

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN OPTICA, A.C.

**MODELOS DE BAJO ORDEN PARA EL ANÁLISIS
DE LAS ECUACIONES INCOMPRESIBLES DE
NAVIER-STOKES.**

Licenciado en Física: *Cornelio Alvarez Herrera.*

Asesor: *Dr. David Moreno Hernández.*

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS (ÓPTICAS).**

**LEÓN GUANAJUATO
MÉXICO.**

16 de Agosto de 2004.

A mi familia

Resumen

El método POD (Proper Orthogonal Decomposition). Es aplicado al análisis de datos obtenidos por el método de elemento finito del flujo alrededor de un cilindro circular. Se aplica el método a la velocidad axial y vertical del flujo del fluido para diferentes números de Reynolds: *100, 300, 500*. Con el método de POD se obtienen eigenfunciones y eigenvalores, las cuales muestran que gran fracción de la energía se encuentran en las primeras ocho eigenfunciones. Las características esenciales del flujo alrededor del cilindro están en los primeros ocho POD-modos. Basándose en los resultados que se obtienen de POD se construyen modelos de bajo orden para el comportamiento dinámico del flujo de fluido usando proyección de Galerkin. La proyección que se realiza se hace sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. Los modelos que se obtienen comparan razonablemente bien con los obtenidos por el método POD.

Agradecimientos

Principalmente a dios por darme las fuerzas para poder seguir en este camino. A mi papá y mi mamá, hermanos y hermanas que me apoyaron siempre incondicionalmente. Al llegar al CIO estuve con muchas limitaciones económicas las cuales mis compañeros de clase que son Claudio, Daniel, Haggeo, José Luis, Mauricio y Paulino, y mi paisano y compañero de Licenciatura Tonatiuh que me ayudaron en esos momentos difíciles. Un sincero agradecimiento a mi asesor Dr. David por su ayuda para que se llevara a cavo esta tesis. Al CONACYT que me apoyó con la beca de maestría. A la DFA del CIO en especial a Guille y Laura. A la biblioteca y en especial al personal que la atiende Ángeles, Alejandra y Marissa. A los compadres Chemo y Ray. Al Cesar, Chuy, Kiko, Tonita, Rider, Norberto, Julio, Lecona, Dimas, René, Rodolfo,. A todos los Profesores del CIO. Al CIO en general.

Índice

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación	(1)
1.2 Reducción de Modelos	(2)

Capítulo 2

Teoría

2.1 Procedimiento de Descomposición Ortogonal Propia o POD	(3)
2.1.1 Discretización del Problema de Eigenvalores	(5)
2.1.2 Método Directo	(5)
2.1.3 Método de fotos o imágenes instantáneas	(6)
2.2 Proyección de Galerkin y Variación de Parámetros	(8)
2.2.1 Fluidos Incompresibles	(9)

Capítulo 3

Procedimiento Numérico

3.1 Simulación de Datos	(14)
3.2 Simulación para $Re=100$	(18)
3.2 Simulación para $Re=300$	(20)
3.2 Simulación para $Re=500$	(22)

Capítulo 4

Resultados de Aplicar POD y Proyección de Galerkin

4.1 Modos POD	(24)
4.2 Modelos Usando Galerkin	(36)

Capítulo 5

Conclusiones

Bibliografía

Lista de Figuras

Figura 1. Pasos a seguir para la generación de datos simulados	(15)
Figura 2. Cilindro para construir la malla	(16)
Figura 3. Cilindro con malla triangular	(17)
Figura 4. Velocidades axiales para $Re=100$	(18)
Figura 5. Velocidades transversales para $Re=100$	(19)
Figura 6. Velocidades axiales para $Re=300$	(20)
Figura 7. Velocidades transversales $Re=300$	(21)
Figura 8. Velocidades axiales para $Re=500$	(22)
Figura 9. Velocidades transversales para $Re=500$	(23)
Figura 10. Rango donde se aplica POD	(25)
Figura 11. Energías relativas para $Re=100, 300$ y 500 para la velocidad axial	(27)
Figura 12. Energías relativas para $Re=100, 300$ y 500 para la velocidad transversal	(27)
Figura 13. Energía relativa acumulada para los Re de $100, 300$ y 500 para la velocidad axial	(28)

Figura 14. Energía relativa acumulada para los Re de 100, 300 y 500 para la velocidad transversal(29)

Figura 15. Primeros seis modos axiales para el $Re=100, 300$ y 500 (30)

Figura 16. Primeros seis modos transversales para los $Re=100, 300$ y 500 (31)

Figura 17. Constantes de reconstrucción para $Re=100$ (32)

Figura 18 Reconstrucción de velocidades axiales para $Re=100$ (34)

Figura 19. Velocidad transversal reconstruida para $Re=100$ (35)

Figura 20. Error en las velocidades de reconstrucción para $Re=100$ (36)

Figura 21. Soluciones y comparación de resultados de las constantes de reconstrucción y las soluciones de Navier-Stokes para dos modos(37)

Figura 22. Comparación de las constantes de reconstrucción y las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para cuatro modos(38)

Lista de Tablas

Tabla 1. Coordenadas del cilindro(16)

Tabla 2. Condiciones en la frontera y condiciones del fluido(17)

Tabla 3. Energías relativas para u y v para los diferentes valores de $Re=100, Re=300, Re=500$(26)

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

El fenómeno de turbulencia en flujos de fluidos, es uno de los problemas principales en física que aun no se han resuelto. Este es un problema importante en ingeniería, porque la turbulencia juega un papel importante en varias clases de flujo de fluidos. Por ejemplo, el arrastre en aeroplanos y barcos podría ser reducido si la intensidad de turbulencia se pudiera suprimir; la eficiencia de las bombas y turbinas podría ser mejorada si la turbulencia se pudiera controlar; el ruido en las toberas de los aeroplanos se puede abatir si la turbulencia se suprimiera, y hay muchas otras aplicaciones en las que la turbulencia es un efecto indeseable. Sin embargo implementar modelos de control de turbulencia no es una tarea fácil, principalmente por que las ecuaciones que gobiernan su comportamiento son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales y acopladas, el cual se tiene que resolver espacial y temporalmente. Por lo que, conseguir modelos aproximados que describan el comportamiento del flujo de fluido y adecuados para usarse en el control de estos es deseable.

En este trabajo se estudiará el comportamiento dinámico del flujo de fluido en la estela de un cilindro circular. Se escogió esta configuración, porque es considerado el prototipo de flujos inestables y ha recibido gran atención debido a la gran cantidad de aplicaciones en ingeniería aeronáutica, civil, mecánica y química. Los datos para este trabajo pueden ser obtenidos en forma experimental o utilizando simulación numérica. En este trabajo se desarrollará la investigación usando datos simulados en computadora. El enfoque de esta tesis es desarrollar modelos dinámicos que describan el comportamiento del flujo del cilindro, motivados por el deseo de usar control activo para reducir la turbulencia en el flujo de fluido. La teoría moderna de control provee

herramientas poderosas para diseñar sistemas de control retro alimentado, y para analizar las limitaciones de estos tipos de control. Para usar estas herramientas efectivamente se necesita primero modelar el sistema, típicamente en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs). El movimiento del flujo de fluido se describe con exactitud mediante las ecuaciones de Navier-Stokes (NS), el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, las cuales no hay solución analítica excepto para flujos de fluidos simples. Para aplicar los modelos existentes de teoría de control es necesario primero reducir la complejidad del sistema, preferentemente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de bajo orden. El objetivo no es describir todos los detalles del flujo, si no eliminar detalles que no son importantes y obtener en lo posible el modelo matemático más simple que se pueda obtener, reteniendo solamente los detalles generales que son suficientes para describir las características fundamentales del flujo del fluido.

