



Estudios de Polarización de la Luz Esparcida
por Superficies Unidimensionales Rugosas
TESIS

presentada por *M.C. Gelacio Atondo Rubio*

Asesores: Dr. Rafael Espinosa Luna

Dr. Alberto Mendoza Suárez

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE :

DOCTOR EN CIENCIAS (ÓPTICAS)

LEÓN GUANAJUATO

MÉXICO

15 de Octubre de 2004

CONTENIDO

LISTA de Figuras	iii
resumen	vii
AGRADECIMIENTOS	ix
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.	1
CAPÍTULO 2. ESPARCIMIENTO POR SUPERFICIES UNIDIMENSIONALES RUGOSAS EN EL PLANO DE INCIDENCIA.	3
2.1. Vectores de Stokes y matrices de Mueller de superficies unidimensionales rugosas.	3
2.2. Esparcimiento por superficies unidimensionales en el plano de incidencia.	9
2.3. Optimización de la medición de la matriz de Mueller.	17
2.3.1. Método formal para encontrar la matriz de Mueller de un sistema en general.	28
2.4. Discusión de resultados.	33
CAPÍTULO 3. ESPARCIMIENTO POR SUPERFICIES UNIDIMENSIONALES FUERA DEL PLANO DE INCIDENCIA.	41
3.1. Vectores de Stokes y matrices de Mueller de superficies unidimensionales rugosas fuera del plano.	41
3.2. Discusión de resultados.	51
CAPÍTULO 4. CÁLCULO NUMÉRICO PARA LA OBTENCIÓN DE MODOS.	60
4.1. Formulación de un método numérico para guías de ondas.	60
4.2. Discusión de resultados.	70
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.	71
BIBLIOGRAFÍA	72

Lista de figuras

FIGURA 2. 1.	Diagrama esquemático que muestra la convención de signos utilizada para la descripción del esparcimiento de luz por superficies rugosas unidimensionales. Las cantidades mostradas tienen asociadas signos positivos.	5
FIGURA 2. 2.	Diagrama esquemático del esparcímetero bidireccional del tipo ARS (Angular Resolved scattering) empleado para hacer las mediciones.	13
FIGURA 2.3.	Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$	14
FIGURA 2.4.	Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$	15
FIGURA 2.5.	Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$	16
FIGURA 2. 6.	Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	17
FIGURA 2. 7.	Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	18
FIGURA 2. 8.	Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	19
FIGURA 2. 9.	Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	34
FIGURA 2. 10.	Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	35

LISTA de figuras

FIGURA 2. 11. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	36
FIGURA 2. 12. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	37
FIGURA 2. 13. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	38
FIGURA 2. 14. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	39
FIGURA 3.1. Diagrama esquemático de la geometría de esparcimiento. En el recuadro se muestran dos vectores unitarios, $\hat{\pi}$ y $\hat{\sigma}$, que son los que definen la polarización con respecto al plano definido por \hat{k}_i y el eje y	42
FIGURA 3.2. Fotografía del esparcímometro tipo ARS (Angle Resolved Scattering) utilizado para hacer las mediciones.	46
FIGURA 3.3. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{00} , m_{01} , m_{02} , m_{03}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	47
FIGURA 3.4. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{10} , m_{11} , m_{12} , m_{13}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	48
FIGURA 3.5. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{20} , m_{21} , m_{22} , m_{23}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	49
FIGURA 3.6. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{30} , m_{31} , m_{32} , m_{33}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	50

LISTA de figuras

FIGURA 3.7.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{00}, m_{01}, m_{02}, m_{03})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	51
FIGURA 3.8.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	52
FIGURA 3.9.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{20}, m_{21}, m_{22}, m_{23})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	53
FIGURA 3.10.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{30}, m_{31}, m_{32}, m_{33})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	54
FIGURA 3.11.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{00}, m_{01}, m_{02}, m_{03})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	55
FIGURA 3.12.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	56
FIGURA 3.13.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{20}, m_{21}, m_{22}, m_{23})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	57
FIGURA 3.14.	Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D $(m_{30}, m_{31}, m_{32}, m_{33})$, a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$	58
FIGURA 4 .1.	Guía de onda cilíndrica hueca, con una forma de sección transversal arbitraria. La medida y forma de la sección transversal se suponen constantes a lo largo del eje del cilindro (dirección z), y la intersección del cilindro con el plano $x - y$ es el contorno cerrado C	61

LISTA de figuras

FIGURA 4.2.	El logaritmo de la matriz $M_{mn}^\gamma D(\gamma)$ vs γ , para contornos poligonales en el caso TE. El intervalo que se consideró para los eigenvalores γ es $[0.10, 2.50]$. Los puntos mínimos relativos de $D(\gamma)$ dan la posición de los eigenvalores. Los contornos son (a) triángulo, (b) cuadrado, (c) pentágono, (d) hexágono y (e) círculo.	65
FIGURA 4.3.	El logaritmo de la matriz $M_{mn}^\gamma D(\gamma)$ vs γ , para contornos poligonales en el caso TM. El intervalo que se consideró para los eigenvalores γ es $[0.10, 2.50]$. Los puntos mínimos relativos de $D(\gamma)$ dan la posición de los eigenvalores. Los contornos son (a) triángulo, (b) cuadrado, (c) pentágono, (d) hexágono y (e) círculo.	66
FIGURA 4. 4.	Eigenvalores TE para una guía de onda hueca conductora de sección transversal poligonal de lados $p = 3, 4, 5, 6$, y ∞ , respectivamente.	67
FIGURA 4. 5.	Eigenvalores TM para una guía de onda hueca conductora de sección transversal poligonal de lados $p = 3, 4, 5, 6$, y ∞ , respectivamente.	67
FIGURA 4. 6.	Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de a) un triángulo, b) cuadrado, c) pentágono, y d) hexágono para el caso TE.	68
FIGURA 4. 7.	Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de a) un triángulo, b) cuadrado, c) pentágono, y d) hexágono para el caso TM.	69
FIGURA 4. 8.	Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de un círculo a) en el caso TM, b) en el caso TE.	69

RESUMEN

En este trabajo de tesis, presentamos una descripción de un método de optimización en el número de mediciones de intensidad diferentes, el cual es comparado con el método anteriormente propuesto, para una superficie 1-D rugosa con estadística gaussiana. También encontramos los elementos completos de la matriz de Mueller en una geometría de incidencia cónica, para la misma superficie a ángulos de incidencia de 0° , 10° y 20° , a un ángulo cónico de 15° . Finalmente, aplicamos una técnica numérica rigurosa para calcular modos en guías de onda con sección transversal arbitraria para ondas TE.

Dedicatoria

A mis padres: Filemón Atondo Suffo y J. Edelmira Rubio López

A mi esposa: Dora Luz Bueno Lara

A mis hijos: Edel Joshua y Jesús Gelacio Atondo Bueno

AGRADECIMIENTOS

Esta es una de las partes que más trabajo me ha costado escribir, sin embargo quiero dejar constancia del apoyo que me brindaron muchas personas de quienes solamente voy a mencionar algunas. Esto no quiere decir que no tenga nada que externarles a las que aquí no aparezcan, sin embargo debe quedar asentado que de una u otra manera les agradezco su colaboración.

Al Dr. Rafael Espinosa Luna, por su amistad, por sus atinadas sugerencias, por haberme brindado la oportunidad de trabajar con él, por sus consejos. Al Dr. Alberto Mendoza Suárez, por permitirme trabajar con él, por sus atinadas sugerencias y comentarios sobre el trabajo de tesis, Al Dr. Juan Francisco Mosiño, por las observaciones hechas para el mejoramiento de este trabajo. A mis padres, esposa e hijos, por ese apoyo que me dieron, sin el cual me hubiera resultado muy difícil concluir con esta etapa de mi vida. A mis hermanos: Elsa, Osvaldo, María de los Angeles, Elda Guadalupe, Zayra de Jesús y Lae Misael Atondo Rubio, por el cariño que me han dado, en fin, a toda mi familia.

También quiero agradecer a las siguientes instituciones:

Centro de Investigaciones en Óptica A. C., donde realicé la mayor parte de mi trabajo doctoral, en especial a la Dirección de Formación Académica que nos facilitó el uso del laboratorio 4, por aproximadamente 2 años.

CONACyT por la beca económica que me proporcionó durante los primeros 42 meses de mi doctorado, con lo cual me hubiera resultado muy complicado concluir esta etapa.

Universidad Autónoma de Sinaloa, mi querida alma mater, por todo su apoyo otorgado.

A Alonso Nuñez y Pedro E. Monjardin por sus comentarios y ratos de relajación.

A mis compañeros de generación, Manuel de la Torre, Tonathiu Saucedo, Sinhue Hinojosa, Ruben Rodríguez y Ryder Jaimes, a todos los cuates que contribuyeron en poca o gran medida a aquellos grandes momentos de esparcimiento y relajamiento.

A toda la raza del CIO por su apoyo incondicional en los momentos difíciles en los que me vi involucrado junto con mi familia.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN.

Los problemas relacionados con el esparcimiento de la radiación electromagnética por la materia, revisten una gran importancia en varias áreas del conocimiento humano. El tratamiento riguroso de este tipo de problemas se da por medio de las ecuaciones de Maxwell aplicadas en las fronteras de las superficies esparcidoras. Existen varios modelos aproximados para describir la interacción de la luz con superficies rugosas.

Las aproximaciones de estos modelos dependen tanto de la escala relativa de longitudes de onda utilizada como del tamaño del esparcidor. El esparcimiento de ondas electromagnéticas por superficies rugosas, ha sido tema de muchos estudios por varios años. El interés sobre las teorías de esparcimiento se ve incrementado a partir del surgimiento de un método para hacer difusores ópticos, con propiedades estadísticas simples [1]. Básicamente, esta técnica consiste en la exposición de una placa de fotorelina a patrones de moteado láser, los cuales tienen propiedades estadísticas adecuadas. Mucho del interés en este campo de estudio, se ha generado por el fenómeno de retroesparcimiento reforzado, el cual se manifiesta con un pico de intensidad bien definido en la dirección de retroreflexión [2, 3], este fenómeno se presenta en una gran variedad de problemas físicos relacionados con la propagación de ondas y esparcimiento de luz en medios aleatorios o deterministas.

El modelado de la interacción entre ondas electromagnéticas y superficies rugosas aleatorias es un problema de gran importancia en muchas aplicaciones. Debido a la dificultad para obtener soluciones exactas del esparcimiento, hacemos aproximaciones a los modelos de los campos esparcidos por superficies rugosas. Para aplicar los modelos de esparcimiento aproximados, requerimos comprender el régimen de precisión del modelo en términos de la longitud de onda, ángulo de incidencia y propiedades estadísticas de la superficie rugosa. A la fecha ya se han realizado un gran número de estudios teóricos y experimentales, y los rangos de validez de muchos de los modelos existentes no han sido determinados completamente, por lo que el esparcimiento de luz por superficies rugosas, continua siendo un área activa para un número apreciable de investigadores.

Las aplicaciones de las matrices de Mueller se dan en varios campos de la física, razón por la cual son variadas y muy amplias. Por mencionar algunas de ellas está la caracterización de superficies por métodos ópticos no destructivos [4], contaminación ambiental por lidar [5], estudio en fibras ópticas [6], dicroísmo de retina y córnea [7, 8], microscopía por contraste de interferencia diferencial [9], tomografía por coherencia óptica [10], esparcimiento en medios turbios [11], determinación de índices de refracción complejos [12], estudios de plasmas magnetizados [13] entre otras muchas más

aplicaciones.

El esparcimiento de luz por superficies unidimensionales rugosas aleatorias ha sido tema de considerable interés en años recientes. Debido a la exigencia computacional involucrada al modelar superficies bidimensionales (2-D), es más fácil trabajar con las llamadas superficies unidimensionales (1-D). Una superficie 2-D es considerada como una superficie cuyas variaciones de altura ocurren en todas las direcciones sobre el plano que la contiene. Por otro lado, una superficie 1-D (Fig. 1) es definida con respecto a un sistema cartesiano ortogonal como una superficie cuyo contorno varía a lo largo del eje x y es constante en la dirección del eje y . Esta particularidad no afecta muchos resultados físicos básicos, mientras que tiene la ventaja de facilitar su tratamiento. Sin embargo, en la mayoría de los estudios de esparcimiento de luz por superficies 1-D, solamente se ha trabajado con luz esparcida en el plano de incidencia, esto es, una configuración en la cual el vector de onda del campo incidente es perpendicular a los surcos o generadores de la superficie. Existen sólo unos muy pocos trabajos que consideran el caso del esparcimiento de luz fuera de dicho plano, esto es, para una geometría de incidencia cónica [14, 15, 16, 17, 18].

En este trabajo de tesis, hacemos un estudio de como optimizar el número de mediciones de intensidad para obtener la matriz de Mueller de una muestra arbitraria en el plano de incidencia, donde encontramos que con sólo 16 distintas mediciones de intensidad encontramos la matriz de Mueller general, mientras que para muestras con un alto grado de simetría como son las superficies unidimensionales, basta con realizar 4 distintas mediciones de intensidad para obtener la matriz de Mueller completa [25], a diferencia de las 6 distintas mediciones de intensidad propuesta por O'Donnell et al. [26]. Para hacer la comparación entre estas dos propuestas, utilizamos una superficie unidimensional rugosa de oro con estadística gaussiana con los siguientes parámetros estadísticos: desviación de altura $\delta = 1.5\mu m$ y longitud de correlación $a = 3.2\mu m$ y una longitud de onda incidente de $632.8 nm$.

También hacemos un estudio para la misma muestra unidimensional, para encontrar la matriz de Mueller fuera del plano de incidencia (incidencia cónica) y probamos fenomenológicamente que con 16 distintas mediciones de intensidad obtenemos los mismos resultados que con las 36 distintas mediciones propuestas por R. Espinosa-Luna 2002 [34].

Finalmente, hacemos un cálculo numérico para encontrar los modos de propagación para una guía de onda perfectamente conductora con la parte interna hueca, para la cual encontramos los modos de propagación para ondas TE [35] y TM incidentes, con una muy buena aproximación con los resultados analíticos donde fue posible comparar. Esta simulación numérica se realizó mediante una técnica numérica rigurosa.

Capítulo 2

ESPARCIMIENTO POR SUPERFICIES UNIDIMENSIONALES RUGOSAS EN EL PLANO DE INCIDENCIA.

En este capítulo, presentamos un método de optimización tanto desde el punto de vista fenomenológico como matemático, para medir todos los elementos de la matriz de Mueller de una superficie unidimensional rugosa, utilizando una configuración plana (en el plano de incidencia). También presentamos resultados experimentales de todos los elementos de la matriz de Mueller para una distribución angular de la luz esparcida por una superficie unidimensional rugosa aleatoriamente cubierta de oro, con una distribución estadística de alturas y con función de correlación gaussiana.

Estudios recientes del esparcimiento de luz por superficies conductoras unidimensionales, con rugosidad aleatoria han sido reportados en el plano de incidencia [19]. Se han publicado trabajos teóricos sobre la forma de la matriz de Mueller asociadas a este tipo de superficies, en una geometría de incidencia plana [18, 20, 21].

En este capítulo se presenta la determinación de todos los elementos de la matriz de Mueller para una geometría de esparcimiento en el plano de incidencia, de acuerdo con la propuesta más ampliamente aceptada [22]. En ese trabajo, se propone la obtención de la matriz de Mueller mediante 6 distintas mediciones; nosotros proponemos que el número de mediciones puede reducirse a solamente 4 distintas mediciones. En la sección 1, hablamos de los vectores de Stokes y las matrices de Mueller para superficies unidimensionales rugosas. En la sección 2, damos la forma de la matriz de Mueller para una superficie rugosa unidimensional y encontramos la matriz de Mueller para una de dichas superficies con la propuesta por Knotts et al. [26]. En la última sección encontraremos que en esta matriz aparecen solamente cuatro elementos distintos y se da el procedimiento necesario para determinarlos experimentalmente y compararlos con la anterior propuesta.

2.1 Vectores de Stokes y matrices de Mueller de superficies unidimensionales rugosas.

La caracterización polarimétrica completa de una superficie como sistema esparcidor, se obtiene a través de la determinación experimental de la matriz de Mueller [23]. Existe un tratamiento general para la determinación experimental de la matriz de Mueller de cualquier sistema físico, pero implica la realización de 49 distintas mediciones de intensidad [24]. Este tratamiento consiste en hacer incidir y detectar luz con los siguientes 7 estados de polarización realizando todas las combinaciones posibles entre ellas: $*$ (luz natural), p (polarización lineal horizontal), s (polarización lineal

vertical), + (polarización lineal a $+45^\circ$), - (polarización lineal a -45°), r (polarización circular derecha) y l (polarización circular izquierda).

Se ha demostrado que, para las superficies unidimensionales, la información proporcionada por las intensidades esparcidas para las polarizaciones paralela, p , y perpendicular, s , al plano de incidencia, no contiene toda la información asociada a tales superficies, sino que es necesario considerar también el caso de la polarización lineal cruzada (polarización lineal a $+45^\circ$ (+) respecto al plano de incidencia) [26], ya que hace falta la información debida al cambio de fase entre p y s . Para este tipo de superficies, se ha reportado que se requiere de tan sólo 6 distintas mediciones para determinar la matriz de Mueller, para un ángulo de incidencia dado [24].

Resulta conveniente trabajar con cantidades directamente medibles, como lo son las intensidades, para esto utilizamos lo que se conoce como vector de Stokes [23], este consiste de un conjunto de cuatro cantidades (llamadas parámetros de Stokes) que describen la intensidad y polarización de un haz de luz. El haz puede ser completamente, parcialmente o no polarizado; este puede ser monocromático o policromático. En este contexto, los vectores de Stokes para un haz monocromático se expresan como [22]

$$s_0 = \langle E_p E_p^* \rangle + \langle E_s E_s^* \rangle, \quad (2.1)$$

$$s_1 = \langle E_p E_p^* \rangle - \langle E_s E_s^* \rangle, \quad (2.2)$$

$$s_2 = \langle E_p E_s^* \rangle + \langle E_p^* E_s \rangle, \quad (2.3)$$

$$s_3 = i (\langle E_p E_s^* \rangle - \langle E_p^* E_s \rangle), \quad (2.4)$$

donde $E_{p,s}$ ($E_{p,s}^*$) representa la amplitud compleja (compleja conjugada) del campo eléctrico paralelo, p , y perpendicular, s , al plano de incidencia, respectivamente y $\langle \dots \rangle$ indica promedio temporal, el cual se aplica solo para los estados detectados y no para los incidentes, ya que estos son estados bien determinados. Los vectores de Stokes los podemos expresar en función de cantidades medibles como son las intensidades como sigue:

$$s_0 = I_p + I_s = I_{+p} + I_{+s}$$

$$s_1 = I_p - I_s = I_{+p} - I_{+s}$$

$$s_2 = 2\sqrt{I_p I_s} \cos \phi = I_{++} - I_{+-}$$

$$s_3 = 2\sqrt{I_p I_s} \sin \phi = I_{+r} - I_{+l}$$

donde $I_p = \sqrt{E_p E_p^*}$, $I_s = \sqrt{E_s E_s^*}$, ϕ es el desfase entre los dos campos.

En este trabajo empleamos la notación I_{ab} para denotar la intensidad detectada por un polarizador, dado un haz polarizado, siendo a la polarización incidente y b la

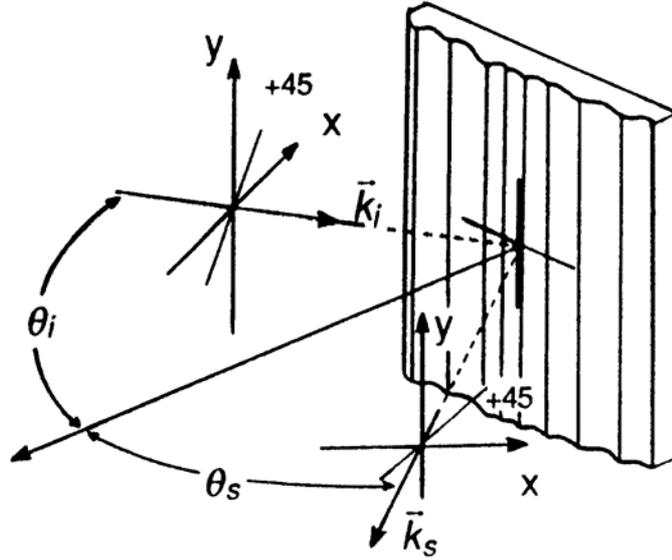


FIGURA 2.1. Diagrama esquemático que muestra la convención de signos utilizada para la descripción del esparramiento de luz por superficies rugosas unidimensionales. Las cantidades mostradas tienen asociadas signos positivos.

polarización detectada. Denotamos la polarización lineal a $+45^\circ$ (-45°) respecto al plano de incidencia con el símbolo $+$ ($-$) y la polarización circular derecha (izquierda) con la sigla r (l); p y s indican polarizaciones lineales paralela y perpendicular al plano de incidencia, respectivamente. En la fig. (2.1) se describe la convención de signos utilizada usualmente en esta área.

Denotemos por S^{inc} un vector de Stokes incidente en un sistema óptico cualquiera y por S^{sc} el correspondiente vector esparrado, se cumple que [31]

$$S^{sc} = M(\theta_0, \theta_s) S^{inc}, \quad (2.5)$$

donde $M(\theta_0, \theta_s)$ es una matriz cuadrada 4×4 que representa la respuesta lineal del sistema esparrador. Es conocida como la matriz de Mueller y, en general, sus 16 elementos s_{ij} son funciones de los ángulos de incidencia, θ_0 , y de esparramiento, θ_s . Considerando de manera implícita esta dependencia tenemos que, para un haz luminoso arbitrario

$$\begin{pmatrix} \langle s_0^{sc} \rangle \\ \langle s_1^{sc} \rangle \\ \langle s_2^{sc} \rangle \\ \langle s_3^{sc} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle s_{00} \rangle & \langle s_{01} \rangle & \langle s_{02} \rangle & \langle s_{03} \rangle \\ \langle s_{10} \rangle & \langle s_{11} \rangle & \langle s_{12} \rangle & \langle s_{13} \rangle \\ \langle s_{20} \rangle & \langle s_{21} \rangle & \langle s_{22} \rangle & \langle s_{23} \rangle \\ \langle s_{30} \rangle & \langle s_{31} \rangle & \langle s_{32} \rangle & \langle s_{33} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^{inc} \\ s_1^{inc} \\ s_2^{inc} \\ s_3^{inc} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denotan promedio de ensamble. Enseguida mostramos el desarrollo que

permite expresar los elementos de la matriz de Mueller en términos de los elementos de la matriz de Jones.

La matriz que transforma un campo eléctrico \mathbf{E}_1 a otro \mathbf{E}_2 debido a la interacción con un sistema óptico lineal transparente (no absorbente), no depolarizante, se llama matriz de Jones (MJ) [27]

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{J}\mathbf{E}_1, \quad (2.7)$$

donde el vector \mathbf{E}_1 (\mathbf{E}_2) representa el campo eléctrico incidente (saliente), \mathbf{E}_i ($i = 1, 2$) y es una matriz de 1×2 donde los elementos de la matriz son complejos y \mathbf{J} es conocida como la matriz de Jones o matriz de espárcimiento; es una matriz de 2×2 , con elementos en general complejos.

De las relaciones anteriores, es claro que todas las MJ tienen asociada una matriz de Mueller (MM), pero no ocurre lo contrario, que todas las MM tengan asociada una MJ; es decir, la función que relaciona la MM con las MJ no es sobreyectiva. A la clase especial de matrices de Mueller que tienen asociada una matriz de Jones se les denomina Matrices de Mueller-Jones (MMJ) o Matrices de Mueller Puras [28]. La condición física que cumplen las MMJ, es que representan sistemas ópticos no absorbentes ni depolarizantes.

