



**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**

---



**CENTRO DE INVESTIGACIONES  
EN ÓPTICA, A. C.**

**ANÁLISIS DE INTERFEROGRAMAS  
SUBMUESTREADOS**

Tesis presentada por:

**Jesús Muñoz Maciel**

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Óptica)

Asesor:

**Dra. Marija Strojnik Pogacar**

León, Gto., diciembre de 2003

## **Agradecimientos**

La presente tesis describe el trabajo de investigación para obtener el grado de doctor en ciencias (óptica). La mayor parte de la investigación se realizó en el Centro de Investigaciones en Óptica, A. C., con excepción del capítulo 5 que fue elaborado en el Optical Sciences Center de la Universidad de Arizona.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por otorgarme la beca de doctorado registro 117646. De igual forma al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato (CONCYTEG) por la beca de doctorado otorgada de Marzo a Diciembre de 2003. La culminación del presente proyecto de investigación no hubiese sido posible sin tales apoyos.

Al Centro de Investigaciones en Óptica (CIO) por el soporte económico recibido a través de la beca institucional del centro y a sus numerosos apoyos para congresos y la estancia predoctoral en la Universidad de Arizona.

A la universidad de Arizona por recibirme en las instalaciones del Optical Sciences Center y en particular al Dr. José. M. Sacian quien realizó la invitación. La estancia efectuada ha significado una valiosa aportación en mi formación.

A mi asesor la Dra. Marija Strojnik por enseñarme el camino que de ahora en adelante recorreré por mi cuenta.

Al Dr. Gonzalo Páez Dra. Y a la Dra. Cristina E. Solano quienes formaron parte de mi comité doctoral y de quienes recibí guía e inspiración en el trayecto recorrido.

A mis compañeros de generación Dr. Miguel Mora y al Ing. Francisco J. Casillas por su amistad y por los lazos que en un camino común hemos forjado.

A mis compañeros de grupo, Dr. Guillermo García, Dr. Jorge L. Flores, Dr. S. Pedro Arguijo, Dr. Jesús Castrellón, Dr. Iván Moreno, M. C. Jaime A. Sandoval, y M. C. V. Eduardo López quienes en todo momento me brindaron su amistad y consejo.

Al CIO como institución y a todo su personal por el respaldo que siempre recibí y del cual guardo gratos recuerdos. En especial a los técnicos Raymundo Mendoza Arce y a Anselmo Romero Puga quienes me contagiaron de su alegría en todo momento.

A todos mis compañeros de maestría y doctorado del CIO; su amistad y aliento han hecho amenas las incontables horas de convivencia.

Mi mas profunda gratitud a mis padres y hermanos por su infinito amor y apoyo, en especial a ti pequeño Adrián, esta tesis te pertenece por que tuyo es el futuro.

*Largo fue el camino,  
muchos los desatinos.  
Nunca he estado solo,  
familia y amigos,  
Dios me ha bendecido.*

# Análisis de interferogramas submuestreados

## Contenido

<b>1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Antecedentes	1
1.2	Objetivos	6
1.3	Resumen de los siguientes capítulos	7
1.4	Referencias del capítulo 1	9
<b>2.</b>	<b>Detección de interferogramas de alta densidad de franjas</b>	<b>11</b>
2.1	Introducción	11
2.2	Detección de patrones de franjas por arreglos de pixeles	13
2.3	Modelo de la intensidad de modulación detectada	17
2.4	Simulación numérica	21
2.5	Conclusiones	24
2.6	Referencias del capítulo 2	25
<b>3.</b>	<b>Desenvolvimiento de interferogramas submuestreados desplazados en fase</b>	<b>27</b>
3.1	Introducción	27
3.2	Algoritmo de desenvolvimiento de interferogramas submuestreados	29
3.3	Desenvolvimiento de fase en dos dimensiones	35
3.4	Conclusiones	49
3.5	Referencias del capítulo 3	50

<b>4.</b>	<b>Recuperación de la fase a partir de un solo interferograma submuestreado</b>	<b>53</b>
4.1	Introducción	53
4.2	Diferencias de la fase a partir de un solo interferograma submuestreado	55
4.3	Resultados en datos simulados y experimentales	58
4.4	Conclusiones	66
4.5	Referencias del capítulo 4	68
<b>5.</b>	<b>Integración del gradiente de la fase</b>	<b>71</b>
5.1	Introducción	71
5.2	Cálculo e integración del gradiente de la fase	72
5.3	Resultados de la integración	77
5.4	Conclusiones	80
5.5	Referencias del capítulo 5	81
<b>6.</b>	<b>Conclusiones generales y trabajo a futuro</b>	<b>83</b>
6.1	Conclusiones	83
6.2	Trabajo a futuro	86

## Lista de figuras

### Lista de figuras del capítulo 2

- Figura 2.1 Geometría del arreglo de pixeles de un sensor de una cámara CCD.
- Figura 2.2 Detección (en una dimensión) de un patrón de alta densidad de franjas. Los puntos al final de cada línea vertical indican el valor promediado.
- Figura 2.3 Conjunto de 4 interferogramas desplazados en fase. Los interferogramas fueron simulados como detectados por pixeles de tamaño finito. Interferogramas correspondientes a un desplazamiento de la fase de 0 (a),  $-\pi/2$  (b),  $-\pi$  (c) y  $-3\pi/2$  (d).
- Figura 2.4 Intensidades de modulación detectadas del conjunto de interferogramas detectados (a) y usando el modelo desarrollado (b). Visualmente, ambas figuras se aprecian idénticas.
- Figura 2.5 Diferencia entre la intensidad de modulación obtenida del conjunto de interferogramas detectados y del modelo para la intensidad de modulación detectada. El error máximo corresponde a 0.27 mientras el mínimo es de  $-0.092$ .

### Lista de figuras del capítulo 3

- Figura 3.1 Demostración del algoritmo de desenvolvimiento de fase. Patrón de franjas de baja densidad de franjas (a), fase reconstruida y fase envuelta (b) y diferencias de la fase (c).
- Figura 3.2 Demostración de la falla del algoritmo de desenvolvimiento en interferogramas submuestreados. Patrón de franjas de alta densidad de franjas (a), a la derecha del interferograma existen menos de dos muestreos por periodo de la franja. Fase envuelta y fase recuperada con el algoritmo convencional de desenvolvimiento (b). Diferencias de la fase envueltas (c). Puede observarse que el algoritmo de desenvolvimiento falla exactamente a partir de que las diferencias de la fase exceden  $\pm\pi$ .
- Figura 3.3 Reconstrucción de la fase usando las diferencias desenvueltas de la fase. Diferencias envueltas de la fase (a). Se puede observar que las diferencias de la fase exceden  $\pm\pi$  (b).

- Figura 3.4 Diagrama de flujo del método propuesto para desenvolver la fase de interferogramas submuestreados obtenidos con técnicas de interferometría de corrimiento de fase.
- Figura 3.5 Simulación de 4 interferogramas desplazados en fase. Interferogramas correspondiente a un desplazamiento de fase de 0 (a),  $\pi/2$  (b),  $\pi$  (c) y  $3\pi/2$  (d). Puede observarse los patrones de Moiré en el borde exterior de los interferogramas, lo cual, indica submuestreo.
- Figura 3.6 Fase envuelta obtenida a partir de los 4 interferogramas mostrados en la figura 3.5.
- Figura 3.7 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase en la dirección y. Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y seno (b) de las diferencias de la fase. Diferencias de la fase envueltas,  $\Delta\phi_y(x,y)$ , y reconstruidas,  $\Delta\phi_y(x,y)$ , con el método de mínimos cuadrados.
- Figura 3.8 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase en la dirección x. Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y seno (b) de las diferencias de la fase. Diferencias de la fase envueltas,  $\Delta\phi_x(x,y)$ , y reconstruidas,  $\Delta\phi_x(x,y)$ , con el método de mínimos cuadrados.
- Figura 3.9 Fase reconstruida con el método de mínimos cuadrados usando las diferencias de la fase desenvueltas,  $\Delta\phi_x(x,y)$  y  $\Delta\phi_y(x,y)$ .
- Figura 3.10 Interferograma correspondiente al coseno de la fase, uno de un conjunto de 4. El interferograma se ha calculado agregándole ruido aleatorio uniformemente distribuido para demostrar el proceso de reconstrucción de la fase en condiciones experimentales difíciles.
- Figura 3.11 Fase envuelta obtenida de un conjunto de 4 interferogramas a los cuales se les ha agregado ruido.
- Figura 3.12 Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y al seno (b) de las diferencias de la fase en la dirección y. Interferogramas sintéticos filtrados, coseno (c) y seno (d), con un filtro promediador aplicado 4 veces con un tamaño de ventana de 3x3 pixeles.
- Figura 3.13 Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y al seno (b) de las diferencias de la fase en la dirección x. Interferogramas sintéticos filtrados, coseno (c) y seno (d), con un filtro promediador aplicado 4 veces con un tamaño de ventana de 3x3 pixeles.
- Figura 3.14 Diferencias de la fase envueltas en la dirección y (a) y en la dirección x (b). Diferencias de la fase desenvueltas (c) y (d).



- Figura 3.15 Reconstrucción de la fase a partir de interferogramas con altos niveles de ruido. La fase aparece idéntica a aquella obtenida utilizando interferogramas sin ruido.
- Figura 3.16 Fase desenvuelta obtenida usando el método de desenvolvimiento propuesto por Greivenkamp. Debido a la característica de dependencia de la trayectoria, la reconstrucción muestra la propagación de errores debido a la susceptibilidad del método al ruido.
- Figura 3.17 Error en la reconstrucción de la fase a partir de interferogramas con ruido.

#### **Lista de figuras del capítulo 4**

- Figura 4.1. Interferograma submuestreado obtenido con la expresión (4.6). En los bordes del interferograma se aprecia una reducción en el contraste de las franjas.
- Figura 4.2. Interferogramas sintéticos correspondientes a las diferencias de la fase en las direcciones  $y$  (a) y  $x$  (c). Resultados ideales calculados usando el coseno de las diferencias de la fase en forma exacta.
- Figura 4.3 Comparación entre los interferogramas sintéticos obtenidos del interferograma submuestreado con los resultados ideales. Diferencias de la fase envueltas (a) y (b), respecto a las coordenadas  $y$  y  $x$ , respectivamente. Diferencias (envueltas) exactas de la fase (b) y (d) en las direcciones  $y$  y  $x$ , respectivamente.
- Figura 4.4 Fase recuperada del interferograma mostrado en la figura 1. La reconstrucción se llevó a cabo mediante la integración de las diferencias reconstruidas de la fase con el método de mínimos cuadrados.
- Figura 4.5 Error en la reconstrucción,  $\varepsilon = \phi - \phi^r$ . Los valores del error pico a valle y cuadrático medio confirman la viabilidad del método en la recuperación de la fase de interferogramas submuestreados.
- Figura 4.6 Interferograma obtenido con un interferómetro comercial tipo Fizeau (a). Interferograma submuestreado resultante de tomar solamente cada cuarto píxel del interferograma de la izquierda (b).
- Figura 4.7 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase. Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno de las diferencias de la fase, en la dirección  $x$  (a) y en la dirección  $y$  (b). Diferencias de la fase reconstruidas, dirección  $x$  y dirección  $y$ .

Figura 4.8 Reconstrucción de la fase integrando las diferencias de la fase recuperadas de los interferogramas sintéticos.

Figura 4.9 Comparación cualitativa de la reconstrucción del frente de onda. Interferograma submuestreado (a) y interferograma resultado de tomar el coseno de la fase recuperada (b).

### **Lista de figuras del capítulo 5**

Figura 5.1 Interferogramas desplazados en fase  $0$  (a),  $2\pi/3$  (b),  $-2\pi/3$  (c). Fase envuelta obtenida de los interferogramas (d).

Figura 5.2 Fase reconstruida usando el método de integración del gradiente (a) y con el algoritmo de mínimos cuadrados (b). Diferencia entre ambas reconstrucciones, en dos dimensiones (c) y representación en tres dimensiones (d).

Figura 5.3 Interferogramas con ruido correspondientes al coseno (a) y seno (b) de la fase. Fase envuelta con ruido (c) y sin ruido (d).

Figura 5.4 Comparación de la reconstrucción de los algoritmos de integración del gradiente (a) y mínimos cuadrados (b). Mismos resultados pero mostrados envueltos para su comparación con la fase envuelta sin ruido, integración del gradiente (c) y mínimos cuadrados (d).

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

Las técnicas interferométricas son aplicadas en la medición de una gran variedad de mediciones físicas con la ventaja de ser pruebas no destructivas y la posibilidad de aplicarse remotamente. Adicionalmente, dado que la escala es la longitud de onda de la luz utilizada las mediciones puede realizarse en forma muy precisa.

Las mediciones interferométricas son basadas en el fenómeno de interferencia. Tomas Young en 1801 reportó la observación de franjas de interferencia por medio de la iluminación de dos rendijas constituyendo un importante impulso a la teoría ondulatoria de la luz. El experimento de Young podría considerarse como un interferómetro en el cual se puede efectuar la medición de una variable física, en este caso la separación entre las rendijas. En la medición de superficies con técnicas interferométricas, un haz proveniente de la superficie bajo prueba interfiere con otro de referencia generándose un patrón de intensidades. En el caso de la medición de superficies ópticas el patrón de intensidades está compuesto por franjas claras y oscuras o interferogramas. La información de la diferencia entre la superficie bajo prueba y la referencia es codificada en el interferograma. De esta forma, es posible recuperar el perfil de la superficie bajo prueba interpretando la distribución y densidad de las franjas en el interferograma.

Existe una gran variedad de interferómetros dependiendo de la variable física que se pretende medir. En la caracterización de superficies ópticas, configuraciones como Twyman-Green (Twyman [1918]), Fizeau (Malacara [1992]), Mach-Zender y los interferómetros de desplazamiento (Murty [1970]) son las más utilizadas, algunas de ellas, son incluso disponibles comercialmente.

En años recientes, las pruebas ópticas de superficies han hecho uso de algunos de los adelantos más sobresalientes del siglo XX como son los láseres y la tecnología de semiconductores. La inclusión de láseres, computadoras y cámaras de video en los interferómetros ha permitido un alto grado de automatización en la prueba de superficies minimizando la intervención humana.

La ventaja de usar un láser como fuente de iluminación es la de proveer una gran longitud de coherencia espacial y temporal (Grigull [1967]). Estas características aseguran que las dimensiones del interferómetro sean flexibles y que el interferograma generado solo posea franjas de una sola longitud de onda facilitando su interpretación. Los interferogramas pueden ser interpretados visualmente e indicar cualitativamente la calidad de la superficie que es medida. Para un análisis cuantitativo el patrón de intensidades debe ser grabado por una película fotográfica o una cámara CCD y convertida en un número por una tarjeta digitalizadora que puede ser procesado por una computadora para realizar el procedimiento numérico requerido.

La interpretación de franjas o análisis de interferogramas es un campo activo y en constante progreso. Técnicas como la interferometría de corrimiento de fase (Bruning[1974]) y aquellas basadas en la metodología de Fourier son ampliamente conocidas (Takeda[1986]). Con estos procedimientos es posible extraer la información de la fase (seno y coseno) a partir de los datos de intensidades grabados de los interferogramas. Ambas técnicas requieren de un proceso final conocido como desenvolvimiento de fase (Robinson [1993]) para reconstruir el frente de onda. Este procedimiento es necesario para remover las discontinuidades presentes al calcular la fase por medio de la función arcotangente de la razón del seno y el coseno del frente de onda. Con la mayoría de los métodos basados en el análisis de Fourier el interferograma debe poseer franjas portadoras de tal forma que su espectro pueda separarse y ser filtrado. Con las técnicas de corrimiento de fase, en cambio, se usan por lo menos tres interferogramas con desplazamientos constantes de fase entre ellos siendo posible de esta forma, obtener el seno y el coseno de la fase. Finalmente cabe mencionar que existen métodos de interpretación de franjas que evitan el desenvolvimiento de fase (Paez [1997]).

Con los mismos adelantos tecnológicos, que han hecho posible la automatización en la prueba de superficies, han llegado nuevos procesos de diseño y fabricación de superficies ópticas asféricas. La utilización de superficies asféricas es cada vez más frecuente en instrumentos ópticos de nueva generación debido a que una sola de éstas puede reemplazar a varias componentes esféricas con la misma (o mejor) calidad de imagen, menor cantidad de vidrio utilizado, menor peso y un tamaño más compacto del instrumento óptico.

Las superficies esféricas son frecuentemente más difíciles de probar en la mayoría de los interferómetros. Esta situación es debida a que las componentes ópticas de referencias disponibles en su mayoría son planas o esféricas. De esta forma, el frente de onda de la superficie esférica difiere en gran medida de la referencia generando una gran cantidad de franjas en el interferograma que el sistema de detección pudiera no resolver adecuadamente. Esto significa que la imagen adquirida del interferograma esté submuestreada.

El uso de cámaras basadas en dispositivos de carga acoplada (CCD por sus siglas en inglés) es la técnica preferida en la detección de interferogramas. Su elemento sensor es un arreglo rectangular de pixeles. Otras distribuciones también son disponibles (arreglos hexagonales), aunque son menos frecuentes. La separación entre pixeles define la máxima frecuencia espacial que debe poseer una imagen para ser muestreada correctamente. Las imágenes con frecuencias espaciales por encima del máximo que puede detectar la cámara CCD serán mostradas con una distribución de frecuencias espaciales menor. Esta situación es conocida como submuestreo y en general es una característica indeseable de la imagen detectada (Nyquist [1928]). Adicionalmente al muestreo, cada pixel de la cámara CCD promedia el patrón de intensidades incidentes en forma espacial tanto como temporal debido al tamaño del pixel y al tiempo de adquisición. El efecto del promediado espacial en interferogramas submuestreados resulta en una considerable reducción en el contraste de las franjas (Schwider [1994], Paez [1999]).

