



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO



Diseño y construcción de un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann

Yobani Mejía Barbosa
Universidad Nacional de Colombia

Tesis presentada como requisito para optar al
título de Doctor en Ciencias (Óptica).

Asesor: Dr. Daniel Malacara Hernández

León, Gto. – México
Agosto, 2001

Diseño y construcción de un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann

Yobani Mejía Barbosa

Universidad Nacional de Colombia

Centro de Investigaciones en Óptica

León, México

Universidad de Guanajuato

Guanajuato, México

Agosto, 2001

Contenido

	Prólogo	vi
	Agradecimientos	ix
Capítulo 1	Topógrafos corneales	1
1.1	Topógrafos basados en la reflexión especular	3
1.1.1	Anillos de Placido	3
1.1.2	Interferómetro de Twyman-Green	6
1.1.3	Deflectometría de moiré (o interferometría Talbot)	8
1.2	Topógrafos basados en la reflexión difusa	9
1.2.1	Franjas de moiré	10
1.2.2	Raster-estereografía	11
1.2.3	Profilometría de Fourier	12
1.3	Topógrafos basados en el esparcimiento de luz	13
1.3.1	La lámpara de rendija	14
	Lo más relevante del capítulo	14
Capítulo 2	Mapas de curvatura	16
2.1	Curvatura en una superficie	17
2.2	Mapas de curvatura meridional y el concepto de curvatura axial	22
2.2.1	Curvatura meridional	22
2.2.2	Curvatura axial	23
2.3	Mapas de curvaturas principales	24
2.4	Mapas de curvatura Gaussiana, promedio y cilíndrica	28
	Lo más relevante del capítulo	30
Capítulo 3	Prueba de Hartmann para medir la forma de superficies reflectoras	
	Convexas	31
3.1	Superficie objeto para campo pequeño	32

3.2	Superficie objeto para campo amplio	35
3.2.1	Superficie objeto para imagen sagital plana	36
3.2.2	Superficie objeto para imagen tangencial plana	36
3.2.3	Superficie objeto para imagen promedio plana	36
3.3	Pantalla para implementar la prueba de Hartmann	43
	Lo más relevante del capítulo	51
Capítulo 4	Diseño y fabricación de un prototipo del Topógrafo Corneal tipo Hartmann (TCH)	53
4.1	Fabricación de la pantalla	53
4.2	Perforación de agujeros en la pantalla	54
4.3	Sistema de iluminación	55
4.4	Sistema óptico formador de imagen	56
	Lo más relevante del capítulo	63
Capítulo 5	Mapas de curvatura y elevación obtenidos con el TCH	64
5.1	Mapas de curvatura	66
5.2	Mapas de elevación	69
5.3	Resultados experimentales	70
5.3.1	Superficie de prueba I	71
5.3.2	Superficie de prueba II	73
5.3.3	Superficie de prueba III	79
5.3.4	Superficie de prueba IV	82
5.4	Rango de validez en la medida del radio de curvatura	87
	Lo más relevante del capítulo	89
	Conclusión	91
	Apéndice 1. Referencias y patentes adicionales sobre algunos métodos para medir la topografía de la córnea.	94

Apéndice 2. Tabla de conversión de la curvatura en unidades de dioptrías al radio de curvatura en unidades de milímetros.	99
Apéndice 3. Desarrollo de las ecuaciones (3.10), (3.12) y (3.15)	101
Referencias	103

Prólogo

El desarrollo de numerosos métodos para medir la forma de la córnea, así como el gran número de patentes sobre topógrafos corneales a nivel internacional, dan una idea de la importancia que tiene en optometría y oftalmología el conocimiento de la forma de la córnea. Lo anterior se debe a que la córnea es el elemento refractor del ojo que más contribuye al enfoque de la luz, por lo que algunos procedimientos para corregir defectos de refracción como miopía, hipermetropía o astigmatismo, se realizan directamente sobre la superficie anterior de la córnea; por ejemplo, el uso de lentes de contacto o cirugía láser. A pesar de la gran oferta para implementar topógrafos corneales cada vez más precisos, son muy pocos los que se usan en la práctica, debido a la complejidad de los sistemas y a los costos. El topógrafo más simple, el más empleado en la actualidad y también el más antiguo, es el sistema de anillos de Placido; este topógrafo da información de la forma de la córnea sólo en la dirección radial. Otro sistema que está en uso, el ORBSCAN II (una modificación de la lámpara de rendija), mide la forma de las superficies anterior y posterior de la córnea; una de sus desventajas es su alto costo. Otros sistemas proyectan franjas sobre la superficie anterior de la córnea. Estos sistemas no son muy utilizados en la práctica, ya que requieren modificar la naturaleza especular de la superficie anterior de la córnea para obtener una superficie difusora; la aplicación de gotas de una sustancia fluorescente (Fluoresceína) permite obtener este efecto.

La determinación de la forma de la córnea depende básicamente de dos hechos: (a) la exactitud con que se puede medir la forma de la córnea y (b) la interpretación que se hace de estos resultados, en particular, el uso de los mapas de curvatura. En lugar de utilizar mapas con zonas de igual altura para describir la forma de la córnea, los optómetras y oftalmólogos han introducido mapas de curvatura o potencia refractora, que les permite tener una mejor visualización de los cambios en la forma de la córnea. De hecho, algunos de los topógrafos corneales, como el sistema de anillos de Placido, no miden en realidad la elevación (sagita) de la superficie, sino la pendiente de la superficie y de ahí se deduce la curvatura de la superficie. En la práctica, la descripción de la forma de la córnea se hace en términos del aplanamiento de la superficie; una región de una superficie con curvaturas relativamente

pequeñas, se dice que es una región que está más aplanada con respecto a otras regiones de la superficie con curvaturas más grandes.

En la literatura se encuentra de manera muy dispersa la descripción de los principios ópticos de algunos de los métodos para medir la topografía de la córnea. Por otra parte, poco se discute sobre la validez de los mapas de curvatura axial, algo que debe ser revisado, pues la mayor parte de los diagnósticos clínicos se hacen con base en la información obtenida de estos mapas. Como se mostrará más adelante, el concepto de curvatura axial conduce a interpretaciones erradas sobre la forma de la córnea. Dos de los objetivos de esta tesis son: (1) hacer una breve revisión de los principios ópticos de algunos de los métodos propuestos en la literatura científica para medir la topografía de la córnea (capítulo 1) y (2) presentar una descripción detallada en términos de la geometría diferencial de la representación de la forma de la córnea según los de mapas de curvatura (capítulo 2); en este capítulo se muestra por que el mapa de curvatura axial conduce a interpretaciones erradas de la forma de la córnea.

El tercer objetivo de esta tesis, el más relevante, es presentar el diseño y construcción de un topógrafo corneal basado en una prueba modificada de Hartmann, que se denominará TCH (Topógrafo Corneal tipo Hartmann). Con este topógrafo se miden directamente las curvaturas principales de la superficie de la córnea y la elevación. El TCH, así como el sistema de anillos de Placido, tiene la ventaja de ser un sistema sencillo y además, permite medir la curvatura no sólo en la dirección radial, sino en cualquier otra dirección, lo cual constituye una información más completa de la forma de la córnea. En el capítulo 3 se describe la prueba modificada de Hartmann; la pantalla plana con agujeros de la prueba típica de Hartmann en espejos cóncavos es reemplazada por un elipsoide de revolución, de tal manera que su imagen virtual producida por un espejo convexo esférico de referencia sea plana. También se calcula la posición de los agujeros en el elipsoide para obtener en el plano imagen un arreglo cuadrulado de puntos. Cuando se reemplaza el espejo esférico de referencia por una superficie reflectora de prueba (córnea real), el arreglo cuadrulado de puntos se distorsiona, y de esta distorsión, es posible determinar la forma de la superficie. En el capítulo 4 se describe la construcción de un prototipo del TCH, en particular se describe la construcción del elipsoide con los agujeros, el sistema de iluminación y el sistema óptico formador de imagen.

En el capítulo 5 se analizan algunas imágenes obtenidas con el TCH de algunas superficies convexas de prueba. Las superficies de prueba son: una superficie esférica fabricada en vidrio BK7; una lente de contacto plástica (polimetilmetacrilato) con forma toroidal en su cara convexa; y dos córneas. El análisis se hace principalmente en términos de los mapas de curvatura presentados en el capítulo 2, pero también se presentan los mapas de elevación o sagita correspondientes. Los resultados obtenidos con el TCH para la lente de contacto se comparan con los resultados obtenidos con un topógrafo basado en los anillos de Placido.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo realizado en esta tesis de doctorado y se discute la posibilidad de implementar este sistema en optometría y oftalmología.

Yobani Mejía Barbosa

Agradecimientos

La realización de esta tesis ha sido posible gracias a la colaboración de un buen número de personas e Instituciones. Estoy especialmente agradecido al Dr. Daniel Malacara Hernández, asesor de esta tesis, por su invaluable colaboración en la dirección de este trabajo y a la Universidad Nacional de Colombia por su apoyo económico e institucional, sin el cual no hubiera sido posible mi estancia en México.

Por otra parte, deseo manifestar mis agradecimientos al Centro de Investigaciones en Óptica, A.C. por el apoyo que me brindó como estudiante de doctorado y en particular a todos los miembros del taller óptico por su colaboración y amistad; al señor José Vargas Ortega de VJ PLASTIC por su amable colaboración en la construcción de los moldes en aluminio para fabricar la superficie elipsoidal del TCH; al Dr. Orestes Stavroudis por las discusiones que tuvimos en algunos temas de geometría diferencial; al Dr. Alanis Villarreal de Oftalmología del Bajío por las discusiones que tuvimos sobre la interpretación de los mapas de curvatura; al Dr. Rufino Díaz Uribe por su ayuda con cierta bibliografía; al Dr. Ricardo Flores Hernández por las sugerencias en algunos aspectos de la fabricación del TCH.

Esta tesis también fue realizada gracias a un crédito-beca otorgado por Colciencias (Colombia) y a una beca otorgada por el gobierno de México, a través de la Secretaría de Relaciones Exteriores.

1. Topógrafos corneales

El ojo humano es un sistema biológico-óptico que forma una imagen real en la superficie cóncava de la retina. Anatómicamente, el globo ocular de un ojo normal en un adulto es un ovoide aproximadamente esférico de unos 23 mm de diámetro. La luz entra al ojo primero por la *córnea*, un tejido transparente que sobresale del globo (figura 1.1). El índice de refracción promedio de la córnea es $n_c = 1.376$. La córnea tiene la forma de un menisco convexo-cóncavo; la superficie anterior tiene un radio medio de 7.8 mm, la superficie posterior un radio medio de 6.5 mm y la separación entre sus vértices igual a 0.6 mm, aproximadamente. El efecto óptico que produce es el de una lente positiva, debido a que el medio externo en contacto con la superficie anterior de la córnea es el aire ($n_a = 1.0000$), mientras que el medio interno en contacto con la superficie posterior de la córnea es el *humor acuoso* ($n_{ha} = 1.336$). La córnea contribuye con cerca de $2/3$ de la refracción de los rayos luminosos. Inmediatamente detrás de la córnea, está la cámara anterior que contiene al humor acuoso. Luego se encuentra el *iris*, que controla la cantidad de luz que entra al ojo.

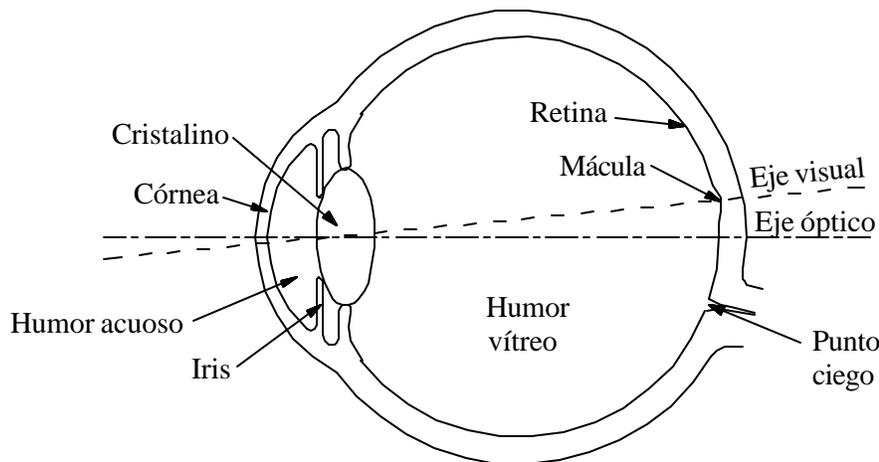


Figura 1.1. Esquema simplificado del ojo humano.

Detrás del iris está la *lente del cristalino*, con forma de lente biconvexa de 9 mm de diámetro y 4 mm de espesor, aproximadamente. El índice de refracción del cristalino varía alrededor de 1.406 en el núcleo interior hasta aproximadamente 1.386 en las zonas externas,

esto es, produce un efecto en la refracción de los rayos similar al de un sistema GRIN. El cristalino puede variar su forma para realizar un enfoque fino, de modo que la luz que provenga de cualquier objeto exterior sea enfocada en la superficie de la retina. Detrás del cristalino hay otra cámara con una sustancia transparente, denominada el *humor vítreo* ($n_{hv} = 1.337$). Finalmente, la luz es enfocada en la *retina*, una superficie cóncava que contiene dos clases de células foto-receptoras, los conos y los bastones. Una descripción detallada sobre la anatomía del ojo y su funcionamiento se puede consultar en las obras de Gullstrand [1924], Le Grand [1980], Davson [1991], Smith [1997].

Como cualquier otro sistema óptico, la imagen formada por el ojo puede presentar aberraciones ópticas (Le Grand [1980], Smith [1997], Hecht [1998]); algunas de ellas debido a deficiencias en el proceso de acomodación del cristalino y/o a deformaciones del globo ocular o de la superficie anterior de la córnea, por ejemplo, miopía, hipermetropía o astigmatismo. Para corregir estas aberraciones se suele utilizar anteojos, lentes de contacto o cirugía correctiva láser para modificar la forma de la superficie anterior de la córnea. Los procedimientos correctivos que emplean lentes de contacto o cirugía, requieren por lo tanto de un conocimiento previo de la forma de la superficie anterior de la córnea.

En la literatura científica se encuentran numerosos métodos ópticos para medir la topografía de la córnea. En este capítulo sólo se mencionarán unos pocos métodos para dar una idea de los diferentes enfoques que se han utilizado para resolver este problema. En el Apéndice 1 se da una lista de referencias y patentes adicionales a las dadas en este capítulo.

Algunos autores consideran la córnea como un espejo convexo, otros como una superficie difusora, para lo cual es necesario aplicar gotas de una sustancia fluorescente (Fluoresceína) y al menos un método, utiliza el esparcimiento de la luz dentro de la córnea (Mejía [2001a]). Entre los métodos que usan la córnea como un espejo convexo están: *anillos de Placido*, *interferómetro de Twyman-Green* y *deflectometría de moiré*. Algunos de los métodos que usan la córnea como una superficie difusora son: *proyección de franjas de moiré*, *raster-estereografía* y *perfilometría de Fourier*. Un método que usa el esparcimiento de luz dentro de la córnea emplea una modificación de la *lámpara de rendija*; la ventaja de este método sobre los anteriores es que además de medir la forma de la superficie anterior de la córnea, también puede medir simultáneamente la superficie posterior de la córnea. A continuación se describen brevemente cada uno de los métodos mencionados anteriormente.

1.1. Topógrafos basados en la reflexión especular

1.1.1. Anillos de Placido

El sistema basado en los anillos de Placido es uno de los métodos más antiguos para medir la topografía de la córnea (Gullstrand [1924]) y el más usado en la actualidad debido a su gran simplicidad. Este sistema consta de una serie de anillos concéntricos sobre una pantalla. La distorsión de la imagen virtual de estos anillos producida por la córnea permite obtener información sobre la forma de la superficie anterior de la córnea[†] en dirección radial. Con el propósito de obtener la imagen de todos los anillos en foco, se han propuesto diversas formas de la pantalla que contiene a los anillos, por ejemplo, hemisférica (Knoll [1957]), cilíndrica (Knoll [1961]) o cónica (Campbell [1997], OPTIKON 2000).

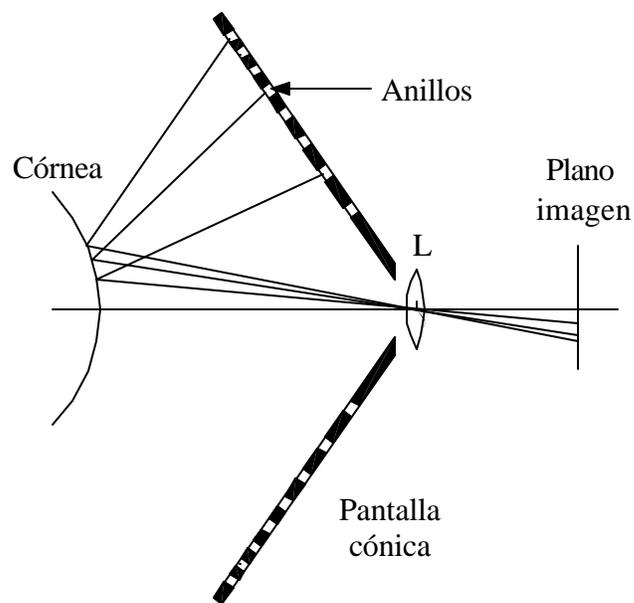


Figura 1.2. Topógrafo corneal basado en los anillos de Placido con pantalla cónica

La figura 1.2 muestra un diagrama de uno de los sistemas de Placido usado actualmente por los optómetras y oftalmólogos. El sistema óptico formador de imagen colecta los rayos de luz emitidos por los anillos y que son reflejados en la córnea pasando por el punto nodal del sistema. Los anillos sobre la superficie cónica se encuentran distribuidos de tal manera

[†] En lo que sigue del texto, cada vez que se mencione "la topografía o superficie de la córnea," quedará implícito que se está refiriendo a la forma de la superficie anterior de la córnea.

que la imagen de estos anillos generada por un espejo esférico convexo de referencia sea una distribución uniforme de anillos, es decir, anillos concéntricos igualmente separados. La figura 1.3 muestra la geometría básica de este sistema; **P** es un punto de uno de los anillos de donde emerge un rayo que incide sobre el punto **Q** de la córnea; **N** es el punto nodal equivalente del sistema óptico formador de imagen; **S** es el punto imagen correspondiente a **P**. Un plano meridional se define como un plano que contiene al eje óptico (eje z).

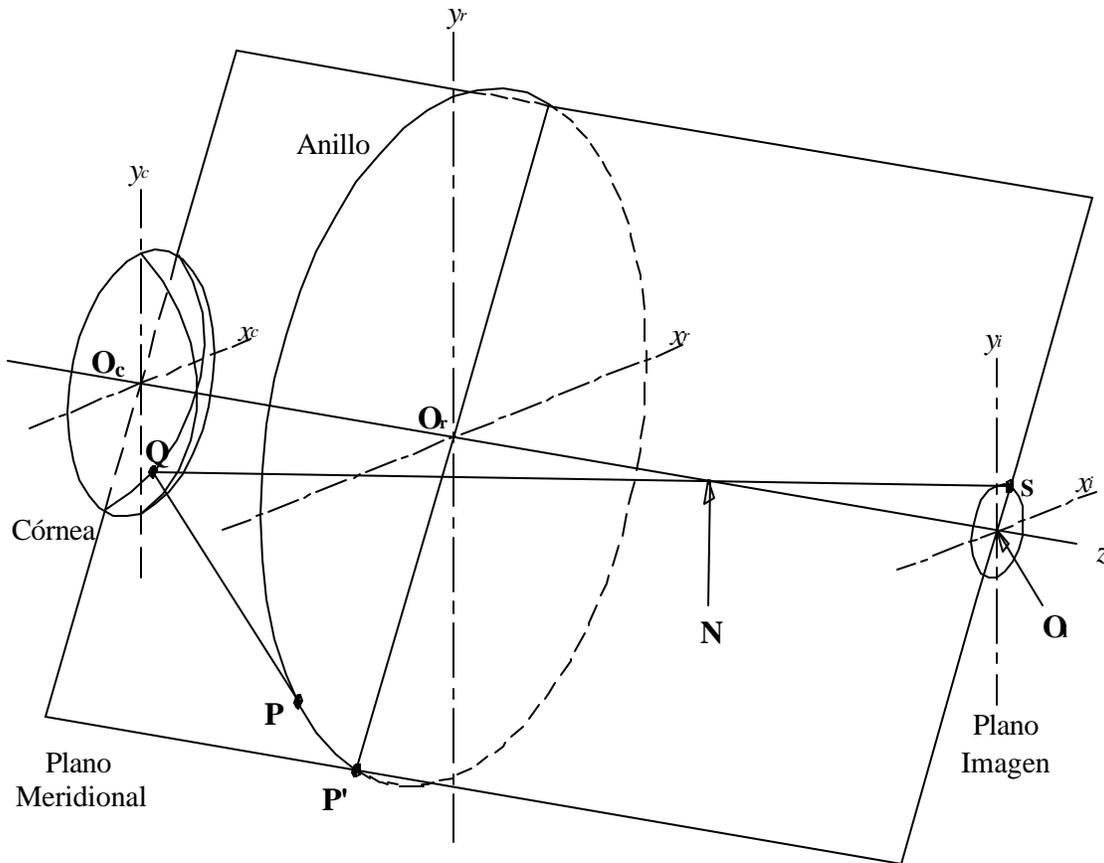


Figura 1.3. Geometría del sistema de anillos de Placido.

Si la córnea fuera una superficie con simetría de revolución, el rayo incidente **PQ** y el rayo reflejado que sigue el camino **QNS** serían rayos meridionales, pero en el caso general, la córnea no tiene simetría de revolución, por lo que el rayo incidente **PQ** puede ser un rayo oblicuo (figura 1.3). De la geometría del sistema, se deduce que si se conoce la localización del punto imagen **S** y su punto objeto correspondiente **P**, así como las direcciones de los rayos incidente y reflejado, entonces es posible determinar la ubicación del punto **Q** de la córnea. Sin embargo, en la práctica, sólo es posible determinar la posición del punto **S** y la

dirección del rayo reflejado; la ubicación del punto **P** y la dirección del rayo incidente son desconocidas y por lo tanto, no se puede determinar directamente la posición del punto **Q** de la córnea.

El problema de encontrar la posición del punto **Q** de la córnea, se suele resolver de manera aproximada, empleando algoritmos que hacen una reconstrucción de la forma de la córnea a lo largo varios meridianos (típicamente unos 360). Para ello se supone que el rayo incidente y el punto **P** están contenidos en el plano meridional, esto es, el punto **P'** de la figura 1.3 (Mattioli [1997], Brenner [1997], Campbell [1997]). La reconstrucción de una curva meridional de la córnea debe iniciarse a partir de un punto cuya posición se ha determinado previamente, esto significa que los sistemas de anillos de Placido deben disponer de un mecanismo para medir la posición de al menos un punto de la córnea (el vértice). De esta manera se reconstruye la forma de la córnea; entre más cercana a una superficie de revolución sea la córnea, mejor será la aproximación. El paso siguiente para mejorar la exactitud de los algoritmos de reconstrucción es añadir un sistema de líneas radiales a los anillos, con lo que se puede hacer un seguimiento de la trayectoria de algunos de los rayos incidentes (oblicuos). Algunos autores como Halstead [1995], Barsky [1997], Campbell [1997] y Klein [1997], han estudiado el efecto de omitir el rayo oblicuo y propuesto nuevos tipos de estructuras luminosas en lugar de los anillos, así como la mejora en los algoritmos de reconstrucción. Sin embargo, los sistemas de Placido que se usan actualmente siguen manteniendo los anillos concéntricos para evaluar la topografía de la córnea.

La precisión reportada varía de 0.1 D (Dioptías) hasta 0.25 D en la potencia refractora, esto es, de 0.018 mm hasta 0.045 mm en el valor medio del radio, para una región de 6 mm centrada en el vértice. Una dioptría se define como el inverso de una longitud igual a 1 m, ($1 \text{ D} = 1/\text{m}$).

Con el propósito de obtener una reconstrucción de la topografía de la córnea más precisa, algunos autores han propuesto métodos diferentes, como los que veremos en lo que sigue; no todos han llegado a tener aplicación en la práctica.

1.1.2. Interferómetro de Twyman-Green

El interferómetro de Twyman-Green es un interferómetro de dos haces obtenidos de una misma fuente de luz monocromática, uno de los cuales se usa como referencia (frente de onda plano) y el otro se usa para evaluar una superficie óptica de prueba, por ejemplo, superficies de lentes y espejos (Malacara [1992a]). Cuando el frente de onda de prueba se refleja en la superficie de prueba, se obtiene un frente de onda distorsionado que luego se superpone al frente de onda de referencia por medio de un divisor de haz. Un patrón de interferencia se puede observar en la región de la superposición de los dos haces. Las franjas de interferencia que se obtienen son franjas de igual espesor, por lo que éstas se interpretan como curvas de nivel topográficas con respecto a una superficie de referencia. La distancia o elevación entre dos curvas consecutivas es igual a la mitad de la longitud de onda de la luz de la fuente monocromática.

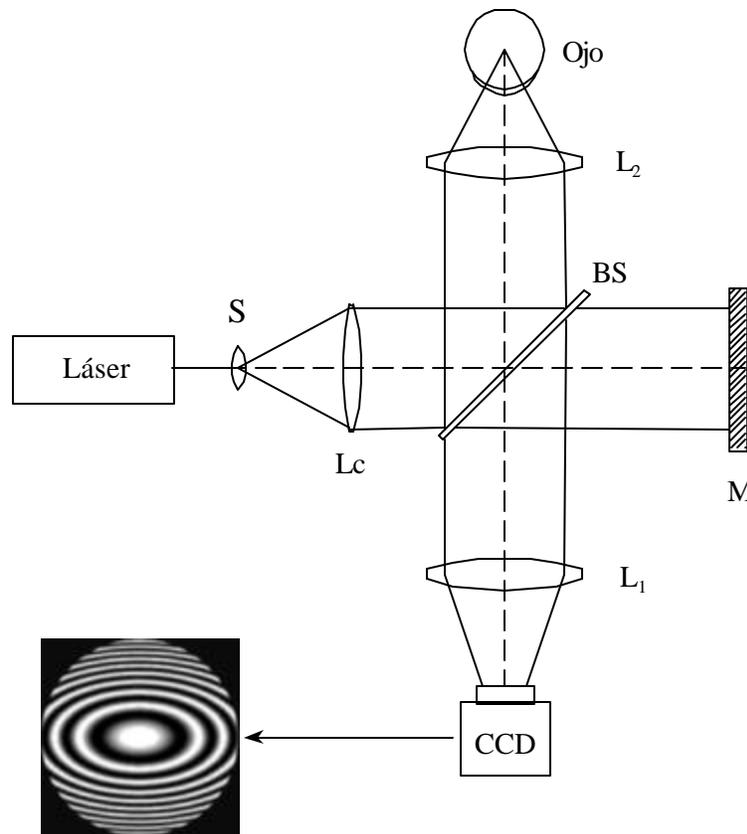


Figura 1.4. Interferómetro de Twyman-Green para evaluar la forma de la córnea. Las franjas de interferencia se interpretan como líneas de contorno de elevación. La distancia entre los planos de contorno es igual a media longitud de onda de la luz de iluminación ($\sim 0.5 \text{ mm}$). El interferograma simulado muestra una córnea con astigmatismo.

La figura 1.4 muestra un diagrama de un interferómetro de Twyman-Green adaptado para medir la topografía de la córnea. En este caso la córnea actúa como una superficie reflectora convexa de prueba. La lente L_c se usa para generar un frente de onda plano que luego es dividido en amplitud por el divisor de haz BS. El frente de onda plano de referencia se obtiene de la reflexión del haz transmitido por el divisor de haz en el espejo plano M. La lente L_2 transforma el frente de onda plano reflejado por el divisor de haz (frente de onda de prueba) en un frente de onda esférico convergente que se dirige hacia el centro de la córnea. Después de la reflexión de este frente de onda en la córnea, se obtiene un frente de onda divergente distorsionado debido a las desviaciones de la forma de la córnea con respecto a la esfera de radio promedio de la córnea (esfera de referencia). En la práctica, para determinar el radio promedio de la córnea, la lente L_2 se mueve a lo largo del eje óptico hasta que se obtiene el menor número de franjas de interferencia (Kasprzak [1995]). Cuando el frente de onda divergente distorsionado pasa de regreso por la lente L_2 , se obtiene un frente de onda distorsionado con respecto a un plano, es decir, en este proceso se le ha restado la esfera de referencia al frente de onda. Finalmente, el frente de onda de referencia es reflejado por el divisor de haz hacia la lente L_1 y el frente de onda distorsionado es transmitido por el divisor de haz hacia la lente L_1 . La lente L_1 proyecta la superposición de estos dos haces sobre una cámara de vídeo. Las franjas de interferencia darán la descripción topográfica de la córnea con respecto a la esfera de referencia. La forma de la córnea se obtiene al sumar la esfera de referencia a la topografía obtenida de las franjas de interferencia.

Este método de interferencia, es uno de los métodos de mayor sensibilidad que se han propuesto para medir la topografía de la córnea, ya que puede evaluar desviaciones en la elevación del orden de 0.5 μm . Sin embargo, presenta varios inconvenientes que lo hacen impráctico, por ejemplo, debido a que la separación entre un par de franjas consecutivas es del orden de 0.5 μm y que la variación topográfica de la córnea con respecto al radio promedio puede ser del orden de algunas décimas de milímetro, se obtiene un gran número de franjas difíciles de resolver. Por otro lado, el ojo es un sistema mecánicamente inestable con movimientos aleatorios e involuntarios, dificultando así la implementación de este sistema interferométrico. En experimentos con córneas reales de bajo astigmatismo (0.5 D), Kasprzak reporta medidas en la variación del poder refractor por debajo de 0.1 D (0.018 mm en el radio medio), para una región de 5 mm de diámetro centrada en el vértice.

1.1.3. Deflectometría de moiré (o interferometría Talbot)

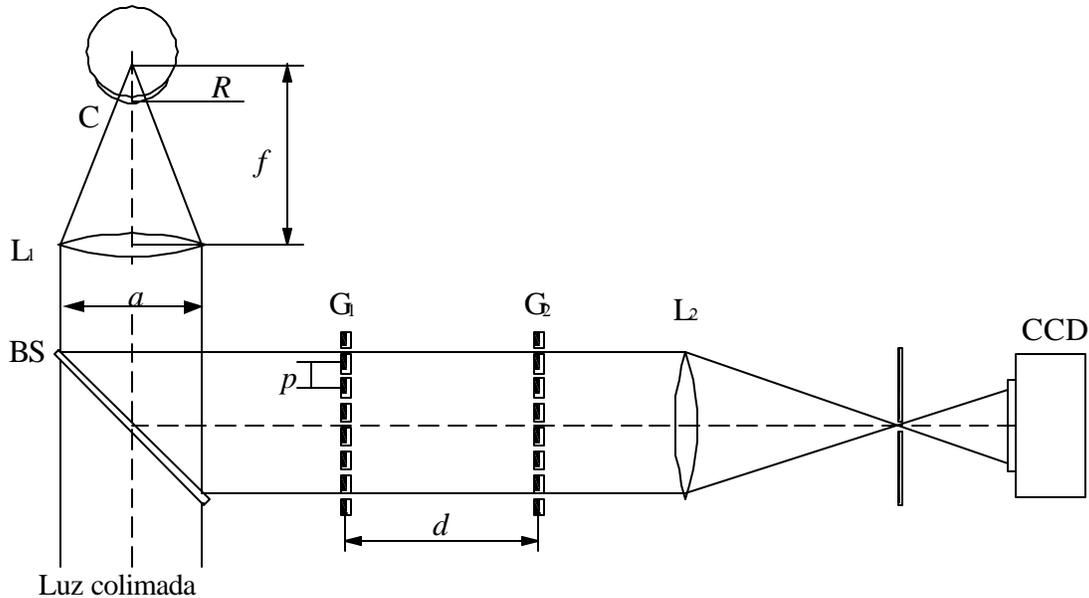


Figura 1.5. Deflectometría de moiré para evaluar la forma de la córnea. El patrón de moiré formado por la superposición de la rejilla G_2 y la imagen distorsionada de la rejilla G_1 da información sobre las desviaciones de los rayos reflejados en la superficie de la córnea.

En este método la imagen distorsionada de una rejilla G_1 de Ronchi se superpone sobre otra rejilla de Ronchi G_2 , la cual está a una distancia d de la primera, como se muestra en la figura 1.5. Las líneas de las rejillas G_1 y G_2 son paralelas entre sí. Un haz colimado es enfocado por una lente L_1 hacia el centro de curvatura promedio de la córnea. Al igual que en el interferómetro de Twyman-Green, la reflexión de este haz en la córnea produce un haz divergente distorsionado debido a las deformaciones de la córnea respecto a la esfera de radio promedio de la córnea. Nuevamente, cuando este haz pasa de regreso por la lente L_1 , se obtiene un haz distorsionado (con respecto a un plano de referencia) que luego es dirigido por medio del divisor de haz hacia la rejilla G_1 . La sombra distorsionada de la rejilla G_1 se superpone a la rejilla G_2 para formar un patrón de moiré (Kafri [1981], [1988], Patorski [1989]). Este patrón contiene la información de la pendiente de la superficie en la dirección perpendicular a las líneas de las rejillas. Lo anterior significa que para obtener la pendiente de la superficie en dos direcciones ortogonales, se debe capturar un segundo patrón de moiré

girando 90 grados las dos rejillas alrededor del eje óptico. La topografía de la córnea se obtiene integrando las desviaciones en las dos direcciones.

Rottenkolber [1996] propone un sistema de deflectometría de moiré para medir la topografía de la córnea y reporta una sensibilidad de 0.024 mm (~ 0.13 D) para una región de 5 mm de diámetro centrada en el vértice. En su experimento utiliza los siguientes parámetros: separación de las rejillas, $d = 44$ mm; periodo de las rejillas, $p = 0.0128$ mm (78 líneas/mm); distancia focal de la lente L_1 , $f = 50$ mm; diámetro de la apertura efectiva, $a = 30$ mm.

La región de evaluación en este método, así como en el interferómetro de Tyman-Green, está limitada a una región menor de 5 mm. Debido a que la región útil de la córnea se extiende hasta unos 8 mm de diámetro (para visión nocturna) y el radio promedio de la córnea es 7.8 mm, la lente L_1 (L_2 en el interferómetro de Twyman-Green) debería tener un $F/\# < 1$ si se quiere evaluar esta región útil de la córnea. Esto hace que la lente L_1 (o L_2) sea algo más compleja que una simple lente; usualmente se usan objetivos fotográficos con un $F/\# \approx 1.7$.

1.2. Topógrafos basados en la reflexión difusa

Los siguientes tres métodos, franjas de moiré, raster-estereografía y perfilometría de Fourier, modifican el estado natural especular de la superficie anterior de la córnea, aplicando gotas de una sustancia fluorescente (Fluoresceína) para obtener una superficie que refleje la luz (ultravioleta) en forma difusa. Una vez que se ha transformado la córnea en una superficie difusora, algún tipo de luz estructurada, por ejemplo, franjas rectas y paralelas, es proyectada sobre la córnea. Debido a la topografía de la córnea, si las franjas son observadas en una dirección diferente a la dirección de proyección de las franjas, se observará un patrón de franjas distorsionado. Estos métodos tienen la ventaja respecto a los métodos de reflexión especular, que pueden evaluar toda la córnea.

Los tres métodos mencionados, básicamente se distinguen por el procesamiento de la información obtenida de la distorsión de las franjas. Los sistemas ópticos en los tres casos son similares. El eje óptico del proyector de franjas y el eje óptico del sistema formador de imagen están contenidos en un mismo plano y se interceptan en un punto cerca del ojo.

1.2.1. Franjas de moiré

El efecto de moiré se produce por la superposición de dos estructuras periódicas similares (Kafri [1990], Gasvik [1987]). Kawara [1979] utilizó el arreglo óptico de la figura 1.6 para medir la topografía de la córnea usando un patrón de moiré. Una rejilla de Ronchi G_1 se proyecta sobre la córnea por medio de un sistema telecéntrico (arriba); usando otro sistema telecéntrico (abajo) se proyecta la sombra distorsionada de las franjas sobre otra rejilla G_2 para obtener un patrón de moiré. Las franjas que se observan son circulares y al igual que en el interferómetro de Twyman-Green, estas franjas son de igual espesor. Por lo tanto, de las franjas se puede obtener directamente la topografía de la córnea.

