

**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

Demodulación Temporal de Interferogramas

Tesis como requisito para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta:

Ing. Orlando Miguel Medina Cázares

Asesor:

Dr. Julio Cesar Estrada Rico

Co-Asesor:

Dr. Manuel Servín Guiardo

Defendida el 14 de Agosto del 2009

Resumen

En el primer capítulo del presente trabajo se da una breve introducción a lo que son los algoritmos de PSI (de su acronimo en inglés Phase Shifting Interferometry) y una explicación de los conceptos básicos sobre esta técnica, además de mostrar un método para generar algoritmos de PSI con un enfoque algebraico. Así mismo se muestran los resultados obtenidos en el grupo de trabajo formado por el Dr. Servin y el Dr. Estrada en los capítulos 2 y 3. En el capítulo 2, mostramos un enfoque diferente al ya propuesto por Freishlad & Koliopoulos [2], para analizar los interferogramas en el dominio de Fourier. Para nosotros, este enfoque presenta una mejor descripción de los algoritmos de PSI permitiéndonos incluso diseñar estos algoritmos de PSI en el dominio de las frecuencias, como se muestra en el capítulo 3. Donde se obtienen un algoritmo de 5-pasos propuesto por Hariharan [5, 4], además se contruye un algoritmo de banda ancha de 9-pasos. Finalmente, en el capítulo 4 presentamos una aplicación, cuyo único propósito en esta tesis es demostrar la utilidad que pueden tener estos algoritmos de banda ancha para el análisis en tiempo real de interferogramas obtenidos en pruebas de eventos dinámicos.

Índice general

1. Algoritmos de Phase Shifting Interferometry (PSI)	6
1.1. Objetivos	6
1.2. Resumen	6
1.3. Introducción a PSI (Phase Shifting Interferometry)	7
1.3.1. Algoritmo de Tres Pasos	10
1.3.2. Método de Mínimos Cuadrados	11
2. Analisis Espectral de Algoritmos de PSI	15
2.1. Objetivos:	15
2.2. Resumen	15
2.3. Introducción	16
2.4. Respuesta al Impulso de los Algoritmos de PSI	16
2.5. Método de Freishlad y Koliopoulos	20
2.5.1. Interpretación de los Espectros	23
2.6. Método de Servin	24
2.6.1. Interpretación de los Espectros	28
3. Diseño de Algoritmos PSI de Banda Ancha	29
3.1. Objetivos:	29
3.2. Resumen	29
3.3. Intruducción	30
3.4. Construyendo un conocido Algoritmo de PSI	31
3.5. Construyendo un algoritmo de banda ancha	34

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
4. Resultados	36
4.1. Objetivos	36
4.2. Resumen	36
4.3. Introducción	37
4.4. Prueba 1: Demodulación de Video-Interferograma Simulado	37
4.5. Prueba 2: Demodulación de Video-Interferogramas Experimentales	40
5. Conclusiones	44
6. Trabajo a Futuro	45

Índice de figuras

- 1.1. Configuración típica de un interferometro Twyman-Green. 7
- 2.1. Representación esquemática de un sistema 16
- 2.2. Esquema de un sistema lineal 17
- 2.3. Representación gráfica del impulso discreto 18
- 2.4. Descomposición de una función en deltas 18
- 2.5. Ejemplo de la respuesta al impulso de un sistema pasa bajas Butterworth 19
- 2.6. Respuesta al impulso del sistema de la Figura 2.5 20
- 2.7. Desplazamientos de fase para algoritmos de las ecns: a)2.10 b)2.11. . . 21
- 2.8. Espectro del Algoritmo 2.10 23
- 2.9. Espectro del Algoritmo 2.11 24
- 2.10. Espectro de los Algoritmos en ecns 2.10 y 2.11 con el método de Servin. 25
- 2.11. Desplazamientos de fase para algoritmo en ecn 2.22. 26
- 2.12. Espectro de los Algoritmos en ecns 2.22 y 2.26 con el método de Servin. 28

- 3.1. Representación gráfica de la señal $I(x, y)$ en el espacio de las frecuencias. 30
- 3.2. Muestra el espectro de las ecns 3.6 y 3.8. 31
- 3.3. Gráfica de $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega - \alpha)$ 32
- 3.4. Gráfica del producto de los filtros $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega - \alpha)$ 33
- 3.5. Gráfica de los filtros $H_1(\omega)$, $H_2(\omega - \alpha_1)$, $H_2(\omega - \alpha_2)$ y $H_2(\omega - \alpha_3)$. . . 34
- 3.6. Gráfica del producto de los filtros $H_1(\omega)$, $H_2(\omega - \alpha_1)$, $H_2(\omega - \alpha_2)$ y $H_2(\omega - \alpha_3)$ 35

4.1. Imagen de un patron de franjas simulado de una placa que vibra con un modo estacionario.	38
4.2. Imagenes de: a) Fase obtenida con el algoritmo de 5-pasos de Hariharan. b) Fase obtenida con el algoritmo de 9-pasos de banda ancha. c) Coseno de la fase del mapa de fase del algoritmo de 5-pasos de Hariharan. d) Coseno de la fase del mapa de fase del algoritmo de 9-pasos de banda ancha.	39
4.3. Secuencia de mapas de fase de un video-interferograma de una interferometro tipo michelson.	41
4.4. Secuencia parte 1 de los mapas de fase de un video-interferograma de una placa que vibra.	42
4.5. Secuencia parte 2 de los mapas de fase de un video-interferograma de una placa que vibra.	43

Capítulo 1

Algoritmos de Phase Shifting Interferometry (PSI)

1.1. Objetivos

- Comprender en que consiste la técnica de PSI.
- Entender que son y para que son los algoritmos de PSI.
- Analizar como se deducen los algoritmos de PSI.
- Deducir los algoritmos: tres pasos y mínimos cuadrados para PSI.

1.2. Resumen

Este capítulo centra su atención en los métodos y análisis de procesamiento de interferogramas, los cuales tienen como objetivo extraer la fase óptica del frente de onda, así mismo se explican los conceptos básicos sobre la técnica de PSI (de su acronimo en inglés Phase Shifting Interferometry) utilizada en metrología óptica para realizar mediciones en superficies como esfuerzos, deformaciones, profundidades, imperfecciones, temperatura, etc.

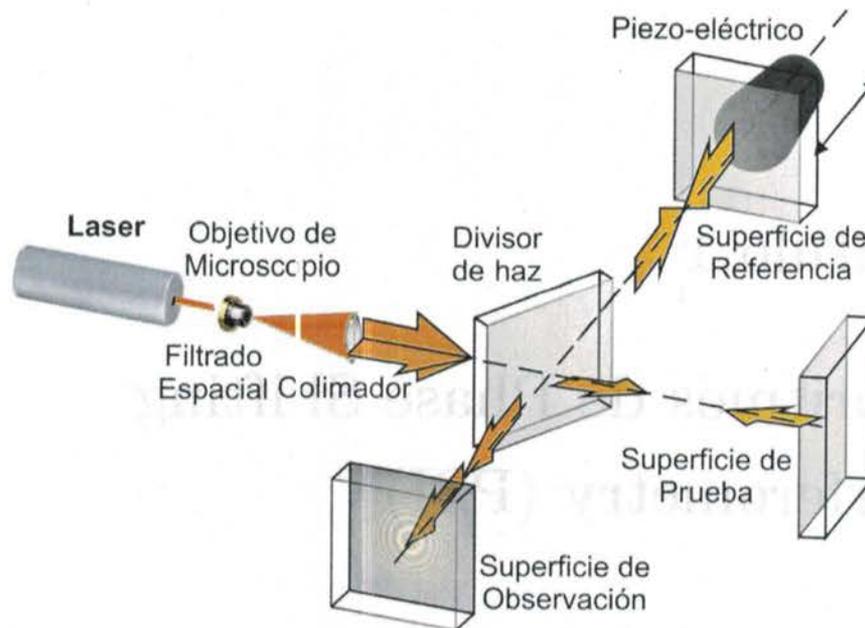


Figura 1.1: Configuración típica de un interferómetro Twyman-Green.

1.3. Introducción a PSI (Phase Shifting Interferometry)

PSI (Phase Shifting Interferometry) es la técnica más común para la detección de fase óptica de interferogramas. Fue introducida por primera vez por Bruning et al. (1974) [1] para realizar pruebas ópticas usando un CCD como dispositivo de grabado. En PSI [1, 3] se obtiene una serie de interferogramas mientras el haz de referencia de un interferómetro es desplazado. La fase del frente de onda del objeto queda escondida en las variaciones del patrón de intensidad de los interferogramas. Para detectar la fase óptica de cada pixel (usando los algoritmos de PSI) del interferograma, los valores de intensidad digitalizados deben ser linealmente combinados.

Esta técnica puede ser implementada usando casi cualquier tipo de interferómetro de dos haces, por ejemplo un Twyman-Green (Figura 1.1). En estos interferómetros el espejo de referencia es típicamente desplazado usando un piezo-eléctrico en la

superficie de referencia, el cual se desplaza en la misma dirección de propagación, como se muestra en la Figura 1.1. El objetivo es obtener n números de interferogramas con un desplazamiento constante de fase entre ellos. Los algoritmos de PSI son clasificados de acuerdo al valor de n , encontrándose algoritmos de tres pasos ($n = 3$), cuatro ($n = 4$), cinco ($n = 5$), etc.

Vamos a obtener el modelo de estos interferogramas de la siguiente manera. Las expresiones generales para la intensidad del haz de referencia y haz objeto son:

$$I_r(x, y, t) = a_r(x, y)e^{i(\phi_r(x, y) - \alpha t)}, \quad (1.1)$$

y

$$I_o(x, y) = a_o(x, y)e^{i\phi_o(x, y)}, \quad (1.2)$$

respectivamente, donde $a_r(x, y)$ y $a_o(x, y)$ son las amplitudes, ϕ_r y ϕ_o son las fases y αt es una variación de fase del frente de onda introducida en el haz de referencia o dicho de otra forma es el desplazamiento relativo entre los dos haces. Estos desplazamientos son introducidos con el piezo-eléctrico adjunto a la superficie de referencia.

Por tanto el patron de intensidad de los dos haces seria [7]:

$$\begin{aligned} I(x, y, t) &= |I_r(x, y, t) + I_o(x, y)|^2 \\ I(x, y, t) &= a_r^2(x, y) + a_o^2(x, y) \\ &\quad + 2a_r(x, y)a_o(x, y) \cos[\phi_o(x, y) - \phi_r(x, y) + \alpha t]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ahora si renombramos $a_r^2(x, y) + a_o^2(x, y) = a(x, y)$, $2a_r(x, y)a_o(x, y) = b(x, y)$ y $\phi_o(x, y) - \phi_r(x, y) = \phi(x, y)$ de la ecuación anterior obtenemos:

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha t], \quad (1.4)$$

la cual es la ecuación fundamental que se usa para demodular los interferogramas en PSI, donde $a(x, y)$ es la intensidad promedio o iluminación de fondo, $b(x, y)$ es el

CAPÍTULO 1. ALGORITMOS DE PHASE SHIFTING INTERFEROMETRY (PSI) 9

contraste o amplitud de modulación y $\phi(x, y)$ es la diferencia de fase de los frentes de onda del objeto y de la referencia.