La recuperación de la fase de interferogramas submuestreados es significativamente más difícil de lograr que en interferogramas de baja densidad de franjas. Con las técnicas

basadas en la metodología de Fourier solo ha sido posible recuperar el frente de onda de interferogramas submuestreados disponiendo de un conocimiento muy aproximado de la fase (Servin [1994]), lo cual no siempre es posible. Con las técnicas de la interferometría de corrimiento de fase es posible obtener la fase envuelta de interferogramas submuestreados y aplicar un procedimiento modificado de desenvolvimiento de fase (Greivenkamp [1987]). Sin embargo, se requiere de cámaras CCD con píxeles pequeños y ampliamente separados con la finalidad de minimizar los efectos del promediado de la intensidad. De otra forma la reducción en la intensidad de modulación reduce la relación señal a ruido y dificulta el procedimiento de desenvolvimiento de fase. Lo anterior significa un problema dado que la mayoría de las cámaras CCD se construyen con píxeles casi del mismo tamaño que la separación entre centros de los mismos, con lo cual no es posible evitar la reducción en la intensidad de modulación en la detección de interferogramas submuestreados.

En la medición de superficies ópticas se ha propuesto el uso de compensadores difractivos (Sasián [1988]) o refractivos (Wyant [1972]), la utilización de láseres con longitudes de onda mayores y la utilización de dos o más longitudes de onda en el interferómetro. Estos procedimientos limitan el número de franjas que el sistema de detección debe resolver evitando el submuestreo, sin embargo, cada una de estas alternativas significa un compromiso entre el costo del instrumento, la rapidez de la medición y la precisión de la misma.

## 1.2 Objetivos

En la presente tesis estamos interesados en discutir y analizar la detección de interferogramas de alta frecuencia espacial. Adicionalmente exploraremos la posibilidad de proponer técnicas avanzadas de recuperación de la fase de interferogramas submuestreados. Dada la capacidad de las técnicas interferométricas para medir superficies ópticas esféricas o planas con gran precisión y confiabilidad, debe ser posible extender este intervalo a la medición de superficies esféricas usando los procedimientos ya conocidos. Para lo cual, en la presente investigación se plantean los siguientes objetivos.

1. El análisis de la detección por cámaras CCD de interferogramas y patrones de franjas submuestreados y su aplicación principal, pero no limitada, en la medición de superficies ópticas esféricas.
2. El establecimiento de un modelo que describa la modificación de los patrones de intensidades de alta densidad de franjas al ser detectados por cámaras CCD.
3. Proponer un método de desenvolvimiento a partir de interferogramas submuestreados desplazados en fase.
4. El desarrollo de una técnica de recuperación de la fase de interferogramas submuestreados usando un solo interferograma.



### 1.3 Resumen de los siguientes capítulos

En el capítulo 2 se evalúa la integral del coseno de la fase con límites definidos por el tamaño de píxel. De esta forma encontraremos una expresión para la intensidad de modulación detectada en función de la posición del píxel y no del punto de vista de las frecuencias espaciales como usualmente se ha hecho. Compararemos la expresión obtenida con simulaciones numéricas para su evaluación. Asimismo se podrá determinar la reducción en la intensidad de modulación para cualquier frente de onda, en particular, dada la relación entre las dimensiones del píxel y la separación entre ellos.

El capítulo 3 se analiza el desenvolvimiento de la fase envuelta obtenida de interferogramas submuestreados. Este procedimiento es muy sensible al ruido provocando errores en la reconstrucción del frente de onda. El proceso de desenvolvimiento de fase puede formularse como la integración de las diferencias de la fase (Itoh [1982]). Se calcularán interferogramas sintéticos (Paez [1998]) de las diferencias de la fase en direcciones ortogonales. La fase de los interferogramas sintéticos se recuperará y se integrará para reconstruir el frente de onda. Compararemos este método con los anteriores en cuanto a susceptibilidad al ruido.

Establecemos, en el capítulo 4, la posibilidad de extraer la información correspondiente al coseno de las diferencias de la fase en direcciones adyacentes usando un solo interferograma submuestreado. Una vez fundada esta posibilidad, se aplicarán técnicas de recuperación de la fase usando interferogramas de baja densidad de franjas para extraer la

información de las diferencias de la fase. Por último, evaluaremos la exactitud en la recuperación de la fase por medio de la integración de las diferencias de la fase.

El capítulo 4 presenta resultados de una técnica novedosa de integración del gradiente de la fase para reconstruir el frente de onda. Se exploran dos procedimientos para calcular las derivadas de la fase en direcciones ortogonales. El primero de ellos usando diferencias finitas y el segundo usando el análisis de Fourier. El método de integración se plantea como una técnica independiente de la trayectoria y se comparan resultados con el algoritmo de mínimos cuadrados ([Fried \[1977\]](#)).

Finalmente, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones generales del trabajo de investigación llevado a cabo en esta tesis y un esbozo del trabajo a futuro.

## 1.4 Referencias del capítulo 1

Bruning J. H., Herriot D. R., Gallagher J. E., Rosenfeld D. P., White A. D., and Brangaccio D. J., "Digital wavefront measuring interferometer for testing surfaces and lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693-2703 (1974).

D. L. Fried, "Least-squares fitting of a wave front distortion estimate to an array of phase-differences measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370-375 (1977).

Gaskill J. D., "Characteristics and applications of linear filters" in *Linear systems, Fourier transforms, and optics*, (John Wiley and Sons, Inc. 1978), Chap. VI.

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist interferometry," *Appl. Opt.* **26**, 5245-5257 (1987).

Grigull, U., Rtttenkolber H., "Two-beam interferometer using a laser," *J. Opt. Soc. Am.* **57**(2), 149-155 (1967).

Itoh K., "Analysis of the phase unwrapping algorithm," *Appl. Opt.* **21**, 2470 (1982).

Malacara D., "Newton, Fizeau, and Haidinger interferometers," in *Optical Shop Testing*, Ed. Malacara D., (John Wiley and Sons, Inc. 1992), Chap. I.

Murty M. V. R. K., "A compact lateral shearing interferometer based on the Michelson interferometer," *Appl. Opt.* **9**, 1146-1152 (1970).

Nyquist H., "Certain topics in telegraph transmission theory," *AIEE. Trans.*, **47**, NJ, (1928).

Paez, G., Strojnik M., "Fringe analysis and phase reconstruction from modulated intensity patterns," *Opt. Lett.* **22**, 1669-1671 (1997).

Páez G., Strojnik M., "Convergent, recursive phase reconstruction from noisy, modulated intensity patterns using synthetic interferograms," *Opt. Lett.* **23**(6), 406-408 (1998).

Páez, G.; Strojnik M.; Flores J., "Phase reconstruction from undersampled intensity pattern(s): underdetection," *SPIE.* **3759**, 29-39 (1999).

Robinson D. W., "Phase unwrapping methods," in *Interferogram Analysis*, Eds. Robinson D. W., G. T. Reid, Institute of Physics Publishing, 1993), Chap. VI.

Sasián, J. M. "Desing of Null correctors for the testing of astronomical optics," *Opt. Eng.*, **27**, 1051-1056 (1988).

Schwider J., "Detection of undersampling from measured phase-shifting data," *Opt. Lett.* **19**, 231-233 (1994).

Servin M., Malacara D., Malacara Z., and Vlad V. I., "Sub-Nyquist null aspheric testing using a computer-stored compensator," *Appl. Opt.* **33**, 4103-4108 (1994).

Takeda M., Ina H., Kobayashi S., "Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156-160 (1986).

Twyman, F., "Interferometers for the experimental study of optical systems from the point of view of the wave theory," *Philos. Mag.*, Ser. 6, **35**, 49 (1918).

Wyant, J. C. and V. P. Bennett, "Using computer generated holograms to test aspheric wavefronts," *Appl. Opt.*, **11**(12), 2833-2839 (1972).

## Capítulo 2

### Detección de interferogramas de alta densidad de franjas

#### 2.1 Introducción

La caracterización de superficies ópticas, por medio de métodos interferométricos, requiere del uso de un interferómetro, de una cámara CCD y de una computadora. En el interferómetro se generan él o los interferogramas, la cámara CCD convierte la señal luminosa en un voltaje y después en un número que la computadora, por medio de un algoritmo, convierte en información acerca de la superficie que es analizada. Dependiendo del número de interferogramas y de la introducción o no de una función portadora el frente de onda se recupera usando alguna de las técnicas de análisis de franjas (Bruning [1974], Takeda [1986], Kreis [1986], Womack [1984]).

En la actualidad la medición de superficies esféricas es un campo de intensa investigación. Tal tipo de superficies es cada vez más utilizado en modernos instrumentos ópticos debido a que pueden reemplazar a dos o más de sus contrapartes esféricas con el mismo o aún mejor desempeño. La caracterización de las superficies esféricas, sin embargo, presenta una dificultad superior comparada con las esféricas. Normalmente, se requiere de la introducción en el arreglo interferométrico de superficies ópticas adicionales (compensadores nulos) para compensar la asfericidad de tales superficies (Sasían [1988]).

La óptica adicional, frecuentemente, debe ser diseñada y construida para una componente

asférica en particular, lo cual puede encarecer, hacer más lenta y aumentar la sensibilidad del interferómetro a las diversas fuentes de error, propias de la interferometría (Malacara [1998]). Los compensadores nulos son necesarios para limitar el número de franjas generadas por el interferómetro.

La interpretación de patrones de franjas de alta densidad de franjas idealmente permite la caracterización de superficies esféricas sin los problemas asociados con el uso de compensadores nulos. Sin embargo, la detección, interpretación y análisis de estos interferogramas presentan, a su vez, un reto. La recuperación de la fase de interferogramas submuestreados se ha llevado a cabo usando técnicas de corrimiento de fase, un procedimiento modificado de desenvolvimiento de fase y una cámara CCD con características especiales (Greivemkamp [1987]). Normalmente las cámaras CCD tienen pixeles de ancho y alto tan grandes como la separación entre los mismos. De esta forma la cantidad de radiación incidente sobre cada píxel es máxima incrementando la eficiencia en la detección (Páez [1999]). La mayoría de las cámaras CCD están construidas de esta forma. Al utilizar este tipo de cámaras en la detección de patrones interferométricos de alta densidad de franjas se presenta submuestreo y una reducción en el contraste (Bell [1994], Páez [1999]). En el caso de tener un solo píxel por franja la modulación puede ser cero. En este caso la información se pierde completamente. En este capítulo analizamos la reducción en el contraste de las franjas en interferogramas de alta frecuencia espacial debido a la detección por pixeles de tamaño finito. Se desarrolla una expresión analítica que modela la reducción en la modulación con la información de las derivadas de la fase. Para desarrollar la expresión asumimos que la fase es una función suave con derivadas

continuas. Finalmente, se presentan un ejemplo de detección de interferogramas con pixeles de tamaño finito.

## 2.2 Detección de patrones de franjas por arreglos de pixeles

El patrón de intensidades o interferograma que incide en el plano de la cámara CCD puede escribirse como:

$$I(x, y) = I_f(x, y) + I_m(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad . \quad (2.1)$$

En esta expresión las intensidades de fondo y de modulación se denotan por  $I_f(x, y)$  e  $I_m(x, y)$ , respectivamente. El patrón de intensidades es detectado por un arreglo rectangular de pixeles. La geometría del sensor de la cámara CCD se muestra en la figura 2.1. La intensidad detectada por el arreglo de pixeles queda (Gaskill [1978]):

$$I_d(x, y) = \frac{1}{ab} \left[ \int_{y-\frac{b}{2}}^{y+\frac{b}{2}} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} I(x, y) dx dy \right] \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \delta(x - m x_s, y - n y_s) \quad . \quad (2.2)$$



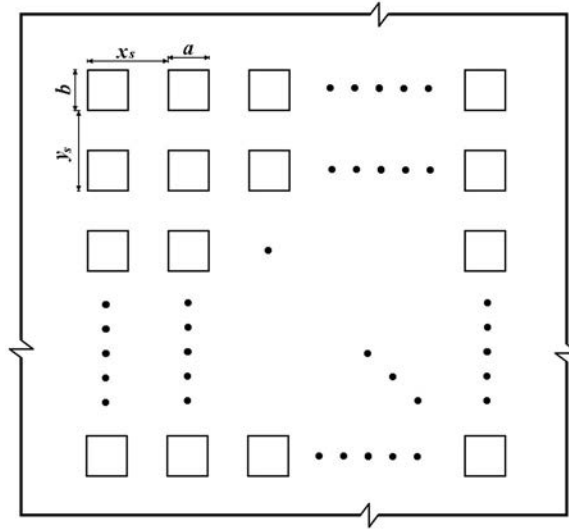


Figura 2.1 Geometría del arreglo de píxeles de un sensor de una cámara CCD.

En la expresión (2.2),  $a$ ,  $x_s$ , y  $N$  son el tamaño, la separación entre y el número de píxeles en la dirección  $x$ , respectivamente. De igual forma  $b$ ,  $y_s$ , y  $M$  representan la dimensión, la separación y el número de píxeles, respecto a la dirección  $y$ . La función  $\delta(x,y)$  es una función impulso en dos dimensiones, lo cual representa matemáticamente el muestreo. Como puede observarse de la expresión (2.2), cada píxel toma el promedio de la intensidad que incide sobre el mismo. Lo anterior tiene importantes consecuencias principalmente cuando la densidad de franjas aumenta. La intensidad detectada puede variar considerablemente de la intensidad incidente en cada punto de muestreo (al centro de cada píxel). Para ilustrar lo anterior se simula un patrón de franjas en una dimensión de acuerdo a la siguiente expresión:

$$I(x) = 128 + 127 \cos[\phi(x)] \quad . \quad (2.3)$$

La intensidad de fondo y la intensidad de modulación son constantes. La fase esta dada por el polinomio de cuarto orden

$$\phi(x) = 0.00045x^4 + 0.0045x^3 + 0.068x^2 + 0.9x \quad , \quad (2.4)$$

y la intensidad detectada por pixeles de dimensiones finitas se obtiene con:

$$I_d(x) = \frac{I}{a} \left[ \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} I(x) dx \right] \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - n x_s) \quad . \quad (2.5)$$

La diferencia entre el valor de la intensidad en el punto de muestreo y la intensidad promediada sobre las dimensiones del píxel se muestra en la figura 2.2. El punto al final de cada línea vertical indica el promedio de la intensidad. Las regiones sombreadas indican el ancho del píxel, el intervalo sobre el cual la intensidad se promedia ( $a=0.8x_s$ ), con un intervalo de muestreo de  $I$ . A la derecha de la figura 2.2, en donde la densidad de franjas es baja casi no existe diferencia. Sin embargo, a la derecha de la grafica, donde la densidad de franjas se incrementa, se observa que la intensidad de modulación disminuye notoriamente. También es posible observar que en el lado derecho de la grafica que las franjas aparecen con una frecuencia espacial menor lo cual indica que existen menos de dos muestreos por franja (submuestreo).

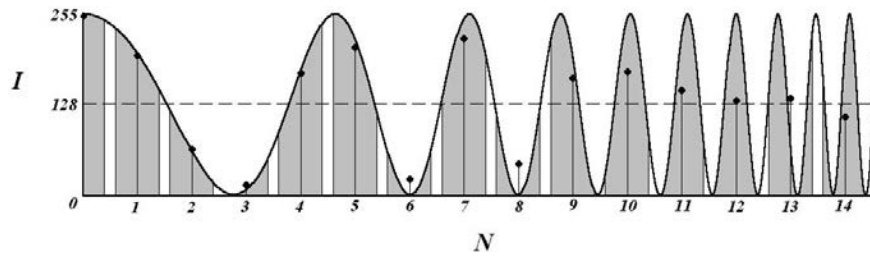


Figura 2.2 Detección (en una dimensión) de un patrón de alta densidad de franjas. Los puntos al final de cada línea vertical indican el valor promediado.

La intensidad de modulación detectada por pixeles de tamaño finito se reduce conforme la densidad de franjas aumenta. Para tomar en cuenta esta situación se debe modificar la ecuación (2.1), en la cual la intensidad de modulación incidente es remplazada por la intensidad de modulación detectada

$$I_d(x, y) = I_f(x, y) + I_g(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad . \quad (2.6)$$

La intensidad de modulación antes de su detección,  $I_m(x, y)$ , depende de la fuente de iluminación empleada. Típicamente es una función Gaussiana para una variedad de láseres, aunque para diodos láser la distribución puede ser astigmática.

La ecuación (2.6), básicamente, establece que el mayor efecto en la detección por pixeles de tamaño finito de interferogramas ocurre en la intensidad de modulación y que la información de la fase no es afectada. Sin embargo, la reducción en el contraste de las

franjas reduce la relación señal a ruido, lo cual, incrementa la dificultad para recuperar la fase de interferogramas de alta densidad de franjas.

### 2.3 Modelo de la intensidad de modulación detectada

La función de transferencia de modulación (MTF por sus siglas en inglés) describe como las frecuencias espaciales, a la salida, se modifican por la acción de un dispositivo (Marchywka [1995]). Esto aplica en la caracterización de las cámaras CCD como se ha mostrado en la sección 2.2. La MTF es tradicionalmente descrita como la razón de la modulación de entrada con la salida en el dominio de la frecuencia. Aún cuando esta definición está bien establecida, en el presente estudio se define una forma alternativa usando la misma definición pero en función de las coordenadas espaciales

$$mtf_p(x, y) = \frac{I_g(x, y)}{I_m(x, y)} \quad . \quad (2.7)$$

La anterior expresión puede definirse como la función de transferencia de modulación de cada píxel en coordenadas espaciales. En general, usando esta definición la  $mtf_p(x,y)$  cambia con la información de la fase.