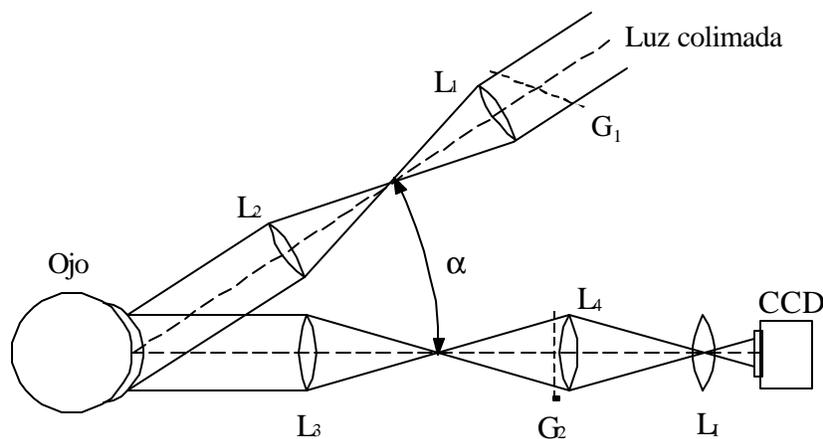


Figura 1.6. Sistema óptico para generar un patrón de moiré de la superficie de la córnea. El patrón de franjas se interpreta como un mapa de contorno de elevación, por lo tanto, la forma de la córnea se puede obtener directamente de las franjas con respecto a un plano de referencia.

En el arreglo de Kawara, el ángulo entre los dos sistemas telecéntricos fue ajustado en 29.8° y el periodo de las dos rejillas de Ronchi igual a $p = 0.0847\text{mm}$ (12 líneas/mm). Con esto la altura correspondiente a dos franjas consecutivas es igual a $h = 0.148\text{mm}$. La sensibilidad de este método se puede mejorar disminuyendo el período espacial de las rejillas de Ronchi o aumentando el ángulo entre el sistema de proyección y el formador de imagen, sin embargo, al igual que en la deflectometría de moiré, la sensibilidad y la resolución están limitadas por la difracción.

1.2.2. Raster-estereografía

Este método de proyección de franjas recibe su nombre de la similitud que tiene su sistema óptico con un sistema de visión estereoscópica. En la raster-estereografía una de las cámaras de visión es reemplazada por el sistema de proyección de franjas (también llamado raster) como se muestra en la figura 1.7 (Hierholzer [1982], Warnicki [1988]).

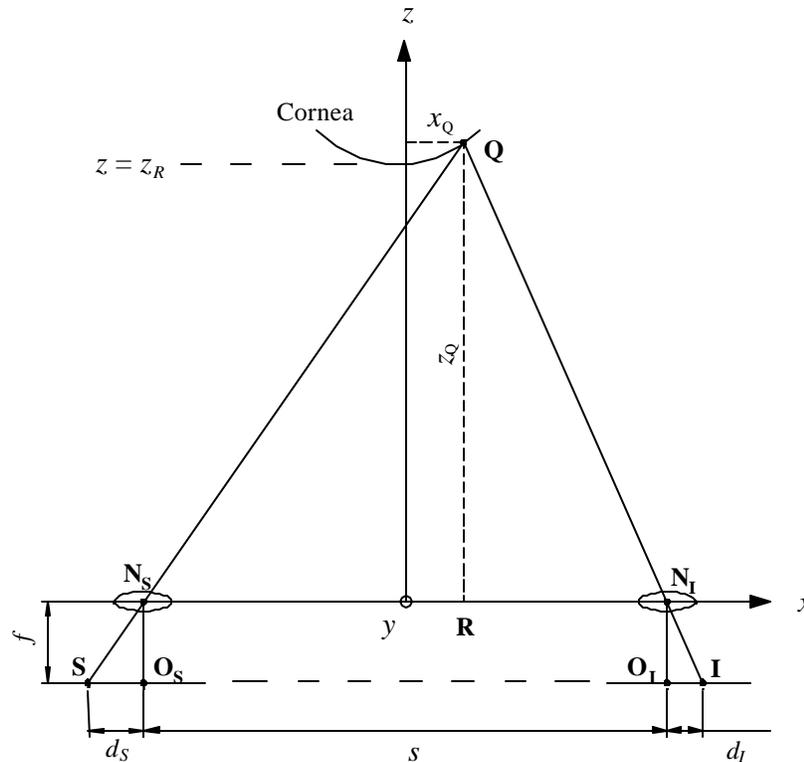


Figura 1.7. El sistema de Raster-estereografía se diferencia de un sistema convencional de visión estereoscópica en que una de las cámaras se reemplaza por un proyector de franjas. Midiendo las distancias d_s y d_l es posible determinar la elevación z_Q por medio de triangulación.

Los ejes ópticos de los sistemas de proyección y formación de imagen (cámara de vídeo) son coplanares, paralelos y están separados una distancia s . N_S y N_I son los puntos nodales de los sistemas de proyección y formación de imagen, respectivamente. N_S y N_I están contenidos en una línea perpendicular a los ejes ópticos; esta línea hace el papel del eje x . El punto objeto S y el punto imagen I , a su vez, están contenidos en una línea paralela al eje x y a una distancia f . Entonces, el sistema de proyección proyecta el punto objeto S sobre la córnea en el punto Q ; I es la imagen de Q formada por la cámara de vídeo. De la

figura 1.7 se encuentra que la elevación relativa (o sagita) de la córnea está dada por $z_Q = s f / (d_s + d_I)$, donde d_s es la distancia de un punto objeto **S** del sistema de franjas en el proyector con respecto al origen O_s (positivo si **S** está a la izquierda de O_s), mientras que d_I es la distancia entre el punto imagen **I** (correspondiente a **S**) con respecto al origen O_I (positivo si **I** está a la derecha de O_I).

Warnicki [1988] reporta una sensibilidad de 0.04 mm en el valor del radio de curvatura de la córnea, lo cual es equivalente a aproximadamente 0.3 D.

1.2.3. Perfilometría de Fourier

En la perfilometría de Fourier la topografía de un objeto con una superficie difusora, se reconstruye por medio del análisis espectral de Fourier de las franjas distorsionadas sobre la superficie del objeto. El análisis de Fourier se hace tal y como lo mostró Takeda [1982], [1983].

Tomando la transformada espacial de Fourier del patrón distorsionado de las franjas, se obtiene la fase $\phi(x, y)$ del frente de onda que describe la distorsión. Si el eje óptico del sistema proyector forma un ángulo α con el sistema formador de imagen, la fase $\phi(x, y)$ y la variación de la elevación $h(x, y)$ de la superficie del objeto están relacionadas por $h(x, y) = \phi(x, y) / 2\pi f_0 \tan(\alpha)$, donde f_0 es la frecuencia espacial de las franjas (no distorsionadas).

Jongsma [1998] mide la topografía de la córnea usando el método de Takeda. El sistema óptico utilizado es básicamente una modificación del sistema utilizado por Kawara [1979], como se muestra en la figura 1.8. Jongsma incluye dos proyectores de franjas colocados simétricamente con respecto al sistema formador de imagen. La proyección de las franjas no se hace simultáneamente sino de manera alternada, de modo que las líneas impares del sensor CCD registran la imagen de las franjas distorsionadas generadas por uno de los proyectores y las líneas pares del sensor CCD registran la imagen de las franjas distorsionadas generadas por el otro sistema de proyección. Estas imágenes son analizadas independientemente y luego se combinan sus resultados en el proceso de reconstrucción de la topografía. De esta manera, la pérdida de información que se pueda tener con una de las imágenes es compensada con la información de la otra imagen. La sensibilidad en la medida

del radio de curvatura reportada por Jongsma para una región de 10 mm alrededor del vértice es 0.015 mm (0.1 D).

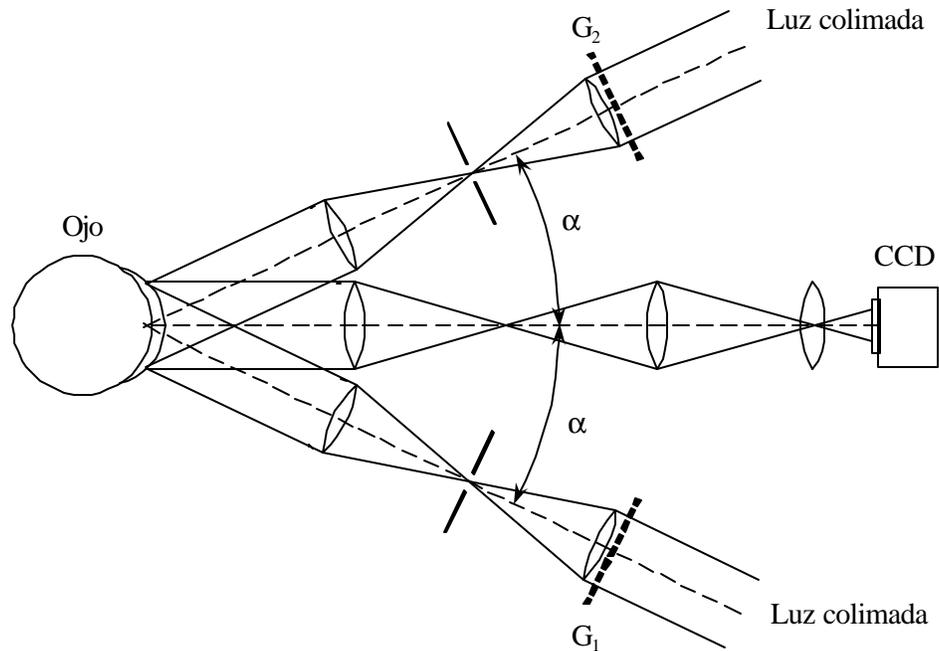


Figura 1.8. Perfilometría de Fourier. Dos sistemas telecéntricos proyectan dos rejillas senoidales G_1 y G_2 sobre la superficie de la córnea. Del análisis de Fourier de cada uno de los patrones de franjas se determina la forma de la córnea.

1.3. Topógrafos basados en el esparcimiento de luz

Cuando la luz entra en un material transparente, parte de la luz es reflejada, otra parte se transmite de acuerdo a la ley de Snell y otra parte es esparcida dentro del material (Hecht [1998]). El esparcimiento de luz es un fenómeno donde un fotón es absorbido, e inmediatamente después, se emite otro fotón de la misma frecuencia en una dirección aleatoria. El tejido de la córnea actúa como medio transparente que esparce parte de la luz. Parte de esta luz esparcida emerge a través de la superficie anterior de la córnea, siendo posible su registro por un sistema óptico formador de imagen. La imagen obtenida aparece como una banda de luz, cuyos bordes dan información sobre la forma de las superficies anterior y posterior de la córnea.

1.3.1. La lámpara de rendija

La lámpara de rendija proyecta una imagen de una rendija luminosa de ancho ajustable sobre una región deseada del ojo (Le Grant [1980], Buschner [1982]). El sistema óptico consta de un sistema de proyección de la rendija y un sistema óptico formador de imagen. Ya que este sistema óptico es similar a los sistemas ópticos usados en los métodos de proyección de franjas (§1.2), la obtención de la forma de las superficies anterior y posterior de la córnea se hace por métodos de triangulación.

El instrumento ORBSCAN II [1999], emplea una configuración similar a la utilizada en la perfilometría de Fourier, esto es, introduce dos sistemas de proyección de múltiples rendijas ubicados simétricamente con respecto al eje óptico del sistema formador de imagen. La sensibilidad reportada en el catálogo de este instrumento es de 0.005 mm en la elevación de la córnea. Este método, al igual que en los métodos de reflexión difusa, puede evaluar el área total de la córnea.

Lo más relevante del capítulo

Los métodos basados en la reflexión especular, como el sistema de anillos de Placido, el interferómetro de Twyman-Green y la deflectometría de moiré, determinan la forma de la cornea con respecto a una esfera de referencia, usualmente de radio 7.8 mm, que corresponde al radio promedio de córneas normales en adultos. El sistema de anillos de Placido y la deflectometría de moiré miden la inclinación del rayo reflejado con respecto a la esfera de referencia. Lo anterior es equivalente a medir la pendiente de la superficie de prueba con respecto a la esfera de referencia. El sistema de anillos de Placido, emplea un algoritmo que usa la información de la pendiente para evaluar la curvatura y la elevación en la dirección radial (meridional). En la deflectometría de moiré la elevación de la córnea se obtiene integrando los datos de la pendiente de la superficie. El interferómetro de Twyman-Green mide directamente la elevación de la córnea con respecto a la esfera de referencia.

Los métodos basados en la reflexión difusa, como las franjas de moiré, la perfilometría de Fourier y la raster-estereografía, proyectan un patrón de franjas, usualmente una rejilla de Ronchi, sobre la córnea. Para obtener reflexión difusa de las franjas proyectadas se requiere

aplicar gotas de una sustancia fluorescente (Fluoresceína) sobre la córnea. Estos métodos miden la elevación de la córnea con respecto a un plano de referencia.

El método basado en el esparcimiento de la luz, esto es la lámpara de rendija, permite medir la superficie anterior y posterior de la córnea de manera simultánea. Este método también mide directamente la elevación de las superficies de la córnea.

Los métodos basados en la reflexión especular, así como las franjas de moiré, deben mantener una correcta alineación del eje óptico y el eje visual de ojo. El descentrado de la córnea produce errores en la medición de la forma, así como en la localización del vértice. Los métodos de la reflexión especular también son sensibles al corrimiento axial (defoco).

En la Tabla 1.1 se resumen algunas de las características de los métodos presentados en este capítulo. En general, ninguno de los autores que reportan los diferentes métodos, dan de manera simultánea la información de la precisión del radio de curvatura y de la elevación. Lo anterior puede ser debido a la dificultad de propagar el error de una a otra representación, ya que la elevación y el radio de curvatura no son funciones lineales entre sí.

Tabla 1.1 Características generales de algunos métodos empleados para medir la forma de la córnea.

TECNICA	METODO	Parámetro medido	Región de medida Diámetro (mm)	Precisión	
				Curvatura (D)	Elevación (mm)
REFLEXION ESPECULAR	ANILLOS DE PLACIDO	Pendiente	7	0.10 – 0.25	-
	INTERFEROMETRÍA	Elevación	5	-	0.0005
	DEFLECTOMETRIA DE MOIRE	Pendiente	5	0.15	-
REFLEXION DIFUSA	FRANJAS DE MOIRE	Elevación	Toda la córnea	-	0.100
	RASTER-ESTEREOGRAFIA	Elevación	Toda la córnea	0.30	-
	PERFILOMETRÍA DE FOURIER	Elevación	Toda la córnea	0.10	-
ESPARCIMIENTO DE LUZ	LAMPARA DE RENDIJA	Elevación	Toda la córnea	-	0.005

2. Mapas de curvatura

Varios estudios experimentales que aparecen en la literatura (Humphrey [1983]) han demostrado que la mayor parte de las córneas normales, se pueden caracterizar mediante un modelo elipsoidal con una excentricidad 0.5 y con el vértice descentrado hacia la zona temporal con respecto al eje óptico en 0.4 mm aproximadamente. La superficie anterior de la córnea tiene un radio promedio igual a 7.80 ± 0.26 mm y un ligero astigmatismo de 0.55 ± 0.35 D con la regla. Se dice que el astigmatismo es con la regla cuando la curvatura del meridiano vertical en el vértice es mayor que la curvatura del meridiano horizontal en el vértice. Teniendo en cuenta estos resultados, introduciremos en este capítulo un modelo elipsoidal para la superficie de la córnea con el vértice centrado en el eje óptico. Esta superficie modelo se usará para evaluar los diferentes tipos de mapas de curvatura que se desarrollarán en este capítulo.

Una de las dificultades para representar la topografía de la córnea con mapas de elevación ($x, y, z = \text{altura}$), estriba en que las desviaciones de la forma de la córnea con respecto a una esfera de referencia para una región de 8 mm aproximadamente, pueden ser del orden de las decenas de micras, por lo que los cambios de elevación aparecerán como insignificantes para esa región. En lugar de utilizar mapas con zonas de igual altura, los optómetras y oftalmólogos han introducido mapas de curvatura o potencia refractora ($x, y, c = \text{curvatura}$), que les permite tener una mejor visualización de los cambios en la forma de la córnea. Sin embargo, el concepto de "curvatura axial" comúnmente usado en optometría y oftalmología conduce a una descripción errónea de la forma de la córnea, como se verá más adelante.

Los conceptos de curvatura y poder de refracción son empleados en optometría y oftalmología para describir: (a) el proceso de formación de imágenes en la región paraxial (Pedrotti [1998]) y (b) la topografía de la córnea (Barsky [2000]). En la formación de imágenes, la ecuación de refracción de Gauss para una superficie esférica de radio r , suponiendo que la luz viaja de izquierda a derecha de un medio de índice de refracción n_1 a otro de medio de índice de refracción n_2 se escribe como $U + P = V$. Donde U representa la curvatura del frente de onda en el medio n_1 que diverge de un punto objeto que está a una

distancia l del vértice de la superficie esférica, esto es, $U = n_1/l$; V representa la curvatura del frente de onda en el medio n_2 que converge desde la superficie esférica hasta el punto imagen que está a una distancia l' del vértice de la superficie esférica, esto es, $V = n_2/l'$; y P es la potencia refractora de la superficie dada por $(n_2 - n_1)/r$. Con esta forma de la ecuación de Gauss, se establece que la curvatura del frente de onda objeto es modificada por la potencia refractora de la superficie para producir el frente de onda imagen. Las unidades que se suelen utilizar para la curvatura y la potencia refractora son las dioptrías [D]; una dioptría es el inverso de una longitud igual a 1 m. En la descripción de la topografía de la córnea, se usan los mapas de curvatura en unidades de dioptrías. Esta conversión de unidades se hace mediante la definición de potencia refractora $P = (n - 1)c$, donde $n = 1.3375$ es el índice efectivo de la córnea y c es la curvatura en 1/m. Esta representación en dioptrías se llama mapas de potencia refractora. El concepto de mapas de potencia refractora no es apropiado para representar la forma de la córnea, ya que la potencia de refracción describe la desviación de los rayos luminosos en el proceso de refracción y no la forma de la córnea. A pesar de lo anterior, y con el propósito de mantener la notación usual en optometría y oftalmología, en esta tesis se presentarán los mapas de curvatura en unidades de dioptrías. Gráficamente, a la coordenada (x, y) se le asigna un color que equivale al valor de la curvatura. Con el propósito de familiarizarse con estas unidades, en el Apéndice 2 se da una tabla de conversión de la curvatura en dioptrías al radio de curvatura en milímetros.

Este capítulo desarrolla el concepto de curvatura según la geometría diferencial y describe varios tipos de curvatura que pueden ser utilizados para representar la forma de la córnea en términos de mapas de curvatura. La descripción de los conceptos geométricos más relevantes para el desarrollo de esta tesis se hace con cierto detalle, pero se omite la demostración matemática, lo cual se puede consultar en Kreyszig [1991] y Weatherburn [1939]. Se discute el concepto de curvatura axial utilizado en optometría y oftalmología, y se muestra que este concepto conduce a interpretaciones erradas en la forma de la córnea.

2.1. Curvatura en una superficie

Un punto de una superficie $S : z = f(x, y)$ definida en un sistema de coordenadas Cartesiano tridimensional, se puede describir mediante un vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$. A su vez, las

coordenadas x , y , z , se pueden representar como funciones de dos parámetros de variable real u , v . Por lo tanto, es posible describir la superficie S en forma paramétrica por medio de la función vectorial

$$S: \mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}. \quad (2.1)$$

Por ejemplo, un elipsoide se puede escribir como

$$S: \mathbf{r}(u, v) = \{x_0 \cos u \operatorname{sen} v, y_0 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z_0 \cos v\}, \quad (2.2)$$

donde u ($0 \leq u < 2\pi$) representa el ángulo azimutal medido en dirección contraria a las manecillas del reloj desde el eje x ; y el ángulo v ($0 \leq v < \pi/2$) representa la declinación medida desde el eje z ; x_0 , y_0 y z_0 son constantes. La figura 2.1 muestra esta superficie en el espacio Cartesiano.

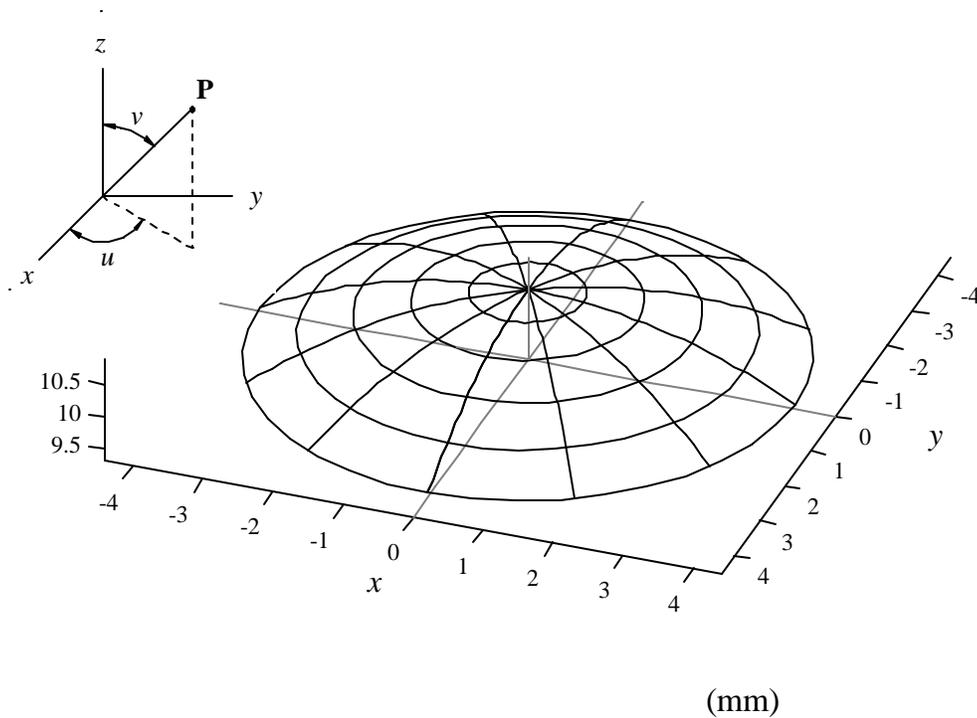


Figura 2.1. Superficie elipsoidal; $x_0 = 9.00$ mm, $y_0 = 8.80$ mm, $z_0 = 10.40$ mm. El radio de curvatura en la dirección x es $R_x = 7.79$ mm y en la dirección y es $R_y = 7.45$ mm. Esta superficie simula una córnea con astigmatismo regular con la regla de 2 D.

Una curva C de la superficie S se obtiene mediante la intersección de la superficie con otra superficie. Matemáticamente, la curva se obtiene mediante la representación

paramétrica $u = u(t)$ y $v = v(t)$, siendo t un parámetro de valor real. Así, la curva C estará dada por

$$C: \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \quad (2.3)$$

Dos tipos de curvas de la superficie S se obtienen cuando $u = cte.$ ó $v = cte.$ ($cte. \equiv$ constante); estas curvas se denominan *curvas coordenadas*. En el ejemplo de la figura 2.1, las curvas coordenadas $u = cte.$ se obtienen de la intersección entre la superficie y planos que contienen al eje z ; estas curvas se denominan *meridianos*. Las curvas coordenadas $v = cte.$ se obtienen de la intersección entre la superficie y planos paralelos al plano xy ; estas curvas se denominan *paralelos*.

Otro tipo de curvas que se pueden definir en una superficie son las *secciones normales*. Una sección normal es una curva plana de la superficie S que pasa por un punto \mathbf{P} y que resulta de la intersección entre la superficie y un plano que contiene a la normal de la superficie en \mathbf{P} . El *vector normal* unitario de una superficie $S: \mathbf{r}(u, v)$ se determina como

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

El *vector tangente* \mathbf{t} de una curva determina la *dirección de la curva* en un punto dado y se determina por

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

El *círculo osculador* de una curva en el punto \mathbf{P} es el círculo que contiene al punto \mathbf{P} y cuya primera y segunda derivadas en \mathbf{P} coinciden con la primera y segunda derivadas de la curva en \mathbf{P} , respectivamente. Lo anterior significa que la forma de una curva en la vecindad de un punto \mathbf{P} , se puede aproximar hasta el segundo orden mediante un segmento de arco del círculo osculador de la curva en \mathbf{P} . La curva definida por los centros de los círculos

osculadores se denomina *evoluta*. El plano que contiene al círculo osculador se denomina *plano osculador*.

La *curvatura* c de una curva en el punto \mathbf{P} es el inverso del radio del círculo osculador de la curva en \mathbf{P} y mide la variación de la rotación del vector tangente de la curva. La curvatura de una curva \mathcal{C} se calcula por

$$c = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}. \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{r}'' = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$. El radio del círculo osculador también se denomina *radio de curvatura*.

El *vector normal principal* \mathbf{p} de una curva en \mathbf{P} es un vector unitario cuya dirección va del punto \mathbf{P} al centro del círculo osculador de la curva en \mathbf{P} . Por lo tanto, el vector normal principal en \mathbf{P} es perpendicular al vector tangente de la curva en \mathbf{P} y está contenido en el plano osculador.

Cuando una curva \mathcal{C} no es una curva plana (intersección entre un plano y la superficie \mathcal{S}), se dice que la curva se tuerce en el espacio. La *torsión* de una curva en el punto \mathbf{P} es una cantidad que mide la variación del giro del plano osculador en \mathbf{P} . En una curva plana la torsión para cualquier punto es cero, ya que todos los planos osculadores están contenidos en un mismo plano.

Cuando una curva \mathcal{C} de la superficie \mathcal{S} en \mathbf{P} es una sección normal, el vector normal principal \mathbf{p} de la curva coincide con el vector normal \mathbf{n} de la superficie. Por lo tanto, los centros de curvatura de todas las secciones normales de una superficie en \mathbf{P} se encuentran a lo largo de la normal de la superficie. Las curvaturas de las secciones normales se denominan *curvaturas normales*.

Para una superficie $\mathcal{S} : \mathbf{r}(u, v)$ con primera y segunda derivadas parciales continuas dadas por $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $\mathbf{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}$, las curvaturas normales c_n máxima y mínima en el punto \mathbf{P} , denominadas *curvaturas principales*, están dadas por las raíces de la ecuación cuadrática

$$g c_n^2 - [b_{uu} g_{vv} + 2b_{uv} g_{uv} + b_{vv} g_{uu}] c_n + b = 0 \quad (2.7)$$

donde $g_{\alpha\gamma}$ y $b_{\alpha\gamma}$ (con $\alpha = u, v$ y $\gamma = u, v$) son las componentes de los tensores de segundo orden correspondientes a la primera y segunda forma fundamentales de la geometría diferencial (Kreyszig [1991]), respectivamente. Estas componentes están definidas como $b_{\alpha\gamma} = \mathbf{r}_{\alpha\gamma} \cdot \mathbf{n}$ y $g_{\alpha\gamma} = \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\gamma}$. El punto (\cdot) denota el producto escalar. Los discriminantes g y b están dados por $g = g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2$ y $b = b_{uu} b_{vv} - b_{uv}^2$. Las direcciones (vectores tangente) de las secciones normales en \mathbf{P} para las cuales se obtienen la curvatura máxima y mínima son ortogonales entre sí y se denominan *direcciones principales*.

Una curva de la superficie cuya dirección en cada uno de sus puntos es una dirección principal, se denomina *línea de curvatura*. Las líneas de curvatura constituyen un sistema ortogonal de curvas que se pueden obtener del determinante

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ g_{uu} & g_{uv} & g_{vv} \\ b_{uu} & b_{uv} & b_{vv} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Las raíces $(dv/du)_{\pm}$ de la Eq. (2.8) permiten encontrar una nueva representación paramétrica $v = v_{\pm}(u)$. Reemplazando esta representación en la Eq. (2.1), se obtiene las líneas de curvatura.

De las curvaturas principales y direcciones principales (líneas de curvatura) de la superficie en \mathbf{P} , es posible determinar la curvatura de cualquier sección normal que pase por \mathbf{P} de acuerdo al teorema de Euler. Este teorema se puede enunciar así: sea η el ángulo entre las tangentes de la sección principal con curvatura c_1 y una sección normal en \mathbf{P} , entonces la curvatura c_n de la sección normal está dada por

$$c_n = c_1 \cos^2 \eta + c_2 \sin^2 \eta. \quad (2.9)$$

donde c_2 es la curvatura de la otra sección principal. Otro resultado importante está dado por el teorema de Meusnier, el cual se puede enunciar así: sea r_n el radio de curvatura de una sección normal de la superficie en \mathbf{P} y sea r el radio de curvatura de cualquier otra curva plana de la superficie en \mathbf{P} con la misma tangente de la sección normal, entonces r_n y r están relacionados por

$$r = r_n \cos \gamma, \quad (2.10)$$

donde γ es el ángulo entre los planos que contienen las dos curvas. La intersección de estos dos planos es precisamente la tangente que determina la dirección de las dos curvas en \mathbf{P} .

2.2. Mapa de curvatura meridional y el concepto de curvatura axial

2.2.1. Curvatura meridional

La curvatura meridional es la curvatura de los meridianos de una superficie. Estos meridianos se pueden definir para una superficie en general como las curvas planas obtenidas mediante la intersección de planos que contienen al eje z (eje óptico) y a la superficie. Por ejemplo, para el elipsoide dado por la Eq. (2.2), los meridianos se obtienen cuando $u = u_0 = cte.$ y la curvatura meridional de acuerdo a la Eq. (2.6) está dada por:

$$c_m = \frac{z_0 [x_0^2 \cos^2 u_0 + y_0^2 \sin^2 u_0]^{1/2}}{[(x_0^2 \cos^2 u_0 + y_0^2 \sin^2 u_0) \cos^2 v + z_0^2 \sin^2 v]^{3/2}} \quad (2.11)$$

El mapa de curvatura meridional en dioptrías ($P = 337.5c$ con c en 1/mm) para el elipsoide de la Eq. (2.2) en una región de 8 mm se muestra en la figura 2.2(a). Los valores de las constantes $x_0 = 9.00$ mm, $y_0 = 8.80$ mm y $z_0 = 10.40$ mm, se han escogido tal que el radio de curvatura en el vértice $(0, 0, z_0)$ de la superficie para el meridiano en la dirección x ($u_0 = 0$ y $v = 0$) sea $R_x = x_0^2 / z_0 = 7.79$ mm (radio promedio de la córnea), mientras que el radio de curvatura en el vértice de la superficie para el meridiano en la dirección y ($u_0 = \mathbf{p}/2$ y $v = 0$) sea $R_y = y_0^2 / z_0 = 7.45$ mm. Este mapa de curvatura meridional se interpreta como una córnea con astigmatismo regular de 2 D con la regla en el vértice. En el vértice todos los meridianos son secciones normales de la superficie y la curvatura varía según la dirección de cada meridiano.

Los mapas de curvatura meridional se utilizan en optometría y oftalmología para representar la forma de la córnea. Estos mapas reciben el nombre de mapas de *curvatura instantánea, verdadera o tangencial*. Quizás, la razón más importante para el uso de este tipo de mapas, es que los algoritmos que emplean los sistemas de anillos de Placido reconstruyen la forma de la córnea a lo largo de los meridianos. Por otra parte, la

descripción de la forma de la superficie en términos de los círculos osculadores de los meridianos es relativamente simple, ya que todos los círculos osculadores de un meridiano están contenidos en un solo plano.

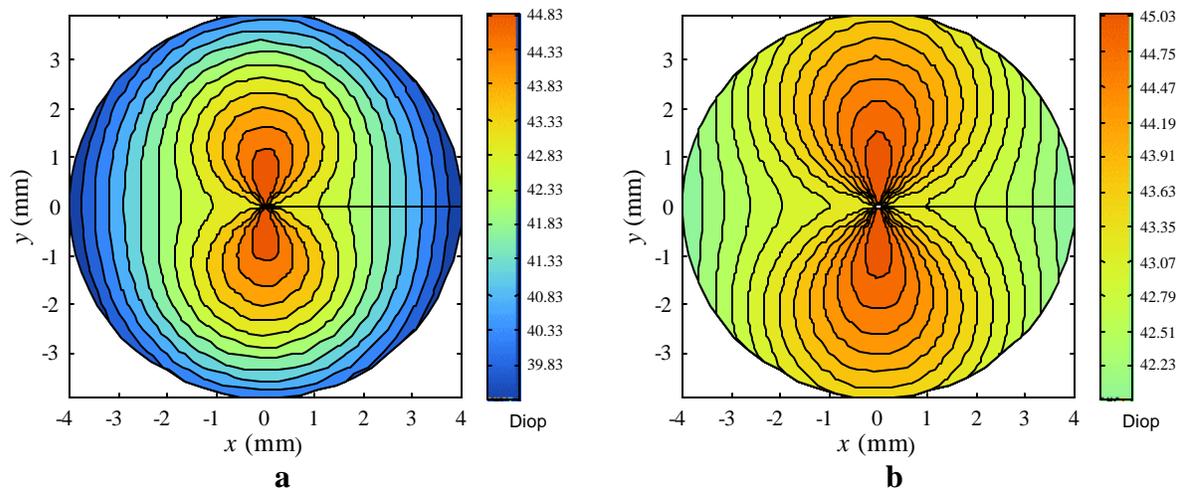


Figura 2.2. Mapas de curvatura (a) meridional y (b) axial en dioptrías de la superficie de la figura 2.1. La forma de la córnea de acuerdo a la figura 2.2(b) aparece más plana de lo que realmente es (figura 2.2(a)). El concepto de curvatura axial conduce a una descripción errónea de la forma de la córnea.

2.2.2. Curvatura axial

Además del mapa de curvatura meridional se suele usar en optometría y oftalmología una representación denominada *mapa de curvatura axial* (figura 2.2(b)). En realidad, el mapa de curvatura axial se utiliza con mayor frecuencia que el mapa de curvatura meridional.

En la figura 2.3 se ilustra un meridiano de la superficie elipsoidal y su evoluta. El centro de curvatura del meridiano en el punto \mathbf{P} es \mathbf{C}_P y por definición, este está contenido en la evoluta. La línea que une \mathbf{P} y \mathbf{C}_P está en la dirección de la normal principal del meridiano en \mathbf{P} . El radio de "curvatura axial" de la superficie en el punto \mathbf{P} se define como la distancia d_a medida a lo largo de la normal principal del meridiano desde el punto \mathbf{P} hasta la intersección \mathbf{k}_a de la normal con el eje z (eje óptico). Se puede mostrar que la distancia d_a está dada por $d_a = \sin\phi/\rho$, donde ϕ es el ángulo entre la normal principal de la curva meridional y el eje z , y ρ es la distancia entre el eje z y el punto \mathbf{P} . El círculo osculador de la curva meridional con centro en \mathbf{C}_P describe la forma de la curva en la vecindad de \mathbf{P} , mientras que un círculo con centro en \mathbf{k}_a y radio d_a no describe correctamente la forma de la curva en \mathbf{P} . Por lo tanto,

un mapa de curvatura axial no describe en general la forma de la córnea, obteniéndose una córnea más o menos aplanada de lo que realmente es. Lo anterior resulta evidente al comparar los mapas de las Figuras 2.2(a) y 2.2(b).

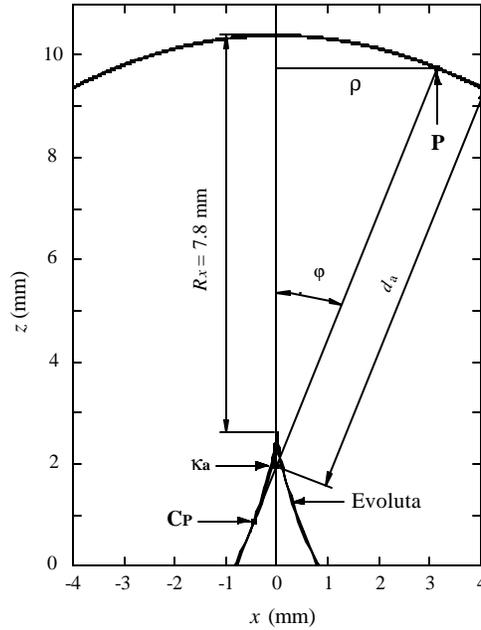


Figura 2.3. Evoluta de la curva meridional en la dirección x de la superficie elíptica de la figura 2.1. El punto C_P es el centro de curvatura de la curva meridional en P ; la distancia $C_P P$ es el radio del círculo osculador de la curva en P ; y el punto K_a es la intersección entre la normal principal de la curva meridional y el eje z . El inverso de la distancia $K_a P$ define el concepto de curvatura axial usado en optometría y oftalmología.

2.3. Mapas de curvaturas principales

Estos mapas no se utilizan en la práctica, sin embargo, constituyen un sistema de información más completo y preciso de la forma de la superficie en términos de la curvatura. Por otra parte, como se verá más adelante, es posible definir otro tipo de curvaturas a partir de las curvaturas principales, como por ejemplo, la curvatura Gaussiana, la curvatura promedio y el cilindro.

