puntos de estabilidad, debido tanto a la posición en el perfil como del coeficiente de difusión.  $D = 0.0001$ .

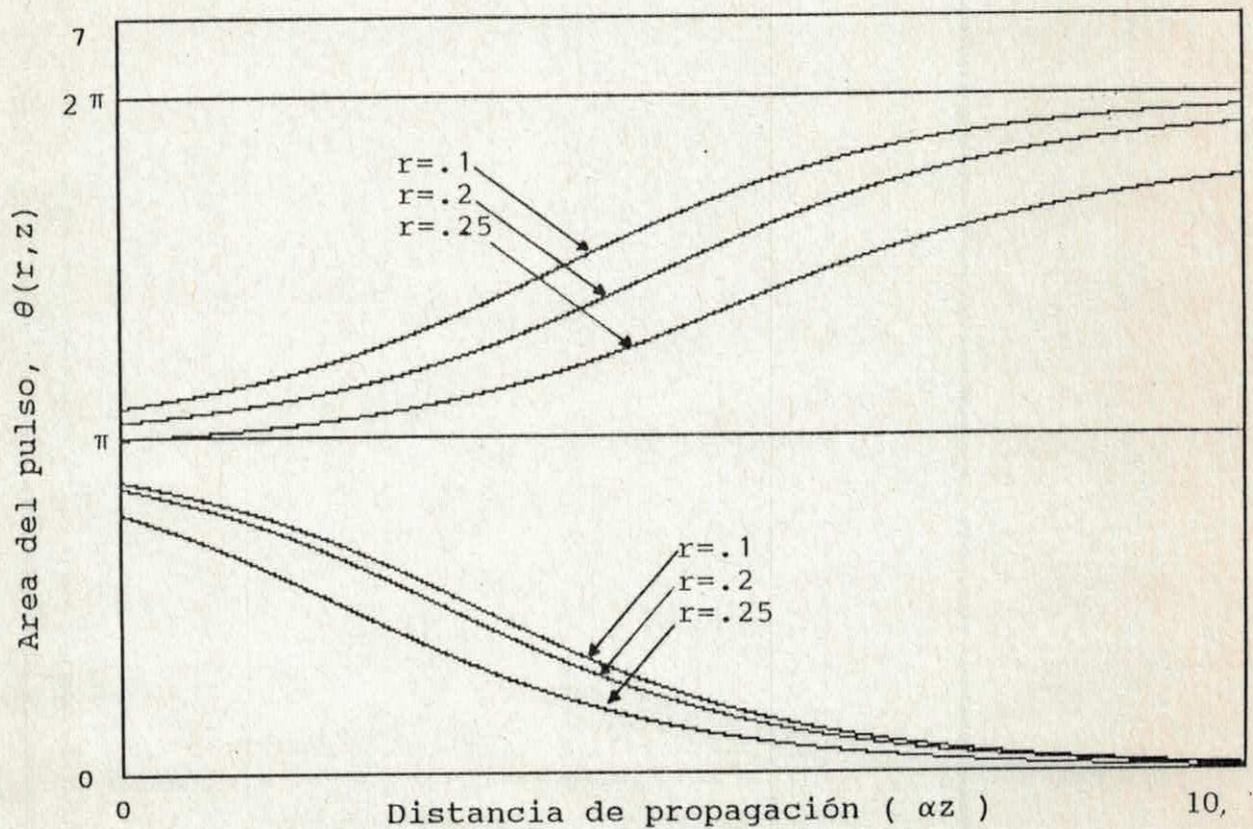


Figura 4.8.- Igual que en la Fig.4.7 se presenta el Teorema del Area en función de  $r$  para  $D$  fijo. En esta gráfica se observa una asimetría del TA debido a una modificación más notable de los puntos de estabilidad.  $D = 0.001$ .

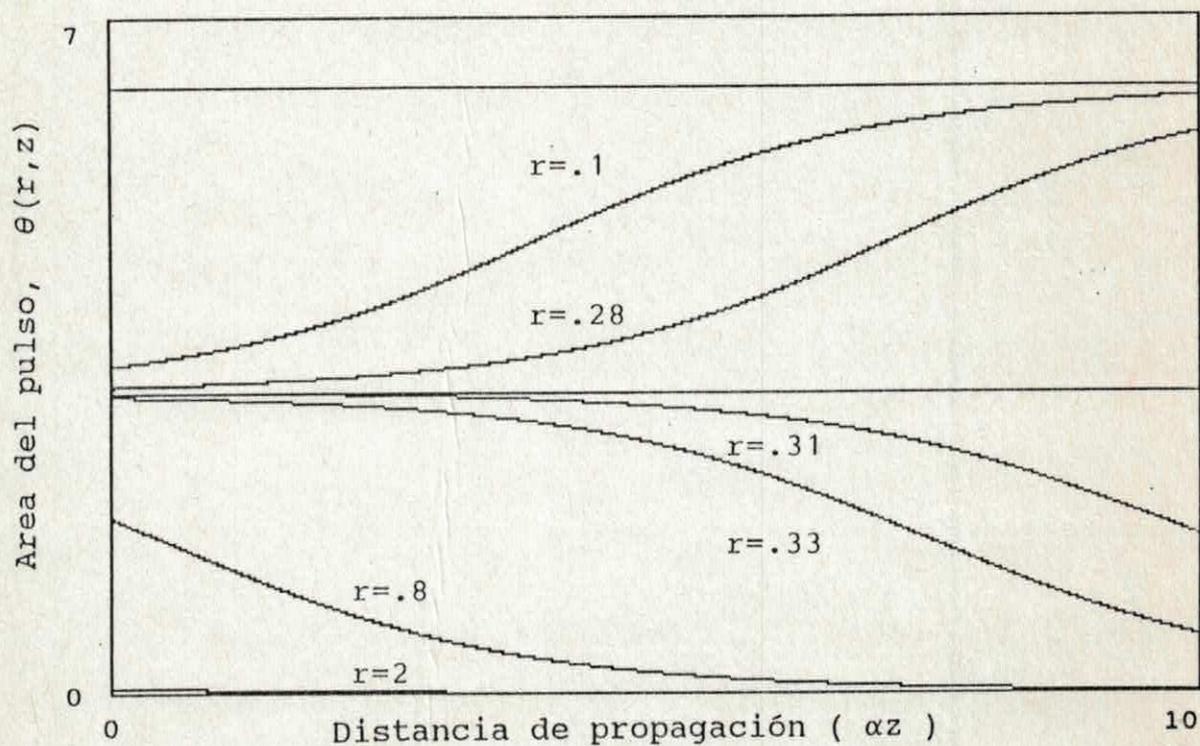


Figura 4.9.- Area del pulso en función del radio, para aquellos radios tales que, el pulso en  $r = 0$  y a la entrada del medio, se acerca al punto de transición. Obsérvese el comportamiento monótono del área del pulso alrededor del punto de transición.  $D = 0.0001$ .

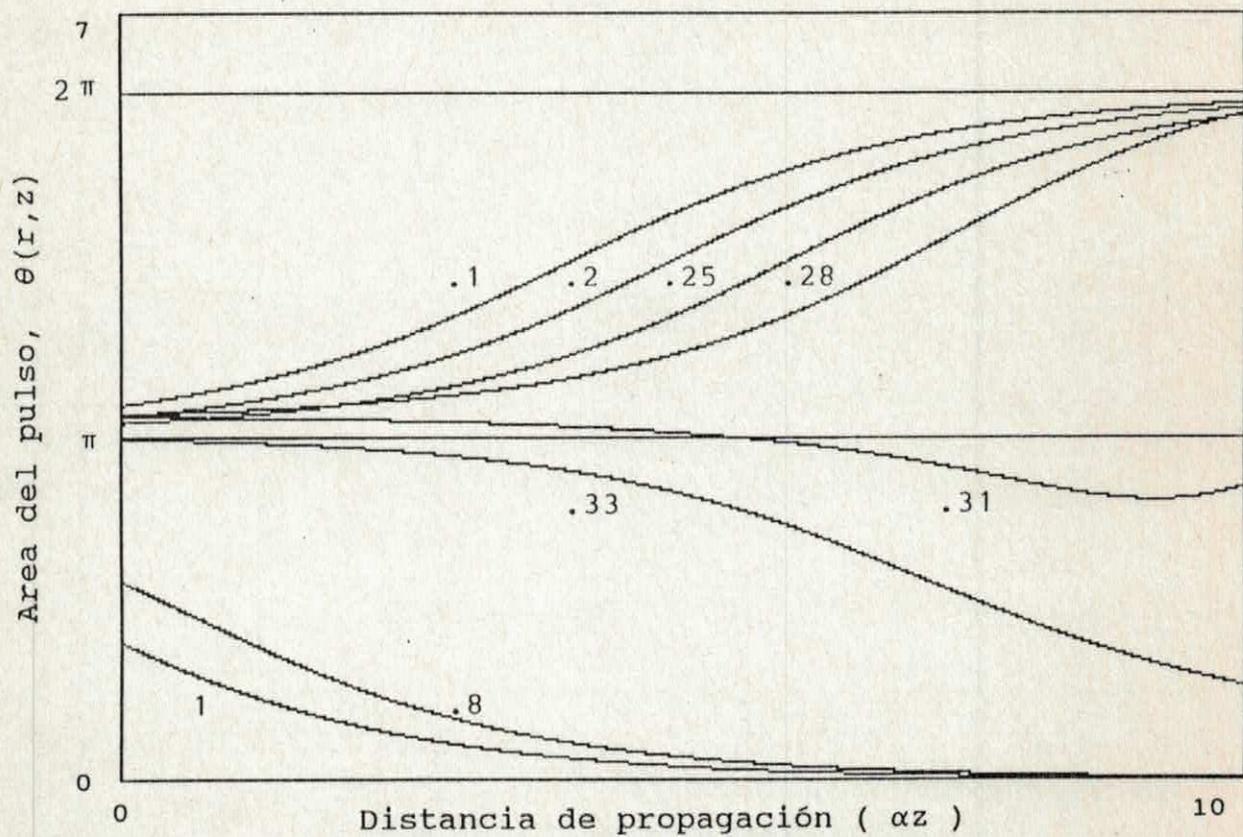


Figura 4.10.- Area del pulso en función del radio, para aquellos radios tales que el pulso en  $r = 0$  y a la entrada del medio, se acerca al punto de transición. Obsérvese las pequeñas oscilaciones del pulso.  $D = 0.001$ .