Representando los campos eléctricos incidentes y salientes en término de sus componentes canónicas, utilizando la ecuación (2.7), tenemos que

$$\begin{bmatrix} E_{p2} \\ E_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_4 \\ J_3 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{p1} \\ E_{s1} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Ahora bien, la información sobre la forma específica de las matrices de Mueller se obtiene a través de la determinación de los estados de luz polarizada entrantes y salientes del sistema bajo interés. Estos estados se describen a través del formalismo matricial de los llamados vectores de Stokes. Utilizando la relación (2.5) y el vector de Stokes

$$S = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

donde los valores de los parámetros de Stokes para un haz de luz monocromática están dados por las ecuaciones (2.1, 2.2, 2.3, 2.4). Expresando los campos salientes en términos de los elementos de la matriz de Jones dados por la ecuación (2.8), utilizando las expresiones dadas por la ecuación (2.7) para los campos incidentes y salientes y sustituyéndolos en la ecuación (2.9), obtenemos

$$S_2 = \begin{bmatrix} s_{00}E_{s1}E_{s1}^* + s_{01}E_{s1}E_{p1}^* + s_{02}E_{p1}E_{s1}^* + s_{03}E_{p1}E_{p1}^* \\ s_{10}E_{s1}E_{s1}^* + s_{11}E_{s1}E_{p1}^* + s_{12}E_{p1}E_{s1}^* + s_{13}E_{p1}E_{p1}^* \\ s_{20}E_{s1}E_{s1}^* + s_{21}E_{s1}E_{p1}^* + s_{22}E_{p1}E_{s1}^* + s_{23}E_{p1}E_{p1}^* \\ s_{30}E_{s1}E_{s1}^* + s_{31}E_{s1}E_{p1}^* + s_{32}E_{p1}E_{s1}^* + s_{33}E_{p1}E_{p1}^* \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

donde

$$\begin{aligned}
s_{00} &= J_3 J_3^* + J_1 J_1^*, & s_{01} &= J_3 J_2^* + J_1 J_4^*, \\
s_{02} &= J_2 J_3^* + J_4 J_1^*, & s_{03} &= J_2 J_2^* + J_4 J_4^*, \\
s_{10} &= J_3 J_3^* - J_1 J_1^*, & s_{11} &= J_3 J_2^* - J_1 J_4^*, \\
s_{12} &= J_2 J_3^* - J_4 J_1^*, & s_{13} &= J_2 J_2^* - J_4 J_4^*, \\
s_{20} &= J_3 J_1^* + J_1 J_3^*, & s_{21} &= J_3 J_4^* + J_1 J_2^*, \\
s_{22} &= J_2 J_1^* + J_4 J_3^*, & s_{23} &= J_2 J_4^* - J_4 J_2^*, \\
s_{30} &= J_3 J_1^* - J_1 J_3^*, & s_{31} &= J_3 J_4^* - J_1 J_2^*, \\
s_{32} &= J_2 J_1^* - J_4 J_3^*, & s_{33} &= J_2 J_4^* + J_4 J_2^*.
\end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de la definición de la matriz de Mueller [29], ecuacion (2.5), tenemos

$$S_2 = \begin{bmatrix} b_{00} E_{s1} E_{s1}^* + b_{01} E_{s1} E_{p1}^* + b_{02} E_{p1} E_{s1}^* + b_{03} E_{p1} E_{p1}^* \\ b_{10} E_{s1} E_{s1}^* + b_{11} E_{s1} E_{p1}^* + b_{12} E_{p1} E_{s1}^* + b_{13} E_{p1} E_{p1}^* \\ b_{20} E_{s1} E_{s1}^* + b_{21} E_{s1} E_{p1}^* + b_{22} E_{p1} E_{s1}^* + b_{23} E_{p1} E_{p1}^* \\ b_{30} E_{s1} E_{s1}^* + b_{31} E_{s1} E_{p1}^* + b_{32} E_{p1} E_{s1}^* + b_{33} E_{p1} E_{p1}^* \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
b_{00} &= n_{00} - n_{01}, & b_{01} &= n_{02} - in_{03}, \\
b_{02} &= n_{02} + in_{03}, & b_{03} &= n_{00} + n_{01}, \\
b_{10} &= n_{10} - n_{11}, & b_{11} &= n_{12} - in_{13}, \\
b_{12} &= n_{12} + in_{13}, & b_{13} &= n_{10} + n_{11}, \\
b_{20} &= n_{20} - n_{21}, & b_{21} &= n_{22} - in_{23}, \\
b_{22} &= n_{22} + in_{23}, & b_{23} &= n_{20} + n_{21}, \\
b_{30} &= n_{30} - n_{31}, & b_{31} &= n_{32} - in_{33}, \\
b_{32} &= n_{32} + in_{33}, & b_{33} &= n_{30} + n_{31}.
\end{aligned}$$

Por inspección de las ecuaciones (2.10) y (2.11) vemos que

$$n_{00} - n_{01} = J_3 J_3^* + J_1 J_1^*, \quad n_{00} + n_{01} = J_2 J_2^* + J_4 J_4^*,$$

sumando estas últimas ecuaciones obtenemos

$$n_{00} = \frac{1}{2} (J_1 J_1^* + J_2 J_2^* + J_3 J_3^* + J_4 J_4^*),$$

y restándolas

$$n_{01} = \frac{1}{2} (-J_1 J_1^* + J_2 J_2^* - J_3 J_3^* + J_4 J_4^*),$$

y así sucesivamente para los elementos restantes, obteniéndose

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

donde $m_{ij} = 2n_{ij}$, esto es:

$$\begin{aligned} m_{00} &= J_1 J_1^* + J_2 J_2^* + J_3 J_3^* + J_4 J_4^*, \\ m_{01} &= -J_1 J_1^* + J_2 J_2^* - J_3 J_3^* + J_4 J_4^*, \\ m_{02} &= J_1 J_2^* + J_3 J_4^* + J_2 J_1^* + J_4 J_3^*, \\ m_{03} &= i(J_1 J_2^* + J_3 J_4^* - J_2 J_1^* - J_4 J_3^*), \\ m_{10} &= J_1 J_1^* + J_2 J_2^* - J_3 J_3^* - J_4 J_4^*, \\ m_{11} &= J_1 J_1^* - J_2 J_2^* - J_3 J_3^* + J_4 J_4^*, \\ m_{12} &= J_1 J_2^* - J_3 J_4^* + J_2 J_1^* - J_4 J_3^*, \\ m_{13} &= i(J_1 J_2^* - J_3 J_4^* - J_2 J_1^* + J_4 J_3^*), \\ m_{20} &= J_1 J_3^* + J_3 J_1^* + J_2 J_4^* + J_4 J_2^*, \\ m_{21} &= J_1 J_3^* + J_3 J_1^* - J_2 J_4^* - J_4 J_2^*, \\ m_{22} &= J_1 J_4^* + J_3 J_2^* + J_2 J_3^* + J_4 J_1^*, \\ m_{23} &= i(J_1 J_4^* + J_3 J_2^* - J_2 J_3^* - J_4 J_1^*), \\ m_{30} &= i(-J_1 J_3^* + J_3 J_1^* - J_2 J_4^* + J_4 J_2^*), \\ m_{31} &= i(-J_1 J_3^* + J_3 J_1^* + J_2 J_4^* - J_4 J_2^*), \\ m_{32} &= i(-J_1 J_4^* + J_3 J_2^* - J_2 J_3^* + J_4 J_1^*), \\ m_{33} &= i(J_1 J_4^* - J_3 J_2^* - J_2 J_3^* + J_4 J_1^*). \end{aligned}$$

De aquí, podemos escribir la ecuación (2.12) como [33]

$$M = T(J \otimes J^*)T^{-1}. \quad (2.13)$$

Donde \otimes representa el producto de Kronecker y las matrices T están dadas como

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}T^t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

y

$$J \otimes J^* = \begin{bmatrix} J_1 J_1^* & J_1 J_4^* & J_4 J_1^* & J_4 J_4^* \\ J_1 J_3^* & J_1 J_2^* & J_4 J_3^* & J_4 J_2^* \\ J_3 J_1^* & J_3 J_4^* & J_2 J_1^* & J_2 J_4^* \\ J_3 J_3^* & J_3 J_2^* & J_2 J_3^* & J_2 J_2^* \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

La condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller sea una matriz de Mueller-Jones, es que cumpla [30]

$$Tr (M^t M) = \sum_{i,j=0}^3 m_{ij}^2 = 4m_{00}^2 \quad (2.16)$$

Sin embargo, existen algunas restricciones matemáticas que debe cumplir toda matriz de Mueller-Jones para que sea físicamente realizable. Estas condiciones encierran un sentido físico directo, pero además, se expresan bajo el formalismo matemático riguroso de ser condiciones necesarias y suficientes, a saber

i).- El grado de polarización de salida P_2 no debe ser mayor que la unidad i.e.

$$0 \leq P_2 = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0^2} \leq 1. \quad (2.17)$$

ii).- La ganancia g debe ser menor a la unidad i.e.

$$0 \leq g \equiv \frac{s_0^{inc}}{s_0^{sal}} \leq 1. \quad (2.18)$$

donde s_0^{inc} es la intensidad entrante y s_0^{sal} es la intensidad esparcida, y por conservación de energía no debe salir más de lo que entra. Se ha hecho la consideración de que los parámetros de Stokes están normalizados respecto al valor unitario. En adelante cuando hablemos de los vectores de Stokes, serán los vectores de Stokes normalizados.

Empleando la definición de la matriz de Mueller, ecuación (2.13), se pueden determinar las matrices de Mueller de elementos ópticos polarizadores.

2.2 Esparcimiento por superficies unidimensionales en el plano de incidencia.

Bickel y Bailey [24] han reportado un tratamiento muy general para la determinación de los 16 elementos de la matriz de Mueller para un sistema óptico arbitrario, en el cual se requieren 49 mediciones de intensidad independientes.

Por otra parte, se ha encontrado que, normalmente, los 16 elementos de la matriz de Mueller no son independientes y que si existen simetrías asociadas al sistema en cuestión la matriz puede simplificarse considerablemente [29, 31]. Como un ejemplo particularmente importante para este trabajo, consideremos el caso de una superficie unidimensional (Fig. 2.1). Se sabe que cuando sobre este tipo de sistemas incide un haz de luz linealmente polarizado, s o p , no ocurre cambio de polarización (de s a p , o inversamente, p a s) durante el proceso de esparcimiento, ya que el problema vectorial de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético se reduce a uno de naturaleza escalar si el vector de onda incidente es perpendicular a los surcos

o generadores de la superficie [23]. Entonces se cumple que los coeficientes J_4 y J_3 de la matriz de amplitudes J son nulos, por lo que la matriz de Mueller para el caso general se reduce a [22]

$$M(\theta_0, \theta_s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle J_1 J_1^* + J_2 J_2^* \rangle & \langle J_1 J_1^* - J_2 J_2^* \rangle & 0 & 0 \\ \langle J_1 J_1^* - J_2 J_2^* \rangle & \langle J_1 J_1^* + J_2 J_2^* \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle J_1 J_2^* + J_2 J_1^* \rangle & i \langle J_1 J_2^* - J_2 J_1^* \rangle \\ 0 & 0 & -i \langle J_1 J_2^* - J_2 J_1^* \rangle & \langle J_1 J_2^* + J_2 J_1^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

o, utilizando la notación de la ecuación (2.6) [26],

$$M(\theta_0, \theta_s) = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & 0 \\ s_{01} & s_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} & s_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} s_{00} &= \frac{1}{2} \langle J_1 J_1^* + J_2 J_2^* \rangle, & s_{22} &= \frac{1}{2} \langle J_1 J_2^* + J_2 J_1^* \rangle = \text{Re} \langle J_1 J_2^* \rangle, \\ s_{01} &= \frac{1}{2} \langle J_1 J_1^* - J_2 J_2^* \rangle & \text{y} & \quad s_{23} = \frac{i}{2} \langle J_1 J_2^* - J_2 J_1^* \rangle = \text{Im} \langle J_1 J_2^* \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como puede observarse en este caso, debido a la simetría, la matriz de Mueller se reduce a una forma sencilla, con sólo cuatro elementos independientes distintos de cero.

Otro aspecto interesante es que, con una selección adecuada del vector de Stokes incidente, se puede lograr que el vector de Stokes esparcido contenga toda la información necesaria para la determinación de la matriz de Mueller, por ejemplo, si aplicamos el vector de Stokes de luz con polarización p a la matriz (2.20) obtenemos el siguiente vector de Stokes esparcido

$$S^{sc} = \begin{pmatrix} s_{00} + s_{01} \\ s_{00} + s_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y este es un estado de polarización p puro. Si ahora le aplicamos un estado de polarización s a la ecuación (2.20), el estado de polarización del vector de Stokes esparcido es

$$S^{sc} = \begin{pmatrix} s_{00} - s_{01} \\ -s_{00} + s_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es un estado de polarización s puro, por consiguiente, con estos dos estados de polarización incidentes, p y s , no podemos obtener los elementos s_{22} y s_{23} . Si nosotros utilizamos un estado de polarización r , el vector de Stokes esparcido es

$$S^{sc} = \begin{pmatrix} s_{00} \\ s_{01} \\ s_{23} \\ s_{22} \end{pmatrix}$$

y aquí si aparecen los cuatro elementos que queremos conocer, por lo que podemos utilizar este estado de polarización incidente. En nuestro caso, una selección adecuada para el vector de Stokes incidente puede ser cualquiera de los estados polarizados: $+$, $-$, r o l , pero para estos últimos estados de polarización, pueden surgir errores de un pequeño grado de elipticidad del estado de polarización, errores de retardo de la misma placa retardadora, y desajustes de la posición relativa de la placa de onda y el polarizador tanto para el sistema de incidencia como para el detector, por lo que optamos por seleccionar los estados de polarización lineal $+$, $-$. Seleccionemos $+$, es decir,

$$S^{inc} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Entonces el vector de Stokes esparcido estará dado como:

$$S^{sc}(\theta_0, \theta_s) = M(\theta_0, \theta_s) S^{inc} = \begin{pmatrix} s_{00} \\ s_{01} \\ s_{22} \\ -s_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

En este punto surge una pregunta natural, ¿esta forma de la matriz de Mueller para una superficie unidimensional rugosa, es una matriz de Mueller-Jones? Aplicando el criterio de la condición necesaria y suficiente [30] (ecuación 2.16) a esta forma matricial (ecuación 2.20), tenemos que

$$\begin{aligned} M^t M &= \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & 0 \\ s_{01} & s_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{22} & -s_{23} \\ 0 & 0 & s_{23} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & 0 \\ s_{01} & s_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} & s_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_{00}^2 + s_{01}^2 & 2s_{00}s_{01} & 0 & 0 \\ 2s_{00}s_{01} & s_{00}^2 + s_{01}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{22}^2 + s_{23}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{22}^2 + s_{23}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que la traza de esta matriz esta dada por

$$Tr (M^t M) = 2 (s_{00}^2 + s_{01}^2 + s_{22}^2 + s_{23}^2).$$

Si el sistema bajo estudio no absorbe ni depolariza, entonces los parámetros de Stokes cumplen con la siguiente relación,

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$

considerando los valores del vector de Stokes esparcido (ecuación 2.23), tenemos que estas relaciones toman la forma explícita

$$s_{00}^2 = s_{01}^2 + s_{22}^2 + s_{23}^2,$$

por lo que

$$Tr (M^t M) = 4s_{00}^2,$$

cumpliendo con la condición de Gil [30]. Solamente si el material bajo estudio no absorbe ni depolariza a la longitud de onda incidente.

Continuando con nuestro análisis, tenemos que de la ecuación 2.23 es posible determinar completamente los elementos s_{ij} con seis distintas mediciones de intensidad esparcida (I_{+p} , I_{+s} , I_{+-} , I_{++} , I_{+r} , I_{+l}), a saber

$$I_{+p} = \frac{1}{2}(s_{00} + s_{01}), \quad I_{+s} = \frac{1}{2}(s_{00} - s_{01}), \quad (2.24)$$

$$I_{++} = \frac{1}{2}(s_{00} + s_{22}), \quad I_{+-} = \frac{1}{2}(s_{00} - s_{22}), \quad (2.25)$$

$$I_{+l} = \frac{1}{2}(s_{00} + s_{23}), \quad y \quad I_{+r} = \frac{1}{2}(s_{00} - s_{23}).$$

Se encuentra entonces que

$$s_{00} = I_{+p} + I_{+s} = I_{++} + I_{+-} = I_{+l} + I_{+r} \quad (2.26)$$

$$s_{01} = I_{+p} - I_{+s}, \quad (2.27)$$

$$s_{22} = I_{++} - I_{+-}, \quad (2.28)$$

$$s_{23} = I_{+l} - I_{+r} \quad (2.29)$$

Si hubiéramos trabajado con otro estado de polarización, obtendríamos relaciones equivalentes. Como puede verse, existen varias maneras de determinar los vectores de Stokes esparcidos por superficies unidimensionales y, por consiguiente, de medir la matriz de Mueller asociada a éstas.

El procedimiento experimental en una geometría de incidencia plana se muestra en la figura 2.2, a este tipo de arreglo se le conoce como esparcimiento por resolución

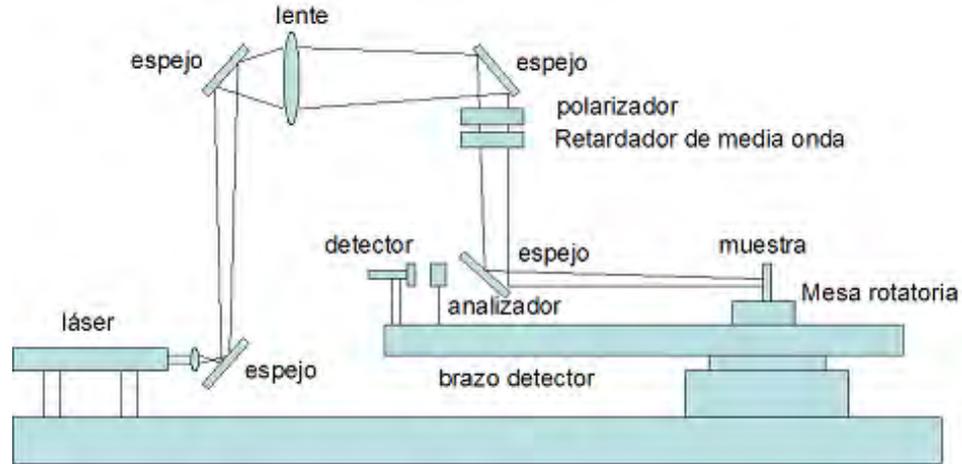


FIGURA 2.2. Diagrama esquemático del esparcímetero bidireccional del tipo ARS (Angular Resolved scattering) empleado para hacer las mediciones.

angular ARS (Angle Resolved Scattering). En este diagrama se muestra un haz convergente hacia el detector, incidiendo en la superficie 1-D rugosa. La luz esparcida se mide en función del ángulo de esparcimiento. El brazo de detección gira alrededor del eje de la mesa de rotación, describiendo un plano perpendicular al plano del diagrama. Note que el espejo que dirige la luz incidente hacia la muestra, obstruye el haz esparcido en la dirección de retroreflexión (dirección contraria a la de incidencia), donde se presenta el efecto de retroesparcimiento reforzado. En adelante se muestran los elementos de la matriz de Mueller para una superficie unidimensional, cubierta de oro, que obedece procesos aleatorios gaussianos, con los siguientes parámetros estadísticos: longitud de correlación $a = 3.2 \mu m$, desviación estándar de alturas $\delta = 1.5 \mu m$, longitud de onda incidente $\lambda = 0.6328 \mu m$, ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, 10° y 20° , respectivamente. En la dirección de retroreflexión, $\theta_s = 0^\circ$, 10° y 20° respectivamente, muestran una obstrucción, que se manifiesta con un corte en la señal esparcida angularmente, debido al espejo que dirige la luz a la muestra, mismo que la obstruye en la retroreflexión.

Las intensidades medidas en una configuración en el plano, se presentan en la figura (2.3) para un ángulo de incidencia de 0° , figura (2.4) para un ángulo de incidencia de 10° , y figura (2.5) para un ángulo de incidencia de 20° . Estas intensidades están expresadas en unidades arbitrarias y serán utilizadas para calcular los diferentes elementos de la matriz de Mueller

Con los estados de polarización antes mencionados encontramos la matriz de Mueller en el plano de acuerdo a la propuesta hecha por Knotts et al [22] para un ángulo de incidencia de 0° , 10° y 20° . Estos resultados experimentales pueden verse en las figuras (2.6), (2.7), (2.8), respectivamente. Estas serán comparadas con las

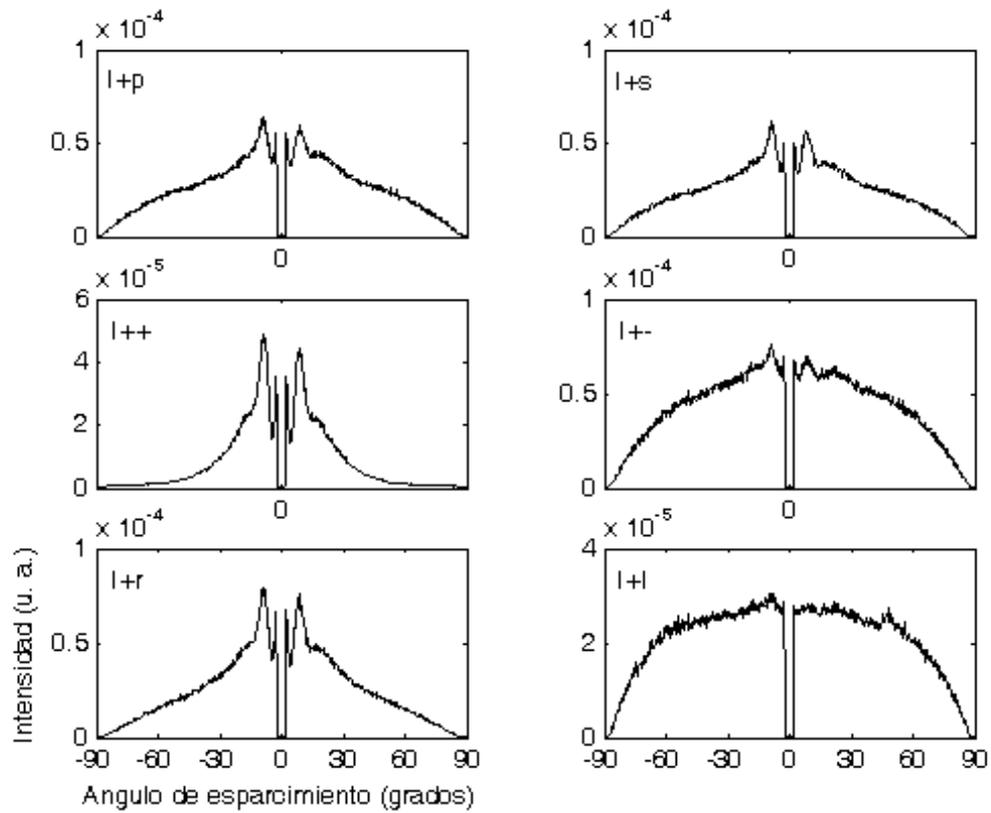


FIGURA 2.3. Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$.