1.2 Reducción de Modelos

Para obtener modelos de bajo orden para el flujo en un cilindro circular, se usan herramientas de teoría de sistemas dinámicos, por lo regular POD (Proper Orthogonal Decomposition) y proyección Galerkin. Proyección Galerkin consiste en obtener aproximaciones de un sistema dinámico con varios grados de libertad proyectando las variables dinámicas sobre un sub-espacio de menor dimensión. POD es un método que usa datos simulados o experimentales para determinar un sub-espacio el cual es optimo en cierto sentido.

POD fue originalmente desarrollado en el contexto de la teoría de probabilidad, pero el método ha sido utilizado subsecuentemente como herramienta de reducciones de modelos, particularmente para fluidos y otros sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. En el contexto de fluidos, la mayor contribución viene de los trabajos de Lumley [1], Sirovich [2] y Aubry et al.[3], que usaron el método para el estudio de la teoría de capa límite turbulenta. La mayoría de los flujos analizados son en el régimen incompresible, excepto por los trabajos de Rowley et al. [4] y el de Moreno et al. [5] que analizaron flujos en el régimen compresible.

Los capítulos siguientes están conformados de la siguiente manera. En el capítulo 2 se explica la teoría de POD, el método computacional para calcular los POD modos, y la derivación de modelos de bajo orden. En el capítulo 3 se describe el software de elemento finito que se utiliza para obtener los datos necesarios para el cálculo de los POD modos. Los resultados del método POD y los modelos de bajo orden se discuten en el capítulo 4.

Capítulo 2

Teoría

2.1 Procedimiento de Descomposición Ortogonal Propia o (Proper Orthogonal Decomposition POD)

El procedimiento de POD ofrece como resultados un conjunto de eigenfunciones empíricas $\{\tilde{u}^n\}$ o POD modos (En adelante se usará eigenfunciones o POD modos indistintamente refiriendonos al mismo concepto), el cual aproxima miembros típicos de un conjunto de datos $U = \{u_k\}$ mejor que las representaciones de la misma dimensión en términos de cualquier otra base. El conjunto de datos, el cual puede contener funciones escalares o vectoriales u_k , pueden ser obtenidos experimentalmente usando técnicas como por ejemplo velocimetría de partículas por imágenes (Particle Image Velocimetry PIV), o por simulaciones numéricas como el usado en este trabajo. Específicamente, buscamos \tilde{u} tal que la cantidad

$$\frac{\langle |(u, \tilde{u})|^2 \rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \quad (2.1)$$

es maximizada [6]. Donde (\cdot, \cdot) denota un producto interno y $\|\cdot\|$ denota a la norma para el espacio $L^2(\Omega_x)$ de una función cuadro-integrable, como por ejemplo

$$(f, g) = \int_{\Omega_x} f \cdot g^* dx \quad (2.2)$$

y

$$\|\tilde{u}\|^2 = (\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_{\Omega_x} |\tilde{u}|^2 dx \quad (2.3)$$

donde Ω_x es el dominio de interés sobre el cual $u_x(x)$ y $\tilde{u}(x)$ están definidas y el punto en la ecuación (2.2) significa la operación del producto punto y el asterisco (*) en la ecuación (2.2) denota el complejo conjugado. En la ecuación (2.1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota un promedio temporal en el conjunto de datos. Podemos aplicar el cálculo variacional para reformular este problema como la solución de la siguiente integral de Euler-Lagrange:

$$\int_{\Omega_x} \langle u(x) \otimes u^*(x') \rangle \tilde{u}(x') dx' = \lambda \tilde{u}(x,) \quad (2.4)$$

donde \otimes representa el producto tensorial. Esta es la ecuación de Fredholm de segunda clase, el kernel es el tensor de autocorrelación promediado sobre el conjunto de datos:

$$R(x, x') = \langle u(x) \otimes u^*(x') \rangle \quad (2.5)$$

y λ representa la energía asociada a cada modo POD.

Con la norma definida como en (2.3), los modos POD son óptimos en el sentido de que capturan, sobre el promedio, la fracción más grande de la energía total posible para una proyección en un número dado de modos POD. Además los modos POD son ortogonales con respecto al producto interno y se pueden hacer fácilmente ortonormales, y cada modo POD lleva inherentes las propiedades lineales del conjunto de datos, tal como la incompresibilidad y las condiciones frontera, como para el caso de flujos de fluidos. Finalmente, notamos que el procedimiento de POD puede ser reformulado para otros productos internos, permitiendo la computación de los modos POD los cuales representan óptimamente otras cantidades diferentes a la energía cinética.

2.1.1 Discretización del Problema de Eigenvalores

En la práctica, se resuelve la ecuación (2.4) transformándola en una matriz de un problema de eigenvalores a través de una discretización. Por simplicidad, consideramos funciones escalares u_k para el cual el producto tensorial en (2.4) se convierte en un simple producto escalar. Mostramos aquí como calculamos los modos POD en dos formas diferentes. Los cuales el esfuerzo computacional depende del número relativo de puntos en la malla que se utilizan en elemento finito para calcular la velocidad, o en las observaciones o imágenes instantáneas, N_T , en el conjunto de datos.

2.1.2 Método Directo

Escribiendo el promedio del conjunto de datos como un promedio en el tiempo de las N_T o imágenes instantáneas, e intercambiando la suma a integral podemos describir a (2.4) como

$$\frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} u_k(x) \int_{\Omega_x} u_k^*(x') dx' = \lambda \bar{u}(x) \quad (2.6)$$

Se puede ahora aproximar la integral sobre x' usando la regla trapezoidal de Simpson. En ambos casos, podemos expresar la integral como

$$\int_{\Omega_x} u_k(x) \bar{u}(x) dx' = \sum_{i=0}^{n_k} \omega_i u_k^*(x_i) \bar{u}(x_i) = \hat{u}_k^* \hat{u}, \quad (2.7)$$

donde \hat{u}_k^* y \hat{u} son vectores.

$$\hat{u}_k^* = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_1} u_k^*(x_1) \\ \sqrt{\omega_2} u_k^*(x_2) \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_{n_x} - 1} u_k^*(x_{n_x} - 1) \\ \sqrt{\omega_{n_x}} u_k^*(x_{n_x}) \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_1} \bar{u}(x_1) \\ \sqrt{\omega_2} \bar{u}(x_2) \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_{n_x} - 1} \bar{u}(x_{n_x} - 1) \\ \sqrt{\omega_{n_x}} \bar{u}(x_{n_x}) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

y ω_i son las funciones de peso para el método particular de cuadratura usado. Con estas definiciones podemos describir (3.6) como

$$\frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} u_k(x) \hat{u}_k(x) \hat{u}_k^* \hat{u} = \lambda \tilde{u}(x). \quad (2.9)$$

En particular, esta ecuación se satisface con cada uno de los n_x que son los nodos de la malla, x_j :

$$\frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} u_k(x_j) \hat{u}_k^* \hat{u} = \lambda \tilde{u}(x_j) \text{ para } j = 1, \dots, n_x. \quad (2.10)$$

Multiplicando (2.10) por $\sqrt{\omega_j}$ para cada $j = 1, \dots, n_x$ podemos escribir las ecuaciones como una matriz singular vectorial:

$$\frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} \hat{u}_k \hat{u}_k^* \hat{u} = \tilde{A} \hat{u} = \lambda \hat{u}. \quad (2.11)$$

Se convierte en el problema simétrico de eigenvalores para la matriz \tilde{A} , de $n_x \times n_x$, en una matriz hermitiana. Se dice que una matriz es $A[a_{ij}]$ hermitiana si es igual a su transpuesta hermitiana $A^+ = A$, es decir $a_{ji}^* = a_{ij}$ [8]. Es necesario multiplicar las componentes de los eigenvalores resultantes por $1/\sqrt{\omega_j}$ para obtener los modos POD $\{\tilde{u}^n\}$. Los modos pueden ser normalizados para garantizar que son ortonormales.