Existen condiciones ideales para que la calidad de la serie de interferogramas sea optima y los algoritmos de PSI trabajan bien:

- El rango de intensidad de la luz debe estar dentro del rango lineal del CCD.
- Cada desplazamiento en el piezo-eléctrico debe inducir el mismo desplazamiento de fase en los interferogramas.
- El piezo-eléctrico utilizado para mover el espejo de referencia debe moverse linealmente.
- Todas las perturbaciones mecánicas (vibraciones, turbulencias de aire, etc.) que afecten al interferómetro deben ser pequeñas durante la captura de los interferogramas.

Algunas veces una o varias de estas condiciones no son posibles de obtener, por lo que los algoritmos de PSI pueden equivocarse al obtener la fase. Una forma de evaluar el desempeño de los algoritmos es analizando la respuesta al impulso (sección 2.4 en la página 16), [2]. Utilizando este análisis es posible clasificar y decidir el mejor algoritmo disponible para el arreglo experimental y/o interferogramas disponibles. Si acaso alguno de los algoritmos disponibles no se ajusta a los requerimientos experimentales es posible sintonizar el mejor algoritmo que se ajuste a las necesidades del arreglo experimental (Surrel 1996 [10], Tang 1996 [11] and [9] Servin et al 1997a).

Básicamente, los algoritmos de PSI proponen un tratamiento algebraico de los datos para demodular el patrón de franjas. Un ejemplo claro son los algoritmos de tres pasos y los obtenidos por mínimos cuadrados, los cuales se exponen en las secciones 1.3.1 y 1.3.2. Para el algoritmo de tres pasos contamos con tres incógnitas y tres ecuaciones formadas por los modelos matemáticos de los interferogramas. Esta misma deducción la podemos obtener con mínimos cuadrados donde tenemos la flexibilidad de plantear un número mayor o igual a tres interferogramas, eliminando con esto errores de desentonamiento y de ruido. Los primeros en proponer este enfoque

fueron: Bruning, Herriott, Gallagher, Rosenfeld, White y Brangaccio en 1974 y mas profundamente Greivenkamp en 1984.

1.3.1. Algoritmo de Tres Pasos

Como ya se mencionó éste algoritmo consiste en encontrar la fase del frente de onda apartir de un planteamiento algebraico, esto es: resolver un sistema de ecuaciones simultaneas de tres incognitas.

Como podemos ver en la ecn 1.4 del modelo matemático de los interferogramas tenemos tres incognitas: $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$. Por tanto desde éste punto de vista necesitamos un mínimo de tres ecuaciones para resolver el sistema. Así pues podemos construir un sistema de ecuaciones simultaneas para valores de $\alpha = -\alpha, 0, \alpha$; quedando:

$$\begin{aligned} I_1 &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) - \alpha t] \\ I_2 &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\ I_3 &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha t] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Usando funciones trigonometricas podemos reescribir ecns 1.5 de la siguiente forma donde nuestras incognitas son $a(x, y)$, $b(x, y) \cos[\phi(x, y)]$ y $b(x, y) \sin[\phi(x, y)]$:

$$\begin{aligned} I_1 &= a(x, y) + b(x, y) \{ \cos[\phi(x, y)] \cos[\alpha t] + \sin[\phi(x, y)] \sin[\alpha t] \} \\ I_2 &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \\ I_3 &= a(x, y) + b(x, y) \{ \cos[\phi(x, y)] \cos[\alpha t] - \sin[\phi(x, y)] \sin[\alpha t] \} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicamente, obtenemos los valores de $a(x, y)$, $b(x, y) \cos[\phi(x, y)]$ y $b(x, y) \sin[\phi(x, y)]$ de donde $\phi(x, y)$ se obtiene [6]:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{b(x, y) \sin \phi(x, y)}{b(x, y) \cos \phi(x, y)}\right] = \arctan\left[\frac{1 - \cos[\alpha t]}{\sin[\alpha t]} \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right] \quad (1.6)$$

Debido a que la función arcotangente está definida en el rango $[-\pi, \pi]$ la fase $\phi(x, y)$ toma valores en el mismo rango. Por tanto la fase tendrá discontinuidades cada 2π . A la fase obtenida de esta manera la llamamos fase envuelta. Entre los corrimientos de fase más comunes para este algoritmo están: $\pi/2$ y $2\pi/3$. Para estos valores de α , la solución de la fase cuando $\alpha = \pi/2$ es:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right] \quad (1.7)$$

y para cuando $\alpha = 2\pi/3$ tenemos:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right]. \quad (1.8)$$

Un caso especial para valores de α es cuando toma valores de $\pi/4$, $3\pi/4$ y $5\pi/4$ para I_1 , I_2 e I_3 respectivamente, el resultado para la fase queda:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2}\right]. \quad (1.9)$$

El algoritmo de tres pasos es el que requiere el mínimo número de muestras y es el más simple de usar. Sin embargo, este algoritmo es el más sensible a errores.

1.3.2. Método de Mínimos Cuadrados

En este método a diferencia del anterior tenemos la posibilidad de agregar un mayor número de pasos o interferogramas. Para plantearlo reescribimos la ecuación 1.4 como sigue:

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y) \{ \cos[\phi(x, y)] \cos[\alpha t] - \sin[\phi(x, y)] \sin[\alpha t] \}. \quad (1.10)$$

Renombrando $b(x, y) \cos[\phi(x, y)] = b_1$ y $-b(x, y) \sin[\phi(x, y)] = b_2$ la ecn 1.10 queda:

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b_1 \cos[\alpha t] + b_2 \sin[\alpha t], \quad (1.11)$$

ahora si tomamos en cuenta que en PSI se graban $N \geq 3$ número de interferogramas para poder determinar $a(x, y)$, b_1 y b_2 , la ecn anterior la podemos escribir:

$$I_t = a + b_1 c_t + b_2 s_t, \quad (1.12)$$

donde $\cos[\alpha t] = c_t$, $\sin[\alpha t] = s_t$ son conocidos y t toma valores de $1, 2, 3, \dots, N$. Usando mínimos cuadrados, queremos determinar los valores de $a(x, y)$, b_1 y b_2 , tales que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos dados por la diferencia entre el modelo del interferograma, y el dato observado I_t . Esta suma de residuos al cuadrado se ve de la siguiente manera:

$$\xi(a, b_1, b_2) = \sum_{t=1}^N \{I_t - (a + b_1 c_t + b_2 s_t)\}^2, \quad (1.13)$$

ahora para encontrar los valores que minimizan la ecn anterior se deriva con respecto a cada uno de los coeficientes desconocidos ($a(x, y)$, b_1 y b_2) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_t}{\partial a} &= -2 \sum_{t=1}^N \{I_t - (a + b_1 c_t + b_2 s_t)\}, \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial b_1} &= -2 \sum_{t=1}^N \{I_t - (a + b_1 c_t + b_2 s_t)\} c_t, \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial b_2} &= -2 \sum_{t=1}^N \{I_t - (a + b_1 c_t + b_2 s_t)\} s_t. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Despues igualando a cero estas derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^N I_t &= \sum_{t=1}^N \{a + b_1 c_t + b_2 s_t\}, \\
 \sum_{t=1}^N I_t c_t &= \sum_{t=1}^N \{a + b_1 c_t + b_2 s_t\} c_t, \\
 \sum_{t=1}^N I_t s_t &= \sum_{t=1}^N \{a + b_1 c_t + b_2 s_t\} s_t.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ahora si expresamos estas ecuaciones en forma matricial, las cuales forman un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \sum I_t \\ \sum I_t c_t \\ \sum I_t s_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum c_t & \sum s_t \\ \sum c_t & \sum c_t^2 & \sum c_t s_t \\ \sum s_t & \sum c_t s_t & \sum s_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Una vez obtenidos los valores de $a(x, y)$, b_1 y b_2 de la ecuación anterior, la fase es obtenida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2}{b_1} &= -\frac{b(x, y) \sin[\phi]}{b(x, y) \cos[\phi]} = -\tan[\phi] \\
 \therefore \\
 \phi &= \arctan\left[\frac{b_2}{b_1}\right].
 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones puede ser simplificado como lo hace Morgan Morgan [8], el cual asume desplazamientos de fase a intervalos exactos de:

$$\alpha = \frac{2\pi}{N}, \tag{1.17}$$

CAPÍTULO 1. ALGORITMOS DE PHASE SHIFTING INTERFEROMETRY (PSI) 14

donde N es el número de interferogramas. Para éste caso en especial la matriz queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sum I_t \\ \sum I_t c_t \\ \sum I_t s_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \sum c_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum s_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

De donde es fácil ver que:

$$\begin{aligned} a &= \sum I_t \\ b_1 &= \sum I_t c_t \\ b_2 &= \sum I_t s_t. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dando una solución simple para obtener la fase de la siguiente forma:

$$\phi = \arctan\left[-\frac{\sum I_t s_t}{\sum I_t c_t}\right] \quad (1.20)$$

Capítulo 2

Analisis Espectral de Algoritmos de PSI

2.1. Objetivos:

- Entender el concepto de respuesta al impulso.
- Entender que es la rotación y el desplazamiento de los algoritmos de PSI.
- Comprender por que los algoritmos de PSI son filtros de cuadratura.
- Y analizar las diferencias entre el método de Freishlad & Koliopoulus y el de Servin.

2.2. Resumen

En el presente capítulo se trata el tema del análisis espectral de los algoritmos de PSI, tema de gran importancia en metrología óptica. Para poder hacer el análisis espectral de los algoritmos de PSI es necesario obtener la respuesta al impulso del algoritmo, motivo por el cual se dedica una sección a este tema. Así mismo se tratara por separado el método de y el de SERVIN, sin embargo se utilizaran los mismos ejemplos en cada sección, con el fin de exponer las diferencias. Por ultimo se

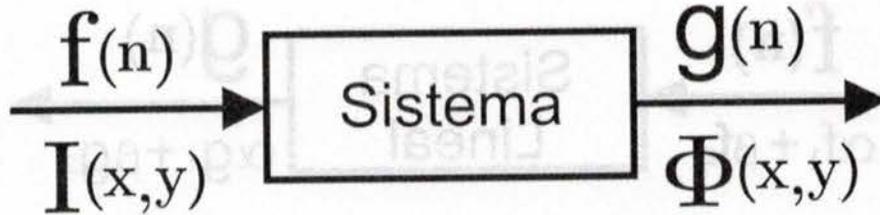


Figura 2.1: Representación esquemática de un sistema

plantearán una serie de conclusiones por las cuales estas técnicas son de gran utilidad en PSI.