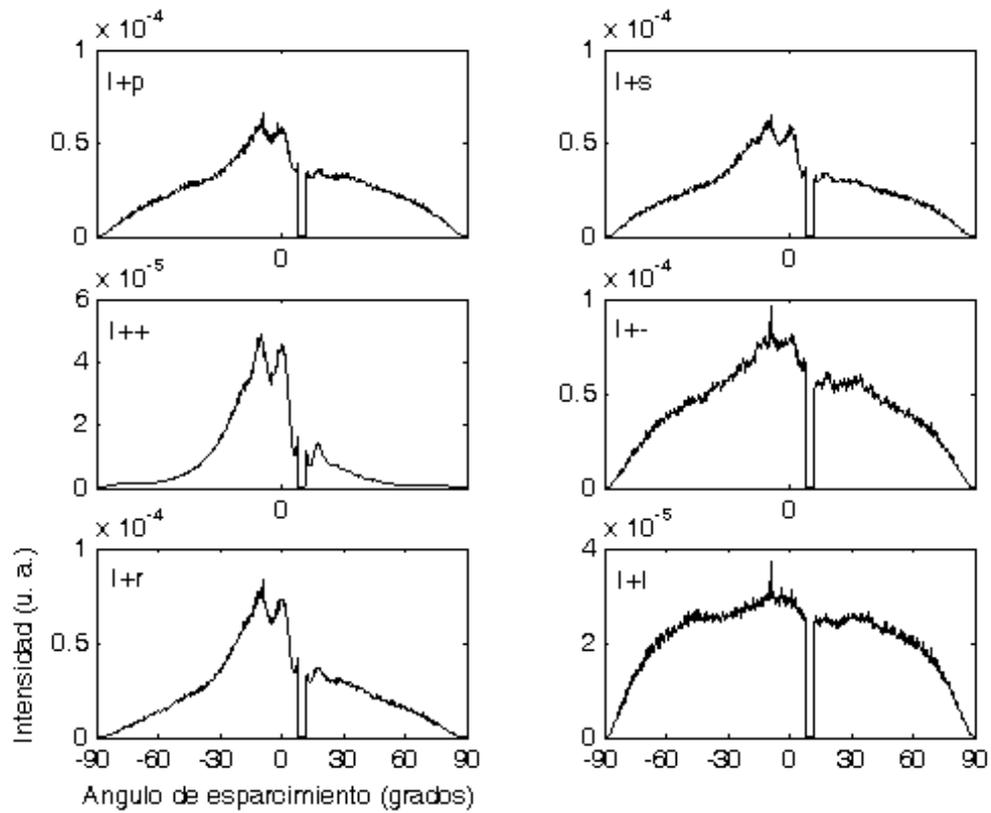


FIGURA 2.4. Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$.

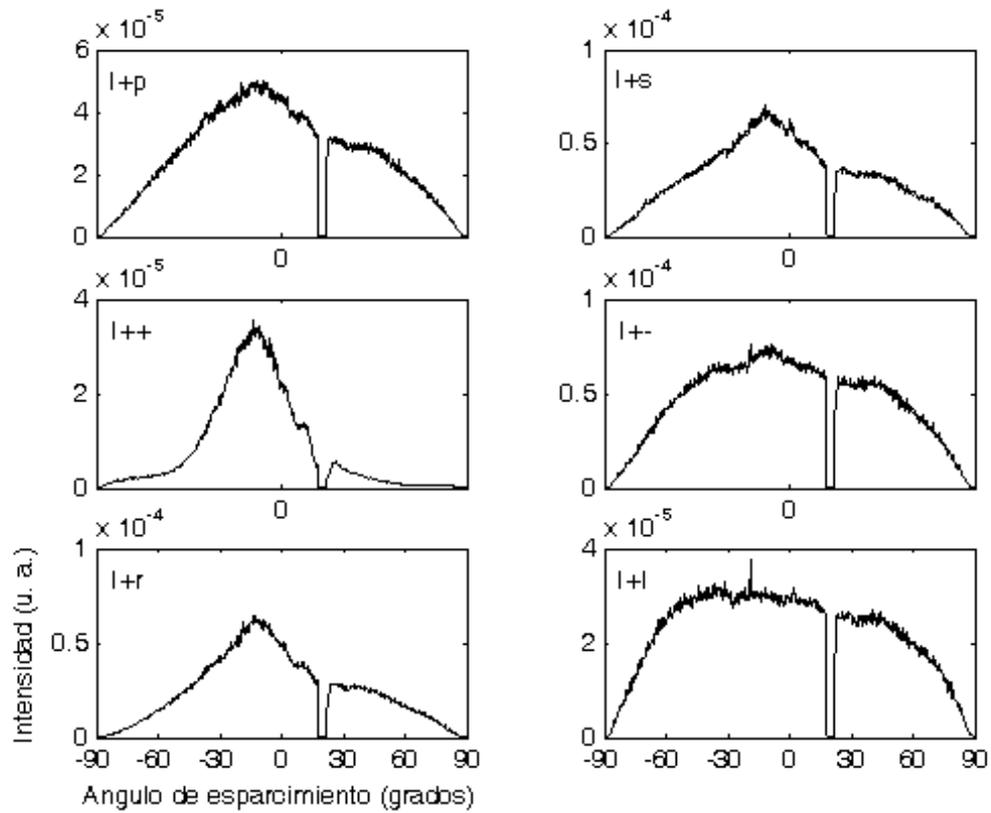


FIGURA 2.5. Resultados experimentales de las seis distintas mediciones de intensidad esparcida expresada en unidades arbitrarias contra el ángulo de esparcimiento, por una superficie 1-D con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$ a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$.

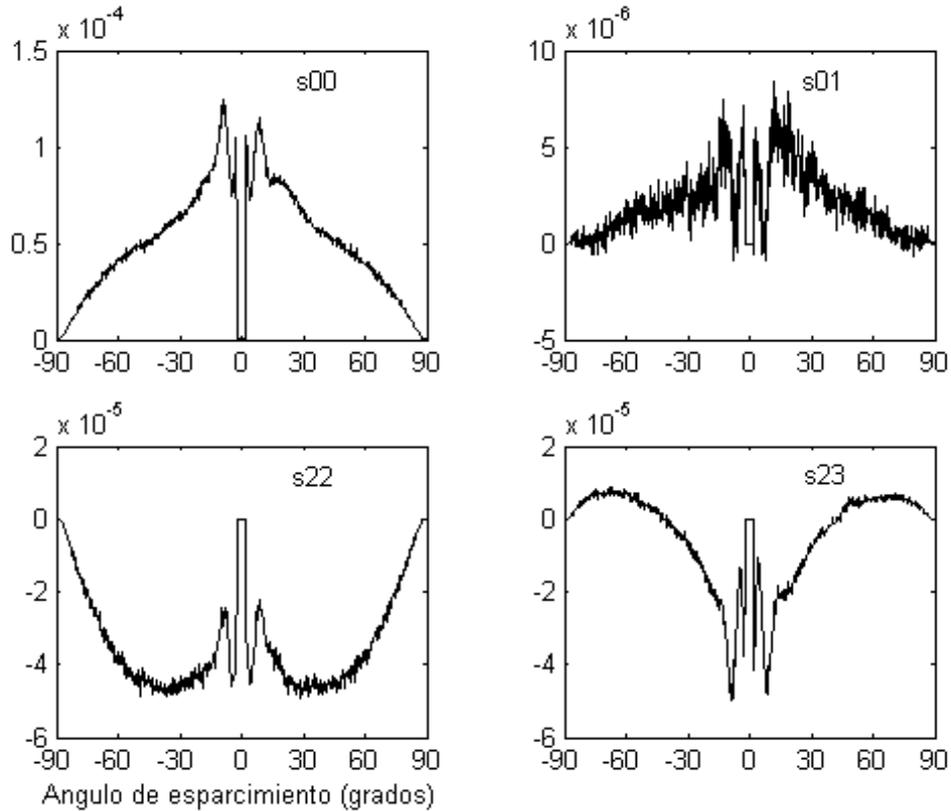


FIGURA 2.6. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

gráficas obtenidas en la siguiente sección.

2.3 Optimización de la medición de la matriz de Mueller.

Se ha reportado que para superficies unidimensionales se requiere de 6 distintas mediciones de intensidad $I_{\alpha\beta}$, donde el subíndice α denota el estado de luz polarizada incidente y β el de la luz polarizada que se detecta o analiza (I_{+p} , I_{+s} , I_{++} , I_{+-} , I_{+r} , I_{+l}), para un ángulo θ_0 de incidencia dado. Sin embargo, nosotros presentamos una forma fenomenológica de optimizar el número de mediciones a realizar para encontrar la matriz de Mueller de cualquier sistema esparcidor en el plano (16 mediciones), así como para la matriz de Mueller de una superficie unidimensional en el plano (4 mediciones). También damos el sustento matemático de esta optimización al justificar el procedimiento basado en fundamentos del Algebra Lineal.

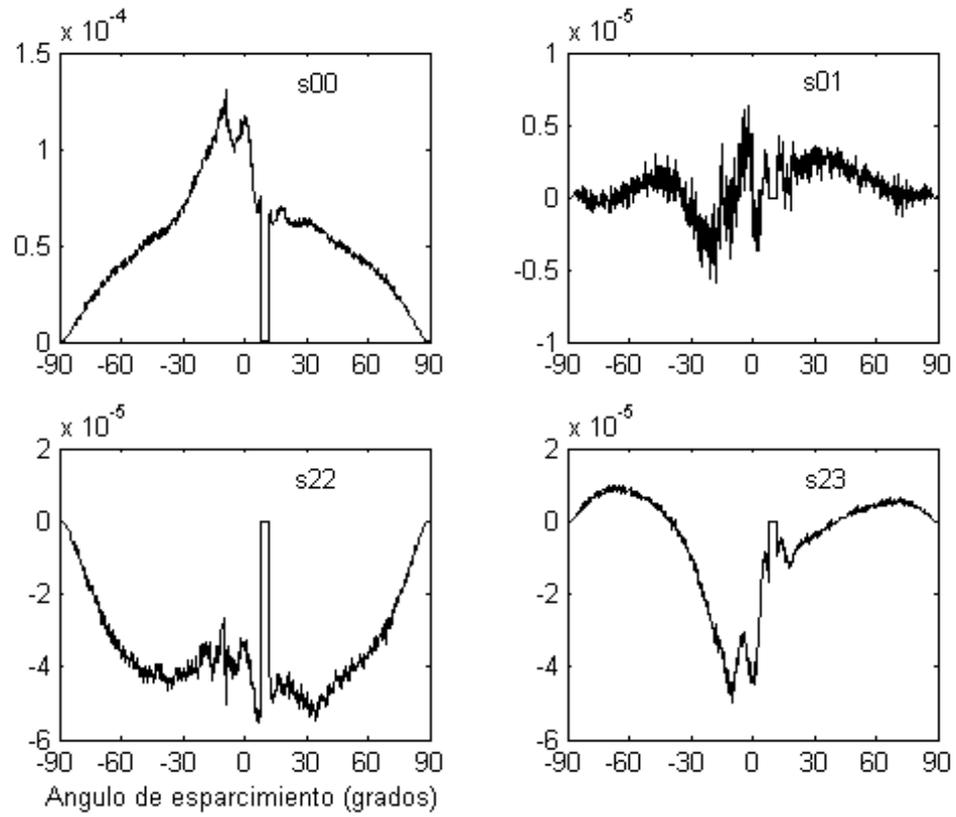


FIGURA 2.7. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

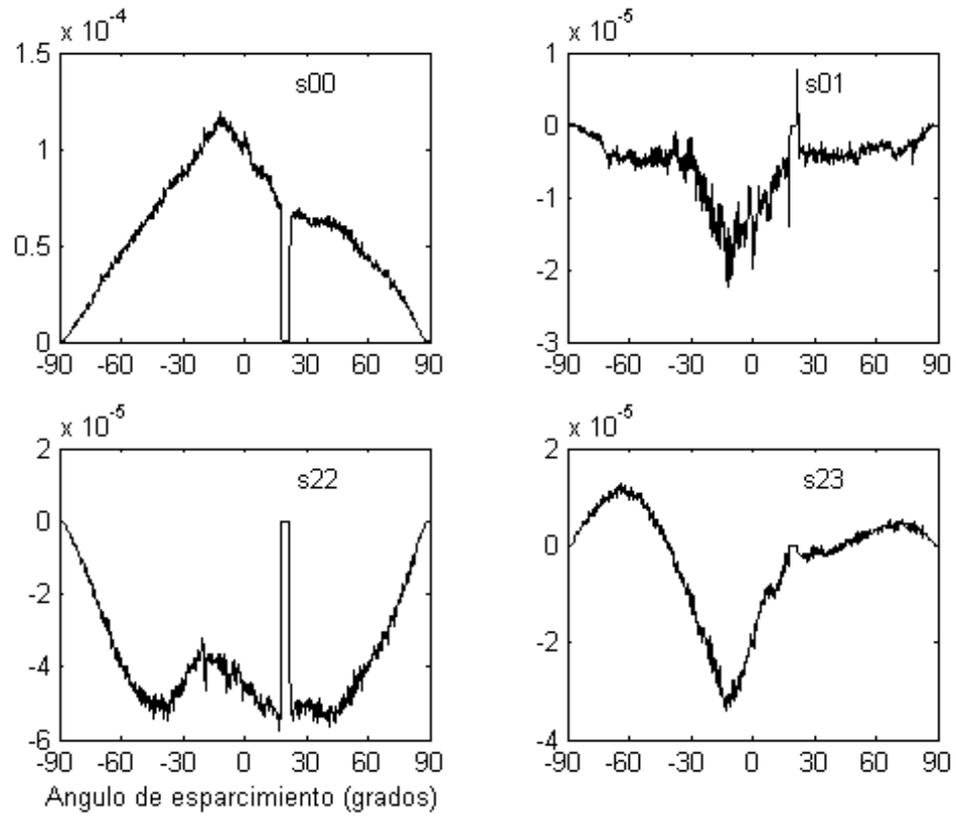


FIGURA 2.8. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

A continuación presentamos la forma fenomenológica para la optimización en el número de mediciones. Los estados de polarización de los haces incidentes (*inc*) y esparcidos (*sc*) en el formalismo matricial de Stokes [23], están dados por

$$S^j = \begin{bmatrix} s_0^j \\ s_1^j \\ s_2^j \\ s_3^j \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

para $j = inc, sc$, donde los parámetros de Stokes están dados por las relaciones (2.1, 2.2, 2.3, 2.4). Esta relación toma la misma forma para los haces de luz incidentes y esparcidos. La interpretación de los vectores de Stokes está dada por: $s_0 > 0$ indica la intensidad total presente en el haz de luz, $s_1 > 0$ (< 0) indica la tendencia a polarización lineal paralela (perpendicular o s) al plano de incidencia, $s_2 > 0$ (< 0) indica la tendencia a polarización lineal a $+45^\circ$ (-45°) respecto al plano de incidencia, $s_3 > 0$ (< 0) indica la tendencia a polarización circular derecha (izquierda).

La notación se basa en el esquema mostrado en la figura (2.1). Si un haz de luz S^{inc} incide sobre una superficie con rugosidad arbitraria con respuesta lineal M , se genera un haz esparcido S^{sc} que contiene información sobre el proceso efectuado [24], donde M representa una matriz 4×4 de elementos reales y $S^{inc,sc}$ representa el vector de Stokes, que corresponde a una matriz 4×1 de elementos reales. Para un sistema esparcidor M y un vector de Stokes incidente S^{inc} arbitrarios, se tiene un vector de Stokes esparcido S^{sc} , dado por las componentes

$$\begin{aligned} s_0^{sc} &= m_{00}s_0^{inc} + m_{01}s_1^{inc} + m_{02}s_2^{inc} + m_{03}s_3^{inc}, \\ s_1^{sc} &= m_{10}s_0^{inc} + m_{11}s_1^{inc} + m_{12}s_2^{inc} + m_{13}s_3^{inc}, \\ s_2^{sc} &= m_{20}s_0^{inc} + m_{21}s_1^{inc} + m_{22}s_2^{inc} + m_{23}s_3^{inc}, \\ s_3^{sc} &= m_{30}s_0^{inc} + m_{31}s_1^{inc} + m_{32}s_2^{inc} + m_{33}s_3^{inc}. \end{aligned}$$

Las relaciones anteriores revisten una gran importancia, pues son válidas para cualquier sistema esparcidor y cualquier estado de polarización incidente. Para detectar un vector de Stokes esparcido por un sistema dado, se analiza la señal esparcida empleando elementos ópticos, cuya acción se representan por matrices de Mueller. Aplicando una relación análoga a la ecuación (2.5)

$$S^{det} = M_{an}S^{sc}, \quad (2.31)$$

donde S^{det} representa el estado de luz polarizada que llega al detector y M_{an} es la matriz de Mueller del analizador; S^{sc} es el vector de Stokes esparcido por el sistema objeto de estudio. Continuando el ejemplo, si se desea analizar la proporción de luz esparcida con polarización lineal a $+45^\circ$, entonces se realiza la siguiente operación:

$$S_{++}^{det} = M_+S^{sc},$$

donde M_+ representa la matriz de Mueller de un polarizador lineal con eje de transmisión a $+45^\circ$ respecto al plano de incidencia; ++ indica que se genera un vector de Stokes + incidente y se analiza ese mismo tipo de polarización:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_0^{\text{det}} \\ s_1^{\text{det}} \\ s_2^{\text{det}} \\ s_3^{\text{det}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} + m_{02} \\ m_{10} + m_{12} \\ m_{20} + m_{22} \\ m_{30} + m_{32} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_0^{\text{det}} \\ s_1^{\text{det}} \\ s_2^{\text{det}} \\ s_3^{\text{det}} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{00} + m_{02} + m_{20} + m_{22} \\ 0 \\ m_{00} + m_{02} + m_{20} + m_{22} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

El único elemento que es físicamente medible es un valor proporcional a la intensidad, contenida en el primer elemento del vector de Stokes que llega al detector, esto es,

$$s_0^{\text{det}} = \frac{1}{2} (m_{00} + m_{02} + m_{20} + m_{22}). \quad (2.33)$$

En esta señal detectada se tienen algunos elementos de la matriz de Mueller del sistema bajo estudio. La metodología a seguir es generar distintos estados de polarización (vectores de Stokes incidentes) y detectar los distintos estados de polarización esparcidos hasta formar un sistema de ecuaciones lineales que habrá de resolverse respecto a los elementos m_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3$) de la matriz de Mueller [24].

Los elementos de Stokes detectados se pueden escribir de manera condensada de la siguiente manera:

$$S_i^{\text{det}} = M_{an} M S^{\text{inc}} \quad (2.34)$$

$$= M_{an} S^{\text{sc}} \quad (2.35)$$

$$S_i^{\text{det}} = \sum_{j=0}^3 a_{ij} \sum_{k=0}^3 m_{jk} s_k, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

Para el ejemplo que estamos manejando, el valor de la intensidad medida por el detector, s_0 , estará dado por:

$$S_{i=0}^{\text{det}} = (s_0^{\text{det}})_{++} = M_+ M S_+^{\text{inc}}$$

$$S_{i=0}^{\text{det}} = \sum_{j=0}^3 a_{0j} \sum_{k=0}^3 m_{jk} s_k$$

$$\begin{aligned} S_{i=0}^{\text{det}} &= a_{00}(m_{00}s_0 + m_{01}s_1 + m_{02}s_2 + m_{03}s_3) + \\ &+ a_{01}(m_{10}s_0 + m_{11}s_1 + m_{12}s_2 + m_{13}s_3) + \\ &+ a_{02}(m_{20}s_0 + m_{21}s_1 + m_{22}s_2 + m_{23}s_3) + \\ &+ a_{03}(m_{30}s_0 + m_{31}s_1 + m_{32}s_2 + m_{33}s_3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

En nuestro ejemplo, $a_{00} = \frac{1}{2} = a_{02}$, $a_{01} = 0 = a_{03}$, $s_0 = 1 = s_2$, $s_1 = 0 = s_3$; por lo que

$$S_{i=0}^{\text{det}} = (s_0^{\text{det}})_{++} = \frac{1}{2} (m_{00} + m_{02} + m_{20} + m_{22}).$$

Note que los elementos relevantes para la detección están localizados en la primera fila de la matriz asociada al analizador (los elementos a_{00} , a_{01} , a_{02} y a_{03}). Por el procedimiento típico [24] se deben hacer 49 distintas mediciones de intensidad para un sistema esparcidor arbitrario (7 condiciones de incidencia y 7 en detección). Nuestra expresión fenomenológica también indica que se puede optimizar éste número; esto es, que se puede reducir el número de mediciones si prestamos atención a la naturaleza de los elementos ópticos existentes que pudieran emplearse como analizadores. Lo ideal es contar con un conjunto de 16 ecuaciones con 16 incógnitas, a lo cual, puede llegarse mediante el álgebra lineal bajo el criterio de una base de 4 vectores de entrada y 4 analizadores o filtros. Por consiguiente, solo se requiere de 16 distintas mediciones, empleando elementos ópticos clásicos (polarizadores lineales y placas retardadoras de un cuarto de onda). Un conjunto posible de vectores de Stokes incidentes y de analizadores que pudieran emplearse, está dado por las combinaciones posibles entre los respectivos conjuntos siguientes:

$$S^{\text{inc}} = (1, 1, 0, 0)^t; (1, -1, 0, 0)^t; (1, 0, 1, 0)^t; (1, 0, 0, 1)^t$$

$$M_{\text{an}} = M_{\text{pol. lineal } p}; M_{\text{pol. lineal } s}; M_{\text{pol. lineal } +}; M_{\text{pol. circ. der.}}$$

donde las primeras filas de cada uno de estos analizadores forman el conjunto

$$[a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}] = \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} 0 \right], \left[\frac{1}{2} 00 \frac{1}{2} \right] \right\}$$

Donde el superíndice t en los vectores de Stokes incidentes indica la operación transpuesta. De las relaciones anteriores vemos que tenemos los vectores de Stokes correspondientes a polarizadores lineales paralelos (p), perpendiculares (s), y a $+45^\circ$ respecto al plano de incidencia, respectivamente, y un estado de polarización circular derecha (r). Para el analizador se emplean elementos ópticos del mismo tipo que para producir los vectores de Stokes incidentes. Las combinaciones generadas entre estas 4 condiciones de entrada y 4 condiciones analizadas, implican 16 distintas mediciones. Si denotamos por $I_{\alpha\beta}$ la intensidad medida, donde α representa el vector de Stokes incidente y β el vector de Stokes detectado, podemos obtener los 16 elementos de la matriz de Mueller aplicando a cada uno de los vectores de Stokes, cada uno de los

filtros, obtenemos los siguientes elementos de la matriz de Mueller:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{01} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{02} &= I_{+p} + I_{+s} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{03} &= I_{rp} + I_{rs} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{10} &= \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{11} &= \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} - I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{12} &= I_{+p} - I_{+s} - \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{13} &= I_{rp} - I_{rs} - \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{20} &= I_{p+} + I_{s+} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{21} &= I_{p+} - I_{s+} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{22} &= 2I_{++} - I_{+p} - I_{+s} - I_{p+} - I_{s+} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{23} &= 2I_{r+} - I_{rp} - I_{rs} - I_{p+} - I_{s+} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{30} &= I_{pr} + I_{sr} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{31} &= I_{pr} - I_{sr} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{32} &= 2I_{+r} - I_{+p} - I_{+s} - I_{pr} - I_{sr} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{33} &= 2I_{rr} - I_{rp} - I_{rs} - I_{pr} - I_{sr} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Si nosotros hubiéramos tomado los siguientes conjuntos de vectores de Stokes y de analizadores

$$\begin{aligned}
S^{inc} &= (1, 1, 0, 0)^t; (1, -1, 0, 0)^t; (1, 0, -1, 0)^t; (1, 0, 0, 1)^t, \\
[a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}] &= \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 \right], \left[\frac{1}{2} 00 \frac{1}{2} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
S^{inc} &= (1, 1, 0, 0)^t; (1, -1, 0, 0)^t; (1, 0, -1, 0)^t; (1, 0, 0, -1)^t, \quad (2.40) \\
[a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}] &= \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 \right], \left[\frac{1}{2} 00 - \frac{1}{2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{inc} &= (1, 1, 0, 0)^t; (1, -1, 0, 0)^t; (1, 0, 1, 0)^t; (1, 0, 0, -1)^t, \quad (2.41) \\
[a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}] &= \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 00 \right], \left[\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} 0 \right], \left[\frac{1}{2} 00 - \frac{1}{2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Seguindo el procedimiento utilizado para encontrar la ecuación (2.38), vemos que de la relación (2.39), los elementos de la matriz de Mueller son:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{01} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{02} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{-p} - I_{-s}, \\
m_{03} &= I_{rp} + I_{rs} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{10} &= \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{11} &= \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} - I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{12} &= \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}) - I_{-p} - I_{-s}, \\
m_{13} &= I_{rp} - I_{rs} - \frac{1}{2}(I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{20} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{p-} + I_{s-}, \\
m_{21} &= \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}) + I_{s-} - I_{p-}, \\
m_{22} &= 2I_{--} - I_{-p} - I_{-s} - I_{p-} - I_{s-} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{23} &= I_{rp} + I_{rs} + I_{p-} + I_{s-} - 2I_{r-} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{30} &= I_{pr} + I_{sr} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{31} &= I_{pr} - I_{sr} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{32} &= I_{-p} + I_{-s} + I_{pr} + I_{sr} - 2I_{-r} - \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{33} &= 2I_{rr} - I_{rp} - I_{rs} - I_{pr} - I_{sr} + \frac{1}{2}(I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

de la ecuación (2.40) los elementos son:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{01} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{02} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{-p} - I_{-s}, \\
m_{03} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{lp} - I_{ls}, \\
m_{10} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{11} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} - I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{12} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}) - I_{-p} - I_{-s}, \\
m_{13} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}) + I_{ls} - I_{lp}, \\
m_{20} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{p-} - I_{s-}, \\
m_{21} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}) + I_{s-} - I_{p-}, \\
m_{22} &= 2I_{--} - I_{-p} - I_{-s} - I_{p-} - I_{s-} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{23} &= 2I_{l-} - I_{lp} - I_{ls} - I_{p-} - I_{s-} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{30} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{pl} - I_{sl}, \\
m_{31} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}) + I_{sl} - I_{pl}, \\
m_{32} &= 2I_{-l} - I_{-p} - I_{-s} - I_{pl} - I_{sl} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{33} &= 2I_{ll} - I_{lp} - I_{ls} - I_{pl} - I_{sl} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

y finalmente, de la ecuación (2.41) obtenemos:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{01} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{02} &= I_{+p} + I_{+s} - \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{03} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{lp} - I_{ls}, \\
m_{10} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{11} &= \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} - I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{12} &= I_{+p} - I_{+s} - \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{13} &= I_{ls} - I_{lp} + \frac{1}{2} (I_{pp} - I_{ps} + I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{20} &= I_{p+} + I_{s+} - \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{21} &= I_{p+} - I_{s+} - \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{22} &= 2I_{++} - I_{+p} - I_{+s} - I_{p+} - I_{s+} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{23} &= I_{lp} + I_{ls} + I_{p+} + I_{s+} - 2I_{l+} - \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{30} &= \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}) - I_{pl} - I_{sl}, \\
m_{31} &= I_{sl} - I_{pl} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} - I_{sp} - I_{ss}), \\
m_{32} &= I_{+p} + I_{+s} + I_{pl} + I_{sl} - 2I_{+l} - \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}), \\
m_{33} &= 2I_{ll} - I_{lp} - I_{ls} - I_{pl} - I_{sl} + \frac{1}{2} (I_{pp} + I_{ps} + I_{sp} + I_{ss}).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Hasta ahora han sido irrelevantes las cuestiones relacionadas con la geometría de incidencia, la simetría del material e incluso su propia naturaleza. Consideremos el caso de superficies 1-D para la aplicación de nuestro método.