2.1.3 Método de Fotos o Imágenes Instantáneas

Este puede ser el caso, por ejemplo para una base de datos obtenida usando CFD (Computer Fluid Dynamics) sobre dominios tridimensionales, tal que n_g , el número de puntos en la malla para cada imagen, es mucho más grande que, N_T , siendo N_T el número total de imágenes instantáneas en nuestro conjunto de datos. En tales situaciones, que no requerimos más de $O(1000)$ modos POD, hablando en términos de computación, esto es más ventajoso para reformular el cálculo de los modos POD como un problema de eigenvalores con dimensión de la matriz de $N_T \times N_T$ a resolver una matriz con dimensión $n_x \times n_x$, como sigue a continuación. Por simplicidad, describimos el método para funciones escalares u_k , para el cual $n_g = n_x$.

Dejando a

$$c_i = \int_{\Omega_x} u_j^*(x) \tilde{u}(x) dx.$$

La ecuación (2.6) puede ser escrita como

$$\frac{1}{N_T} \sum_{j=1}^{N_T} c_j u_j(x) = \lambda \tilde{u}(x) : \quad (2.12)$$

esto es, podemos expresar las eigenfunciones como una combinación lineal de las observaciones o imágenes instantáneas. Multiplicando ambos miembros por u_i^* , e integrando nos da

$$\frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} c_k \int_{\Omega_x} u_i^*(x) u_k(x) dx = \lambda \int_{\Omega_x} u_i^*(x) \tilde{u}(x) dx. \quad (2.13)$$

Definiendo

$$a_{i,j} = \int_{\Omega_x} u_i^*(x) u_j(x) dx \quad (2.14)$$

la ecuación (2.13) puede ser escrita entonces en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_T} & \cdots & a_{N_T N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N_T} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N_T} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Denotaremos los eigenvectores de la matriz $N_T \times N_T$ del problema de eigenvalores por $c^n = [c_1^n, \dots, c_{N_T}^n]^T$ y los eigenvalores por λ^n . De la ecuación (2.12) vemos que la n -ésima eigenfunción del problema original puede ser reconstruida de los coeficientes c_j^n vía

$$\tilde{u}^n(x) = \frac{1}{\lambda^n N_T} \sum_{j=1}^{N_T} c_j^n u_j(x), \quad (2.16)$$

o equivalentemente

$$\tilde{u}^n = \frac{1}{\lambda^n N_T} [c_1^n, \dots, c_{N_T}^n] \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_{N_T}(x) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Puesto que cada miembro del conjunto $u_i(x) = [u_i^1, \dots, u_i^{n_x}]$ es especificado como n_x o el número de nodos de la malla, el problema discretizado (2.17) viene a ser como [2]

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1^1 & \dots & \tilde{u}_{n_x}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{u}_1^{N_T} & \dots & \tilde{u}_{n_x}^{N_T} \end{bmatrix} = \frac{1}{N_T} \begin{bmatrix} c_1^1 & \dots & c_{N_T}^1 \\ \lambda^1 & & \lambda^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{N_T} & \dots & c_{N_T}^{N_T} \\ \lambda^{N_T} & & \lambda^{N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^{n_x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N_T}^1 & \dots & u_{N_T}^{n_x} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

2.2 Proyección de Galerkin y Variación de Parámetros

En esta sección nos enfocaremos en construir por el método de Proyección de Galerkin modelos de bajo orden de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes se proyectaran sobre las eigenfunciones obtenidas por el método de POD.

Obtenemos los modelos de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) proyectando en los modos usando el método de Galerkin. Dicho de forma abstracta, escribimos la evolución de una EDP como

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = F(\hat{u}; \mu), \quad (2.19)$$

donde μ representa los parámetros del sistema tales como el número de Reynolds.

Expandiendo la función \hat{u} como

$$\hat{u}(x, t) = \sum_n a_n(t) \hat{u}_n(x), \text{ donde } a_n \text{ son las constantes de reconstrucción y se obtienen}$$

por proyectar el conjunto de datos sobre cada modo: $a_n(t) = (\hat{u}_n, \hat{u}_n)$, substituyendo esta en la ecuación (2.19), obtenemos

$$\sum_n \dot{a}_n(t) \hat{u}_n(x) = F\left(\sum_n a_n(t) \hat{u}_n(x); \mu\right).$$

Ahora, tomando el producto interno con $\hat{u}_m(x)$ y usando la ortogonalidad de los modos POD obtenemos:

$$\dot{a}_m(t) = (F(\sum_n a_n(t)\hat{u}_n(x); \mu)) \quad (2.20)$$

En el ejemplo considerado anteriormente para resolver a la ecuación 2.19, nuestro conjunto de datos consiste de imágenes instantáneas del flujo para el mismo número de Reynolds. Tal como en la ecuación (2.20), vemos que sobre la proyección de Galerkin obtenemos EDOs las cuales tendrán explícito el parámetro de Re . Así pues obtenemos, un modelo para un flujo para todos los valores de Re . Por supuesto, los modos POD son sólo óptimos a Re_{ens} , así que se espera el mejor valor exacto para un rango de Re cercano a Re_{ens} .

2.2.1 Fluidos Incompresibles

En este trabajo resolvemos las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles, tomando en cuenta que por ser un fluido incompresible, no existe variación en la temperatura, por lo que no se tomará en cuenta. Para el caso de un fluido incompresible, la velocidad es $\hat{u} = (u, v, w)$ está libre de la divergencia, $\nabla \cdot (\hat{u}) = 0$. El movimiento del fluido satisface a las ecuaciones de Navier-Stokes [4] escritas en coordenadas cartesianas como

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \nabla \cdot \hat{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_L} \nabla^2 \hat{u} \quad (2.21)$$

donde \hat{u} es la velocidad, p es la presión, ν es la viscosidad y Re_L Número de Reynolds normalizado con L que es el diámetro del cilindro.

La velocidad \hat{u} en la ecuación (3.21) es normalizada con un factor de velocidad de escala U a su vez normalizada con L , la distancia por un factor de escala L , y la presión por ρU^2 donde ρ es la densidad del fluido y la viscosidad es normalizada por

$$\rho UL, \nu \text{ es reciproca a los números de Reynolds } \nu = \frac{1}{Re_L}.$$

Al término de la presión en la ecuación (2.21) se le aplica la proyección de Galerkin con las eigenfunciones obtenidas con POD, \tilde{u}_k y se puede escribir como

$$\langle \nabla p, \tilde{u}_k \rangle = \int_{\Omega} div(p \tilde{u}_k) dV = \int_{\partial \Omega} p \tilde{u}_k \cdot \hat{n} dS$$

donde se usa en la segunda integral que la $div(\hat{u}) = 0$. Así pues, este término solo depende de la presión en la frontera $\partial\Omega$. Es más, si la velocidad es cero a lo largo de la frontera (que puede ser una pared o un campo muy lejano de un flujo abierto), entonces $\hat{u}_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, y el término de la presión desaparece completamente. Si la frontera no es una pared, entonces es una frontera artificial puesta por uno mismo (esto es, consideramos una porción limitada del flujo total), entonces el término de presión representa la influencia del resto del flujo sobre el dominio que estamos considerando, y debe ser especificado como una condición de frontera.

La velocidad instantánea se descompone en componentes media y fluctuante, $u = \bar{u} + u'$ donde la velocidad media $\bar{u} = \langle u \rangle$ varía muy lentamente en el tiempo. La misma velocidad fluctuante puede ser escrita en términos de la velocidad instantánea $u' = u - \bar{u}$, y a la cual el método de POD se aplica.