Para obtener una relación explícita de la  $mtf_p(x,y)$ , se necesita evaluar la integral del coseno de la fase multiplicada por la función de modulación. Los límites de la integral están definidos por las dimensiones del píxel

$$I_d(x, a) = \frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} I_m(x) \cos[\phi(x)] dx \quad (2.8)$$

En general, la anterior expresión no puede evaluarse en forma cerrada, no obstante, una buena aproximación puede ser obtenida. En primer lugar se multiplica y divide el integrando por la derivada de la fase,  $\phi_x(x) = d[\phi(x)]/dx$ , quedando:

$$I_d(x, a) = \frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} \frac{I_m(x)}{\phi_x(x)} \phi_x(x) \cos[\phi(x)] dx \quad (2.9)$$

El anterior procedimiento se justifica bajo la consideración de que el perfil de la fase no se invierte en el intervalo definido por las dimensiones del píxel,  $a$ , es decir, que  $\phi_x(x) \neq 0$ . La integral puede realizarse ahora por partes

$$I_d(x, a) = \frac{1}{a} \left[ \frac{I_m(x)}{\phi_x(x)} \sin[\phi(x)] \right]_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} - \frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} u(x) \sin[\phi(x)] dx \quad (2.10)$$

En donde  $u(x) = d[I_m(x)/\phi_x(x)]/dx$ . La integral del lado derecho no contribuye significativamente como se verá mas adelante, por tal razón, no se le considera en los siguientes desarrollos. Tomando los limites de integración se obtiene:

$$I_d(x, a) = \frac{1}{a} \left\{ \frac{I_m(x + a/2)}{\phi_x(x + a/2)} \text{sen}[\phi(x + a/2)] - \frac{I_m(x - a/2)}{\phi_x(x - a/2)} \text{sen}[\phi(x - a/2)] \right\} \quad . \quad (2.11)$$

Para simplificar términos se asume lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_m(x + a/2) &\cong I_m(x - a/2) \cong I_m(x) \\ \phi_x(x + a/2) &\cong \phi_x(x - a/2) \cong \phi_x(x) \\ \phi(x + a/2) &\cong \phi(x) + (a/2)\phi_x(x) \\ \phi(x - a/2) &\cong \phi(x) - (a/2)\phi_x(x) \end{aligned} \quad . \quad (2.12)$$

Las consideraciones anteriores significan que la fase varía linealmente y la intensidad de modulación permanece casi constante sobre las dimensiones del pixel. La ecuación (2.11) puede entonces escribirse como:

$$I_d(x, y) = \frac{1}{a} \left[ \frac{I_m(x)}{\phi_x(x)} \left\{ \text{sen} \left[ \phi(x) + \left( \frac{a}{2} \right) \phi_x(x) \right] - \text{sen} \left[ \phi(x) - \left( \frac{a}{2} \right) \phi_x(x) \right] \right\} \right] \quad . \quad (2.13)$$

Finalmente, empleamos las identidades trigonométricas de la suma de dos ángulos

$$I_d(x, a) = \frac{I_m(x) \text{sen}[(a/2)\phi_x(x)]}{(a/2)\phi_x(x)} \cos[\phi(x)] \quad . \quad (2.14)$$

Siguiendo operaciones similares se puede demostrar una relación análoga para la integral del seno de la fase

$$\frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} I_m(x) \text{sen}[\phi(x)] dx = \frac{I_m(x) \text{sen}[(a/2)\phi_x(x)]}{(a/2)\phi_x(x)} \text{sen}[\phi(x)] \quad . \quad (2.15)$$

La intensidad de modulación detectada puede escribirse como:

$$I_g(x) = I_m(x) \frac{\text{sen}[(a/2)\phi_x(x, y)]}{(a/2)\phi_x(x, y)} \quad . \quad (2.16)$$

La extensión en dos dimensiones de la anterior ecuación queda:

$$I_g(x, y) = I_m(x, y) \frac{\text{sen}[(a/2)\phi_x(x, y)] \text{sen}[(b/2)\phi_y(x, y)]}{(a/2)\phi_x(x, y) (b/2)\phi_y(x, y)} \quad . \quad (2.17)$$

En donde  $\phi_x(x, y)$  y  $\phi_y(x, y)$  denotan las derivadas parciales de la fase en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. La  $mtf_p(x, y)$  de acuerdo a la anterior relación es:

$$mtf_p(x, y) = \frac{\text{sen}[(a/2)\phi_x(x, y)] \text{sen}[(b/2)\phi_y(x, y)]}{(a/2)\phi_x(x, y) (b/2)\phi_y(x, y)} \quad . \quad (2.18)$$

La reducción en la intensidad de modulación está relacionada con las derivadas de la fase y las dimensiones de los pixeles. En la siguiente sección se comparará la anterior expresión con la solución de la ecuación (2.2) obtenida con un método numérico.

## 2.4 Simulación numérica

En la presente sección se simulan un conjunto de 4 interferogramas con desplazamientos en la fase de  $0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$

$$\begin{aligned}
 I_d^1(x, y) &= I_f(x, y) + I_g(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\
 I_d^2(x, y) &= I_f(x, y) - I_g(x, y) \text{sen}[\phi(x, y)] \\
 I_d^3(x, y) &= I_f(x, y) - I_g(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\
 I_d^4(x, y) &= I_f(x, y) + I_g(x, y) \text{sen}[\phi(x, y)] \quad . \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Cada uno de los interferogramas fue simulado llevando a cabo la integral indicada en la ecuación (2.2). La técnica numérica usada se conoce como integración por el método de Romberg con un umbral de precisión de  $0.001$  (Press [1986]). El tamaño de píxel es de  $a=0.8x_s$  y  $b=0.8y_s$  en arreglos de  $256 \times 256$  pixeles con un radio de interferograma de  $1$ . La función de modulación es una función Gaussiana,  $I_m(x,y)=120 \exp[-0.8(x^2+y^2)]$ . La fase utilizada en el cálculo de los interferogramas contiene aberraciones de esfericidad, de desenfoque, astigmatismo, inclinación en ambos ejes y pistón



$$\phi(x, y) = 23(x^2 + y^2)^2 - 28(x^2 + y^2) + 2xy + 3x + 3y + 2 \quad . \quad (2.20)$$

Los interferogramas mostrados en la figura 2.3 presentan patrones de Moiré indicando submuestreo y reducción en el contraste de las franjas en los bordes como cabe esperar con la detección por pixeles.

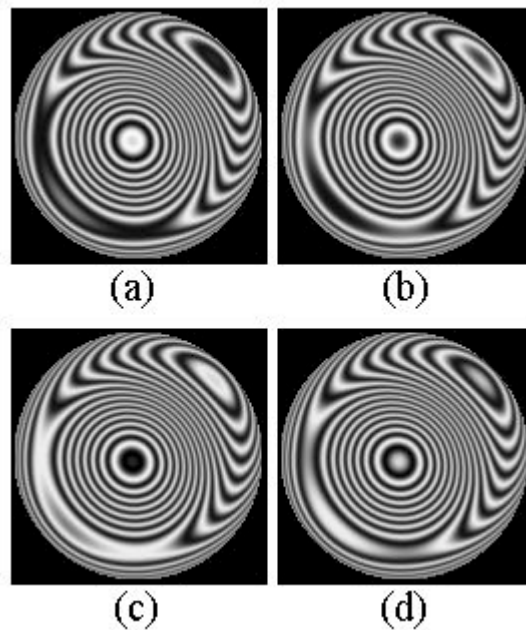


Figura 2.3 Conjunto de 4 interferogramas desplazados en fase. Los interferogramas fueron simulados como detectados por pixeles de tamaño finito. Interferogramas correspondientes a un desplazamiento de la fase de  $0$  (a),  $-\pi/2$  (b),  $-\pi$  (c) y  $-3\pi/2$  (d).

La intensidad de modulación se recupera del conjunto de interferogramas usando la siguiente expresión:

$$I_g = \frac{I}{2} \sqrt{(I_d^1 - I_d^3)^2 + (I_d^4 - I_d^2)^2} \quad . \quad (2.21)$$

La figura 2.4 muestra a las intensidades de modulación calculadas usando las ecuaciones (2.18), figura 2.3(a), y (2.21), figura 2.3(b). Para diferenciar ambos resultados denotamos a la intensidad de modulación calculada con la expresión (2.21) por  $I'_g$ . El error entre ambos resultados se define como,  $\varepsilon = I_g - I'_g$ . Este resultado se muestra en la figura 2.5. Considerando que el valor máximo en la intensidad de modulación,  $I_{md}$ , es de 120 y que el valor pico a valle del error es de 0.362, esto corresponde a una diferencia de 0.302%.

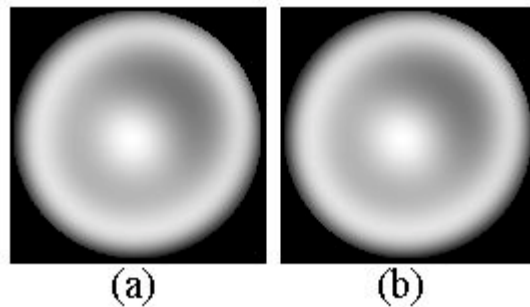


Figura 2.4 Intensidades de modulación detectadas del conjunto de interferogramas detectados (a) y usando el modelo desarrollado (b). Visualmente, ambas figuras se aprecian idénticas.

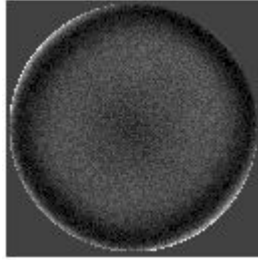


Figura 2.5 Diferencia entre la intensidad de modulación obtenida del conjunto de interferogramas detectados y del modelo para la intensidad de modulación detectada. El error máximo corresponde a  $0.27$  mientras el mínimo es de  $-0.092$ .

## 2.5 Conclusiones

Se analizó la detección de patrones de alta densidad de franjas por un arreglo de pixeles de tamaño finito. Los interferogramas detectados presentan una importante reducción en contraste conforme la densidad de franjas aumenta y aparece el fenómeno de submuestreo. Se desarrolló un modelo matemático que describe la reducción en la intensidad de modulación de los interferogramas. La reducción en el contraste depende del tamaño del pixel y de las derivadas parciales de la fase en direcciones ortogonales. Para probar el modelo desarrollado se simuló un conjunto de interferogramas detectados por un arreglo de pixeles. Del conjunto de interferogramas se recuperó la intensidad de modulación y se comparó este resultado con la expresión analítica. Ambos resultados coinciden con un error menor a un  $0.4\%$  demostrando la viabilidad del análisis desarrollado.

## 2.6 Referencias del capítulo 2

Bruning J. H., Herriot D. R., Gallagher J. E., Rosenfeld D. P., White A. D., and Brangaccio D. J., "Digital wavefront measuring interferometer for testing surfaces and lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693-2703 (1974).

Bell B. W., Koliopoulos C. L., "Moiré topography, sampling theory, and charged-coupled devices," *Opt. Lett.* **9**, 171-173 (1994).

Gaskill J. D., "Characteristics and applications of linear filters" in *Linear systems, Fourier transforms, and optics*, (John Wiley and Sons, Inc. 1978), Chap. VI.

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist interferometry," *Appl. Opt.* **26**, 5245-5257 (1987).

Kreis T., "Digital holographic interference-phase measurements using Fourier transform method," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 847-855 (1986).

Malacara D., "Newton, Fizeau, and Haidinger interferometers," in *Optical Shop Testing*, Ed. Malacara D., (John Wiley and Sons, Inc. 1992), Chap. I.

Marchywka M., "MTF, aliasing, and dithering with high-precision CCD imagers., *SPIE*. **2416**, 174-181 (1995).

Páez G., Scholl M. S., “Thermal contrast detected with a thermal detector,” *Infr. Phys & Tech.*, **40**, 109-116 (1999).

Páez, G.; Strojnik M.; Flores J., “Phase reconstruction from undersampled intensity pattern(s): underdetection,” *SPIE*. **3759**, 29-39 (1999).

Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., and Vetterling W. T., “Integration of functions,” in *Numerical recipes in C*, (Cambridge University Press 1986) Chap. IV.

Sasían, J. M. “Desing of Null correctors for the testing of astronomical optics,” *Opt. Eng.*, **27**, 1051-1056 (1988).

Takeda M., Ina H., Kobayashi S., “Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry,” *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156 (1986).

Womack K. H., “Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection,” *Opt. Eng.*, **23** 391-395 (1984).

## Capítulo 3

# Desenvolvimiento de fase de interferogramas submuestreados desplazados en fase

### 3.1 Introducción

El proceso de desenvolvimiento continúa siendo un área activa en diversos campos de la óptica y en el procesamiento digital de imágenes. Este proceso es necesario para remover las discontinuidades presentes en la fase envuelta debido al hecho de que esta es recuperada con la función arcotangente de la razón del seno y coseno de la fase. Esto ocurre al utilizar técnicas tan importantes como la interferometría de corrimiento de fase (Bruning [1974]) y el análisis de Fourier (Takeda [1986], Kreis [1986], Womack [1984]).

En su forma más simple el desenvolvimiento consiste en agregar o restar términos de  $2\pi$  cada vez que se encuentra una diferencia de más de  $\pi$  entre pixeles adyacentes a lo largo de la trayectoria de desenvolvimiento (Robinson [1993]). Otras formas más robustas de desenvolvimiento incluyen las técnicas de mínimos cuadrados (Fried [1977], Hudgin [1977], Noll [1978], Hunt [1979]), funciones de Green (Lyuboshenko [1999]), integración de diferencias (Itoh [1982]), y otros. Cada una de estas técnicas puede manejar en diferentes grados problemas como mediciones ruidosas, regiones con datos inválidos y funciones de pupila irregulares.

La habilidad de las diferentes técnicas para desenvolver correctamente la fase módulo  $2\pi$  frecuentemente depende de la disponibilidad de conocimiento a priori de la fase (Marroquin [1995]). La mayoría de las técnicas de desenvolvimiento asumen que los cambios en la fase entre pixeles adyacentes no exceden una cantidad mayor a  $2\pi$  en magnitud. Si adicionalmente se asume que la fase es una función suave con derivadas continuas es posible resolver para mediciones ruidosas y submuestreo. Esta última condición puede encontrarse en la medición e superficies ópticas esféricas utilizando un interferómetro cuya referencia es plana.

Al utilizar técnicas de corrimiento de fase es posible obtener la fase envuelta. Sin embargo, la gran mayoría de los métodos de desenvolvimiento no pueden manejar esta situación. Greivenkamp desarrolló un proceso de desenvolvimiento capaz de desenvolver la fase obtenida a partir de interferogramas submuestreados. Con este método el número de términos  $2\pi$  que deben sumarse o restarse a la fase envuelta es determinado por los pixeles previos ya desenvueltos a lo largo de la trayectoria de desenvolvimiento (Greivemkamp [1987]). Este procedimiento asume que la fase cambia linealmente y tiene derivadas continuas. En la detección de interferogramas submuestreados se requiere el uso de cámaras CCD con pixeles pequeños ampliamente separados (Bell [1994]) esto es para evitar la pérdida de contraste que ocurriría debido al promediado de la intensidad sobre el área del pixel. Una desventaja del método demostrado por Greivenkamp es que es una técnica dependiente de la trayectoria. Esto significa que su sensibilidad al ruido es alta y que no puede manejar pupilas con bordes irregulares o áreas con datos inválidos sin

la intervención del usuario. Otro método ha sido propuesto para recuperar la fase de interferogramas submuestreados que es independiente de la trayectoria (Servin [1996]). Sin embargo, la susceptibilidad al ruido de esta técnica es aproximadamente la misma que con el método originalmente propuesto.

En este capítulo se propone una técnica de desenvolvimiento de fase utilizando interferogramas submuestreados. El algoritmo propuesto es independiente de la trayectoria y puede manejar niveles de ruido mayores que las técnicas anteriormente desarrolladas. Utilizando la fase envuelta se calculan los interferogramas sintéticos correspondientes a las diferencias de la fase en direcciones ortogonales. Las diferencias de la fase se recuperan de los interferogramas sintéticos y se integran para recuperar el frente de onda usando el algoritmo de mínimos cuadrados.