La matriz de Mueller de un sistema dado se simplifica si presenta simetría, como ocurre para una superficie 1-D, donde se ha demostrado que 6 distintas mediciones son suficientes para determinarla completamente [26], estando dada su forma por la

siguiente expresión

$$M(\theta_0, \theta_s, \varphi = 0) = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & 0 & 0 \\ m_{01} & m_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & -m_{23} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

En este análisis ya se ha tomado en cuenta que el vector de onda incidente es ortogonal a los generadores de la superficie 1-D. En geometrías de incidencia planas se mantiene la forma, independientemente de la naturaleza de la superficie 1-D. Como se mencionó previamente, se sabe que bastan 6 distintas mediciones de intensidad para determinar sus cuatro distintos elementos. Considerando $m_{00} = m_{11}$, $m_{01} = m_{10}$, $m_{22} = m_{33}$ y $m_{23} = -m_{32}$ y sustituyendo estos valores en las relaciones dadas por la ecuación (2.38), encontramos que este número se puede reducir a tan solo cuatro distintas mediciones para determinarla, a saber:

$$\begin{aligned} m_{00} &= I_{+p} + I_{+s}, \\ m_{01} &= I_{+p} - I_{+s}, \\ m_{22} &= 2I_{++} - I_{+p} - I_{+s}, \\ m_{23} &= I_{+p} + I_{+s} - 2I_{+r}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Similarmente para la ecuación (2.44), encontramos que los elementos de la matriz de Mueller para una superficie 1-D es:

$$\begin{aligned} m_{00} &= I_{+p} + I_{+s}, \\ m_{01} &= I_{+p} - I_{+s}, \\ m_{22} &= 2I_{++} - I_{+p} - I_{+s}, \\ m_{23} &= 2I_{+l} - I_{+p} - I_{+s}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

De manera similar, podemos encontrar los elementos de la matriz de Mueller, para los otros conjuntos de vectores de Stokes.

2.3.1 Método formal para encontrar la matriz de Mueller de un sistema en general.

A continuación damos el sustento matemático para la optimización del número de mediciones.

Consideremos como punto de partida a la expresión

$$S_k = \sum_{i=0}^3 a_{ki} \sum_{j=0}^3 m_{ij} s_j, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.48)$$

en donde s_j es la entrada, a_{ki} es el filtro, S_k es la salida y m_{ij} es la matriz de Mueller del sistema. La entrada y la salida pueden verse como vectores 4×1 (4 renglones y una columna) s y S , respectivamente, mientras que el filtro y la matriz de Mueller como matrices de 4×4 , A y M , respectivamente. El objetivo del presente desarrollo es ofrecer una forma de despejar la matriz de Mueller en términos del resto de cantidades. Asumimos que la entrada y el filtro tienen cierta libertad de ser elegidos, y que la salida medida (la cual evidentemente que no es arbitraria) está determinada por dicha entrada, filtro y matriz de Mueller. Esta última la asumimos única.

Reacomodando términos en la ecuación (2.48), llegamos a

$$S_k = \sum_{j=0}^3 \left[\sum_{i=0}^3 a_{ki} m_{ij} \right] s_j \quad (2.49)$$

La suma sobre el índice i que aparece entre los paréntesis cuadrados representa a los elementos de un producto de matrices. Esto es, definimos a la matrix B por medio de

$$B = AM, \quad (2.50)$$

que en términos de elementos matriciales se representa por

$$b_{kj} = \sum_{i=0}^3 a_{ki} m_{ij}. \quad (2.51)$$

Esta nueva matriz mezcla al filtro y a la matriz de Mueller. Con lo anterior tenemos que

$$S_k = \sum_{j=0}^3 b_{kj} s_j, \quad (2.52)$$

que puede representarse como

$$Bs = S, \quad (2.53)$$

ecuación que puede interpretarse asumiendo los vectores S y s conocidos y B la incógnita. Este problema no tiene una solución única para B , como puede entenderse con el simple ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La razón de esta falta de unicidad es que la ecuación (2.53) sólo contiene 4 ecuaciones, pero con 16 incógnitas (los 16 elementos de M). Una de las formas de tratar este problema es proponer 4 diferentes entradas independientes en el sistema, las cuales representan $4 \times 4 = 16$ mediciones. Dichas entradas pueden denotarse por $s^{(l)}$, $l = 0, 1, 2, 3$, las cuales tienen salidas correspondientes $S^{(l)}$. Las ecuaciones de

la forma $Bs^{(l)} = S^{(l)}$, contienen suficientes ecuaciones como para poder resolver las componentes de B . Dichas ecuaciones se obtienen a partir de la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^0 & s_1^0 & s_2^0 & s_3^0 \\ s_1^1 & s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \\ s_2^2 & s_2^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ s_3^3 & s_3^3 & s_3^3 & s_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^0 & S_0^1 & S_0^2 & S_0^3 \\ S_1^0 & S_1^1 & S_1^2 & S_1^3 \\ S_2^0 & S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 \\ S_3^0 & S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 \end{pmatrix}$$

y se puede esperar una solución única para B , con tal de que el determinante de la matriz formada por las entradas, con elementos s_j^l , sea distinto de cero. Matemáticamente, este es el sentido de hablar de entradas (mediciones) independientes. La expresión anterior se puede condensar en la forma

$$\sum_{j=0}^3 b_{ij} s_j^l = S_i^l. \quad (2.54)$$

Lo que sigue a continuación podría verse como algo inútil, sin embargo, nos sirve para aclarar algunos detalles de lo que podemos hacer en cuanto a la forma de elegir entradas independientes.

Para intentar despejar la matriz B de (2.53) (recuérdese que una sola entrada no puede determinar B), extendemos los vectores S y s , hasta formar matrices 4×4 , con la condición de que la matriz asociada al vector de entrada s , tenga inversa. La matriz extendida debe de ser lo suficientemente simple como para que sea útil, además, la relación matricial a encontrar, la cual involucrará sólo a matrices 4×4 , debe ser acorde con la ecuación (2.53). Definimos la matriz S_e , asociada al vector de entrada s , por

$$S_e = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual tiene un determinante igual al elemento s_0 . Así que en lo que sigue asumiremos que $s_0 \neq 0$ (consideración plenamente física al identificarla con una situación experimental donde empleamos un haz de luz ciertamente). Considerando que el producto entre las matrices B y S_e (BS_e) está dado por

$$\begin{aligned} BS_e &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_0 b_{00} + s_1 b_{01} + s_2 b_{02} + s_3 b_{03} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ s_0 b_{10} + s_1 b_{11} + s_2 b_{12} + s_3 b_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ s_0 b_{20} + s_1 b_{21} + s_2 b_{22} + s_3 b_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ s_0 b_{30} + s_1 b_{31} + s_2 b_{32} + s_3 b_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

resulta entonces que la matriz asociada al vector de salida S , denotada por S_s , debe definirse por

$$S_s = \begin{pmatrix} S_0 & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ S_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ S_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ S_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Con todo lo anterior, se tiene la ecuación matricial

$$S_s = BS_e, \quad (2.55)$$

la cual tiene una solución para la matriz B dada por

$$B = S_s S_e^{-1}, \quad (2.56)$$

donde la matriz S_e^{-1} denota a la matriz inversa de S_e , la cual existe porque el determinante de S_e no es nulo. Aplicando la regla de Cramer podemos encontrar los elementos de la matriz inversa S_e^{-1}

$$S_e^{-1} = \frac{1}{s_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & s_0 & 0 \\ -s_3 & 0 & 0 & s_0 \end{pmatrix}.$$

Realizando el producto $S_s S_e^{-1}$, podemos igualar sus elementos de matriz a los elementos de la matriz B , lo cual no da más información que la que contienen las 4 ecuaciones con 16 incógnitas

$$Bs = S, \quad (2.57)$$

que, por supuesto, no es otra cosa que la ecuación (2.53).

Aunque el desarrollo anterior no sirve para encontrar B para una sola entrada s , sí nos sirve para aclarar que podemos tomar una primera entrada $s^{(0)} = (s_0^0, s_1^0, s_2^0, s_3^0)^t$, con la condición de que s_0^0 sea distinta de cero. Si ahora construyéramos una segunda matriz S_e , cambiando de cierta manera la colocación de los 3 ceros que aparecen en forma consecutiva en la matriz S_e anteriormente construida, lo que tendríamos finalmente es la aparición otra vez de las ecuaciones (2.53), acompañada de la condición de que una segunda entrada $s^{(1)} = (s_0^1, s_1^1, s_2^1, s_3^1)^t$, deba de cumplir con que s_1^1 sea nulo, etc. Teóricamente, podemos proponer que las 4 entradas necesarias, $s^{(l)}$, correspondan a los 4 vectores de una base ortonormal del espacio cartesiano de 4 dimensiones:

$$\begin{aligned} s^{(0)} &= (1, 0, 0, 0)^t; & s^{(1)} &= (0, 1, 0, 0)^t; \\ s^{(2)} &= (0, 0, 1, 0)^t; & s^{(3)} &= (0, 0, 0, 1)^t. \end{aligned}$$

Esto es, los elementos de matriz de la matriz formada por las entradas independientes son $s_j^l = \delta_j^l$. Con ésto, la ecuación (2.54) resulta

$$\sum_{j=0}^3 b_{ij} s_j^l = \sum_{j=0}^3 b_{ij} \delta_j^l = b_{il} = S_i^l. \quad (2.58)$$

Del resultado anterior y de la ecuación (2.51) tenemos que

$$\sum_{j=0}^3 a_{ij}^t m_{jl} = S_i^l, \quad (2.59)$$

la cual representa un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas. La condición para que este sistema tenga una solución única para m_{jl} es que la matriz asociada al filtro, A , tenga un determinante no nulo. Esto nos dice que el arreglo experimental para los filtros debe corresponder a mediciones independientes cuyo significado matemático es el ya marcado. La ecuación (2.59) puede escribirse por la ecuación matricial $A^t M = S^{(l)}$ que invirtiéndola para despejar a M nos conduce a

$$M = (A^t)^{-1} S^{(l)}, \quad (2.60)$$

donde $(A^t)^{-1}$ denota a la inversa de la transpuesta de la matriz filtro A . Esta última ecuación, nos permite encontrar los elementos de la matriz de Mueller M . En términos de elementos matriciales, dicha ecuación puede representarse por

$$m_{il} = \sum_{j=0}^3 (a_{ij}^t)^{-1} S_j^l. \quad (2.61)$$

Pensando aún desde el punto de vista meramente teórico, si en particular es posible construir un filtro de manera que $a_{ij} = \delta_{ij}$, resulta entonces que

$$\sum_{j=0}^3 a_{ij}^t m_{jl} = \sum_{j=0}^3 \delta_{ij} m_{jl} = m_{il}, \quad (2.62)$$

que conjuntamente con la ecuación (2.59) nos lleva finalmente a

$$m_{il} = S_i^l. \quad (2.63)$$

Esta relación es sumamente sencilla, nos dice que los elementos de la matriz de Mueller se podrían medir directamente por medio de los 16 resultados experimentales (salidas), con tal que nosotros proporcionemos entradas y filtros que correspondan a vectores de bases ortonormales. Desde el punto de vista experimental, para intentar

realizar ésto, se deben de considerar las posibilidades realistas que se tienen de entradas s y filtros A . Después, habría que escoger entre ellas las necesarias para que realizando unas combinaciones lineales se puedan construir matrices unidad asociadas a $s^{(l)}$ y a a_{ij} . Por desgracia, no existen elementos físicos que cumplan con las características ideales de estos filtros. Esto es, cualquier elemento óptico empleado como analizador no tiene asociado una matriz unidad.

Podemos, sin embargo, acercarnos a una situación física óptima, basándonos en las características de elementos ópticos existentes. De las ecuaciones (2.50) y (2.54) podemos escribir

$$A^t M s^{(l)} = S^{(l)}, \quad (2.64)$$

que al despejar la matriz de Mueller nos da como resultado

$$M = (A^t)^{-1} S^{(l)} (s^{(l)})^{-1}, \quad (2.65)$$

la cual en términos de elementos de matriz puede escribirse como

$$m_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (a_{\mu i}^t)^{-1} S_i^j (s_j^\nu)^{-1}. \quad (2.66)$$

Esta última relación, sólo asume que las matrices formadas por las entradas y el filtro no son singulares, que corresponde a la independencia de las mediciones. No es necesario obtener arreglos experimentales que correspondan a bases ortonormales, en un sentido estricto. Dada esta situación real, encontramos que existen varias combinaciones de 4 entradas y 4 filtros que optimizan el proceso de mediciones para llevarlo a tan solo 16 distintas mediciones, como lo mencionamos anteriormente. Algunos de tales conjuntos son los que obtuvimos inicialmente por argumentos fenomenológicos.

En las figuras (2.9, 2.10, 2.11) mostramos los resultados obtenidos con las relaciones dadas en la ecuación (2.46) para la misma superficie 1-D empleada anteriormente a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 0^\circ, 10^\circ$ y 20° , aquí utilizamos polarización circular derecha.

También, presentamos los resultados experimentales en las figuras (2.12, 2.13, 2.14) obtenidos con las relaciones dadas en la ecuación (2.47) a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 0^\circ, 10^\circ$ y 20° , donde utilizamos polarización circular izquierda, para corroborar la propuesta que se presenta en esta Tesis.

2.4 Discusión de resultados.

Comparando los resultados obtenidos en las figuras (2.6, 2.9, 2.12) a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 0^\circ$, con los de las figuras (2.7, 2.10, 2.13) a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 10^\circ$, y los de las figuras (2.8, 2.11, 2.14) a un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 20^\circ$, vemos que las gráficas correspondientes son prácticamente iguales, creemos que

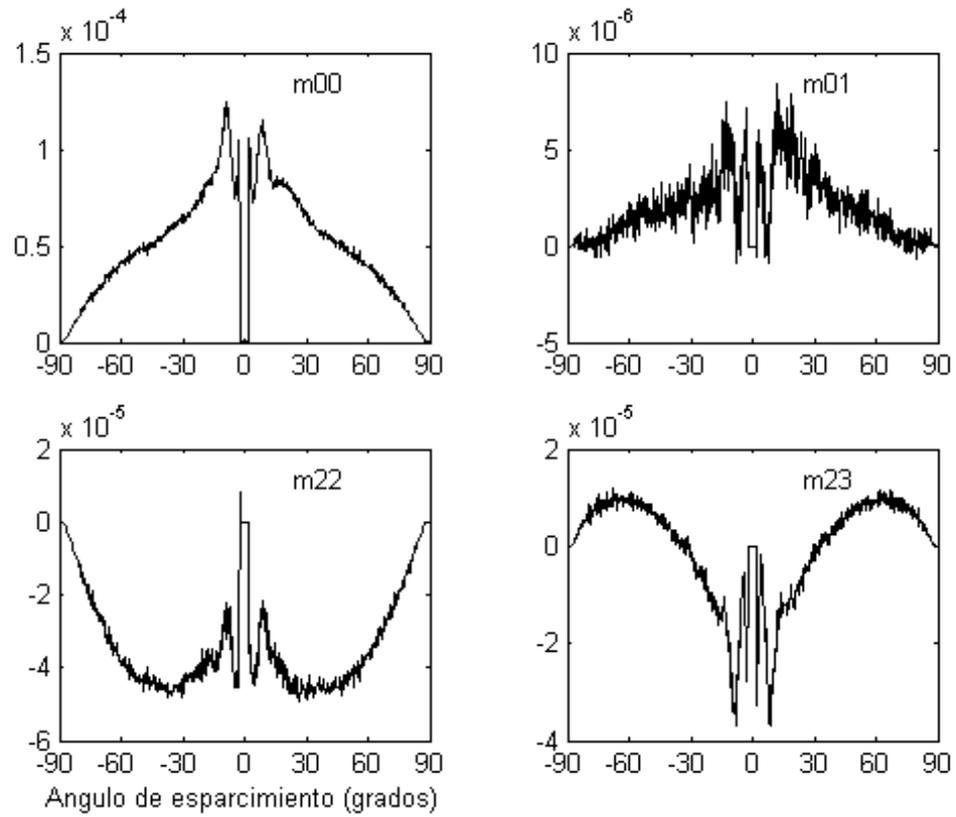


FIGURA 2.9. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

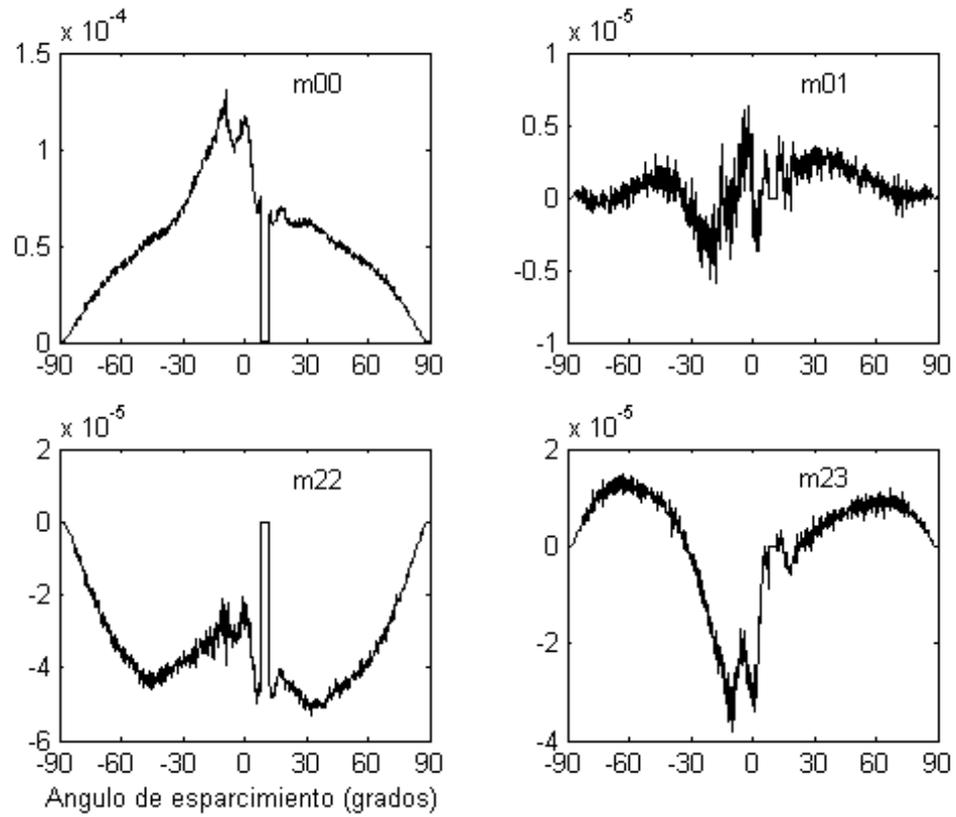


FIGURA 2.10. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

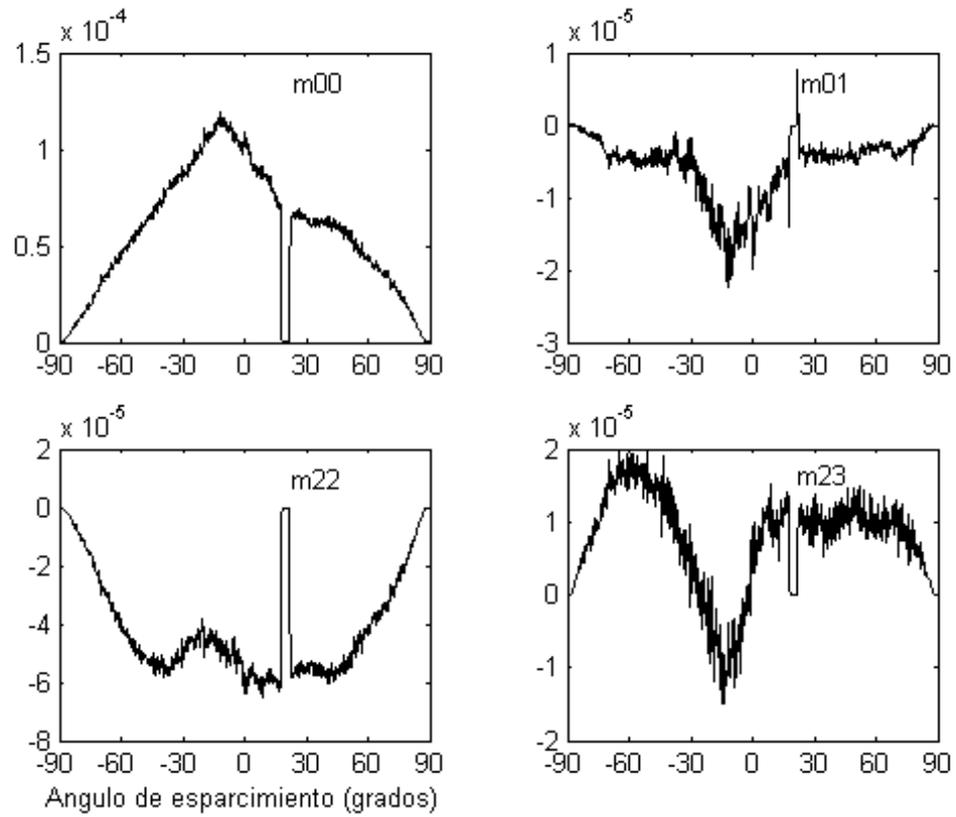


FIGURA 2.11. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular derecha, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