Desarrollando la ecuación (2.21), para el caso bidimensional, y omitiendo el término de la presión. Por razones de cálculo se tomaron las siguientes ecuaciones en forma escalar.

$u \equiv$ velocidad axial

$v \equiv$ velocidad transversal

$\bar{u} \equiv$ velocidad media axial

$\bar{v} \equiv$ velocidad media transversal

$\tilde{u}^j(x, y) \equiv$ modo POD axial

$\vartheta^j(x, y) \equiv$ modo POD axial

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) + \sum_{j=1}^n a(t)_j \tilde{u}^j(x, y) \quad (2.22)$$

$$v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) + \sum_{j=1}^n b(t)_j \vartheta^j(x, y) \quad (2.23)$$

Para facilitar el tratamiento matemático (2.22) y (2.23) se escriben en la forma

$$u = \bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j, v = \bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \vartheta^j. \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación (2.24) en la ecuación (2.21) y despreciando el término de presión nos queda:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j)}{\partial t} + (\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j) \frac{\partial(\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j)}{\partial x} + (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \tilde{v}^j) \frac{\partial(\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j)}{\partial y} = \\ & \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2(\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j)}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

reagrupando términos, y definiendo $(a^j)_t$ y $(b^j)_t$ que son las derivadas parciales dependientes del tiempo para a^j y b^j respectivamente, \bar{u}_x es la derivada parcial con respecto de x de la velocidad media axial, \bar{v}_x es la derivada parcial con respecto de x de la velocidad media transversal, $(\tilde{u}^j)_x$ es la derivada parcial con respecto de x de los modos axiales, $(\tilde{u}^j)_y$ es la derivada parcial con respecto de y de los modos axiales, $(\tilde{v}^j)_x$ es la derivada parcial con respecto de x de los modos transversales, $(\tilde{v}^j)_y$ es la derivada parcial con respecto de y de los modos transversales, $(\tilde{u}^j)_{xx}$ es la segunda derivada parcial con respecto de x de los modos axiales, $(\tilde{u}^j)_{yy}$ es la segunda derivada parcial con respecto de y de los modos axiales, $(\tilde{v}^j)_{xx}$ es la segunda derivada parcial con respecto de x de los modos transversales y $(\tilde{v}^j)_{yy}$ es la segunda derivada parcial con respecto de y de los modos transversales. Las definiciones anteriores nos servirán para el desarrollo de las siguientes ecuaciones en este capítulo.

$$\begin{aligned} & \tilde{u}^j \sum (a^j)_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{u} \sum a^j (\tilde{u}^j)_x + \sum a^j (\tilde{u}^j)_x (\bar{u})_x + \\ & (\sum a^j (\tilde{u}^j)_x) \sum a^j (\tilde{u}^j)_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{v} \sum a^j (\tilde{u}^j)_y + \bar{u}_y \sum b_j^j \tilde{v}^j + \\ & \sum b_j^j \tilde{v}^j \sum a^j (\tilde{u}^j)_y = \frac{1}{\text{Re}_L} (\bar{u}_{xx} + \sum a^j (\tilde{u}^j)_{xx} + \bar{u}_{yy} + \sum a^j (\tilde{u}^j)_{yy}), \end{aligned}$$

proyectando con \tilde{u}^k

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{u}^j \sum (a^j)_t, \tilde{u}^k \rangle + \langle \bar{u} \bar{u}_x, \tilde{u}^k \rangle + \langle \bar{u} \sum a^j (\tilde{u}^j)_x, \tilde{u}^k \rangle + \langle \sum a^j (\tilde{u}^j)_x, \tilde{u}^k \rangle + \\
& \langle (\sum a^j (\tilde{u}^j)_x) \sum a^j (\tilde{u}^j)_x, \tilde{u}^k \rangle + \langle \bar{u} \bar{u}_y, \tilde{u}^k \rangle + \langle \bar{v} \sum a^j (\tilde{u}^j)_y, \tilde{u}^k \rangle + \\
& \langle \bar{u}_y \sum b_j^j \sigma^j, \tilde{u}^k \rangle + \langle \sum b_j^j \sigma^j \sum a^j (\tilde{u}^j)_y, \tilde{u}^k \rangle = \\
& \left\langle \frac{1}{\text{Re}_L} (\bar{u}_{xx} + \sum a^j (\tilde{u}^j)_{xx} + \bar{u}_{yy} + \sum a^j (\tilde{u}^j)_{yy}), \tilde{u}^k \right\rangle. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Reagrupando términos, obtenemos las siguientes constantes, donde los subíndices i, j, k significan sumatoria

$$\beta_k^u = -\langle \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y \rangle - \langle (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy}), \tilde{u}^k \rangle, \tag{2.28}$$

$$c_{ik}^u = \left\langle \bar{u} (\tilde{u}^i)_x + \bar{v} (\sigma^i)_y + \tilde{u}^i (\bar{u})_x - \frac{1}{\text{Re}_L} ((\tilde{u}^i)_{xx} + (\tilde{u}^i)_{yy}), \tilde{u}^k \right\rangle,$$

$$d_{ik}^u = -\langle \bar{v} \bar{u}_y, \tilde{u}^k \rangle,$$

$$p_{ijk}^u = \langle \tilde{u}^i (\tilde{u}^j)_x, \tilde{u}^k \rangle,$$

$$q_{ijk}^u = \langle \sigma^i (\tilde{u}^j)_y, \tilde{u}^k \rangle.$$

Ahora para v hacemos el mismo procedimiento anterior sustituyendo a las ecuaciones (2.24) en la ecuación (2.21) pero sin la presión quedando de la forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \sigma^j)}{\partial t} + (\bar{u} + \sum_{j=1}^n a_j \tilde{u}^j) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \sigma^j) + \\
& (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \sigma^j) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \sigma^j) \right) = \frac{1}{\text{Re}_L} \nabla^2 (\bar{v} + \sum_{j=1}^n b_j \sigma^j),
\end{aligned}$$

desarrollando la ecuación

$$\begin{aligned}
& \sigma^j \sum (b^j)_t + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{u} \sum b^j (\sigma^j)_x + \bar{v}_x \sum a^j \tilde{u}^j + \\
& (\sum a^j \tilde{u}^j) (\sum b^j (\sigma^j)_x) + \bar{v} \bar{v}_y + \bar{v} \sum b^j (\sigma^j)_y + \bar{v}_y \sum b^j \sigma^j + \\
& (\sum b^j \sigma^j) (\sum b^j (\sigma^j)_y) = \frac{1}{\text{Re}_L} (\bar{v}_{xx} + \sum b^j (\sigma^j)_{xx} + \bar{v}_{yy} \sum b^j (\sigma^j)_{yy}).
\end{aligned}$$