### 3.2 Algoritmo de desenvolvimiento de interferogramas submuestreados

Utilizando la técnica de la interferometría de corrimiento de fase podemos obtener 4 interferogramas con desplazamiento en la fase de  $0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$

$$\begin{aligned}
 I_1(x, y) &= I_f(x, y) + I_m(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\
 I_2(x, y) &= I_f(x, y) - I_m(x, y) \sin[\phi(x, y)] \\
 I_3(x, y) &= I_f(x, y) - I_m(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\
 I_4(x, y) &= I_f(x, y) + I_m(x, y) \sin[\phi(x, y)]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$



En las expresiones anteriores  $I_f(x,y)$  e  $I_m(x,y)$  son las intensidades de fondo y de modulación detectadas por la cámara CCD. Nuestro problema es determinar  $\phi(x,y)$ . Como un primer paso obtenemos la fase envuelta,  $\phi_e(x,y)$ , a partir de las intensidades obtenidas.

$$\phi_e(x,y) = \arctan \left\{ \frac{I_4(x,y) - I_2(x,y)}{I_1(x,y) - I_3(x,y)} \right\} \quad . \quad (3.2)$$

La fase envuelta y la desenvuelta se relacionan entre sí con la siguiente expresión:

$$\phi(x,y) = \phi_e(x,y) + 2\pi k(x,y) \quad . \quad (3.3)$$

En la expresión anterior  $k(x,y)$  es una función de enteros tal que:

$$-\pi \leq \phi_e(x,y) \leq \pi \quad ,$$

$$\cos[\phi_e(x,y)] = \cos[\phi(x,y)] \quad ,$$

y

$$\sin[\phi_e(x,y)] = \sin[\phi(x,y)] \quad . \quad (3.4)$$

El algoritmo de desenvolvimiento de la fase, en una sola dimensión, puede establecerse como la sumatoria de las diferencias de la fase

$$\phi(x) = \phi(x-1) + \Delta\phi(x)$$

donde

$$\phi(x=0) = \phi_e(x=0) \quad . \quad (3.5)$$

El símbolo  $\Delta\phi(x,y)$  representa a las diferencias de la fase

$$\Delta\phi(x) = \arctan \left\{ \frac{\sin[\phi_e(x) - \phi_e(x-1)]}{\cos[\phi_e(x) - \phi_e(x-1)]} \right\}$$

donde,

$$\Delta\phi(x=0) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

En interferogramas sobremuestreados los valores de  $\Delta\phi(x,y)$  estarán comprendidos en el rango de  $[\pi, -\pi]$ . Bajo esta situación el algoritmo indicado por las ecuaciones (3.5) funcionará correctamente. Sin embargo, para interferogramas con menos de dos muestreos por franja las diferencias de la fase  $\Delta\phi(x,y)$  excederán el rango de  $[\pi, -\pi]$ . Es decir, que para patrones de franjas submuestreados las diferencias de la fase estarán envueltas. Esta

situación se muestra en la figura 3.1 para interferogramas de baja densidad de franjas y en la figura 3.2 para interferogramas submuestreados.

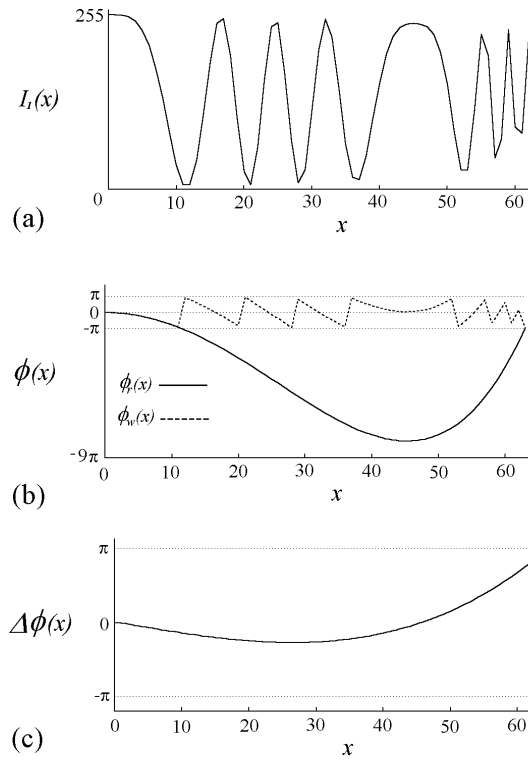


Figura 3.1 Demostración del algoritmo de desenvolviendo de fase. Patrón de franjas de baja densidad de franjas (a), fase reconstruida y fase envuelta (b) y diferencias de la fase (c).

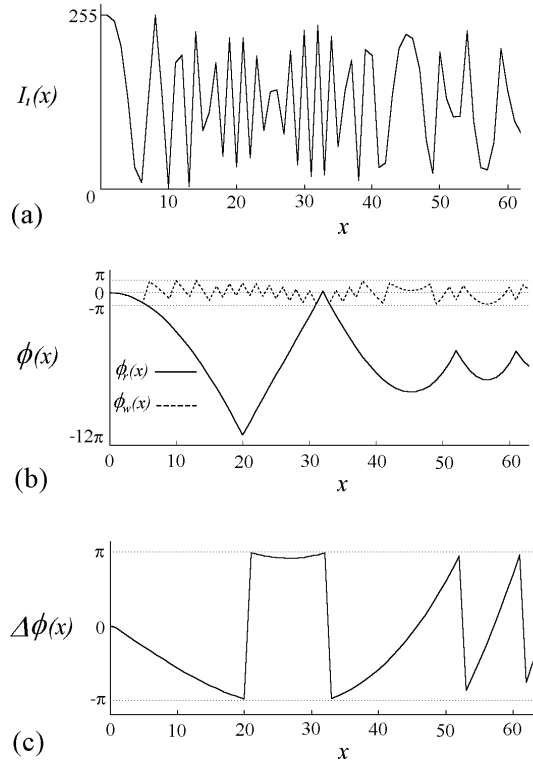


Figura 3.2 Demostración de la falla del algoritmo de desenvolvimiento en interferogramas submuestreados. Patrón de franjas de alta densidad de franjas (a), a la derecha del interferograma existen menos de dos muestreos por periodo de la franja. Fase envuelta y fase recuperada con el algoritmo convencional de desenvolvimiento (b). Diferencias de la fase envueltas (c). Puede observarse que el algoritmo de desenvolvimiento falla exactamente a partir de que las diferencias de la fase exceden  $\pm\pi$ .

Como puede observarse en la Figura 3.2, el algoritmo de desenvolvimiento deja de funcionar correctamente cuando aparece submuestreo en los patrones de franjas que están siendo analizados. Esto se debe a que las diferencias de la fase sobrepasa  $\pi$  en magnitud. Para corregir esta situación las diferencias de la fase deben, a su vez, ser desenvueltas. Esto quiere decir que el algoritmo de desenvolvimiento debe aplicarse primero a las

diferencias envueltas de la fase. Una vez que las diferencias de la fase han sido desenvueltas el algoritmo de reconstrucción puede aplicarse según la ecuación (3.5). La figura 3.3 muestra la anterior situación.

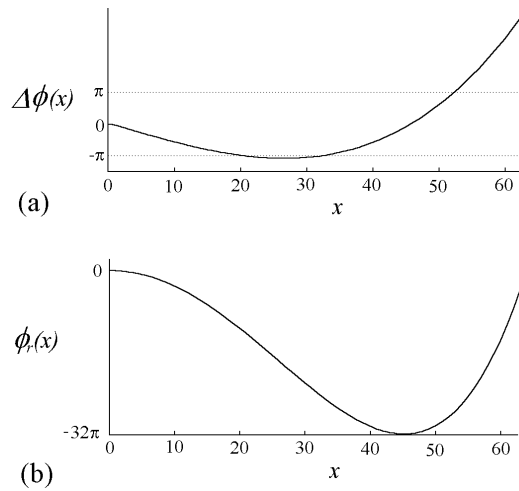


Figura 3.3 Reconstrucción de la fase usando las diferencias desenvueltas de la fase. Diferencias envueltas de la fase (a). Se puede observar que las diferencias de la fase exceden  $\pm\pi$  (b).

### 3.3 Desenvolvimiento de fase en dos dimensiones

En la sección anterior se demostró un método de desenvolvimiento para interferogramas submuestreados, sin embargo, el algoritmo descrito fue formulado en una sola dimensión. En la presente sección se establece el método para dos dimensiones siguiendo el formalismo de la solución de mínimos cuadrados al problema de desenvolvimiento de la fase. Con tal fin, definimos una función  $\psi(x,y)$ .

$$\psi(x,y) = \sum_{x \in M} \sum_{y \in M} \left[ \phi(x,y) - \phi(x,y-1) - \Delta\phi_y(x,y) \right]^2 + \left[ \phi(x,y) - \phi(x-1,y) - \Delta\phi_x(x,y) \right]^2. \quad (3.7)$$

En la ecuación anterior,  $M(x,y)$  representa una función de pupila que vale  $1$  donde hay datos válidos y  $0$  de otra manera. Los símbolos  $\Delta\phi_x(x,y)$  y  $\Delta\phi_y(x,y)$  representan las diferencias de la fase en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.

$$\Delta\phi_x(x,y) = \arctan \left[ \frac{I_{sx}(x,y)}{I_{cx}(x,y)} \right] M(x,y)M(x-1,y)$$

$$\Delta\phi_y(x,y) = \arctan \left[ \frac{I_{sy}(x,y)}{I_{cy}(x,y)} \right] M(x,y)M(x,y-1) \quad (3.8)$$

Las funciones  $I_{sx}(x,y)$ ,  $I_{cx}(x,y)$ ,  $I_{sy}(x,y)$  y  $I_{cy}(x,y)$  se refieren a los interferogramas sintéticos de las diferencias de la fase en direcciones ortogonales (Páez [1998], Muñoz[2002]).

$$\begin{aligned}
I_{cx}(x, y) &= \cos[\phi_e(x, y) - \phi_e(x-1, y)] \\
I_{sx}(x, y) &= \sin[\phi_e(x, y) - \phi_e(x-1, y)] \\
I_{cy}(x, y) &= \cos[\phi_e(x, y) - \phi_e(x, y-1)] \\
I_{sy}(x, y) &= \sin[\phi_e(x, y) - \phi_e(x, y-1)] \quad . \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Diferenciando  $\psi(x,y)$  respecto a  $\phi(x,y)$  e igualando el resultado a 0, obtenemos la ecuación normal de la solución por mínimos cuadrados

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x+1, y) + \phi(x-1, y) + \phi(x, y+1) + \phi(x, y-1) - L(x, y)}{4} \quad . \quad (3.10)$$

En esta ecuación  $L(x,y)$  es el Laplaciano, lo cual significa que resolver la ecuación (3.10) es equivalente a obtener la solución de la ecuación de Poisson en su forma discreta (Ghiglia [1996]).

$$L(x, y) = \Delta\phi_x(x+1, y) - \Delta\phi_x(x, y) + \Delta\phi_y(x, y+1) - \Delta\phi_y(x, y) \quad . \quad (3.11)$$

La ecuación (3.10) representa un sistema de ecuaciones lineales. La solución de este sistema puede obtenerse en varias formas, incluyendo métodos en el dominio de Fourier, métodos iterativos y usando la transformada discreta del coseno.

El algoritmo de mínimos cuadrados es uno de los métodos más robustos para recuperar la fase. Sin embargo, en su forma original generará un resultado incorrecto al ser aplicado a

la fase envuelta obtenida con interferogramas submuestreados. Esto es debido a que en tal tipo de interferogramas las diferencias de la fase  $\Delta\phi_x(x,y)$  y  $\Delta\phi_y(x,y)$ , como se estableció en la sección anterior, estarán envueltas. En esta situación el Laplaciano de la fase, tal como aparece en la ecuación (3.11) entregará resultados equivocados. La solución es, nuevamente, desenvolver las diferencias de la fase antes de calcular el Laplaciano. Para diferenciar claramente este proceso denotamos a las diferencias de la fase desenvueltas con los símbolos  $\Delta\varphi_x(x,y)$  y  $\Delta\varphi_y(x,y)$ , en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Una vez desenvueltas las diferencias de la fase podemos calcular correctamente el Laplaciano. De esta manera el algoritmo de mínimos cuadrados podrá desenvolver la fase codificada en interferogramas submuestreados. La figura 3.4 muestra el diagrama de flujo del método de desenvolvimiento propuesto.



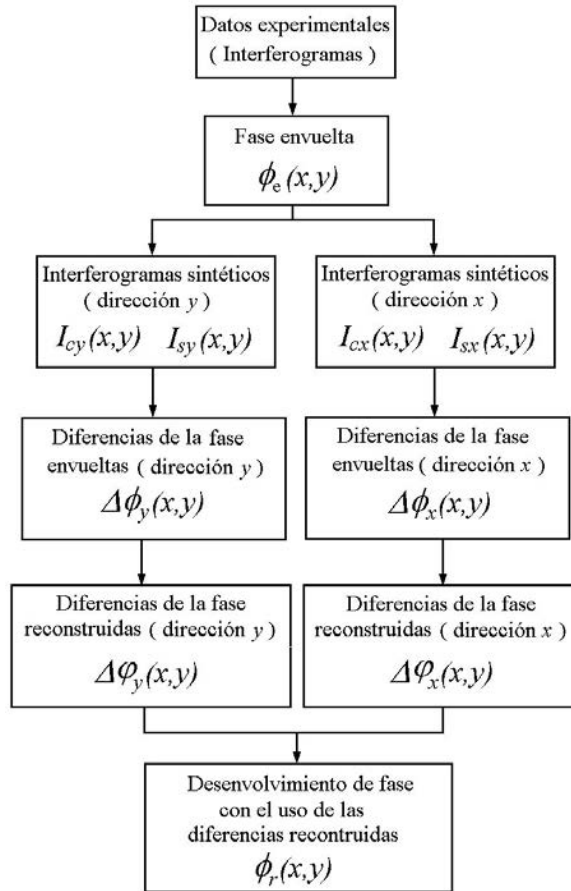


Figura 3.4 Diagrama de flujo del método propuesto para desenvolver la fase de interferogramas submuestreados obtenidos con técnicas de interferometría de corrimiento de fase.

La figura 3.5 muestra la simulación de un conjunto de 4 interferogramas con desplazamiento en la fase de  $\pi/2$ . La fase de los interferogramas,  $\phi(x,y)$ , contiene aberraciones de esfericidad y astigmatismo de tercer orden de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\phi(x,y) = 13(1 - 6x^2 - 6y^2 + 6x^4 + 6y^4 + 12x^2y^2) - 6(2y + 3y^3 + 3x^2y) \quad . \quad (3.12)$$

Por simplicidad, asumimos que la iluminación de fondo,  $I_f(x,y)$ , es constante, mientras que la intensidad de modulación es una función Gaussiana,  $I_m(x,y)=127\exp[-0.2(x^2+y^2)]$ . El tamaño en pixeles de los interferogramas es de  $128 \times 128$ , el radio de cada interferograma es de  $1$ . Los interferogramas muestran una pupilar anular que correspondería a la prueba de un espejo primario de un telescopio.

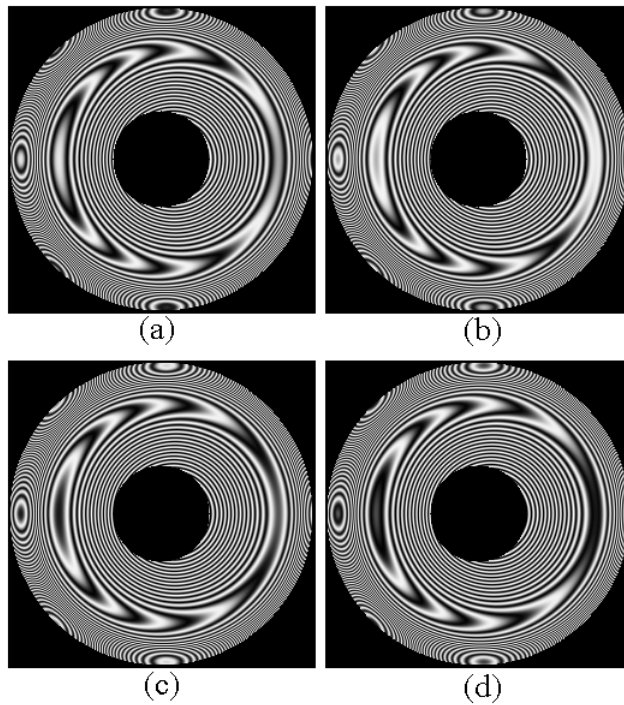


Figura 3.5 Simulación de 4 interferogramas desplazados en fase. Interferogramas correspondiente a un desplazamiento de fase de  $0$  (a),  $\pi/2$  (b),  $\pi$  (c) y  $3\pi/2$  (d). Puede observarse los patrones de Moiré en el borde exterior de los interferogramas, lo cual, indica submuestreo.

La fase envuelta del conjunto de interferogramas se muestra en la figura 3.6. Los interferogramas sintéticos de las diferencias de la fase se observan en las figuras 3.7(a) y

(b) en la dirección  $y$ , y 3.8(a) y (b) en la dirección  $x$ . Las diferencias de la fase envueltas,  $\Delta\phi_y(x,y)$  y  $\Delta\phi_x(x,y)$ , son mostradas en las figuras 3.7(c) y 3.8(c). La reconstrucción de las diferencias de la fase,  $\Delta\phi_y(x,y)$  y  $\Delta\phi_x(x,y)$ , se aprecian en las figuras 3.7(d) y 3.8(d). Tal reconstrucción fue realizada con el método de mínimos cuadrados, con lo cual se introduce un término de pistón arbitrario. Este término debe ser calculado y restado de tal forma que los valores de  $\Delta\phi_y(x,y)$  y  $\Delta\phi_x(x,y)$  coincidan con los de  $\Delta\phi_y(x,y)$  y  $\Delta\phi_x(x,y)$  en las regiones de baja densidad de franjas de los interferogramas. Finalmente, la reconstrucción de la fase, figura 3.9, se lleva a cabo resolviendo el sistema lineal de ecuaciones indicado por la ecuación (3.10). En donde, para el cálculo del Laplaciano se hace uso de las diferencias de la fase desenvueltas.

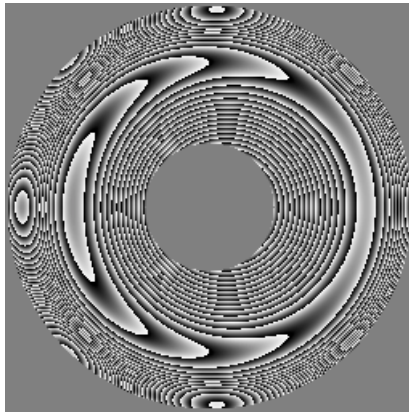


Figura 3.6 Fase envuelta obtenida a partir de los 4 interferogramas mostrados en la figura 3.5.