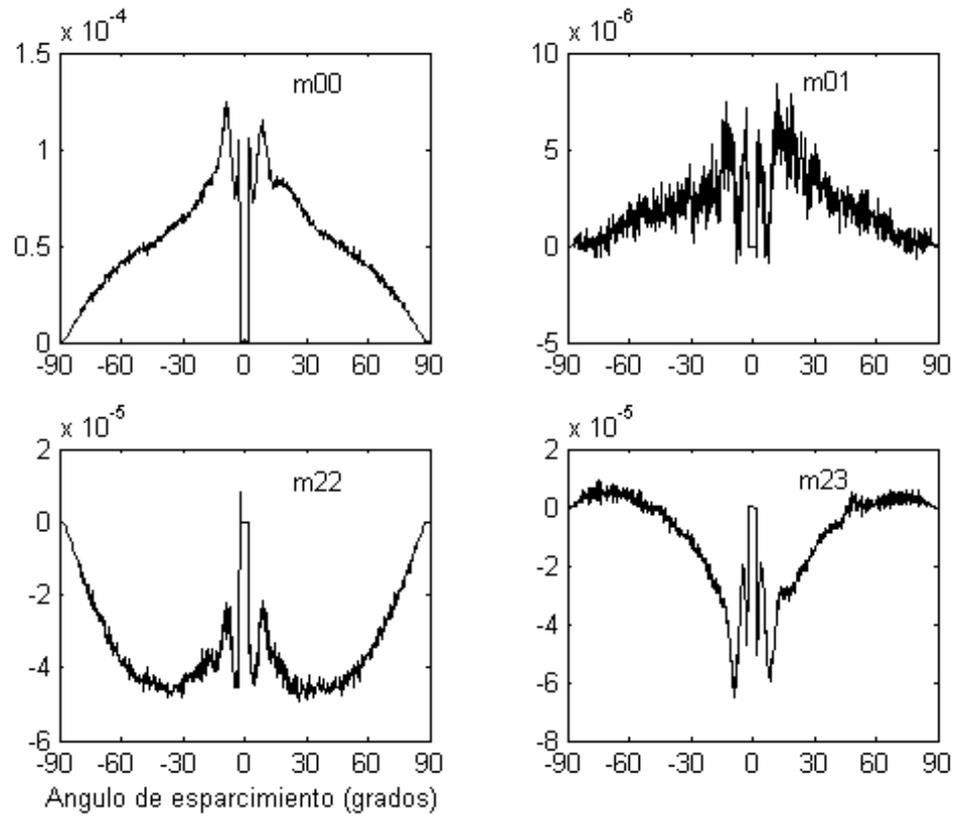


FIGURA 2.12. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

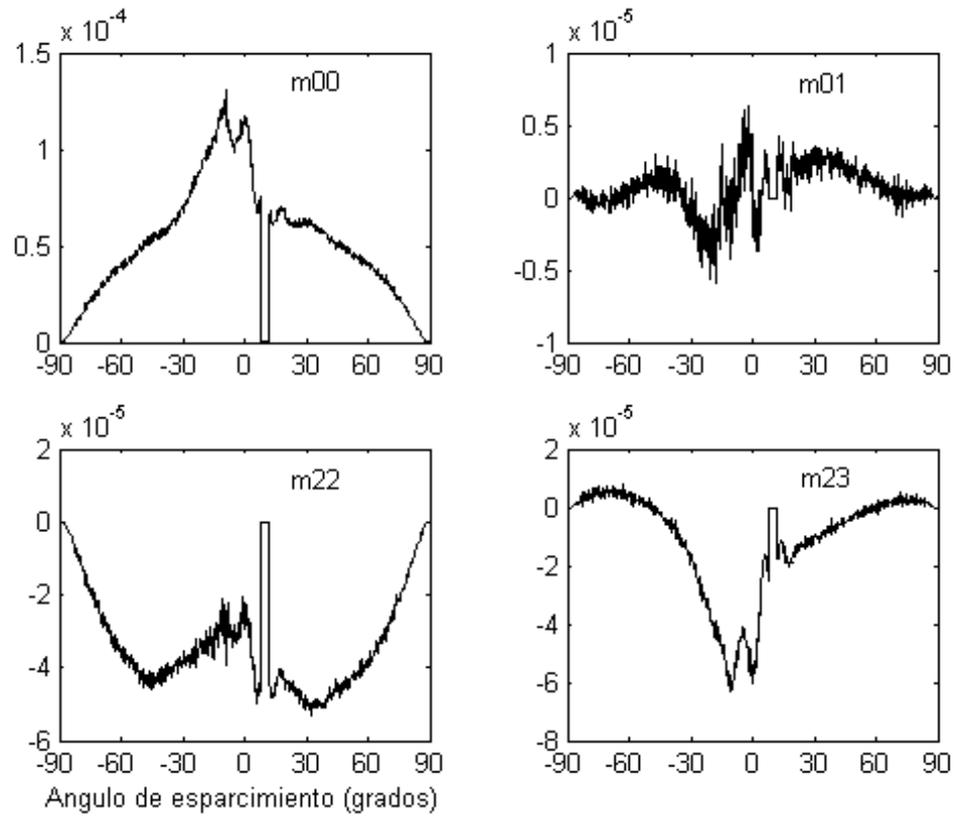


FIGURA 2.13. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

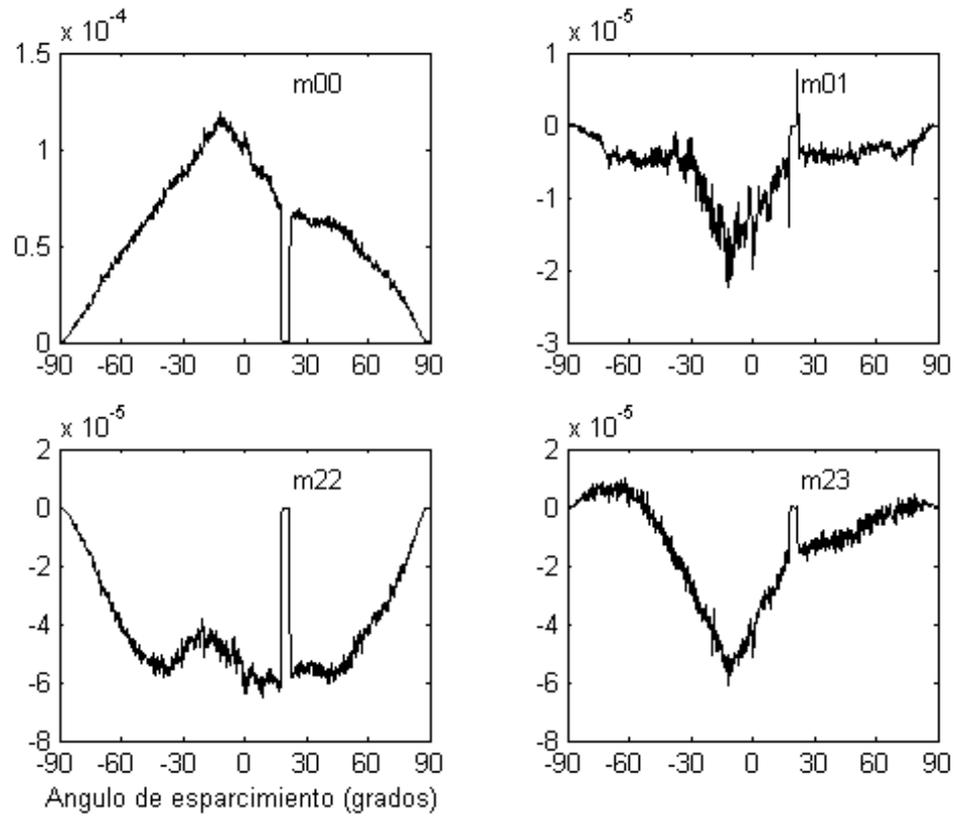


FIGURA 2.14. Resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller obtenidos por nuestra propuesta, utilizando polarización circular izquierda, con un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

las pequeñas diferencias se deben a los errores y ruidos experimentales, ya que las mediciones utilizadas para determinar los vectores de Stokes son difíciles de realizar, y pueden ocurrir varios errores. Estos errores pueden surgir de pequeños grados de elipticidad del estado de polarización incidente, errores de retardación de fase de las mismas placas retardadoras, y desajustes de las posiciones angulares de las placas retardadoras, así como la posible pérdida de posición angular del brazo del detector, por errores de pérdida de pasos en el motor. Entonces, podemos hablar de que la matriz de Mueller la podemos obtener con sólo cuatro distintas mediciones, para una superficie 1-D.

Los elementos s_{00} y m_{00} , s_{01} y m_{01} son determinadas por las mismas mediciones como puede verse de las relaciones (2.26 y 2.47) para cualquier ángulo de incidencia dado. Todos los elementos presentes en las figuras (2.6, 2.9, 2.12; 2.7, 2.10, 2.13; 2.8, 2.11, 2.14) exhiben una obstrucción alrededor del ángulo $\theta_s = 0^\circ$, 10° y 20° para ángulos de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, 10° y 20° respectivamente, la cual es debida al espejo que desvía el haz hacia la muestra en estudio.

Capítulo 3

ESPARCIMIENTO POR SUPERFICIES UNIDIMENSIONALES FUERA DEL PLANO DE INCIDENCIA.

En este capítulo estudiaremos el esparcimiento de luz en una geometría donde el vector de onda incidente \mathbf{k}_i ahora tiene una componente a lo largo de los generadores de la superficie (eje y en la fig. 3.1), esto es, en una geometría de incidencia cónica u oblicua.

La interacción de la luz con estructuras unidimensionales en configuraciones cónicas ha sido estudiada para el caso de rejillas periódicas [33] y también para estructuras aleatorias [14, 15]. Hasta donde sabemos, los tres únicos trabajos experimentales que existen con superficies rugosas aleatorias son los reportados por R. E. Luna y E. R. Méndez [16], R. E. Luna [17] y Rafael Espinosa-Luna [34], pero en ninguno se ha reportado la matriz de Mueller completa, en este trabajo reportamos la matriz de Mueller completa para un ángulo cónico de 15° y a distintos ángulos de incidencia (0° , 10° y 20°).

3.1 Vectores de Stokes y matrices de Mueller de superficies unidimensionales rugosas fuera del plano.

Aquí básicamente aplicamos el mismo procedimiento que en el capítulo anterior, con la diferencia fundamental de que nuestros estados de polarización son definidos con respecto al sistema de referencia experimental utilizado por R. E. Luna [17]. En esta geometría, la proyección del vector de onda incidente sobre el plano $x-z$ forma un ángulo θ_0 (el ángulo de incidencia) con el eje z y el ángulo cónico incidente, denotado por φ , es el ángulo que el vector de onda incidente forma con su proyección sobre el plano $x-z$. De esta forma, podemos definir el estado de polarización incidente (detectado), usando como referencia el plano definido por el vector de onda incidente (esparcido) y los generadores de la superficie (ver figura 3.1), a este plano lo llamaremos el plano de referencia de aquí en adelante. Los estados de polarización $\hat{\sigma}$ ($\hat{\pi}$) se definen como los estados de polarización lineal, en los cuales, el vector de campo eléctrico asociado con estas ondas se encuentran en el plano de referencia (perpendicular al plano de referencia). Cuando el ángulo cónico se hace cero ($\varphi = 0^\circ$), el estado de polarización $\hat{\sigma}$ ($\hat{\pi}$) se reduce al ya conocido estado de polarización lineal s (p). Continuando con esta notación, definimos un conjunto adicional de estados de polarización. Definimos el estado de polarización lineal $\hat{\chi}_+$ ($\hat{\chi}_-$), en los cuales el vector de campo eléctrico forma un ángulo de $+45^\circ$ (-45°) en el plano definido por los vectores $\hat{\sigma}$ y $\hat{\pi}$. Cuando

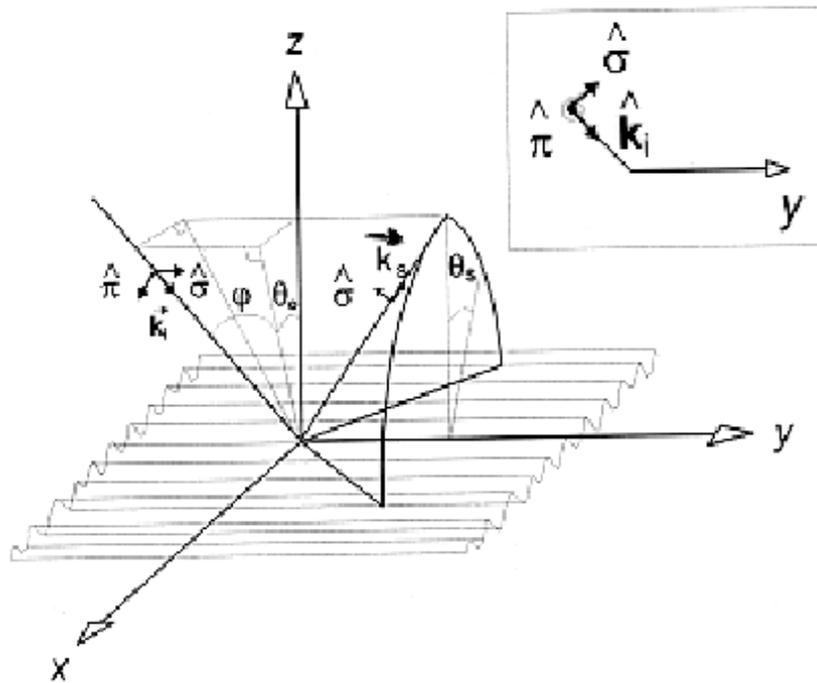


FIGURA 3.1. Diagrama esquemático de la geometría de esparcimiento. En el recuadro se muestran dos vectores unitarios, $\hat{\pi}$ y $\hat{\sigma}$, que son los que definen la polarización con respecto al plano definido por \hat{k}_i y el eje y .

el ángulo cónico se hace cero ($\varphi = 0^\circ$), el estado de polarización $\hat{\chi}_+$ ($\hat{\chi}_-$) se reduce al ya conocido estado de polarización lineal $+45^\circ$ (-45°). Finalmente, el estado de polarización $\hat{\rho}$ ($\hat{\lambda}$) es el definido como el estado de polarización circular definido por la superposición de los estados $\hat{\sigma}$ y $\hat{\pi}$, con la misma amplitud del campo eléctrico y desfasados por -90° ($+90^\circ$). Cuando el ángulo cónico se hace cero ($\varphi = 0^\circ$), el estado de polarización $\hat{\rho}$ ($\hat{\lambda}$) se reduce al ya conocido estado de polarización circular r (l).

Una vez definidos los estados de polarización para una geometría cónica, procedemos a encontrar la matriz de Mueller para esta configuración, anteriormente se ha reportado un procedimiento en el cual se requiere de 36 distintas mediciones [34], aquí nosotros lo obtenemos con solo 16 distintas mediciones.

Consideremos un haz polarizado que incide sobre una superficie rugosa, este haz es caracterizado por el vector de Stokes S^{inc} ,

$$S^{inc} = \begin{bmatrix} s_0^{inc} \\ s_1^{inc} \\ s_2^{inc} \\ s_3^{inc} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Debido a la respuesta lineal de la superficie, representada por la matriz de Mueller cónica M_c , obtenemos una relación similar para el vector de Stokes esparcido, la relación entre este observable físico esta dado por

$$S^{sc} = M_c S^{inc}, \quad (3.2)$$

donde $M_c = M_c(\theta_0, \theta_s; \varphi \neq 0)$ denota la matriz de Mueller cónica 4×4

$$M_c(\theta_0, \theta_s; \varphi \neq 0) = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para un sistema de esparcimiento arbitrario y para un vector de Stokes arbitrario, tenemos un vector de Stokes esparcido expresado con los siguientes parámetros como

$$\begin{aligned} s_0^{sc} &= m_{00}s_0^{inc} + m_{01}s_1^{inc} + m_{02}s_2^{inc} + m_{03}s_3^{inc}, \\ s_1^{sc} &= m_{10}s_0^{inc} + m_{11}s_1^{inc} + m_{12}s_2^{inc} + m_{13}s_3^{inc}, \\ s_2^{sc} &= m_{20}s_0^{inc} + m_{21}s_1^{inc} + m_{22}s_2^{inc} + m_{23}s_3^{inc}, \\ s_3^{sc} &= m_{30}s_0^{inc} + m_{31}s_1^{inc} + m_{32}s_2^{inc} + m_{33}s_3^{inc}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vamos a considerar 16 combinaciones posibles de distintas mediciones de intensidad, generadas por los siguientes estados de polarización $\hat{\pi}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\chi}_+$ y $\hat{\rho}$, tanto para estados de polarización incidente como para los estados de polarización detectados. Es importante tomar en cuenta que nuestros elementos de polarización son descritos con respecto al sistema de referencia de laboratorio.

La relación general de los elementos de la matriz de Mueller son como sigue:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{01} &= \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} - I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{02} &= I_{\chi_+\pi} + I_{\chi_+\sigma} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{03} &= I_{\rho\pi} + I_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{10} &= \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} - I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{11} &= \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} - I_{\pi\sigma} - I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{12} &= I_{\chi_+\pi} - I_{\chi_+\sigma} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} - I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{13} &= I_{\rho\pi} - I_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} - I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{20} &= I_{\pi\chi_+} + I_{\sigma\chi_+} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{21} &= I_{\pi\chi_+} - I_{\sigma\chi_+} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} - I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{22} &= 2I_{\chi_+\chi_+} - I_{\chi_+\pi} - I_{\chi_+\sigma} - I_{\pi\chi_+} - I_{\sigma\chi_+} + \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{23} &= 2I_{\rho\chi_+} - I_{\rho\pi} - I_{\rho\sigma} - I_{\pi\chi_+} - I_{\sigma\chi_+} + \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{30} &= I_{\pi\rho} + I_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{31} &= I_{\pi\rho} - I_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} - I_{\sigma\pi} - I_{\sigma\sigma}) \\
m_{32} &= 2I_{\chi_+\rho} - I_{\chi_+\pi} - I_{\chi_+\sigma} - I_{\pi\rho} - I_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma}) \\
m_{33} &= 2I_{\rho\rho} - I_{\rho\pi} - I_{\rho\sigma} - I_{\pi\rho} - I_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}(I_{\pi\pi} + I_{\pi\sigma} + I_{\sigma\pi} + I_{\sigma\sigma})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde utilizamos la siguiente notación para $I_{\alpha\beta}$: α representa el estado de polarización incidente y β el estado de polarización detectada. Nosotros utilizamos la notación $m_{ij}(\theta_s)$ para denotar los elementos de la matriz de Mueller cónica.

Cuando la superficie de esparcimiento es 1-D y $\varphi = 0^\circ$, las relaciones anteriores se reducen a las correspondientes elementos de la matriz de Mueller en el plano (ec. 2.26).

Tomando en cuenta que los estados de polarización definidos para una geometría cónica se reducen a los estados de polarización de la configuración en el plano, y aplicando la siguiente relación

$$S^{sc} = M(\theta_0, \theta_s)S^{inc}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_{pp} &= s_{00} + s_{01} \\
I_{ps} &= 0 \\
I_{p+} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{01}) \\
I_{pr} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{01}) \\
I_{sp} &= 0 \\
I_{ss} &= s_{00} - s_{01} \\
I_{s+} &= \frac{1}{2}(s_{00} - s_{01}) \\
I_{sr} &= \frac{1}{2}(s_{00} - s_{01}) \\
I_{+p} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{01}) \\
I_{+s} &= \frac{1}{2}(s_{00} - s_{01}) \\
I_{++} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{22}) \\
I_{+r} &= \frac{1}{2}(s_{00} - s_{23}) \\
I_{rp} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{01}) \\
I_{rs} &= \frac{1}{2}(s_{00} - s_{01}) \\
I_{r+} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{03}) \\
I_{rr} &= \frac{1}{2}(s_{00} + s_{22})
\end{aligned}$$

Donde, realizando un poco de álgebra obtenemos los elementos de la matriz de Mueller para una configuración en el plano de incidencia, estos elementos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= s_{00} \\
m_{01} &= s_{01} \\
m_{02} &= 0 \\
m_{03} &= 0 \\
m_{10} &= s_{10} \\
m_{11} &= s_{00} \\
m_{12} &= 0 \\
m_{13} &= 0 \\
m_{20} &= 0 \\
m_{21} &= 0 \\
m_{22} &= s_{22} \\
m_{23} &= s_{23} \\
m_{30} &= 0 \\
m_{31} &= 0 \\
m_{32} &= -s_{23} \\
m_{33} &= s_{22}
\end{aligned}$$

Con esto, vemos que la matriz de Mueller para $\varphi \neq 0^\circ$ se reduce a la matriz de Mueller en el plano haciendo $\varphi = 0^\circ$, con lo cual, podemos tener mayor fiabilidad de nuestro método.

El arreglo experimental utilizado para realizar nuestras mediciones, salvo algunas variantes, es el mismo esparcímetero que se describió en el capítulo anterior. En la



FIGURA 3.2. Fotografía del esparcmetro tipo ARS (Angle Resolved Scattering) utilizado para hacer las mediciones.

figura 3.2 se muestra la fotografía del arreglo experimental cónico. Empleamos una serie de espejos, lentes y elementos polarizadores para producir un haz significativamente convergente hacia la muestra, formando un ángulo cónico φ con respecto a la horizontal. La luz esparcida se distribuye sobre la superficie de un cono cuyo eje se localiza a lo largo de los generadores de la superficie y su vértice se ubica en el punto de incidencia, formando un ángulo φ con respecto a los generadores de la superficie, por lo que el sistema de detección se coloca formando un ángulo φ con respecto a la horizontal, este es montado sobre un brazo de 45 cm de largo y enfocado hacia la muestra. Con este arreglo, se ilumina aproximadamente 20 mm^2 de área. La muestra es montada sobre una mesa rotatoria, así que el ángulo de incidencia θ_0 puede ser fácilmente determinado y modificado girando la muestra alrededor del eje y (ver figura 3.1). El sistema de detección integra la intensidad esparcida sobre un ángulo de aproximadamente 2° para reducir el ruido del moteado (speckle). El brazo es rotado bajo el control de una computadora, y los datos de intensidad son tomados como una función del ángulo de esparcimiento θ_s .

En las figuras (3.3, 3.4, 3.5, 3.6), mostramos los resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller, para esparcimiento cónico, donde la superficie esparcidora es la misma que utilizamos para hacer las mediciones de esparcimiento en el plano anteriormente, es decir,. Las mediciones que reportamos en esta tesis se hicieron para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$, y un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$.