Aplicando la proyección con los modos σ^k

$$\begin{aligned}
& \langle \sigma^j \sum (b^j)_i, \sigma^k \rangle + \langle \bar{u} \bar{v}, \sigma^k \rangle + \langle \bar{u} \sum b^j (\sigma^j)_y, \sigma^k \rangle + \langle \bar{v}_x \sum a^j \tilde{u}^j, \sigma^k \rangle \\
& \langle (\sum a^j \tilde{u}^j)(\sum b^k (\sigma^k)_x), \sigma^k \rangle + \langle \bar{v} \bar{v}_y, \sigma^k \rangle + \langle \bar{v} \sum b^j (\sigma^j)_y, \sigma^k \rangle + \langle \bar{v} \sum b^j \sigma^j, \sigma^k \rangle + \\
& \langle (\sum b^j \sigma^j)(\sum b^j (\sigma^j)_y), \sigma^k \rangle = \left\langle \frac{1}{\text{Re}_L} (\bar{v}_{xx} + \sum b^j (\sigma^j)_{xx} + \bar{v}_{yy} \sum b^j (\sigma^j)_{yy}), \sigma^k \right\rangle,
\end{aligned}$$

agrupando términos, obteniendo las siguientes constantes

$$\beta_k^v = - \left\langle \bar{u} \bar{v}_x + \bar{u} \bar{v}_y - \frac{1}{\text{Re}_L} (\bar{v}_{xx} + \bar{v}_{yy}), \sigma^k \right\rangle$$

$$c_{ik}^v = \langle \sigma^i_x \bar{v}_x, \sigma^k \rangle,$$

$$d_{ik}^v = - \left\langle \bar{u} (\sigma^i)_x + \bar{v} (\sigma^i)_y + \sigma^i \sigma_y - \frac{1}{\text{Re}_L} ((\sigma^i)_{xx} + (\sigma^i)_{yy}), \sigma^i \right\rangle,$$

$$p_{ijk}^v = \langle \tilde{u}^i (\sigma^i)_x, \sigma^k \rangle,$$

$$q_{ijk}^v = \langle \sigma^i (\sigma^i)_y, \sigma^k \rangle.$$

Las ecuaciones resultantes para u y v son:

$$\dot{a}_k = \beta_k^u + \sum_{i=1}^n (c_{ik}^u \tilde{u}_i + d_{ik}^u \sigma_i) + \sum_{i,j=1}^n (p_{ijk}^u \tilde{u}_i \sigma_j + q_{ijk}^u \sigma_i \tilde{u}_j) \quad (2.29)$$

$$\dot{b}_k = \beta_k^v + \sum_{i=1}^n (c_{ik}^v \tilde{u}_i + d_{ik}^v \sigma_i) + \sum_{i,j=1}^n (p_{ijk}^v \tilde{u}_i \sigma_j + q_{ijk}^v \sigma_i \sigma_j) \quad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.29) y (2.30) son usadas para obtener nuestro modelo de bajo orden.

Capítulo 3

Procedimiento Numérico

Para el cálculo de los modos POD se necesitan un base de datos con varias imágenes instantáneas. Estas imágenes instantáneas se consiguen por experimentación o simulaciones (o ambas). En nuestro caso las imágenes instantáneas las obtenemos por simulación. Para este propósito usamos un paquete de elemento finito llamado Compass FEM 7.1 R4 con la parte de Tdyn 2D.

En el siguiente capítulo calculamos los modos POD del flujo alrededor de un cilindro. Se hicieron tres bases de datos del flujo alrededor de un cilindro circular, correspondiendo cada una de estas a números de Reynolds de 100, 300 y 500. Escogimos estos valores porque es posible observar un comportamiento de turbulencia reducida, el cual nos permite obtener modelos de bajo orden del comportamiento del flujo alrededor del cilindro.

3.1 Simulación de Datos

Para un flujo incompresible que pasa alrededor de un cilindro circular en 2D. Se hacen los siguientes pasos para generar el conjunto de datos visto en la figura 1, simulados en el paquete de elemento finito fluidos Tdyn 2D.

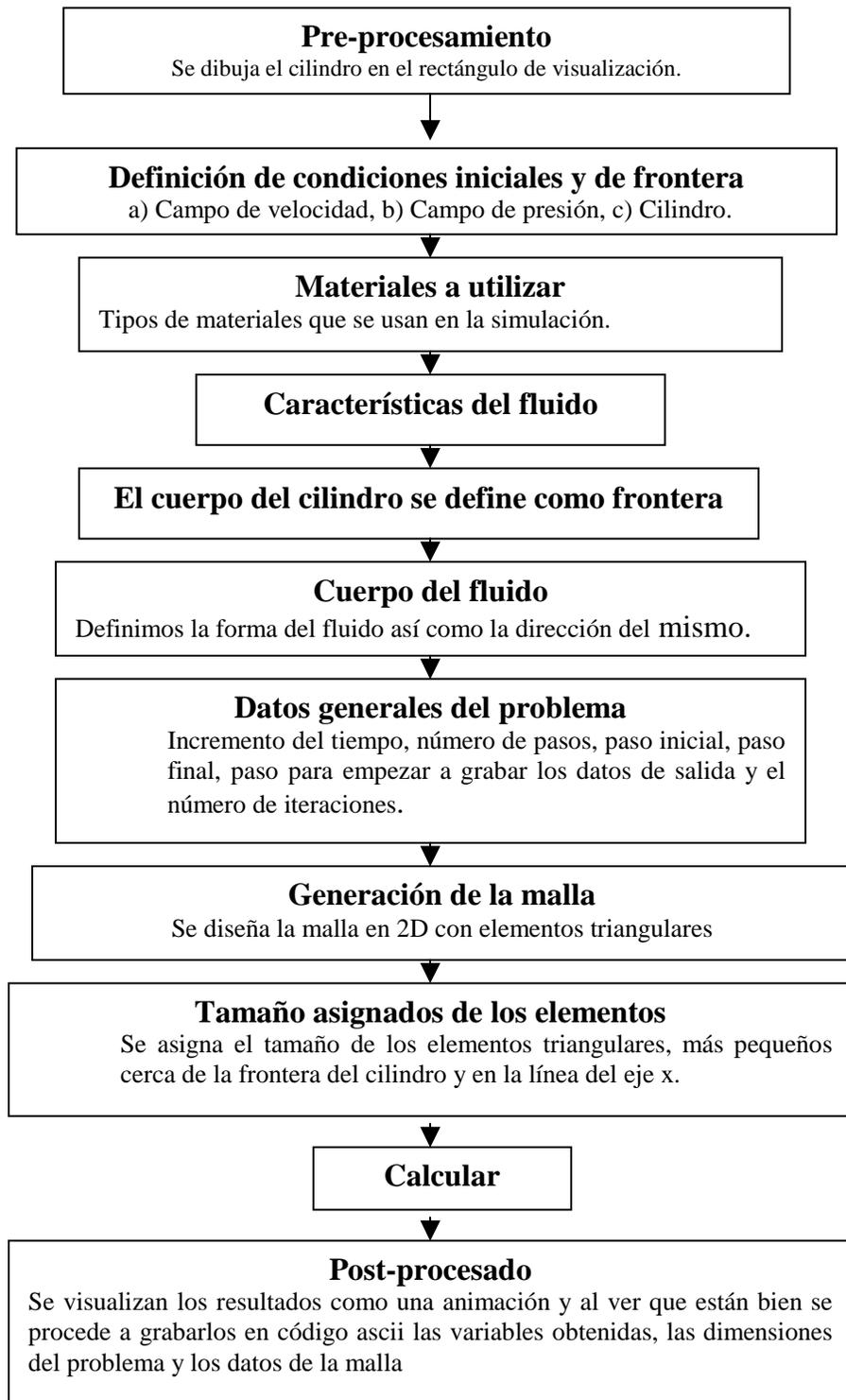


Figura 1. Pasos a seguir para la generación de datos simulados

Las coordenadas de los nodos para construir el cilindro y el rectángulo de visualización se muestran en la siguiente Tabla 1.

No de Puntos	Coordenadas en X/D	Coordenadas en Y/D
1	-4	-3.5
2	-4	0
3	-4	3.5
4	9	3.5
5	9	0
6	9	-3.5
7	0.5	0
8	-0.5	0

Tabla 1. Coordenadas del cilindro.

Los datos tabulados en la Tabla 1 corresponden a las coordenadas de los puntos de las dimensiones del rectángulo de visualización donde se hará la malla. La configuración geométrica del análisis junto con el cilindro, se muestran en la figura 1.