2.3. Introducción

Actualmente para analizar los algoritmos de PSI existen dos enfoques, el propuesto por [2] y recientemente por SERVIN ET AL en el presente año. Estos enfoques hacen el análisis en el espacio de las frecuencias - esto es: sacando su transformada de Fourier - donde los algoritmos son vistos como filtros de cuadratura. En el caso de esta tesis se desarrollará con mayor detalle el método de SERVIN, por ofrecer un mejor análisis de las rotaciones y una mejor valoración de los filtros a simple vista.

2.4. Respuesta al Impulso de los Algoritmos de PSI

En esta sección se introducirá el concepto de respuesta al impulso de los algoritmos de PSI, los cuales pueden ser vistos como sistemas lineales.

Se dice que un sistema es aquel que dada una señal de entrada $f(n)$ nos entrega una señal de salida $g(n)$. En nuestro caso $f(n)$ representa los interferogramas obtenidos del arreglo experimental, el sistema es el filtro de cuadratura del Algoritmo de PSI y $g(n)$ es la señal compleja que sale del filtro de donde la fase se obtiene como el argumento de esta (Figura 2.1).

Dado que los filtros de cuadratura de los Algoritmos de PSI son lineales nuestro sistema debe de serlo también y se dice que un sistema es lineal cuando cumple las

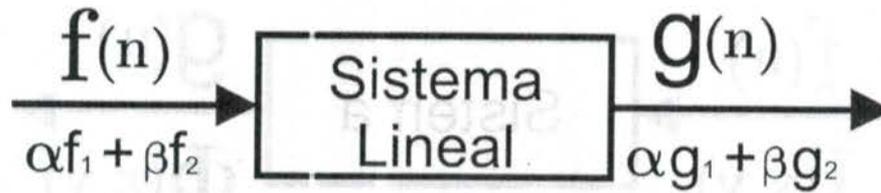


Figura 2.2: Esquema de un sistema lineal

propiedades de homogeneidad y superposición ecns 2.1 y 2.2 respectivamente.

$$L\{\alpha f_1(n)\} = \alpha L\{f_1(n)\} \quad (2.1)$$

$$L\{f_1(n) + f_2(n)\} = L\{f_1(n)\} + L\{f_2(n)\}, \quad (2.2)$$

donde $L\{\}$ es el sistema lineal, $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son funciones, y α y β son escalares. Estas ecns se pueden resumir en una sola, como se muestra en la ecn 2.3.

$$L\{\alpha f_1(n) + \beta f_2(n)\} = \alpha L\{f_1(n)\} + \beta L\{f_2(n)\}. \quad (2.3)$$

La ecn 2.3 es esquemáticamente resumida en la Figura 2.2.

A nosotros lo que nos interesa es analizar el comportamiento de nuestro algoritmo. Para ello introducimos una señal de prueba, en este caso un impulso unitario (Figura 2.3) conocido como delta de Dirac ($\delta(n)$) introducido por vez primera por el físico Inglés Paul Dirac. Esto equivale a multiplicar el sistema por su función identidad dándonos a la salida el comportamiento del sistema.

La $\delta(n)$ en el caso discreto matemáticamente se define como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

para el caso discreto, cabe aclarar que la $\delta(n)$ no es una función sino una distribución o función generalizada. Aunque para propósitos de claridad se utilizara como una función matemática con las siguientes propiedades:

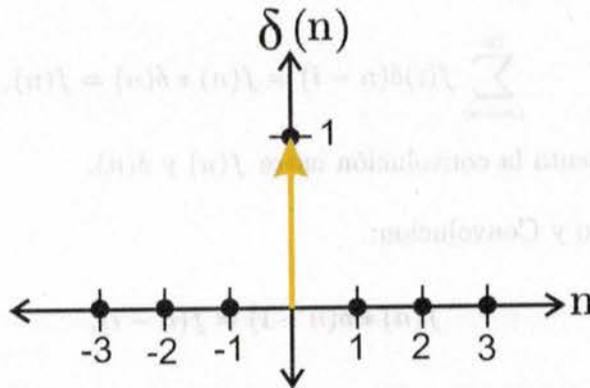


Figura 2.3: Representación grafica del impulso discreto

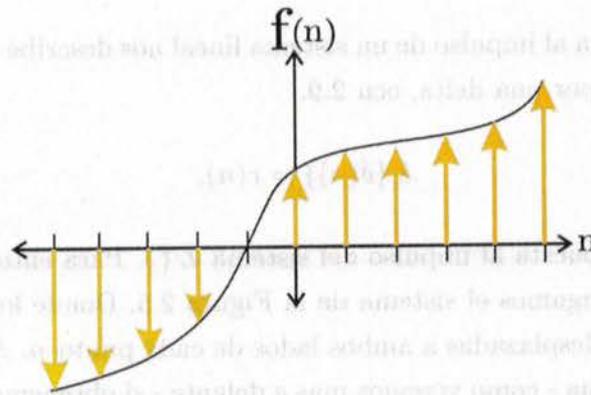


Figura 2.4: Descomposición de una función en deltas

- Desplazamiento:

$$f(n)\delta(n - i) = f(i), \quad (2.5)$$

lo que equivale a evaluar la función $f(n)$ en el punto i -esimo.

- Muestreo:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(n - i) = f(n) \quad (2.6)$$

equivalente a multiplicar una serie de deltas desplazadas por cada i -esimo punto de la función $f(n)$ obteniendo una función muestreada Figura 2.4 .

- Convolución:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(n-i) = f(n) * \delta(n) = f(n), \quad (2.7)$$

donde * representa la convolución entre $f(n)$ y $\delta(n)$.

- Desplazamiento y Convolucion:

$$f(n) * \delta(n-i) = f(n-i), \quad (2.8)$$

en este caso es equivalente a evaluar la función $f(n)$ en donde la delta este desplazada.

Por tanto la respuesta al impulso de un sistema lineal nos describe el comportamiento del sistema excitado por una delta, ecn 2.9.

$$L\{\delta(n)\} = r(n), \quad (2.9)$$

donde $r(n)$ es la respuesta al impulso del sistema $L\{\}$. Para entender este concepto un poco mejor supongamos el sistema de la Figura 2.5. Donde lo que obtenemos es una suma de deltas desplazadas a ambos lados de cada punto n . Aunque esto no nos dice mucho del sistema - como veremos mas adelante - si obtenemos su transformada de Fourier y graficamos su magnitud veremos facilmente que el sistema es un filtro pasa bajas Butterworth (Figura 2.6). De aqui la importancia del analisis espectral de los algoritmos de PSI.

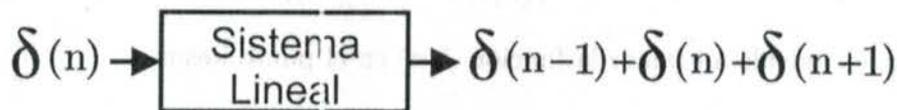


Figura 2.5: Ejemplo de la respuesta al impulso de un sistema pasa bajas Butterworth

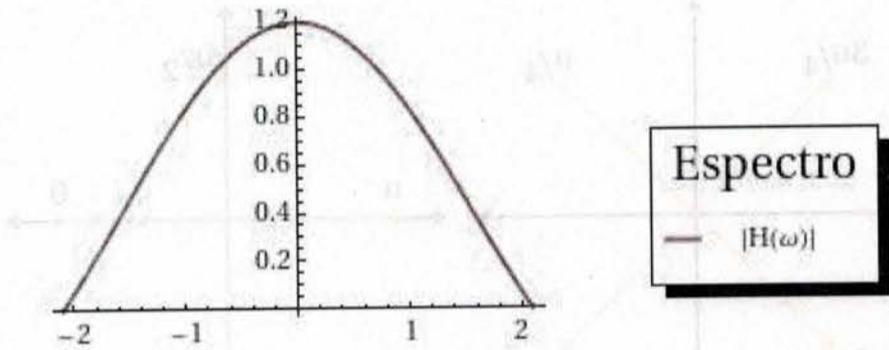


Figura 2.6: Respuesta al impulso del sistema de la Figura 2.5

2.5. Método de Freishlad y Koliopoulus

Para hacer el análisis espectral de este método utilizaremos dos algoritmos de cuatro pasos muy conocidos en PSI.

$$\tan[\phi_1(x, y)] = \frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{I_1 - I_2 - I_3 + I_4}, \quad (2.10)$$

y

$$\tan[\phi_1(x, y)] = \frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3}. \quad (2.11)$$

Los desplazamientos de fase necesarios entre cada interferograma para estos algoritmos es de $\pi/2$ radianes. En el caso del algoritmo de la ecn 2.10 tenemos desplazamientos en: $-3\pi/4$, $-\pi/4$, $\pi/4$ y $3\pi/4$ mientras que para la ecn 2.11 tenemos desplazamientos a $-\pi/2$, 0 , $\pi/2$ y π . Gráficamente lo podemos ver en la Figura 2.7.

Lo primero que se hace en este método es obtener la respuesta al impulso del filtro complejo asociado a cada algoritmo. Tenemos que la forma básica de un algoritmo de PSI es:

$$\tan[\phi] = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}},$$

el cual tiene el siguiente filtro complejo asociado $h(t)$:

$$h(t) = \text{Denominador} + i[\text{Numerador}].$$

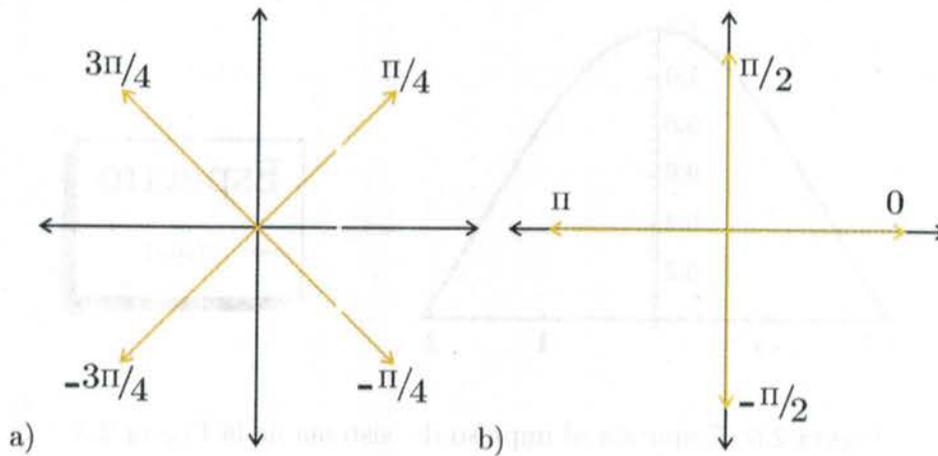


Figura 2.7: Desplazamientos de fase para algoritmos de las ecns: a)2.10 b)2.11.