Las curvaturas principales, esto es las curvaturas máxima y mínima, para el elipsoide de la Eq. (2.2) se obtienen resolviendo la Eq. (2.7), donde cada término está dado por:

$$g_{uu} = (x_0^2 \sen^2 u + y_0^2 \cos^2 u) \sen^2 v; \quad g_{vv} = (x_0^2 \cos^2 u + y_0^2 \sen^2 u) \cos^2 v + z_0^2 \sen^2 v;$$

$$g_{uv} = \frac{1}{4}(y_0^2 - x_0^2) \text{sen}(2u) \text{sen}(2v);$$

$$g = (x_0^2 \text{sen}^2 u + y_0^2 \cos^2 u) z_0^2 \text{sen}^4 v + x_0^2 y_0^2 \text{sen}^2 v \cos^2 v;$$

$$b_{uu} = \frac{x_0 y_0 z_0}{\sqrt{g}} \text{sen}^3 v; \quad b_{vv} = \frac{x_0 y_0 z_0}{\sqrt{g}} \text{sen} v; \quad b_{uv} = 0;$$

$$b = \frac{(x_0 y_0 z_0)^2}{g} \text{sen}^4 v.$$

Reemplazando cada uno los términos en la Eq. (2.7) y resolviendo para las dos raíces, se obtienen las curvaturas principales dadas por:

$$c_n = \frac{x_0 y_0 z_0}{2g\sqrt{g}} \text{sen}^3 v \left[h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - 4g / \text{sen}^2 v} \right] \quad (2.12)$$

donde $h_0 = x_0^2 (\cos^2 u \cos^2 v + \text{sen}^2 u) + y_0^2 (\text{sen}^2 u \cos^2 v + \cos^2 u) + z_0^2 \text{sen}^2 v$. Las Figuras 2.4(a) y 2.4(b) muestran los mapas de las curvaturas principales máxima y mínima para el elipsoide de la figura 2.1.

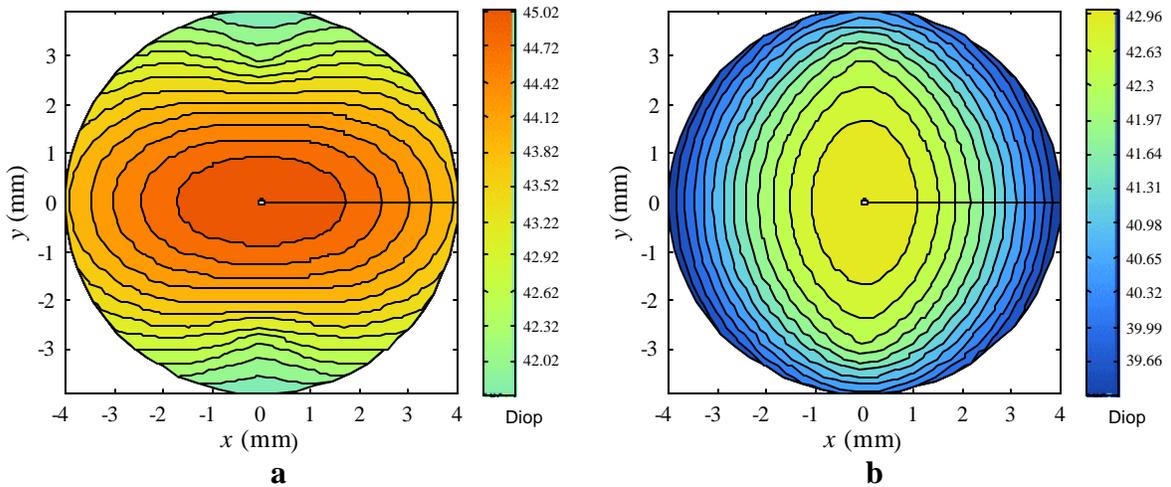


Figura 2.4. Mapas de curvatura principal de la figura 2.1; (a) máxima y (b) mínima.

Los mapas de las Figuras 2.4(a) y 2.4(b) permiten obtener los valores de curvatura máxima y mínima, pero no las direcciones para las cuales se obtienen estos valores. Así pues, para que la información dada por los mapas de curvaturas principales sea completa, es

necesario incluir las líneas de curvatura dadas por la Eq. 2.8. Reemplazando los coeficientes g_{ag} y b_{ag} para el elipsoide (figura 2.1) se obtiene

$$\frac{dv}{du} = \frac{2\text{sen}^2 v}{(y_0^2 - x_0^2)\text{sen}(2u)\text{sen}(2v)} \left[h_0' \pm \sqrt{h_0'^2 + (y_0^2 - x_0^2)\text{sen}(2u)\text{sen}(2v)/4\text{sen}^2 v} \right] \quad (2.13)$$

donde $h_0' = x_0^2(\cos^2 u \cos^2 v - \text{sen}^2 u) + y_0^2(\text{sen}^2 u \cos^2 v - \cos^2 u) + z_0^2 \text{sen}^2 v$. Con el signo (+) se obtiene las líneas de curvatura máxima y con el signo (-) las líneas de curvatura mínima. Estas líneas se muestran en la figura 2.5; las curvas en rojo corresponden a las líneas de curvatura mínima y las curvas en azul corresponden a las líneas de curvatura máxima. Nótese que la mayoría de las líneas de curvatura son curvas con torsión diferente de cero. La línea de curvatura en la dirección y cambia de color, es decir, en cierto intervalo es una línea de curvatura máxima y luego cambia a una línea de curvatura mínima por fuera de ese intervalo. Los límites del intervalo están determinados por puntos donde la curvatura de la superficie es constante en cualquier dirección; a estos puntos se les denomina puntos *umbílicos*. La posición de los puntos umbílicos se puede determinar cuando el término dentro del radical de la Eq. (2.13) es igual a cero y $u = \pi/2, 3\pi/2$. Se puede mostrar que los valores para los cuales se obtienen los puntos umbílicos son $(u, v) = (\pi/2, 0.347)$ y $(u, v) = (3\pi/2, 0.347)$, aproximadamente.

La forma de la superficie también se puede describir en términos de los círculos osculadores de las líneas de curvatura, pero debido a que la mayoría de estas líneas tiene torsión diferente de cero, los círculos osculadores no están contenidos en un solo plano, lo que dificulta su interpretación.

Supongamos que se requiere evaluar la curvatura meridional de la superficie elipsoidal en la dirección \mathbf{t}_m en el punto \mathbf{P} a partir de las curvaturas principales. Las direcciones principales \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 en \mathbf{P} , es decir, los vectores tangente de las líneas de curvatura, se obtienen de las Eqs. (2.2) con $v = v(u)_\pm$ y (2.13) por medio de

$$\mathbf{t}(u, v)|_\pm = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left(\frac{dv}{du} \right)_\pm, \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{t}_+ \equiv \mathbf{t}_1$ es la dirección de la sección normal con curvatura máxima y $\mathbf{t}_- \equiv \mathbf{t}_2$ es la dirección de la sección normal con curvatura mínima en \mathbf{P} . Como \mathbf{t}_m , \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 son vectores tangente de la superficie en \mathbf{P} , éstos están contenidos en el plano tangente de la superficie en \mathbf{P} .

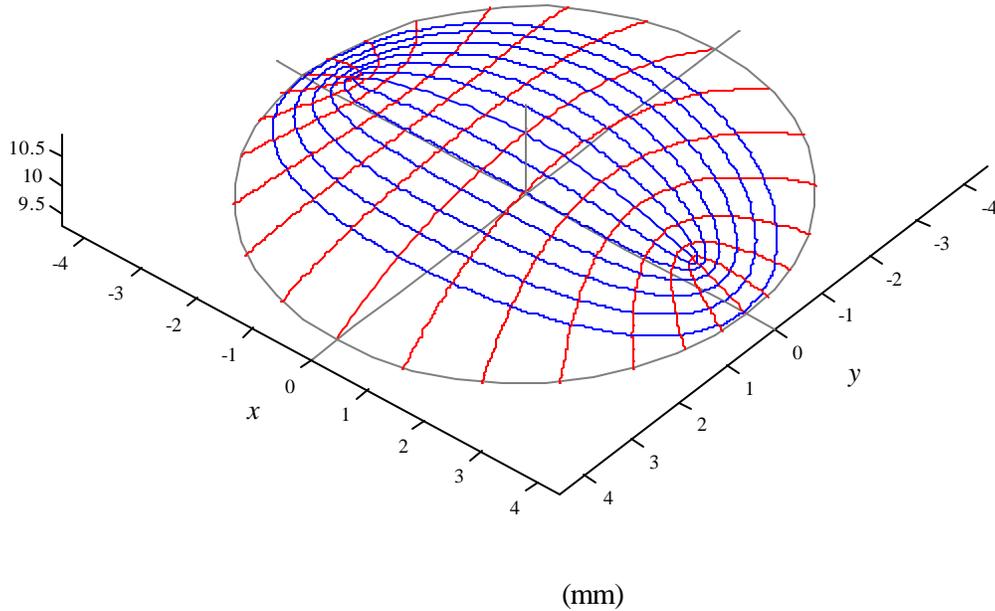


Figura 2.5. Líneas de curvatura máxima (azul) mínima (rojo) de la superficie elíptica (figura (2.1)). La línea de curvatura en la dirección y cambia de color cuando pasa por los puntos umbílicos.

Por ejemplo, si las coordenadas de \mathbf{P} son $(u, v) = (\pi/6, \pi/8)$, como se muestra en la figura 2.6, es posible mostrar que el ángulo entre \mathbf{t}_m y \mathbf{t}_1 es $\eta = 77.58^\circ$. Las curvaturas principales en \mathbf{P} de la Eq. (2.12) son $c_1 = 0.13003029/\text{mm}$ y $c_2 = 0.11997072/\text{mm}$. Entonces, de acuerdo al teorema de Euler (Eq. (2.9)), la curvatura de la sección normal de la superficie cuya dirección es \mathbf{t}_m en \mathbf{P} es $c_n = 0.12043568/\text{mm}$. Ya que la superficie elipsoidal de la Eq. (2.2) no es una superficie de revolución, se tiene que la normal principal de la sección normal que pasa por \mathbf{P} y la normal principal de la curva meridional que pasa por \mathbf{P} no son iguales. El ángulo entre las dos normales es $\gamma = 0.48^\circ$. Aunque este ángulo parece pequeño, este es el responsable de que la reflexión de un rayo de luz meridional en \mathbf{P} sea un rayo oblicuo. Para obtener el valor de la curvatura del meridiano que pasa por \mathbf{P} , se utiliza el teorema de Meusnier, de donde se obtiene $c_m = c_n / \cos \gamma = 0.12043997/\text{mm}$. Por supuesto, este resultado es el mismo que se obtiene de la Eq. (2.6). Entonces, de las curvaturas

principales y sus direcciones, es posible determinar la curvatura de cualquier curva plana de la superficie, en particular, la curvatura de los meridianos. Este resultado es útil en aquellos métodos que miden directamente las curvaturas principales de la superficie.

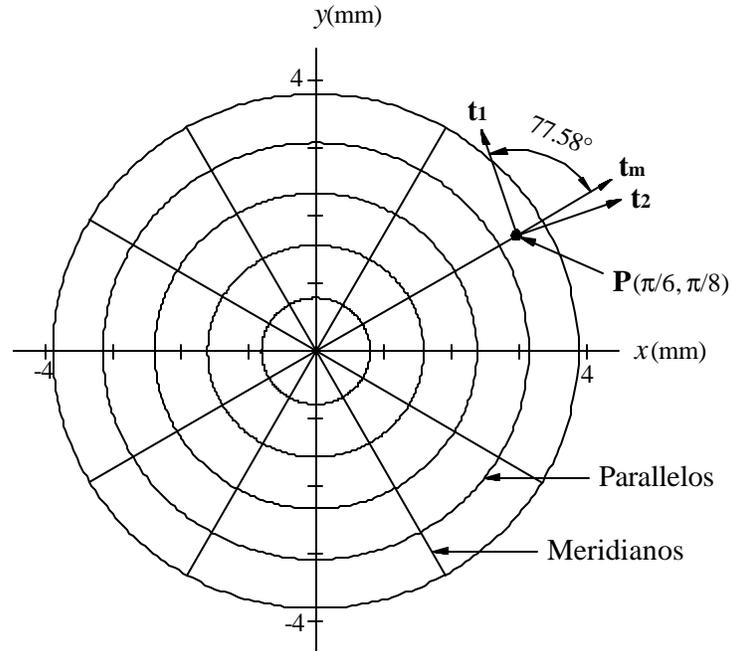


Figura 2.6. Direcciones principales \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 y la dirección \mathbf{t}_m a lo largo del meridiano que pasa por el punto $\mathbf{P}(u = \pi/6, v = \pi/8)$. Ya que la superficie de la figura 2.1 no es una superficie de revolución, la normal principal de la sección normal y la normal principal del meridiano en \mathbf{P} no son iguales.

2.4. Mapas de curvatura Gaussiana, promedio y cilíndrica

La *curvatura Gaussiana* c_g , se define en optometría y oftalmología como el promedio geométrico de las curvaturas principales, máxima c_1 y mínima c_2

$$c_g = \sqrt{c_1 c_2} . \quad (2.15)$$

Esta definición sólo es aplicable cuando las curvaturas principales tienen el mismo signo, es decir, todas las secciones normales de la superficie en \mathbf{P} deben tener el mismo tipo de concavidad (positiva o negativa), a diferencia, por ejemplo, en una superficie tipo silla de montar. La Eq. (2.15) se puede aplicar en el ejemplo del elipsoide y también se supone que esta condición es válida en la mayoría de las córneas (Barsky [1997]). La figura 2.7(a) muestra el mapa de curvatura Gaussiana en unidades de dioptrías.

La *curvatura promedio (esfera media)* c_s , está dada por el promedio aritmético de las curvaturas principales, máxima c_1 y mínima c_2 , por lo tanto

$$c_s = \frac{c_1 + c_2}{2}. \quad (2.16)$$

Este tipo de representación es similar a la que se obtiene con la curvatura Gaussiana (Eq. (2.15)), debido a la correlación matemática entre el promedio geométrico y el aritmético.

La *curvatura cilíndrica (cilindro)* c_c , se define como la resta entre las curvaturas máxima c_1 y mínima c_2 , esto es

$$c_c = c_1 - c_2. \quad (2.17)$$

El cilindro da información de la asimetría de la superficie en cada punto y permite evaluar el astigmatismo local. El cilindro es igual a cero para los puntos umbílicos y positivo para los otros puntos de la superficie. El mapa de curvatura cilíndrica, al igual que los mapas de curvaturas principales, debe estar acompañado por las líneas de curvatura (figura 2.5) a fin de obtener información sobre la orientación del cilindro. En la figura 2.7(b) se muestra el mapa de curvatura cilíndrica en unidades de dioptrías.

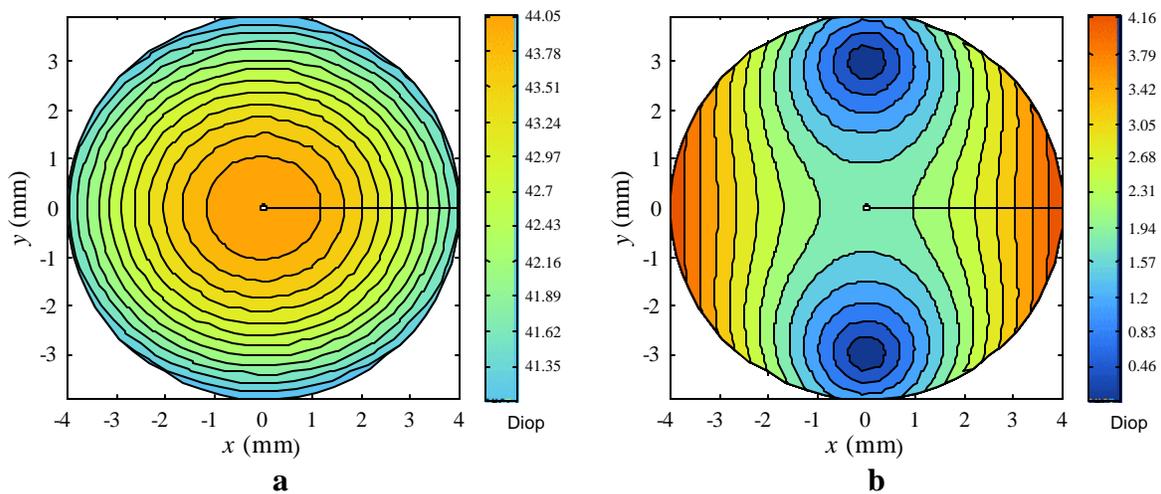


Figura 2.7. Mapas de curvatura (a) Gaussiana y (b) cilíndrica de la superficie elíptica (figura 2.1).

Una propiedad importante de las curvaturas principales es que estas son invariantes ante un cambio de la representación paramétrica, por ejemplo, una traslación o una rotación; esta

propiedad es igualmente aplicable a las curvaturas Gaussiana, promedio y cilíndrica. Así pues, si la córnea experimenta un desplazamiento lateral con respecto al eje óptico, el valor de las curvaturas Gaussiana, promedio o cilíndrica no cambia. No sucede igual con la curvatura meridional, ya que los meridianos se definen como la intersección del eje óptico de observación con la superficie; en consecuencia, un desplazamiento lateral de la córnea define un nuevo vértice y el valor del astigmatismo medido en el vértice cambiará. Este es un hecho que se debe tener en cuenta, ya que en la práctica las córneas son caracterizadas por el astigmatismo medido en el vértice. Algunos autores, teniendo en cuenta estas propiedades, han propuesto usar la curvatura Gaussiana para determinar con mayor precisión algunos defectos de la córnea, por ejemplo, el keratocono (Barsky [1997]).

Lo más relevante del capítulo

El mapa de *curvatura meridional*, llamado también mapa de curvatura instantáneo, verdadero o tangencial, describe la forma de la córnea en la dirección radial. Las regiones con menor curvatura se dicen regiones más planas respecto a otras regiones con curvaturas mayores. El mapa de curvatura meridional no permite obtener información adicional de la forma de la córnea, como por ejemplo, el astigmatismo local (cilindro) en cada punto de la córnea.

El mapa de “curvatura axial”, comúnmente usado en optometría y oftalmología, no describe correctamente la forma de la córnea, por lo que se debe omitir esta representación.

Las *curvaturas principales* (máxima y mínima) de la superficie, permiten medir la curvatura de cualquier curva plana de la superficie, por ejemplo, es posible determinar la curvatura meridional. De las curvaturas principales es posible definir otras representaciones, como por ejemplo: a) *curvatura Gaussiana*, promedio geométrico de las curvaturas principales; b) *curvatura promedio*, promedio aritmético de las curvaturas principales; c) *cilindro*, diferencia entre la curvatura máxima y la curvatura mínima. El cilindro (astigmatismo local) permite obtener una imagen rápida de la asimetría de local de la superficie.

3. Prueba de Hartmann para medir la forma de superficies reflectoras convexas

La prueba de Hartmann permite medir las aberraciones transversales de rayo de un frente de onda muestreado. El frente de onda es muestreado por medio de una pantalla plana con agujeros, como se muestra en la figura 3.1. La distribución de los agujeros puede ser radial, helicoidal o cuadrada. Esta prueba se usa comúnmente en la evaluación de espejos cóncavos (Ghozeil [1992]).

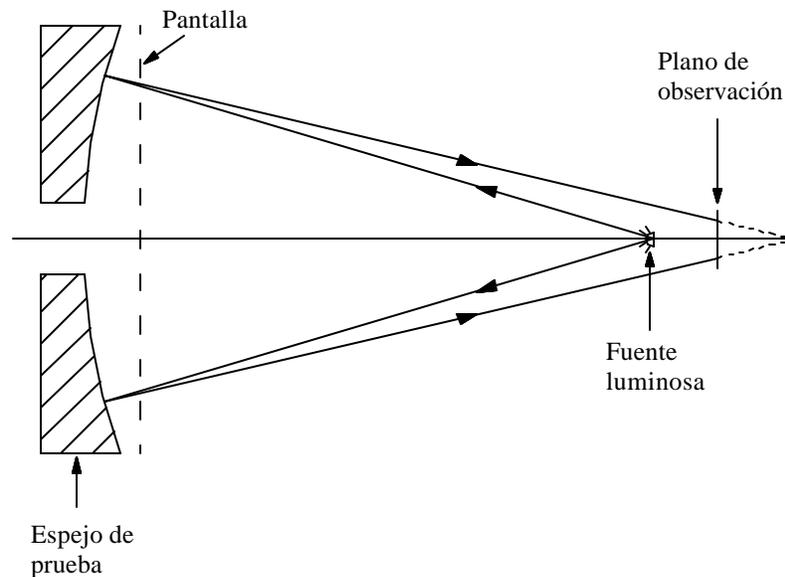


Figura 3.1. Prueba de Hartmann para evaluar un espejo cóncavo.

La pantalla con una distribución cuadrada de agujeros tiene la ventaja sobre los otros tipos de pantallas de muestrear áreas iguales del frente de onda. El arreglo cuadrado consiste de pequeños agujeros ubicados en las intersecciones de una cuadrícula formada por líneas paralelas a los ejes ortogonales de un sistema coordenado Cartesiano. Una descripción detallada de los parámetros geométricos de la pantalla con un arreglo cuadrado se puede ver en Morales [1983].

Cuando se evalúa un espejo cóncavo (figura 3.1), el plano de observación se ubica ligeramente desenfocado con respecto al plano imagen, con el propósito de resolver la

imagen proyectada de los agujeros (puntos luminosos). La distribución de estos puntos luminosos permite medir las aberraciones transversales de rayo en el plano desenfocado. Mediante un procedimiento de integración se puede reconstruir el frente de onda, en otras palabras, la forma de la superficie del espejo.

Si se desea implementar la prueba de Hartmann para evaluar espejos convexos, es necesario realizar algunas modificaciones, por ejemplo, en el sistema de iluminación y/o en la forma de la pantalla. En esta tesis se propone una prueba modificada de Hartmann para evaluar la topografía de la córnea (Mejía [2001b]). La pantalla plana con agujeros es reemplazada por una pantalla de forma elipsoidal con fuentes puntuales luminosas. La geometría de la pantalla es tal que su imagen virtual, generada por una superficie reflectora esférica de referencia, sea un plano. La distribución espacial de las fuentes puntuales luminosas en la pantalla es tal que la imagen virtual sea un arreglo cuadrulado de puntos luminosos. Como se mostrará más adelante, esta prueba modificada de Hartmann permite medir las curvaturas principales de la superficie de la córnea.

Para obtener una imagen virtual plana de la pantalla (superficie objeto) en un espejo esférico convexo, se requiere que las superficies imagen astigmáticas sagital y tangencial coincidan, es decir, astigmatismo igual a cero. Por otro lado, se debe curvar la superficie objeto de tal manera que se compense la curvatura de campo de Petzval. Ya que en la práctica no es posible eliminar el astigmatismo, se calculará la forma de la superficie objeto para obtener la superficie imagen promedio plana. La superficie imagen promedio se define como el promedio de las superficies astigmáticas. En esta superficie imagen promedio, la imagen de una fuente puntual de la pantalla es un círculo de menor confusión. El cálculo de la forma de la pantalla y la distribución espacial de las fuentes puntuales luminosas es objeto del presente capítulo. La manera como se obtuvo en la práctica la pantalla elipsoidal y las fuentes puntuales luminosas se discute en el capítulo 4.

3.1. Superficie objeto para campo pequeño

En la aproximación paraxial, un objeto virtual de altura h separado una distancia l del vértice de un espejo convexo de radio R , produce una imagen real de altura h' a una distancia $-l'$ del vértice del espejo, como se muestra en la figura 3.2. Si el diafragma del sistema se coloca en el plano imagen (la razón se explicará más adelante) y suponiendo un

campo pequeño, el astigmatismo sagital longitudinal se puede evaluar de la teoría de aberraciones de tercer orden (Malacara [1994]), así:

$$AstL_s = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')\bar{i}^2}{2n'u'^2}, \quad (3.1)$$

donde y es la altura del rayo marginal en el espejo, $n' = 1$ es el índice de refracción del aire y $n = -1$ es el índice de refracción asociado al espejo. Los ángulos $-i$ e \bar{i} son los ángulos de incidencia en el espejo del rayo marginal y del rayo principal, respectivamente. El ángulo $-u'$ es el ángulo del rayo marginal reflejado con respecto al eje óptico.

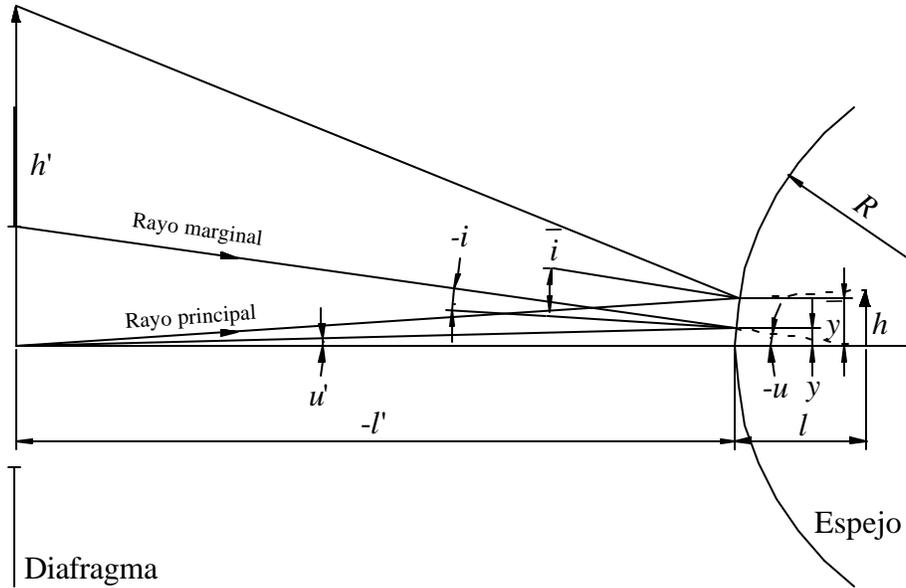


Figura 3.2. Formación de la imagen de un objeto virtual de altura h por un espejo convexo en la aproximación paraxial. El diafragma del sistema se encuentra en el plano imagen.

De la figura 3.2 se deduce que $u' = -\frac{y}{l'}$, $i = y\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l}\right)$, e $\bar{i} = \bar{y}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l'}\right)$, donde \bar{y} es la altura del rayo principal en el espejo dada por $\bar{y} = h\left(\frac{l'}{l'-l}\right)$. Reemplazando estos términos en la Eq. (3.1) y usando la formula de Gauss para el espejo

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{l'} + \frac{1}{l}, \quad (3.2)$$

el astigmatismo sagital es $AstL_s = -\frac{h^2}{4R} \frac{l'^2}{l^2}$. Ya que el aumento lateral es $m = \frac{h'}{h} = -\frac{l'}{l}$,

finalmente se obtiene

$$AstL_s = -\frac{h'^2}{4R}. \quad (3.3)$$

Por otra parte, la superficie de Petzval para un espejo esférico esta dada por (Malacara [1994])

$$Ptz = \frac{h'^2}{R}. \quad (3.4)$$

De las Eqs. (3.3) y (3.4), se obtienen las superficies astigmáticas sagital S y tangencial T como sigue:

$$S = Ptz + AstL_s = \frac{3h'^2}{4R}, \quad (3.5a)$$

$$T = Ptz + 3AstL_s = \frac{h'^2}{4R}. \quad (3.5b)$$

La superficie de mejor imagen o superficie promedio M está definida como el promedio de las superficies imagen sagital y tangencial,

$$M = \frac{S + T}{2} = \frac{h'^2}{2R}. \quad (3.5c)$$

De las Eqs. (3.4) y (3.5a)-(3.5c), se puede ver que Ptz , S , T y M , se pueden describir mediante paraboloides de revolución en función de la altura imagen h' . Por lo tanto, resulta conveniente describir estas superficies por medio de $z_\tau = \frac{h'^2}{2R_\tau}$, donde el subíndice τ

representa cualquiera de las superficies y R_τ representa el radio de la esfera osculadora en el vértice del paraboloide. Los radios de las esferas osculadoras para Ptz , S , T y M son

$$R_{Ptz} = \frac{R}{2}, \quad (3.6a)$$

$$R_s = \frac{2R}{3}, \quad (3.6b)$$

$$R_M = R, \quad (3.6c)$$

$$R_T = 2R. \quad (3.6d)$$

La figura 3.3 muestra las curvas astigmáticas y la de Petzval para el espejo de la figura 3.2. en un plano meridional. Nótese que el astigmatismo longitudinal no depende de la localización del diafragma, siempre y cuando el diafragma se encuentre en el plano imagen. El resultado de la figura 3.3 nos dice que sí se tiene una superficie objeto de la forma de S o T , su imagen virtual es una superficie imagen sagital o tangencial plana, respectivamente. Igualmente, si la superficie objeto es de la forma de M , su imagen virtual es una superficie imagen promedio plana, donde se obtiene el círculo de menor confusión para un objeto puntual en M .

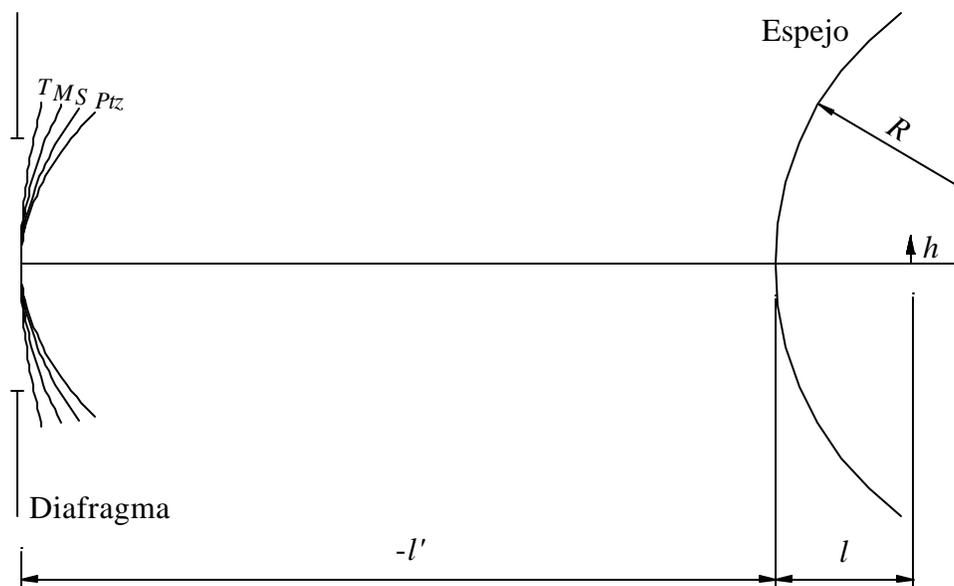


Figura 3.3. Curvas astigmáticas para el espejo convexo de la figura 3.2. Como el diafragma se encuentra en el plano imagen el astigmatismo longitudinal no depende de la localización del diafragma.

3.2. Superficie objeto para campo amplio

En la sección anterior se ha encontrado la forma de las superficies objeto que generan superficies imagen sagital, tangencial y promedio planas en un espejo esférico convexo cuando el campo óptico es pequeño. Este resultado, sin embargo, no es útil para medir la

topografía de la córnea, ya que el ángulo que subtiende la córnea con respecto a su centro promedio de curvatura es aproximadamente 80° , es decir, se debe considerar un campo amplio. Un método directo para calcular la forma de las superficies objeto que generen imágenes planas en un campo angular amplio en un espejo esférico, resulta al utilizar las ecuaciones de Coddington (Wittenberg [1970], Conrady [1985] y Malacara [1994]). Con estas ecuaciones se obtienen las superficies imagen sagital y tangencial para una superficie óptica. Las ecuaciones de Coddington son válidas para cualquier sistema donde el diafragma es suficientemente pequeño tal que los rayos sagitales y tangenciales viajen muy cerca del rayo principal. Para un espejo ($n = -1$) estas ecuaciones son:

$$\frac{1}{L_S} + \frac{1}{L'_S} = \frac{2 \cos \phi}{R} \quad (3.7a)$$

$$\frac{1}{L_T} + \frac{1}{L'_T} = \frac{2}{R \cos \phi} \quad (3.7b)$$

donde ϕ es el ángulo de incidencia del rayo principal, R es el radio de curvatura, $L_S = L_T = L$ es la distancia objeto, L'_S y L'_T son las distancias imagen sagital (S) y tangencial (T), respectivamente. Las distancias imagen sagital y tangencial se miden a lo largo del rayo principal. Bajo estas circunstancias, la aberración de coma es despreciable ya que los focos sagital y tangencial están localizados muy cerca del rayo principal.

La figura 3.4 muestra la geometría en un plano meridional para aplicar las ecuaciones de Coddington en el caso del espejo esférico convexo. El diafragma se encuentra a una distancia $-l_v$ del vértice del espejo. El rayo principal que emerge del punto objeto **P** se refleja en el punto **Q** del espejo y luego pasa por el centro del diafragma. **I** es la imagen virtual de **P**. La distancia $-L$ representa la distancia objeto y la distancia L' representa L'_S o L'_T o el promedio de L'_S y L'_T . El radio de curvatura del espejo es R . El ángulo ϕ es el ángulo de incidencia del rayo principal y θ es el ángulo del rayo principal reflejado con respecto al eje óptico. Ya que se desea encontrar la superficie objeto que genere una superficie imagen sagital, tangencial o promedio plana, la coordenada z_I debe ser una constante. El valor de esta constante se fija de tal manera que $l'_v = R - z_I$ y $-l_v$ sean distancias conjugadas, de esta manera, el diafragma estará localizado en el vértice de la superficie objeto. Esta posición del diafragma, permitirá evaluar la mayor área posible de la córnea con la distancia $-l_v$ más

corta. En la práctica una muy pequeña área de la córnea en la región central no será evaluada debido al tamaño finito del diafragma.

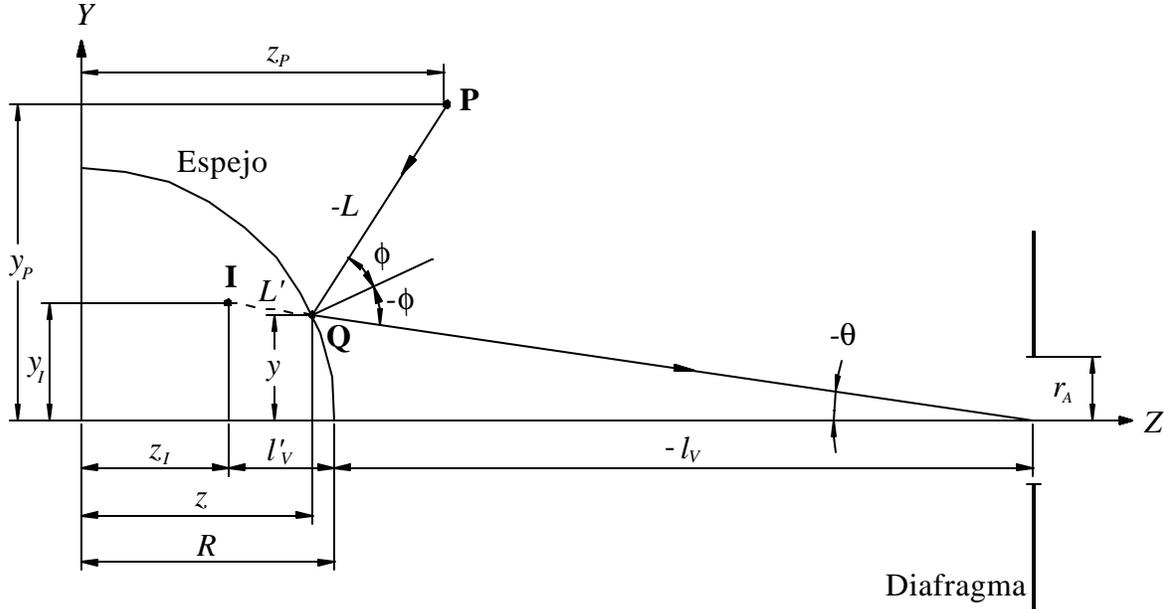


Figura 3.4. Geometría para aplicar las ecuaciones de Coddington en un espejo esférico convexo. **P** es un punto objeto, **Q** es un punto del espejo e **I** es la imagen virtual de **P**. L es la distancia objeto y L' es la distancia imagen que puede ser la distancia imagen sagital, tangencial o promedio.