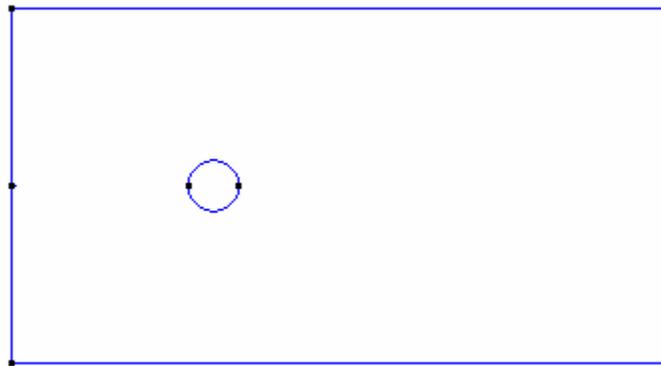


Figura 2. Cilindro para construir la malla, el campo de observación va desde -4 a 9 en x y de -3.5 a 3.5 en y .

Se calcula la velocidad y presión del flujo alrededor de un cilindro. Se utilizan 3448 elementos para el cálculo. El máximo de elementos que nos permite el software es de 3500.

Se aplica un flujo con las siguientes condiciones iniciales y de frontera para el análisis, donde intervienen la velocidad inicial U_0 , la viscosidad ν , la densidad ρ , el diámetro del cilindro L y el número de Reynolds Re , mostrados en la siguiente tabla 2.

Caso	U_0 [m/s]	ν [Kg/m.s]	ρ [Kg / m ³]	L[m]	Re
1	1	0.01	1	1	100
2	3	0.01	1	1	200
3	5	0.01	1	1	300

Tabla 2. Condiciones en la frontera y condiciones del fluido.

En la Figura 3 se muestra el cilindro y la región de análisis con el número de elementos utilizados para el cálculo de velocidad y presión. El tipo de elemento que se utilizó fue triangular, se usaron 3448 y 6634 números de nodos y elementos triangulares respectivamente.

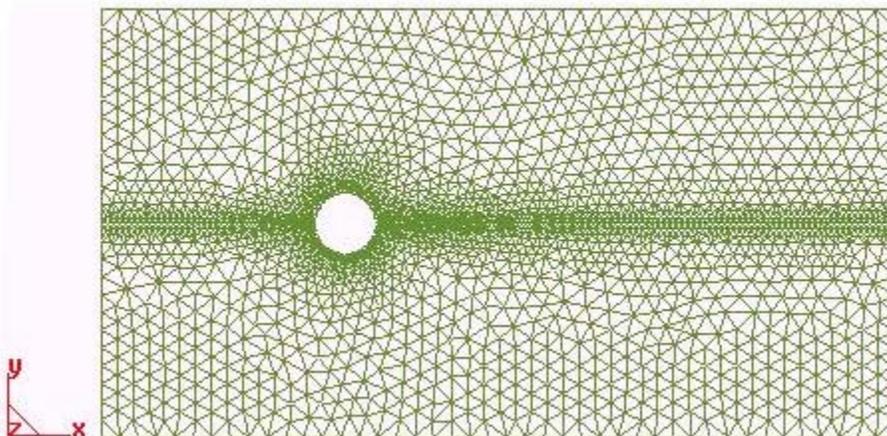


Figura 3. Cilindro con malla triangular alrededor de el.

A continuación mostraremos algunas de las simulaciones obtenidas de las velocidades axiales y transversales para los tres números de Reynolds .

3.2 Resultados de la Simulación para Números de Reynolds de $Re=100$, $Re=300$, $Re=500$

Velocidad Axial para $Re=100$

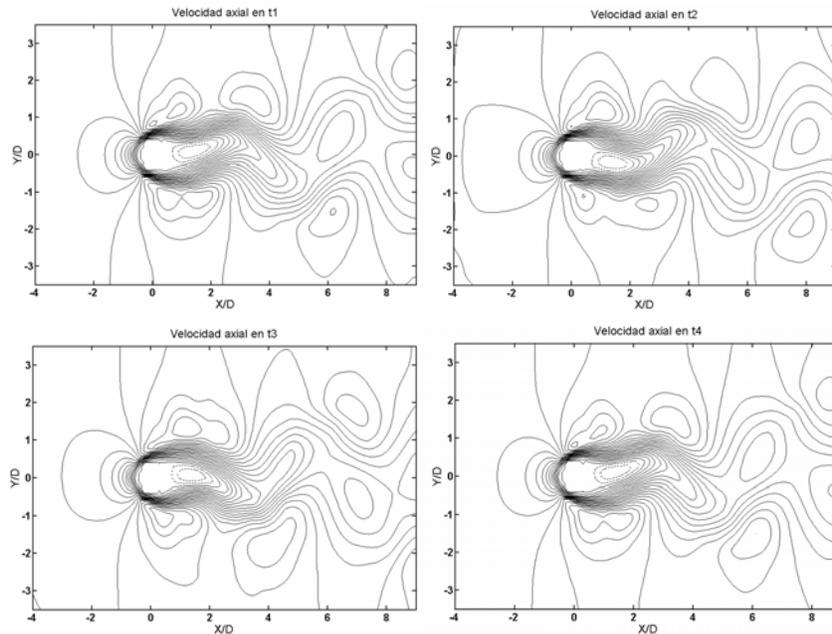


Figura 4. Velocidades axiales en cuatro tiempos diferentes para $Re=100$.

En la figura 4 vemos la velocidad axial para $Re=100$ en cuatro instantes de tiempo. Las distancias axial y vertical han sido normalizadas con el diámetro del cilindro circular. El tiempo de muestreo para cada velocidad instantánea fue de 0.03 segundos.

Velocidad Transversal para $Re=100$

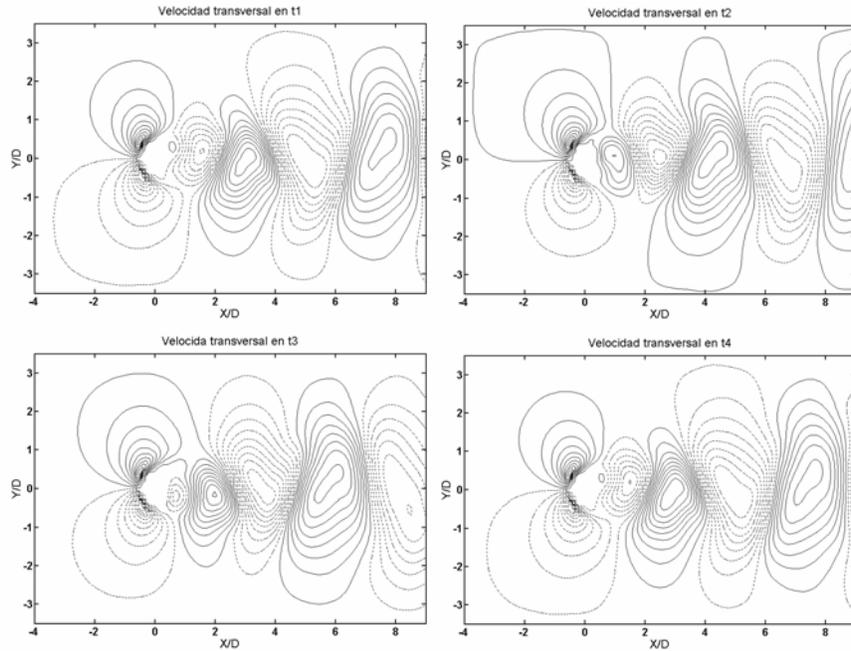


Figura 5. Velocidades transversales en cuatro tiempos diferentes para $Re=100$.

Como se observa en la figura 4, las velocidades transversales constan de estructuras periódicas y también se propagan varios diámetros del cilindro después del cilindro, y las estructuras formadas por líneas continuas que significan valores positivos, en donde están ubicadas también se ubican las amplitudes positivas de las oscilaciones en las velocidades axiales.