De tal forma que la respuesta al impulso del filtro complejo asociado de las ecns 2.10 y 2.11 respectivamente son:

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= \delta(t - 3\pi/4) - \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) + \delta(t + 3\pi/4) & (2.12) \\
 &+ i[\delta(t - 3\pi/4) + \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) - \delta(t + 3\pi/4)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(t) &= \delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2) & (2.13) \\
 &+ i[\delta(t) - \delta(t + \pi)].
 \end{aligned}$$

A continuación se saca la transformada de Fourier de la parte imaginaria (Numer-

ador) y de la real (Denominador) de $h(t)$ por separado, ecns 2.14 y 2.15.

$$\begin{aligned}
 H_{1r}(\omega) &= F\{\text{Real}\{h_1(t)\}\} \\
 &= F\{\delta(t - 3\pi/4) - \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) + \delta(t + 3\pi/4)\} \\
 &= 4 \sin[\omega\pi/2] \sin[\omega\pi/4] \exp[-i\pi(\omega - 1)], \\
 H_{1i}(\omega) &= F\{\text{Imaginario}[h_1(t)]\} \\
 &= F\{i[\delta(t - 3\pi/4) + \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) - \delta(t + 3\pi/4)]\} \\
 &= 4 \sin[\omega\pi/2] \cos[\omega\pi/4] \exp[-i\pi(\omega - 1/2)],
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 H_{2r}(\omega) &= F\{\text{Real}\{h_2(t)\}\} \\
 &= F\{\delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2)\} \\
 &= 2 \sin[\omega\pi/2] \exp[-i\pi(\omega - 1)], \\
 H_{2i}(\omega) &= F\{\text{Imaginario}[h_2(t)]\} \\
 &= F\{i[\delta(t) - \delta(t + \pi)]\} \\
 &= 2 \sin[\omega\pi/2] \exp[-i\pi(\omega - 1/2)]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Donde $H_{nr}(\omega)$ y $H_{ni}(\omega)$ representan la transformada de Fourier de la parte real e imaginaria de $h_n(t)$ respectivamente. Teniendo las transformadas de cada filtro se recomienda analizar el espectro sin terminos de fase en común, quedando así dos funciones reales para graficar:

$$\begin{aligned}
 H_1^r(\omega) &= 4 \sin[\omega\pi/2] \sin[\omega\pi/4] \\
 H_1^i(\omega) &= 4 \sin[\omega\pi/2] \cos[\omega\pi/4],
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 H_2^r(\omega) &= 2 \sin[\omega\pi/2] \\
 H_2^i(\omega) &= 2 \sin[\omega\pi/2].
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Los espectros de Fourier de estos algoritmos se muestran en las Figuras 2.8 y 2.9

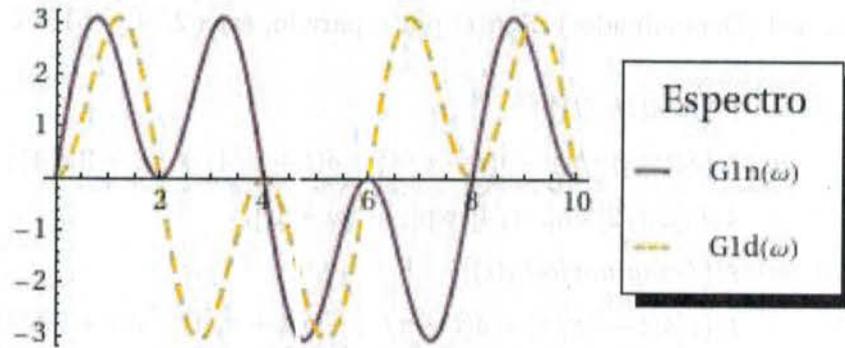


Figura 2.8: Espectro del Algoritmo 2.10

los cuales corresponden a los algoritmos de las ecns 2.15 y 2.14 respectivamente.

2.5.1. Interpretación de los Espectros

En este método F&K proponen que el algoritmo de PSI encontrara la fase correcta en las frecuencias donde cruzan las dos funciones, cabe aclarar que las frecuencias corresponden con el valor de desplazamiento entre cada interferograma. En el caso de la Figura 2.9, en un periodo de 0 a π , tenemos cruce de las funciones $G_{1n}(\omega)$ y $G_{1d}(\omega)$ en 1α y 2α , a las que les corresponde la frecuencia de $\pi/4$ y $\pi/2$ respectivamente. Otra característica importante de este método es que visualmente podemos ver que tan sensible es el algoritmo de PSI a la inexactitud de los desplazamientos (error de desentonamiento). Por tanto en la Figura 2.9 vemos que el algoritmo de PSI de la ecn 2.10 es muy sensible al error de desentonamiento, ya que la fase correcta es encontrada solo en el punto donde cruzan las funciones $G_{1n}(\omega)$ y $G_{2d}(\omega)$. De tal forma que si se tienen desplazamientos de $(\pi/2) \pm un\ error$ obtendremos una fase con errores.

Por último tenemos el caso del algoritmo de PSI de la ecn 2.11. Donde vemos que las funciones $G_{2n}(\omega)$ y $G_{2d}(\omega)$ son exactamente iguales (Figura 2.9) lo que sugiere, de acuerdo a F&K, que en cualquier frecuencia obtendremos una fase correcta ya que se tocan en todos los puntos, cosa que no es cierta. Por tanto este método

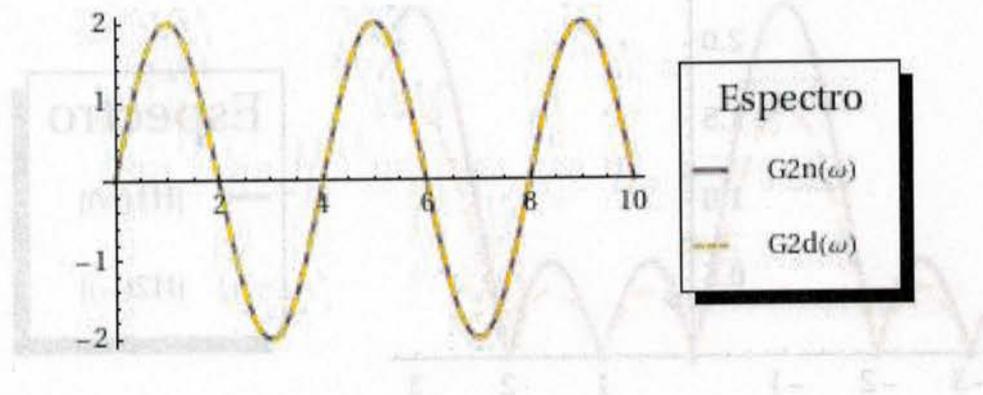


Figura 2.9: Espectro del Algoritmo 2.11

falla al analizar algunos algoritmos de PSI. Otra desventaja con este método es que es sensible a las rotaciones y desplazamientos de los algoritmos de PSI. Un ejemplo visible son las Figuras 2.8 y 2.9, donde el espectro de estos algoritmos es muy diferente, aunque los filtros solo se encuentran rotados en $\pi/4$ uno del otro. Mas adelante veremos que la respuesta al impulso de estos algoritmos es proporcional y por tanto tienen las mismas características de filtrado.

2.6. Método de Servin

A diferencia del método de [2], este método propone analizar la transformada de Fourier del filtro completo de la respuesta al impulso del algoritmo $h(t)$:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= F\{h(t)\} \\
 H_r(\omega) + H_i(\omega) &= F\{h_r(t) + ih_i(t)\}. \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Por tanto utilizando la respuesta al impulso de los filtros complejos asociados $h_1(t)$ y $h_2(t)$ de la sección anterior y sacando su transformada de Fourier obtenemos $H_1(\omega)$

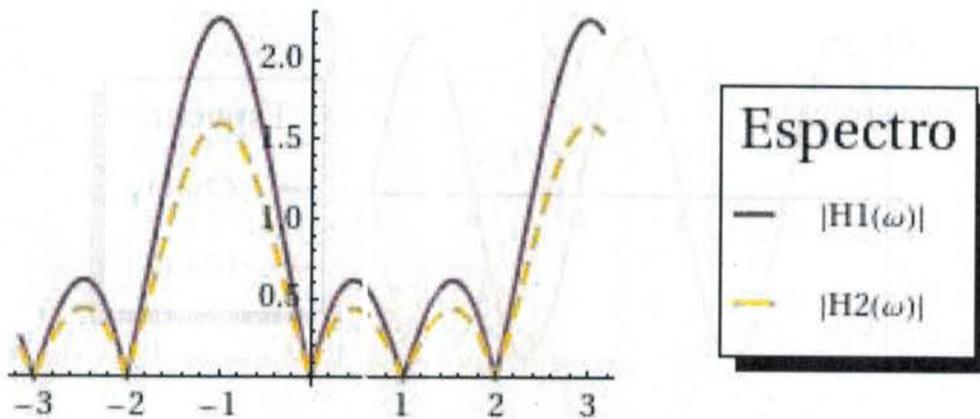


Figura 2.10: Espectro de los Algoritmos en ecns 2.10 y 2.11 con el método de Servin.

y $H_2(\omega)$ respectivamente, ecuaciones 2.19 y 2.20.

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega) &= F\{\delta(t - 3\pi/4) - \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) + \delta(t + 3\pi/4) \\
 &\quad + i[\delta(t - 3\pi/4) + \delta(t - \pi/4) - \delta(t + \pi/4) - \delta(t + 3\pi/4)]\} \\
 H_1(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\cos\left[\frac{\pi\omega}{4}\right] + \cos\left[\frac{3\pi\omega}{4}\right] + \sin\left[\frac{\pi\omega}{4}\right] + \sin\left[\frac{3\pi\omega}{4}\right] \right), \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(\omega) &= F\{\delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2) + i[\delta(t) - \delta(t + \pi)]\} \\
 H_2(\omega) &= \frac{i \exp[-i\pi\omega] (1 + \exp[i\pi\omega] (-1 + 2 \sin[\frac{\pi\omega}{2}]))}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Por ultimo para ver el comportamiento graficamente del filtro es necesario graficar la magnitud de $H(\omega)$, ecn 2.21.

$$\begin{aligned}
 |H(\omega)| &= |F\{h(t)\}| \\
 &= \sqrt{H_r(\omega)^2 + H_i(\omega)^2}, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

donde $H_r(\omega)$ y $H_i(\omega)$ son la parte real e imaginaria de $H(\omega)$. De tal forma, graficando $|H_1(\omega)|$ y $|H_2(\omega)|$ obtenemos la Figura 2.10. En esta figura es claramente visible

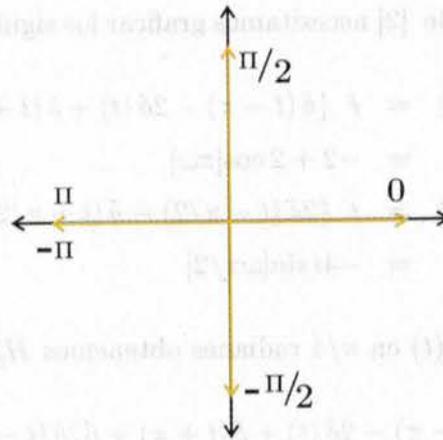


Figura 2.11: Desplazamientos de fase para algoritmo en ecn 2.22.

que: estos algoritmos son proporcionales y cuentan con las mismas características de filtrado. Por tanto con este método es fácil saber a simple vista si los algoritmos analizados son proporcionales o iguales.