## CAPITULO IV

---

### EFECTO DE LA DIFUSION EN LA PROPAGACION RESONANTE DE PULSOS

---

#### 4.1.- INTRODUCCION.

Resolver las ecuaciones de Bloch en condiciones generales y sin aproximaciones es prácticamente imposible como hemos detallado en el capítulo anterior. El método de solución de las ecuaciones de Bloch con difusión para resonancia magnética no considera la riqueza de fenómenos que hemos analizado en el capítulo anterior en la propagación de pulsos ópticos. Esto resulta de la consideración implícita de linealidad en la forma del dipolo presupuesto como solución en el caso magnético, pero que sin embargo, resultaría inadecuada en el régimen óptico donde las distancias de propagación son extremadamente largas. La base de la solución presentada por Slichter [Slichter, 1980]

está basada en la suposición de que el dipolo magnético  $\sigma_M$  en la presencia de difusión esta dada por

$$\sigma_M = A(t) e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

donde  $A(t)$  es la solución perturbativa de las ecuaciones de Bloch con difusión. De nuestra discusión anterior podemos reconocer claramente dos aproximaciones:

- a).- Se esta suponiendo que el dipolo se encuentra en el dominio lineal, i. e.  $\sim e^{i\omega t}$ , sin ninguna dependencia de la amplitud del pulso.
- b).- La descripción de la propagación del pulso corresponde al orden más básico de las ecuaciones de onda, i.e. una onda plana, implicando una jerarquización en la solución de las ecuaciones acopladas Maxwell-Bloch.

La primera suposición no considera la estrecha e inseparable simbiosis entre la duración del pulso y su intensidad, característica de los problemas no lineales resonantes, y que se encuentra plasmada en el teorema del área. La segunda suposición constituye una metodología práctica que no esta restringida por la primera y que es adecuada para aquellos procesos en los que la difusión es un proceso

perturbativo. Sin embargo, y como es frecuente en procesos de evolución dinámica, su efecto en la evolución a tiempos largos, o distancias, es significativo.

Suponer que es posible resolver en forma integral y al mismo nivel las ecuaciones de Maxwell y Bloch esta mas allá de cualquier expectativa real actual, y por otra parte de dudable importancia. En este capítulo se supone un método para resolver las ecuaciones de Bloch con difusión, en su régimen no lineal, acopladas a las ecuaciones de Maxwell para describir la propagación del pulso. Esquemáticamente esto corresponde a proponer que la solución tenga la forma,

$$\sigma = P(t) e^{i\omega t}, \quad (4.2)$$

donde  $P(t)$  es la solución al sistema de ecuaciones Maxwell Bloch acoplado. Suponer que la aproximación para  $P(t)$ , sin ninguna condición adicional, tiene la forma,

$$P(t) \sim A(t) p(t) \quad (4.3)$$

donde  $p(t)$  es la solución de las ecuaciones de Bloch, sin embargo abandonarí el acoplamiento y los efectos no lineales sobre el perfil transversal del pulso. De aquí que propongamos resolver en forma perturbativa pero integral este sistema y

hacerlo por otra técnica que la que aquí proponemos implica varias y complejas metodologías cuya exploración por sí mismas están más allá de los objetivos de esta tesis.

#### 4.2.- DESCRIPCION DEL METODO

En este trabajo se propone un método para resolver las ecuaciones de Bloch-Maxwell con difusión mediante una técnica perturbativa que mantiene estrechamente relacionada la duración e intensidad del pulso, al sustentarse en el teorema del área y sus modificaciones por difusión para integrar en este nuevo proceso los efectos transversales. Como resultado, se obtiene en forma inmediata información de interés práctico sobre la distribución transversal del TA y la modulación de la energía y la polarización. Las características de transportabilidad de este método a otros muchos problemas donde átomos dopantes con difusión tienen especial importancia requieren de un mejor análisis, sin embargo la sencillez de usar técnicas perturbativas sobre el teorema del área le da una gran potencialidad a este método como ya ha sido remarcado [N. Bloembergen, 1991] En la fig.4.1 se muestra esquemáticamente el método.

#### 4.3.- EFECTOS TRANSVERSALES EN EL TEOREMA DEL AREA.

Las ecuaciones de Bloch permiten explicar una gran variedad de fenómenos cuánticos sumamente interesantes, tales como nutación óptica, eco de fotones, transparencia auto-inducida y conjugación de fase entre otros. En todos estos efectos se ha supuesto que el campo eléctrico esta formado de ondas planas. En condiciones más reales, se trabaja en la región paraxial del haz, como una aproximación a ondas planas, sin embargo, cuando el haz se deja pasar completo surgen varios fenómenos que dependen de la naturaleza transversal del campo, como autoenfocamiento, desenfocamiento y autoatrapamiento en medios resonantes [McCall y Hahn, 1969, Grischkowsky, 1970].

McCall y Hahn fueron los primeros en estudiar los efectos del perfil radial en la propagación de pulsos resonantes manifestada a través del TA, también explicaron los efectos de auto-atrapamiento y auto-enfocamiento en medios resonantes como resultado de tal dependencia [McCall y Hahn, 1969]. McCall y Hahn encontraron que el TA se modifica dependiendo de la forma del pulso, en particular, para perfiles Gaussianos el TA se escribe como

$$\frac{d\theta}{dz} = \alpha \frac{1 - \cos\theta}{\theta} - \frac{1}{2} \sigma\theta, \quad (4.4)$$

donde  $\sigma$  es un factor de pérdidas y  $\alpha$  es el coeficiente de absorción. Si bien, la difusión no es un fenómeno de pérdidas, en un punto fijo del pulso, puede verse como tal, por lo que la Ec.(4.4) predice un decaimiento exponencial en el área del pulso en presencia de difusión, si bien hasta el momento no existe ninguna evidencia experimental de tal afirmación. Esta expresión se dedujo promediando el valor del dipolo en todo el perfil, por lo que la expresión resultante no depende explícitamente de  $r$ . En el caso de áreas pequeñas, el pulso es absorbido a una razón que depende del tipo de pérdidas del medio. Para áreas más grandes, el punto de estabilidad cambia, dependiendo de la razón de pérdidas  $\sigma/\alpha$ , siendo menor cuando  $\sigma/\alpha$  crece, y originando que un pulso  $.9\pi$  se absorba más rápidamente, en consecuencia, se genera una asimetría en el TA.

Nuestro interés se centra en los efectos transversales de la propagación resonante de pulsos, pero como resultado de la difusión, fenómeno inherentemente radial. El modelo que seguimos para describir la difusión es el propuesto por Wherrett [Wherrett, 1983]. Dicho modelo propone difusión en la inversión de población, es decir, variaciones espaciales en la inversión de población, y no en el dipolo como lo propuso Torrey [Torrey, 1954], ya que en el caso óptico es más importante la inversión de población que el dipolo magnético, contrastando en este punto con el modelo de difusión propuesto

por Torrey.

#### 4.4.- SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE BLOCH CON DIFUSION.

Antes de empezar a resolver las ecuaciones de Bloch empezaremos definiendo nuestro sistema de coordenadas. La selección de coordenadas cilíndricas es natural, ya que la mayoría de los lasers trabajan en el modo  $TE_{00}$ , cuya distribución de intensidad radial presenta simetría azimutal. En particular, nuestros resultados numéricos se presentaran para perfiles transversales Gaussianos.

Supondremos que la dependencia radial del campo estará dada por una función  $R(r)$  que no presenta cambios bruscos y que el campo esta dado por,

$$\mathcal{E}_r(r, z, t) = R(r)\mathcal{E}(z, t) \quad (4.5)$$

donde  $\mathcal{E}(z, t)$  es la envolvente del campo dada por la Ec.(3.24).

De acuerdo a la definición del área del pulso, Ec.(3.9), y la forma del campo, se encuentra que el área  $\Theta(r, z)$ , sólo estará escalada por el perfil transversal del campo

$$\Theta(r, z) = R(r)\theta(z), \quad (4.6)$$

donde  $\theta$  esta dado por la Ec.(3.11). Esto significa que el TA es válido en cada punto del perfil radial (Vease la Fig. 4.2), lo que nos permite usar la Ec.(4.6) como argumento en las ecuaciones de Bloch sin difusión. Nótese que en el centro del perfil, se recuperan las Ec.(3.7)-(3.8). Por otro lado, definiendo  $q = w + iv$  y sumando las Ec.(3.7)-(3.8) se encuentra,

$$\frac{dq}{dt} = ( -i\Omega + \frac{D}{q} \nabla^2 w )q \quad (4.7)$$

donde  $q = q(r,z,t)$  y  $\Omega$  es la frecuencia de Rabi, cuya dependencia radial se da través del campo. Esta ecuación constituye el punto clave de este trabajo, ya que contiene la información sobre la variación espacial y temporal de la inversión de población, la cual se resolverá siguiendo el método planteado en la sección 4.2. La solución a la ecuación Ec.(4.7) sólo puede hallarse numéricamente, sin embargo, mediante técnicas perturbativas es posible encontrar soluciones analíticas en base a soluciones analíticas sin difusión, siendo esto la base del método que presentamos.