De la figura 3.4 se tiene que la distancia L' está dada por

$$L' = \frac{z - z_I}{\cos \theta} \quad (3.8)$$

donde $\cos \theta = (-l_V + R - z) / \sqrt{y^2 + (-l_V + R - z)^2}$ y $z_I = R - 1 / (2/R - 1/l_V)$. Las coordenadas (z, y) del punto **Q** están relacionadas por $z^2 + y^2 = R^2$ y el coseno del ángulo de incidencia es $\cos \phi = [(R - l_V)z - R^2] / R \sqrt{y^2 + (-l_V + R - z)^2}$.

De las Eqs. (3.7a), (3.7b), y (3.8) se determina la distancia L , y como el sistema tiene simetría de revolución, de esta manera se encuentran las superficies objeto que generan superficies imagen sagital, tangencial o promedio planas. Las coordenadas de estas superficies se obtienen de la siguiente manera (ver desarrollo en el Apéndice 3):

3.2.1. Superficie objeto para imagen sagital plana

Igualando L' (Eq. (3.8)) y L'_s (Eq. (3.7a)) la distancia objeto es

$$L_s = \frac{R(z - z_I)}{2(z - z_I)\cos\phi - R\cos\theta} \quad (3.9)$$

y el vector posición de cualquier punto de la superficie objeto para obtener una superficie imagen sagital plana en un espejo esférico convexo está dado por:

$$\mathbf{r}_s = \{z - L_s \cos(2\phi - \theta), y - L_s \sin(2\phi - \theta)\}, \quad (3.10)$$

3.2.2. Superficie objeto para imagen tangencial plana

Igualando L' (Eq. (3.8)) y L'_T (Eq. (3.7b)) la distancia objeto es

$$L_T = \frac{R(z - z_I)\cos\phi}{2(z - z_I) - R\cos\phi\cos\theta} \quad (3.11)$$

y el vector posición de cualquier punto de la superficie objeto para obtener una superficie imagen tangencial plana en un espejo esférico convexo está dado por:

$$\mathbf{r}_T = \{z - L_T \cos(2\phi - \theta), y - L_T \sin(2\phi - \theta)\}, \quad (3.12)$$

3.2.3. Superficie objeto para imagen promedio plana

En este caso, la distancia imagen L' (Eq. (3.8)) es igual al promedio de la distancia imagen sagital y tangencial, es decir

$$L'_M = \frac{z - z_I}{\cos\theta} = \frac{L'_s + L'_T}{2}. \quad (3.13)$$

Resolviendo la Eq. (3.13) para la distancia L_M , se encuentra que L_M está dada por la raíz positiva de la ecuación de segundo orden

$$L_M^2 [8L'_M \cos\phi - 2R(\cos^2\phi + 1)] + L_M [2R^2 \cos\phi - 4L'_M R(\cos^2\phi + 1)] + [2L'_M R^2 \cos\phi] = 0. \quad (3.14)$$

El vector posición de cualquier punto de la superficie objeto para obtener una superficie imagen promedio plana en un espejo esférico convexo está dado por:

$$\mathbf{r}_M = \{z - L_M \cos(2\phi - \theta), y - L_M \sin(2\phi - \theta)\}, \quad (3.15)$$

Las Eqs. (3.10), (3.12), y (3.15) son las representaciones paramétricas de las curvas meridionales definidas por la intersección de las superficies objeto y el plano zy . Ya que el sistema tiene simetría de revolución, de ahora en adelante nos referiremos a las Eqs. (3.10), (3.12), y (3.15) como las representaciones de las superficies objeto. La coordenada $z_\tau = z - L_\tau \cos(2\phi - \theta)$ es la coordenada axial de la superficie y la coordenada $y_\tau = y - L_\tau \sin(2\phi - \theta)$ es la distancia de la superficie al eje de revolución.

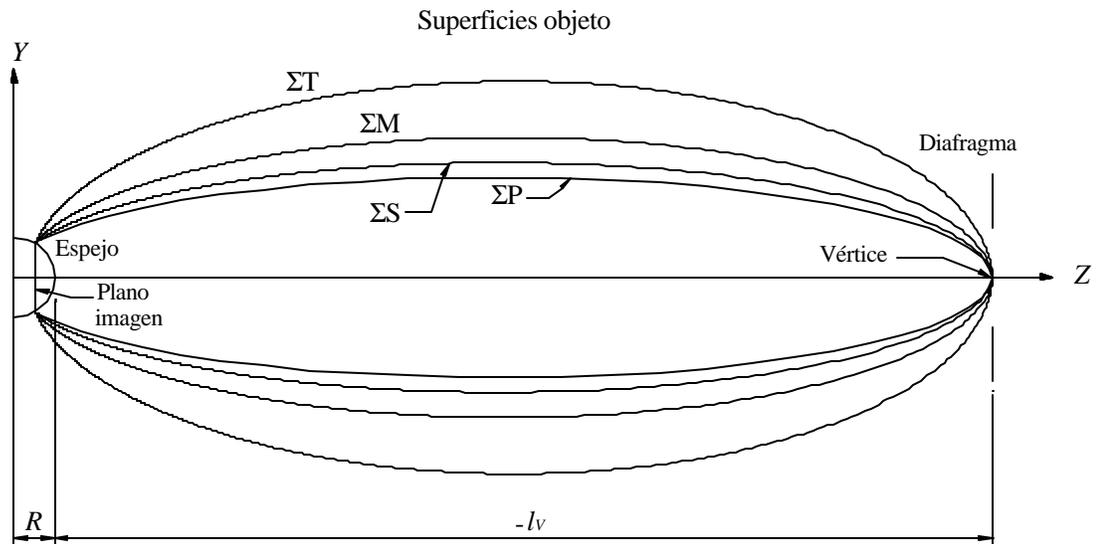


Figura 3.5. Superficies objeto que generan superficies imagen sagital, tangencial y promedio planas en un espejo esférico convexo. La superficie ΣP es un elipsoide que genera una superficie de Petzval plana.

La figura 3.5 muestra los óvalos ΣS , ΣT , y ΣM que se obtienen de las Eqs. (3.10), (3.12) y (3.15), respectivamente. Estos óvalos son las superficies objeto que generan superficies imagen sagital, tangencial y promedio planas en un espejo esférico convexo para campo amplio. También se muestra en la figura 3.5 otro óvalo nombrado ΣP . Este óvalo es la superficie objeto que genera una superficie de Petzval plana, es decir, en caso de que no existan otras aberraciones primarias. Usando la formula de Gauss (Eq. (3.2)), se encuentra que ΣP es un elipsoide de revolución. La curva generatriz de este elipsoide se puede representar por

$$\mathbf{r}_p = \{z_{0p} + a_p \cos(\alpha), b_p \sin(\alpha)\}, \quad (3.16)$$

donde α es el ángulo medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el centro de la elipse. Las constantes a_p , b_p , y z_{0p} están dadas por

$$a_p = \frac{2z_l^2 R}{(4z_l^2 - R^2)}, \quad (3.17a)$$

$$b_p = \frac{z_l R}{\sqrt{(4z_l^2 - R^2)}}, \quad (3.17b)$$

$$z_{0p} = \frac{z_l R^2}{(4z_l^2 - R^2)}. \quad (3.17c)$$

El radio de curvatura de la elipse en el vértice ($\alpha = 0$) es $R|_{\alpha=0} = b_p^2/a_p$. Reemplazando las Eqs. (3.17a) y (3.17b) en el anterior cociente, se encuentra que el radio de curvatura en el vértice es $R|_{\alpha=0} = R_{ptz} = R/2$ (Eq. (3.6a)).

Por otra parte, aunque ΣS (Eq. (3.10)), ΣT (Eq. (3.12)), y ΣM (Eq. (3.15)) parecen elipsoides, se puede mostrar que no lo son. Nótese que estos ovoides tienen un punto común en el vértice y un conjunto de puntos en común en el anillo que está en contacto con el espejo esférico convexo (figura 3.5). Este anillo tiene un radio $R_l = \sqrt{R^2 - z_l^2}$. La imagen de los puntos del anillo coincide con los puntos del anillo, es decir, la imagen de estos puntos está libre de astigmatismo. Por lo tanto, los ovoides ΣS , ΣT , y ΣM deben coincidir con ΣP en el espejo, y como ΣP es un elipsoide, ninguno de los ovoides ΣS , ΣT , o ΣM puede ser un elipsoide.

Otra forma de ver esto, es mediante el cálculo de la curvatura meridional (Eq. (2.6)) de los óvalos, esto es, $c = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$, donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\tau(y)$ representa el vector posición de cualquier punto de la curva meridional en el plano zy de la superficie $\Sigma\tau$ (con τ representando S, T, o M). Los vectores \mathbf{r}' y \mathbf{r}'' son la primera y segunda derivadas con respecto al parámetro y (coordenada y de la superficie del espejo). La figura 3.6 muestra el radio de curvatura de la curva meridional de las superficies ΣS y ΣT (línea gruesa) cuando el radio del espejo es $R =$

7.8 mm y la posición del diafragma es $|l_v| = 180$ mm . El radio de curvatura se ha dibujado para la parte superior de la curva meridional. El ángulo α , así como en la Eq. (3.16), se mide desde el centro de las elipses que ajustan estadísticamente cada uno de los óvalos (línea delgada). Una forma de encontrar la elipse de ajuste en cada caso, de acuerdo a la simetría de la elipse, es usando los valores máximo y mínimo locales del radio de curvatura de los óvalos. Estos radios deben ser iguales a los radios de curvatura en los vértices ($\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$) de las elipses de ajuste.

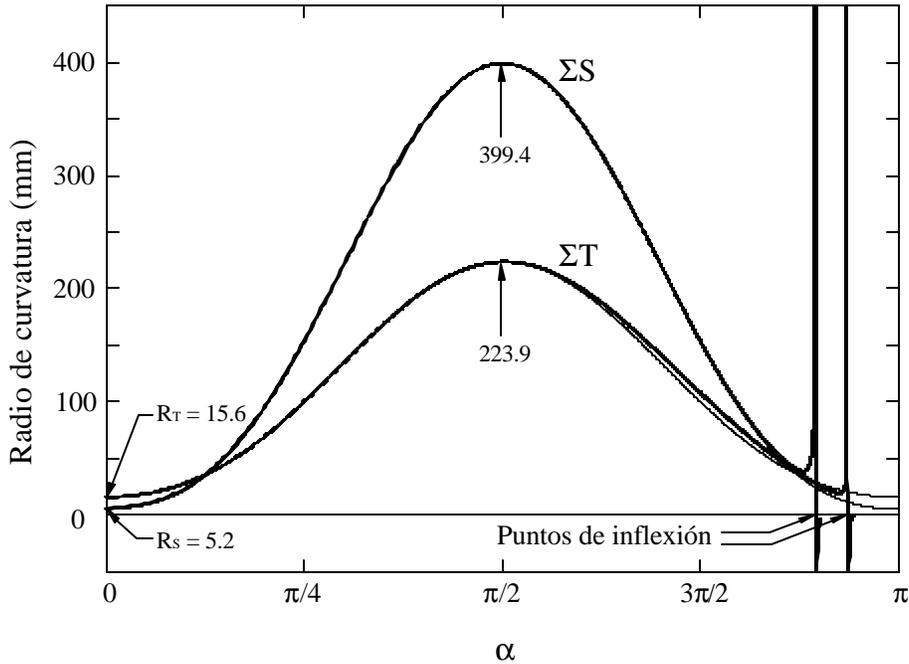


Figura 3.6. Radio de curvatura de una curva meridional de las superficies ΣS y ΣT (línea gruesa) cuando el radio del espejo es $R = 7.8$ mm y la posición del diafragma es $|l_v| = 180$ mm . El ángulo α se mide desde el centro de las elipses que ajustan cada uno de los óvalos (línea delgada).

En la figura 3.6, el mínimo local de ΣS es el radio $R_s = 5.2$ mm dado por la Eq. (3.6b). Este resultado es esperado, ya que en la región paraxial, la forma de las superficies objeto dadas por las Eqs. (3.5a) y (3.10) debe ser la misma. El máximo local ($\alpha = \pi/2$) es aproximadamente $R_{\max(\Sigma S)} = 399.4$ mm. Entonces, con R_s y $R_{\max(\Sigma S)}$ se puede mostrar que las longitudes de los ejes principales de la elipse de ajuste están dadas por

$$2a_s = 2b_s^2 / R_s , \tag{3.18a}$$

$$2b_S = 2\sqrt[3]{R_S^2 R_{\max(\Sigma S)}} , \quad (3.18b)$$

y la elipse de ajuste para ΣS será

$$\mathbf{r}_{SF} = \{z_{0S} + a_S \cos(\alpha), b_S \sin(\alpha)\} \quad (3.19)$$

donde $z_{0S} = R + |l_V| - a_S$. Reemplazando los valores de R_S y $R_{\max(\Sigma S)}$ en las Eqs. (3.18a) y (3.18b) se tiene que: $a_S = 93.95$ mm y $b_S = 22.10$ mm .

Siguiendo un análisis similar al del caso sagital, se pueden encontrar las elipses de ajuste de los óvalos ΣT y ΣM . De la figura 3.6 vemos que el mínimo local de ΣT es $R_T = 15.6$ mm (Eq. (3.6d)) y el máximo local en $\alpha = \pi/2$ es aproximadamente $R_{\max(\Sigma T)} = 223.9$ mm. Las constantes a_T y b_T de la elipse de ajuste son: $a_T = 92.13$ mm y $b_T = 37.91$ mm . Para el óvalo ΣM el mínimo local es $R_M = 7.8$ mm (Eq. (3.6c)) y el máximo local en $\alpha = \pi/2$ es aproximadamente $R_{\max(\Sigma T)} = 321.9$ mm. Las constantes a_M y b_M de la elipse de ajuste serán: $a_M = 93.14$ mm y $b_M = 26.95$ mm .

En la figura 3.6 el radio de curvatura de los óvalos ΣS y ΣT se ha dibujado con línea gruesa. Se puede ver que existe en ambos a casos un punto de inflexión cerca de la superficie del espejo, lo que significa que ΣS y ΣT no son elipses ya que el radio de curvatura de una elipse es una función simétrica, como lo muestra la línea delgada en la figura 3.6. El mismo resultado se aplica al óvalo ΣM . Sin embargo, al evaluar el error estándar de las elipses de ajuste, se puede ver que en la práctica, estos óvalos se pueden aproximar por las elipses de ajuste.

Para evaluar el error estándar s_e para las elipses de ajuste correspondientes a los óvalos ΣS , ΣT , o ΣM se utiliza la formula $s_{e\tau} = \sqrt{\sum [y_\tau - y_{\tau F}]^2 / (N - 2)}$. Como siempre, el subíndice τ representa cualquiera de los óvalos, y_τ es la coordenada y del τ -ésimo óvalo y $y_{\tau F}$ es la coordenada y de la correspondiente elipse de ajuste. En la Tabla 3.1 se resume los resultados obtenidos para los tres casos cuando $R = 7.8$ mm y $|l_V| = 180$ mm . También se incluye los parámetros de la elipse ΣP , por supuesto, en este caso, la estimación del error estándar es cero. El número de muestras empleado es $N = 1342$.

Tabla 3.1. Parámetros de las elipse de ajuste de los óvalos ΣS , ΣT , y ΣM .

Superficie	a (mm) (semieje mayor)	b (mm) (semieje menor)	e (excentricidad)	s_e (mm) (error estándar)
ΣT	92.13	37.91	0.9114	1.0128
ΣM	93.14	26.95	0.9572	0.2212
ΣS	93.95	22.10	0.9719	0.0937
ΣP	94.88	19.24	0.9792	0.0000

3.3. Pantalla para implementar la prueba de Hartmann

En la sección anterior se determinó la forma de las superficies objeto que generan superficies imagen sagital, tangencial y promedio planas en un espejo esférico convexo. Suponiendo que la formación de la imagen virtual está libre de aberración esférica y coma, si se elige como pantalla la superficie objeto que genera una imagen sagital plana, la imagen virtual de un punto objeto de la pantalla se verá como una línea en dirección radial (línea focal sagital). Si en cambio, se elige como pantalla la superficie objeto que genera una imagen tangencial plana, la imagen virtual de un punto objeto de la pantalla se verá como una línea perpendicular a la dirección radial (línea focal tangencial). Este tipo de pantalla es ideal para implementarla en un topógrafo corneal basado en el sistema de anillos de Placido, ya que todos los anillos estarán en foco. La desventaja del sistema de anillos de Placido, es que solo permite medir la forma de la córnea en la dirección radial. Finalmente, si se elige como pantalla la superficie objeto que genera una imagen promedio plana, la imagen virtual de un punto objeto de la pantalla se verá como un círculo, denominado el círculo de menor confusión. La longitud de las líneas focales sagital y tangencial y el diámetro del círculo de menor confusión son proporcionales al diámetro del diafragma $2r_A$ (figura 3.4) y a la distancia del punto y_l en la imagen virtual con respecto al eje óptico (Conrady [1985]).

Lo anterior sugiere que la elección de una superficie objeto que genere una imagen promedio plana es ideal para aplicar la prueba de Hartmann para evaluar la forma de una superficie reflectora convexa. Con esta prueba podemos obtener información de la forma de la córnea, tanto en la dirección radial, como en la dirección sagital; esto, por supuesto, es

una representación más completa de la forma de la córnea con respecto al sistema de anillos de Placido.

Supongamos que vamos a implementar la prueba de Hartmann para un espejo esférico convexo. El radio del espejo se elige igual al radio promedio de la córnea, esto es, $R = 7.8$ mm y la región de evaluación del espejo igual a un diámetro de 8 mm centrado en el vértice; esta región es suficientemente grande, si se considera que la región promedio activa de la córnea está dentro de una circunferencia de unos 6 mm de diámetro. Siguiendo la recomendación de Morales [1983], se tomarán 10 puntos a lo largo del radio, es decir, la imagen virtual de los agujeros en la pantalla será un arreglo cuadrículado de puntos separados 0.4 mm a lo largo de las direcciones x o y , como se muestra en la figura 3.7. El número total de puntos en la región circular será 309. La región más grande que puede ser evaluada con el elipsoide, esto es cuando $z = z_l$ y $y = y_l$, estará contenida en una circunferencia de radio $R_l = \sqrt{R^2 - z_l^2} = 6.70$ mm. Sin embargo, en la práctica esto no se puede realizar, ya que el elipsoide estaría en contacto con el ojo del paciente.

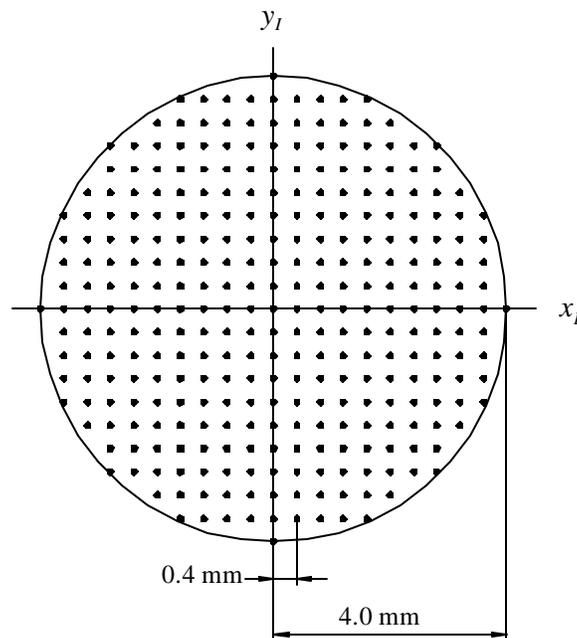


Figura 3.7. Cuadrícula de puntos en el plano imagen virtual para aplicar la prueba de Hartmann.

Para que la imagen virtual de los agujeros este libre de aberración esférica y coma, se colocará el diafragma a una distancia $|l_v| = 180$ mm del vértice del espejo. El diámetro del

diafragma $2r_A$ (figura 3.4) será aproximadamente 10 mm (como se mostrará más adelante). Esto garantiza que el rayo marginal que emerge del punto **P**, viaje muy cerca del rayo principal, por lo que los focos sagital y tangencial estarán prácticamente sobre el rayo principal. Por otro lado, la pupila de entrada de esta parte del sistema óptico es muy pequeña y se puede despreciar la aberración esférica. Con estos parámetros, la pantalla será un elipsoide cuyas dimensiones están dadas en la tabla 3.1 para ΣM . En los extremos de la pantalla elipsoidal, se dispone de sendas aperturas para dar cabida a la superficie reflectora convexa y al diafragma (figura 3.9).

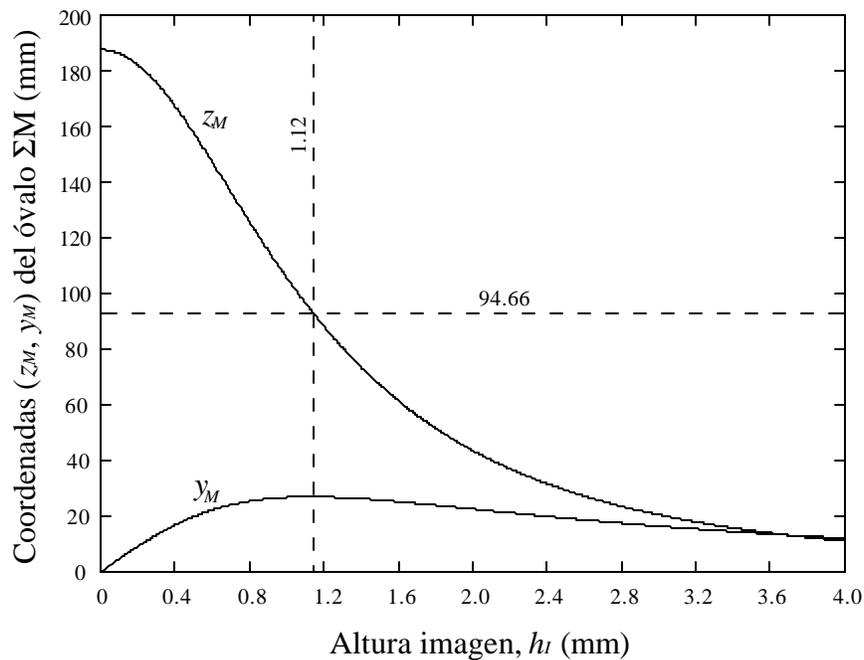


Figura 3.8. Coordenadas (z_M, y_M) de la curva meridional en el plano zy del ovoide ΣM en función de la altura imagen h_l ($R = 7.8$ mm y $|l_v| = 180$ mm). La mayor parte de los agujeros se encuentra en la mitad del ovoide cerca del espejo esférico de referencia (a la derecha de la línea segmentada $h_l = 1.12$).

Ya que la pantalla es un elipsoide de revolución, basta considerar la curva meridional de esta superficie en el plano zy para determinar la distribución de los agujeros. De esta manera, se puede obtener la cuadrícula de puntos en la imagen virtual. La posición de cualquier punto en el arreglo cuadrículado se puede representar por $\mathbf{r}_l = h_l(\cos \sigma, \sin \sigma)$, donde h_l es la distancia entre el punto y el centro del arreglo; σ es el ángulo del radio vector con la horizontal. La figura 3.8 muestra las coordenadas (z_M, y_M) de la curva meridional en el

plano zy del ovoide ΣM (Eq. (3.15)) en función de la altura imagen h_i , que en este caso es igual a la coordenada y_i de la figura 3.7. Entonces, un punto de la cuadrícula a una distancia h_i del centro del arreglo y con un ángulo σ con respecto a la horizontal, será la imagen virtual de un agujero con coordenadas (z_M, y_M) en la curva meridional de ΣM que está contenida en un plano meridional que forma un ángulo σ con respecto al plano xz . En la figura 3.9 se muestra la posición de los agujeros en el elipsoide ΣM cuya imagen virtual será uno de los cuadrantes de la figura 3.7. De la figura 3.8 se puede ver que la mayor parte de los agujeros estarán ubicados en la mitad del elipsoide que está más cerca de la superficie esférica de referencia (figura 3.9).

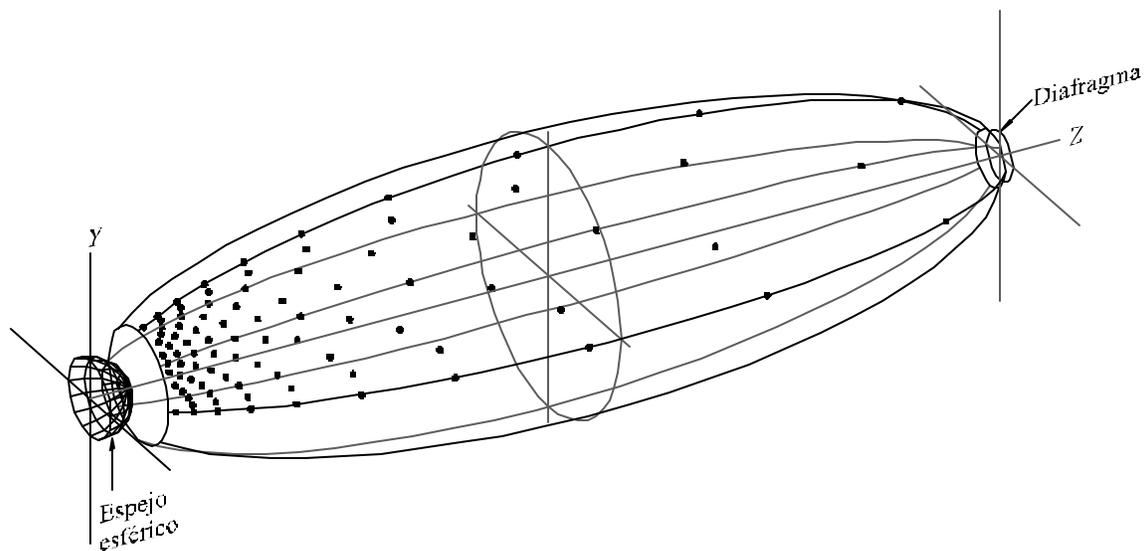


Figura 3.9. Distribución espacial de los agujeros en un cuadrante del ovoide ΣM . Esta distribución de agujeros genera una cuadrícula de puntos en el plano imagen virtual para el espejo esférico de referencia (figura 3.7).

Esta distribución espacial de los agujeros es similar a la distribución espacial de líneas que obtiene Díaz [2000] para una superficie objeto cilíndrica. La imagen virtual de las líneas pintadas sobre la superficie cilíndrica generada por una superficie reflectora convexa consiste en una cuadrícula de líneas. De acuerdo a lo discutido en §3.2, no todas las líneas en la imagen se estarán igualmente enfocadas. Díaz obtiene la distribución de las líneas en la superficie cilíndrica por medio de un trazo inverso de rayos y propone esta superficie en una prueba nula para evaluar superficies esféricas convexas con un $F/\#$ pequeño.

Hasta el momento no se ha mencionado algo al respecto del tamaño de los agujeros. Para ver como esto afecta la forma de los puntos imagen en la cuadrícula, supongamos primero que los agujeros son infinitamente pequeños, es decir puntos matemáticos. Como la pantalla se escogió igual al elipsoide ΣM , la imagen de un punto objeto de la pantalla será un círculo (de menor confusión) cuyo diámetro es proporcional al astigmatismo longitudinal y al diámetro del diafragma. En la figura 3.10 se muestran las curvas de astigmatismo para la imagen virtual de la pantalla ΣM . Como es de esperarse, la superficie imagen promedio M es un plano que biseca las superficies de campo S y T . Se puede mostrar que el diámetro del círculo de menor confusión está dado por

$$D_{ic} = \frac{AstL}{2(F/\#)} \quad (3.20)$$

donde el astigmatismo longitudinal es la diferencia $(T - S)$ a lo largo del rayo principal reflejado. El $(F/\#)$ se puede aproximar por $(F/\#) = |l_V|/2r_A$, donde r_A es el radio del diafragma (figura 3.4).

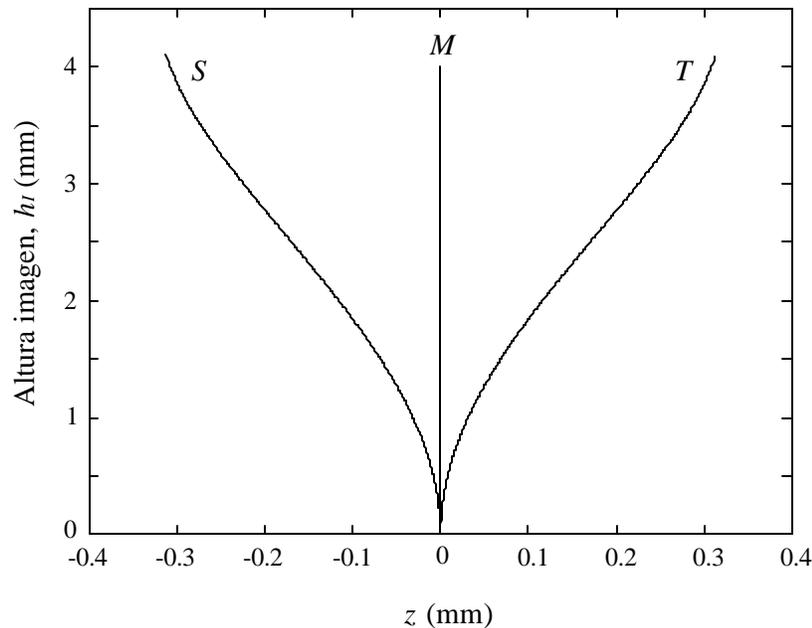


Figura 3.10. Curvas astigmáticas sagital (S) y tangencial (T) para el óvalo ΣM . La superficie plana promedio (M) biseca a S y T . En esta superficie plana la imagen de un punto objeto en ΣM es un círculo de menor confusión.

De la Eq. (3.20) se tiene que el diámetro del círculo de menor confusión varía proporcionalmente con la altura h_l en una cantidad dada por el astigmatismo longitudinal. Con este resultado, podemos anticipar que para obtener puntos imagen del mismo diámetro en la cuadrícula, se requiere tener agujeros de distinto tamaño en el elipsoide.

Además del efecto del astigmatismo en el tamaño de los puntos imagen, debemos considerar la variación de tamaño debida al aumento que produce el espejo esférico para objetos que se encuentran a diferente distancia. Consideremos primero el aumento producido por el espejo esférico a lo largo de un meridiano. Una forma directa de medir este aumento es considerar un elemento de longitud dh_l en la Eq. (3.15) para obtener el elemento de longitud de arco $ds_M = \sqrt{(dz_M)^2 + (dy_M)^2}$ a lo largo de la curva meridional. Sin embargo, una manera más fácil de encontrar el aumento se obtiene mediante un cálculo numérico. Supongamos que se quiere obtener punto imagen con un diámetro igual a 20 **mm**, entonces, de la Eq. (3.15) podemos calcular la longitud de un agujero a lo largo del meridiano. Dividiendo el diámetro del punto imagen entre la longitud calculada del agujero, se obtiene el aumento meridional m como se muestra en la figura 3.11.

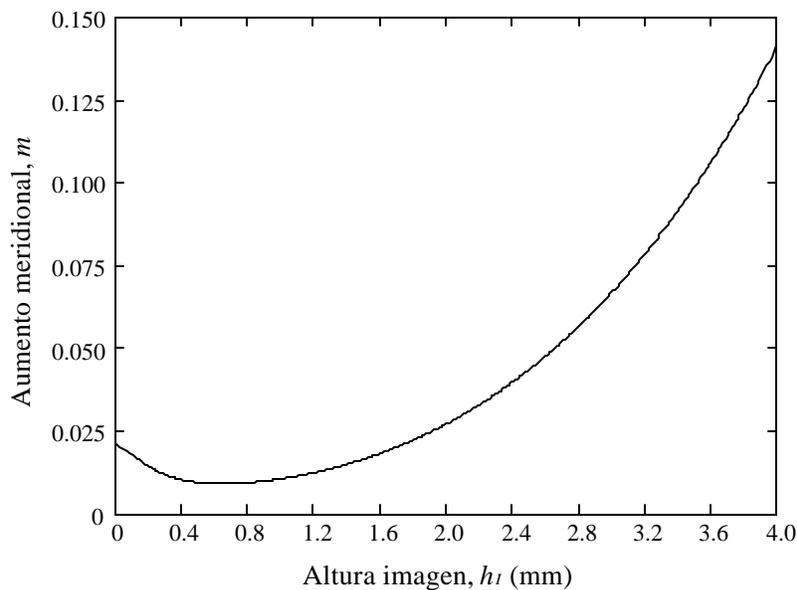


Figura 3.11. Aumento en la dirección meridional para puntos objeto en ΣM como función de la altura imagen h_l .

Supongamos que Δs_a es la longitud del agujero a lo largo de un meridiano, entonces la longitud del punto imagen correspondiente, visto con un sistema óptico cuyo diafragma está en $|l_v| = 180$ mm desde el vértice del espejo, será:

$$D_I = [m(\Delta s_a) * D_{lc}] * D_{dif} \quad (3.21)$$

donde $D_{dif} = 1.22(F/\#)$ es el diámetro del primer anillo oscuro de Airy en micrómetros, suponiendo que la longitud de onda de la luz es $\lambda = 0.5 \text{ } \mu\text{m}$. El símbolo (*) representa la operación de convolución. Ya que la distancia máxima $h_I (y_I)$ es mucho menor que $|l_v|$, el patrón de difracción D_{dif} es prácticamente una constante para cualquier punto imagen de la cuadrícula. Entonces, para obtener puntos imagen de igual tamaño D_I se debe resolver la Eq. (3.21) para Δs_a y como D_{dif} es una constante, basta con resolver el término dentro de los corchetes. Definiendo $D_I' = m(\Delta s_a) * D_{lc}$ y ya que la operación de convolución produce un ensanchamiento de $m(\Delta s_a)$ en una cantidad igual a D_{lc} , se puede aproximar D_I' por $D_I' \equiv m(\Delta s_a) + D_{lc}$. Esta aproximación permite calcular la longitud de Δs_a y en la práctica esto será suficiente.

Ahora, supongamos que Δs_b es la longitud del agujero en la dirección perpendicular al meridiano. Como el espejo esférico de referencia y el elipsoide ΣM forman un sistema con simetría de revolución, es fácil mostrar que

$$\Delta s_b = m(\Delta s_a) \frac{y_M}{h_I} . \quad (3.22)$$

Así, determinando Δs_a y Δs_b podemos obtener la forma aproximada de los agujeros para tener una imagen virtual de círculos del mismo tamaño.

Se ha mencionado que el tamaño de los puntos imagen depende del tamaño del círculo de menor confusión y del efecto de difracción, y ambos factores son función de $(F/\#)$. Sin embargo, el tamaño del círculo de menor confusión disminuye cuando $(F/\#)$ aumenta, mientras que el tamaño del primer anillo de Airy aumenta cuando $(F/\#)$ aumenta. Por lo tanto, es necesario encontrar el valor apropiado de $(F/\#)$ para obtener el menor ensanchamiento en el tamaño del círculo $m(\Delta s_a)$. Igualando el término de difracción con el

círculo de menor confusión para la máxima altura h_l , se obtiene que el $(F/\#)$ óptimo está dado por

$$(F/\#) = \sqrt{AstL/2.44} \quad (3.23)$$

cuando $AstL$ está dado en micrómetros. De la figura 3.10 se tiene que $AstL = 617 \text{ mm}$ para $h_l = 4.00 \text{ mm}$ cuando $|l_v| = 180 \text{ mm}$. En consecuencia, de la Eq. (3.23), $(F/\#) = 15.6$. Finalmente se encuentra que el radio óptimo para del diafragma es $r_A = 5.7 \text{ mm}$. Esto significa que el diámetro del primer anillo de Airy es $D_{dif} = 19 \text{ mm}$. El mismo valor se encuentra para el círculo de mínima confusión correspondiente a $h_l = 4.00 \text{ mm}$.