Velocidad Axial para $Re=300$

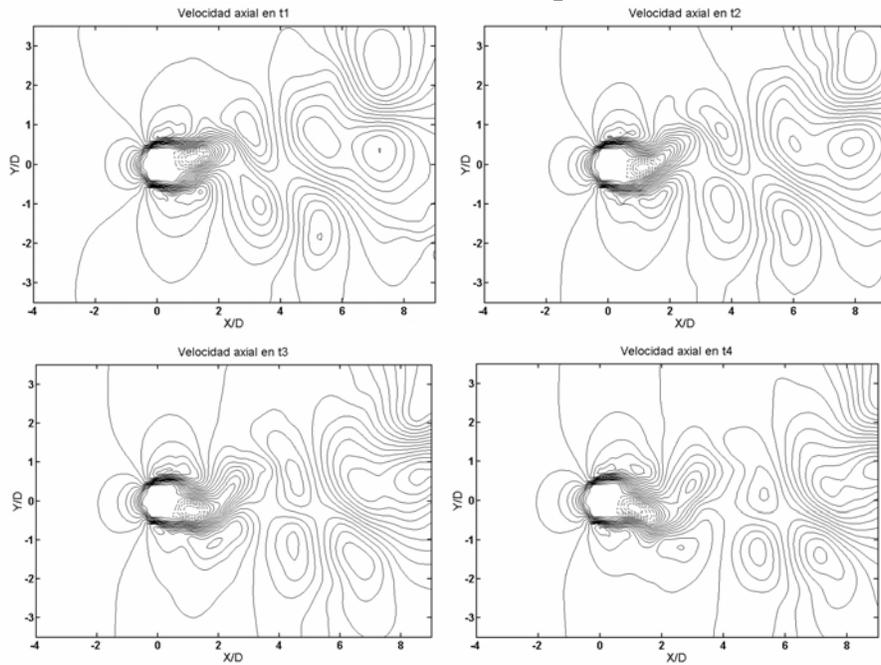


Figura 6. Velocidades axiales en cuatro tiempos diferentes para $Re=300$.

En estas velocidades axiales en cuatro tiempos diferentes vistas en la figura 6, se muestran en cada 60 intervalos donde cada intervalo consta de 0.004 segundos, vemos que la periodicidad se encuentra más cerca del cilindro y después se generan otras estructuras pequeñas y poco ordenadas.

Velocidad Transversal para $Re=300$

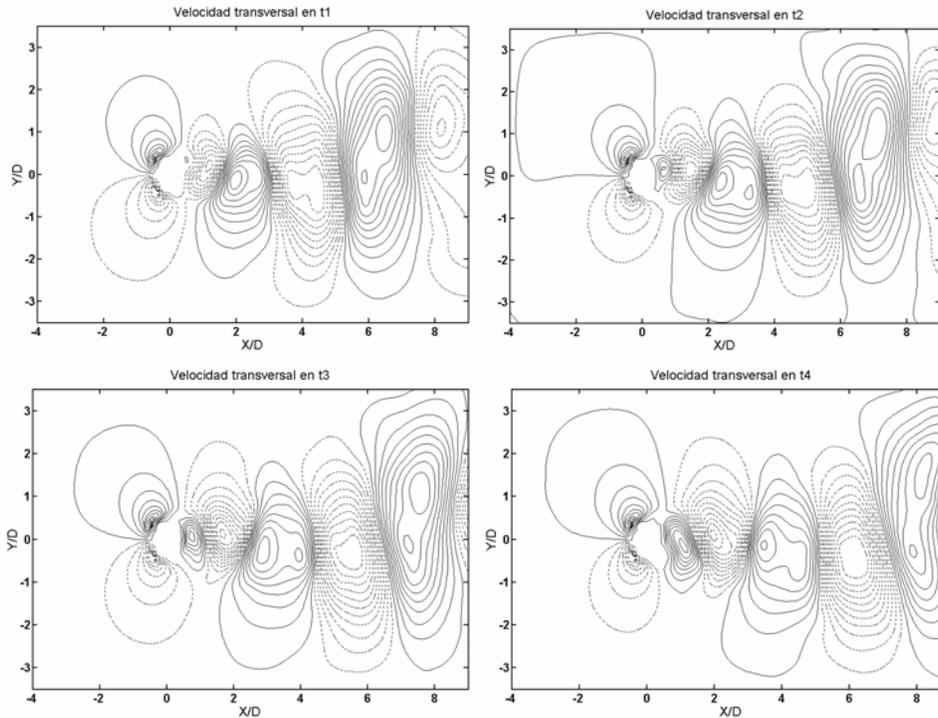


Figura 7. Velocidades transversales en cuatro tiempos diferentes para $Re=300$.

En las velocidades transversales para $Re=300$ vistas en la figura 7, se empiezan a deformar las estructuras y su propagación, son crecientes conforme se alejan del cilindro. Se puede observar también que donde se encuentran las estructuras más pequeñas existe periodicidad en la velocidad axial y donde se encuentran las estructuras más grandes se pierde la periodicidad en la velocidad axial para este número de Re .

Velocidad Axial para $Re=500$

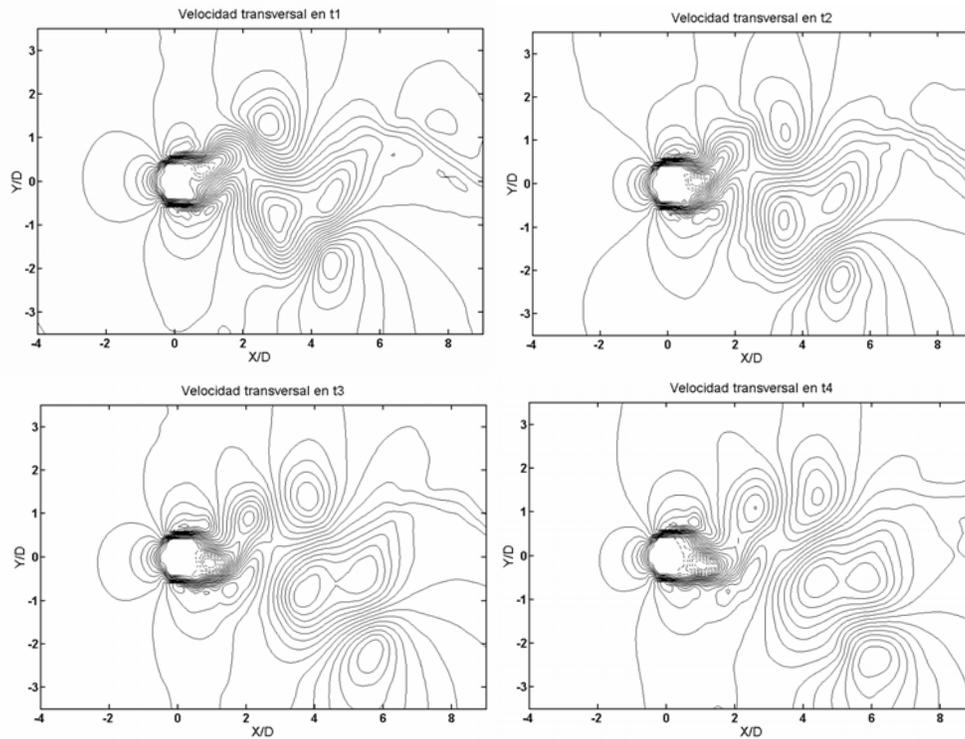


Figura 8. Velocidades axiales en cuatro tiempos diferentes para $Re=500$.

En la figura 8 las velocidades axiales para $Re=500$ se toman en cada 60 intervalos de tiempo donde cada intervalo es de 0.0018 segundos, se nota que la periodicidad se encuentra aun muy cerca del cilindro aproximadamente a un diámetro des pues de esa distancia se generan estructuras pequeñas y después de varios diámetros alejados del cilindro desaparecen las pequeñas estructuras.