Para resolver la Ec.(4.7), nos colocaremos en el frente de un pulso viajero, donde existe una equivalencia espacio-temporal, es decir, la distancia de propagación es

equivalente al tiempo de propagación,  $z = vt$ , donde  $v$  es la velocidad del frente del pulso en el medio en esa posición radial. Así, integrando la Ec.(4.7) desde el tiempo  $\underline{t}$ , al cual asignaremos arbitrariamente como nuestro origen, hasta un tiempo  $t$ , resulta en una representación formal del dipolo de la forma

$$q(r,t) = q(0)A(r,t)\exp(-i(\theta(t) - \delta\theta(r,t))) \quad (4.8)$$

donde  $q(0)$  es el valor de  $q$  en  $t = 0$ ,  $\theta$  es el área dada por la Ec.(3.11), y

$$A(t) = \exp\left(D \int_0^t \frac{w\nabla^2 w}{|q|^2} dt'\right) \quad (4.9)$$

$$\delta\theta(t) = D \int_0^t \frac{v\nabla^2 w}{|q|^2} dt'. \quad (4.10)$$

Si expandemos la Ec.(4.5) y separamos en parte real y parte imaginaria, obtenemos un par de ecuaciones similares a las Ecs.(3-7) y (3.8), esto es,

$$w = q(0)A(t)\cos(\theta - \delta\theta(t)) \quad (4.11)$$

$$v = q(0)A(t)\text{sen}(\theta - \delta\theta(t)), \quad (4.12)$$

inmediatamente, podemos darnos cuenta que el efecto de la difusión se presenta como un efecto modulador en las Ec.(3.7) y (3.8) y no como un simple producto de soluciones no perturbadas. Estos resultados apuntan al resultado más importante que se obtiene por este método: una modificación al TA de McCall y Hahn con todas sus implicaciones, es decir, una alteración transversal de la dinámica atómica que gobierna la evolución del pulso mismo. Notemos que si el pulso es muy débil ( $\theta \ll \pi$ ),  $A(t)$  corresponde a la solución de la amplitud de difusión obtenida por Slichter.

Las condiciones iniciales en las Ecs.(4.11)-(4.12) permiten determinar  $q(0)$ . En la entrada del material ( $t = 0$ ), se cumple que  $A(t) = 1$  y  $\delta\theta = 0$ , entonces comparando las Ec.(4.11) y (4.12) con las Ec.(3.7) y (3.8), se concluye que  $q(0) = -1$ .

Por otro lado, la solución de las Ec.(4.9) y (4.10), no son muy complicadas de obtener, pero si muy tediosas debido a los largos cálculos algebraicos - para más detalles vease el apéndice A - involucrados. Por conveniencia, en esta sección únicamente presentaremos las soluciones de las Ecs.(4.9) y (4.10). Por comodidad, empecemos con la solución de la Ec.(4.9), que nos proporciona la variación de la amplitud del

dipolo debida a la difusión;

$$\begin{aligned}
 A(r, z) = \exp \left( -D \left\{ g_1 \arctan(y) + g_2 \frac{y}{1+y^2} + g_3 \frac{y}{(1+y^2)^2} + \right. \right. \\
 - g_4 \frac{y}{(1+y^2)^3} + g_5 \frac{1}{1+y^2} - g_6 \frac{1}{(1+y^2)^2} \\
 \left. \left. + g_7 \frac{1}{(1+y^2)^3} \right\}_0^z \right) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

donde  $y = \tan( R(r) \frac{1}{2} \theta_0 ) e^{-\alpha z'/2}$ . Las funciones  $g_i$  únicamente dependen del radio y del área pulso inicial, las cuales están dadas por las Ecs. (A.28) - (A.35).

La forma de la Ec.(4.13) es bastante compleja, sin embargo, para varias distancias de absorción, únicamente sobrevive el primer término de la Ec.(4.13), es decir, el argumento de la Ec.(4.13) queda determinada por una función muy similar al teorema del área en el estado estacionario, en consecuencia A depende de las condiciones de un punto de estable, dependiente del radio y del coeficiente de difusión, y que discutiremos a continuación. Cuando hagamos referencia a los valores del coeficiente de difusión, diremos que un medio de baja difusión serán aquellos donde los átomos presentan poca movilidad (el caso límite  $D \rightarrow 0$ , corresponde a sólidos a bajas temperaturas), mientras que medios de alta difusión serán

aquellos donde los átomos presentan alta movilidad (equivalentemente, el caso  $D \rightarrow \infty$ , corresponde a gases a baja presión).

En la Fig.4.3 se muestra el comportamiento de la Ec.(4.13) para varios valores del radio con pulsos de área inicial  $.9\pi$  y  $1.1\pi$  en el centro del perfil (en este caso de un perfil Gaussiano) para medios de baja difusión ( $D = 0.0001$ ). Nótese que en ambos casos  $A(r,z)$  alcanza un valor estacionario alrededor de  $\alpha z = 1$ , siendo menor esta distancia, cuanto mayor se este alejado del centro del perfil. Nótese además, que las variaciones en  $A(r,z)$  son muy pequeñas, una buena aproximación en este caso, es tomar  $A(r,z)$  constante, reduciendo el efecto de la difusión a una modificación del TA. Sin embargo, para sistemas más difusores, el efecto modulador de la Ec.(4.13) se hace más patente como puede verse en la Fig.4.4, que sin embargo, exhibe un comportamiento idéntico al de la Fig.4.3, como puede verse de la Ec.(4.13), únicamente escalado en  $D$ . Esto significa que los átomos excitados se redistribuyen más rápidamente, en consecuencia la inversión de población y dipolos encontrados por el pulso serán menores que  $w_0$  conforme el pulso se propaga. En el caso límite, cuando  $D \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow 0$ , y por lo tanto el pulso, es absorbido. Obsérvese que en el centro del perfil, el pulso sufre una brusca modulación cerca de la cara de entrada, mientras que para radios mayores que cero, el

efecto modulador de la difusión disminuye, estabilizándose para distancias de propagación menores que 1, con un valor mínimo para  $A(r,z)$  en  $r = .3$ . En el límite, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow 1$ , es decir, no existe modulación en  $A(r,z)$  para puntos muy alejados del centro del perfil del pulso, como es de esperarse para pulsos débiles. Nótese que existe una diferencia entre las curvas de la Fig.4.3, pues mientras que la Fig.4.3a, tiene un mínimo y un máximo absoluto, la Fig.4.3b, tiene un mínimo y un máximo local, además de un mínimo absoluto. Puesto que  $A$  esta asociada con la amplitud del pulso, pulsos con  $\theta = .9\pi$ , presentarán un hueco alrededor del centro perfil, mientras que pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , presentarán un pico alrededor de la misma región, que para medios con coeficiente de difusión pequeño no serán apreciables. Sin embargo, como se muestra en la Fig.4.4, el pulso se dispersa y puede llegar a romperse después de unas pocas distancias de propagación ( $\alpha z \approx 1 - 2$ ).

En el caso de la Ec.(4.10), su solución corresponde a las modificaciones del área del pulso y esta dada por, (vease Apéndice A)

$$\delta\theta = D \left\{ -p_4 \arctan(y) + p_1 \frac{y}{1+y^2} \right. \\ \left. + p_2 \frac{y}{(1+y^2)^2} - p_3 \frac{y}{(1+y^2)^3} + p_5 \frac{1}{1+y^2} + p_6 \frac{1}{(1+y^2)^2} \right.$$

$$+ p_7 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \Bigg\}_0^z \quad (4.14)$$

donde  $y$  esta dada igual que en (4.13) y las funciones  $p_i$  son similares a las funciones  $g_i$ , las cuales estan dadas por las Ecs.(A.19)- (A.25). Usando el argumento de la Ec.(3.8) o (3.9), se encuentra que el teorema del área modificado por difusión está dado por,

$$\begin{aligned} \Theta = & 2\left(1 - \frac{D}{2} p_4\right) \arctan(y) + D p_4 \mathcal{R} \frac{1}{2} \theta + D \left\{ \frac{p_1}{8} \frac{y}{1 + y^2} \right. \\ & + p_2 \frac{y}{(1 + y^2)^2} - p_3 \frac{y}{(1 + y^2)^3} + p_5 \frac{1}{1 + y^2} + p_6 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \\ & \left. + p_7 \frac{1}{(1 + y^2)^2} \right\}_0^z \quad (4.15) \end{aligned}$$

Nótese que, esta expresión es bastante compleja también, sin embargo, su comportamiento es muy similar al caso anterior. Por ejemplo, para varias distancias de absorción, únicamente sobreviven los dos primeros términos de la derecha de la Ec.(4.15) y la Ec.(4.15), en este caso toma una forma muy parecida al TA sin difusión en el estado estacionario.