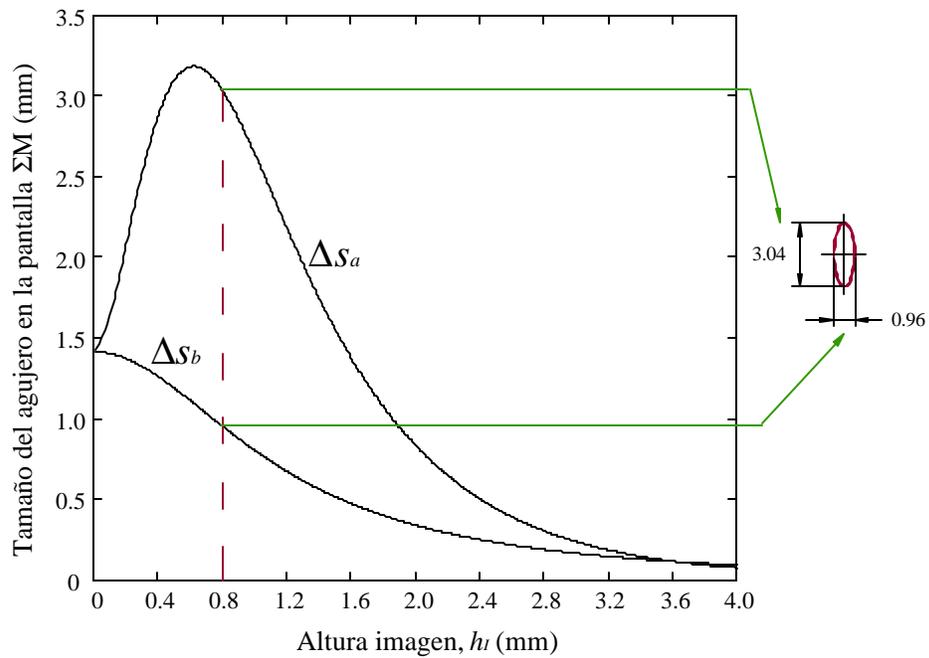


Figura 3.12. Geometría de los agujeros en la pantalla ΣM . De las longitudes ΔS_a y ΔS_b se deduce que los agujeros en la pantalla deben ser de forma elíptica con excentricidades que varían del tal manera que las imágenes de todos los agujeros en el plano imagen sean manchas circulares (puntos imagen) del mismo diámetro igual a $30 \mu\text{m}$ limitado por difracción. Por ejemplo, un punto imagen que está a 0.8 mm del centro de la cuadrícula se genera con un agujero cuya longitud meridional es 3.04 mm y cuya longitud sagital (perpendicular a la meridional) es 0.96 mm .

Supongamos que se desea obtener puntos imagen limitados por difracción de un diámetro igual a 30 mm , de modo que la imagen de los puntos vista con un sistema óptico será aproximadamente de 50 mm de diámetro. La figura 3.12 muestra las longitudes ΔS_a y ΔS_b de los agujeros en la superficie ΣM para obtener imágenes virtuales circulares limitadas por difracción de 30 mm de diámetro. De esta figura, se puede ver que la forma de los

agujeros en la superficie ΣM es aproximadamente de tipo elíptico. La excentricidad de esta elipses es función de la altura imagen h_i . En el vértice de la superficie ΣM ($h_i = 0$) la excentricidad es cero, es decir, un agujero allí debe ser circular. Para $h_i \approx 1$ mm la excentricidad del agujero correspondiente toma un valor máximo de 0.95. Luego la excentricidad de los agujeros disminuye y se hace nuevamente cero en $h_i \approx 3.6$ mm. En la figura 3.12 se señala la forma de un agujero de ΣM para generar un punto imagen limitado por difracción de 30 **mm** de diámetro a una altura $h_i = 0.8$ mm.

Con los resultados de la figura 3.12, podemos volver a la figura 3.9 y reemplazar cada punto objeto por un agujero tipo elipsoidal de la geometría apropiada, para obtener una cuadrícula de círculos del mismo tamaño en el plano imagen virtual generado por el espejo esférico convexo. Al reemplazar el espejo esférico por una córnea real, esta cuadrícula de puntos (círculos) será distorsionada y de esta distorsión será posible obtener la forma de la córnea.

Lo más relevante del capítulo

De los resultados obtenidos en este capítulo se puede resaltar lo siguiente:

- a. Las superficies objeto que generan imágenes virtuales sagital, tangencial y promedio planas en un espejo esférico convexo difieren ligeramente de elipsoides de revolución.
- b. Ya que el diafragma del sistema está localizado en el vértice de la superficie objeto, se encuentra que el radio de curvatura en el vértice de las superficies objeto sagital, tangencial y promedio, está relacionado de una manera sencilla con el radio de la superficie esférica de referencia. En consecuencia, es posible estimar rápidamente la forma de los elipsoides que ajustan cada uno de los ovoides ΣS , ΣT y ΣM cuando la distancia $|l_v|$ es mucho mayor que el radio de la superficie de referencia. Usando la ecuación del radio de curvatura de una elipse en el vértice $R_v = b^2 / a$, con $a = (|l_v| + R) / 2$, es posible encontrar b ; a es la mitad de la longitud del eje mayor y b es la mitad de la longitud del eje menor de la elipse. Así, con a y b en cada caso, se determina la forma de los elipsoides que ajustan los ovoides ΣS , ΣT y ΣM .

- c. Con el propósito de implementar la prueba de Hartmann en la evaluación de la forma de la córnea, se escogió la superficie objeto (pantalla) ΣM que genera una imagen virtual promedio plana.
- d. De la distribución espacial de los agujeros en la superficie objeto ΣM , se encuentra que la mayor parte de los agujeros están en la mitad del ovoide que está más cerca del espejo esférico de referencia.
- e. Los agujeros en la pantalla ΣM son de forma elíptica. La excentricidad de estas pequeñas elipses es función de la altura de la imagen de estos agujeros en el plano imagen virtual.

4. Diseño y fabricación de un prototipo del topógrafo corneal tipo Hartmann (TCH)

Este capítulo describe la fabricación de un instrumento prototipo para medir la topografía de la córnea con base en los resultados obtenidos en el capítulo 3. A este prototipo se le denominará TCH (topógrafo corneal tipo Hartmann). La descripción del TCH se hará en cuatro partes: fabricación de la pantalla; perforación de los agujeros en la pantalla; sistema de iluminación; y sistema óptico formador de imagen. La región de evaluación de la córnea con este prototipo será una región circular de 6.4 mm de diámetro. Manteniendo la separación de 0.4 mm entre puntos de la cuadrícula a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, el número total de puntos se reduce a 197 puntos. Lo anterior significa que el número de puntos a lo largo de los ejes x_I o y_I de la figura 3.7 se reduce de 20 a 16 (sin contar el punto central). Así, la altura máxima de un punto de la cuadrícula con respecto al origen será de 3.2 mm.

4.1. Fabricación de la pantalla

Siguiendo los resultados del capítulo 3, seleccionamos la superficie objeto ΣM para implementar la prueba de Hartmann en la medición de la topografía corneal. Los parámetros utilizados se muestran en la Tabla 3.1, esto es, un elipsoide con longitudes de semieje mayor $a = 93.1$ mm y longitud de semieje menor $b = 26.9$ mm.

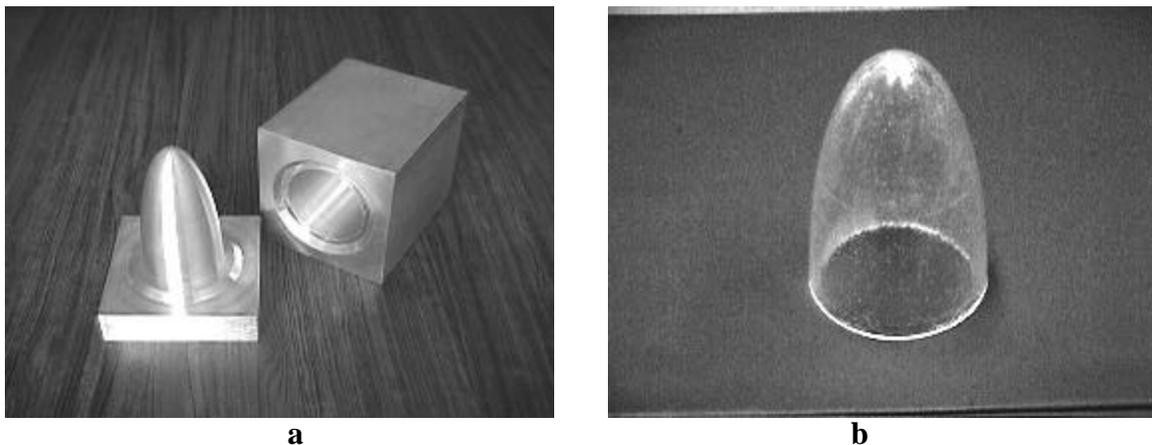


Figura 4.1. (a) Molde de aluminio y (b) mitad de la pantalla elipsoidal ΣM en plástico.

La pantalla elipsoidal se construye de una resina plástica transparente de 3 mm de espesor, de modo que las dimensiones de la parte interna correspondan a los de la superficie Σ M. La pantalla se compone de dos partes iguales, empleando para ello un molde de aluminio. La figura 4.1(a) muestra el molde de aluminio y la figura 4.1(b) muestra una de las partes de la pantalla elipsoidal en plástico.

Antes de unir las dos partes para obtener la pantalla completa, se cortan los extremos cerca de los vértices de modo que el sistema final quede como el mostrado en la figura 3.9. La perforación de los agujeros también se hace por separado en cada una de las partes.

4.2. Perforación de los agujeros en la pantalla

La ubicación de los agujeros en cada una de las partes de la pantalla está determinada por los resultados dados por la figura 3.8. Para obtener aproximadamente la forma elíptica de los agujeros, la perforación de los agujeros se hace en dirección hacia el centro del espejo esférico (figura 3.9). La figura 3.12 da la geometría de cada uno de los agujeros para obtener una imagen circular de 30 *mm* de diámetro para cada uno de los agujeros (sin el efecto de la difracción). Sin embargo, en la práctica no fue posible encontrar las brocas de los diámetros apropiados. La perforación se realizó con brocas de los siguientes diámetros 1.58 mm (1/16”), 0.79 mm (1/32”) y 0.40 mm (1/64”).

Para realizar cada una de las perforaciones en la dirección adecuada y lugar preciso en la pantalla, primero se fabricó un contra-molde de cada una de las partes de plástico con el propósito de marcar sobre estos contra-moldes la posición de los agujeros. Cada contra-molde se montó sobre una plataforma giratoria graduada en grados y con un nonio de 5 minutos de arco. El eje de la plataforma giratoria y el eje de simetría del contra-molde se hicieron coincidir. En un sistema de traslación de un solo grado de libertad graduado en milímetros y con un nonio de 10 micrómetros se montó un láser He-Ne de 5 mw, de tal manera que el rayo láser se pudiera desplazar verticalmente a lo largo del eje de simetría del contra-molde. El centro de la sección transversal del rayo láser sobre la superficie del contra-molde, permite marcar la posición de cada uno de los agujeros. Una vez marcados los agujeros en cada contra-molde, se colocó cada parte de la pantalla plástica y se taladraron los agujeros. La figura 4.2(a) muestra el sistema de marcación y perforación de

cada uno de los agujeros y la figura 4.2(b) muestra las dos partes de la pantalla con las perforaciones.

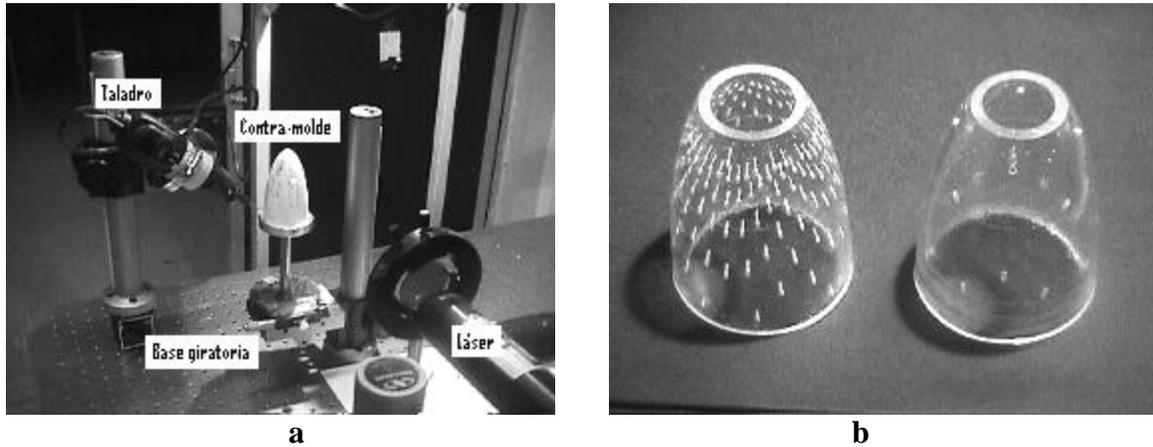


Figura 4.2. (a) Sistema de marcación y perforación de los agujeros; (b) pantalla plástica con los agujeros.

4.3. Sistema de iluminación

Para generar la cuadrícula de puntos luminosos en el plano imagen virtual, se insertaron segmentos de fibra óptica plástica (~ 7 mm de longitud) en cada uno de los agujeros. Los diámetros de las fibras ópticas disponibles fueron: 0.35 mm, 0.55 mm, 0.75 mm y 0.95 mm. Uno de los extremos de cada fibra óptica se dejó a ras con la superficie interna de la pantalla. El otro extremo de las fibras sobresale con respecto a la superficie exterior de la pantalla; este extremo recibirá la luz. De esta manera se observarán en la superficie interna de la pantalla puntos luminosos de diferentes diámetros. La parte interna de la pantalla se pintó de negro mate y la parte externa se pintó de blanco mate. La iluminación se genera con una lámpara circular fluorescente colocada en uno de los extremos de la pantalla (cerca al diafragma del sistema) como se muestra en la figura 4.3(a). Finalmente, para optimizar la iluminación, se coloca una cubierta con una superficie interna de blanco mate. El aspecto externo del instrumento queda como se muestra en la figura 4.3(b).

Entonces, el paciente debe colocar su ojo en el extremo señalado en la figura 4.3(b) como “Lado de la Córnea”. El paciente podrá observar una cuadrícula de puntos luminosos. Del otro lado del instrumento, se coloca un sistema óptico para formar una imagen real de la cuadrícula reflejada en la córnea (§ 4.4). Para que la imagen de la cuadrícula quede

centrada, el paciente debe mirar hacia el centro de la cuadrícula. Por otra parte, el instrumento, incluyendo el sistema óptico, debe moverse con respecto a la córnea del paciente hasta que la imagen esté en foco. La córnea quedará ubicada aproximadamente en uno de los vértices de la pantalla elipsoidal.

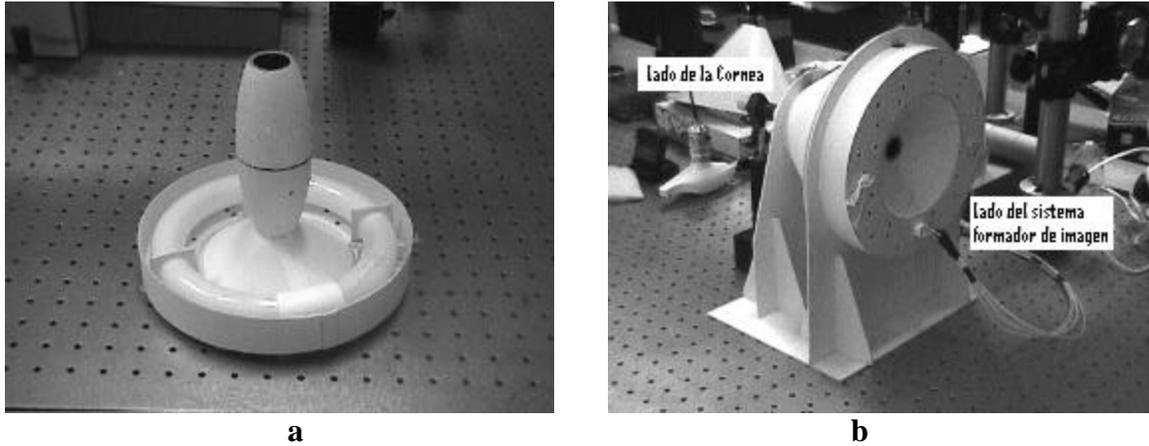
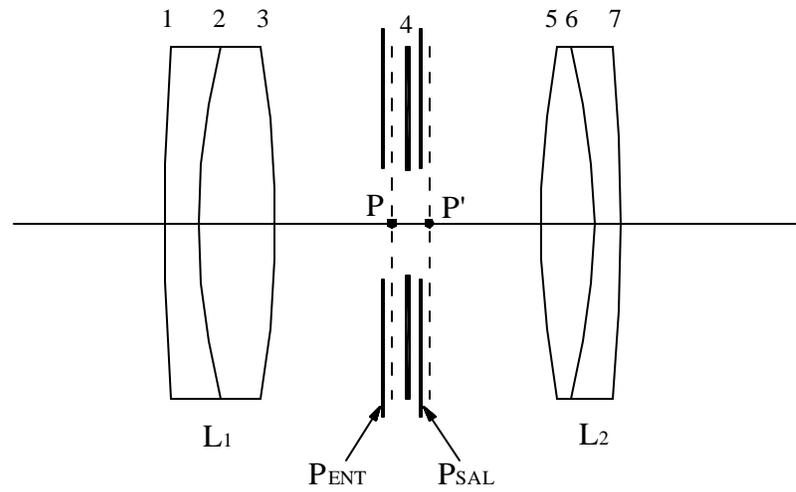


Figure 4.3. (a) Pantalla y el sistema de iluminación del TCH; (b) aspecto externo del TCH.

4.4. Sistema de óptico formador de imagen

Para formar una imagen real de la cuadrícula de puntos en un plano virtual localizado a $R - z_l = 3.81$ mm detrás del vértice del espejo esférico de referencia de radio 7.78 mm (figura 3.4), se empleó un sistema acromático doble con el diafragma en medio de las lentes acromáticas. De acuerdo a lo discutido en el capítulo 3, la pupila de entrada del sistema óptico formador de imagen debe localizarse en el vértice de la pantalla que está en el lado opuesto de la córnea. Sin embargo, no fue posible disponer de los dobletes acromáticos de las distancias focales apropiadas para que el diafragma quedará en la posición adecuada; en su defecto, se utilizó el sistema óptico mostrado en la figura 4.4. Este sistema acromático doble se colocó a una distancia aproximada de 230 mm con respecto al plano imagen virtual (figura 4.5), de tal manera que un objeto virtual de altura $h_l = 3.2$ mm en la cuadrícula de puntos es visto en el plano imagen real (sensor CCD a 149.9 mm de la superficie 7 del sistema óptico) como una imagen real de altura $h' = -2.14$ mm, es decir, el aumento paraxial del sistema es -0.67 . El diseño anterior, permite obtener una imagen

completa de la cuadrícula de puntos sobre el área del sensor CCD. Las dimensiones del sensor CCD son 6.35×4.76 mm ($1/4'' \times 3/16''$) y el número de píxeles es 768×494 .



Superficie	Radio (mm)	Espesor (mm)	Medio	Indice
1	253.10	4.00	SF5	1.6727
2	87.26	8.50	BK7	1.5168
3	-124.12	15.00	Aire	1.0000
Diafragma	-----	15.00	Aire	1.0000
5	109.16	6.00	BK7	1.5168
6	-79.38	3.00	SF5	1.6727
7	-226.03			

Figura 4.4 Óptica del TCH. La superficie 4 representa el diafragma; P_{ENT} la pupila de entrada; P_{SAL} la pupila de salida; P y P' los puntos principales (o puntos nodales). La distancia focal de L₁ es $f_1 = 200$ mm y la distancia focal de L₂ es $f_2 = 175$ mm.

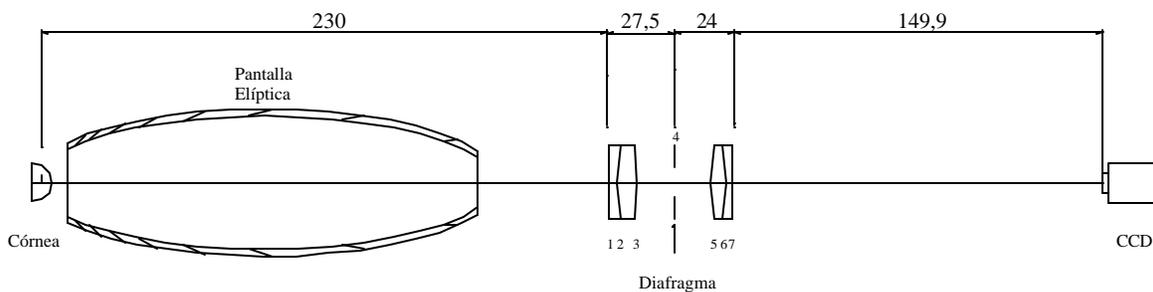


Figura 4.5. Sistema óptico del Topógrafo Corneal tipo Hartmann, TCH.

Los parámetros del sistema óptico de la figura 4.5 obtenidos con el programa de diseño OSLO LT5 cuando el radio del diafragma es $r_A = 5.16$ mm se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Parámetros paraxiales del sistema óptico de la figura 4.5 (obtenidos con el programa de diseño OSLO LT5).

APERTURE			
Entrance beam radius:	5.100000	Image axial ray slope:	-0.033071
Object num. aperture:	0.022168	F-number:	9.085577
Image num. aperture:	0.033063	Working F-number:	15.122485
FIELD			
Field angle:	-0.719772	Object height:	3.200000
Gaussian image height:	-2.145550	Chief ray ims height:	-2.145550
CONJUGATES			
Object distance:	230.000000	Srf 1 to prin. pt. 1:	25.701485
Gaussian image dist.:	149.889186	Srf 7 to prin. pt. 2:	-21.554703
Overall lens length:	51.500000	Total track length:	431.389186
Paraxial magnification:	-0.670485	Srf 7 to image srf:	149.889186
OTHER DATA			
Entrance pupil radius:	5.648031	Srf 1 to entrance pup.:	24.715116
Exit pupil radius:	5.702840	Srf 7 to exit pupil:	-22.550643
Lagrange invariant:	0.070957	Petzval radius:	-128.927747
Effective focal length:	102.631234		

Con esta configuración, el radio de la pupila de entrada es ~ 5.65 mm y el radio de la pupila de salida es ~ 5.70 mm. Suponiendo una longitud de onda $\lambda = 0.5$ μm , el diámetro de la mancha de difracción vista desde la pupila de entrada es $D_{dif} \sim 22$ μm . Ya que este sistema no es de conjugados 1:1, la imagen final de la mancha de difracción varía y de acuerdo a la Tabla 4.1, su diámetro es $D_{dif} \sim 15$ μm . De acuerdo a lo mencionado en el capítulo 3, el tamaño final de los puntos imagen será 45 μm de diámetro. Como se verá más adelante en las imágenes obtenidas para la esfera de calibración y en córneas reales, los puntos imagen no mantienen en realidad el mismo tamaño, debido a la imposibilidad práctica de hacer los agujeros con los diámetros apropiados y también a la falta de tener fibras ópticas apropiadas.

Cuando la imagen de la cuadrícula generada por la esfera de referencia está en foco, cada 26 pixeles de la imagen corresponden a 0.4 mm. Así el tamaño promedio de los puntos de la cuadrícula se estima en 4×4 pixeles, esto es, 60 μm de diámetro aproximadamente. El centro de intensidad de cada punto, evaluado de la misma forma como se evalúa el centro de masa de un cuerpo, se toma como la localización espacial del punto.

Aunque el sistema óptico de la figura 4.4 en una configuración confocal ofrece una mejor corrección de las aberraciones, con coma, distorsión y color lateral (aberración cromática de aumento) cercanas a cero, no se utilizó esta configuración ya que el aumento paraxial $m = -f_2/f_1 = -0.875$. Con este aumento, no es posible obtener una imagen completa de la cuadrícula de puntos en el área del sensor CCD. Por esta razón, se alejó el sistema óptico de la córnea, hasta obtener un aumento apropiado para el registro de la imagen en el sensor CCD. A pesar de no tener una configuración confocal, los resultados obtenidos con el sistema de la figura 4.5 son igualmente satisfactorios, tal y como se muestra en la Tabla 4.2 y en la figura 4.6.

Tabla 4.2 Aberraciones de Seidel del sistema óptico de la figura 4.5 para $h_i = 3.2$ mm.

Sup	SphT	ComaS	AstTS	PtzT	Dist
1	-0.002795	0.000734	-0.000193	-0.000123	8.3071e-05
2	0.004343	-0.000321	2.3746e-05	5.4653e-05	-5.7970e-06
3	-0.002072	-0.000680	-0.000223	-0.000213	-0.000143
Diafragma	--	--	--	--	--
5	-0.001234	0.000443	-0.000159	-0.000242	0.000144
6	0.006917	0.000432	2.7012e-05	6.0078e-05	5.4423e-06
7	-0.006375	-0.001273	-0.000254	-0.000138	-7.8370e-05
Suma	-0.001215	-0.000666	-0.000779	-0.000602	4.8320e-06

La nomenclatura usada en la Tabla 4.2 significa: SphT, aberración esférica transversal; ComaS, coma sagital; AstTS, astigmatismo transversal sagital; PtzT, corrimiento lateral de la imagen debido a la curvatura de Petzval; Dist, distorsión.

Como es de esperarse, la aberración esférica es despreciable, debido a la corrección que introducen los dobletes acromáticos y a que el radio de la pupila de salida (Tabla 4.1) es mucho menor que la distancia de la pupila de salida al plano imagen (sensor CCD). También se puede ver en el diagrama del trazo de rayos (figura 4.6) que la aberración cromática está corregida para las líneas F (0.486 μm) y d (0.587 μm). Aunque el sistema óptico de la figura 4.5 no es simétrico, se tiene que la distorsión, coma y color lateral son prácticamente despreciables. La corrección óptima de la distorsión que pueda introducir el sistema óptico formador de imagen es muy importante, ya que la tarea del TCH es evaluar la distorsión del arreglo cuadrículado de puntos producido por las deformaciones de la córnea con respecto a una esfera de referencia.

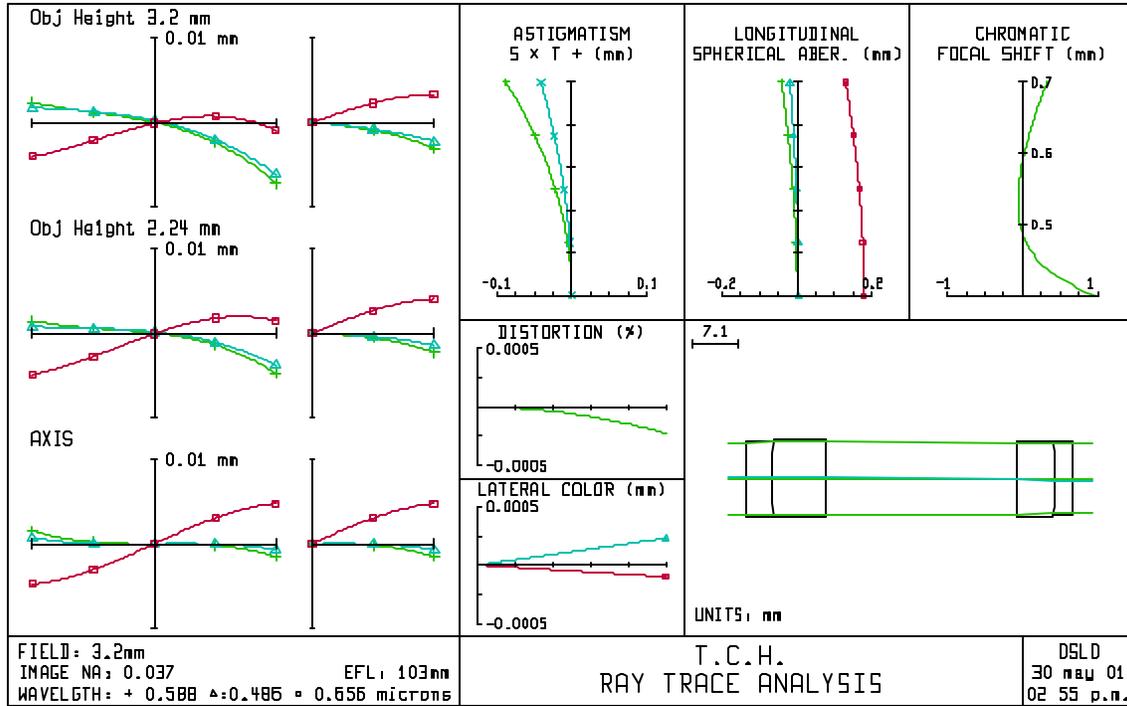


Figura 4.6. Trazo de rayos para el sistema óptico de la figura 4.5.

A pesar de no haber mantenido la configuración con la pupila de entrada del sistema óptico formador de imagen en el vértice de la superficie ΣM , el sistema utilizado no introduce variaciones apreciables en la geometría de la cuadrícula de puntos, ni modificaciones en las curvas astigmáticas de la figura 3.10. Lo anterior se debe a que el ángulo f (figura 3.4) prácticamente no cambia al mover la pupila de entrada del vértice de ΣM hasta la distancia ~ 250 mm desde el espejo de referencia (figura 4.5). Por otro lado, el ángulo q (figura 3.4) si cambia apreciablemente, pero su magnitud en cualquier caso es tal que el $\cos q \sim 1.00$.

El astigmatismo introducido por la óptica del sistema formador de imagen también es muy pequeño, por lo que el efecto en la calidad de imagen de los puntos es mínimo. Para evaluar la posición de la imagen real de los puntos de la cuadrícula, se calcula el centro de intensidad del punto, de la misma forma como se calcula el centro de masa de un cuerpo. Ya que la coma es despreciable, el centro de intensidad del punto prácticamente coincide con la posición del rayo principal en cada caso.

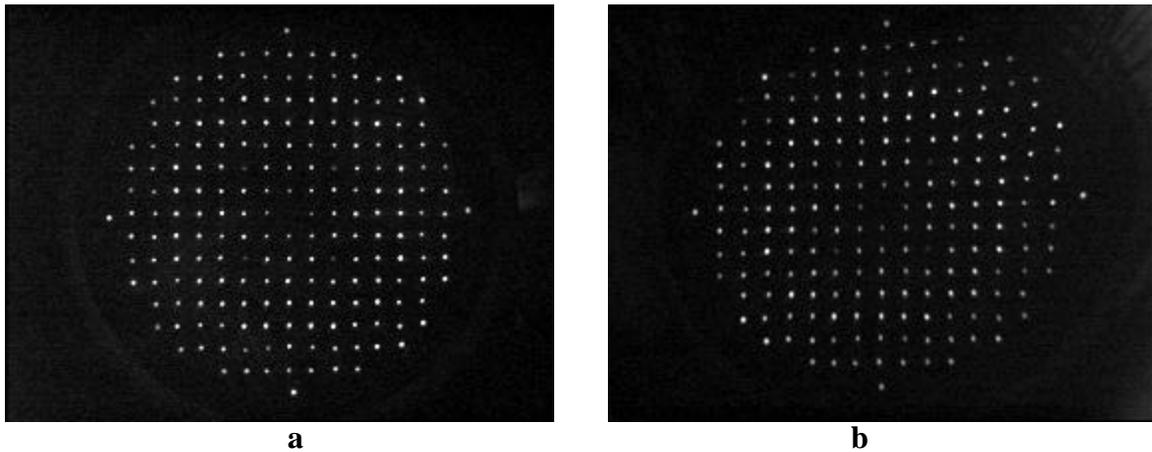


Figura 4.7. (a) Imagen de la cuadrícula de puntos generada por una esfera de referencia de radio 7.78 mm con un error pico-valle de $\lambda/5$ ($\lambda = 0.632 \text{ mm}$); (b) imagen de la cuadrícula generada por una córnea con deformaciones.

La figura 4.7(a) muestra la imagen de la cuadrícula de puntos generada por una esfera de referencia de radio 7.78 mm con un error pico-valle de $\lambda/5$ ($\lambda = 0.632 \text{ mm}$). Nótese que en efecto todos los puntos aparecen en foco. La imagen no es una cuadrícula perfecta debido a que la marcación de los puntos y la perforación de los agujeros (§ 4.2) se hizo en forma manual. La figura 4.7(b) muestra la imagen de la cuadrícula generada por una córnea con deformaciones respecto a una superficie esférica. El formato de cada una de las imágenes es 640×486 píxeles.

Si la córnea no se encuentra en la posición axial adecuada, se introducirá un defoco en la imagen. Ya que el sistema óptico formador de imagen no tiene una configuración telecéntrica, el defoco en la imagen introduce distorsión. Por otra parte, si la córnea no está centrada con respecto al eje óptico del sistema, también se introduce distorsión en la imagen. En ambos casos, la distorsión introducida genera errores en el análisis posterior de la forma de la córnea. Lo anterior implica que es muy importante obtener imágenes en foco y centradas. La figura 4.8(a) muestra la distorsión de barril generada cuando la esfera de referencia se encuentra fuera de foco. La figura 4.8(b) muestra la distorsión de cojín generada cuando la esfera de referencia está dentro de foco. Nótese el efecto de las curvas astigmáticas de la figura 3.10 en la forma de los puntos en cada imagen.

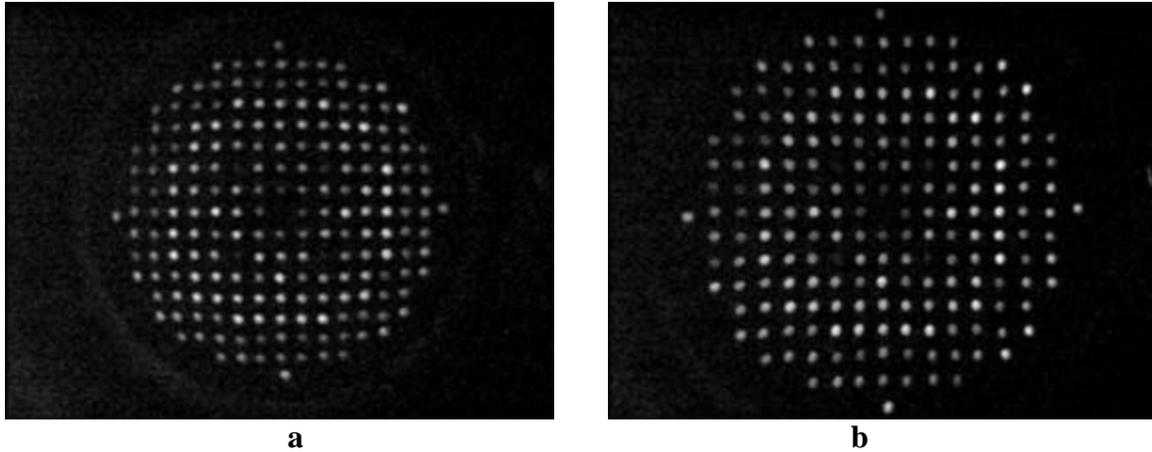


Figura 4.8. (a) Distorsión de barril de la cuadrícula de puntos introducida cuando la esfera de referencia está fuera de foco; (b) distorsión de cojín de la cuadrícula de puntos introducida cuando la esfera de referencia está dentro de foco.

La figura 4.9 muestra el TCH en operación en el laboratorio de interferometría en el Centro de Investigaciones en Óptica. El TCH, el sistema óptico formador de imagen y la cámara CCD se fijaron a la mesa. El paciente coloca su barbilla sobre una base que se puede desplazar hacia arriba o hacia abajo. En la práctica, la cabeza del paciente debe ser inmobilizada mientras el oftalmólogo manipula el topógrafo corneal hasta que la córnea del paciente quede en foco y centrada. Para que el eje visual del ojo coincida con el eje del sistema óptico, el paciente debe observar hacia un punto de referencia ubicado en el centro de la cuadrícula.

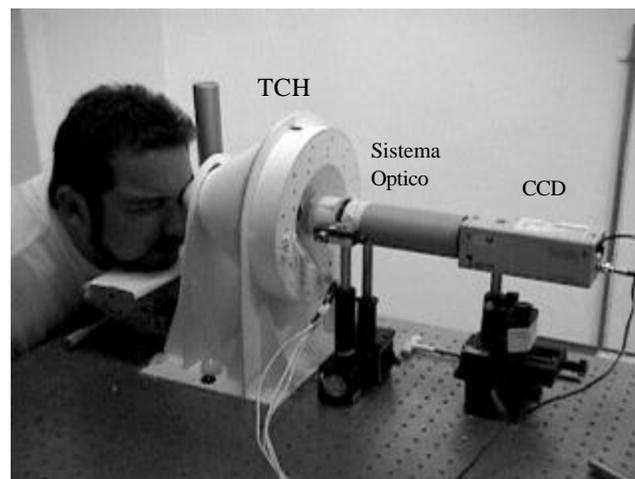


Figura 4.9. Operación del TCH en el Centro de Investigaciones en Óptica.

Lo más relevante del capítulo

La construcción del topógrafo corneal tipo Hartmann (TCH) con base en los resultados del capítulo 3 se ha logrado satisfactoriamente. Aunque la imagen de los puntos generada por una esfera de referencia de radio 7.78 mm no es una cuadrícula perfecta, los resultados que se obtienen permitirán realizar evaluaciones de la forma de córneas reales. Para minimizar el error, la distorsión de la cuadrícula generada por una córnea (figura 4.7(b)) se comparará con la imagen de la cuadrícula obtenida con la esfera de referencia.