En las figuras (3.7, 3.8, 3.9, 3.10), mostramos los resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller, para esparcimiento cónico, donde la superficie esparcidora es la misma que utilizamos para hacer las mediciones de esparcimiento

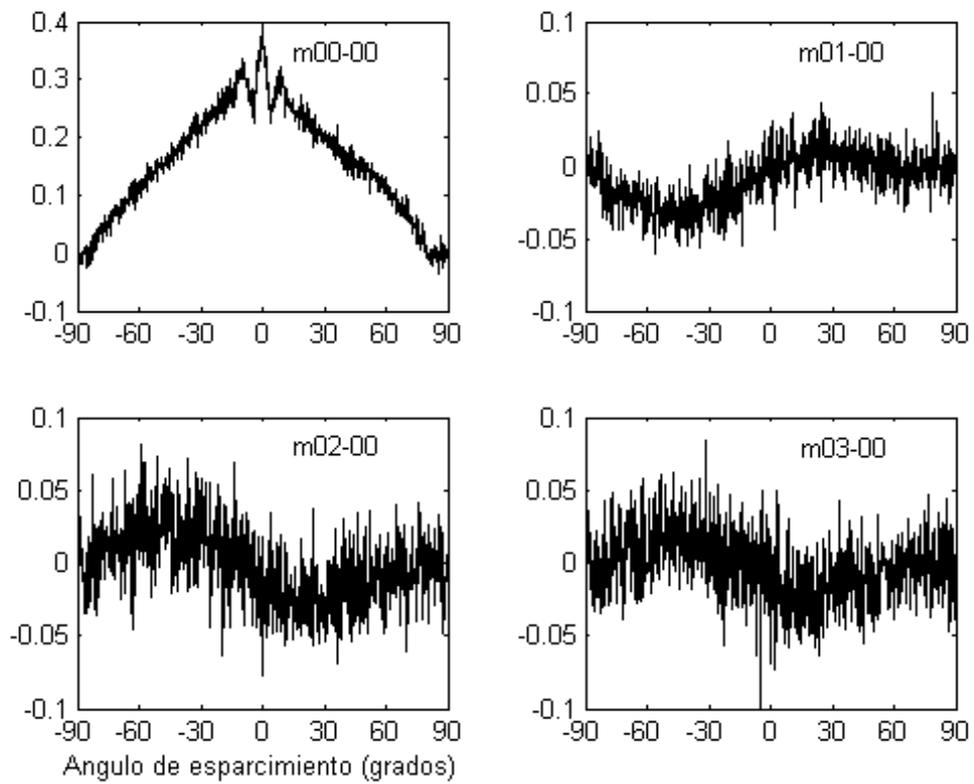


FIGURA 3.3. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{00} , m_{01} , m_{02} , m_{03}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

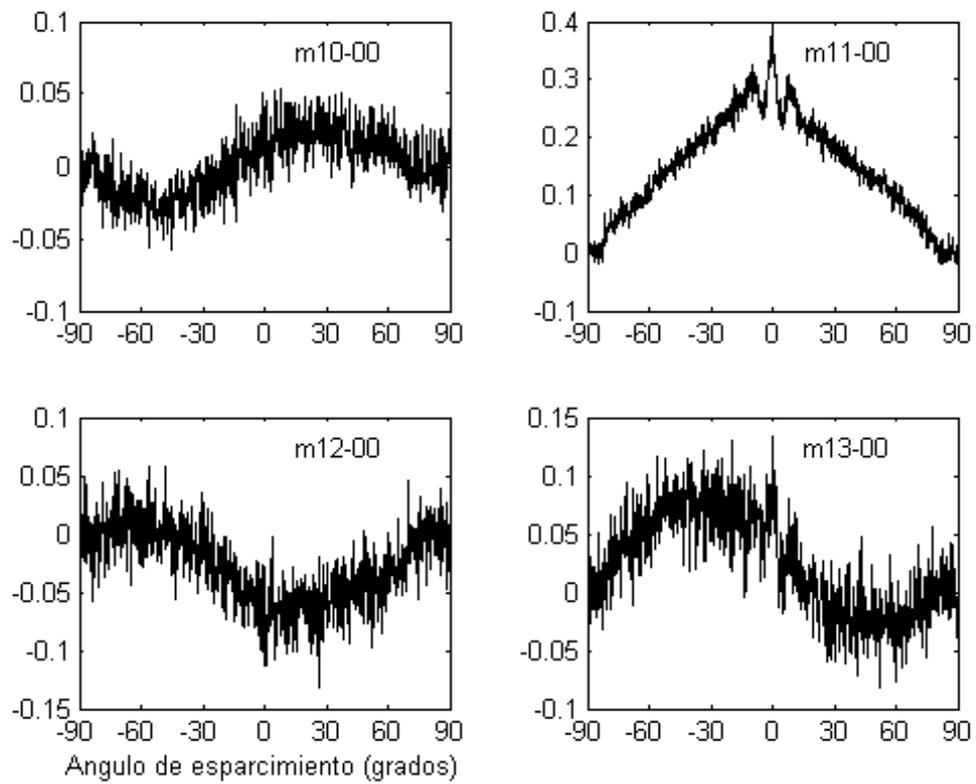


FIGURA 3.4. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{10} , m_{11} , m_{12} , m_{13}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

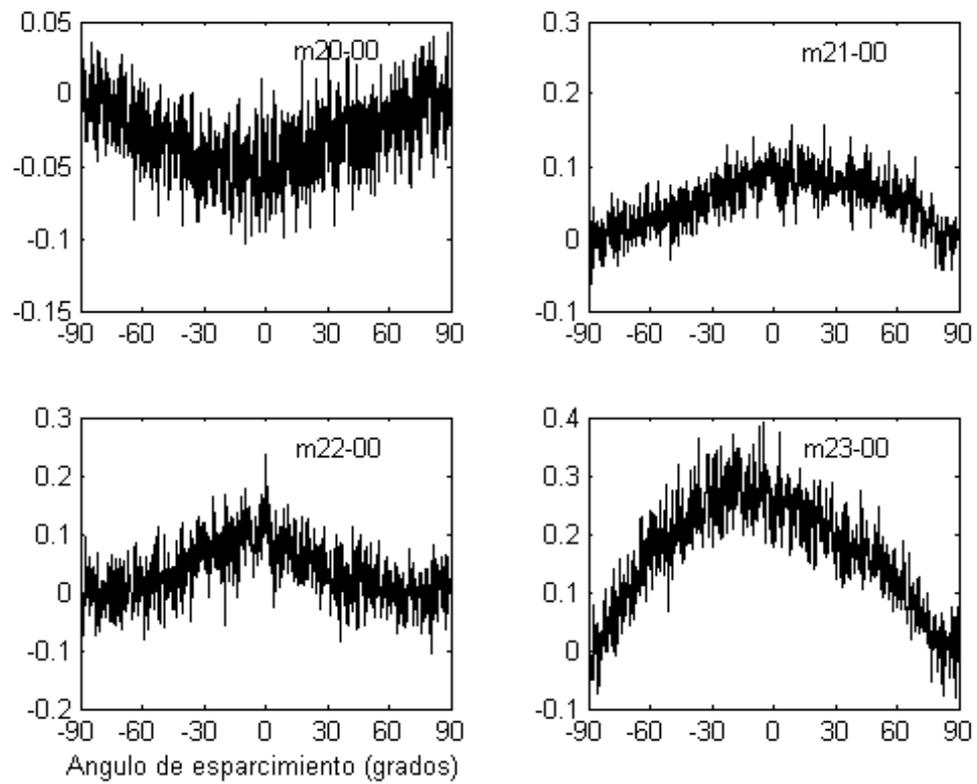


FIGURA 3.5. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{20} , m_{21} , m_{22} , m_{23}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

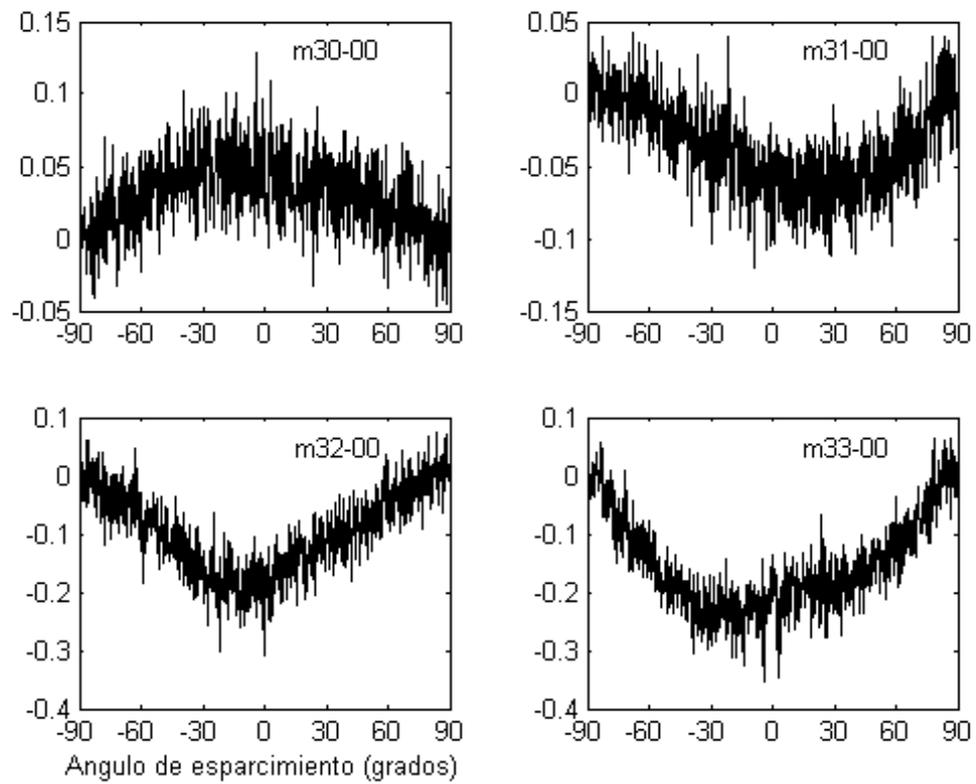


FIGURA 3.6. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{30} , m_{31} , m_{32} , m_{33}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 0^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

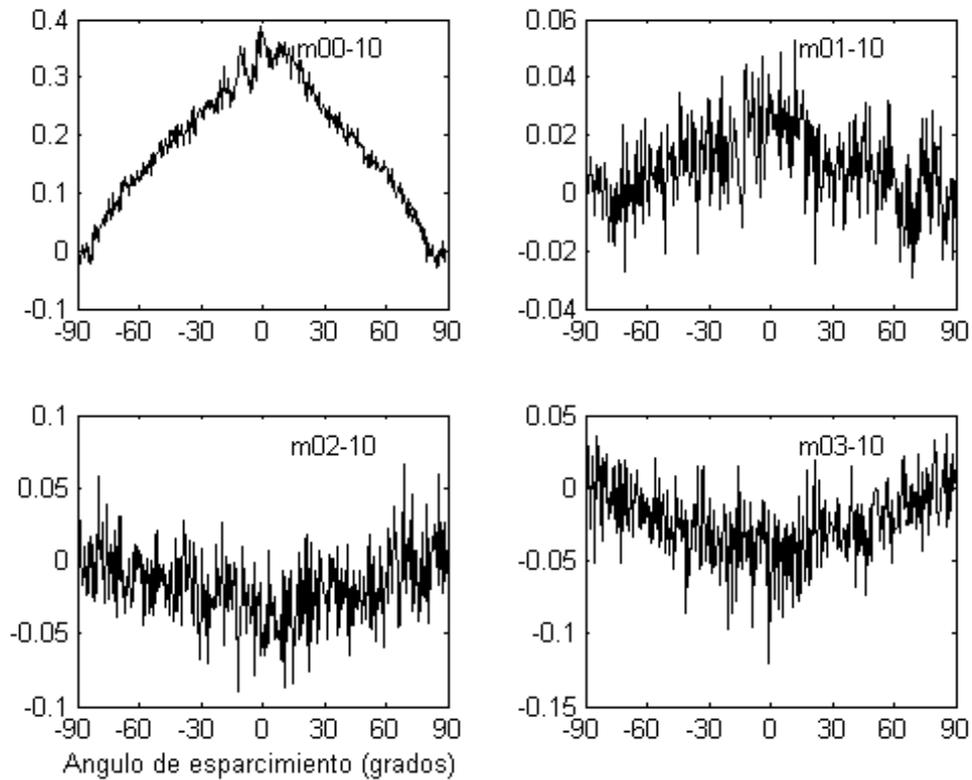


FIGURA 3.7. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{00} , m_{01} , m_{02} , m_{03}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

en el plano, anteriormente. Las mediciones que reportamos en esta tesis se hicieron para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$, y un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$.

En las figuras (3.11, 3.12, 3.13, 3.14), mostramos los resultados experimentales de los elementos de la matriz de Mueller, para esparcimiento cónico, donde la superficie esparcidora es la misma que utilizamos para hacer las mediciones de esparcimiento en el plano, anteriormente. Las mediciones que reportamos en esta tesis se hicieron para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$, y un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$.

3.2 Discusión de resultados.

Encontramos los elementos completos de la matriz de Mueller para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$. en una geometría de incidencia cónica, para un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 0^\circ$, y un ángulo cónico de 15°

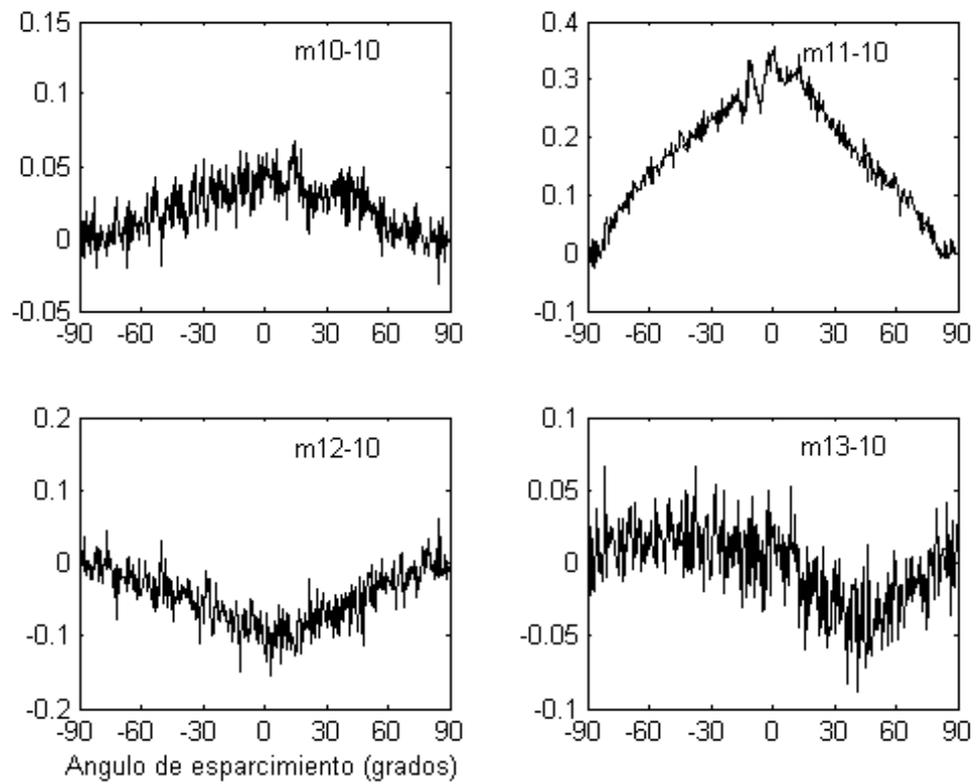


FIGURA 3.8. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{10} , m_{11} , m_{12} , m_{13}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

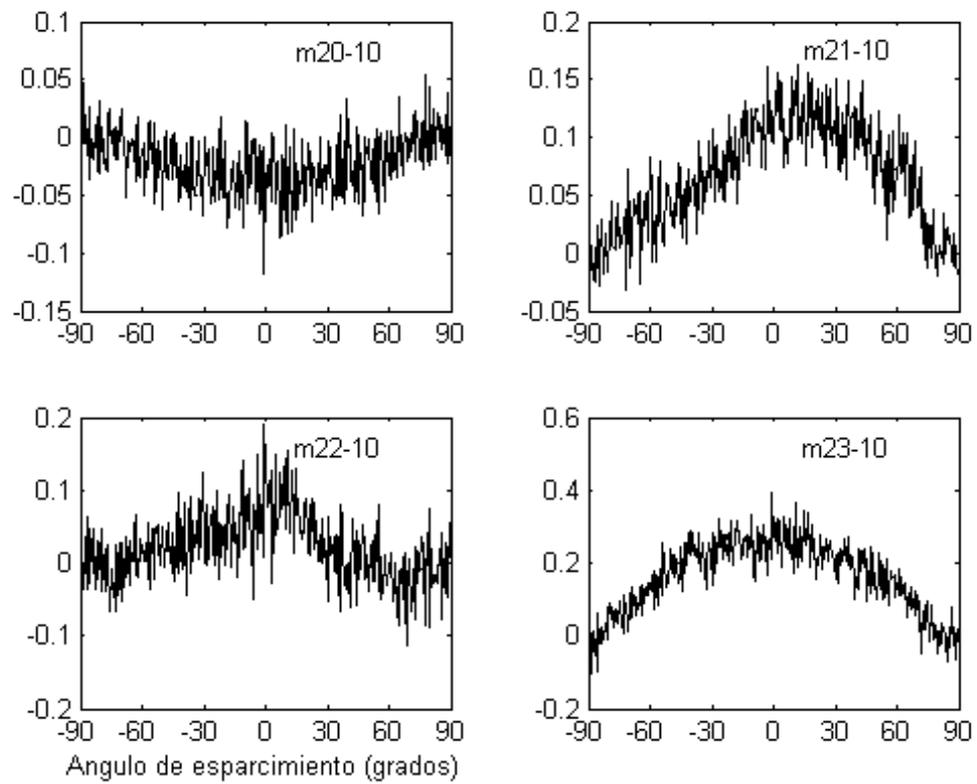


FIGURA 3.9. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{20} , m_{21} , m_{22} , m_{23}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

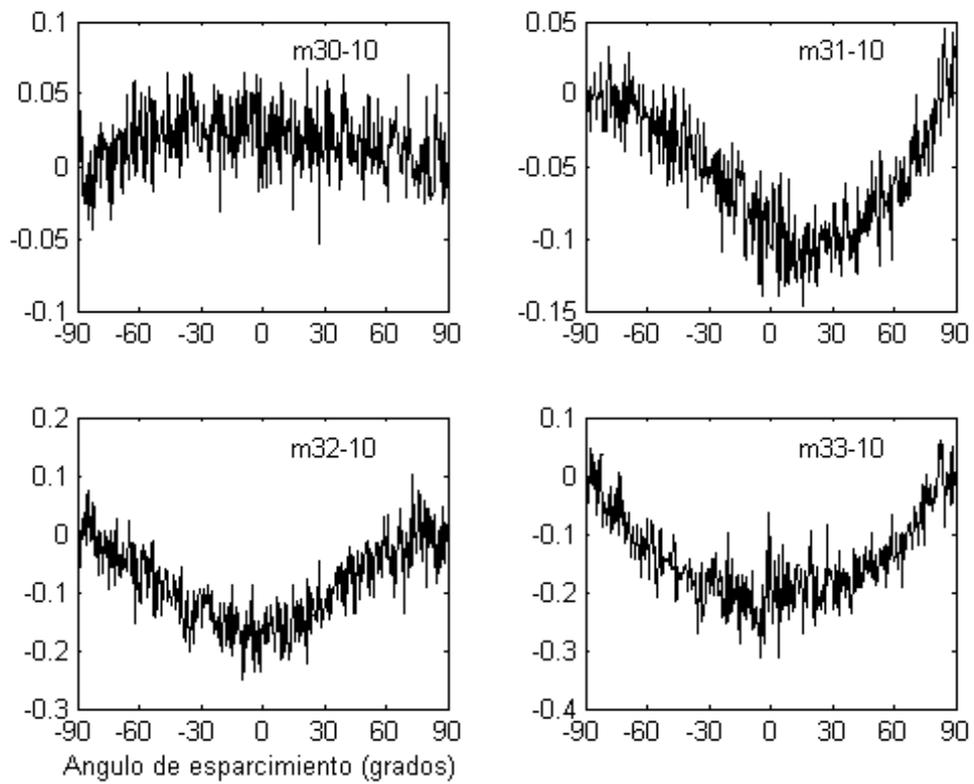


FIGURA 3.10. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{30} , m_{31} , m_{32} , m_{33}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 10^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

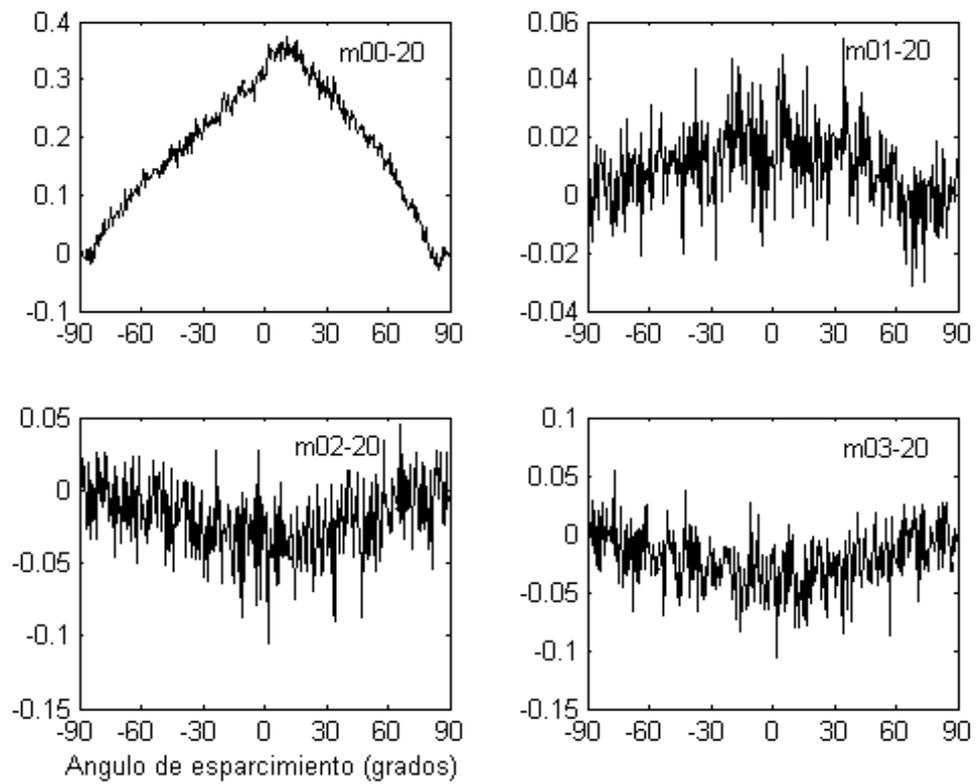


FIGURA 3.11. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{00} , m_{01} , m_{02} , m_{03}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

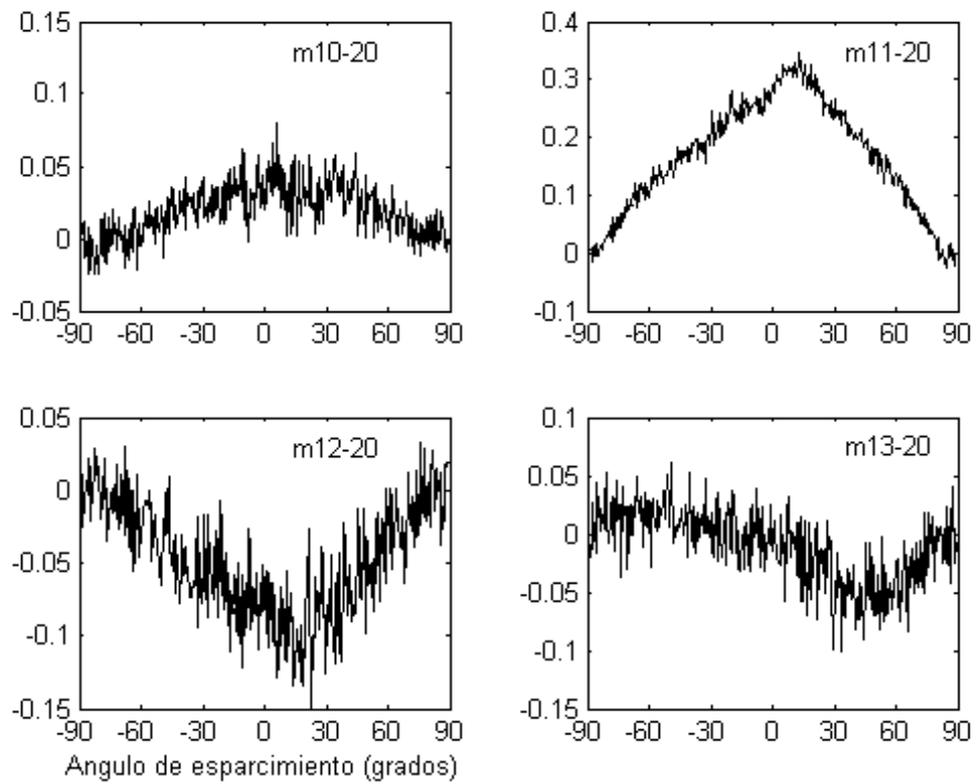


FIGURA 3.12. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{10} , m_{11} , m_{12} , m_{13}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