A diferencia de la amplitud dipolar  $A$ , el área de un pulso

es posiblemente el parámetro más importante de la dinámica de la propagación no lineal coherente, por lo que le daremos un cuidadoso análisis. Los conceptos más importantes de estabilidad y sus trayectorias que surgen del teorema del área son tres, todos ellos estrechamente relacionados. De acuerdo con esto, existen áreas estables que corresponden a pulsos de área nula o absorción, o bien pulsos de área estable que bien pueden conducirnos a la existencia de pulsos estables; áreas de inestabilidad donde se definen las trayectorias de estabilidad y finalmente las trayectorias que unen áreas inestables y estables en forma simétrica y que corresponden a la propagación misma. Esperamos que esto tenga una dependencia transversal como función del coeficiente de difusión, por lo que en un pulso de área grande podemos, a través de su perfil, recorrer todos los posible casos del teorema del área sin difusión, que en el caso lineal correspondería a valores 0 y  $2\pi$ .

Primero analizaremos los puntos de estabilidad y sus trayectorias en forma gráfica, ya que como nos demuestra la experiencia práctica, es la forma más útil de visualizar el TA. Los resultados se mostrarán en el siguiente orden: se presentará el TA con difusión para radios pequeños y áreas grandes con el fin de comparar los resultados con el TA sin difusión de McCall y Hahn, y posteriormente para radios más grandes, donde eventualmente se alcanza un punto de transición,

si el área inicial del pulso es mayor que  $\pi$ .

En la Fig.4.5 se muestra el TA (en  $r = 0$ ) como función de la difusión y se compara con el TA original sin difusión. Observese la similitud entre ambas curvas. En particular, en la Fig.4.5 se muestra que el TA con difusión coincide con el TA original para un amplio intervalo de  $D$ . En particular para  $D = 0.1$  ambas curvas (con y sin difusión) difieren muy poco. Nótese que en el centro del perfil, el TA con difusión grande, tiene la misma forma que el TA original, modificándose ligeramente el punto de estabilidad, pero conservando su simetría, reproduciendo el TA sin difusión en el centro del perfil. Sin embargo, fuera del centro del perfil, para un  $r$  fijo ( $r = .2$ ), se observa una clara modificación de los puntos de estabilidad y una pérdida de la simetría del TA, como se muestra en la Fig.4.6. Obsérvese que el punto de estabilidad es menor que  $2\pi$ , conforme  $D$  crece, pero el TA conserva su forma, pero no su simetría, en concordancia con los resultados de McCall y Hahn. Sin embargo, para pulsos con área inicial menor que  $\pi$ , el efecto de la difusión no es apreciable, ya que el pulso se absorbe prácticamente a la misma razón con difusión que sin difusión, como puede observarse en la parte inferior de la Fig.4.6.

En la Fig.4.7, se muestra gráficamente la Ec.(4.15), para

áreas grandes en sistemas de baja difusión ( $D = 0.0001$ ) y radios pequeños, en la que ya se muestra una sensitiva, aunque aún no drástica variación con respecto al TA sin difusión. En la misma figura se muestran varias curvas del área alrededor de  $\pi$ , para valores pequeños de  $r$ , pero no significativamente cercanas al punto de inestabilidad. La simetría del teorema del área sin difusión se pierde en este caso, sin embargo no es muy diferente del TA original, contrariamente a lo que pasa en la Fig.4.8, donde se ha aumentado el coeficiente de difusión y donde la modificación del punto de estabilidad es más notoria, ya que este, se modifica también en función de  $r$ . Se observa que conforme  $r$  aumenta, un pulso con área  $.9\pi$  (en  $r = 0$ ) se absorbe más rápidamente, mientras que un pulso de área  $1.1\pi$  (en  $r = 0$ ) necesita una mayor distancia de propagación para amplificarse y alcanzar su punto de estabilidad. Debemos notar aquí, que existe una dependencia radial en el área de estabilidad, siendo menor conforme aumenta  $r$ . Esto indica claramente que durante la propagación, el área del pulso adquiere un perfil estable, no constante, como función de  $r$ .

Por otro lado, pulsos con área menor que  $\pi$ , se absorben prácticamente a la misma razón con difusión que sin ella, como se muestra en las Fig.4.7 y 4.8.. Esta es una importante diferencia que junto con la Fig. 4.6, enfatiza las cuidadosas diferencias que se deben hacer en los tratamientos

perturbativos para pulsos de áreas grandes y pequeñas en otros problemas donde se espera difusión durante la propagación. Claramente esto apunta a un reanálisis del tratamiento promediado de McCall y Hahn [1969].

El comportamiento del área dada por la Ec.(4.13) en función del radio, sugiere un desplazamiento de la parte inferior al punto de inestabilidad hacia la izquierda y la parte superior a la derecha. Mostrando gran sensibilidad a cambios en  $r$ , en el caso de pulsos de área mayor que  $\pi$ , aún para medios con baja difusión, mientras que en el caso de pulsos menores que  $\pi$  (en  $r = 0$ ), conservan su forma para todo  $r$ , únicamente se desplazan a la entrada del medio, de acuerdo al perfil radial, como puede verse en la parte inferior de la Fig.4.7- 4.8. Comparando nuestros resultados con los obtenidos por McCall y Hahn (Ec.(4.3)), observamos una gran similitud. A diferencia de McCall y Hahn obtenemos un TA en función del radio y obtenemos una modificación del punto de estabilidad, en función tanto de  $D$  como de  $r$ . Esta última dependencia, es equivalente en nuestro caso a tener un coeficiente de absorción dependiente del radio. En cierta manera, esto es equivalente a modificar la razón de pérdidas  $\sigma/\alpha$  de McCall y Hahn.

La Fig.4.9 - 4.10, presentamos un caso análogo al de la Fig. 4.7, para radios mayores, tales que permitan analizar el

punto de transición  $\pi$ , radialmente alcanzado. Para pulsos de área menor a  $\pi$ , observamos el esperado comportamiento de absorción con escasa influencia de la difusión en ambas figuras. Sin embargo, observamos que cuando un pulso  $1.1\pi$  (en  $r = 0$ ) tiende hacia  $\pi$  radialmente, se espera que nos aproximemos a un punto de transición o de inestabilidad, en los que habrá de especificar su comportamiento. En la Fig.4.9 ( $D = 0.0001$ ), se observa un transición monótona, para  $r$  en  $[.28, .31]$ . Observese que para  $r = .28$ , la ganancia en la energía del pulso es pequeña hasta  $\alpha z \approx 5$ , después adquiere una ganancia lineal y finalmente cerca de  $\alpha z = 10$  el pulso alcanza su punto de estabilidad; esta misma situación se presenta en la Fig.4.10. Sin embargo, en este figura, se observa que para  $r = .31$  el área pulso cruza el punto de inestabilidad  $\pi$  en  $\alpha z = 5.7$  y después se amplifica ligeramente. Así, en la presencia de difusión, el pulso se vuelve cuasi estable y no monótono, sin apuntar a puntos de estabilidad preestablecidos. Esta cuasiestabilidad es un resultado poco usual no considerado previamente. Al aumentar  $r$  a  $.33$ , el pulso adquiere un área ligeramente menor que  $\pi$ , y por lo tanto se absorbe, después de este punto en la forma esperada.

El TA muestra inestabilidades más pronunciadas si el coeficiente de difusión es mayor, como era de esperarse ya que tales perturbaciones se hacen más significativas. Sin embargo,

igual que antes el TA se recupera para  $r$  pequeños dentro de  $[0, .28]$ , aun para un rango grandes de valores del coeficiente de difusión, como se mostró en la Fig.4.6.

En resumen, el pulso se comporta como el TA original sólo en el caso de radios pequeños,  $r \in [0, .25]$  y un amplio rango de valores del coeficiente de difusión. Sin embargo, para  $r$  fuera de este intervalo, en medios con coeficiente de difusión menores que 0.0001, pulsos con  $\theta = 1.1\pi$  (en  $r, z = 0$ ), cruzan el punto de inestabilidad monótonamente, mientras que pulsos con la misma área inicial, en medios más difusivos ( $D > 0.0001$ ), después de ciertos valores de  $r$  (alrededor de  $r \approx .31$ ), el pulso se vuelve inestable y empieza a oscilar ligeramente alrededor del punto de transición. Para  $r > .31$ , el pulso se comporta y absorbe como lo predice el TA sin difusión. Esto significa que la parte central se propaga normalmente y que el resto del pulso se absorbe, con la aparición de "alas" alrededor del punto central, originando que el pulso se cuadre, a partir de  $r > .31$ , esto es algo experimentalmente reportado [Fill, 1984] y teóricamente explicado en base a un simple modelo fenomenológico, si bien en este modelo no se han considerado efectos coherentes [Aboites, 1988]. En medios altamente difusivos, tales oscilaciones se hacen significativas y las trayectorias de inestabilidad siguen direcciones no prestablecidas.

De esta manera se ha demostrado la viabilidad del método propuesto para resolver las ecuaciones de Maxwell-Bloch, introduciendo perturbaciones en el TA, lo que abre la posibilidad de aplicación del método en problemas donde átomos dopantes presentan difusión espacial.

Una aplicación del TA se obtiene de la equivalencia de  $\alpha = \alpha(r)$ , esto implica que diferentes partes del pulso sufren distintos retardos temporales, lo que causa un rompimiento temporal del pulso, lo que dificulta la compresión de pulsos en medios difusores.