Otra ventaja con este método es su invariancia a las rotaciones y desplazamientos de los filtros. Para ejemplificar esto utilizamos el algoritmo de cinco pasos de la ecn 2.22.

$$\tan[\phi(x, y)] = \frac{2(I_2 - I_4)}{I_1 - 2I_3 + I_5} \quad (2.22)$$

El cual tiene desplazamientos de fase a: $-\pi$, $-\pi/2$, 0 , $\pi/2$ y π radianes, Figura 2.11. Este algoritmo tiene asociado la siguiente respuesta al impulso $h_3(t)$:

$$h_3(t) = \delta(t - \pi) - 2\delta(t) + \delta(t + \pi) + i[2\delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2)]. \quad (2.23)$$

De acuerdo con el método de [2] necesitamos graficar los siguientes espectros de Fourier:

$$\begin{aligned}
 H_3 r(\omega) &= F \{ \delta(t - \pi) - 2\delta(t) + \delta(t + \pi) \} \\
 &= -2 + 2 \cos[\omega\pi] \\
 H_3 i(\omega) &= F \{ 2\delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2) \} \\
 &= -4i \sin[\omega\pi/2]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Sin embargo si rotamos $h_3(t)$ en $\pi/4$ radianes obtenemos $H_3^R(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 h_3(t) \exp[i\pi/4] &= \{ \delta(t - \pi) - 2\delta(t) + \delta(t + \pi) + i[2\delta(t - \pi/2) - \delta(t + \pi/2)] \} \exp[i\pi/4] \\
 H_3^R(\omega) &= \delta(t - \pi) + 2\delta(t - \pi/2) - \delta(t) - 2\delta(t + \pi/2) + \delta(t + \pi) \\
 &\quad + i[\delta(t - \pi) - 2\delta(t - \pi/2) - 2\delta(t) + 2\delta(t + \pi/2) + \delta(t + \pi)],
 \end{aligned}$$

lo que nos da el siguiente algoritmo de cinco pasos:

$$\tan[\phi(x, y) + \pi/4] = \frac{I_1 + 2I_2 - 2I_3 - 2I_4 + I_5}{I_1 - 2I_2 - 2I_3 + 2I_4 + I_5} \tag{2.26}$$

Ahora bien la transformada de Fourier de la parte real e imaginaria de este algoritmo rotado son:

$$\begin{aligned}
 H_3^R r(\omega) &= -2 + 2 \cos[\omega\pi] - 4i \sin[\omega\pi/2] \\
 H_3^R i(\omega) &= -2 + 2 \cos[\omega\pi] + 4i \sin[\omega\pi/2].
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dadas las diferencias de las ecns 2.24 y 2.27 y del espectro según el método de [2] es fácil pensar que se tratan de algoritmos diferentes. Sin embargo si graficamos la magnitud de la transformada de Fourier de $h_3(t)$ y $h_3(t) \exp[i\pi/4]$, ecns 2.23 y 2.25 respectivamente, es fácil ver que estos dos algoritmos son idénticos Figura 2.12.

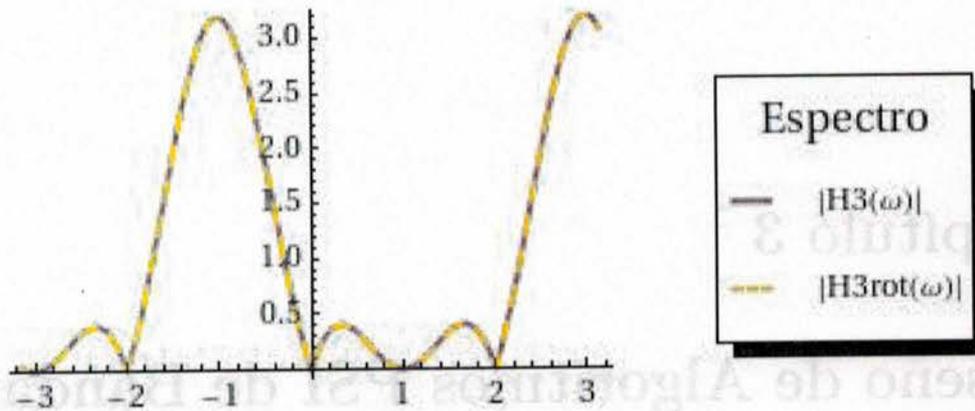


Figura 2.12: Espectro de los Algoritmos en ecns 2.22 y 2.26 con el método de Servin.

2.6.1. Interpretación de los Espectros

Para el método de Servin a diferencia del de F&K encontramos la fase exacta en -1 (Figuras 2.8 y 2.9) lo cual corresponde a la frecuencia asociada al desplazamiento entre cada interferograma. En el caso de las ecns 2.10 y 2.11 tenemos que es de $\pi/2$. Algo que es muy evidente de analizar con este método es el error de desentonamiento. En la Figura 2.8 podemos ver que los algoritmos de PSI de las ecns 2.8 y 2.9 cortan exactamente en 1, lo que nos sugiere un bajo rechazo al error de desentonamiento. A diferencia del algoritmo de PSI de la ecn 2.22 que tiene un mejor rechazo al error de desentonamiento ya que la curva es tangencial al origen, Figura 2.12. Como podemos ver con este método es fácil identificar si un filtro es sensible al desentonamiento, además de poder identificar a simple vista si dos algoritmos de PSI son iguales o como en el caso de los algoritmos de cuatro pasos presentados, si son proporcionales.

Capítulo 3

Diseño de Algoritmos PSI de Banda Ancha

3.1. Objetivos:

- Entender como generar algoritmos de PSI a partir del análisis frecuencial.
- Generar un algoritmo de PSI de banda ancha.
- Entender que es un filtro de cuadratura.

3.2. Resumen

En este capítulo mostramos la forma de diseñar algoritmos de PSI de banda ancha. La idea principal es usar el análisis frecuencial para poder diseñar un nuevo filtro de banda ancha a partir de filtros de cuadratura de primer y segundo orden. Así mismo se genera un algoritmo de PSI de cinco pasos a partir de este nuevo método de generar algoritmos de PSI.

Figura 3.1: Representación grafica de la señal $I(x, y)$ en el espacio de las frecuencias.

3.3. Intruducción

El problema que resuelven los algoritmos de PSI para encontrar la fase puede ser visto como el proceso de obtener $\phi(x, y)$ de la siguiente expresión:

$$I'(x, y) = \frac{b(x, y)}{2} \exp[i(\phi(x, y) + \alpha t)], \quad (3.1)$$

esto lo logramos utilizando un filtro de cuadratura que elimina $a(x, y)$ y $\frac{b}{2} \exp[-i(\phi(x, y) + \alpha t)]$ de la ecn 1.4, la que puede expanderse de la siguiente manera:

$$I(x, y, t) = a + \frac{b \exp[i(\phi + \alpha t)]}{2} + \frac{b \exp[-i(\phi + \alpha t)]}{2}, \quad (3.2)$$

la dependencia temporal de $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ han sido omitida con fines de claridad.

Para mostrar como se construyen estos filtros de cuadratura utilizaremos la transformada de Fourier de la ecn 3.2:

$$I(\omega) = a\delta(\omega) + \frac{b}{2} \exp[-i\phi]\delta(\omega - \alpha) + \frac{b}{2} \exp[-i\phi]\delta(\omega + \alpha). \quad (3.3)$$

Como vemos al aplicar la transformada de Fourier a la señal $I(x, y, t)$ obtenemos tres deltas de dirac: una en el origen de amplitud a y dos mas en α y $-\alpha$ de amplitud $\frac{b}{2} \exp[-i\phi]$ (Figura 3.1).

Por lo tanto para obtener la expresión 3.1 de la ecn 1.4, necesitamos dos cosas:

1. Un filtro de cuadratura que elimine las deltas en las frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \alpha$, quedando así solo:

$$I'(\omega) = \frac{b}{2} \exp[-i\phi]\delta(\omega - \alpha). \quad (3.4)$$

Y

2. Obtener la transformada inversa de Fourier de $I'(\omega)$ (ecn 3.4).

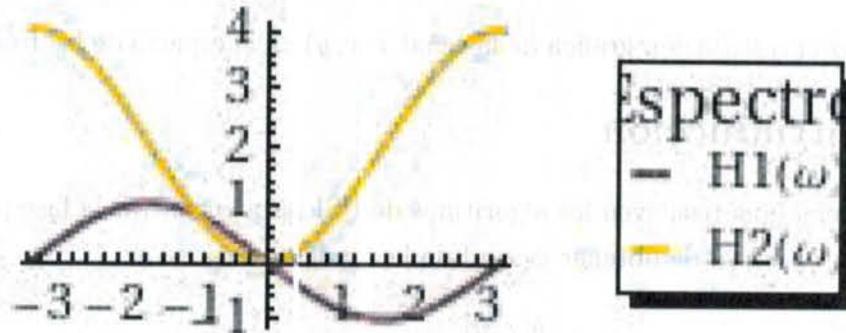


Figura 3.2: Muestra el espectro de las ecns 3.6 y 3.8.

3.4. Construyendo un conocido Algoritmo de PSI

Para mostrar como se logra esto empecemos por definir el sistema $h_1(t)$ que tiene la siguiente respuesta al impulso:

$$h_1(t) = \frac{i}{2}(\delta(t-1) - \delta(t+1)). \quad (3.5)$$

El cual está definido como imaginario para obtener una respuesta frecuencial real. Por tanto la transformada de Fourier de la ecn 3.5 es:

$$H_1(\omega) = -\sin[\omega]. \quad (3.6)$$

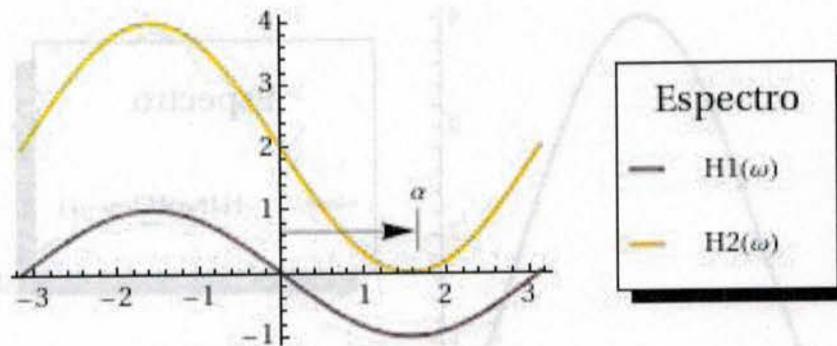
Ahora definamos el siguiente sistema:

$$h_2(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t+1), \quad (3.7)$$

el cual también tiene una respuesta frecuencial real, esto es:

$$H_2(\omega) = 2 - 2\cos[\omega]. \quad (3.8)$$

Los sistemas de las ecns 3.6 y 3.8 pueden ser utilizados como filtros de primer y segundo orden respectivamente. En la Figura 3.2 podemos ver que los filtros $H_1(\omega)$ y


 Figura 3.3: Grafica de $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega - \alpha)$.