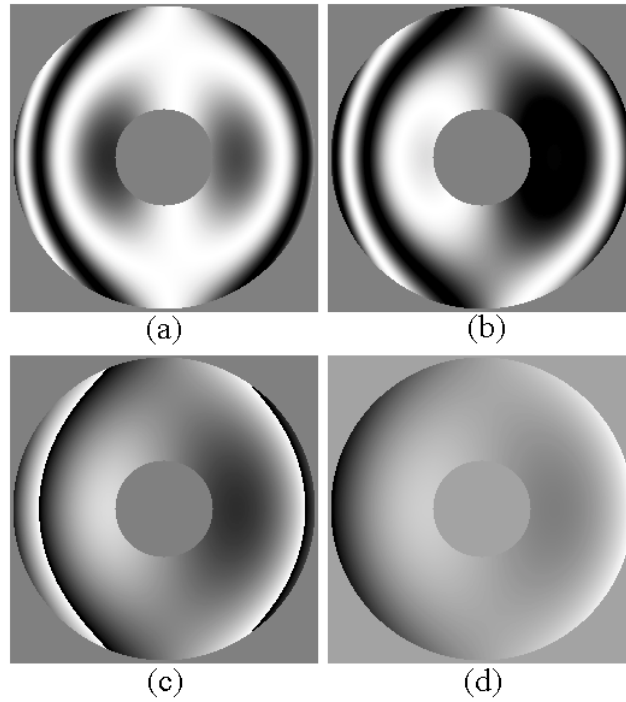


Figura 3.7 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase en la dirección  $y$ . Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y seno (b) de las diferencias de la fase. Diferencias de la fase envueltas,  $\Delta\phi_y(x,y)$ , y reconstruidas,  $\Delta\phi_y(x,y)$ , con el método de mínimos cuadrados.

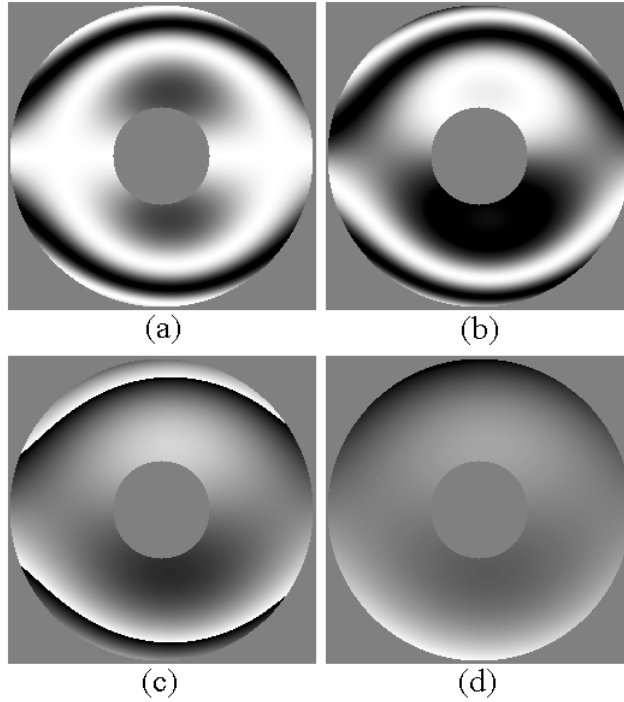


Figura 3.8 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase en la dirección  $x$ . Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y seno (b) de las diferencias de la fase. Diferencias de la fase envueltas,  $\Delta\phi_x(x,y)$ , y reconstruidas,  $\Delta\phi_x(x,y)$ , con el método de mínimos cuadrados.

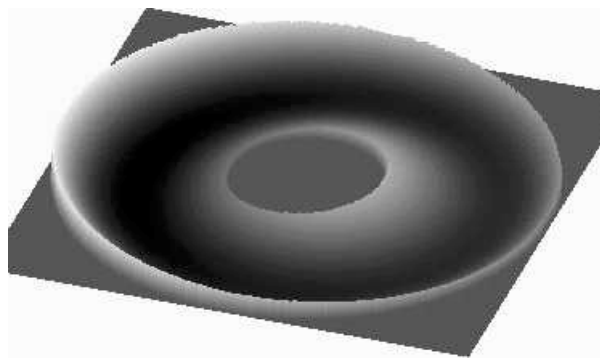


Figura 3.9 Fase reconstruida con el método de mínimos cuadrados usando las diferencias de la fase desenvueltas,  $\Delta\phi_x(x,y)$  y  $\Delta\phi_y(x,y)$ .

Una de las desventajas de los métodos existentes de desenvolvimiento de fase de interferogramas submuestreados es su susceptibilidad al ruido. En interferogramas de baja frecuencia espacial el ruido puede reducirse aplicando técnicas de filtrado pasa bajos. Al aplicar estas técnicas a interferogramas de alta densidad de franjas la información de la fase puede verse afectada. Con nuestro método, las técnicas de filtrado pasa bajos pueden aplicarse a los interferogramas sintéticos para reducir ruido. La figura 3.10 muestra un interferograma en cual se la ha agregado ruido aleatorio uniformemente distribuido. El término de ruido varía de  $[\lambda/6, -\lambda/6]$ . La fase del interferograma es la misma que en el ejemplo anterior a excepción del ruido y de la función de pupila. La fase envuelta obtenida del conjunto de interferogramas con ruido puede observarse en la figura 3.11.

En la figura 3.12 se puede observar el proceso de filtrado de los interferogramas sintéticos en la dirección  $y$ . Las figuras 3.12(a) y (b) muestran a los interferogramas sintéticos sin filtrar, mientras, los mismos interferogramas ya filtrados pueden observarse en las figuras 3.12(c) y (d). Para filtrar los interferogramas, se aplico 4 veces un filtro promediador con un tamaño de ventana de  $3 \times 3$  pixeles. De la misma forma, las figuras 3.13 muestran el filtrado de los interferogramas sintéticos en la dirección  $x$ . Las diferencias de la fase, envueltas y desenvueltas, pueden observarse en la figura 3.14. Finalmente la integración de la fase usando las diferencias de la fase desenvuelta puede observarse en la figura 3.15. La figura 3.16 muestra la reconstrucción con el método originalmente propuesto por Greivenkamp. Se puede apreciar los errores propagados debido a la característica de la dependencia en la trayectoria de este método. El error (figura 3.17) máximo y mínimo en la reconstrucción con el método propuesto es de  $0.065$  y  $-0.065$  rad., respectivamente.

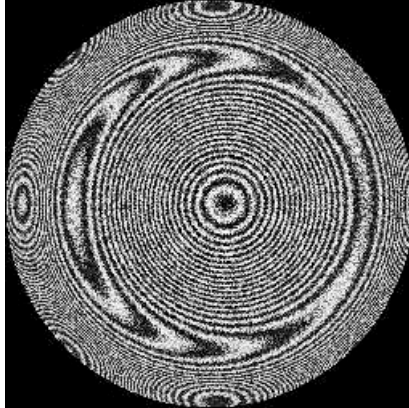


Figura 3.10 Interferograma correspondiente al coseno de la fase, uno de un conjunto de 4. El interferograma se ha calculado agregándole ruido aleatorio uniformemente distribuido para demostrar el proceso de reconstrucción de la fase en condiciones experimentales difíciles.

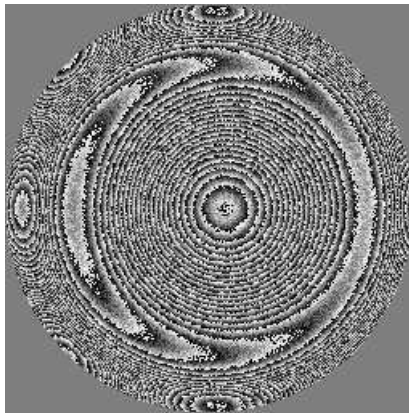


Figura 3.11 Fase envuelta obtenida de un conjunto de 4 interferogramas a los cuales se les ha agregado ruido.

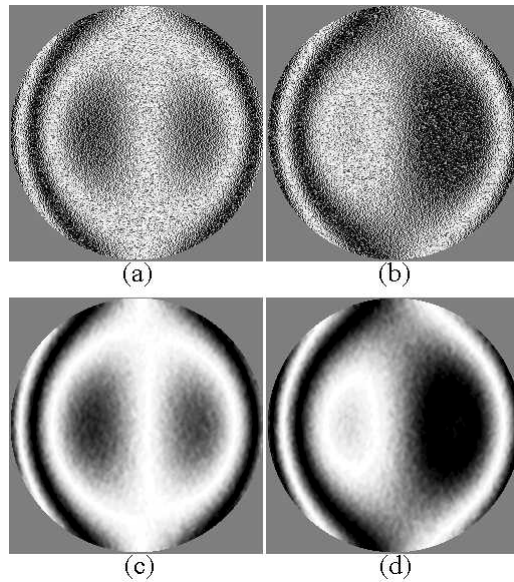


Figura 3.12 Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y al seno (b) de las diferencias de la fase en la dirección  $y$ . Interferogramas sintéticos filtrados, coseno (c) y seno (d), con un filtro promediador aplicado 4 veces con un tamaño de ventana de  $3 \times 3$  píxeles.

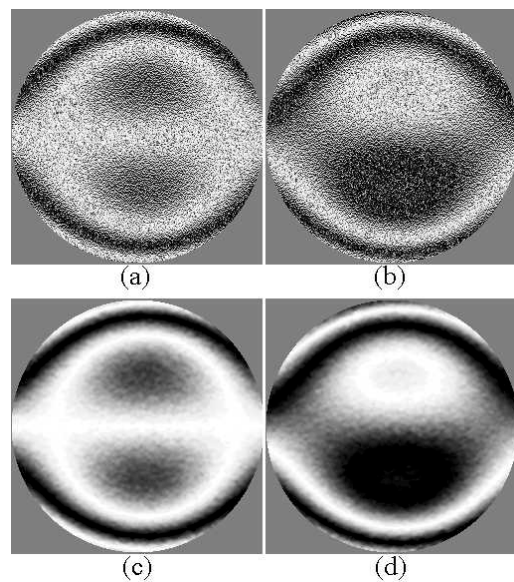


Figura 3.13 Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno (a) y al seno (b) de las diferencias de la fase en la dirección  $x$ . Interferogramas sintéticos filtrados, coseno (c) y seno (d), con un filtro promediador aplicado 4 veces con un tamaño de ventana de  $3 \times 3$  píxeles.



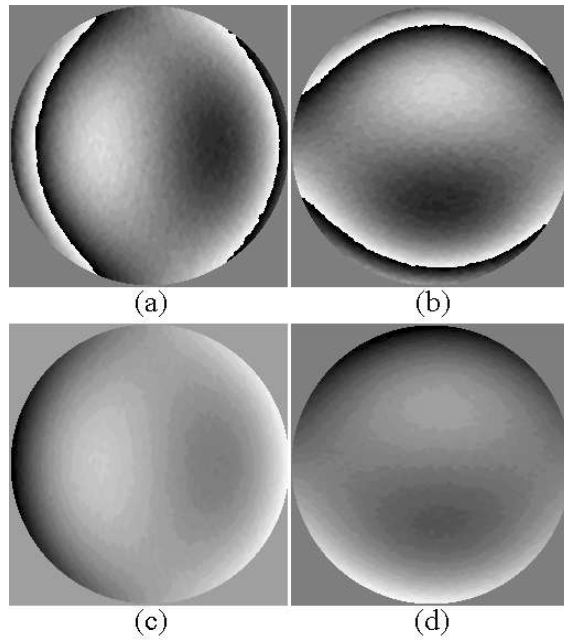


Figura 3.14 Diferencias de la fase envueltas en la dirección  $y$  (a) y en la dirección  $x$  (b).  
Diferencias de la fase desenvueltas (c) y (d).

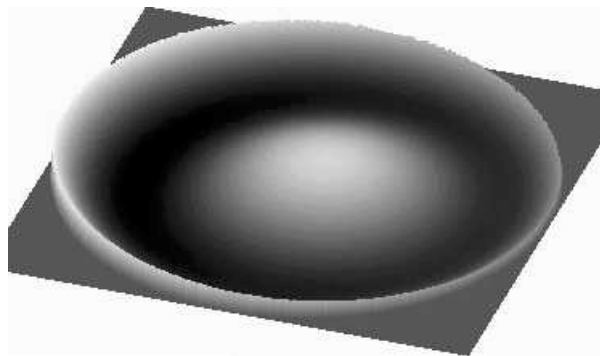


Figura 3.15 Reconstrucción de la fase a partir de interferogramas con altos niveles de ruido. La fase aparece idéntica a aquella obtenida utilizando interferogramas sin ruido.

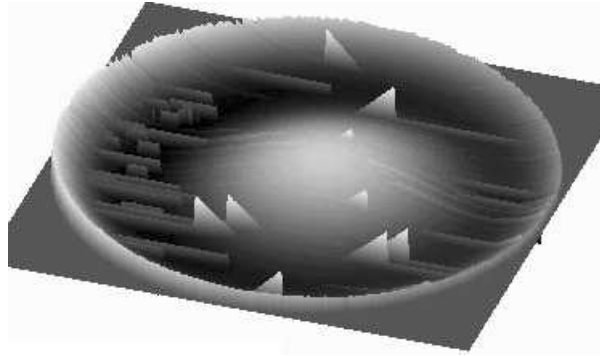


Figura 3.16 Fase desenvuelta obtenida usando el método de desenvolvimiento propuesto por Greivenkamp. Debido a la característica de dependencia de la trayectoria, la reconstrucción muestra la propagación de errores debido a la susceptibilidad del método al ruido.

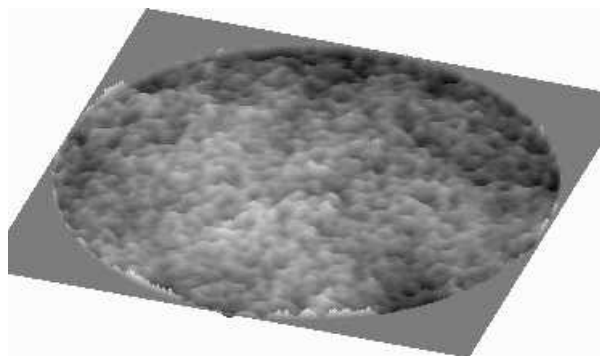


Figura 3.17 Error en la reconstrucción de la fase a partir de interferogramas con ruido.

### 3.4 Conclusiones

En este capítulo se demostró un procedimiento de recuperación del frente onda de interferogramas submuestreados. Con el método propuesto, calculamos las diferencias de la fase en dos direcciones ortogonales. Bajo condiciones de submuestreo las diferencias están envueltas y es necesario reconstruirlas con algún algoritmo de desenvolvimiento de fase. Como ultimo paso, la fase es recuperada integrando las diferencias desenvueltas de la fase. Empleando el método de mínimos cuadrados el algoritmo desarrollado es independiente de la trayectoria. De esta forma es posible reconstruir la fase de interferogramas de alta densidad de franjas con funciones de pupila irregulares o regiones con ausencia de datos sin la intervención del usuario. El procedimiento desarrollado es análogo al que se sigue con las técnicas de la interferometría de desplazamiento lateral (Murty [1970], Páez [2000], García-Torales [2001]). La diferencia consiste en que en nuestro método las diferencias de la fase se calculan numéricamente.

El método puede implementarse usando técnicas de filtrado durante el proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase. Con este procedimiento se logra una significativa mejora en la tolerancia al ruido respecto a anteriores algoritmos para desenvolver la fase de interferogramas submuestreados. Encontramos que el procedimiento propuesto puede tolerar niveles de ruido en el rango de  $\lambda/4$ . Esto permite la reconstrucción del frente de onda de interferogramas con alta densidad de franjas bajo condiciones experimentales difíciles.

### 3.5 Referencias del capítulo 3

Bell B. W., Koliopoulos C. L., "Moiré topography, sampling theory, and charged-coupled devices," *Opt. Lett.* **9**, 171-173 (1994).

Bruning J. H., Herriot D. R., Gallagher J. E., Rosenfeld D. P., White A. D., and Brangaccio D. J., "Digital wavefront measuring interferometer for testing surfaces and lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693-2703 (1974).

Kreis T., "Digital holographic interference-phase measurements using Fourier transform method," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 847-855 (1986).

Robinson D. W., "Phase unwrapping methods," in *Interferogram Analysis*, Eds. Robinson D. W., G. T. Reid, Institute of Physics Publishing, 1993), Chap. VI.

Fried D. L., "Least-squares fitting of a wave front distortion estimate to an array of phase-differences measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370-375 (1977).

García-Torales G., Paez G., Strojnik M., "Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer," *Opt. Eng.* **40**, 767-773 (2001).

Ghiglia D. C., Romero L. A., "Minimum Lp-norm two-dimensional phase unwrapping," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1999-2013 (1996).

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist interferometry," *Appl. Opt.* **26**, 5245-5257 (1987).

Hunt B. R., "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences," *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 393-399 (1979).

Hudgin R. H., "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 375-378 (1977).

Itoh K., "Analysis of the phase unwrapping algorithm," *Appl. Opt.* **21**, 2470 (1982).

Lyuboshenko I., Matre H., "Phase unwrapping for interferometric synthetic aperture radar by use of Helmholtz equation eigenfunctions and the first Greens identity," *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 378-395 (1999).