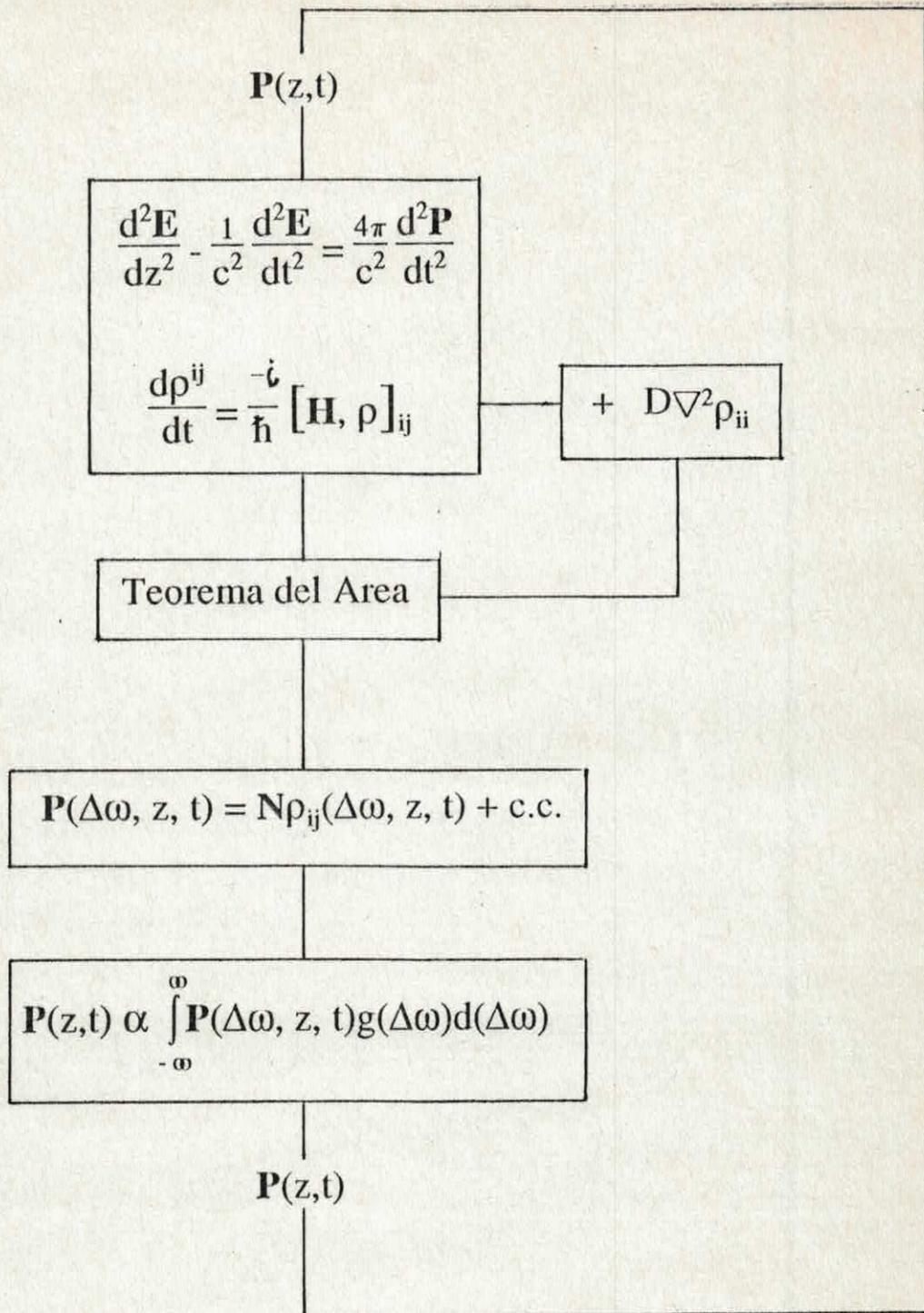


Figura 4.1.- Diagrama del método propuesto para la solución de las ecuaciones de Maxwell-Bloch con difusión. Se ha agregado el TA a las ecuaciones base y la difusión se ha agregado como un término perturbativo.

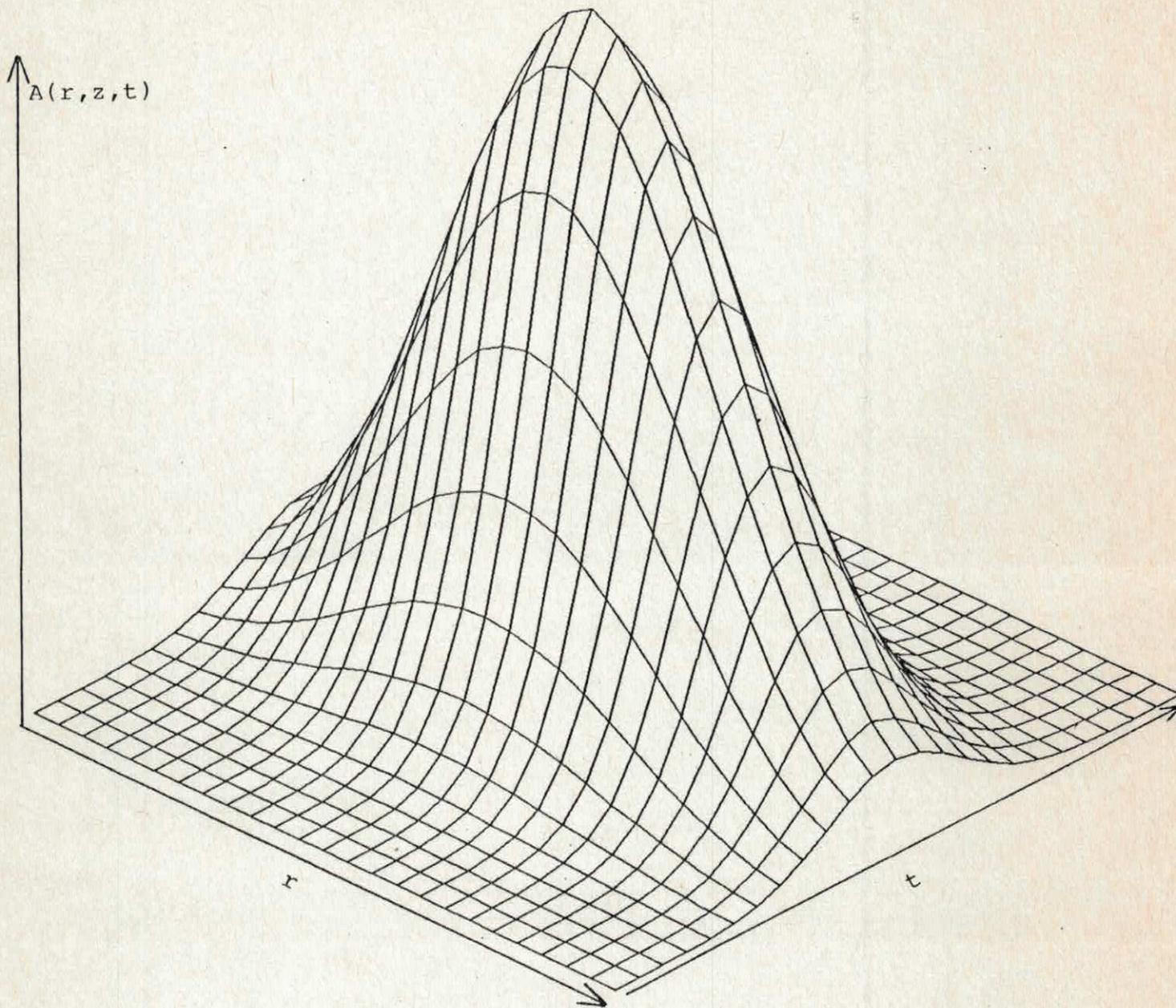
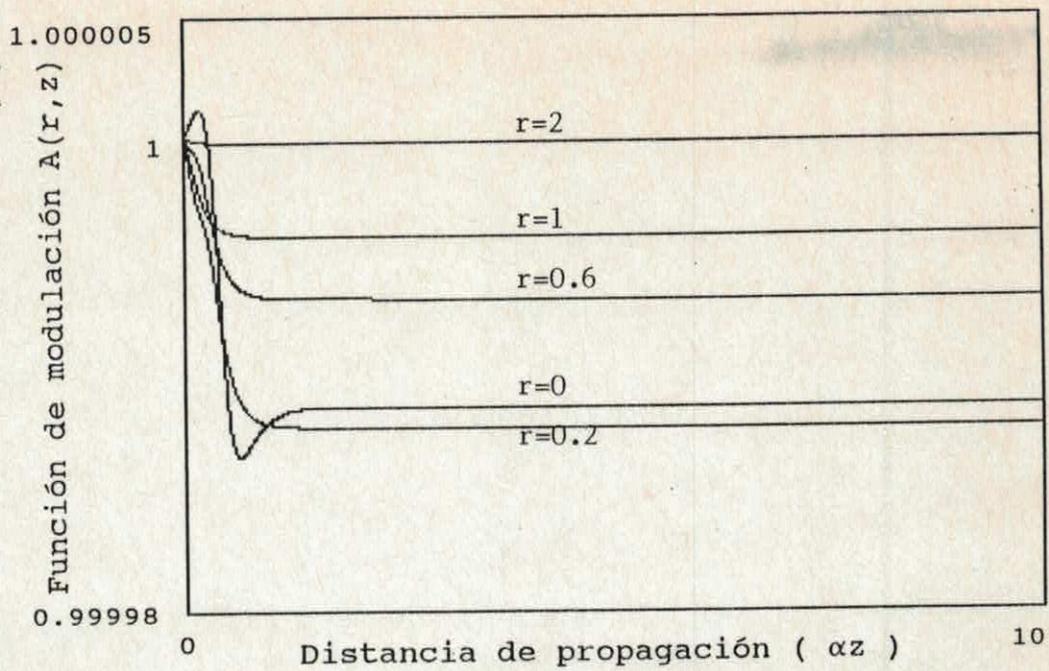
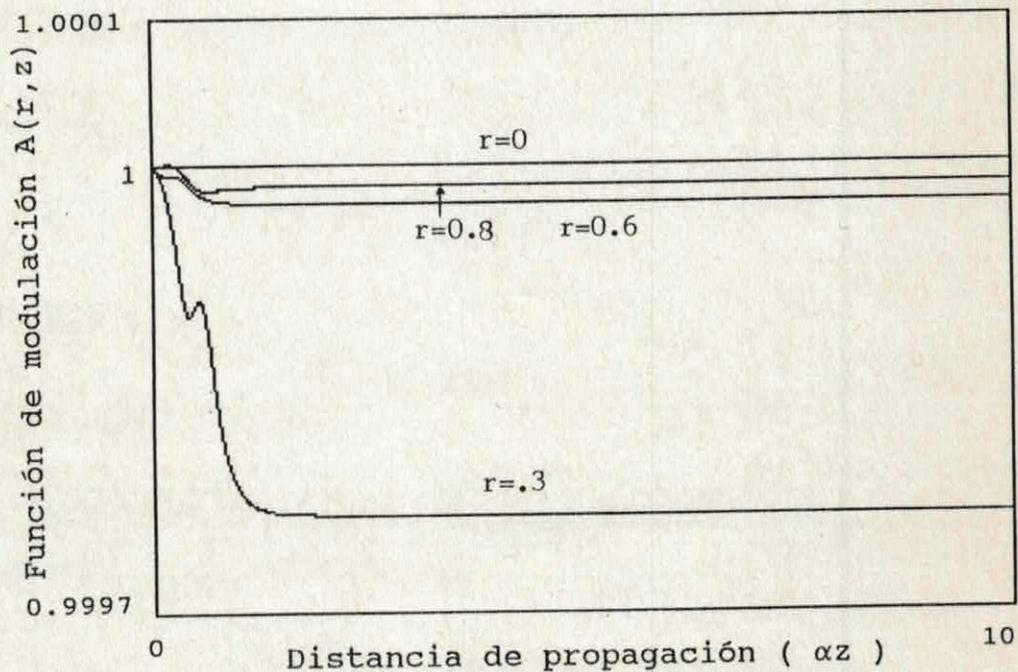