5. Mapas de curvatura y de elevación obtenidos con el TCH

En la prueba usual de Hartmann en espejos cóncavos (Ghozeil [1992]), la región del frente de onda bajo análisis prácticamente coincide con la posición del agujero y la aberración transversal del rayo es evaluada en un plano posterior (figura 3.1). En nuestro caso, con la prueba modificada de Hartmann, la aberración transversal de cualquier rayo vista en el plano del diafragma (figura 3.4) es cero, mientras que la posición de los puntos de la cuadrícula en el plano imagen virtual (Figuras 4.7(a) y 4.7(b)) varía según la forma de la superficie bajo prueba. Lo anterior se ilustra en la figura 5.1.

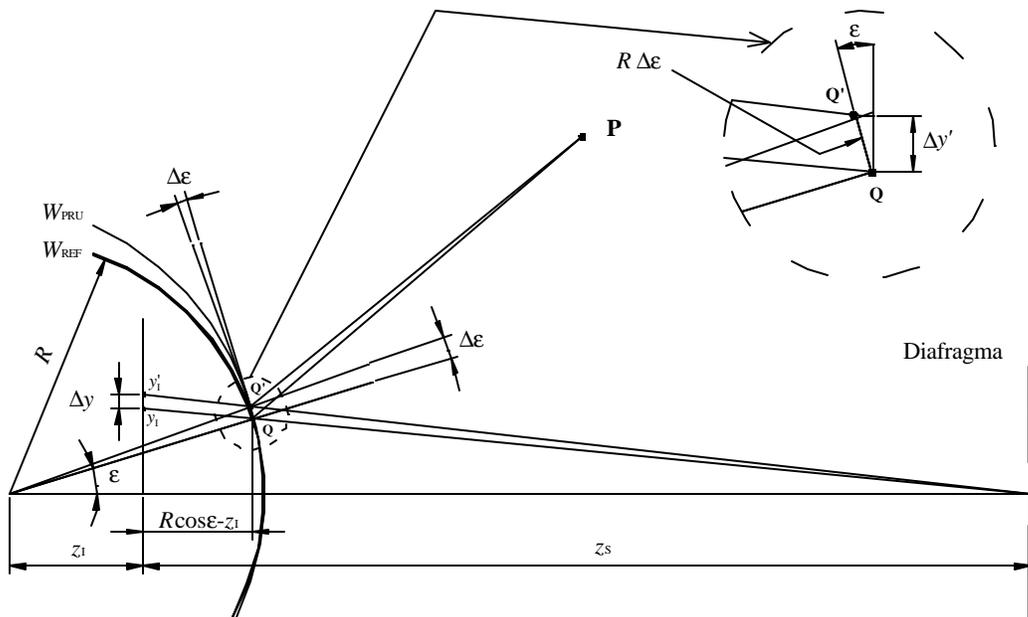


Figura 5.1. Una variación en la forma de la superficie de prueba con respecto a la superficie de referencia se observa como un desplazamiento lateral de la posición de los puntos de la cuadrícula.

En la figura 5.1, W_{PRU} y W_{REF} representan el perfil de las superficies de prueba y de referencia respectivamente. P es un objeto puntual en la pantalla Σ_M (figura 3.9); Q es un punto sobre W_{REF} donde incide el rayo principal y la imagen virtual de P generada por W_{REF} se encuentra a una altura y_i ; Q' es un punto sobre W_{PRU} donde incide el rayo principal y la imagen virtual de P generada por W_{PRU} se encuentra a una altura y_i' . $\Delta y = y_i - y_i'$ representa

el corrimiento lateral de las imágenes virtuales del punto **P** generadas por las superficies de referencia y de prueba.

En la práctica, las variaciones de la superficie de prueba (córnea) con respecto a la superficie de referencia, son pequeñas comparadas con el radio de la superficie de referencia, por lo que el arco que subtiende el ángulo $\Delta\varepsilon$ es aproximadamente igual al segmento **Q'Q**. Con base en lo anterior, es posible escribir la siguiente relación:

$$\Delta y' = R \Delta\varepsilon \cos \varepsilon. \quad (5.1)$$

Por otra parte, de la geometría de la figura 5.1 se tiene que

$$\frac{\Delta y}{z_s} = \frac{\Delta y'}{z_s - (R \cos \varepsilon - z_l)}. \quad (5.2)$$

Definiendo $W = W_{\text{REF}} - W_{\text{PRU}}$ y suponiendo que el segmento **Q'Q** es mucho menor que el radio R , es posible relacionar el ángulo $\Delta\varepsilon$ con la variación de las pendientes de W_{PRU} y W_{REF} según

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\partial W}{\partial y}. \quad (5.3)$$

De las Eqs. (5.1), (5.2) y (5.3) se puede relacionar la variación de las pendientes de las superficies de referencia y de prueba con la variación en la posición Δy de los puntos de la cuadrícula. Por lo tanto

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\Delta y}{f(\varepsilon)} \quad (5.4)$$

donde $f(\varepsilon) = z_s R \cos \varepsilon / [z_s - (R \cos \varepsilon - z_l)]$. Ya que $z_s \gg R$ y $z_s \gg z_l$, entonces $f(\varepsilon) \approx R \cos \varepsilon$. Lo anterior se puede interpretar como una corrección en el factor $\cos(\varepsilon)$ al radio de la esfera de referencia. Para el punto más alejado del eje óptico en la cuadrícula, esto es $y_l = 3.2$ mm, el valor del factor $\cos \varepsilon \approx 0.93$, mientras que para los puntos cercanos al eje óptico, se puede aproximar $f(\varepsilon) \approx R$. En la práctica, se puede mostrar que este factor de corrección no introduce modificaciones apreciables con respecto a los resultados que se obtienen si se reemplaza $f(\varepsilon)$ por R en todos los casos. Para la componente en la dirección x se obtiene una expresión similar a la Eq. (5.4).

5.1. Mapas de curvatura ($x, y, c = \text{curvatura}$)

Para obtener la información de la curvatura local de la superficie de prueba, supongamos que tanto la superficie de referencia como la de prueba, se pueden evaluar localmente mediante las funciones $W_{\text{REF(Local)}} : z = h_R(x, y)$ y $W_{\text{PRU(Local)}} : z = h_p(x, y)$. La región que describe cada función estará determinada por los grupos de cuatro puntos más cercanos entre sí de la cuadrícula, proyectados en la superficie de prueba a lo largo de los rayos principales. La selección de los cuatro puntos más cercanos se puede realizar de dos maneras, tal y como se ilustra en la figura 5.2.

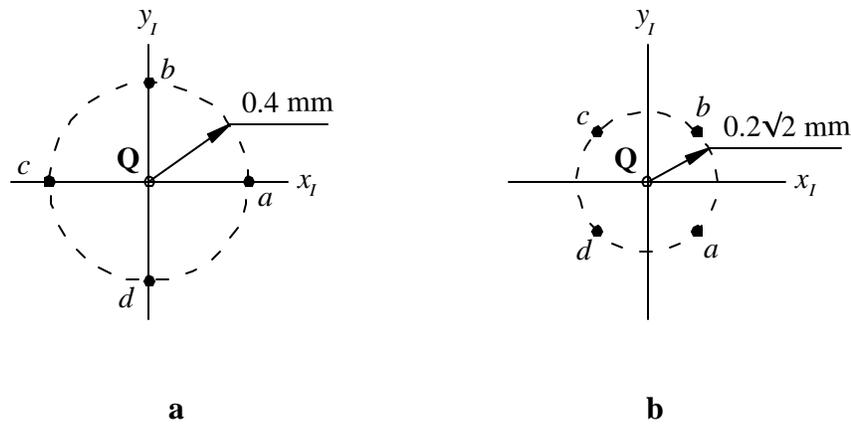


Figura 5.2. Grupos de los 4 puntos más cercanos en la cuadrícula de puntos. En (a) la distancia de cada punto al origen de coordenada es $\rho = 0.4 \text{ mm}$. En (b) la distancia de cada punto al origen de coordenada es $\rho = 0.2\sqrt{2} \text{ mm}$.

Ya que suponemos que las variaciones de la superficie de prueba con respecto a la superficie de referencia son pequeñas comparadas con el radio de la superficie de referencia, es posible escribir la diferencia local de las sagitas de $W_{\text{REF(Local)}}$ y $W_{\text{PRU(Local)}}$ como (Malacara [1992b]):

$$W = \frac{1}{2}S(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}C(x \text{sen} \chi - y \text{cos} \chi) + P(x \text{cos} \omega + y \text{sen} \omega) + B(x \text{cos} \beta + y \text{sin} \beta)(x^2 + y^2). \quad (5.5)$$

La coordenada $(x, y) = (0, 0)$ corresponderá al punto Q' (o Q), que puede ser cualquiera de los puntos de la cuadrícula (salvo los puntos de la periferia) cuando se usa la configuración de la figura 5.2(a). El error de foco S es la curvatura mínima con respecto a la esfera de referencia, es decir, $S = c_2 - 1/R$ siendo c_2 la curvatura mínima de la superficie de prueba

en \mathbf{Q}' . El astigmatismo o el cilindro C mide la diferencia entre la curvatura máxima y la curvatura mínima con respecto a la esfera de referencia (Eq. 2.17), es decir, $C = (c_1 - 1/R) - (c_2 - 1/R) = c_c$, siendo c_1 la curvatura máxima de la superficie de prueba en \mathbf{Q}' . El ángulo χ da la dirección de una curva de la superficie de prueba que pasa por \mathbf{Q}' con curvatura igual a c_2 ; en otros términos, χ da la dirección del cilindro.

Supongamos que es posible definir sendos vértices en cada una de las regiones de las superficies de prueba y de referencia $W_{\text{REF(Local)}}$ y $W_{\text{PRU(Local)}}$. Si los vértices locales no coinciden, entonces decimos que hay un descentramiento local (corrimiento lateral) entre las superficies de prueba y de referencia. Este corrimiento lateral subtende un ángulo P con respecto al centro de curvatura de la esfera de referencia. Por otra parte, el vector de posición relativa entre los vértices, formará un ángulo ω con la dirección horizontal (eje x).

El último término de la Eq. (5.5) corresponde a la componente de coma dada por B y su dirección está dada por el ángulo β .

Nótese que todas las componentes S , C , P y B y sus direcciones, están medidas con respecto al centro del grupo de cuatro puntos. Lo anterior significa que estamos suponiendo que hay un eje óptico que pasa por el centro de curvatura de la esfera de referencia y por el centro del grupo de cuatro puntos proyectados en la superficie de prueba, por lo que independientemente de la posición del grupo de cuatro puntos en la cuadrícula, el factor $f(\epsilon)$ de la Eq. (5.4) es igual a R cuando se describe la superficie en forma local. Mediante un barrido de los grupos de cuatro puntos sobre la superficie de prueba es posible determinar las curvaturas principales y su dirección en los puntos asociados al centro de cada grupo. Con las dos configuraciones mostradas en la figura 5.2, además de obtener información en las regiones de la superficie de prueba asociadas a los puntos de la cuadrícula, también se obtiene información en puntos intermedios.

De lo anterior se tiene que las curvaturas locales máxima y mínima de la superficie de prueba están dadas por:

$$c_1 = 1/R + S + C, \text{ y} \tag{5.6a}$$

$$c_2 = 1/R + S. \tag{5.6b}$$

La variación de W (Eq. 5.5) en la dirección x y y , de acuerdo a lo discutido anteriormente, se puede escribir como:

$$-\frac{\Delta x}{R} = Sx + C(x\text{sen}\chi - y\text{cos}\chi)\text{sen}\chi + P\text{cos}\omega + 2Bx(x\text{cos}\beta + y\text{sen}\beta) + B(x^2 + y^2)\text{cos}\beta, \quad (5.7a)$$

$$-\frac{\Delta y}{R} = Sy - C(x\text{sen}\chi - y\text{cos}\chi)\text{cos}\chi + P\text{sen}\omega + 2By(x\text{cos}\beta + y\text{sen}\beta) + B(x^2 + y^2)\text{sen}\beta. \quad (5.7b)$$

Si los cuatro puntos alrededor de \mathbf{Q}' se representan por a , b , c y d , la desviación lateral de cada uno de estos puntos con respecto a la posición de los puntos generados por la esfera de referencia está dada por:

$$-\Delta x_a / R = \rho (S + C \text{sen} \chi) + P \text{cos} \omega + 3B\rho^2 \text{cos} \beta, \quad (5.8a)$$

$$-\Delta x_b / R = -\rho C \text{sen} \chi \text{cos} \chi + P \text{cos} \omega + B\rho^2 \text{cos} \beta, \quad (5.8b)$$

$$-\Delta x_c / R = -\rho (S + C \text{sen}^2 \chi) + P \text{cos} \omega + 3B\rho^2 \text{cos} \beta, \quad (5.8c)$$

$$-\Delta x_d / R = \rho C \text{sen} \chi \text{cos} \chi + P \text{cos} \omega + B\rho^2 \text{cos} \beta, \quad (5.8d)$$

$$-\Delta y_a / R = -\rho C \text{sen} \chi \text{cos} \chi + P \text{sen} \omega + B\rho^2 \text{sen} \beta, \quad (5.8e)$$

$$-\Delta y_b / R = \rho (S + C \text{cos}^2 \chi) + P \text{sen} \omega + 3B\rho^2 \text{sen} \beta, \quad (5.8f)$$

$$-\Delta y_c / R = \rho C \text{sen} \chi \text{cos} \chi + P \text{sen} \omega + B\rho^2 \text{sen} \beta, \quad (5.8g)$$

$$-\Delta y_d / R = -\rho (S + C \text{cos}^2 \chi) + P \text{sen} \omega + 3B\rho^2 \text{sen} \beta. \quad (5.8h)$$

Las Eqs. (5.8) con $\rho = 0.4$ mm son aplicables a la configuración de la figura 5.2(a). Igualmente, son aplicables a la configuración de la figura 5.2(b) siendo $\rho = 0.2\sqrt{2}$ mm y restando $\pi/4$ a las direcciones obtenidas en cada caso. Siguiendo el mismo procedimiento de Malacara [1992b] para despejar los parámetros S , C , P y B y sus direcciones, se tiene que el astigmatismo, la dirección para la curvatura mínima y el error de foco están dados por:

$$C = \left[(\mathbf{d}_{xa} - \mathbf{d}_{yb})^2 + (\mathbf{d}_{xb} + \mathbf{d}_{ya})^2 \right]^{1/2}, \quad (5.9)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\delta_{xb} + \delta_{ya}}{\delta_{xa} - \delta_{yb}} \right], \quad (5.10)$$

$$S = -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{xa} + \mathbf{d}_{yb} + C), \quad (5.11)$$

donde

$$\delta_{xa} = \frac{\Delta x_a - \Delta x_c}{2\rho R}, \quad (5.12a)$$

$$\delta_{xb} = \frac{\Delta x_b - \Delta x_d}{2\rho R}, \quad (5.12b)$$

$$\delta_{ya} = \frac{\Delta y_a - \Delta y_b}{2\rho R}, \quad (5.12c)$$

$$\delta_{yb} = \frac{\Delta y_b - \Delta y_d}{2\rho R}. \quad (5.12d)$$

Ya que para el análisis de las curvaturas principales no es relevante la información dada por los términos P y B , y sus direcciones, en lo que sigue, solo nos ocuparemos de los términos presentados en las Eqs. (5.9), (5.10) y (5.11).

5.2. Mapas de elevación ($x, y, z = \text{altura}$)

Al igual que en la prueba usual de Hartmann en espejos cóncavos, aquí también es posible determinar la variación de la elevación o sagita de la superficie de referencia con respecto a la superficie de prueba. Siguiendo el procedimiento de integración descrito por Ghozeil [1992], la evaluación de la diferencia entre las sagitas de las superficies de referencia y de prueba estará dada por:

$$\Delta h_N = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^N \left[\frac{1}{2} (\Delta x_{n-1} + \Delta x_n) \delta x_{n-1} + \frac{1}{2} (\Delta y_{n-1} + \Delta y_n) \delta y_{n-1} \right]. \quad (5.13)$$

Con esta suma, la desviación Δh_N para el punto N de la cuadrícula, proyectado sobre la superficie de prueba a lo largo del rayo principal, se puede evaluar. Los factores δx_{n-1} y δy_{n-1} , corresponden a la separación de los puntos de la cuadrícula generada por la superficie de referencia a lo largo de las direcciones x y y , respectivamente. Si la cuadrícula es

perfecta, entonces δx_{n-1} y δy_{n-1} son constantes e igual a $\rho = 0.4$ mm. Aunque la cuadrícula que obtenemos con el TCH para la esfera de referencia no es perfecta, se puede considerar a los factores δx_{n-1} y δy_{n-1} como constantes a fin de facilitar los cálculos. El error que esta consideración introduce se mostrará más adelante con un ejemplo.

5.3. Resultados experimentales

Para evaluar el funcionamiento del TCH se utilizarán cuatro superficies de prueba y una de referencia. La superficie de referencia es media esfera de vidrio BK7 de radio 7.78 mm con un error pico-valle de $\lambda/5$ ($\lambda = 0.632$ μm). La imagen de la cuadrícula del TCH generada por esta esfera se muestra en la figura 4.7(a). Las cuatro superficies de prueba son las siguientes:

- I. Media esfera de vidrio BK7 de radio 7.67 mm con un error pico-valle de $\lambda/6$.
- II. Una lente de contacto plástica (polimetilmetacrilato) con forma toroidal en su cara convexa. Los radios nominales son $R_1 = 7.08 \pm 0.02$ mm y $R_2 = 7.54 \pm 0.02$ mm.
- III. Córnea del ojo derecho del autor de esta tesis.
- IV. Córnea del ojo derecho de una persona sometida a cirugía correctiva láser.

Para determinar la posición de cada punto en las imágenes generadas por las superficies de referencia y de prueba, se evalúa el centro de intensidad de cada punto de la misma manera como se evalúa el centro de masa de un cuerpo. El punto central de la cuadrícula se determina a partir del centroide de los cuatro puntos más cercanos al eje óptico (figura 5.2(a)). Después de determinar la posición de los puntos de la cuadrícula, se determina el centroide de todos los puntos en cada una de las imágenes. Este centroide se toma como el origen del sistema de coordenadas. Una vez determinados los centros de intensidad de cada punto y los centroides, se obtienen los corrimientos laterales Δx y Δy correspondientes a las imágenes virtuales de cada punto \mathbf{P} de la pantalla $\Sigma\mathbf{M}$ (figura 5.1).

Los mapas de curvatura y elevación se presentan en forma discreta, es decir, el color asociado al valor de la curvatura y el punto a la altura, corresponden a los centroides de la figura 5.2. Para tener una representación similar a los mapas de curvatura simulados en el capítulo 2, esto es, mapas con una distribución continua de color, se puede hacer una interpolación bidimensional o un ajuste polinómico de los parámetros correspondientes.

5.3.1. Superficie de prueba I (esfera de radio 7.67 mm)

La superficie de prueba I, al igual que la esfera de referencia, fueron fabricadas en el taller óptico del CIO. Esta superficie de prueba se utilizará para ver cual es el efecto en los resultados que introduce el hecho de no tener una cuadrícula de puntos perfecta cuando se utiliza una esfera de referencia y de suponer, además, que la separación entre puntos de la cuadrícula a lo largo de las direcciones x y y es una constante ($\rho = 0.4$ mm). La figura 5.3 muestra los centros de intensidad de los puntos de las imágenes de las cuadrículas generadas por la esfera de referencia (círculos rojos) y por la superficie de prueba I (círculos en azul).

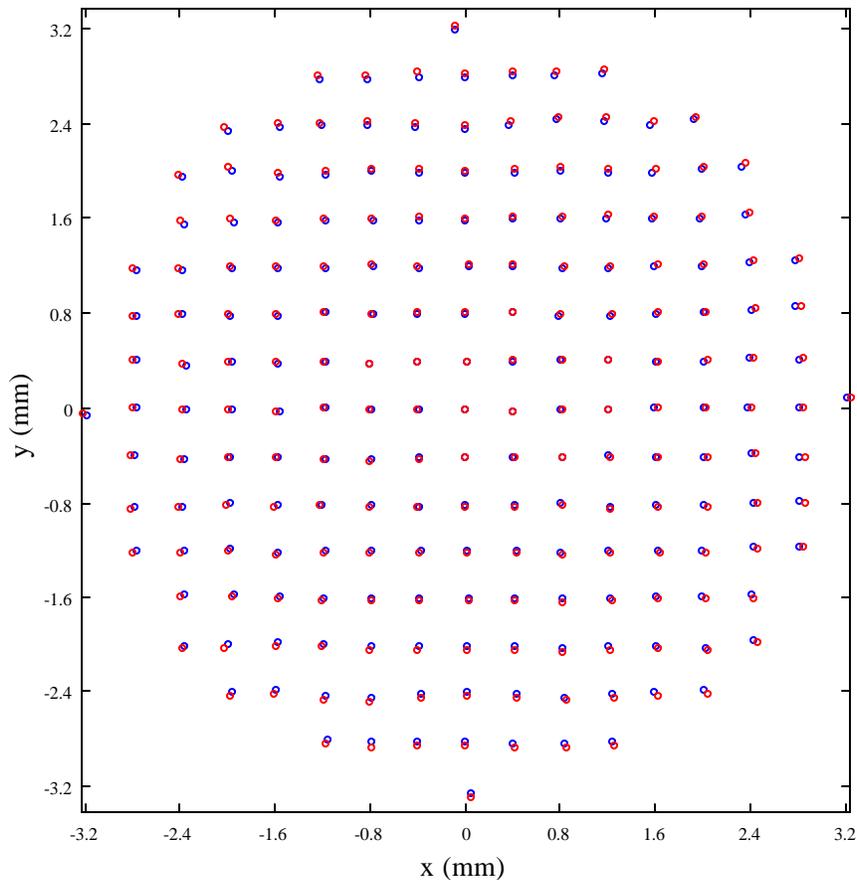


Figura 5.3. Centros de intensidad de los puntos de las cuadrículas generadas por la esfera de referencia (círculos en rojo) y la superficie de prueba I (círculos en azul).

El mapa de astigmatismo para la superficie de prueba I obtenido de acuerdo al procedimiento presentado en la sección §5.1 se muestra en la figura 5.4(a). Es evidente la variación de color en la región de evaluación, siendo mayor para aquellos puntos que se

desvían más de la posición ideal de la cuadrícula. Si la cuadrícula fuera perfecta este mapa debería tener un solo color correspondiente al valor cero. La figura 5.4(b) muestra la distribución de los valores del astigmatismo. Este histograma permite estimar un valor promedio del error que se introduce en la medida del astigmatismo en la región de evaluación (círculo de 6.4 mm de diámetro), esto es:

$$\text{Error Ast} = 0.17 \pm 0.10 \text{ D.}$$

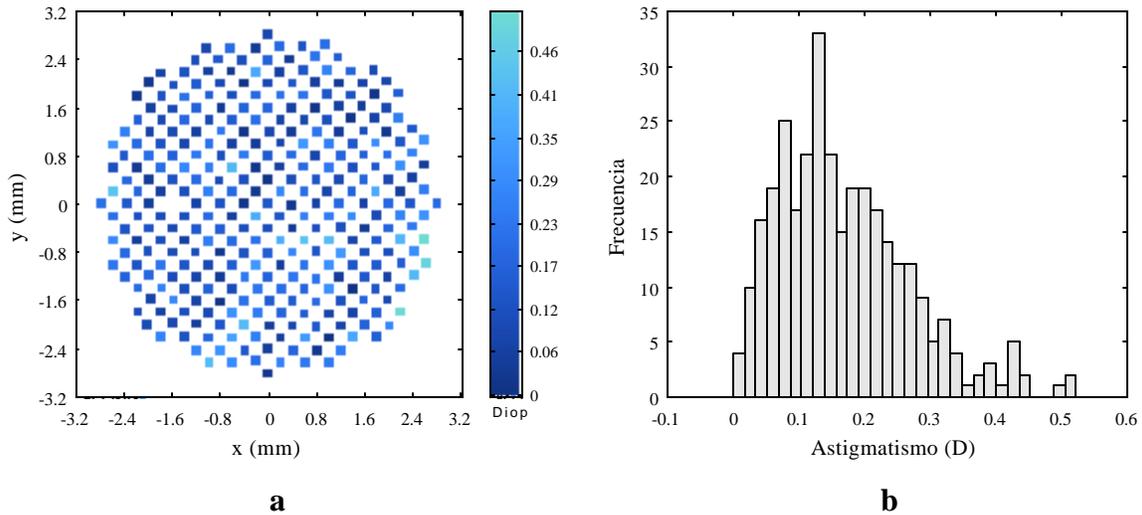


Figura 5.4. (a) Mapa de astigmatismo local de la superficie de prueba I. Este mapa es una medida del error que se produce al no tener una cuadrícula de puntos perfecta cuando se utiliza una esfera de referencia. (b) Histograma de los valores del astigmatismo.

En términos del radio de curvatura, el valor promedio que se obtiene junto con la desviación estándar para la superficie de prueba I es:

$$R_1 = 7.68 \pm 0.02 \text{ mm.}$$

Por otra parte, de la evaluación de la diferencia entre las sagitas de las superficies de referencia y de prueba (figura 5.5), también es posible determinar el radio de la superficie de prueba I. Por ejemplo, a lo largo de las direcciones horizontal y vertical se encuentra que el perfil de la superficie de prueba I se puede ajustar con círculos de radio

$$R_{x1} = 7.676 \text{ mm, con un error estándar } s_e = 0.0006 \text{ mm, y}$$

$$R_{y1} = 7.670 \text{ mm, con un error estándar } s_e = 0.0005 \text{ mm.}$$

De lo anterior se deduce que el TCH da resultados muy exactos cuando se evalúa una superficie de prueba con radio promedio cercano al de la superficie de referencia. El valor del radio se puede obtener directamente de los mapas de curvatura (como se verá en los siguientes ejemplos) o bien del mapa de elevación. En ambos casos la precisión en la medida está por debajo de 0.02 mm.

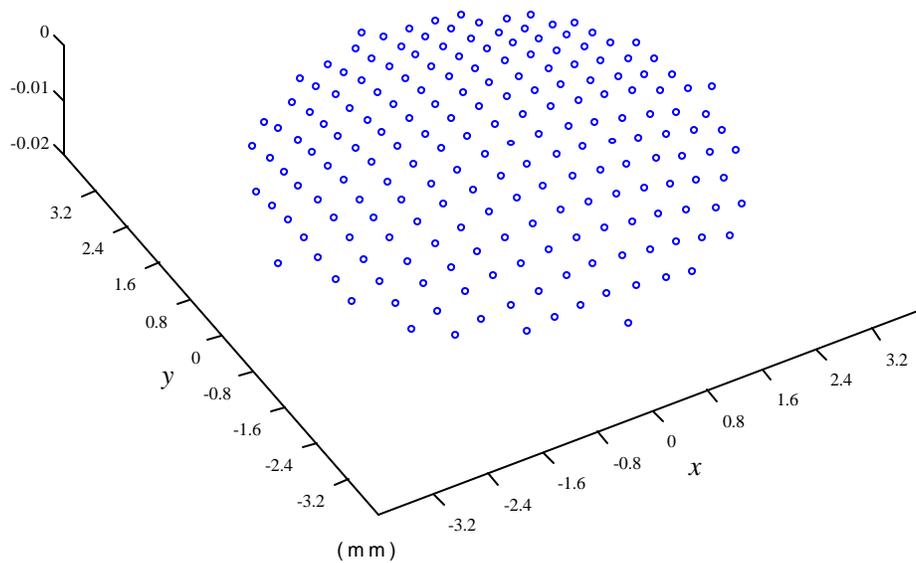


Figura 5.5. Diferencia de las sagitas entre la superficie de referencia y la superficie de prueba I.

5.3.2. Superficie de prueba II (lente de contacto toroidal)

La superficie de prueba II es una lente de contacto plástica con su cara convexa en forma de toroide. Esta lente se fabricó en un taller de lentes de contacto utilizando el método tradicional para producir toroides. El diámetro de la lente es de 10 mm y los radios principales en su cara convexa tienen el valor nominal $R_1 = 7.08 \pm 0.02$ mm y $R_2 = 7.54 \pm 0.02$ mm. Lo anterior significa que esta lente tiene un cilindro en el vértice igual a 2.91 ± 0.22 D.

La figura 5.6 muestra los centros de intensidad de los puntos de la cuadrícula distorsionada generada por la superficie convexa de la lente de contacto (círculos en azul). Los círculos en rojo corresponden a la esfera de referencia.

La figura 5.7(a) es el astigmatismo local de la superficie convexa de la lente de contacto (Eq. (5.9)). La figura 5.7(b) representa las tangentes de las líneas de curvatura mínima (§2.3) en los puntos de evaluación de esta superficie (Eq. (5.10)). De manera que la curvatura mínima en cada punto de esta superficie toroidal siempre está en la misma dirección.

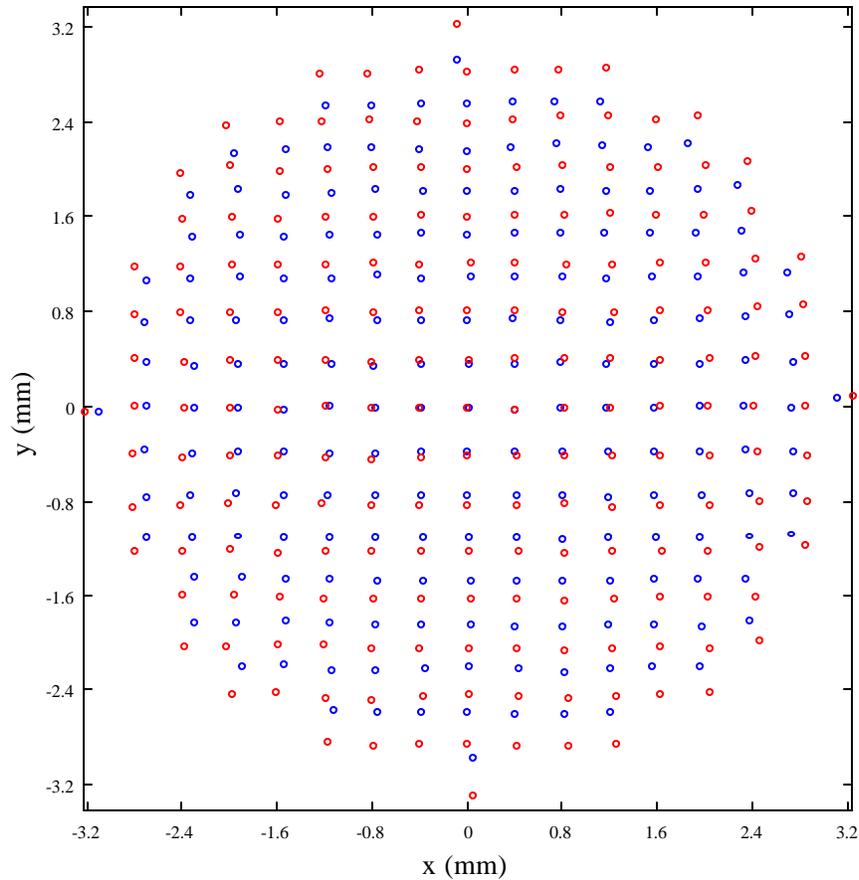


Figura 5.6. Centros de intensidad de los puntos de las cuadrículas generadas por la esfera de referencia (círculos en rojo) y la superficie de prueba II (círculos en azul). Se puede apreciar que el radio del toroide en la dirección horizontal es mayor que el radio en la dirección vertical.

En la figura 5.7(a) se han señalado 5 puntos, uno en el centro indicando el vértice (V) y otros cuatro numerados como 1, 2, 3 y 4 en los extremos horizontal y vertical. Los valores del astigmatismo junto con los correspondientes radios máximo y mínimo se muestran en la tabla 5.1. El error promedio en la medida del astigmatismo se puede aproximar por el error obtenido en la superficie de prueba I, esto es ± 0.17 D. Igualmente, el error en la medida del radio se estima en ± 0.02 mm.

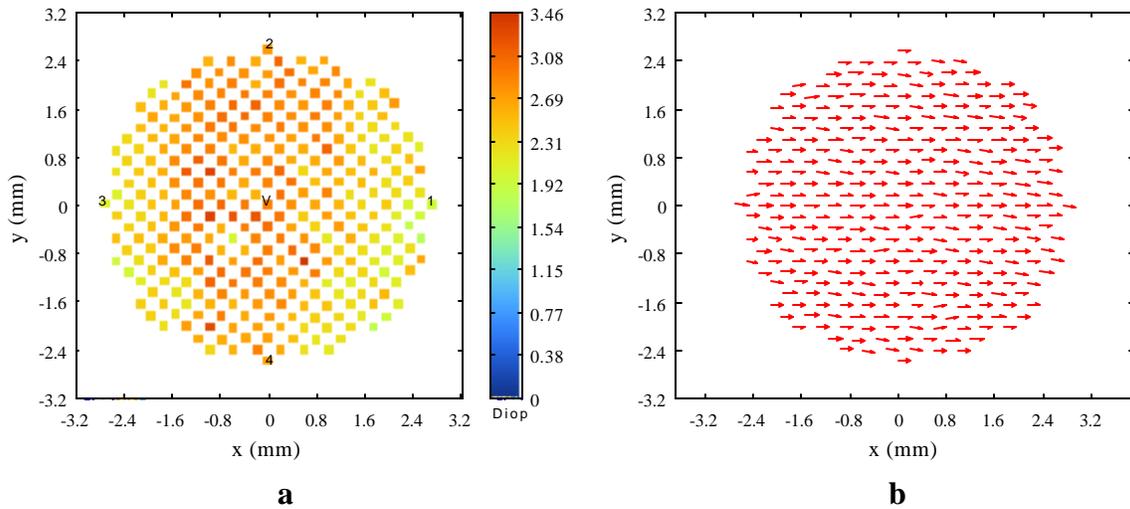


Figura 5.7. (a) Astigmatismo y (b) líneas de curvatura mínima para la lente de contacto toroidal.

Los datos de la tabla 5.1 presentan una variación del radio de curvatura en la dirección x (radio máximo de los puntos V, 1 y 3), mientras que el radio de curvatura en la dirección y (radio mínimo de los puntos V, 2 y 4) prácticamente permanece constante. Lo anterior significa que la superficie convexa de la lente de contacto no es exactamente una superficie toroidal, ya que por definición, un toroide tiene sus radios de curvatura principales (máximo y mínimo) constantes a lo largo de las dos direcciones principales (ejes x y y).

Tabla 5.1. Valores del astigmatismo y radios principales de curvatura de los puntos señalados en la figura 5.7(a).

Punto	Astigmatismo (D)	Radio máximo (mm)	Radio mínimo (mm)
V	2.90	7.56	7.10
1	2.00	7.39	7.08
2	2.76	7.50	7.07
3	2.12	7.41	7.08
4	2.70	7.50	7.09

La figura 5.8 muestra los mapas de curvatura máxima (Eq. 5.6(a)) y mínima (Eq. 5.6(b)) para la lente de contacto.

A partir de los mapas de curvatura máxima y mínima, y las tangentes de las líneas de curvatura (figura 5.7(b)), es posible obtener el mapa de curvatura meridional (figura 5.9) de acuerdo con el teorema de Euler (Eq. (2.9)).

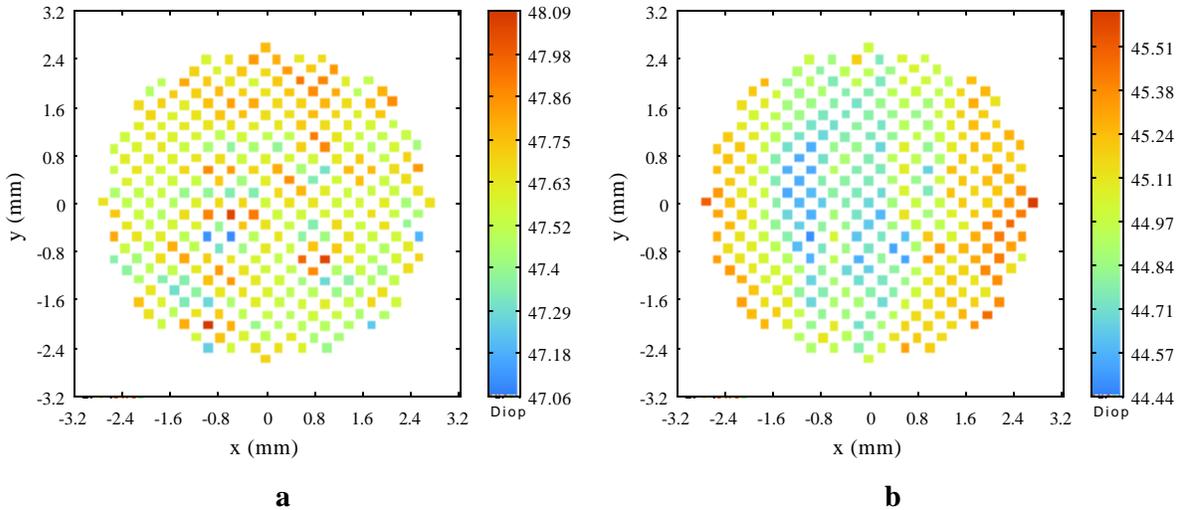


Figura 5.8. Mapas de curvatura máxima (a) y mínima (b).