Marroquin J. L., Rivera M., "Quadratic regularization functionals for phase unwrapping," *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2393-2400 (1995).

Muñoz J., Páez G., Strojnik M., "Phase unwrapping of subsampled phase-shifted interferograms," *SPIE*. **4777**, 288-299 (2002).

Murty M. V. R. K., "A compact lateral shearing interferometer based on the Michelson interferometer," *Appl. Opt.* **9**, 1146-1152 (1970).

Noll R. J., "Phase estimates from slope-type wave-front sensors," *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 139-140 (1978).

Páez G., Strojnik M., "Convergent, recursive phase reconstruction from noisy, modulated intensity patterns using synthetic interferograms," *Opt. Lett.* **23**(6), 406-408 (1998).

Páez G., Strojnik M., Garcia-Torales G., "Vectorial shearing interferometer," *Appl. Opt.* **39**, 5172-5178 (2000).

Servin M., Malacara D., and Cuevas F.J., "Path-independent phase unwrapping of subsampled phase maps," *Appl. Opt.* **35**, 1643-1649 (1996).

Takeda M., Ina H., Kobayashi S., "Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156 (1982).

Womack K. H., "Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection," *Opt. Eng.* **23**, 391-395 (1984).

## Capítulo 4

# Recuperación de la fase a partir de un solo interferograma submuestreado

### 4.1 Introducción

En el capítulo anterior describimos un algoritmo de recuperación de la fase, en condiciones de submuestreo, a partir de un conjunto de interferogramas desplazados en fase. En el presente capítulo se desarrolla un procedimiento para reconstruir el frente de onda usando un solo interferograma submuestreado. Con este fin, al igual que en el capítulo 3, se calculan las diferencias de la fase como un paso previo para reconstruir el frente de onda. La información del coseno de las diferencias de la fase se obtiene usando pixeles adyacentes del interferograma submuestreado. Lo cual supone que las intensidades de modulación, de fondo y la fase son funciones suaves y continuas.

La recuperación de la fase usando un solo interferograma presenta algunas ventajas respecto a las técnicas de corrimiento de fase, en especial ante condiciones experimentales presentan como vibraciones (Malacara [1998]). Entre los métodos más conocidos para reconstruir el frente de onda de un interferograma se encuentran aquellos basados en el análisis de Fourier (Takeda [1982]) y corrimiento de fase espacial (Kujawinska [1991], Pirga [1995]). Ambas técnicas normalmente requieren de la introducción de una portadora lineal. Esto se logra inclinando la superficie de referencia en el arreglo interferométrico

que es utilizado. La introducción de la función portadora, aunque, facilita el análisis del interferograma incrementa la densidad de franjas reduciendo el rango dinámico del frente de onda que puede medirse. Adicionalmente, estas técnicas requieren de que el patrón de franjas no esté submuestreado.

En la caracterización de componentes esféricas frecuentemente se utilizan compensadores nulos (Sasian [1988]), técnicas de interferometría de desplazamiento (Murty [1970], Páez [2000], Garcia-Torales [2001]) o pruebas geométricas (Malacara [1972], Katsuyuki [1988]). La utilización de las técnicas mencionadas representa un compromiso entre la complejidad del arreglo experimental usado, la exactitud en las mediciones y la complejidad en el análisis de los datos. Por otro lado la reconstrucción del frente de onda de interferogramas de alta densidad de franjas permite la caracterización de superficies esféricas o con grandes aberraciones. En el análisis de interferogramas submuestreados la información a priori es fundamental. La utilización de tal información permite el desenvolvimiento de la fase envuelta calculada usando interferogramas desplazados en fase (Greivenkamp [1987]). Adicionalmente, si se conoce por adelantado la forma aproximada del frente de onda, es posible recuperar la fase de un solo interferograma (Servin [1997]).



## 4.2 Diferencias de la fase a partir de un solo interferograma submuestreado

Consideremos la expresión de un interferograma con función portadora

$$I(x, y) = I_f(x, y) + I_m(x, y) \cos[\phi(x, y) + \psi(x, y)] \quad . \quad (4.1)$$

De igual forma en que en los capítulos anteriores  $I_m(x, y)$ ,  $I_f(x, y)$  y  $\phi(x, y)$  son las intensidades de modulación, de fondo y la fase que se desea recuperar, respectivamente.

La función  $\psi(x, y)$  representa a la función portadora, la cual puede ser lineal o circular. El planteamiento para recuperar la fase,  $\phi(x, y)$ , asume que tanto esta como las intensidades de modulación y de fondo son funciones suaves y continuas. Dada la condición anterior, podemos aproximar las siguientes relaciones para las diferencias de la fase,  $\Delta\phi_x(x, y)$  y  $\Delta\phi_y(x, y)$ , entre pixeles adyacentes en una ventana de 3x3:

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(x, y) &\approx \phi(x+1, y) - \phi(x, y) \approx \phi(x, y) - \phi(x-1, y) \\ \Delta\phi^y(x, y) &\approx \phi(x, y+1) - \phi(x, y) \approx \phi(x, y) - \phi(x, y-1) \\ \Delta\phi^x(x, y) + \Delta\phi^y(x, y) &\approx \phi(x+1, y+1) - \phi(x, y) \approx \phi(x, y) - \phi(x-1, y-1) \\ \Delta\phi^x(x, y) - \Delta\phi^y(x, y) &\approx \phi(x+1, y-1) - \phi(x, y) \approx \phi(x, y) - \phi(x-1, y+1) \quad . \end{aligned} \quad (4.2)$$

En las relaciones anteriores, básicamente, se asume que la fase varía linealmente. Con los métodos tradicionales de la interferometría de corrimiento espacial, esta misma condición

se satisface introduciendo una función portadora lineal. Sin embargo, esto reduce el número de píxeles disponibles por franja y, por consiguiente, la cantidad de aberraciones que pueden ser medidas.

De acuerdo con las relaciones anteriores, las intensidades muestreadas de dos píxeles desplazados en la dirección  $y$ , respecto a un píxel fijo, pueden escribirse como:

$$I(x, y-1) \cong I_f(x, y) + I_m(x, y) \{ \cos[\phi(x, y)] \cos[\Delta\phi_y(x, y)] + \sin[\phi(x, y)] \sin[\Delta\phi_y(x, y)] \}$$

$$I(x, y+1) \cong I_f(x, y) + I_m(x, y) \{ \cos[\phi(x, y)] \cos[\Delta\phi_y(x, y)] - \sin[\phi(x, y)] \sin[\Delta\phi_y(x, y)] \}.$$
(4.3)

Extendiendo las relaciones 4.2 a una ventana de 5x5 píxeles y asumiendo que las intensidades de fondo e iluminación permanecen casi constantes, se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$A1_{i,j} = I_{i-2,j-2} - I_{i+2,j+2} + I_{i+2,j-2} - I_{i-2,j+2} \approx 4 I_{m,i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^y) \cos(2\Delta\phi_{i,j}^x)$$

$$A2_{i,j} = I_{i-2,j-1} - I_{i+2,j+1} + I_{i+2,j-1} - I_{i-2,j+1} \approx 4 I_{m,i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(\Delta\phi_{i,j}^y) \cos(2\Delta\phi_{i,j}^x)$$

$$A3_{i,j} = I_{i-1,j-2} - I_{i+1,j+2} + I_{i+1,j-2} - I_{i-1,j+2} \approx 4 I_{m,i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^y) \cos(\Delta\phi_{i,j}^x)$$

$$A4_{i,j} = I_{i-1,j-1} - I_{i+1,j+1} + I_{i+1,j-1} - I_{i-1,j+1} \approx 4 I_{m,i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(\Delta\phi_{i,j}^y) \cos(\Delta\phi_{i,j}^x)$$

$$A5_{i,j} = I_{i,j-2} - I_{i,j+2} \approx 2 I_{m,i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^y)$$

$$\begin{aligned}
A6_{i,j} &= I_{i,j-1} - I_{i,j+1} \approx 2 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(\Delta\phi_{i,j}^y) \\
B1_{i,j} &= I_{i-2,j-2} - I_{i+2,j+2} - I_{i+2,j-2} + I_{i-2,j+2} \approx 4 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \cos(2\Delta\phi_{i,j}^y) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^x) \\
B2_{i,j} &= I_{i-2,j-1} - I_{i+2,j+1} - I_{i+2,j-1} + I_{i-2,j+1} \approx 4 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \cos(\Delta\phi_{i,j}^y) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^x) \\
B3_{i,j} &= I_{i-1,j-2} - I_{i+2,j+1} - I_{i+1,j-2} + I_{i-1,j+2} \approx 4 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \cos(2\Delta\phi_{i,j}^y) \sin(\Delta\phi_{i,j}^x) \\
B4_{i,j} &= I_{i-1,j-1} - I_{i+1,j+1} - I_{i+1,j-1} + I_{i-1,j+1} \approx 4 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \cos(\Delta\phi_{i,j}^y) \sin(\Delta\phi_{i,j}^x) \\
B5_{i,j} &= I_{i-2,j} - I_{i+2,j} \approx 2 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(2\Delta\phi_{i,j}^x) \\
B6_{i,j} &= I_{i-1,j} - I_{i+1,j} \approx 2 I m_{i,j} \sin(\phi_{i,j}) \sin(\Delta\phi_{i,j}^x)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por conveniencia, se ha cambiado la notación, utilizando subíndices,  $(i,j)$  para denotar la posición de los píxeles. De igual manera, la dirección en que se toman las diferencias de la fase se indican por medio de superíndices,  $\Delta\phi_{i,j}^x$  y  $\Delta\phi_{i,j}^y$ . Utilizando las anteriores formulas, es posible resolver para los interferogramas sintéticos correspondientes al coseno de las diferencias de la fase en direcciones ortogonales (Pez [1998], Muñoz [2002]).

$$\begin{aligned}
\cos[\Delta\phi_{i,j}^y] &\approx \frac{A1_{i,j}}{2A2_{i,j}} \approx \frac{A3_{i,j}}{2A4_{i,j}} \approx \frac{A5_{i,j}}{2A6_{i,j}} \approx \frac{B4_{i,j}}{2B6_{i,j}} \approx \frac{B2_{i,j}}{2B5_{i,j}} \\
\cos[\Delta\phi_{i,j}^x] &\approx \frac{B1_{i,j}}{2B2_{i,j}} \approx \frac{B3_{i,j}}{2B4_{i,j}} \approx \frac{B5_{i,j}}{2B6_{i,j}} \approx \frac{A4_{i,j}}{2A6_{i,j}} \approx \frac{A2_{i,j}}{2A5_{i,j}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

La fase de los interferogramas sintéticos puede extraerse usando técnicas que requieren de un solo interferograma. Una vez que esta información ha sido extraída, las diferencias de la fase en direcciones ortogonales se integran (Ghiglia [1996], Hunt [1979]) para recuperar la fase de interferograma submuestreado que es analizado.

### 4.3 Resultados en datos experimentales y simulados

En esta sección se presentan y discuten dos ejemplos de recuperación de la fase a partir de un solo interferograma submuestreado. En el primer ejemplo simulamos un interferograma de acuerdo con la siguiente expresión:

$$I_{i,j} = I_{i,j}^f + I_{i,j}^m \cos(\phi_{i,j}) \quad ,$$

donde

$$\phi_{i,j} = 2\pi \left[ 16(x_i^2 + y_j^2)^2 + 20(x_i^2 + y_j^2) - 14x_i y_j + 4y_j - 2x_i + 1 \right] \quad . \quad (4.6)$$

Los términos  $x_i$  y  $y_j$  varían de [-1, 1] en la dirección vertical y horizontal, respectivamente, a lo largo de la imagen. La intensidad de fondo  $I_{i,j}^f$  es una constante, mientras la intensidad de modulación es una función Gaussiana  $I_{i,j}^m = 127 \exp[-0.8(x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2)]$ . La figura 4.1 muestra al interferograma submuestreado simulado con las anteriores relaciones. La imagen es mostrada en 256 niveles de gris con un tamaño de 150x150 píxeles. En los

bordes del interferograma es notorio que el contraste de las franjas disminuye considerablemente respecto al centro de la imagen, lo cual simula que la intensidad se promedia debido al tamaño finito de los pixeles de la cámara CCD.

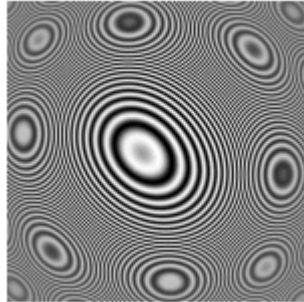


Figura 4.1. Interferograma submuestreado obtenido con la expresión (4.6). En los bordes del interferograma se aprecia una reducción en el contraste de las franjas.

En la practica los interferogramas sintéticos fueron generados calculando cada una de las aproximaciones que aparecen al lado derecho de la expresión (4.5). Estos resultados fueron troceados a  $\pm 1$  cuando sobrepasaron a  $1$  en magnitud. Finalmente, se tomo el promedio de los resultados ya troceados.

La figura 4.2 muestra a los interferogramas sintéticos calculados siguiendo el procedimiento anteriormente descrito. De igual manera en la figura aparecen los resultados ideales. Los interferogramas sintéticos muestran ruido, no obstante, puede notarse que son una muy buena aproximación. Las diferencias de la fase envueltas son mostradas en la figura 4.3. Al igual que en la figura 4.2 se muestran los resultados ideales.

Las diferencias de la fase envueltas fueron obtenidas con el método en el dominio de Fourier descrito por Takeda. Esto fue posible debido a la introducción de la aberración de desenfoque que aparece como el tercer término en la ecuación (4.6). La introducción de esta aberración corresponde con un término lineal en los interferogramas del coseno de las diferencias de la fase.

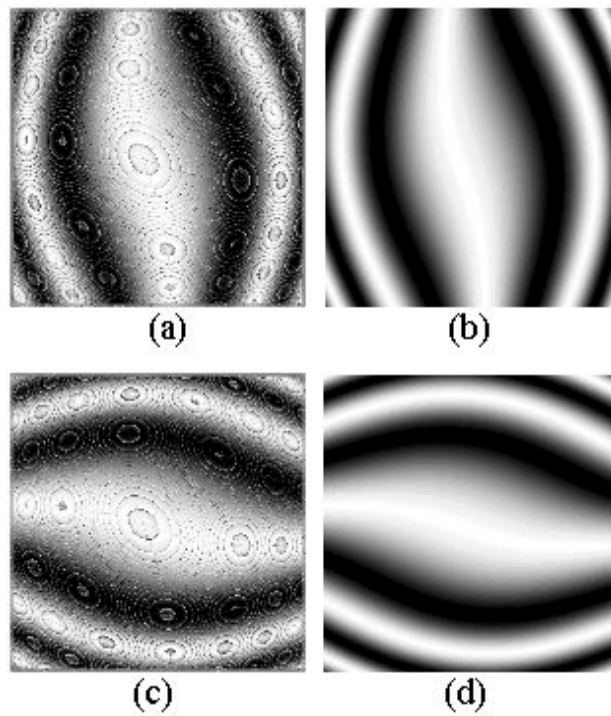


Figura 4.2. Interferogramas sintéticos correspondientes a las diferencias de la fase en las direcciones  $y$  (a) y  $x$  (c). Resultados ideales calculados usando el coseno de las diferencias de la fase en forma exacta.

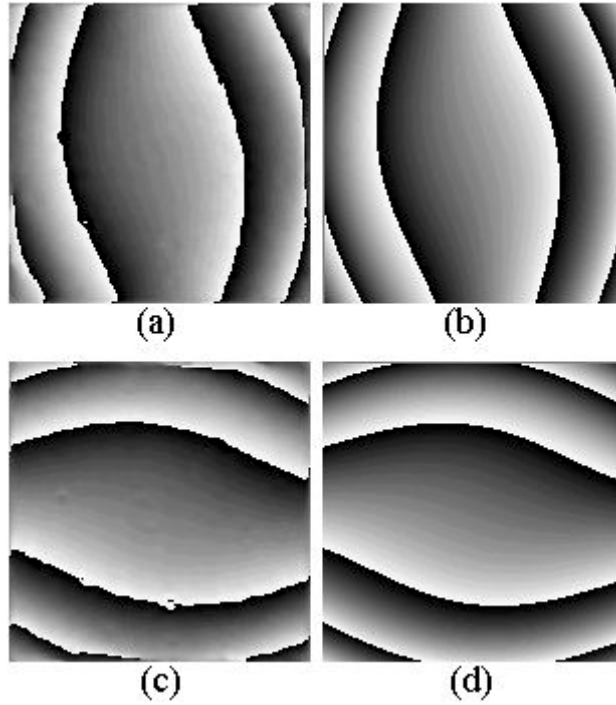


Figura 4.3 Comparación entre los interferogramas sintéticos obtenidos del interferograma submuestreado con los resultados ideales. Diferencias de la fase envueltas (a) y (c), respecto a las coordenadas  $y$  y  $x$ , respectivamente. Diferencias (envueltas) exactas de la fase (b) y (d) en las direcciones  $y$  y  $x$ , respectivamente.