Figura 4.2.- Perfil radial y temporal del área del pulso. En cada punto del perfil radial es válido el TA, como lo demuestra la Ec.(4.6).



(a)



(b)

Figura 4.3.- En (a) se muestra la función de modulación para pulsos con  $\theta = .9\pi$  y en (b) para pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , para varios radios. El coeficiente de difusión es  $D = .0001$ .

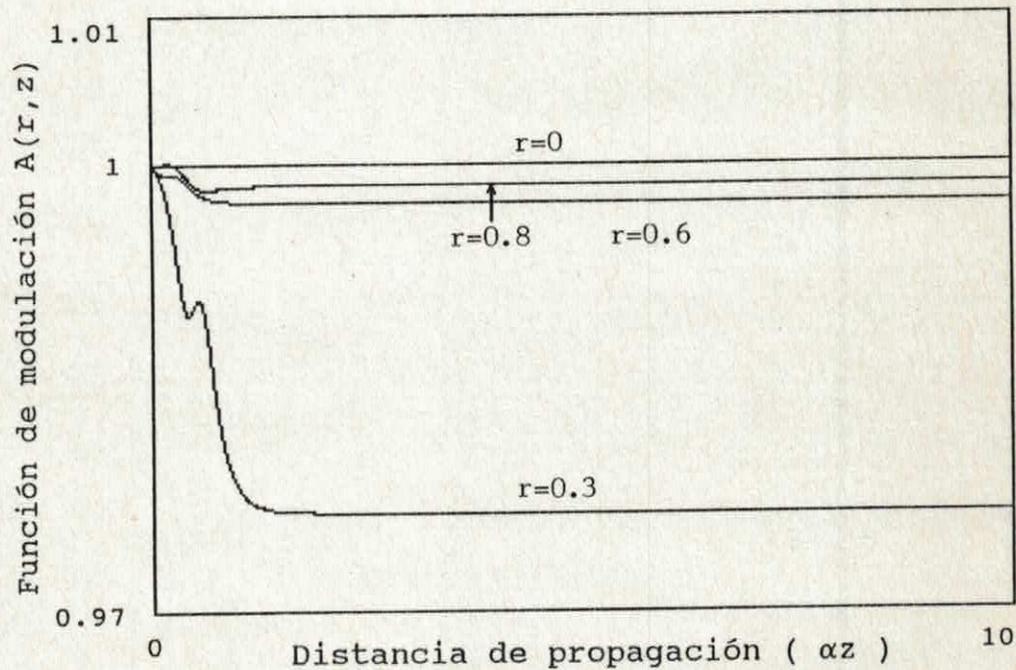
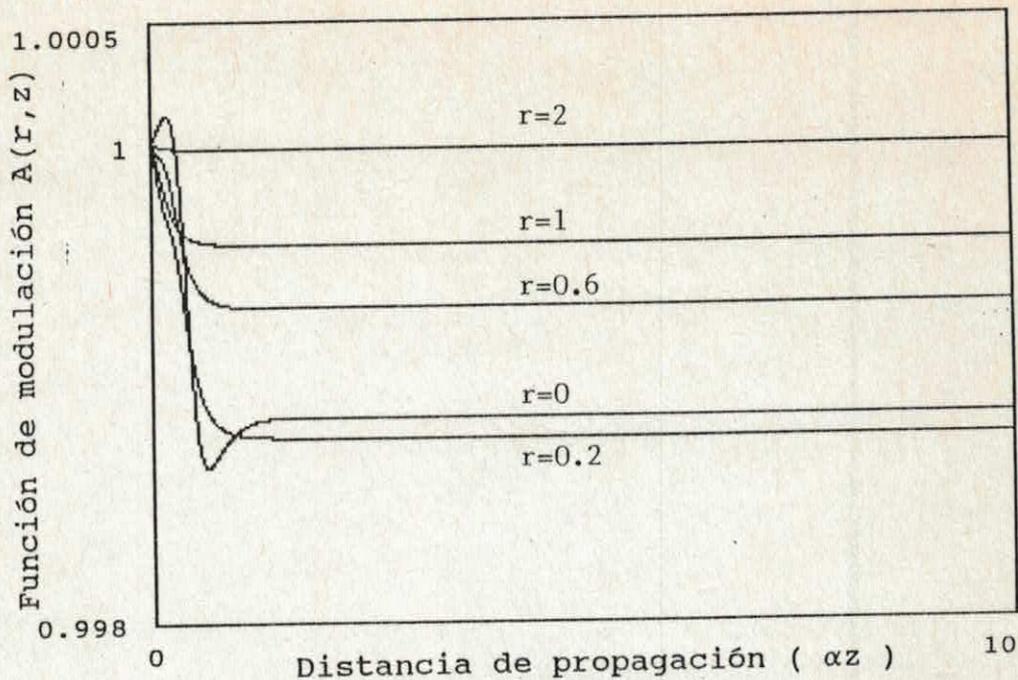


Figura 4.4.- Igual que antes, en (a) se muestra  $A(r,z)$  para pulsos con  $\theta = .9\pi$  y en (b) para pulsos con  $\theta = 1.1\pi$ , en el centro del perfil radial y a la entrada del medio. El coeficiente de difusión es  $D = .01$ . Nótese que las curvas de la Fig.4.3, son idénticas, sólo están escaladas por el coeficiente de difusión, como puede verse de la Ec.(4.13).