$H_2(\omega)$ cruzan por cero en el origen removiendo la componente frecuencial en $\omega = 0$, dado que queremos eliminar también la frecuencia en $\omega = \pm\alpha$ necesitamos desplazar uno de nuestros filtros en $\pm\alpha$ (Figura 3.3). Quedando así $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ de la siguiente forma:

$$H_1(\omega) = -\sin[\omega],$$

$$H_2(\omega - \alpha) = 2 - 2\cos[\omega - \alpha].$$

Multiplicando $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega - \alpha)$ obtenemos $H(\omega)$:

$$H(\omega) = -\sin[\omega](2 - 2\cos[\omega - \alpha]), \quad (3.9)$$

en la Figura 3.4 mostramos el producto de estos dos filtros, donde podemos ver que corta en $\omega = 0$ y $\omega = \alpha$, obteniendo así un nuevo filtro de cuadratura. Sacando la transformada inversa de Fourier de ecn 3.9 obtenemos la respuesta al impulso de este nuevo sistema:

$$h(t) = (2\delta(t) - \delta(t - 2) - \delta(t + 2)) \sin[\alpha]/2$$

$$+ i(2\delta(t - 1) - 2\delta(t + 1))/2$$

$$- i(\delta(t - 2) - \delta(t + 2)) \cos[\alpha]/2.$$

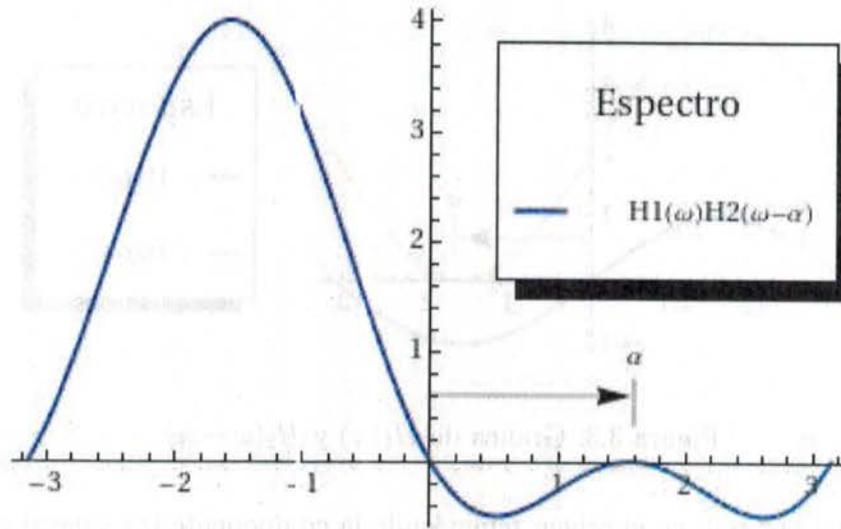


Figura 3.4: Grafica del producto de los filtros $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega - \alpha)$.

Ahora, como queremos una expresión matemática para obtener un algoritmo de PSI, necesitamos hacer la convolución de $h(t)$ con la señal $I(x, y, t)$ tomando $t = 0$. Haciendo esto obtenemos el siguiente algoritmo de cinco pasos:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{2I_2 - 2I_4 - (I_1 - I_5) \cos[\alpha]}{(2I_3 - I_1 - I_5) \sin[\alpha]}\right],$$

del cual, tomando pasos de $\alpha = \pi/2$ obtenemos:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{2I_2 - 2I_4}{2I_3 - I_1 - I_5}\right],$$

mismo que es un clásico algoritmo de PSI de cinco pasos de Hariharan [5].

Como podemos ver esta forma de construir filtros de cuadratura resulta consistente para obtener algoritmos de PSI que ya existen sin embargo este método es más poderoso ya que desde el punto de vista que nosotros somos capaces de diseñar algoritmos de PSI en una forma más fácil y sencilla que el método de mínimos cuadrados (sección 1.3.2) para cualquier desplazamiento de fase.

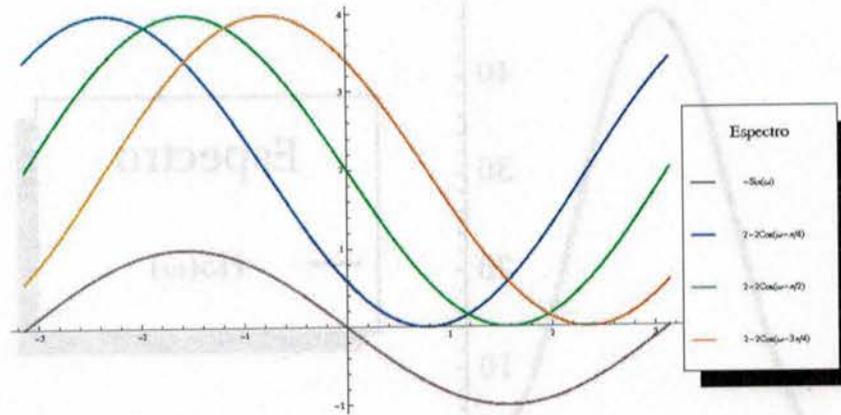


Figura 3.5: Grafica de los filtros $H_1(\omega)$, $H_2(\omega - \alpha_1)$, $H_2(\omega - \alpha_2)$ y $H_2(\omega - \alpha_3)$.

3.5. Construyendo un algoritmo de banda ancha

Ahora, mostraremos como con este poderoso método podemos generar un algoritmo de banda ancha. En la Figura 3.5 se muestra el filtro de primer orden de la ecn 3.6 que corta en $\omega = 0$, y tres filtros de segundo orden de la ecn 3.8 que cortan en $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$ (ecns 3.10).

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega) &= -\sin[\omega] \\
 H_2(\omega - \alpha_1) &= 2 - 2\cos[\omega - \alpha_1] \\
 H_2(\omega - \alpha_2) &= 2 - 2\cos[\omega - \alpha_2] \\
 H_2(\omega - \alpha_3) &= 2 - 2\cos[\omega - \alpha_3].
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Después, tomando el producto de estos filtros de cuadratura, obtenemos el filtro de banda ancha mostrado en la Figura 3.6, el cual casi un rechazo a la delta entre 0 y π radianes. Matemáticamente, obtenemos el siguiente filtro de cuadratura:

$$H_5(\omega) = -H_1(\omega)H_2(\omega - \alpha_1)H_2(\omega - \alpha_2)H_2(\omega - \alpha_3). \tag{3.11}$$

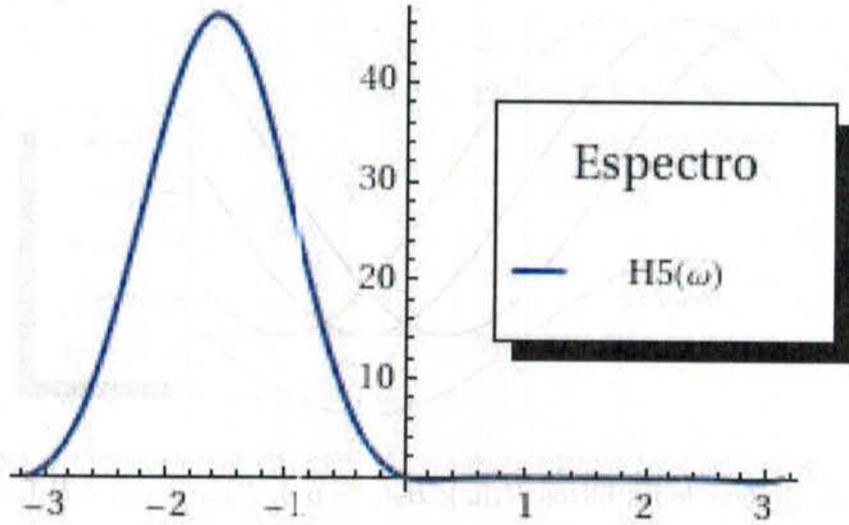


Figura 3.6: Grafica del producto de los filtros $H_1(\omega)$, $H_2(\omega - \alpha_1)$, $H_2(\omega - \alpha_2)$ y $H_2(\omega - \alpha_3)$.

Ahora, sacando la transformada inversa de Fourier de la ecn 3.11, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2}\delta(t-4) - (2\sqrt{2}+3)\delta(t-2) + (4\sqrt{2}+5)\delta(t) \\
 &- (2\sqrt{2}+3)\delta(t+2) + \frac{1}{2}\delta(t+4) \\
 &- i[(\sqrt{2}+1)\delta(t-3) - (3\sqrt{2}+5)\delta(t-1) + \\
 &(3\sqrt{2}+5)\delta(t+1) - (\sqrt{2}+1)\delta(t+3)].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, para obtener una expresión matemática para este filtro de banda ancha, hacemos la convolución entre este filtro y la ecn 1.4, y tomando $t = 0$. Entonces obtenemos el siguiente algoritmo de PSI de nueve pasos de banda ancha:

$$\phi(x, y) = \arctan\left[\frac{(\sqrt{2}+1)I_2 - (3\sqrt{2}+5)I_4 + (3\sqrt{2}+5)I_6 - (\sqrt{2}+1)I_8}{\frac{1}{2}I_1 - (2\sqrt{2}+3)I_3 + (4\sqrt{2}+5)I_5 - (2\sqrt{2}+3)I_7 + \frac{1}{2}I_9}\right]. \tag{3.13}$$

Capítulo 4

Resultados

4.1. Objetivos

Utilizando el algoritmo de banda ancha de nueve pasos y el de Hariharan de cinco pasos de la sección anterior se demodulará:

- Un Video-Interferograma simulado de una placa que vibra con un solo modo
- Un Video-Interferograma real de un interferómetro michelson, utilizando el algoritmo de banda ancha de 9-pasos y con el algoritmo de Hariharan de 5-pasos de la sección anterior.

4.2. Resumen

Este capítulo, plantea una aplicación para demodular una secuencia temporal de interferogramas, en la cual, la secuencia de interferogramas es presentada como un video. A este video de interferogramas lo llamamos video-interferogramas. En las secciones anteriores, mostramos el desarrollo de algoritmos para interferometría por pasos. En particular, aquí mostraremos el uso de un algoritmo de banda ancha para demodular un video-interferograma en donde la fase del interferograma se mueve a través del tiempo. Para tener una mejor apreciación de los resultados numéricos que

aquí presentamos, mostraremos una secuencia de simulada, la cual será procesada para obtener la fase usando dos métodos: el de 5-pasos propuesto por Hariharan, y el de 9-pasos de banda ancha que revisamos en la sección anterior. Después, mostraremos unas secuencias de interferogramas obtenidos experimentalmente en el laboratorio, para mostrar la eficiencia de los algoritmos de banda ancha.

4.3. Introducción

En metrología óptica existen problemas en los que se requieren hacer mediciones de eventos dinámicos, como lo son: vibraciones, desplazamientos, deformaciones, etc. Donde, cabe aclarar, que el objeto de estudio es el que se mueve y no así el espejo de referencia del interferómetro. Para esto, se utilizan cámaras rápidas en un arreglo interferométrico. Para ello se propone demodular los Video-Interferogramas con algoritmos de PSI de banda ancha. Los cuales como ya vimos en la sección anterior tienen un gran rechazo al error de desentonamiento, el cual es presente en cada cuadro del Video-Interferograma. Esto es, cada cuadro del Video-Interferograma no se encuentra a un desplazamiento exacto, dado que el objeto se mueve "aleatoriamente".