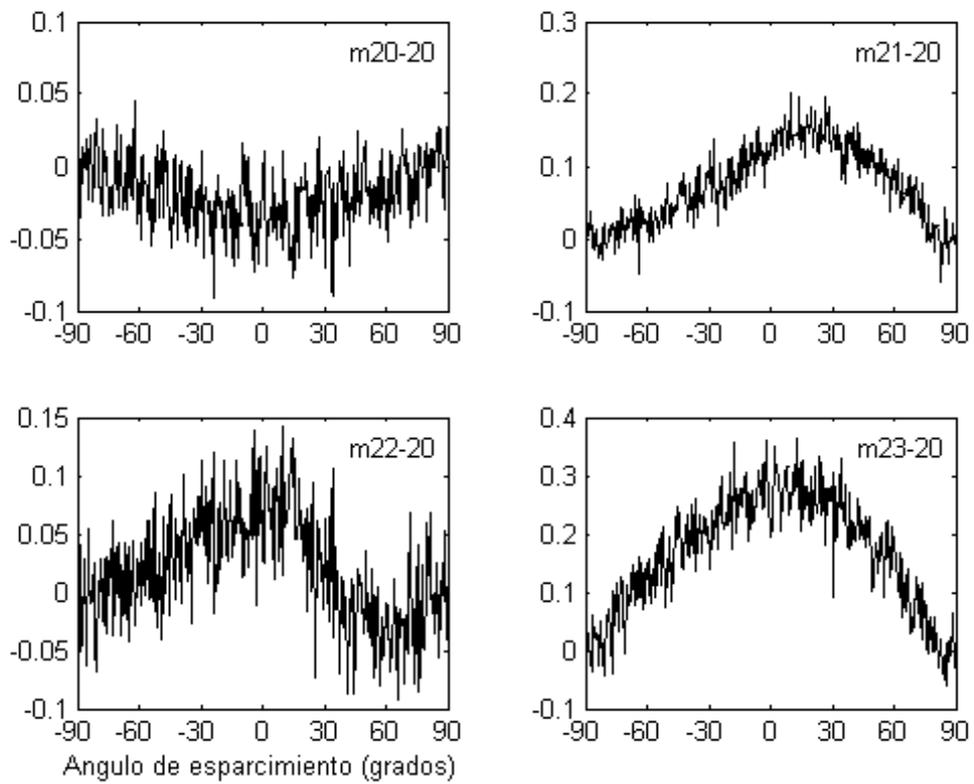


FIGURA 3.13. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{20} , m_{21} , m_{22} , m_{23}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

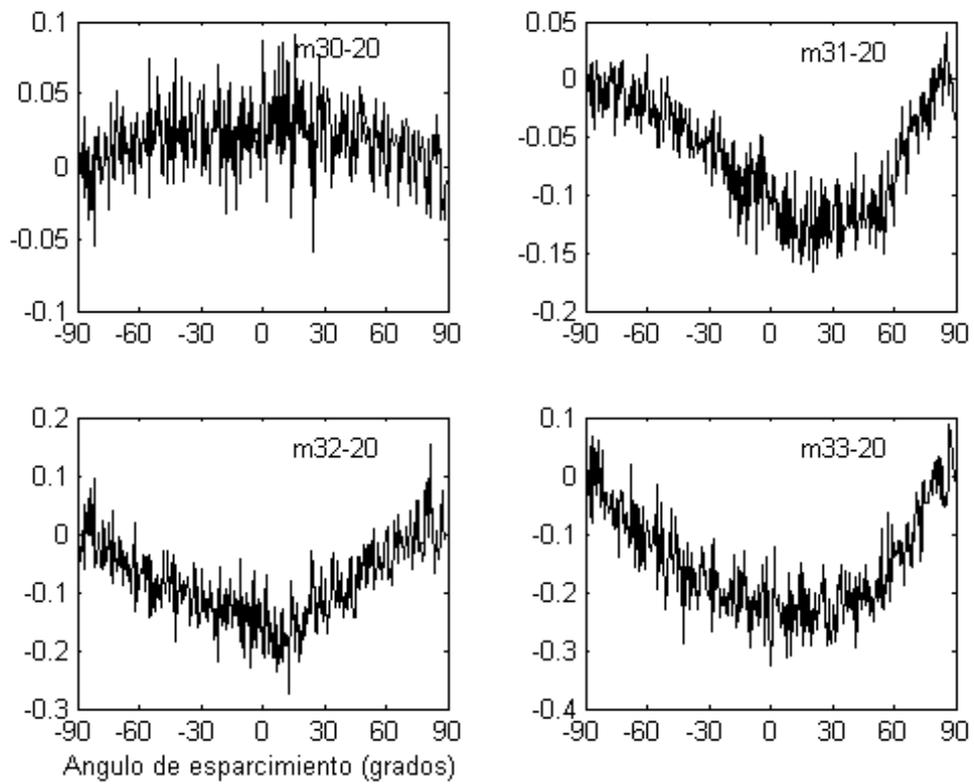


FIGURA 3.14. Elementos de la matriz de Mueller cónica de una superficie 1-D (m_{30} , m_{31} , m_{32} , m_{33}), a un ángulo cónico $\varphi = 15^\circ$ y un ángulo de incidencia $\theta_0 = 20^\circ$ para una superficie rugosa con parámetros estadísticos $\delta = 1.5\mu m$ y $a = 3.2\mu m$.

(ver figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6), Observamos que el elemento m_{00} es igual al elemento m_{11} , el m_{23} es igual a $-m_{32}$, estos últimos resultados concuerdan con los predichos por Novikov. Los elementos m_{22} y m_{33} son diferentes y no concuerdan con lo predicho por Novikov. En la parte central de la curva observamos un pico que tiene la forma de retroreflexión reforzada en los elementos m_{00} y m_{11} , en el resto de los elementos no se observa este pico debido a que los elementos de Mueller son la suma y resta de distintas intensidades.

Para un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 10^\circ$, y un ángulo cónico de 15° (ver figuras 3.7, 3.8, 3.9, 3.10), Observamos los mismos resultados que para el ángulo de incidencia de 0° , pero con el pico de retroreflexión desplazado en el eje de ángulo de esparcimiento por -10° y el pico disminuye en tamaño en comparación con los elementos de la matriz de Mueller a un ángulo de incidencia de 0° .

Para un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 20^\circ$, y un ángulo cónico de 15° (ver figuras 3.11, 3.12, 3.13, 3.14), Observamos los mismos resultados que para el ángulo de incidencia de 0° , pero con el pico de retroreflexión desplazado en el eje de ángulo de esparcimiento por -20° , aunque prácticamente desaparece.

Capítulo 4

CÁLCULO NUMÉRICO PARA LA OBTENCIÓN DE MODOS.

El esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias ha sido tema de mucho estudio por muchos años [2, 3, 17, 36, 18], en parte motivado por la observación del retroesparcimiento reforzado y muchos otros efectos de esparcimiento, como son el esparcimiento por reacciones nucleares, producción de polarización, esparcimiento fotón-fotón, esparcimiento por dipolos inducidos, esparcimiento raman entre otros. Las técnicas numéricas rigurosas para el tratamiento de problemas de esparcimiento de luz con una superficie unidimensional rugosa han sido desarrolladas [38, 39, 40, 41, 42, 43]. Un problema de gran importancia que involucra regiones cerradas, es la propagación o excitación de ondas electromagnéticas en una guía de onda hueca de sección transversal uniforme. Entonces, si nosotros tomamos una superficie unidimensional y la unimos por sus extremos ($x = 0$ y $x = L$), estaremos generando una superficie cerrada, donde la sección transversal permanecerá constante a lo largo del eje de simetría, dándonos una geometría cilíndrica. Tomando en cuenta estos hechos podemos modificar una técnica numérica rigurosa de esparcimiento de luz existente, basada en el teorema integral de Green, válida para superficies reentrantes [43], para resolver problemas de guías de onda con conductores perfectos en la frontera de la superficie y una forma arbitraria de la sección transversal. Podemos decir que la geometría involucrada es una de las variables principales presentes en el problema de la determinación del funcionamiento de una guía de onda [44]. Actualmente, existen algunas secciones transversales interesantes reportadas sobre microestructuras de fibras ópticas [45, 46] las cuales podrían ser tratadas por nuestro método.

4.1 Formulación de un método numérico para guías de ondas.

En esta sección presentamos una técnica numérica rigurosa, aplicada para calcular los modos en una guía de onda, para los casos TE y TM. Esta es una extensión de un trabajo previo [47]. Como una aplicación del método descrito, nosotros consideramos el caso de una guía de onda con estructura poligonal interna, donde la pared de esta guía de onda es conductora perfecta y el interior esta hueco. Además, probamos la validez de nuestra aproximación haciendo una comparación entre resultados numéricos y analíticos, para algunos sistemas típicos.

En la figura 4.1 se muestra el contorno de una superficie cilíndrica de sección transversal arbitraria. La forma y medida de la sección transversal suponemos que es constante a lo largo del eje del cilindro (dirección z), y la intersección del cilindro

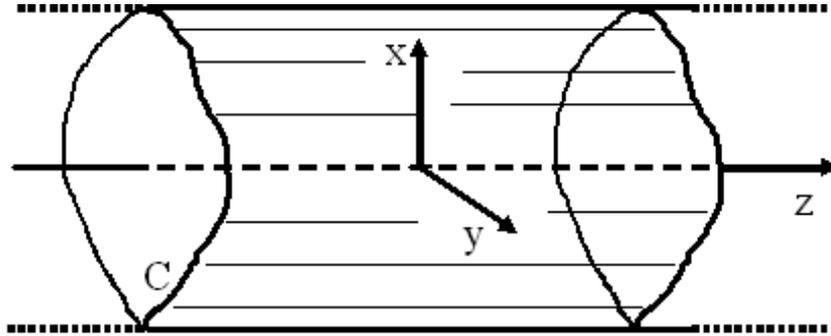


FIGURA 4.1. Guía de onda cilíndrica hueca, con una forma de sección transversal arbitraria. La medida y forma de la sección transversal se suponen constantes a lo largo del eje del cilindro (dirección z), y la intersección del cilindro con el plano $x - y$ es el contorno cerrado C .

con el plano $x - y$ define el contorno interno C , y este contorno encierra la superficie S . Hemos supuesto que el espacio interno del cilindro está vacío.

Si los campos tienen una dependencia temporal del tipo $\exp(-i\omega t)$ dentro del cilindro, y utilizando la geometría involucrada, podemos expresar la variación de los campos en la dirección z de la siguiente forma

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y) \exp(\pm ikz - i\omega t), \quad (4.1)$$

donde Ψ representa el campo magnético \mathbf{H} o el campo eléctrico \mathbf{E} .

Es bien conocido que el campo electromagnético dentro de una guía de onda puede estudiarse en términos de dos tipos de ondas desacopladas [48]: las ondas TE y las TM. Ambas ondas deben satisfacer la ecuación homogénea de Helmholtz

$$(\nabla^2 + \gamma^2)\Psi_\gamma(x, y) = 0. \quad (4.2)$$

Además, se cumplen ciertas condiciones a la frontera para cada uno de los casos y la relación de dispersión está dada por

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (4.3)$$

Para encontrar Ψ_γ , utilizamos una función auxiliar. Introducimos una función de Green, $G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, la cual es la solución de la ecuación inhomogénea de Helmholtz bidimensional

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\mathbf{r}' = (x', y')$, los cuales no tienen componente a lo largo del eje del cilindro. La función de Green puede ser expresada en términos de una función de Hankel de primera clase y orden cero, como sigue:

$$G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi \mathbf{H}_0^{(1)}(\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (4.5)$$

Aplicando el teorema integral de Green para las funciones escalares $\Psi_\gamma(\mathbf{r})$ y $G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y para la geometría particular considerada aquí, obtenemos

$$\int_S [\Psi_\gamma(\mathbf{r}) \nabla^2 G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \Psi_\gamma(\mathbf{r})] da = \oint_C [\Psi_\gamma(\mathbf{r}) \nabla G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \Psi_\gamma(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} ds, \quad (4.6)$$

donde da es el elemento diferencial de área perpendicular al eje del cilindro, ds es longitud de arco diferencial del contorno interno C , y \mathbf{n} es el vector unitario normal a cada uno de los puntos sobre C . Podemos sustituir los Laplacianos de las ecuaciones (4.2) y (4.4) dentro de la ecuación (4.6) para obtener

$$\Psi_\gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_C [G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \Psi_\gamma(\mathbf{r}') - \Psi_\gamma(\mathbf{r}') \nabla' G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n} ds', \quad (4.7)$$

donde \mathbf{r} localiza los puntos dentro del cilindro.

Para el caso de las ondas, TM, tenemos que la condición de frontera es que la componente del campo eléctrico, tangente a la superficie, al ser evaluada sobre el conorno C es nulo. Esto es

$$E_z |_{C=0}. \quad (4.8)$$

La cual se llama “condición de frontera de Dirichlet”. Para el caso complementario de las ondas TE se tiene la condición de frontera de Neumann, expresada por

$$\nabla H_z \cdot \mathbf{n} |_{C=0}. \quad (4.9)$$

A continuación mostraremos el formalismo que permite encontrar el campo magnético para las ondas TE. Aplicando la condición a la ecuación (4.9), tenemos

$$\Psi_\gamma(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_C \Psi_\gamma(\mathbf{r}') \nabla' G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} ds', \quad (4.10)$$

en donde $\Psi_\gamma(\mathbf{r}) = H_z(\mathbf{r})$. La función fuente en este caso es $\Psi_\gamma(\mathbf{r})$ evaluada sobre C . Esta se calcula de una manera similar que la empleada anteriormente para ondas TM [47].

La ecuación (4.10) se resuelve numéricamente para la función $\Psi_\gamma(\mathbf{r}')$. Esto se realiza convirtiendo dicha ecuación en una ecuación matricial numérica para la función fuente, la cual, está dada por

$$0 = \sum_{n=1}^N L_{mn}^{\gamma} \Psi_{\gamma}^n, \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, N, \quad (4.11)$$

donde $\Psi_{\gamma}^n = \Psi_{\gamma}(\mathbf{R}) |_{\mathbf{R}=\mathbf{R}(s_n)}$ y $\mathbf{R}(s_1), \mathbf{R}(s_2), \dots, \mathbf{R}(s_N)$, son N puntos igualmente espaciados sobre el contorno.

La expresión que permite obtener los elementos de la matriz, es la siguiente:

$$L_{mn}^{\gamma} = -\frac{i\Delta s}{4} \gamma H_1^{(1)}(\gamma\{[X_m - X_n]^2 + [Y_m - Y_n]^2\}^{1/2}) \times \quad (4.12)$$

$$[[X_m - X_n]^2 + [Y_m - Y_n]^2]^{-\frac{1}{2}} \{X'_n[Y_m - Y_n] - Y'_n[X_m - X_n]\},$$

para $m \neq n$, y donde Δs es la distancia sobre la curva C entre $\mathbf{R}(s_j)$ y $\mathbf{R}(s_{j+1})$, con $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Además, (X_m, Y_m) son las componentes cartesianas del vector $\mathbf{R}(s_N)$, y $H_1^{(1)}(z)$ es la función de Hankel de primera clase y orden uno.

Para $m = n$, tenemos

$$L_{mn}^{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{\Delta s}{4\pi} (X'_n Y''_n - X''_n Y'_n), \quad (4.13)$$

donde cada uno de los símbolos primados denota una derivada. Como puede observarse de la ecuación (4.11) la ecuación matricial es homogénea; así que los valores de γ pueden determinarse de la siguiente condición:

$$|L_{mn}^{\gamma}| = 0. \quad (4.14)$$

Definimos la función

$$D(\gamma) = \ln(|L_{mn}^{\gamma}|), \quad (4.15)$$

debido a que el determinante de las matrices de interés es muy pequeño, por lo que la función logaritmo natural del determinante de la matriz permite ver mejor los valores numéricos propuestos como eigenvalores.

Una vez que γ y la función fuente Ψ_{γ}^n han sido determinados, la amplitud del campo en el interior del cilindro puede calcularse de

$$\Psi_{\gamma}(x, y) = -\frac{i\Delta s}{4} \gamma \sum_{n=1}^N \Psi_{\gamma}^n H_1^{(1)}(\gamma\{[x-x_n]^2 + [y-y_n]^2\}^{1/2}) \times \quad (4.16)$$

$$[[x - x_n]^2 + [y - y_n]^2]^{-\frac{1}{2}} \{x'_n[y - y_n] - y'_n[x - x_n]\}.$$

La solución general para $H_z(x, y, z, t)$ puede expresarse por

$$H_z(x, y, z, t) = \sum_j A_{\gamma_j} \Psi_{\gamma_j}(x, y) \exp(ikz - i\omega t), \quad (4.17)$$

donde A_{γ_j} son constantes complejas y k puede calcularse de la relación de dispersión

$$k = \pm \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_j^2 \right)^{1/2}. \quad (4.18)$$

Nosotros hemos considerado un contorno particular C para mostrar las aplicaciones del método reportado [47] para ondas TE y TM.

Sea C un polígono regular. Nosotros consideramos el caso donde el contorno cerrado C es un polígono regular con p lados, donde $p = 3, 4, 5, 6, \text{ y } \infty$. Esto es, el polígono es un triángulo, un cuadrado, un pentágono, un hexágono y un círculo, respectivamente. Además, el polígono está inscrito en una circunferencia de radio $R = 3\sqrt{2}$ (unidades arbitrarias), que puede considerarse como un polígono con $p = \infty$. Calculamos los eigenvalores numéricos para ondas TE, como se ven en la figura 4.2, encontrando los valores de γ tal que ellos son mínimos relativos de la función $D(\gamma)$ (ecuación 4.15) en el intervalo $[0.10, 2.50]$ o $2\pi/\gamma \in [0.59, 14.80]R$, donde $2\pi/\gamma$ es la longitud de onda bidimensional. Expresiones análogas se obtuvieron utilizando el mismo criterio para ondas TM, los resultados se muestran en la figura 4.3. La tabla 4.4 muestra los eigenvalores asociados con las guías de onda con las secciones transversales consideradas aquí, tanto para ondas TE como para las TM (ver figura 4.5). Los eigenvalores muestran características interesantes para ambos casos. Para este intervalo numérico, el triángulo presenta nueve eigenvalores para el caso TE mientras que para el caso TM solamente tiene cinco eigenvalores, mientras que para el hexágono presentan trece eigenvalores para el caso TE y doce para el caso TM.

Hacemos una comparación entre los resultados numéricos y analíticos, para los casos $p = 4$, y $p = \infty$, los cuales son posibles de realizar analíticamente. Definimos un error cuadrático entre los resultados analíticos y numéricos como

$$err = \left(\sum_{j=1}^N (\gamma_j^a - \gamma_j)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.19)$$

donde γ_j son los eigenvalores calculados numéricamente en el intervalo, N es el número de eigenvalores en el intervalo, y $\gamma_j^a = \gamma_{mn}$ corresponde a los eigenvalores analíticos [49]. Los errores para las ondas TE son 0.025 para el cuadrado y 0.003 para la circunferencia mientras que para el caso TM los errores son 0.007 tanto para el cuadrado como para la circunferencia. Entonces, podemos observar que los resultados numéricos están en muy buen acuerdo con los resultados analíticos correspondientes. Este ejemplo ayuda a ilustrar la validez del método anteriormente descrito.

La función fuente Ψ_γ^n la podemos determinar utilizando la técnica numérica de descomposición de valores singulares (SVD - Singular Values Decomposition) [50] uti-

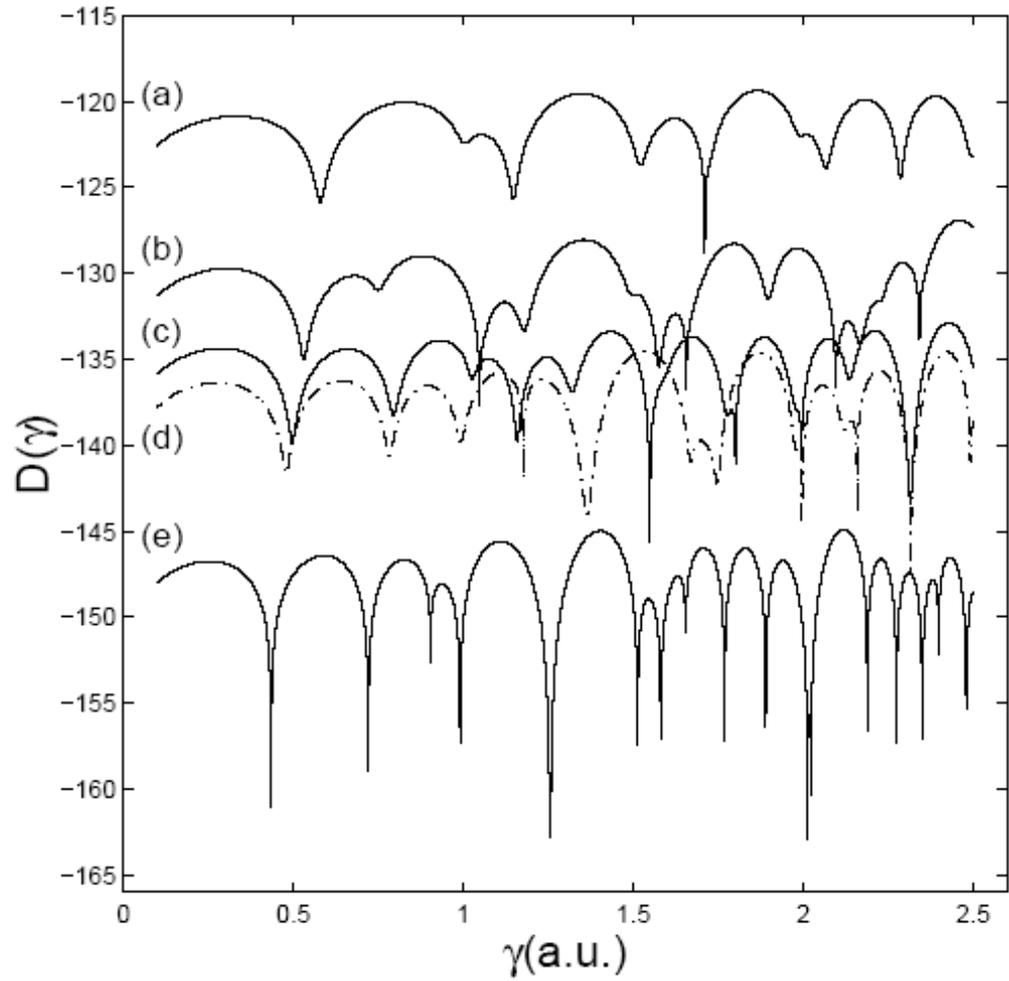


FIGURA 4.2. El logaritmo de la matriz $M_{mn}^\gamma D(\gamma)$ vs γ , para contornos poligonales en el caso TE. El intervalo que se consideró para los eigenvalores γ es $[0.10, 2.50]$. Los puntos mínimos relativos de $D(\gamma)$ dan la posición de los eigenvalores. Los contornos son (a) triángulo, (b) cuadrado, (c) pentágono, (d) hexágono y (e) círculo.