El desenvolvimiento de las diferencias de la fase fue llevado a cabo con el método de mínimos cuadrados. Con este procedimiento se introduce un término arbitrario de pistón, el cual debe calcularse y extraerse del resultado. De otra forma se introduce un término lineal en el paso final de integración de las diferencias de la fase. El procedimiento para corregir el término de pistón en las diferencias de la fase es el siguiente:

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{i,j}^r - \arctan \left\{ \frac{\sin(\varphi_{i,j}^r - \varphi_{i,j}^e)}{\cos(\varphi_{i,j}^r - \varphi_{i,j}^e)} \right\} \quad (4.7)$$

En la anterior ecuación  $\varphi_{i,j}$  es la fase con el término de pistón corregido,  $\varphi_{i,j}^r$  es la fase con error de pistón y  $\varphi_{i,j}^e$  es la fase envuelta. El procedimiento final de recuperación del frente de onda se lleva a cabo con la integración de las diferencias de la fase desenvueltas. La recuperación de la fase del patrón de alta densidad de franjas (figura 4.1) se muestra en la figura 4.4. La integración de las diferencias de la fase se realizó con el algoritmo de mínimos cuadrados. El error en la reconstrucción, definido como  $\varepsilon = \phi - \phi^r$ , se observa en la figura 4.5. El error pico a valle es de 1.365% de la fase, mientras el error cuadrático medio corresponde a 1.628 rad rms. Los anteriores valores muestran la exactitud en la reconstrucción.

La figura 4.6(a) muestra un interferograma obtenido en la caracterización de una componente esférica. De este patrón de franjas se obtuvo una versión submuestreada tomando solamente cada cuarto píxel del interferograma original, figura 4.6(b). De esta forma se puso a prueba el método en datos obtenidos experimentales. Los interferogramas sintéticos generados del interferograma se muestran en la figura 4.7(a) y (b), en las direcciones  $y$  y  $x$ , respectivamente. En la misma figura se observa las diferencias de la fase recuperadas, figura 4.7(c) y (d), en las direcciones  $y$  y  $x$ . En este ejemplo la introducción de aberración de desenfoque en el arreglo experimental compensa la gran cantidad de aberración esférica presente en la componente medida. En esta situación no fue posible utilizar el método de la transformada de Fourier (Takeda [1982]) en la reconstrucción de la fase de los interferogramas sintéticos. En cambio se utilizó un método en el dominio de las coordenadas espaciales. La figura 4.8 muestra la fase



recuperada por medio de la integración de las diferencias de la fase con el método de mínimos cuadrados. Tanto el interferograma submuestreado como el obtenido tomando el coseno de la fase recuperada se observan en la figura 4.9(a) y (b), respectivamente. Se puede observar que ambos interferogramas son esencialmente idénticos, lo cual, demuestra en forma cualitativa una excelente reconstrucción.

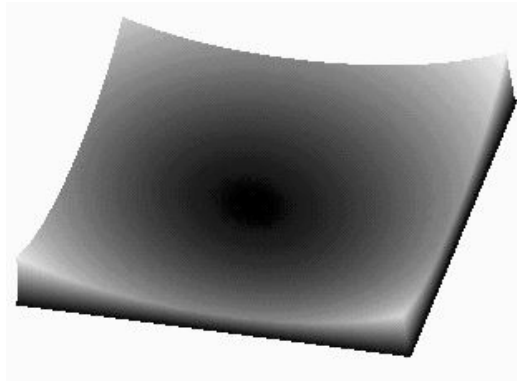


Figura 4.4 Fase recuperada del interferograma mostrado en la figura 4.1. La reconstrucción se llevó a cabo mediante la integración de las diferencias reconstruidas de la fase con el método de mínimos cuadrados.

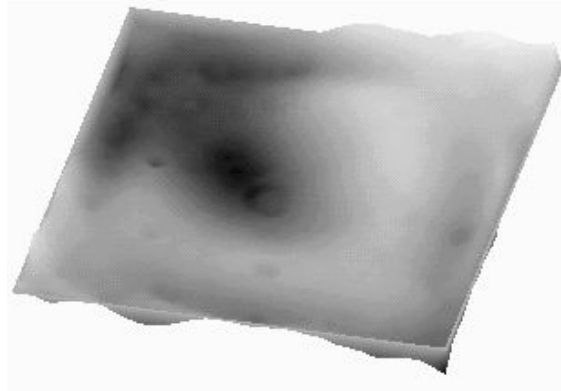


Figura 4.5 Error en la reconstrucción,  $\varepsilon = \phi - \phi'$ . Los valores del error pico a valle y cuadrático medio confirman la viabilidad del método en la recuperación de la fase de interferogramas submuestreados.

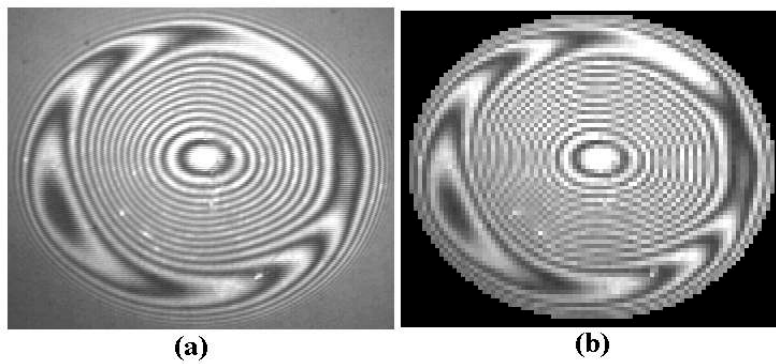


Figura 4.6 Interferograma obtenido con un interferómetro comercial tipo Fizeau (a). Interferograma submuestreado resultante de tomar solamente cada cuarto píxel del interferograma de la izquierda (b).

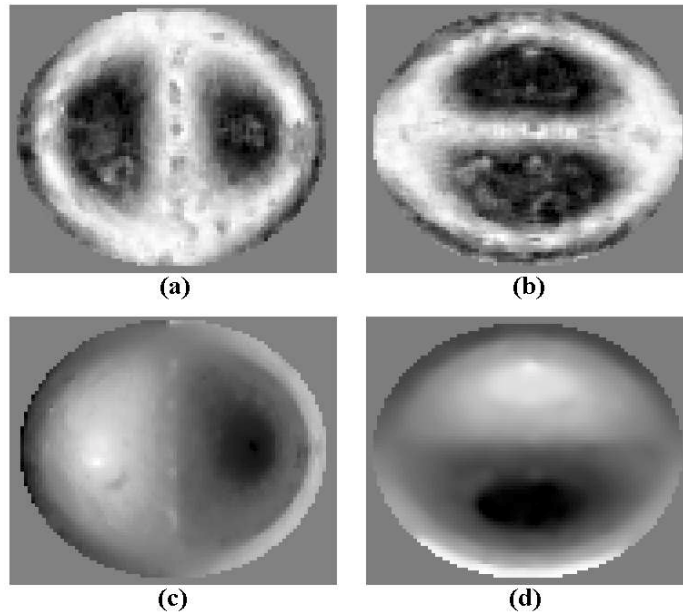


Figura 4.7 Proceso de reconstrucción de las diferencias de la fase. Interferogramas sintéticos correspondientes al coseno de las diferencias de la fase, en la dirección  $y$  (a) y en la dirección  $x$  (b). Diferencias de la fase reconstruidas, dirección  $y$  (c) y  $x$  (d).

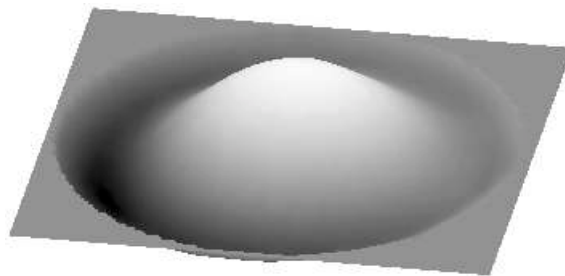


Figura 4.8 Reconstrucción de la fase integrando las diferencias de la fase recuperadas de los interferogramas sintéticos.

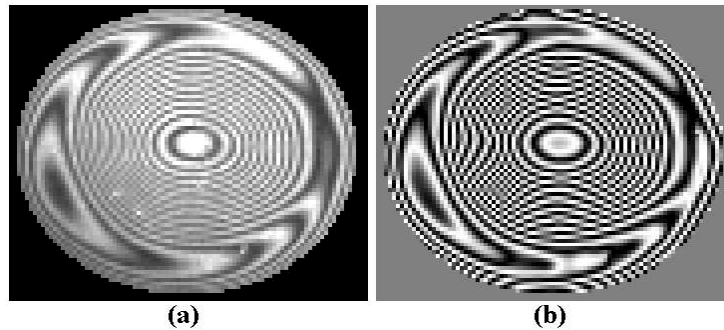


Figura 4.9 Comparación cualitativa de la reconstrucción del frente de onda. Interferograma submuestreado (a) y interferograma resultado de tomar el coseno de la fase recuperada (b).

#### 4.4 Conclusiones

En el presente capítulo se demostró un procedimiento para recuperar la fase a partir de un solo interferograma submuestreado. El método propuesto se basa en que tanto la fase que se desea recuperar y las intensidades de modulación y de fondo son funciones suaves y continuas. Los interferogramas sintéticos que corresponden a las diferencias de la fase en direcciones ortogonales se calculan a partir de pixeles adyacentes del interferograma submuestreado. La fase de los interferogramas sintéticos se recupera usando algoritmos que utilizan un solo interferograma de baja densidad de franjas. Las diferencias de la fase, recuperadas de los interferogramas sintéticos, se integran para recuperar el frente de onda.

La introducción de aberración de foco introduce un termino lineal en los interferogramas sintéticos y puede permitir su demodulación con el método en el dominio de Fourier desarrollado por Takeda. La cantidad de aberración de foco que debe introducirse

depende de la asféricidad o aberraciones de la componente que es medida y del tamaño y separación de los pixeles de la cámara CCD usada en la detección del interferograma. La utilización de una cámara CCD con pixeles pequeños y ampliamente separados permite la introducción de una mayor cantidad de aberración de foco, lo cual facilita la utilización del método de Takeda. Si el interferograma analizado no contiene aberración de foco, otras técnicas pueden utilizarse en la extracción de las diferencias de la fase de los interferogramas sintéticos.

El procedimiento descrito es análogo al seguido con la interferometría de desplazamiento. La diferencia radica en que las diferencias de la fase se recuperan usando un solo interferograma, mientras que con la interferometría de desplazamiento se debe utilizar una configuración particular para obtener el gradiente de la fase. Se presentaron dos ejemplos del método, el primero de ellos en datos simulados con introducción de aberración de foco. En este mismo ejemplo fue posible utilizar el análisis de Fourier en la recuperación de las diferencias de la fase. En el segundo ejemplo se utilizó un interferograma obtenido experimentalmente. Las diferencias de la fase se reconstruyeron utilizando un algoritmo que no requiere la introducción de una función portadora.

Por último, el procedimiento descrito permite obtener el frente de onda de interferogramas de muy alta densidad de franjas bajo condiciones experimentales como vibraciones. Lo cual dificulta la implementación de la interferometría de corrimiento de fase como usualmente se requiere.

#### 4.5 Referencias del capítulo 4

Bruning J. H., Herriot D. R., Gallagher J. E., Rosenfeld D. P., White A. D., and Brangaccio D. J., "Digital wavefront measuring interferometer for testing surfaces and lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693-2703 (1974).

Ghiglia D. C., Romero L. A., "Minimum Lp-norm two-dimensional phase unwrapping," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1999-2013 (1996).

García-Torales G., Páez G., Strojnik M., "Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer," *Opt. Eng.* **40**, 767-773 (2001).

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist interferometry," *Appl. Opt.* **26**, 5245-5257 (1987).

Hunt B. R., "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences," *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 393-399 (1979).

Katsuyuki O., Toyohiko Y., "Phase measuring Ronchi test," *Appl. Opt.* **27**, 523-528 (1988).

Kujawinska M., Schmidt J., "Spatial-carrier phase-shifting technique of fringe pattern analysis," *Industrial Applications of Holographic and Speckle Measuring Techniques*, Werner P. Jueptner; ed., *Proc. SPIE.* **1508**, 61-67 (1991).

Malacara D. Servin M. Malacara Z., "Phase shifting interferometry," in *Interferogram Analysis for Optical Testing*, Marcel Dekker Inc. 1998), Chap. VII.

Malacara D., "Hartmann test of aspherical mirrors," *Appl. Opt.* **11**, 99-101 (1972).

Muñoz J., Strojnik M., Páez G., "Detection and interpretation of high-frequency spatial interferograms," *SPIE*. **4486**, 523-532 (2002).

Muñoz J., Páez G., Strojnik M., "Phase unwrapping of subsampled phase-shifted interferograms," *SPIE*. **4777**, 288-299 (2002).

Murty M. V. R. K., "A compact lateral shearing interferometer based on the Michelson interferometer," *Appl. Opt.* **9**, 1146-1152 (1970).

Páez G., Strojnik M., Garcia-Torales G., "Vectorial shearing interferometer," *Appl. Opt.* **39**, 5172-5178 (2000).

Páez G., Strojnik M., "Convergent, recursive phase reconstruction from noisy, modulated intensity patterns using synthetic interferograms," *Opt. Lett.* **23**(6), 406-408 (1998).

Pirga M., Kujawinska M., "Two directional spatial-carrier phase-shifting method for analysis of crossed and closed fringe patterns," *Opt. Eng.* **34**, 2459-2466 (1995).

Sasían, J. M. “Desing of Null correctors for the testing of astronomical optics,” *Opt. Eng.*, **27**, 1051-1056 (1988).

Servin M., Malacara D., Malacara Z., and Vlad V. I., “Sub-Nyquist null aspheric testing using a computer-stored compensator,” *Appl. Opt.* **33**, 4103-4108 (1994).

Servin M., Marroquin J. L., and Cuevas F. J., “Demodulation of a single interferogram by use of a two-dimensional regularized phase-tracking technique”, *Appl. Opt.* **36**, 4540-4548 (1997).

Takeda M., Ina H., Kobayashi S., “Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry,” *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156-160 (1982).



# Capítulo 5

## Integración del gradiente de la fase

### 5.1 Introducción

A Través de los capítulos 3 y 4 en la presente tesis se ha mostrado que usando la integración de las diferencias de la fase es posible recuperar el frente de onda de interferogramas. En este capítulo se plantea la integración del gradiente de la fase con el mismo propósito. Tal método ha sido previamente propuesto como un procedimiento dependiente de la trayectoria (Páez [1997]). La reconstrucción es llevada a cabo iniciando en un punto y procediendo a lo largo de una dirección hasta encontrar un borde. Usando algún pixel de los ya reconstruidos se integra otro a lo largo de la dirección perpendicular a la inicialmente seguida. Este pixel funciona como punto inicial para continuar la reconstrucción a lo largo de una nueva línea. Los anteriores pasos se repiten hasta que completar cada uno de los pixeles de la imagen (Páez [199]).

El procedimiento descrito tiene la ventaja de ser muy rápido funcionando correctamente para pupilas de campo completo o circulares con muy pocas o nulas modificaciones. Para pupilas anulares o irregulares o para datos ruidosos el algoritmo requiere de la intervención de un usuario para evitar las áreas de la imagen con ausencia de datos o susceptibles de propagar errores. El método de mínimos cuadrados (Fried [1977], Hudgin [1977], Noll [1978], Hunt [1979]) evita la situación descrita relacionando a cada píxel con

sus 4 vecinos más próximos obteniendo una solución global. Los errores en la reconstrucción son menos probables de propagarse y las áreas con datos inválidos se identifican automáticamente considerando que se conoce la función de pupila. El desenvolvimiento por mínimos cuadrados requiere del cálculo de las diferencias de la fase a fin de calcular el Laplaciano (Ghiglia [1996]). Para datos submuestreados o mediciones con altos niveles de ruido la solución es susceptible de desestimarse debido al hecho de que las diferencias de la fase son calculadas con la función arcotangente. En tales casos las diferencias de la fase sobrepasan el intervalo de  $[\pi, -\pi]$ . El método de integración del gradiente propuesto en el presente estudio proporciona una solución más estable al ser formulado como una técnica independiente de la trayectoria.

## 5.2 Cálculo e integración del gradiente de la fase

Una gran cantidad de métodos de determinación de la fase encuentran una primera aproximación aplicando la función arcotangente a la razón del seno y el coseno del frente de onda. Dicha aproximación se conoce como fase envuelta  $\phi_e(x,y)$ .

$$\phi_e(x,y) = \arctan g \left\{ \frac{I_s(x,y)}{I_c(x,y)} \right\} \quad [\pi, -\pi] \quad . \quad (1)$$

El seno y coseno de la fase,  $I_s(x,y)$  e  $I_c(x,y)$ , se obtienen mediante la resta de diferentes imágenes con técnicas de desplazamiento (Bunning [1974]), mientras que con los

métodos de Fourier (Takeda [1982], Womack [1984], Kreis [1986]) se calculan de la parte real e imaginaria del espectro filtrado.

Una aproximación al gradiente de la fase se encuentra simplemente tomando diferencias de la fase.

$$\phi_x(x, y) \cong \frac{N}{2} \arctan \left\{ \frac{\sin[\phi_e(x, y) - \phi_e(x-1, y)]}{\cos[\phi_e(x, y) - \phi_e(x-1, y)]} \right\} \quad x=1, 2, \dots, N \quad y=0, 1, \dots, M$$

$$\phi_y(x, y) \cong \frac{M}{2} \arctan \left\{ \frac{\sin[\phi_e(x, y) - \phi_e(x, y-1)]}{\sin[\phi_e(x, y) - \phi_e(x, y-1)]} \right\} \quad x=0, 1, \dots, N \quad y=1, 2, \dots, M \quad .$$

(2)

En esta expresión  $N$  y  $M$  son el número de píxeles en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Otra manera de obtener el gradiente es utilizando técnicas en el dominio de Fourier.

$$\tilde{I}_c(\xi, \eta) = \mathfrak{F}\{\cos[\phi(x, y)]\}$$

$$\tilde{I}_s(\xi, \eta) = \mathfrak{F}\{\sin[\phi(x, y)]\}$$

$$I_{cx}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ -\frac{N}{2} i 2\pi\xi \tilde{I}_c(\xi, \eta) \right\}$$

$$I_{sx}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ -\frac{N}{2} i 2\pi\xi \tilde{I}_s(\xi, \eta) \right\}$$

$$\phi_x(x, y) = I_{sx}(x, y) I_c(x, y) - I_{cx}(x, y) I_s(x, y) \quad .$$

(3)

En las ecuaciones anteriores los símbolos  $\mathfrak{F}\{\}$  y  $\mathfrak{F}^{-1}\{\}$  denotan a la transformada discreta de Fourier y su inversa, respectivamente. Análogamente la derivada de la fase en la dirección  $y$ ,  $\phi_y(x,y)$ , puede ser encontrada. La decisión de tomar las derivadas de la fase por medio de diferencias o con el método de Fourier depende del interferograma que es analizado. Si este posee pocas franjas se puede agregar un paso adicional de filtrado para reducir ruido, en cambio, para interferogramas con altos niveles de ruido encontramos mejores resultados tomando diferencias finitas.