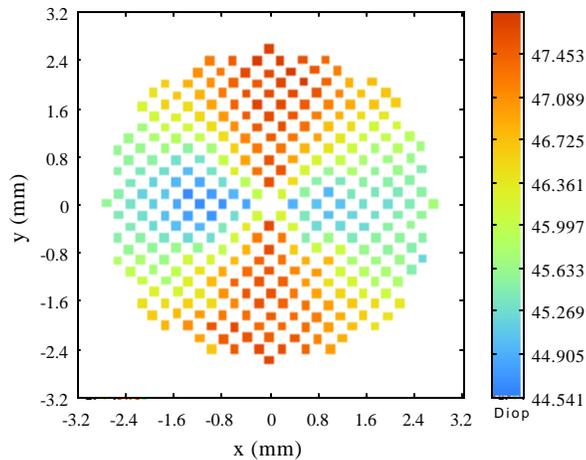


Figura 5.9. Mapa de curvatura meridional (instantánea o verdadera).

Estrictamente, para evaluar el mapa de curvatura meridional, se debe emplear también el teorema de Meusnier (Eq. 2.10), tal y como se muestra en el ejemplo de la figura 2.6. Sin

embargo, el error que se introduce al omitir el hecho de que las normales principales de los meridianos no necesariamente coinciden con las normales de la superficie es, en general, mucho menor que el error que tenemos debido a la falta de una cuadrícula perfecta cuando se usa la superficie esférica de referencia.

Nuevamente, se puede apreciar en la figura 5.9, que el radio de curvatura a lo largo de la dirección y y prácticamente no cambia, mientras que los cambios del valor del radio de curvatura en la dirección x son evidentes. Nótese que en el mapa de curvatura meridional no se ha asignado algún color al vértice, pues allí sucede la intersección todos los meridianos. Para determinar el valor de la curvatura en el vértice usando el mapa, una vez definida la dirección en la cual se desea obtener el valor, tomamos los dos colores más próximos a cada lado del vértice y luego se promedian los valores asociados. La manera más precisa es tomar los valores dados en la tabla 5.1 para el vértice y con el teorema de Euler se evalúa la curvatura en cualquier dirección.

Finalmente, la figura 5.10 muestra la diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia y la superficie toroidal de la lente de contacto. Aquí también se aprecia que el radio promedio en la dirección x es mayor que el radio promedio en la dirección y .

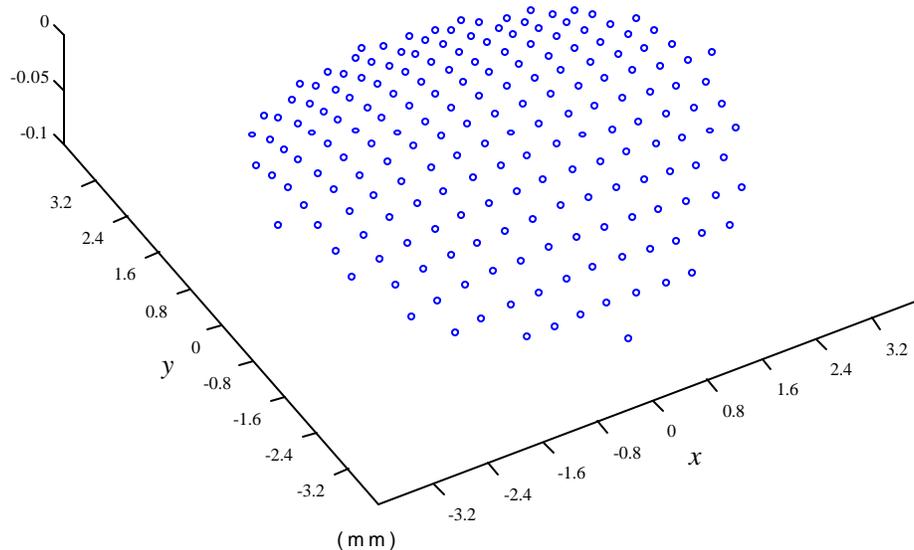


Figura 5.10. Diferencia de las sagitas entre la superficie de referencia y la superficie toroidal de la lente de contacto.

Sumando la esfera de referencia a la figura 5.10 obtenemos la superficie convexa de la lente de contacto. Los radios de los círculos que mejor ajustan el perfil de la superficie a lo largo de las direcciones horizontal y vertical son:

$$R_{xII} = 7.520 \text{ mm, con un error estándar } s_e = 0.0006 \text{ mm, y}$$

$$R_{yII} = 7.085 \text{ mm, con un error estándar } s_e = 0.003 \text{ mm.}$$

En este ejemplo, al igual que en la superficie de prueba I, los resultados obtenidos mediante los dos caminos independientes, mapas de curvatura y mapas de elevación, muestran que con el TCH se pueden obtener medidas muy exactas de los radios de curvatura, aún en aquellos casos en que el radio de curvatura a medir difiera hasta en un 10% del radio de la esfera de referencia ($R_y = 7.08 \text{ mm}$).

La figura 5.11 corresponde al mapa de curvatura meridional de la superficie convexa de la lente de contacto obtenida con un topógrafo corneal basado en los anillos de Placido (Optikon 2000). Salvo la diferencia en la escala de colores y la rotación de la lente, es evidente la similitud de este mapa con el de la figura 5.9. Los radios de curvatura principales obtenidos con este topógrafo en el vértice son $R_{xII} = 7.59 \text{ mm}$ y $R_{yII} = 7.05 \text{ mm}$.

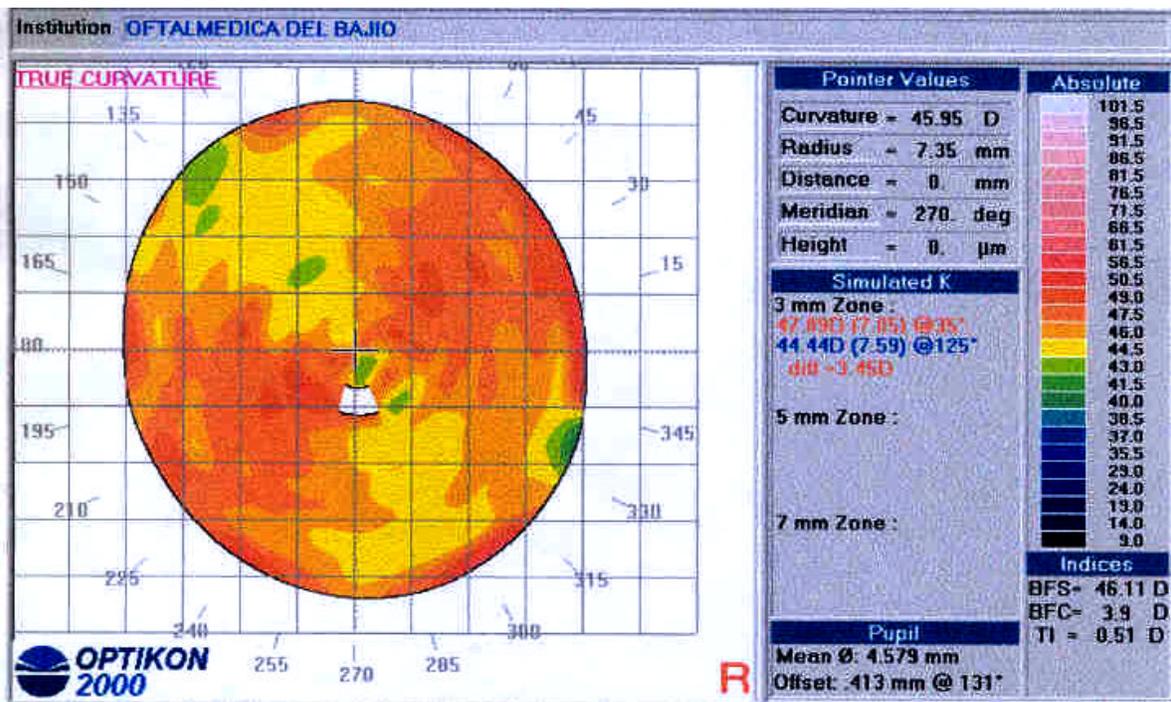


Figura 5.11. Mapa de curvatura meridional de la superficie de prueba II tomado con un topógrafo corneal basado en los anillos de Placido (cortesía Oftalmédica del Bajío).

5.3.3. Superficie de prueba III (córnea ojo derecho del autor de esta tesis)

La superficie de prueba III corresponde a la córnea del ojo derecho del autor de esta tesis. De un examen optométrico previo, se sabe que esta córnea tiene un astigmatismo en el vértice de 1 D. La sensibilidad del instrumento de medida es 0.25 D. La figura 5.12 muestra los centros de intensidad de la cuadrícula distorsionada generada por esta córnea (círculos en azul).

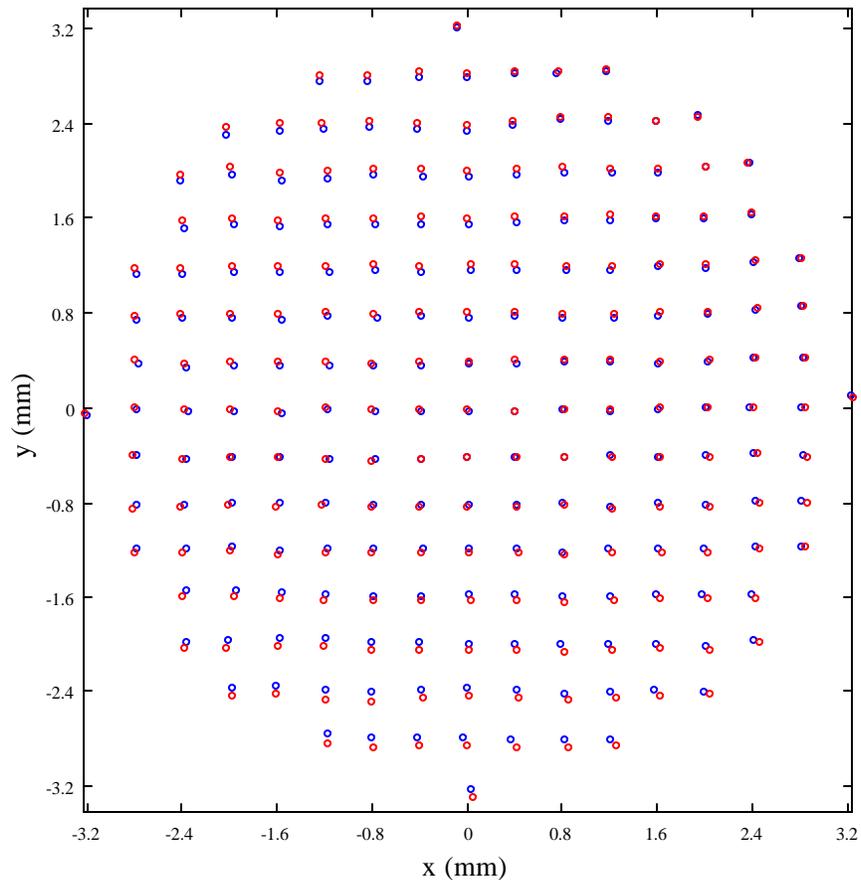


Figura 5.12. Centros de intensidad de los puntos de las cuadrículas generadas por la esfera de referencia (círculos en rojo) y la superficie de prueba III (círculos en azul).

El mapa de astigmatismo y las tangentes de las líneas de curvatura mínima de esta córnea se muestran en la figura 5.13. Nótese la similitud de estas representaciones con las obtenidas para el modelo elipsoidal de la córnea en el capítulo 2 (figuras 2.7(b) y 2.5). Lo anterior indica que en la parte superior de la córnea existe un punto umbílico, es decir, un

punto donde la curvatura es igual en cualquier dirección. En la parte inferior parece que existe más de un punto umbílico.

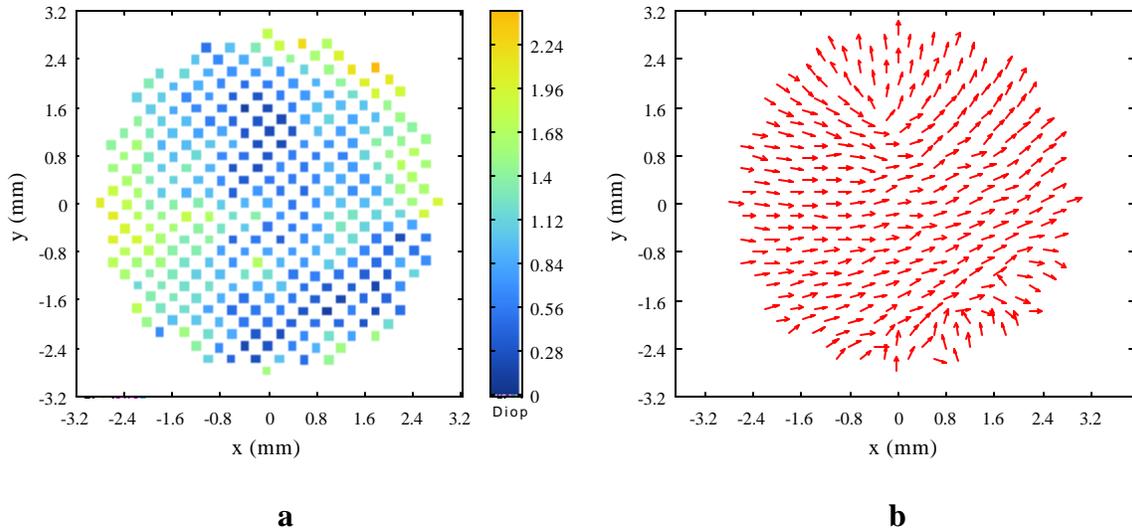


Figura 5.13. (a) Astigmatismo y (b) líneas de curvatura mínima para la superficie de prueba III.

El astigmatismo medido en el vértice es 0.91 D y los correspondientes radios de curvatura máximo y mínimo son $R_{\max} = 7.65$ mm y $R_{\min} = 7.49$ mm.

Los mapas de curvatura máxima y mínima de esta córnea se muestran en la figura 5.14.

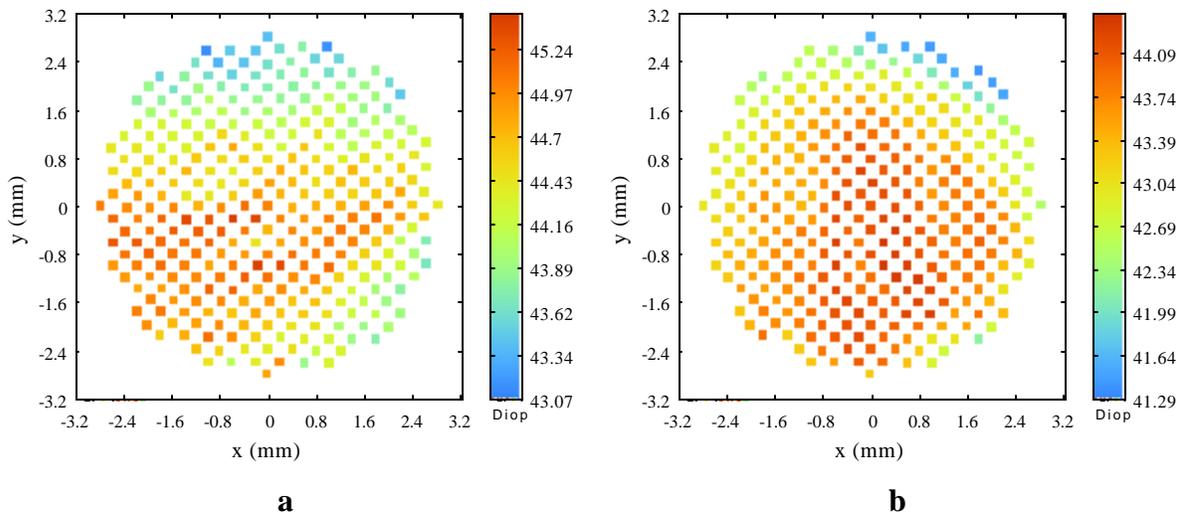


Figura 5.14. Mapas de curvatura máxima (a) y mínima (b) de la superficie de prueba III.

El mapa de curvatura meridional obtenido de las curvaturas máxima y mínima, y de las líneas de curvatura, se da en la figura 5.15(a).

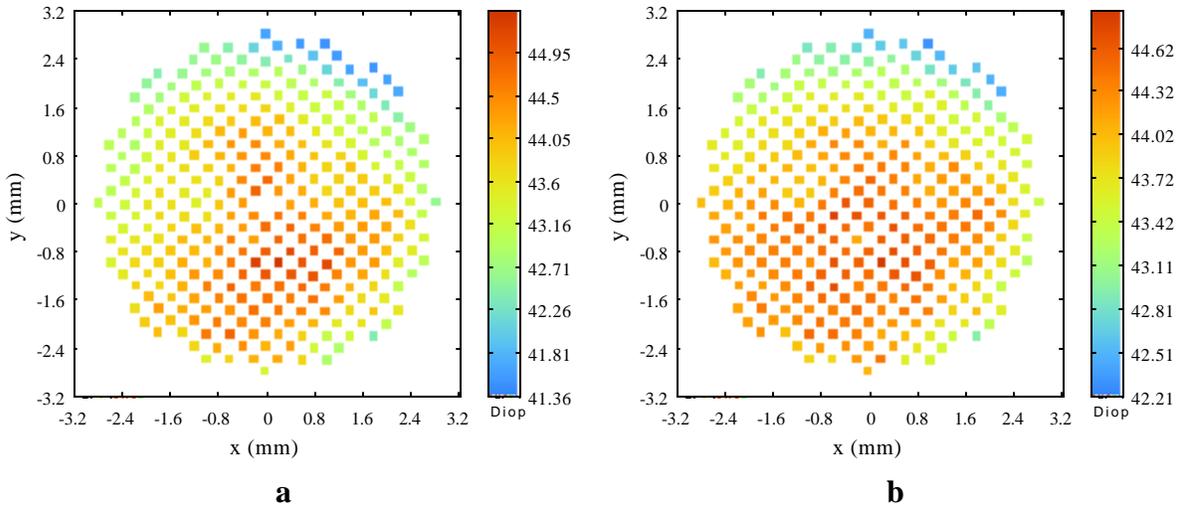


Figura 5.15. Mapas de curvatura meridional (a) y Gaussiana (b) de la superficie de prueba III.

En este ejemplo se ha incluido el mapa de curvatura Gaussiana, figura 5.15(b); es decir, el promedio geométrico de las curvaturas principales.

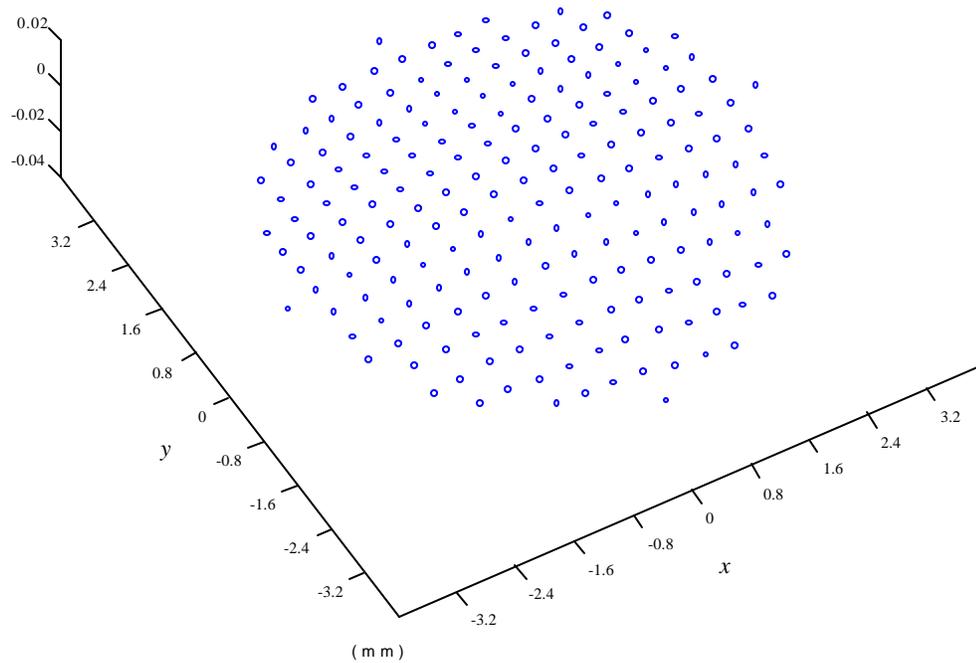


Figura 5.16. Diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia y la superficie de prueba III.

Finalmente, la figura 5.16 muestra el mapa de la diferencia de las sagitas de la superficie de referencia y de la córnea. El cambio rápido de curvatura en la parte inferior derecha de la superficie es notable en esta figura, lo que se puede corroborar con los mapas de curvatura meridional y de astigmatismo. También se puede observar una ligera depresión en la parte superior izquierda, donde está localizado el punto umbílico.

5.3.4. Superficie de prueba IV (córnea ojo derecho de una persona sometida a cirugía correctiva láser)

Una de las tareas que se deben realizar después de una cirugía correctiva con láser, es determinar la nueva forma de la córnea. Este último ejemplo, muestra los resultados obtenidos con el TCH al evaluar la córnea de una persona que fue sometida a una cirugía para mejorar la visión (corrección de la miopía).

A diferencia de los tres ejemplos anteriores, la imagen de la cuadrícula distorsionada generada por la córnea de este ejemplo, está descentrada en dirección horizontal en una cantidad 0.22 mm a la derecha. Como se mencionó en el capítulo 4, el topógrafo junto con el sistema formador de imagen, se fijaron a una mesa. Por su parte, el paciente debía mover su cabeza hasta que la persona encargada de grabar la imagen determinará la posición adecuada. Esto por supuesto es poco práctico y requiere de la paciencia del paciente para obtener imágenes centradas y en foco. A pesar de lo anterior, los resultados que se obtienen son satisfactorios, tal y como se mostrará en lo que sigue.

La figura 5.17 muestra la posición de los centros de intensidad de la cuadrícula distorsionada generada por la superficie de prueba IV (círculos en azul). Igual que en los ejemplos anteriores, los círculos en rojo corresponden a la imagen generada por la superficie de referencia.

La figura 5.18(a) es el mapa de astigmatismo y la figura 5.18(b) las tangentes de las líneas de curvatura mínima. Del mapa de astigmatismo se observa que esta córnea presenta una gran variación en los radios de curvatura. La figura 5.18(b) nos da la idea de forma global de la córnea. La distribución concéntrica de las tangentes en los diámetros más externos indica que la córnea en esta región se asemeja a un elipsoide o un paraboloides de revolución.

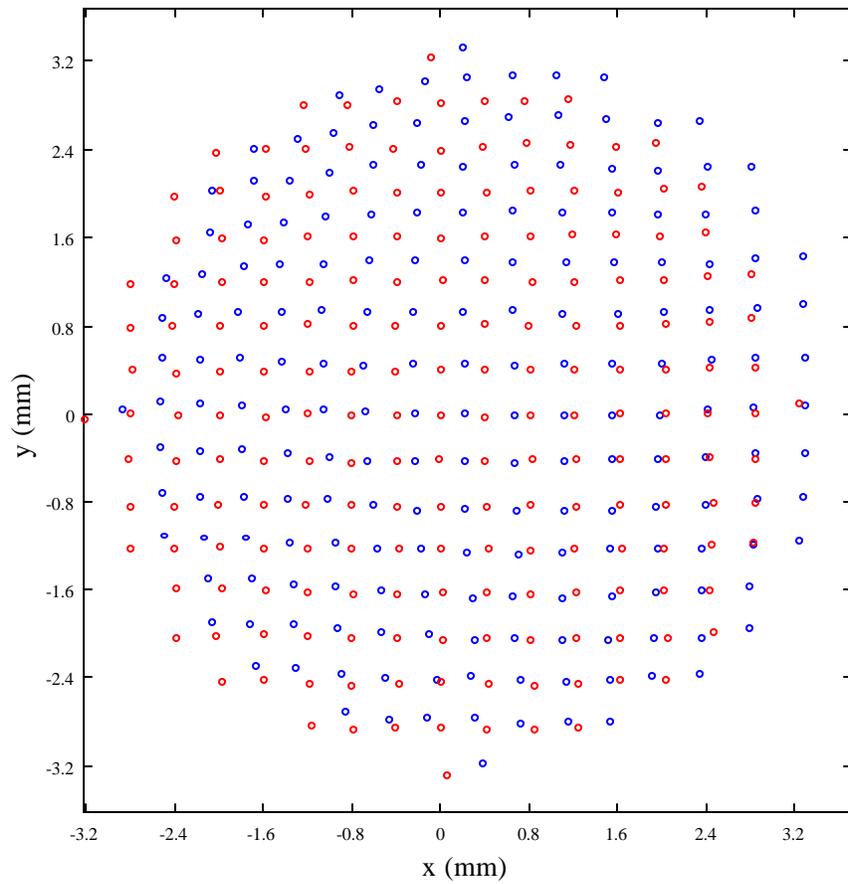


Figura 5.17. Centros de intensidad de los puntos de las cuadrículas generadas por la esfera de referencia (círculos en rojo) y la superficie de prueba IV (círculos en azul).

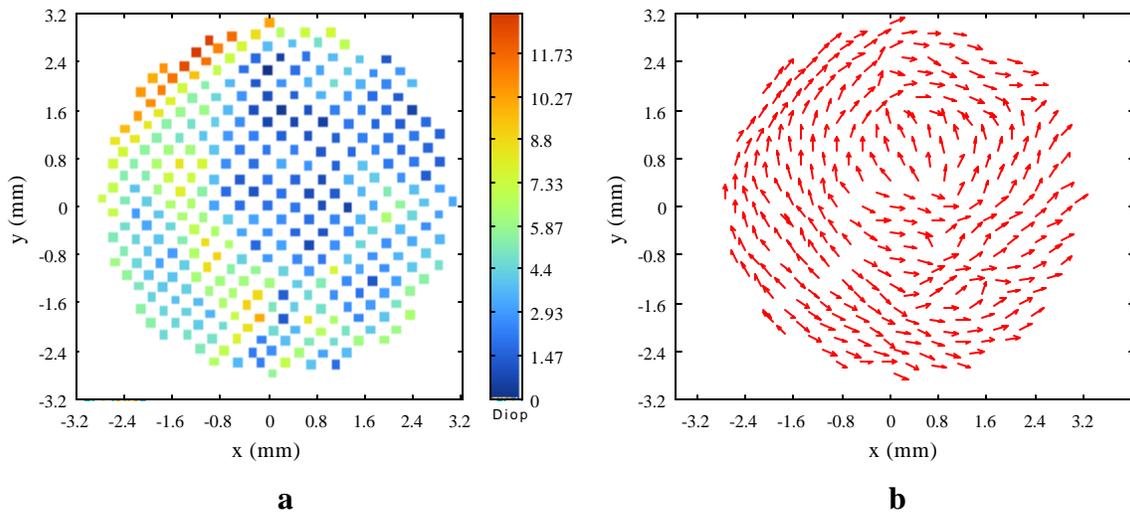


Figura 5.18. (a) Astigmatismo y (b) líneas de curvatura mínima para la superficie de prueba IV.

La figura 5.19(a) muestra el mapa de curvatura meridional para la córnea de este ejemplo. La zona azul indica un aplanamiento de la córnea con respecto a los diámetros externos. En la figura 5.18(b) esto se observa como un cambio en la dirección de las tangentes. Este aplanamiento fue realizado en la cirugía para corregir la miopía del paciente.

La figura 5.19(b) es el mapa de curvatura Gaussiana correspondiente. En la tabla 5.2 se dan los valores de la curvatura promedio y el radio de curvatura promedio en los puntos señalados en la figura; esto nos da una idea de la gran variación en la curvatura que tiene esta córnea.

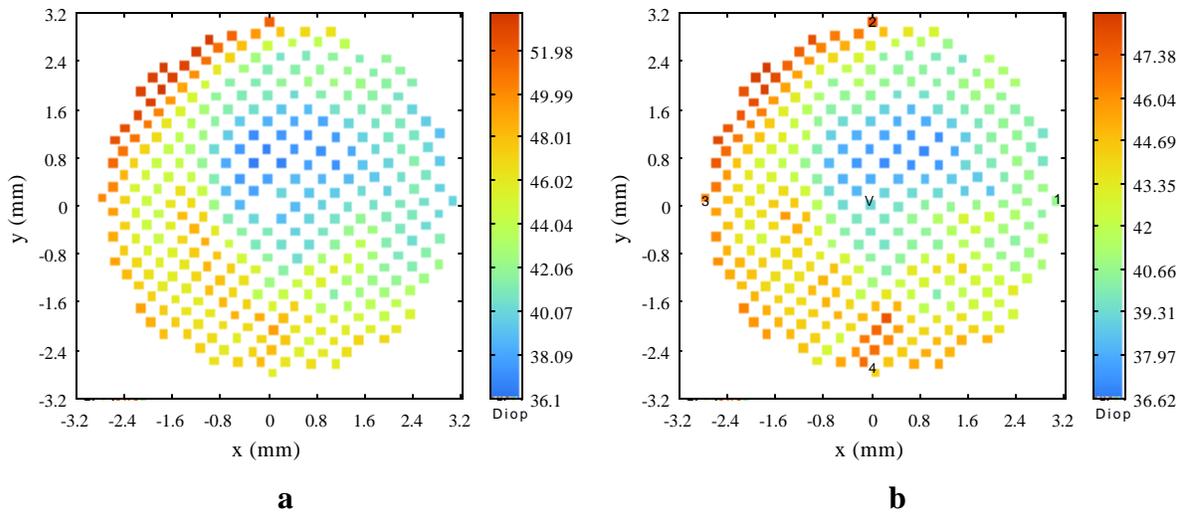


Figura 5.19. Mapas de curvatura meridional (a) y Gaussiana de la superficie de prueba IV.

Tabla 5.2. Valores de la curvatura promedio y del radio de curvatura promedio de los puntos señalados en la figura 5.19(b).

Punto	Curvatura promedio (D)	Radio promedio (mm)
V	38.97	8.66
1	40.42	8.35
2	47.83	7.06
3	46.52	7.25
4	44.05	7.66

En la figura 5.20 podemos ver la diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia y la superficie de prueba. Esta figura corrobora el aplanamiento dado a la córnea.

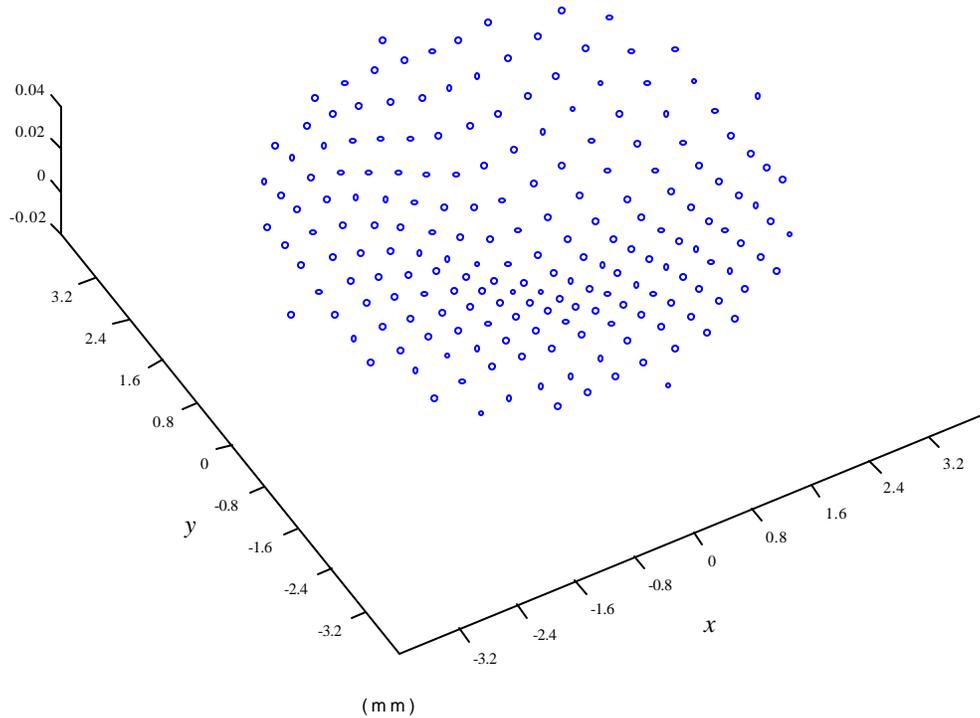


Figura 5.20. Diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia y la superficie de prueba IV.

Para ver el efecto que introduce el descentramiento en el resultado final, se grabó la imagen de la cuadrícula generada por esfera de referencia para un descentramiento igual al de la córnea. Ya que un corrimiento lateral genera una distorsión adicional a la generada por la propia superficie de prueba, los mapas de curvatura estarán afectados por este error. Por ejemplo, el mapa de astigmatismo que resulta de comparar la superficie de referencia centrada con la superficie de referencia descentrada (figura 5.21) nos dice que por lo menos se ha introducido un error del 10 % en los valores del mapa del astigmatismo de la figura 5.18(a). Un error similar se aprecia en la figura 5.22 correspondiente a la diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia centrada y la superficie de referencia descentrada. La variación de la diferencia de las sagitas en esta figura es un orden de magnitud más bajo que el de la figura 5.20. Por lo tanto, los resultados obtenidos en este ejemplo describen de

manera muy aproximada la forma de la córnea. Por supuesto, con una imagen centrada de la córnea los resultados serán más exactos.

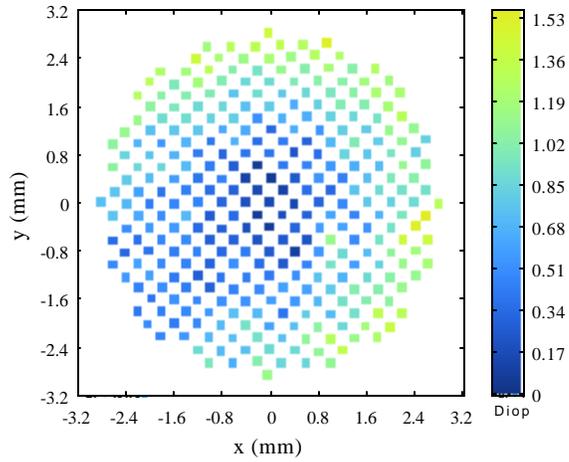


Figura 5.21. Astigmatismo generado por un descentramiento de la esfera de referencia en dirección horizontal igual a 0.22 mm.

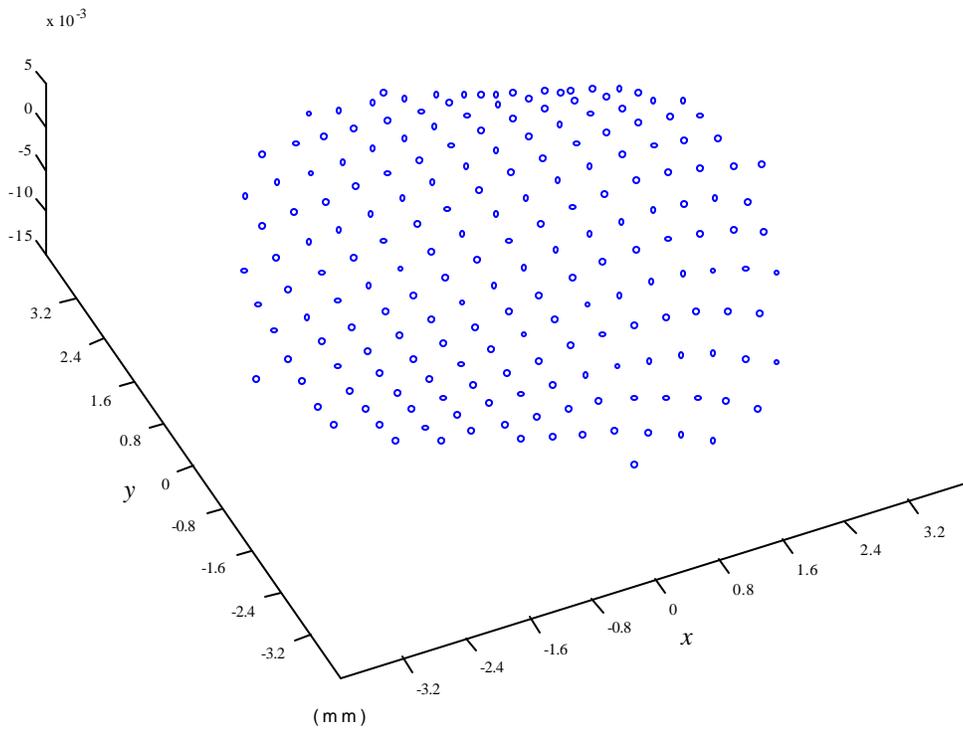


Figura 5.22. Diferencia entre las sagitas de la superficie de referencia centrada y la superficie de referencia descentrada en una cantidad igual al descentramiento de la córnea de la figura 5.20.