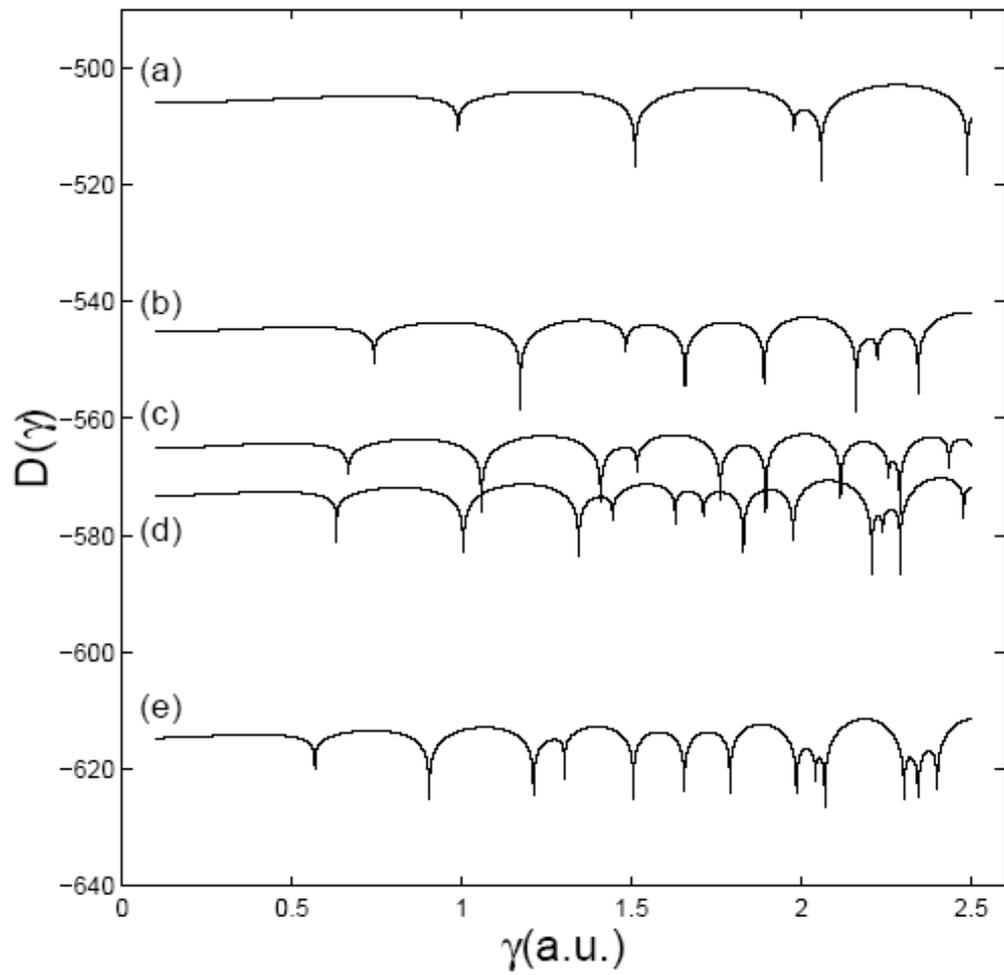


FIGURA 4.3. El logaritmo de la matriz $M_{mn}^{\gamma} D(\gamma)$ vs γ , para contornos poligonales en el caso TM. El intervalo que se consideró para los eigenvalores γ es $[0.10, 2.50]$. Los puntos mínimos relativos de $D(\gamma)$ dan la posición de los eigenvalores. Los contornos son (a) triángulo, (b) cuadrado, (c) pentágono, (d) hexágono y (e) círculo.

Eigenvalores	Polígono						
	Caso numérico					Caso analítico	
	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = ∞	p = 4	p = ∞
γ	0.579	0.530	0.496	0.478	0.434	0.523	0.433
γ_1	1.004	0.749	0.794	0.782	0.720	0.740	0.719
γ_2	1.147	1.047	1.025	0.992	0.903	1.047	0.903
γ_3	1.521	1.179	1.158	1.176	0.990	1.170	0.990
γ_4	1.710	1.496	1.319	1.363	1.253	1.480	1.253
γ_5	1.991	1.575	1.548	1.669	1.257	1.570	1.256
γ_6	2.066	1.656	1.776	1.747	1.512	1.655	1.512
γ_7	2.286	1.896	1.800	1.979	1.581	1.887	1.580
γ_8	2.496	2.094	1.972	1.996	1.654	2.094	1.653
γ_9	-	2.166	1.995	2.122	1.768	2.158	1.768
γ_{10}	-	2.224	2.136	2.158	1.889	2.221	1.889
γ_{11}	-	2.342	2.315	2.316	2.012	2.341	2.012
γ_{12}	-	-	-	2.492	2.022	-	2.021
γ_{13}	-	-	-	-	2.188	-	2.187
γ_{14}	-	-	-	-	2.274	-	2.273
γ_{15}	-	-	-	-	2.350	-	2.349
γ_{16}	-	-	-	-	2.398	-	2.397
γ_{17}	-	-	-	-	2.480	-	2.479

FIGURA 4.4. Eigenvalores TE para una guía de onda hueca conductora de sección transversal poligonal de lados $p = 3, 4, 5, 6,$ y ∞ , respectivamente.

Eigenvalores	Polígono						
	Caso numérico					Caso analítico	
	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = ∞	p = 4	p = ∞
γ	0.989	0.741	0.665	0.631	0.567	0.740	0.566
γ_1	1.510	1.172	1.058	1.004	0.904	1.170	0.903
γ_2	1.977	1.482	1.409	1.344	1.211	1.480	1.210
γ_3	2.058	1.657	1.516	1.444	1.302	1.655	1.301
γ_4	2.488	1.890	1.761	1.628	1.505	1.887	1.503
γ_5	-	2.161	1.895	1.711	1.655	2.158	1.653
γ_6	-	2.224	2.115	1.829	1.790	2.221	1.788
γ_7	-	2.344	2.256	1.976	1.985	2.341	1.983
γ_8	-	-	2.289	2.207	2.041	-	2.039
γ_9	-	-	2.434	2.239	2.069	-	2.067
γ_{10}	-	-	-	2.291	2.302	-	2.300
γ_{11}	-	-	-	2.478	2.344	-	2.341
γ_{12}	-	-	-	-	2.400	-	2.397

FIGURA 4.5. Eigenvalores TM para una guía de onda hueca conductora de sección transversal poligonal de lados $p = 3, 4, 5, 6,$ y ∞ , respectivamente.

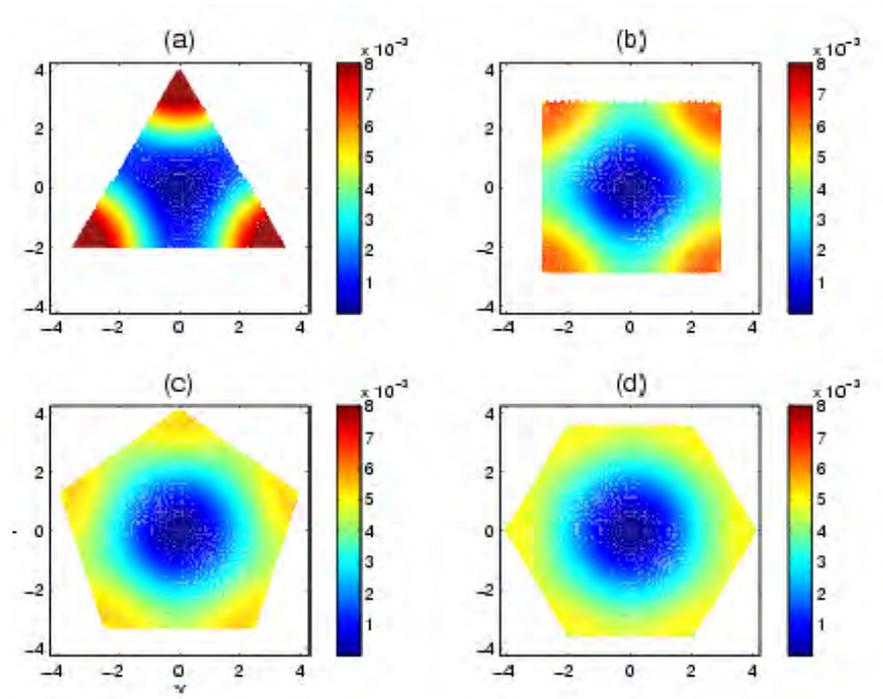


FIGURA 4.6. Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de a) un triángulo, b) cuadrado, c) pentágono, y d) hexágono para el caso TE.

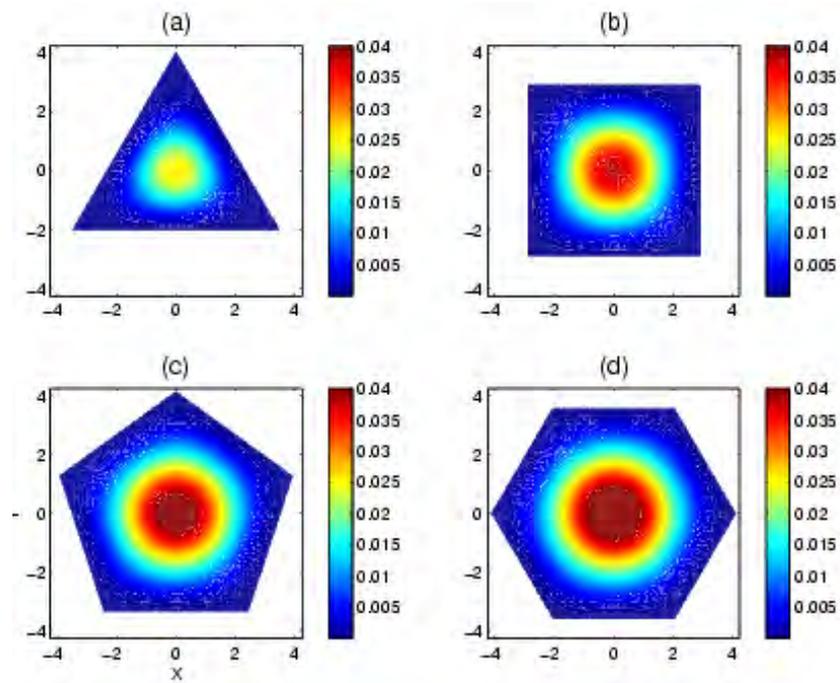


FIGURA 4.7. Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de a) un triángulo, b) cuadrado, c) pentágono, y d) hexágono para el caso TM.

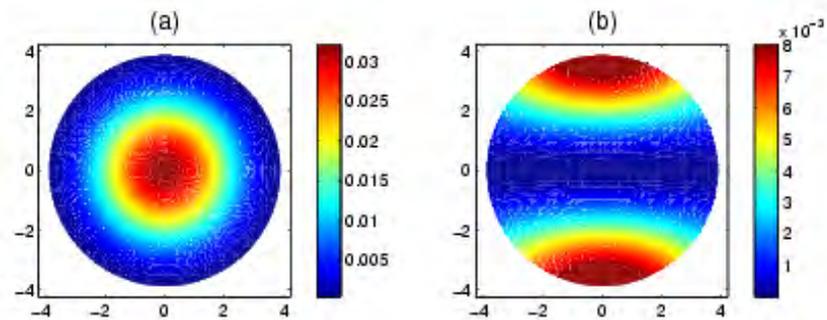


FIGURA 4.8. Valores absolutos de las eigenfunciones del estado base de una guía de onda con sección transversal poligonal para el caso de un círculo a) en el caso TM, b) en el caso TE.

lizando la ecuación (4.11), la cual representa un conjunto de ecuaciones homogéneas, donde la matriz L_{mn}^γ es numéricamente casi singular. Después, se obtiene la amplitud de campo de la ecuación (4.16). Las figuras 4.6 y 4.7 muestran el valor absoluto al cuadrado de las eigenfunciones del estado base, $|\Psi_1(x, y)|^2$, para el de las guías de onda con la sección transversal consideradas aquí para ondas TE (figuras 4.6a, 4.6b, 4.6c, y 4.6d) y TM (figuras 4.7a, 4.7b, 4.7c, y 4.7d), para el triángulo, el cuadrado, el pentágono y el hexágono respectivamente, en la figura 4.8a se muestra el caso TM y en la figura 4.8b se muestra el caso TE, para el círculo respectivamente.

4.2 Discusión de resultados.

De los resultados anteriores, podemos inferir los siguientes hechos: cuando el número de elementos de simetría se incrementa, los eigenvalores del estado base se desplazan hacia el lado izquierdo tanto para el caso TE como para el TM, el número de modos también se incrementa. El caso TE siempre tiene un número mayor de modos que el caso TM. En el caso TE observamos que siempre se presenta un valor mínimo en el centro del polígono, mientras que para el caso TM estas presentan un máximo.

Tenemos resultados numéricos para eigenestados no degenerados (caso TM), sin embargo, la simetría obtenida en algunos casos no significa necesariamente la existencia de un estado no degenerado, es decir, el cuadrado para el caso TE es simétrico pero es bien sabido que este no es un caso de estado degenerado [46]. Para el caso TE, la energía está centrada alrededor de los vértices, mientras que para el caso TM está centrada alrededor del centro de simetría.

Capítulo 5

CONCLUSIONES.

En este capítulo damos las conclusiones sobre el trabajo hecho en la realización de esta tesis, así como trabajo por realizar. Nosotros presentamos una descripción de un método de optimización en el número de mediciones de intensidad diferentes, el cual es comparado con el método anteriormente propuesto, obteniendo los mismos resultados. Además, existe un 33% de ahorro en tiempo de ejecución de las mediciones para el caso de una superficie rugosa unidimensional, lo cual es bastante bueno. Para una superficie que no tenga simetría habría que realizar máximo 16 distintas mediciones en vez de las 49 que propone Bickel y Bayley, lo cual estaría reduciendo el tiempo en un 66%.

Por otro lado, encontramos los elementos completos de la matriz de Mueller en una geometría de incidencia cónica, para ángulos de incidencia de $\theta_0 = 0^\circ$, 10° y 20° a un ángulo cónico de 15° . Observamos que el elemento m_{00} es igual al elemento m_{11} , el m_{23} es igual a $-m_{32}$, estos resultados concuerdan con los predichos por Novikov. Los elementos m_{22} y m_{33} son diferentes y no concuerdan con lo predicho por Novikov.

En la parte central de la curva de los elementos m_{00} y m_{11} , observamos un pico que tiene la forma de retroreflexión reforzada, en el resto de los elementos no se observa este pico debido a que los elementos de Mueller son la suma y resta de distintas intensidades, aunque en las mediciones de cada una de las intensidades si aparecen. También observamos que el pico máximo, conforme aumenta el ángulo de incidencia disminuye y se desplaza una distancia igual a la del ángulo de incidencia.

También podemos decir, que tenemos una técnica numérica rigurosa para calcular modos en guías de ondas con sección transversal arbitraria, tanto para ondas TE como para ondas TM, en particular lo hicimos para guías de onda conductoras con secciones transversales poligonales huecas. Esto representa una extensión de una formulación aplicada a problemas con superficies reentrantes [42, 43]. Los resultados obtenidos son coherentes con los reportados en la literatura. La conclusión final de este trabajo es que el método descrito anteriormente [47] puede aplicarse para calcular los modos sobre guías de onda conductoras con sección transversal arbitraria.

El trabajo a realizar en los próximos años, es mejorar el sistema de detección para obtener los elementos completos de la matriz de Mueller cónica con mayor precisión para posteriormente publicar los resultados en una revista de circulación internacional. Aplicar el método obtenido para estudiar distintos sistemas. Proseguir con la implementación de los calculos numéricos para realizar simulaciones de propagación en guías de ondas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. F. Gray, A Method of Forming Optical Diffusers of Simple Known Statistical Properties, *Journal of Modern Optics* **25**, 765 (1978).
- [2] E. R. Mendez and K. A. O'Donnell, Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from gaussian random surfaces, *Optics Communications* **61**, 91 (1987).
- [3] K. A. O'Donnell, E. R. Mendez, Experimental study of scattering from characterized random surfaces, *JOSA A*, **4** 1194 (1987).
- [4] Mark L. Begbie, Wilson Sibbett, Miles J. Padgett, Mueller Matrix Error Correction for a Fringe-Free Interferometry System , *Appl. Opt.* **40**, 3205 (2001).
- [5] Jens Biele, Georg Beyerle, and Gerd Baumgarten, Polarization Lidar: Correction of instrumental effects, *Opt. Express* **7**, 427 (2000).
- [6] Byeong Ha Lee, Joo Beom Eom, Jinchae Kim, Dae Seung Moon, Un-Chul Paek, Gil-Ho Yang, Photonic crystal fiber coupler, *Opt. Lett.* **27**, 1096 (2002).
- [7] Benoit A. M. , Naoun K., Louis-Dorr V., Mala L., Raspiller A., Linear Dichroism of the Retinal Nerve Fiber Layer Expressed with Mueller Matrices, *Appl. Opt.* **40**, 565 (2001).
- [8] Juan M. Bueno, Fernando n, Measurements of the corneal birefringence with a liquid-crystal imaging polariscope, *Appl. Opt.* **41**, 116 (2002).
- [9] Andrew Resnick, Differential Interference Contrast Microscopy as a Polarimetric Instrument, *Appl. Opt.* **41**, 38 (2002).
- [10] Shuliang Jiao, Lihong V. Wang, Two-dimensional depth-resolved Mueller matrix of biological tissue measured with double-beam polarization-sensitive optical coherence tomography, *Opt. Lett.* **27**, 101 (2002).
- [11] Hatcher Tynes H. , George W. Kattawar, Eleonora P. Zege, Iosif L. Katsev, Alexander S. Prikhach, Ludmila I. Chaikovskaya, Monte Carlo and Multicomponent Approximation Methods for Vector Radiative Transfer by use of Effective Mueller Matrix Calculations, *Appl. Opt.* **40**, 400 (2001).
- [12] Lynn L. Deibler, Matthew H. Smith, Measurement of the Complex Refractive Index of Isotropic Materials with Mueller Matrix Polarimetry, *Appl. Opt.* **40**, 3659 (2001).

- [13] Sergio E. Segre, New formalism for the analysis of polarization evolution for radiation in a weakly nonuniform, fully anisotropic medium: a magnetized plasma, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 2601 (2001).
- [14] Depine, R. A., Antispecular enhancement in *s*- and *p*-polarized electromagnetic waves scattered from random gratings, *Opt. Lett.* **16**, 1457 (1991).
- [15] McGurn, A. R. y Maradudin, A. A., Weak transverse localization of light scattered incoherently from a one-dimensional random metal surface, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 539 (1993).
- [16] Luna, R. E. y Méndez, E. R., Scattering by one-dimensional random rough metallic surfaces in a conical configuration, *Opt. Lett.* **20**, 657 (1995).
- [17] Luna, R. E., Scattering by one-dimensional random rough metallic surfaces in a conical configuration: several polarizations, *Opt. Lett.* **21**, 1418 (1996).
- [18] Luna, R. E., Acosta-Ortiz, S. E., and Zou, L. -F., Mueller matrix for characterization of one-dimensional rough perfectly reflecting surfaces in a conical configuration, *Opt. Lett.* **23**, 1075 (1998).
- [19] T. R. Michel, M. E. Knotts, and K. A. O'Donnell, Stokes matrix of a one-dimensional perfectly conducting rough surface, *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 585 (1992).
- [20] I. V. Novikov and A. A. Maradudin, Stokes Matrix in Conical Scattering from a One-Dimensional Randomly Rough Metal Surface, *Proc. SPIE* **3141**, 171(1997).
- [21] I. V. Novikov and A. A. Maradudin, The Stokes matrix in conical scattering from a one-dimensional perfectly conducting randomly rough surface, *Radio Science* **34**, 599 (1999).
- [22] Knotts, Michael E., Experimental studies of multiple scattering by rough surfaces. Georgia Institute of Technology, Atlanta, U.S.A. PhD Thesis on Physics (1994).
- [23] Born, Max and Emil Wolf, Principles of optics, electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Pergamon Press, New York (1987).
- [24] Bickel, William S. and Wilbur M. Bailey, Stokes vector, Mueller matrices, and polarized scattered light, *Am. J. Phys.* **53**, 468 (1985).
- [25] Gelacio Atondo-Rubio, Rafael Espinosa-Luna, and Alberto Mendoza-Suárez, Mueller Matrix Determination for One-Dimensional Rough Surfaces with a Reduced Number of Measurements, *Optics Communications*, (2004) en prensa.

- [26] O'Donnell, K. A. y M. E. Knotts, Polarization dependence of scattering from one-dimensional rough surfaces, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1126 (1991).
- [27] Jones, R.C., A new calculus for the treatment of optical systems: V. A more general formulation, and description of another calculus, *J. Opt. Soc. Am.* **37**, 107 (1947).
- [28] Hovenier J. W., Structure of a general pure Mueller matrix, *Appl. Opt.* **33**, 8318 (1994).
- [29] Perrin, Francis, Polarization of light scattered by isotropic opalescent media, *J. Chem. Phys.* **10**, 415 (1942).
- [30] José J. Gil, Characteristic properties of Mueller matrices, *JOSA A* **17**, 328 (2000).
- [31] van de Hulst, H. C., *Light scattering by small particles*. Dover publications. Inc. New York, (1981).
- [32] O'Neill, Eduard L., *Introduction to statistical optics*. Addison-Wesley, Reading. Massachusetts, pp. 135 (1963).
- [33] Petit, R., ed., *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [34] Espinosa-Luna, Rafael, Scattering by rough surfaces in a conical configuration: experimental Mueller matrix, *Opt. Lett.* **27**, 1510 (2002).
- [35] Gelacio Atondo-Rubio, Alberto Mendoza-Suárez, Rafael Espinosa-Luna y Eduardo Tututi-Hernández, Application of a new numerical method to calculate TE modes in hollow-conducting waveguides, *Optics Communications* **221** 301 (2003).
- [36] Luna, R. E., Méndez, E. R., Lu, J. Q. y Gu, Z. H., Enhanced backscattering due to total internal reflection at a dielectric-air interface, *J. Mod. Optics* **42**, 257 (1995).
- [37] Méndez, E. R., Navarrete, A. G. y Luna, R. E., Statistics of the polarization properties of one-dimensional randomly rough surfaces, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2507 (1995).
- [38] M. Nieto-Vesperinas and J. M. Soto-Crespo, "Monte Carlo simulations for scattering of electromagnetic waves from perfectly conductive random rough surface", *Opt. Lett.* **12**, 979 (1987).

- [39] A. A. Maradudin, E. R. Méndez, and T. Michel, “Backscattering effects in the elastic scattering of p -polarized light from a large-amplitude random metallic grating”, *Opt. Lett.* **14**, 151 (1989).
- [40] S. Savaidis, P. Frangos, D. L. Jaggard, and K. Hizanidis, “Scattering from fractally corrugated surfaces: an exact approach”, *Opt. Lett.* **20**, 2357 (1995).
- [41] C. J. R. Sheppard, “Scattering by fractal surfaces with an outer scale”, *Opt. Commun.* **122**, 178 (1996).
- [42] A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, “Derivation of an impedance boundary condition for a one-dimensional, curved, reentrant surfaces”, *Opt. Commun.* **134**, 241 (1997).
- [43] A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, “Light scattering by a reentrant fractal surface”, *Appl. Opt.* **36**, 3521 (1997).
- [44] Li Sheng-Li, Li Le-Wei, Yen Tat-Soon, and Leong Mook-Seng, ”Analysis of Hollow Conducting Waveguides Using Superquadric Functions-A Unified Representation”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **48**, 876 (2000).
- [45] Jinendra K. Ranka, Robert S. Windeler, and Andrew J. Stentz, ”Optical properties of high-delta air-silica microstructure optical fibers”, *Opt. Lett.* **25**, 796 (2000).
- [46] M. J. Steel, T. P. White, C. Martijn de Sterke, R. C. McPhedran, and L. C. Botten, ”Symmetry and degeneracy in microstructured optical fibers”, *Opt. Lett.* **26**, 488 (2001).
- [47] A. Mendoza-Suárez, Rafael Espinosa-Luna, Javier Cruz-Mandujano, and Juan Espinosa-Luna, “Numerical technique to calculate modes in waveguides of arbitrarily cross-sectional shape”, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 961 (2001).
- [48] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 2^{ra} edition (1975).
- [49] C. T. A. Johnk, *Engineering Electromagnetic Fields and Waves* (John Wiley & Sons, 1975).
- [50] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, UK, 1992).