La reconstrucción se lleva cabo integrando el gradiente.

$$\phi^r(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \nabla[\phi(x, y)] \cdot ds \quad . \quad (4)$$

La integral puede evaluarse numéricamente con diferentes técnicas ([Press \[1986\]](#)). Una vez que las derivadas de la fase están disponibles una opción es aplicar la regla de Simpson. Esta integración con un método dependiente de la trayectoria considera una sola dirección, sin embargo, el procedimiento puede formularse abarcando simultáneamente los 4 pixeles más próximos.

$$\phi(x, y) = \phi(x, y - I) + \frac{I}{2(M/2)} [\phi_y(x, y) + \phi_y(x, y - I)]$$

$$\phi(x, y) = \phi(x, y + I) - \frac{I}{2(M/2)} [\phi_y(x, y) + \phi_y(x, y + I)]$$

$$\phi(x, y) = \phi(x - I, y) + \frac{I}{2(N/2)} [\phi_x(x, y) + \phi_x(x - I, y)]$$

$$\phi(x, y) = \phi(x + I, y) - \frac{I}{2(N/2)} [\phi_x(x, y) + \phi_x(x + I, y)] \quad . \quad (5)$$

Sumando las expresiones anteriores obtenemos:

$$4\phi(x, y) - \phi(x, y + I) - \phi(x, y - I) - \phi(x + I, y) - \phi(x - I, y) = L(x, y) \quad , \quad (6)$$

en donde

$$L(x, y) = \frac{I}{2(M/2)} [\phi_y(x, y - I) - \phi_y(x, y + I)] + \frac{I}{2(N/2)} [\phi_x(x - I, y) - \phi_x(x + I, y)] \quad . \quad (7)$$

$L(x, y)$  es operador que puede ser considerado análogo del Laplaciano de la fase considerando la técnica de mínimos cuadrados. Resolviendo para la fase en la expresión (6) se obtiene la ecuación normal de la solución por integración del gradiente.

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x + I, y) + \phi(x - I, y) + \phi(x, y + I) + \phi(x, y - I) + L(x, y)}{4} \quad . \quad (8)$$

La expresión (8) representa un sistema lineal de ecuaciones que se resuelve por métodos iterativos, por Fourier o utilizando la transformada discreta del coseno. La solución en los

bordes se obtiene considerando condiciones a la frontera de Newman (Ghiglia [1996]).

De esta forma el cálculo de  $L(x,y)$  debe modificarse de la siguiente forma:

$$L(x, y) = \frac{P(x, y)}{2(M/2)} \left\{ \left[ \phi^y(x, y) + \phi^y(x, y-1) \right] P(x, y-1) - \left[ \phi^y(x, y) + \phi^y(x, y+1) \right] P(x, y+1) \right\} + \frac{P(x, y)}{2(N/2)} \left\{ \left[ \phi^x(x, y) + \phi^x(x-1, y) \right] P(x-1, y) - \left[ \phi^x(x, y) + \phi^x(x+1, y) \right] P(x+1, y) \right\} \quad (9)$$

En donde  $P(x,y)$  es la función de pupila que vale 1 en regiones con datos validos y 0 de otra manera. Un procedimiento iterativo muy simple aunque no el más eficiente en tiempo de computo es la solución por Gauss-Seidel.

$$\phi^{k+1}(x, y) = \phi^k(x, y) - \frac{t \phi^k(x, y) - \phi^k(x+1, y) - \phi^{k+1}(x-1, y) - \phi^k(x, y+1) - \phi^{k+1}(x, y-1) - L(x, y)}{4}$$

donde,

$$t = P(x, y) [P(x+1, y) + P(x-1, y) + P(x, y+1) + P(x, y-1)] \quad (10)$$

En esta expresión  $k$  es el número de la iteración. En la siguiente sección evaluaremos la solución que se obtiene empleando el método de integración del gradiente.

### 5.3 Resultados de la integración

En esta sección evaluaremos y compararemos el método propuesto de integración del gradiente con la técnica de mínimos cuadrados. Se presentan dos ejemplos, el primero de ellos en datos obtenidos es la prueba de una componente óptica utilizando un interferómetro tipo Fizeau. El segundo ejemplo se efectúa en datos simulados considerando ruido aleatorio.

La figura 5.1 muestra a 3 interferogramas desplazados en fase una cantidad de  $2\pi/3$  así como la fase envuelta obtenida de ellos. El proceso de reconstrucción se efectuó con el procedimiento de integración del gradiente de la fase, figura 5.2(a), y con el algoritmo de mínimos cuadrados, figura 5.2(b). La diferencia entre ambas reconstrucciones se observa en las figuras 5.2(c) y 5.2(d). Ambas reconstrucciones solo difieren significativamente en algunos puntos aislados al centro de la imagen donde la densidad de franjas es mayor.

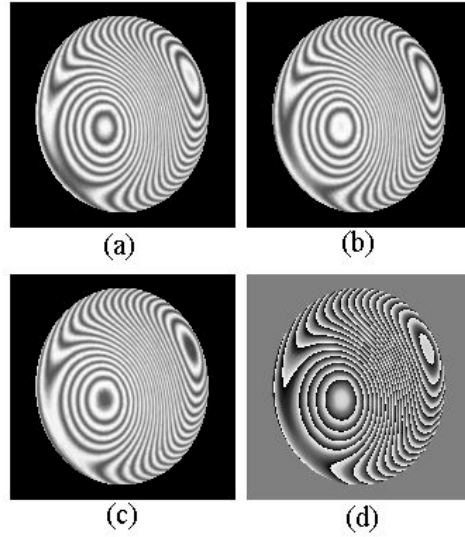


Figura 5.1 Interferogramas desplazados en fase  $0$  (a),  $2\pi/3$  (b),  $-2\pi/3$  (c). Fase envuelta obtenida de los interferogramas (d).

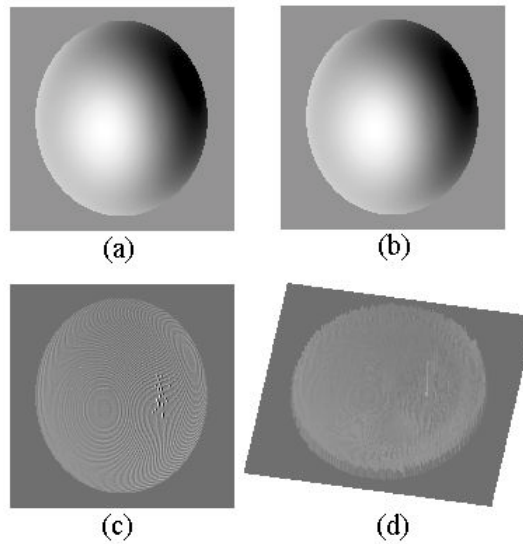


Figura 5.2 Fase reconstruida usando el método de integración del gradiente (a) y con el algoritmo de mínimos cuadrados (b). Diferencia entre ambas reconstrucciones, en dos dimensiones (c) y representación en tres dimensiones (d).



Las figuras 5.3(a) y 5.3(b) muestran al coseno y al seno de un polinomio correspondiente a aberración de desenfoque. Se ha agregado independientemente en ambos interferogramas ruido aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo de  $[0.4\pi, -0.4\pi]$ . La fase envuelta calculada de los interferogramas se observa en la figura 5.3(c), mientras la fase envuelta sin ruido puede verse en la figura 5.3(d). Nuevamente se obtuvo la solución considerando ambas técnicas. La fase recuperada con el algoritmo propuesto y con el método de mínimos cuadrados se muestra en la figura 5.4(a) y 5.4(b), respectivamente. Estos mismos resultados se muestran envueltos para una mejor visualización de ambas soluciones en las figuras 5.4(c) con el método de integración del gradiente y 5.4(d) con la técnica de mínimos cuadrados. Al comparar los resultados envueltos se aprecia que el algoritmo desarrollado presenta menores inconsistencias.

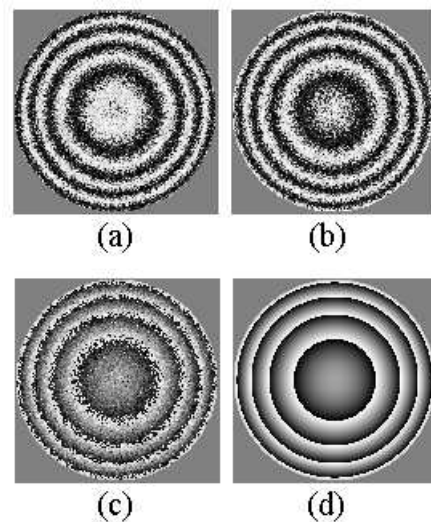


Figura 5.3 Interferogramas con ruido correspondientes al coseno (a) y seno (b) de la fase. Fase envuelta con ruido (c) y sin ruido (d).

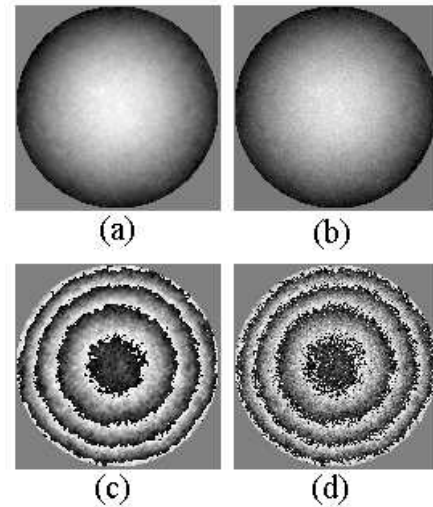


Figura 5.4 Comparación de la reconstrucción de los algoritmos de integración del gradiente (a) y mínimos cuadrados (b). Mismos resultados pero mostrados envueltos para su comparación con la fase envuelta sin ruido, integración del gradiente (c) y mínimos cuadrados (d).

## 5.4 Conclusiones

Demostramos un método de reconstrucción del frente de onda no basado en los métodos tradicionales de desenvolvimiento de fase. La técnica es una mejora al anterior algoritmo de integración del gradiente de la fase siendo independiente de la trayectoria y presentando menor susceptibilidad al ruido. El gradiente de la fase se calcula usando diferencias finitas o métodos basados en el análisis de Fourier. El procedimiento desarrollado se comparó con la solución generada por el método de mínimos cuadrados. En datos obtenidos experimentalmente con poco ruido ambas soluciones son virtualmente idénticas. Sin embargo, al considerar datos simulados con ruido la solución propuesta integrando el gradiente genera una solución con menor sensibilidad al ruido.

## 5.5 Referencias del capítulo 5

Bruning J. H., Herriot D. R., Gallagher J. E., Rosenfeld D. P., White A. D., and Brangaccio D. J., "Digital wavefront measuring interferometer for testing surfaces and lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693-2703 (1974).

Fried D. L., "Least-squares fitting of a wave front distortion estimate to an array of phase-differences measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370-375 (1977).

Ghiglia D. C., Romero L. A., "Minimum Lp-norm two-dimensional phase unwrapping," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1999-2013 (1996).

Hunt B. R., "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences," *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 393-399 (1979).

Hudgin R. H., "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 375-378 (1977).

Kreis T., "Digital holographic interference-phase measurements using Fourier transform method," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 847-855 (1986).

Noll R. J., "Phase estimates from slope-type wave-front sensors," *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 139-140 (1978).

Páez, G.; Strojnik, M.; “Fringe analysis and phase reconstruction from modulated intensity patterns,” *Opt. Lett.* **22**, 1669-1671 (1997).

Páez, G., Strojnik, M. “Phase-shifted interferometry without phase unwrapping: reconstruction of a decentered wave front,” *J. Opt. Soc. Am. A.*, Volume **16**, 475-480 (1999).

Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., and Vetterling W. T., “Integration of functions,” in *Numerical recipes in C*, (Cambridge University Press 1986) Chap. IV.

Takeda M., Ina H., Kobayashi S., “Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry,” *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 156 (1982).

Womack K. H., “Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection,” *Opt. Eng.* **23**, 391-395 (1984).

## Capítulo 6

### Conclusiones generales y trabajo a futuro.

#### 6.1 Conclusiones generales

En la presente tesis se presentan avances relacionados con la interpretación y recuperación de la fase de interferogramas de alta densidad de franjas detectados por cámaras CCD. Este tema adquiere relevancia debido a su aplicabilidad en la caracterización de superficies ópticas esféricas de común uso en una gran variedad de instrumentos ópticos de nueva generación. En primer termino analizamos la detección por cámaras CCD de interferogramas de alta densidad de franjas. Los patrones de franjas detectados son submuestreados cuando existe menos de dos pixeles por periodo de la franja. Adicionalmente, existe una considerable reducción del contraste en el interferograma al usar arreglos de pixeles cuya razón tamaño espaciamiento se aproxima a uno, como es el caso con la mayoría de las cámaras CCD comerciales. Obtuvimos una expresión analítica que describe la reducción en la intensidad de modulación con el tamaño del píxel y la información de las derivadas de la fase en direcciones ortogonales. La expresión obtenida se comparo con la amplitud de modulación recuperada de la simulación numérica de un conjunto de interferogramas desplazados en fase. Ambos resultados difieren en menos de 0.4 % de la máxima amplitud de modulación, lo cual confirma la exactitud del modelo.

Respecto al tema de desenvolvimiento de fase de interferogramas submuestreados demostramos un nuevo procedimiento con menor sensibilidad al ruido que anteriores técnicas. Se calculan los interferogramas sintéticos del seno y coseno de las diferencias de la fase usando los datos envueltos del patrón de franjas sumuestreados. Las diferencias de la fase deben ser reconstruidas empleando algún procedimiento de desenvolvimiento de fase antes de ser usadas en el procedimiento de recuperación de la fase con la técnica de mínimos cuadrados. El algoritmo propuesto puede implementarse usando métodos independientes de la trayectoria habilitando la caracterización de superficies con pupilas irregulares o con obstrucciones. Se logra una menor susceptibilidad al ruido a comparación de otras técnicas filtrando los interferogramas sintéticos durante la reconstrucción de las diferencias de la fase.

Debido al hecho de que no en todas las situaciones es posible aplicar técnicas de desplazamiento de fase se aborda el tema de recuperación de la fase usando un solo interferograma submuestreado. En tal problema se usa la suposición de que las fase, y las intensidades de modulación y de fondo son funciones suaves y continuas, condiciones que normalmente se cumplen al considerar superficies ópticas. De esta manera se calculan a partir de pixeles adyacentes del interferograma submuestreados los interferogramas sintéticos correspondientes al coseno de las diferencias de la fase en direcciones ortogonales. La información de las diferencias se reconstruye aplicando algoritmos de recuperación de fase para interferogramas de baja densidad de franjas. Las diferencias de la fase se integran para obtener el frente de onda codificado en el interferograma submuestreado. La técnica se demuestra usando patrones de franjas obtenidos experimentalmente y mediante simulación.

Finalmente se demuestra un algoritmo mejorado de recuperación de la fase basado en la integración del gradiente de la misma. El gradiente de la fase es inicialmente calculado usando métodos de diferencias finitas o técnicas en el dominio de Fourier. El procedimiento de integración se plantea considerando múltiples trayectorias en forma simultánea. De esta forma el procedimiento resulta independiente de la trayectoria habilitando su aplicación en la medición de superficies con pupilas irregulares o con obstrucciones. Al comparar la técnica desarrollada con el tradicional algoritmo de mínimos cuadrados se encuentra una mejor tolerancia al ruido sin requerir de mayor tiempo de cómputo o complejidad en la programación.

## **6.2 Trabajo a futuro**

La interpretación de interferogramas submuestreados es un avance muy importante en la caracterización de superficies ópticas esféricas. Sin embargo, para una más completa evaluación, adicionalmente se requiere de hacer trazo de rayos considerando el arreglo interferométrico en uso. Configuraciones como un interferómetro Mach-Zender generarán un patrón de franjas diferente al generado por un interferómetro Twyman-Green en la caracterización de la misma superficie. Esto resulta como consecuencia de que el frente de onda de la superficie que es analizada se altera según atraviesa diferentes componentes en ambos interferómetros. Una solución a este problema puede formularse considerando la propagación del frente de onda detectado en forma regresiva a través de cada componente del arreglo usado.

El área del análisis de franjas continua siendo un campo de intensa investigación con aplicaciones diversas y que no se limitan a la caracterización de componentes ópticas. Entre los temas de interés que consideramos abordar se encuentran la recuperación de la fase de interferogramas extremadamente ruidosos y la extracción de la fase a partir de un solo interferograma considerando patrones de franjas de baja frecuencia espacial.