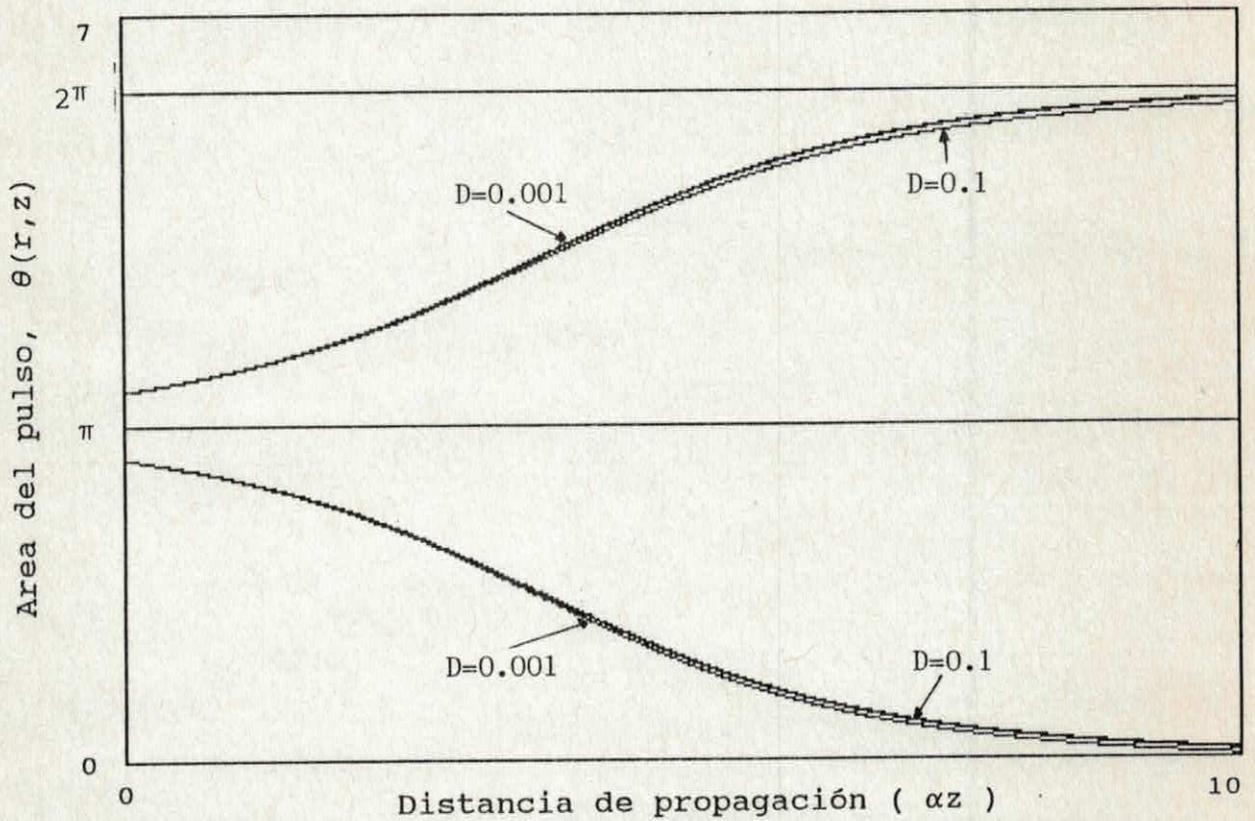


Figura 4.5.- Teorema del área sin difusión (a) y Teorema del Area con difusión (en  $r = 0$ ) en función del coeficiente de difusión. Nótese que ambas curvas coinciden, excepto  $D = 0.01$ .

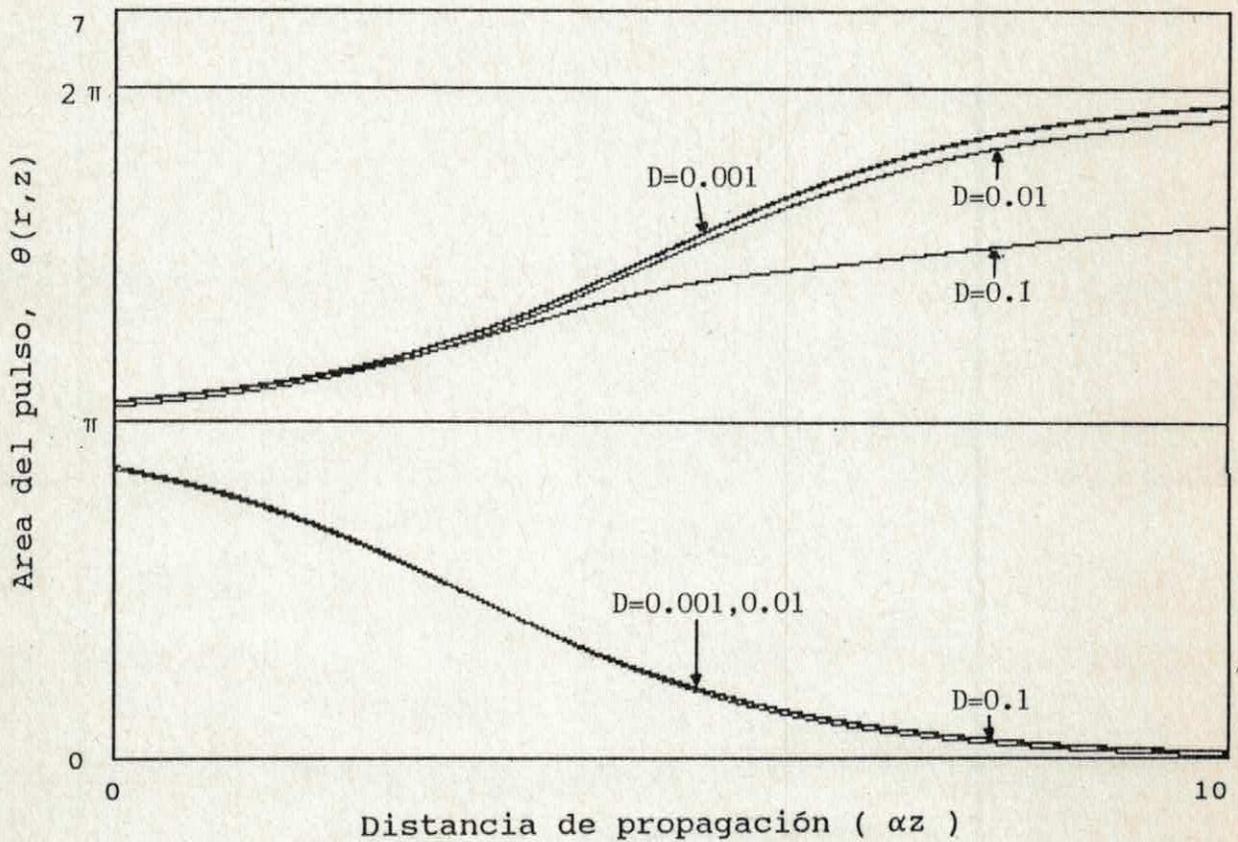


Figura 4.6.- Teorema del Area en función del coeficiente de difusión para un  $r$  ( $= .2$ ) fijo. En este caso, se pierde la simetría del TA original y se da una modificación del punto de estabilidad.

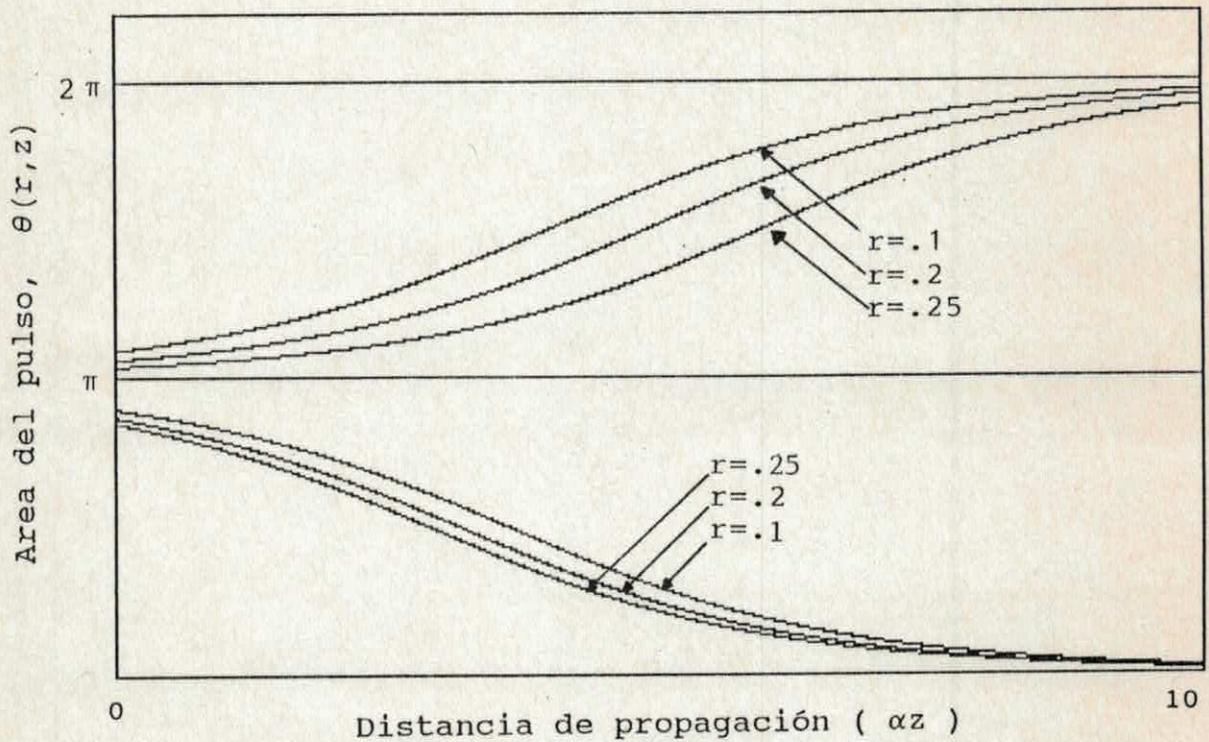


Figura 4.7.- Teorema del Area en función de  $r$  para  $D$  fijo. En esta gráfica se observa una asimetría del TA debido a una modificación de los puntos de estabilidad, debido tanto a la posición en el perfil como del coeficiente de difusión.  $D = 0.0001$ .