4.4. Prueba 1: Demodulación de Video-Interferograma Simulado

En esta prueba se simuló un video-interferograma de una placa que vibra con un modo de vibración estacionario con una portadora entonada a $\pi/2$. Con el fin de poder hacer un análisis cualitativo de los algoritmos de PSI de banda ancha frente a los algoritmos tradicionales de PSI, en video-interferogramas.

Para hacer el análisis utilizaremos una sección de nueve cuadros del video-interferograma simulado, en este caso los cuadros del número 27 al número 35. Donde se obtendrá la fase del cuadro número 31 (Figura 4.1), por ser el interferograma central de nuestros algoritmos de PSI.

En la Figura 4.2 a) y 4.2b) se muestran los mapas de fase de nuestro cuadro

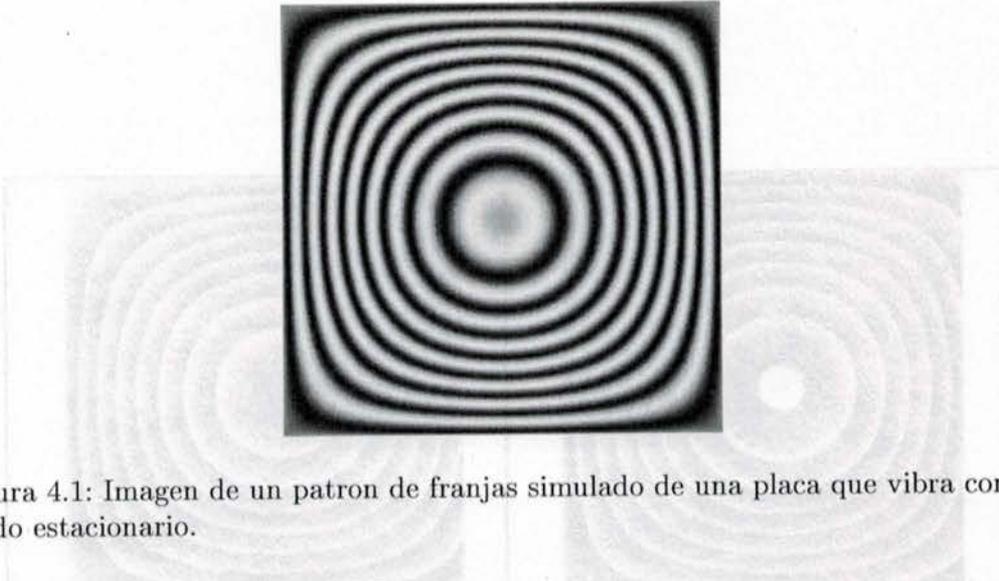


Figura 4.1: Imagen de un patron de franjas simulado de una placa que vibra con un modo estacionario.

central (Figura 4.1) obtenidas con el algoritmo de 5-pasos de Hariharan y el de 9-pasos de banda ancha. Para poder hacer el analisis cualitativo del desempeño de estos dos algoritmos de PSI sacamos el coseno de las fase obtenida, lo que nos regresa al patron de franjas original en este caso nuestro cuadro central. Por tanto solo restaria hacer una comparaci3n con nuestro cuadro central original, Figura 4.1.

De tal forma sacando el coseno de los mapas de fase de las Figuras 4.2 a) y 4.2 b) obtenemos las Figuras 4.2 c) y 4.2 d) respectivamente. De aqui podemos concluir que el algoritmo de banda ancha tiene un mejor desempe1o recuperando la fase en la parte central del patron de franjas simulado, donde la frecuencia no est1 exactamente entonada a $\pi/2$. Lugar donde el algoritmo de 5-pasos de Hariharan en efectivo.

Con esto podemos concluir de manera cualitativa que el algoritmo de 9-pasos se desempe1a mejor en frecuencias no centradas a $\pi/2$.

En la proxima secci3n veremos algunos resultados obtenidos, aplicando este algoritmo de banda ancha a video-interferogramas grabados en el laboratorio.

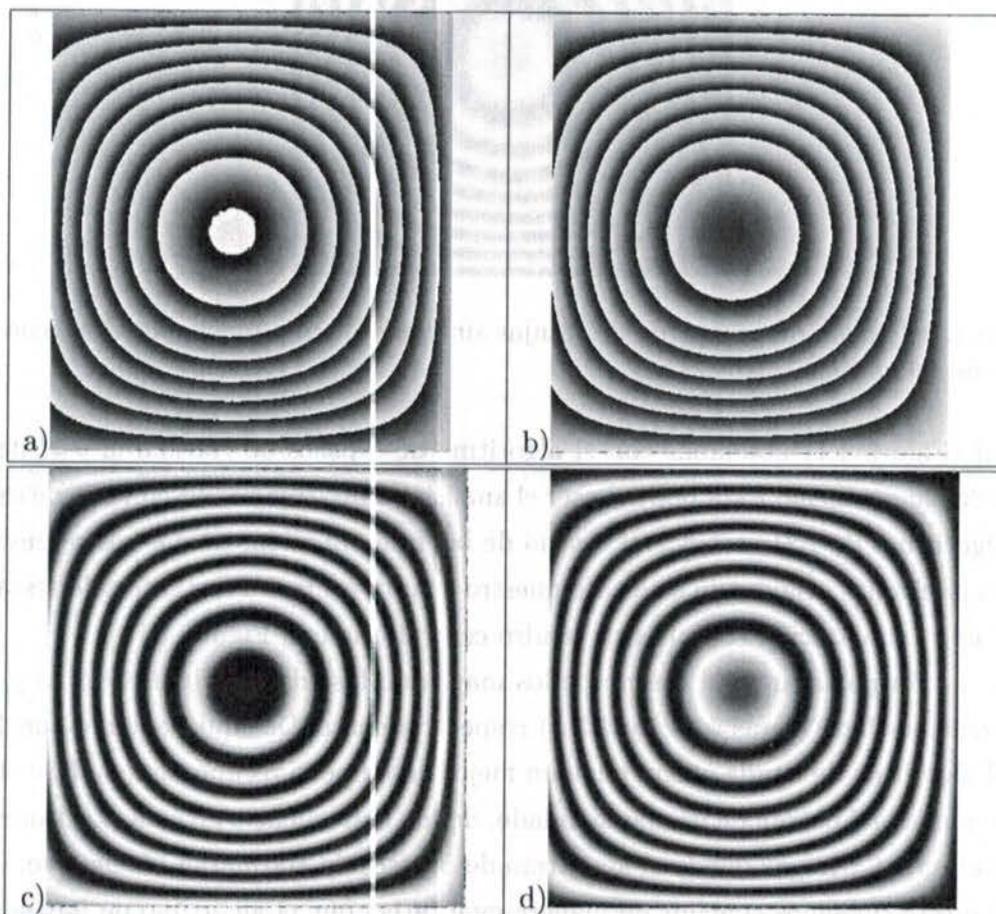


Figura 4.2: Imágenes de: a) Fase obtenida con el algoritmo de 5-pasos de Hariharan. b) Fase obtenida con el algoritmo de 9-pasos de banda ancha. c) Coseno de la fase del mapa de fase del algoritmo de 5-pasos de Hariharan. d) Coseno de la fase del mapa de fase del algoritmo de 9-pasos de banda ancha.

4.5. Prueba 2: Demodulación de Video-Interferogramas Experimentales

Para esta prueba se utilizaron dos video-interferogramas experimentales, de donde se obtubieron sus mapas de fase. Para el primer video-interferograma se armo un interferometro tipo michelson con dos espejos planos. En uno de los espejos se coloco un piezo-eléctrico el cual se dezplazo mientras se grababa el patron de franjas. Una sección de los mapas de fase obtenidos con el algoritmo de 9-pasos de banda ancha es mostarado en la Figura 4.3 .

Para el caso del segundo video-interferograma se armo un arreglo de Spekel utilizando una placa metalica como objeto y una camara rapida para grabar las variaciones en el patron de franjas. La placa se hizo vibrar con sonido para producir el patron de franjas de forma dinámica.

En la Figura 4.4 se muestran los mapas de fase obtenidos de la primera parte del video experimental antes mencionado.

Por último en la Figura 4.5 se muestran los mapas de fase de la ultima parte del video donde se ven otro tipo vibraciones en la placa.

Como podemos ver en estas pruebas experimentales es posible obtener mapas de fase de eventos dinámicos.

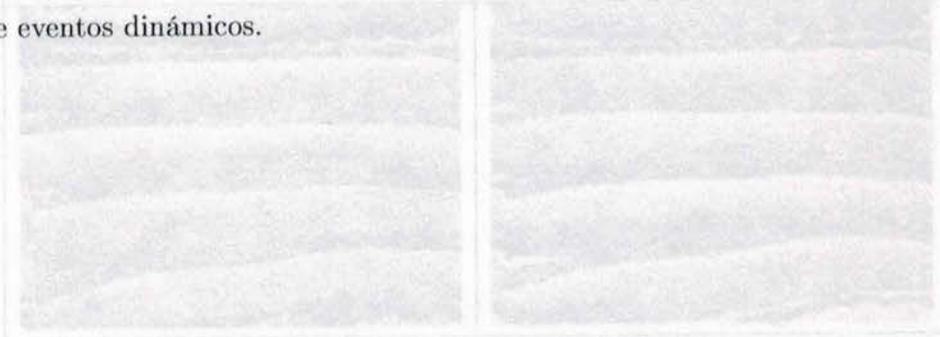


Figura 4.3: Sección de mapas de fase de un video-interferograma de un interferometro tipo michelson