5.4. Rango de validez en la medida del radio de curvatura

El análisis de las curvaturas de las superficies de prueba evaluadas con el TCH se ha realizado con base en la prueba de Hartmann con 4 agujeros propuesta por Malacara [1992b]. En esta prueba se supone que los corrimientos laterales Δx y Δy son pequeños con respecto a la constante ρ de la cuadrícula. La magnitud de los corrimientos laterales Δx y Δy depende del radio de curvatura de la superficie de prueba. Ahora veremos que tan pequeñas deben ser las variaciones de los radios de curvatura de la superficie de prueba con respecto a la superficie de referencia para tener resultados confiables.

La figura 5.23 muestra dos imágenes obtenidas con el TCH al evaluar dos superficies esféricas reflectoras convexas. La primera superficie esférica tiene un radio igual a 6.40 mm (figura 5.23(a)) y la segunda superficie esférica tiene un radio igual a 9.30 mm (figura 5.23(b)).

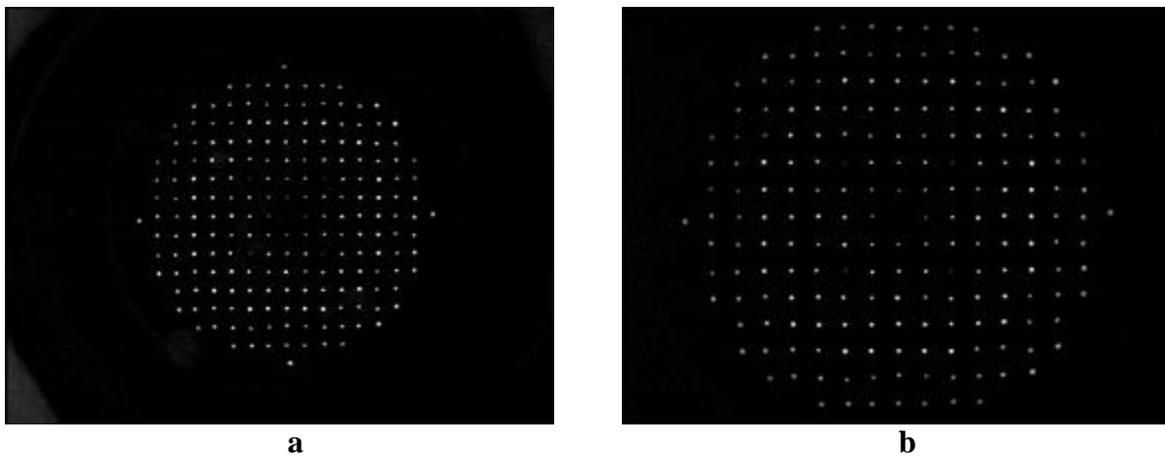


Figura 5.23. (a) Imagen de la cuadrícula de puntos generada por una superficie esférica convexa de radio 6.40 mm; (b) imagen de la cuadrícula de puntos generada por una superficie esférica convexa de radio 9.30 mm.

Los radios de curvatura que se obtienen en los vértices de cada una de las superficies usando el procedimiento descrito en §2.1 son los siguientes:

- Figura 5.23(a): $R_{\max} = 6.63$ mm, $R_{\min} = 6.58$ mm, Astigmatismo = 0.43 D.
- Figura 5.23(b): $R_{\max} = 9.67$ mm, $R_{\min} = 9.58$ mm, Astigmatismo = 0.37 D.

En ambos casos el valor del radio promedio en el vértice es mayor que el radio nominal, y el valor del astigmatismo también se ha incrementado con respecto al obtenido en la figura

5.4(a). El error del astigmatismo se puede eliminar o minimizar si la perforación de los agujeros en la pantalla ΣM se hace con una maquina de control numérico. En cambio, el incremento en el valor del radio medido es algo inherente al método que estamos usando.

Una manera de estimar el error que se comete en la evaluación del radio de curvatura de la superficie de prueba consiste en comparar el radio obtenido en la aproximación paraxial al evaluar la imagen de los 4 puntos más cercanos al vértice (figura 5.2(a)) con el radio obtenido con la prueba de Hartmann con 4 agujeros. Esta aproximación es buena por que la distancia objeto de cualquiera de los cuatro puntos **P** correspondientes a los cuatro puntos cercanos al vértice es mucho mayor que la distancia imagen. La figura 5.24 muestra esta comparación en función del radio de la esfera de prueba en el rango 7.8 ± 1.6 mm.

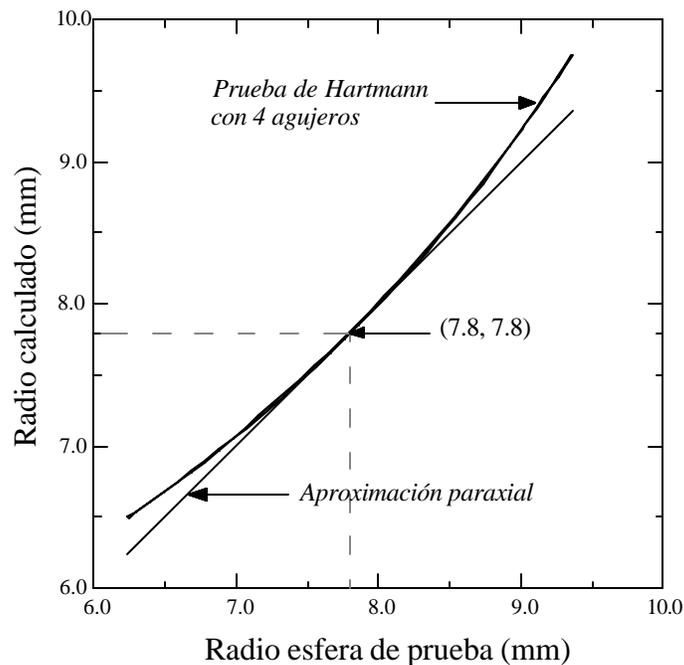


Figura 5.24. Error en la evaluación del radio de curvatura cuando se usa la prueba de Hartmann con 4 agujeros.

La figura 5.24 describe acertadamente el error en la evaluación del radio de curvatura cuando se usa la prueba de Hartmann con 4 agujeros. Por ejemplo, el radio calculado con la prueba de Hartmann con 4 agujeros para la superficie esférica de radio 6.40 mm es 6.61 mm, esto es un error del 3.4%. Experimentalmente, el radio promedio obtenido con la prueba de Hartmann en el vértice es 6.60 mm. Un valor similar se obtiene del mapa de

elevación, por ejemplo, para el ajuste de los meridianos en las direcciones x y y se tiene $R_x = R_y = 6.58$ mm con un error estándar igual a 0.005 mm. En forma análoga, el radio calculado con la prueba de Hartmann con 4 agujeros para la superficie esférica de radio 9.30 mm es 9.65 mm, esto da un error del 3.8%. Experimentalmente, el radio promedio obtenido con la prueba de Hartmann con 4 agujeros en el vértice es 9.63 mm.

El error en la medida del radio de curvatura dado en la figura 5.24 no varía en forma lineal con respecto al radio de la esfera de prueba, sino más bien tiene una variación de tipo parabólico. Por esta razón, el error en la medida de un radio de curvatura de 7.08 mm como en el ejemplo de la superficie de prueba II es sólo del 0.8%.

En conclusión, cuando el radio de curvatura de la superficie de prueba difiere hasta en un 20% con respecto al radio de curvatura de la superficie de referencia ($R = 7.78$ mm), el error en la determinación del radio de curvatura es inferior al 4%. Sin embargo, la figura 5.24 permite realizar una calibración del TCH, con lo cual se pueden obtener resultados muy exactos.

Lo más relevante del capítulo

En este capítulo se ha mostrado el funcionamiento del TCH utilizando 4 superficies de prueba y una de referencia. Los resultados demuestran que el TCH puede medir con gran exactitud los radios de curvatura de superficies reflectoras convexas (córneas).

Tres tipos de error en el desempeño del TCH fueron discutidos. Estos son:

1. Errores aleatorios en la perforación manual de los agujeros de la pantalla elipsoidal. Estos errores pueden ser corregidos o minimizados si se dispone de una máquina de control numérico. De esta manera se aumenta la precisión del TCH.
2. Error de apreciación debido a un desplazamiento axial o lateral de la superficie de prueba con respecto a la posición de mejor enfoque y de alineación. Estos desplazamientos introducen una distorsión adicional a la generada por la superficie de prueba; en algunos casos la distorsión generada por el desplazamiento es menor que la generada por la propia superficie de prueba y puede despreciarse. Este error también se puede minimizar introduciendo un sistema de centrado y alineación en el TCH.

3. Error debido a la validez del rango de aplicación del modelo matemático que se usa en la evaluación de los radios de curvatura; la prueba de Hartmann con 4 agujeros. Este error se puede clasificar como un error de calibración, por lo tanto puede ser corregido en la presentación final de los resultados.

El TCH también permite describir la superficie de la córnea con mapas de elevación o sagita. Esto se hace utilizando un método independiente al que se utiliza para determinar los radios de curvatura. Lo anterior es una ventaja sobre los métodos descritos en el capítulo 1, en particular sobre el sistema de anillos de Placido, ya que estos métodos miden la pendiente o la elevación de la superficie y después de un ajuste matemático de estos parámetros se calcula la curvatura. Este procedimiento de cálculo de la curvatura puede introducir errores adicionales a los inherentes al instrumento y/o al método.

Otra ventaja del TCH con respecto al topógrafo basado en los anillos de Placido (OPTIKON 2000) está en la geometría elipsoidal de la pantalla que contiene a los puntos luminosos (figura 3.9). En el ejemplo de la superficie de prueba III, no se pudo incluir un mapa de curvatura meridional obtenido con el topógrafo OPTIKON 2000 para realizar una comparación de los resultados. Lo anterior se debió a que no fue posible hacer la medición con el OPTIKON 2000, pues para pacientes, como el caso del autor de esta tesis, con una órbita ocular muy pronunciada, el diseño de la superficie cónica que contiene a los anillos del topógrafo OPTIKON 2000 (figura 1.2) no permite obtener imágenes de los anillos en foco.

Conclusión

Los resultados presentados, analizados y comentados en el capítulo 5, permiten concluir que el prototipo del topógrafo corneal basado en la prueba modificada de Hartmann (TCH), constituye una herramienta novedosa y significativamente útil para la evaluación de forma de la córnea del ojo humano. El amplio rango de valores del radio de curvatura de la córnea en adultos puede ser evaluado con un alto grado de exactitud con este instrumento óptico.

Cabe destacar los siguientes aportes logrados durante el desarrollo de la tesis:

- *Validez del concepto de curvatura axial.* Este concepto ampliamente usado en optometría y oftalmología, conduce, en general, a interpretaciones erradas sobre la forma de la córnea. Por lo tanto, este concepto debe ser omitido y reemplazado por la curvatura meridional u otro tipo de representación de la curvatura, como por ejemplo, el cilindro o la curvatura promedio o Gaussiana (capítulo 2). El cilindro o astigmatismo local, resulta particularmente útil para tener una imagen rápida de las asimetrías de la superficie. La curvatura promedio permite definir la esfera de mejor ajuste y con respecto a ésta definir las variaciones de la superficie de la córnea.
- *Pantalla elipsoidal aplanadora de campo.* Empleando conceptos básicos de óptica geométrica se diseñó una superficie objeto con forma de ovoide alargado de revolución. La imagen de este ovoide generada por una superficie esférica convexa de referencia es un plano donde la imagen de un objeto puntual de la superficie objeto es un círculo de menor confusión. También se demostró que la forma del ovoide se puede ajustar con alta precisión por medio de un elipsoide de revolución.
- *Propuesta de una prueba modificada de Hartmann para medir superficies reflectoras convexas.* La pantalla elipsoidal aplanadora de campo es ideal para implementar una prueba de Hartmann para superficies reflectoras convexas. Se calculó la geometría y la distribución de los agujeros en la pantalla de tal manera que en el plano imagen virtual se obtenga una distribución cuadrículada de círculos del mismo diámetro. Los agujeros en la pantalla elipsoidal son pequeñas elipses

cuya excentricidad es función de la distancia del círculo imagen correspondiente con respecto al eje óptico.

- *Construcción de un instrumento óptico basado en la prueba modificada de Hartmann para medir la forma de la córnea (TCH).* Este prototipo, al igual que el topógrafo basado en los anillos de Placido, es un instrumento óptico simple que permite medir con un alto grado de precisión y exactitud la forma de la córnea. Aunque en el prototipo que se construyó, la precisión en realidad no es muy alta, esto se puede corregir significativamente si los agujeros se perforan con una maquina de control numérico. Por otra parte, la facilidad con que se puede enfocar la imagen de la cuadrícula, permite obtener medidas muy exactas de la forma de la córnea. Además de la simplicidad de este instrumento, dos ventajas notables del TCH son las siguientes:
 - a. Permite medir las curvaturas principales (máxima y mínima) de la superficie de la córnea directamente. Las curvaturas principales constituyen una base matemática, por lo que es posible determinar la curvatura en cualquier otra dirección, por ejemplo, es fácil deducir la curvatura meridional. Ya que una superficie se describe mediante dos parámetros, las curvaturas principales constituyen una representación más completa de la superficie que aquella que se hace con un solo parámetro, por ejemplo, la curvatura meridional en el topógrafo basado en los anillos de Placido.
 - b. La forma de la córnea se puede representar con mapas de curvatura o de elevación. Estos mapas se obtienen de manera independiente, lo que disminuye los posibles errores causados al pasar matemáticamente de una representación a otra.

Por otra parte, el desarrollo de la tesis condujo a la formulación de una serie de problemas que debieran ser abordados por sucesivos trabajos de investigación. Tales problemas son:

- *Sensibilidad del TCH.* Una vez optimizado el proceso de perforación de los agujeros en la pantalla elipsoidal, es decir, precisión en la localización y en la geometría de

cada agujero, el paso siguiente es determinar la menor variación en el radio de curvatura que puede ser medido con el TCH. Esto, por supuesto, está estrechamente ligado al formato del sensor CCD y al muestreo tipo subpixel que se hace al evaluar los centros de intensidad de los puntos imagen.

- *Incluir un sistema de centrado de la córnea.* Los sistemas más comunes en uso consisten en una pequeña fuente puntual que el paciente debe observar durante el examen.
- *Inmovilizar la cabeza del paciente y darle movilidad al THC.* De esta manera, el médico tiene la facilidad de enfocar y centrar la imagen generada por la córnea.
- *Desarrollo de software para automatización del procesamiento de las imágenes.*

Con las ventajas ya expuestas y las anteriores recomendaciones en mente, es posible afirmar que el TCH se presenta como un instrumento óptico competitivo con respecto a los actuales instrumentos en uso.

Apéndice 1

Referencias y patentes adicionales sobre algunos métodos para medir la topografía de la córnea.

A.1.1. Referencias

Belin, M.W., Cambier, J.L., Nabors, J.R., and Ratliff, C.D., "PAR Corneal Topography System (PAR CTS): The clinical application of close-range photogrammetry," *Optom. Vis. Sci.*, **72**, 828-837, (1995).

Cambier, J.L., "Elevation accuracy of corneal topography systems," PAR Vision systems corporation technical report, PVSC-96-02, (1996).

Dave, T., Ruston, D., and Fowler, C., "Evaluation of the EyeSys model II computerized videokeratoscope. Part I: clinical assessment," *Optom. Vis. Sci.*, **75**, 647-655, (1998).

Díaz-Uribe R. and Granados-Agustin F., "Corneal shape evaluation by using laser keratopography," *Optom. Vis. Sci.*, **76**, 40-49, (1999).

Gross, G.W., Baker, P., and Bores, L., "Corneal topography via two-wavelength holography," *SPIE, Practical Holography IV*, **1212**, 202-206, (1990).

Friedlander, M.H., and Granet, N.S., "Principles of corneal topography." In: Erlander, R., Rich, L.F., and Robin, J.B. (Ed.) *Principles and practice of refractive surgery*. W.B. Saunders company, Philadelphia, Pennsylvania, USA, (1997).

Jeandervin, M., and Barr, J., "Comparison of repeat videokeratography: repeatability and accuracy," *Optom. Vis. Sci.*, **75**, 663-669, (1998).

Klein, S.A., "Corneal topography reconstruction algorithm that avoids the skew ray ambiguity and the skew ray error," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 945-962, (1997).

Pardhan, S., and Douthwaite, W.A., "Comparison of videokeratoscope and autokeratometer measurements on ellipsoid surface and human corneas," *Journal of refractive surgery*, **14**, 414-419, (1998).

Priest, D., and Munger, R., "Comparative study of the elevation topography of complex shapes," *J. Cataract Refract Surg.*, **24**, 741-750, (1998).

Roberts, C., "Corneal topography: A review of terms and concepts," *J. Cataract Refract Surg.*, **22**, 624-629, (1996).

Roberts, C., "Principles of corneal topography." In: Erlander, R., Rich, L.F., and Robin, J.B. (Ed.) *Principles and practice of refractive surgery*. W.B. Saunders company, Philadelphia, Pennsylvania, USA, (1997).

Salmon, T.O., and Horner, D.G., "Comparison of elevation, curvature, and power descriptors for corneal topographic mapping," *Optom. Vis. Sci.*, **72**, 800-808, (1995).

van Saarloos, P.P., and Constable, I.J., "Improved method for calculation of corneal topography for any photokeratoscope geometry," *Optom. Vis. Sci.*, **68**, 960-965, (1991).

Schultze, R.L., "Accuracy of corneal elevation with four corneal topography systems," *Journal of refractive surgery*, **14**, 100-104, (1998).

Schwiegerling, J., and Greivenkamp, J.E., "Using corneal height maps and polynomial decomposition to determine corneal aberrations," *Optom. Vis. Sci.*, **74**,:906-916, (1997).

Schwiegerling, J., "Cone dimensions in keratoconus using Zernike polynomials," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 963-969, (1997).

Thompson, F.B., and Mc Donnel, P.J., *Color atlas of excimer laser surgery: the cornea*. Igaku-Shoin Medical Publisher, Inc., New York, USA, (1993).

Wilson, S.E., Klyce, S.D., and Hussein, Z.M., "Standardized color-coded maps for corneal topography," *Ophthalmology*, **100**, 1723-1727, (1993).

Windecker, R., Tiziani, H.J., Thiel, H., and Jean, B., "Corneal topometry by fringe projection- limits and possibilities," *SPIE*, **2628**, 218-230, (1992).

A.1.2. Patentes (en Estados Unidos)

Patente	Fecha	Título
US05953100	09/14/1999	Multi-camera corneal analysis system
US05843070	12/01/1998	Simulating corneal laser surgery
US05592246	01/07/1997	Device and method for mapping objects
US06095651	08/01/2000	Method and apparatus for improving vision and the resolution of retinal images
US05847804	12/08/1998	Multi-camera corneal analysis system
US05841511	11/24/1998	Method of corneal analysis using a checkered placido apparatus
US05475452	12/12/1995	Device and method for mapping objects

US05159361	10/27/1992	Method and apparatus for obtaining the topography of an object
US04995716	02/26/1991	Method and apparatus for obtaining the topography of an object
US05722427	03/03/1998	Method of refractive surgery
US05418582	05/23/1995	Photokeratoscope apparatus and method
US06152565	11/28/2000	Handheld corneal topography system
US06145988	11/14/2000	Method for contact lens design and manufacturing
US06132424	10/17/2000	Smooth and uniform laser ablation apparatus and method
US06007202	12/28/1999	Eye illumination system and method
US05997529	12/07/1999	Compound astigmatic myopia or hyperopia orrection by laser ablation
US05630810	05/20/1997	Method of ophthalmological surgery
US05507740	04/16/1996	Corneal topography enhancement device
US05473392	12/05/1995	Method and system for topographic measurement
US05062702	11/05/1991	Device for mapping corneal topography
US06120150	09/19/2000	Device and method for mapping the topography of an eye using elevation measurements in combination with slope measurements
US06079831	06/27/2000	Device and method for mapping the topography of an eye using elevation measurements in combination with slope measurements
US05864383	01/26/1999	Single-curvature placido plate
US05741245	04/21/1998	Corneal sculpting using laser energy
US05526072	06/11/1996	Apparatus and technique for automatic centering and focusing a corneal topographer
US05521657	05/28/1996	Method and system for topographic measurement by measuring the distance between a rigid reference member and a surface of an eye
US05293871	03/15/1994	System for ultrasonically determining corneal ayer thicknesses and shape

US05214456	05/25/1993	Mapping of corneal topography with display of pupil perimeter
US04863260	09/05/1989	System for topographical modeling of anatomical surfaces
US06129722	10/10/2000	Interactive corrective eye surgery system with topography and laser system interface
US06079417	06/27/2000	Method of altering the shape of the cornea of the eye
US06019754	02/01/2000	Method and apparatus for improving lasik flap adherence
US06006756	12/28/1999	Non-contact magnetoresonant implant system and techniques for periodic corneal re-shaping
US06004314	12/21/1999	Optical coherence tomography assisted surgical apparatus
US05909270	06/01/1999	Conoscopic system for real-time corneal topography
US05900924	05/04/1999	Method for determining absolute spatial coordinates of at least one point on a reflecting surface
US05838811	11/17/1998	System for measuring curved surfaces
US05822035	10/13/1998	Ellipsometer
US05779696	07/14/1998	Method and apparatus for performing corneal reshaping to correct ocular refractive errors
US05713893	02/03/1998	Test substrate for laser evaluation
US05695509	12/09/1997	Aspherical optical molds for continuous reshaping the cornea based on topographical analysis
US05571107	11/05/1996	Laser surgical apparatus for sculpting a cornea using a diffractive optical element and method of using the same
US05570142	10/29/1996	Asymmetric aspheric contact lens
US05539837	07/23/1996	Apparatus and method for measuring curved surfaces
US05517261	05/14/1996	Focusing method for a corneal topographer
US05502518	03/26/1996	Asymmetric aspheric contact lens
US05493109	02/20/1996	Optical coherence tomography assisted ophthalmologic surgical microscope
US05491524	02/13/1996	Optical coherence tomography corneal mapping apparatus
US05406342	04/11/1995	System for determining the topography of a curved surface

US05404884	04/11/1995	Method and apparatus for imaging and analysis of corneal tissue
US05384608	01/24/1995	Method for displaying corneal topography
US05376086	12/27/1994	Laser surgical method of sculpting a patient's cornea and associated intermediate controlling mask
US05317389	05/31/1994	Method and apparatus for white-light dispersed-fringe interferometric measurement of corneal topography
US05307097	04/26/1994	Corneal topography system including single-direction shearing of holograph grating in orthogonal directions
US05116115	05/26/1992	Method and apparatus for measuring corneal topography
US04761071	08/02/1988	Apparatus and method for determining corneal and scleral topography
US04692003	09/08/1987	Real-time analysis keratometer
US04671276	06/09/1987	Apparatus for corneal curvature adjustment
US04600304	07/15/1986	Optical level
US04459027	07/10/1984	Method and equipment for mapping radiation deflection
US04452235	06/05/1984	Method for corneal curvature adjustment

Apéndice 2

Tabla de conversión de la curvatura c en unidades de dioptrías al radio de curvatura r en unidades de milímetro.

$$c = 337.5 / r$$

c (D)	r (mm)	c (D)	r (mm)	c (D)	r (mm)
35,00	9,64	38,00	8,88	41,00	8,23
35,10	9,62	38,10	8,86	41,10	8,21
35,20	9,59	38,20	8,84	41,20	8,19
35,30	9,56	38,30	8,81	41,30	8,17
35,40	9,53	38,40	8,79	41,40	8,15
35,50	9,51	38,50	8,77	41,50	8,13
35,60	9,48	38,60	8,74	41,60	8,11
35,70	9,45	38,70	8,72	41,70	8,09
35,80	9,43	38,80	8,70	41,80	8,07
35,90	9,40	38,90	8,68	41,90	8,05
36,00	9,38	39,00	8,65	42,00	8,04
36,10	9,35	39,10	8,63	42,10	8,02
36,20	9,32	39,20	8,61	42,20	8,00
36,30	9,30	39,30	8,59	42,30	7,98
36,40	9,27	39,40	8,57	42,40	7,96
36,50	9,25	39,50	8,54	42,50	7,94
36,60	9,22	39,60	8,52	42,60	7,92
36,70	9,20	39,70	8,50	42,70	7,90
36,80	9,17	39,80	8,48	42,80	7,89
36,90	9,15	39,90	8,46	42,90	7,87
37,00	9,12	40,00	8,44	43,00	7,85
37,10	9,10	40,10	8,42	43,10	7,83
37,20	9,07	40,20	8,40	43,20	7,81
37,30	9,05	40,30	8,37	43,30	7,79
37,40	9,02	40,40	8,35	43,40	7,78
37,50	9,00	40,50	8,33	43,50	7,76
37,60	8,98	40,60	8,31	43,60	7,74
37,70	8,95	40,70	8,29	43,70	7,72
37,80	8,93	40,80	8,27	43,80	7,71
37,90	8,91	40,90	8,25	43,90	7,69

c (D)	r (mm)	c (D)	r (mm)	c (D)	r (mm)
44,00	7,67	47,00	7,18	50,00	6,75
44,10	7,65	47,10	7,17	50,10	6,74
44,20	7,64	47,20	7,15	50,20	6,72
44,30	7,62	47,30	7,14	50,30	6,71
44,40	7,60	47,40	7,12	50,40	6,70
44,50	7,58	47,50	7,11	50,50	6,68
44,60	7,57	47,60	7,09	50,60	6,67
44,70	7,55	47,70	7,08	50,70	6,66
44,80	7,53	47,80	7,06	50,80	6,64
44,90	7,52	47,90	7,05	50,90	6,63
45,00	7,50	48,00	7,03	51,00	6,62
45,10	7,48	48,10	7,02	51,10	6,60
45,20	7,47	48,20	7,00	51,20	6,59
45,30	7,45	48,30	6,99	51,30	6,58
45,40	7,43	48,40	6,97	51,40	6,57
45,50	7,42	48,50	6,96	51,50	6,55
45,60	7,40	48,60	6,94	51,60	6,54
45,70	7,39	48,70	6,93	51,70	6,53
45,80	7,37	48,80	6,92	51,80	6,52
45,90	7,35	48,90	6,90	51,90	6,50
46,00	7,34	49,00	6,89	52,00	6,49
46,10	7,32	49,10	6,87	52,10	6,48
46,20	7,31	49,20	6,86	52,20	6,47
46,30	7,29	49,30	6,85	52,30	6,45
46,40	7,27	49,40	6,83	52,40	6,44
46,50	7,26	49,50	6,82	52,50	6,43
46,60	7,24	49,60	6,80	52,60	6,42
46,70	7,23	49,70	6,79	52,70	6,40
46,80	7,21	49,80	6,78	52,80	6,39
46,90	7,20	49,90	6,76	52,90	6,38

Apéndice 3

Desarrollo de las ecuaciones (3.10), (3.12) y (3.15)

De la figura 3.4 las coordenadas del punto $\mathbf{P}(z_P, y_P)$ están dadas por:

$$\mathbf{r} = \{z - L \cos(2\phi - \theta), y - L \sin(2\phi - \theta)\}, \quad (\text{A.3.1})$$

donde L puede ser la distancia objeto L_S, L_T ó L_M , y en forma similar el vector de posición \mathbf{r} puede ser $\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_T$ ó \mathbf{r}_M .

Para evaluar la distancia objeto L_S , de las Eqs. (3.7a) y (3.8) con $L' = L'_S$ se tiene que

$$\frac{1}{L_S} = \frac{2 \cos \phi}{R} - \frac{1}{L'_S} \quad \text{y} \quad L'_S = \frac{z - z_I}{\cos \theta},$$

de donde se obtiene la Eq. (3.9)

$$L_S = \frac{R(z - z_I)}{2(z - z_I) \cos \phi - R \cos \theta}.$$

Al reemplazar este resultado en la Eq. (A.3.1) se llega a la Eq. (3.10).

Para evaluar la distancia objeto L_T , de las Eqs. (3.7b) y (3.8) con $L' = L'_T$ se tiene que

$$\frac{1}{L_T} = \frac{2}{R \cos \phi} - \frac{1}{L'_T} \quad \text{y} \quad L'_T = \frac{z - z_I}{\cos \theta},$$

de donde se obtiene la Eq. (3.11)

$$L_T = \frac{R(z - z_I) \cos \phi}{2(z - z_I) - R \cos \theta \cos \phi}.$$

Al reemplazar este resultado en la Eq. (A.3.1) se llega a la Eq. (3.12).

Para evaluar la distancia objeto L_M , en las Eqs. (3.7a) y (3.7b) las distancias objeto L_S y L_T serán iguales a L_M , mientras que las distancias imagen satisfacen la relación (Eq. (3.5c)) $L'_M = (L'_S + L'_T)/2$. Por otra parte, de la Eq. (3.8) con $L' = L'_M$ se tiene que $L'_M = (z - z_I)/\cos \theta$. Entonces, a partir de

$$2L'_M = L'_S + L'_T, \quad (\text{A.3.2})$$

donde L'_S de la Eq. (3.7a) con $L_S = L_M$ es

$$L'_S = \frac{R L_M}{2L_M \cos \phi - R} \quad (\text{A.3.3})$$

y L'_T de la Eq. (3.7b) con $L_T = L_M$ es

$$L'_T = \frac{R L_M \cos \phi}{2L_M - R \cos \phi}, \quad (\text{A.3.4})$$

se llega a

$$2L'_M = \frac{2L_M^2 R (\cos^2 \phi + 1) - 2L_M R^2 \cos \phi}{4L_M^2 \cos \phi - 2L_M R (\cos^2 \phi + 1) + R^2 \cos \phi}. \quad (\text{A.3.5})$$

Agrupando los términos comunes de L_M^2 y L_M se obtiene la Eq. (3.14), siendo $L'_M = (z - z_I) / \cos \theta$. Al reemplazar la raíz positiva de este resultado en la Eq. (A.3.1) se llega a la Eq. (3.15).

Referencias

- Barsky, B.A., Klein S.A. and García D.D., "Gaussian power with cylinder vector field representation for corneal topography maps," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 917-925, (1997).
- Barsky, B.A., "Geometry analysis of corneal shape," in: AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society and International Press, **19**, 35-58, (2000).
- Brenner D., "Modeling the cornea with the topographic modeling system videokeratoscope," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 882-893, (1997).
- Buschner R, Henrich D and Bille J. "Topographical and tear film thickness measurements of the cornea of human eye," in: Optics and Biomedical Sciences, Edited by von Bally G. and Greguss P., Springer – Verlag, 213-216, (1982).
- Campbell C., "Reconstruction of the corneal shape with the MasterVue corneal topography system," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 900-905, (1997).
- Conrady A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, Inc., (1985)
- Davson H. *Physiology of the Eye*. 5th ed., Pergamon Press, New York, 1991.
- Díaz R. and Campos M., "Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces", *Appl. Opt.*, **39**, 2670-2677, (2000).
- Gasvik, K.J., *Optical Metrology*, John Wiley & Sons, (1987).
- Ghozeil I. In: Malacara D. *Optical Shop Testing*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc, 367-396, (1992).
- Gullstrand A. In: Helmholtz H. Van, Edited by Southall J.P.C., *Helmholtz's Treatise on Physiological Optics*, Vol. 1, The Optical Society of America, 305-358, (1924).
- Halstead M.A, Barsky B.A., Klein S.A. and Mandell R.B., "A spline surface algorithm for reconstruction of the corneal topography from a video-keratographic reflection pattern," *Optom. Vis. Sci.*, **72**, (1995).
- Hecht E., *Optics*, 3th ed., Addison Wesley Longman Inc, (1998).
- Hierholzer E. and Frobin W., "Automatic measurement of the body surfaces using rasterstereography," in: Optics and Biomedical Sciences, Edited by von Bally G. and Greguss P., Springer – Verlag, 262-265, (1982).
- Humphrey W.E., in: Summary of the prior art of the patent US04420228 : *Method and apparatus for analysis of corneal shape*, (1983).

- Jongsma F.H.M., De Brabander J, Hendrikse F. and Stultiens B.A.T., "Development of a wide field eye topographer: validation on models of the anterior eye surface," *Optom. Vis. Sci.*, **75**, 69-77, (1998).
- Kafri O. and Livnat A., "Reflective surface analysis using moiré deflectometry," *Appl. Opt.*, **20**, 3098-3100, (1981).
- Kafri O. and Glatt I., "High sensitivity reflection transmission moiré deflectometry," *Appl. Opt.*, **27**, 351-355, (1988).
- Kafri O. and Glatt I., *The Physics of Moiré Metrology*, John Wiley & Sons, (1990).
- Kasprzak H., Kowalik W. and Jaronski J., "Interferometric measurements of fine corneal topography," *Proceedings SPIE*, **2329**, 32-39, (1995).
- Kawara T., "Corneal topography using moiré contour fringes," *Appl. Opt.* **18**, 3675-3678, (1979).
- Klein S.A., "Axial curvature and the skew ray error in corneal topography," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 931-944, (1997).
- Knoll A.H., Russel S. and Carrol L.W. "New photokeratoscope utilizing a hemispherical object surface," *J. Opt. Soc.Am.*, **47**, 221-222, (1957).
- Knoll A.H., "Corneal contours in the general population as revealed by the photokeratoscope," *American Journal of Optometry*, **38**, 389-397, (1961).
- Kreyszig E. *Differential Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, (1991).
- Le Grant Y. and El Hage S.G., *Physiological Optics*, Edited by MacAdam D.L, Springer Series on Optical Sciences. Vol. 13, New York, (1980).
- Malacara D. *Optical Shop Testing*. John Wiley & Sons, Inc, (1992a).
- Malacara D. and Malacara Z., "Testing and centering of the lenses by means of a Hartmann test with four holes," *Optical Engineering*, **31**, 1551-1555, (1992b).
- Malacara D. and Malacara Z., *Handbook of lens design*, Marcel Dekker, Inc., (1994).
- Mattioli R. and Tripoli N.K., "Corneal geometry reconstruction with the Keratron videokeratographer," *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 882-893, (1997).
- Mejía Y. and Malacara D., "A review of methods for measuring corneal topography," *Optom. Vis. Sci.*, **78**, 240-253, (2001a).

- Mejía Y. and Malacara D., "An object surface to apply a modified Hartmann test to measure the corneal topography," To be published in *Applied Optics*, (2001b).
- Morales A. and Malacara D., "Geometrical parameters in the Hartmann test of aspherical mirrors," *Appl. Opt.*, **22**, 3957-3959, (1983).
- OPTIKON 2000, Manufacturers of Equipment for Ophthalmology, Rome, Italy.
- ORBSCAN II, Rochester, NY: Bausch & Lomb Surgical – Orbtek, Inc., (1999).
- Patorski K., "The self-imaging phenomenon and its applications," in *Progress in Optics*, Edited by Wolf E., Vol. 27, North-Holland, 3-108, (1989).
- Pedrotti L.S. and Pedrotti F.L., *Optics and Vision*, Prentice Hall, (1998).
- Rottenkolber M. and Podbielska H., "Measuring ophthalmologic surfaces by means of moiré deflectometry," *Optical Engineering*, **35**, 1124-1133, (1996).
- Smith G. and Atchison D.A., *The Eye and Visual Optical Instruments*, Cambridge University Press, (1997).
- Takeda M, Ina H. and Kobayashi S., "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J Opt. Soc. Am.*, **72**, 156-160, (1982).
- Takeda M. and Mutoh K., "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," *Appl. Opt.*, **22**, 3977-3982, (1983).
- Warnicki J.W., Rehkopf P.G., Curtin D.Y., Burns S.A., Arffa R.C. and Stuart J.C., "Corneal topography using computer analyzed rasterstereographic images," *Appl. Opt.*, **27**, 1135-1140, (1988).
- Weatherburn C.E., *Differential Geometry of three Dimensions*, Cambridge at the University Press, (1939).
- Wittenberg S. and Ludlam W. M., "Planar reflected imagery in photokeratoscopy," *J. Opt. Soc. Am.* **60**, 981-985, (1970).