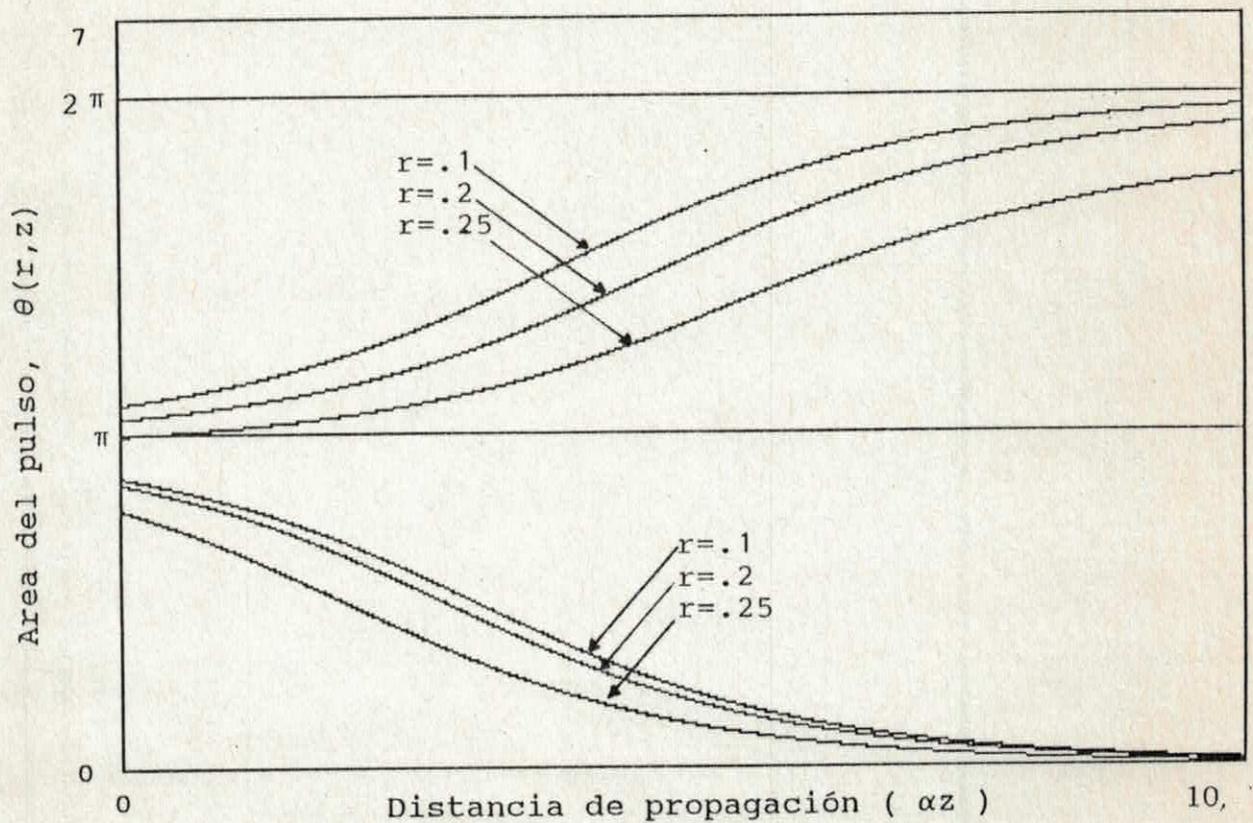


Figura 4.8.- Igual que en la Fig.4.7 se presenta el Teorema del Area en función de  $r$  para  $D$  fijo. En esta gráfica se observa una asimetría del TA debido a una modificación más notable de los puntos de estabilidad.  $D = 0.001$ .

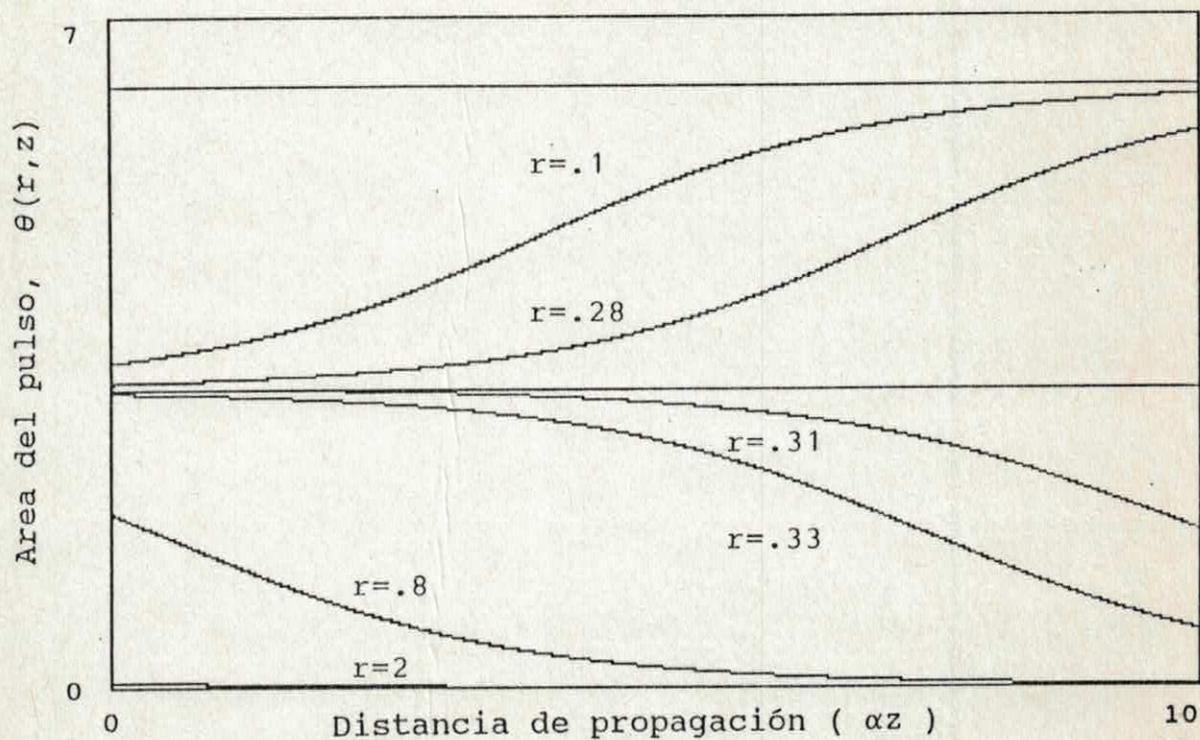


Figura 4.9.- Area del pulso en función del radio, para aquellos radios tales que, el pulso en  $r = 0$  y a la entrada del medio, se acerca al punto de transición. Obsérvese el comportamiento monótono del área del pulso alrededor del punto de transición.  $D = 0.0001$ .

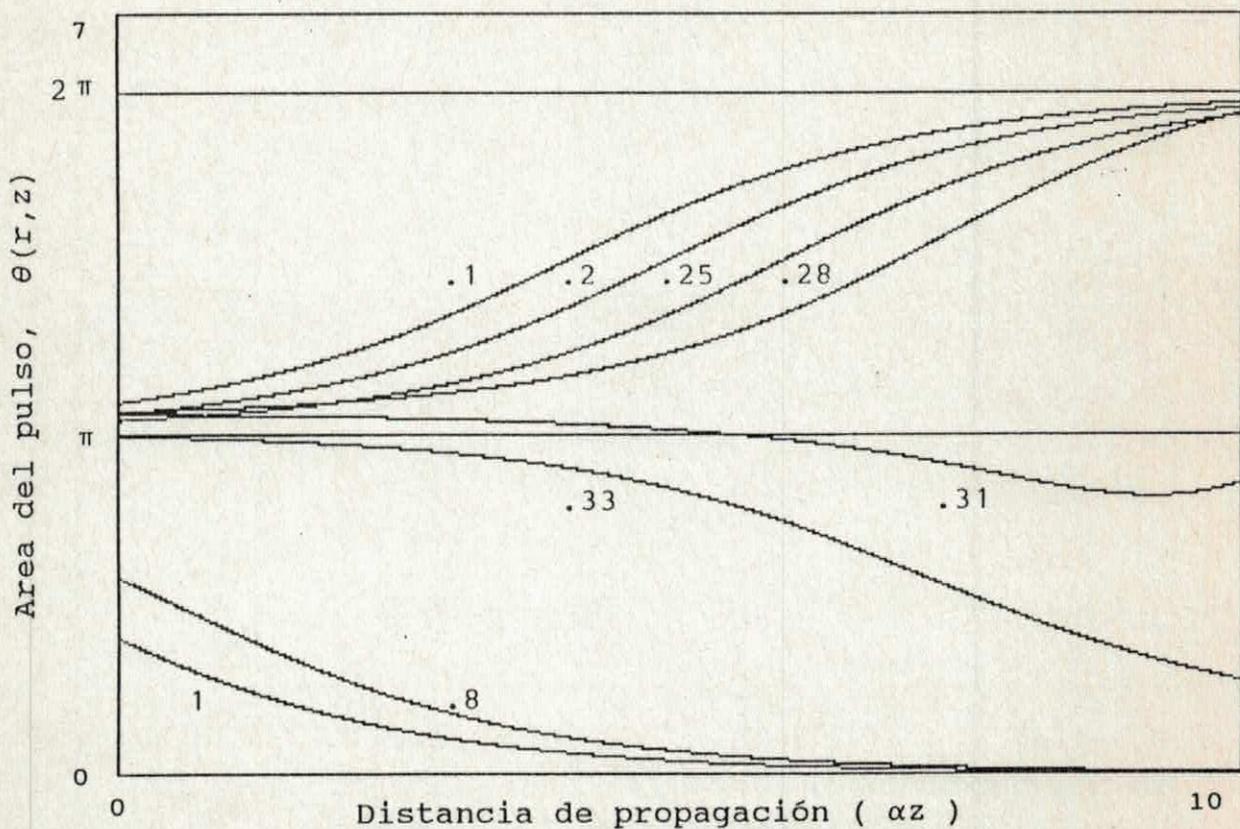


Figura 4.10.- Area del pulso en función del radio, para aquellos radios tales que el pulso en  $r = 0$  y a la entrada del medio, se acerca al punto de transición. Obsérvese las pequeñas oscilaciones del pulso.  $D = 0.001$ .