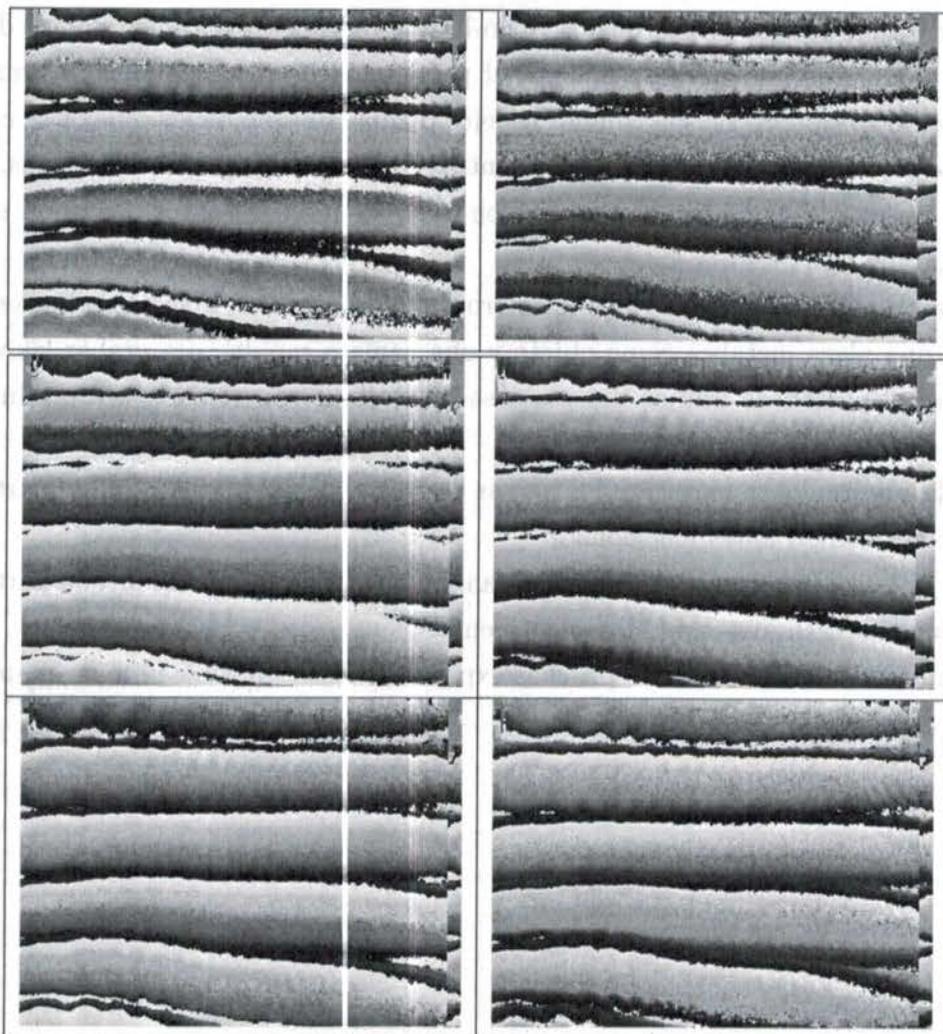


Figura 4.3: Secuencia de mapas de fase de un video-interferograma de una interferómetro tipo michelson.

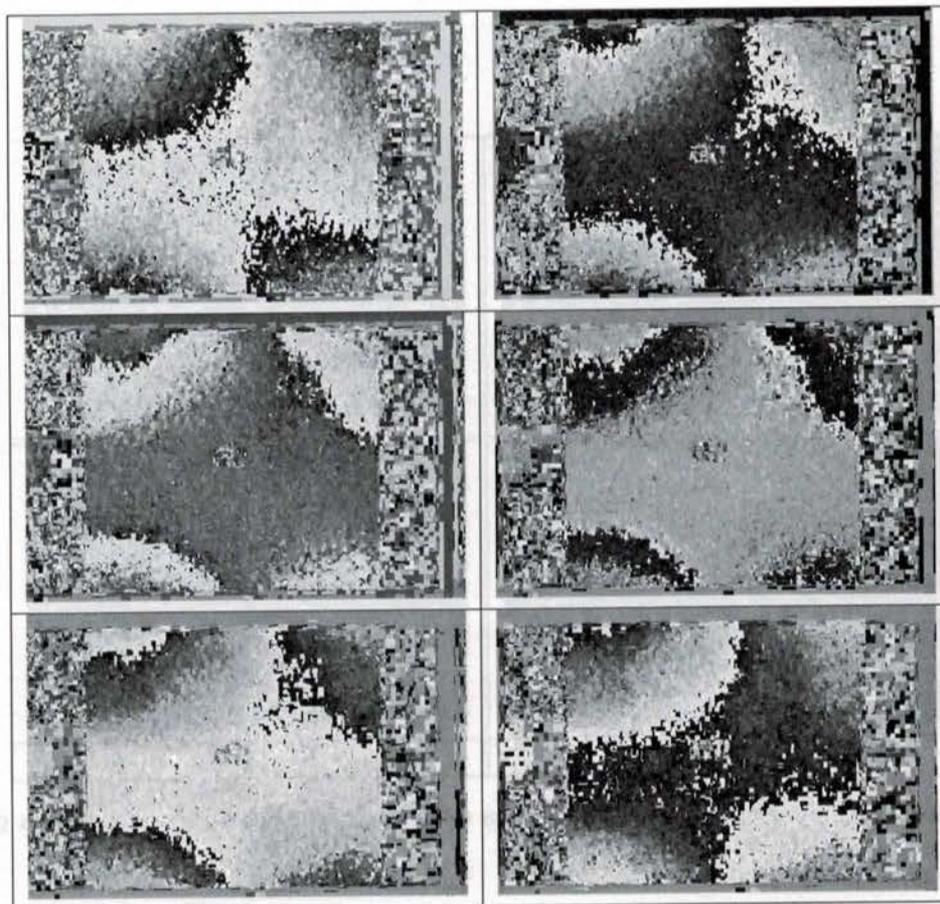


Figura 4.4: Secuencia parte 1 de los mapas de fase de un video-interferograma de un placa que vibra.

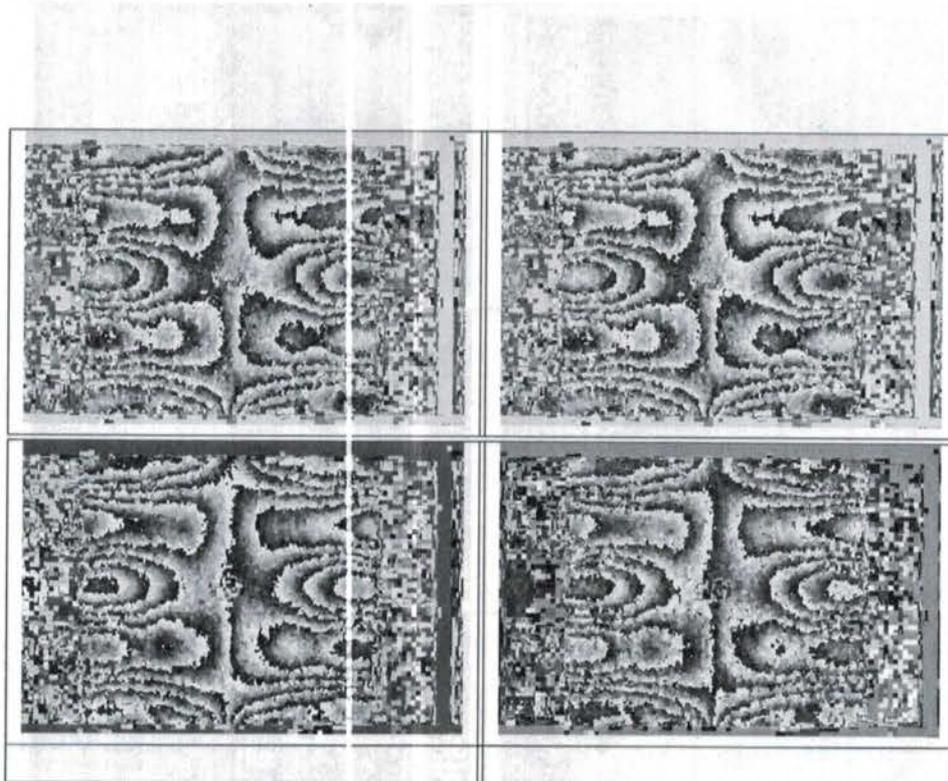


Figura 4.5: Secuencia parte 2 de los mapas de fase de un video-interferograma de un placa que vibra.

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo muestra resultados obtenidos en el grupo de trabajo formado por el Dr. Servin y el Dr. Estrada. En el capítulo 2, mostramos un enfoque para analizar los interferogramas en el dominio de Fourier. Para nosotros, este enfoque presenta una mejor descripción de los algoritmos de PSI y nos permite incluso diseñar estos algoritmos de PSI en el dominio de las frecuencias, como se muestra en el capítulo 3, donde se obtiene un algoritmo de banda ancha de 9-pasos. Finalmente, presentamos una aplicación, cuyo único propósito en esta tesis es demostrar la utilidad que pueden tener estos algoritmos para el análisis en tiempo real de interferogramas obtenidos en pruebas de eventos dinámicos. Sin embargo, es necesario remarcar que en esta tesis que debido a las limitaciones de tiempo, la demodulación completa de las secuencias temporal de interferogramas (video-interferogramas), aun se encuentra en vías de desarrollo. De esta manera, esta tesis presenta el trabajo y los últimos avances que se han obtenido en esta área con miras hacia la demodulación de interferogramas en tiempo real.

Capítulo 6

Trabajo a Futuro

Como mencionamos anteriormente en las conclusiones, aún queda mucho trabajo por desarrollar si queremos alcanzar la meta para demodular una secuencia temporal de video-interferogramas. Una de las principales complicaciones que se encuentran es que en una secuencia de video, la frecuencia portadora temporal de los interferogramas se puede perder, implicando que los algoritmos de PSI obtengan una fase con una ambigüedad de signo temporal. Este problema, resulta complicado de resolver, ya que para resolver esta ambigüedad del signo en el tiempo, es necesario que los algoritmos de PSI tengan interacciones con los vecinos espaciales de un punto dado, además de la interacción que existe entre los vecinos temporales para determinar la fase. De aquí es que como trabajo futuro proponemos lo siguiente:

- Hacer un estudio para encontrar una medida matemática que nos permita determinar el cambio de signo temporal de la fase.
- Desarrollar algoritmos espacio-temporales para demodular secuencias de video, y que tomen en cuenta la medida que nos permita resolver las ambigüedades de cambio de signo.
- Que los algoritmos sean eficientes, de tal forma que sea posible implementar estos algoritmos para la demodulación de los video-interferogramas en tiempo real.

Bibliografía

- [1] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.*, 13(11):2693, 1974.
- [2] K. Freishlad and C. L. Koliopoulos. Fourier description of digital phase-measuring interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 7(4):542–551, April 1990.
- [3] John E. Greivenkamp. Generalized data reduction for heterodyne interferometry. *Optical Engineering*, 23(4):350–352, July 1984.
- [4] P. Hariharan. Digital phase-stepping interferometry: effects of multiply reflected beams. *Appl. Opt.*, 26(13):2506–2507, 1987.
- [5] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm. *Appl. Opt.*, 26(13):2504–2506, 1987.
- [6] M. Kujawinska and J. Wójciak. Spatial phase-shifting techniques of fringe pattern analysis. *SPIE*, 1508:61–67, 1991b.
- [7] D. Malacara, M. Servin, and Z. Malacara. *Interferogram Analysis for Optical Testing*. Marcel Dekker, 1998.
- [8] C. J. Morgan. Least-squares estimation in phase-measurement interferometry. *Opt. Lett.*, 7(8):368+, 1982.

- [9] Malacara D. Marroquin J. L. Cuevas F. J. Servin, M. Complex linear filters for phase shifting whit very low detuning sensitivity. *Journal of Modern Optics*, 44:1269–1278, 1997.
- [10] Y. Surrel. Desing of algorithms for phase measurement by use of phase stepping. *Opt. Lett*, 35:51–60, 1996.
- [11] S. Tang. Generalized algorithm for phase shifting interferometry. *SPIE*, 2860:34–44, 1996.