Velocidad Transversal para $Re=500$

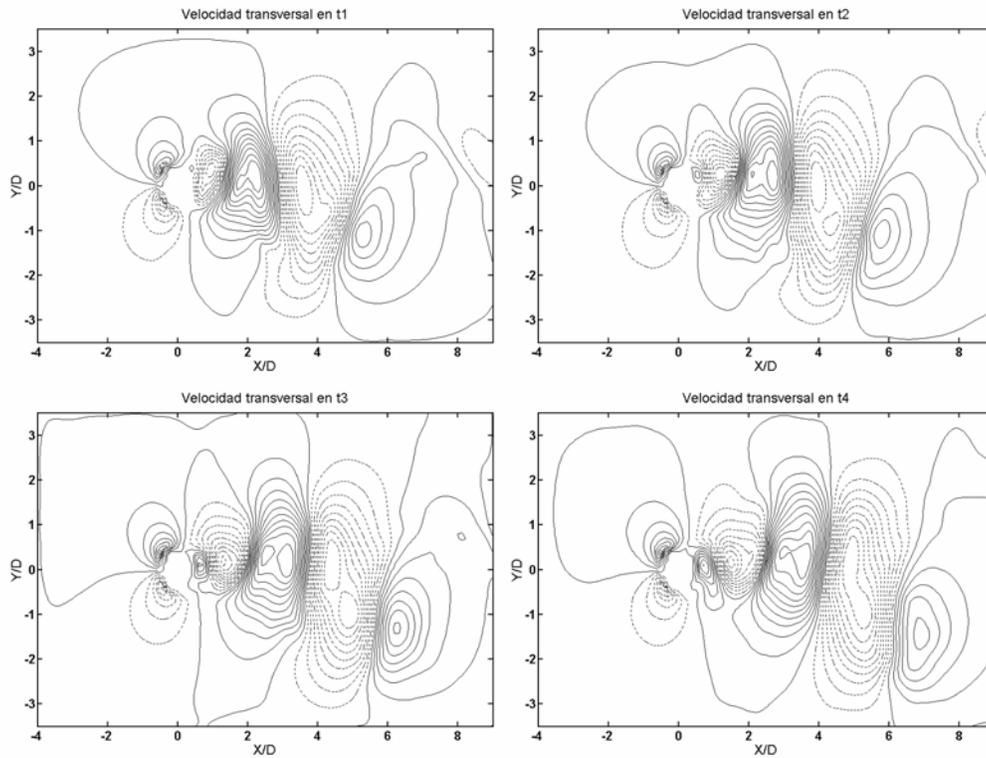


Figura 9. Velocidades transversales para cuatro tiempos diferentes para $Re=500$.

Estas velocidades transversales mostradas en la figura 9, contienen una única estructura muy pequeña del tamaño del orden del cilindro y está pegada al cilindro y donde se encuentran las estructuras mas grandes para esta velocidad en la velocidad axial no existe periodicidad y solo pequeñas estructuras separadas. Después de varios diámetros después del cilindro se atenúan las estructuras de las velocidades transversales.

Capítulo 4

Resultados de Aplicar POD y Proyección de Galerkin

El método POD, explicado en el capítulo 2 es adecuado para el análisis del flujo alrededor de un cilindro circular. Primero, El comportamiento dinámico del flujo alrededor del cilindro es relativamente simple y exhibe características de un sistema de bajo orden, por lo que es razonable esperar que un modelo de bajo orden es posible. Segundo, como se menciona anteriormente, una de las principales razones en modelar es para entender mejor como controlar el flujo.

El propósito de este capítulo, es aplicar el método POD/Galerkin a los datos simulados que se obtuvieron con elemento finito para desarrollar modelos de bajo orden para el flujo en el cilindro. Nos enfocaremos en el análisis de flujos para tres números de Reynolds; $Re= 100, 300$ y 500 .

4.1 Modos POD

Se aplicó el método POD separadamente para la velocidad axial y vertical. Para el cálculo de los modos POD de las velocidades axial y vertical se interpolaron las imágenes instantáneas sobre una malla uniforme de 130×70 , el espaciamiento de la malla fue de $\Delta x=0.1008$ y $\Delta y=0.1014$. Estos últimos valores han sido normalizados con el diámetro del cilindro. La malla uniforme es burda en comparación con la original del método de elemento finito (MEF), pero la interpolación facilita la aplicación del método de las imágenes ya que podemos visualizar y analizar a las imágenes fuera del paquete de MEF.

El rango donde se aplicó la proyección de POD se muestra en la figura 10, para los diferentes valores de los números de Reynolds.

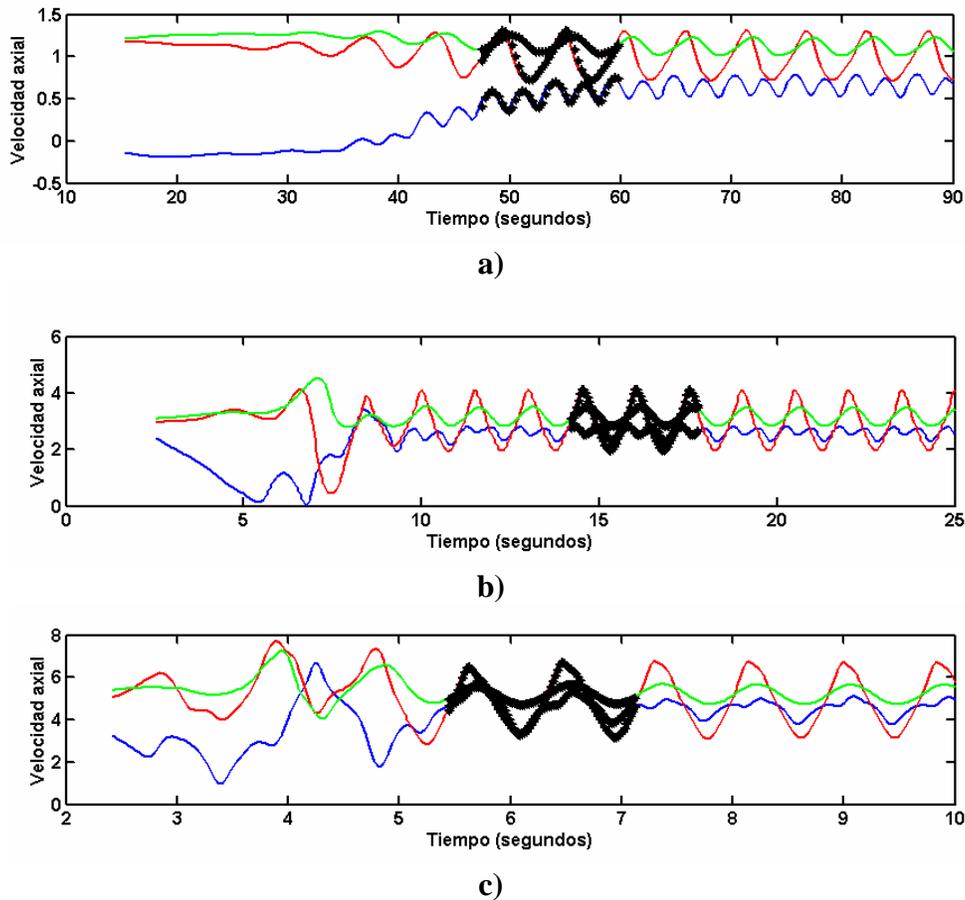


Figura 10. Rango donde se aplica la POD a) para $Re=100$, b) para $Re=300$, c) para $Re=500$.

Para el número de Reynolds de 100, el rango donde es aplicado el método de POD es mostrado con asteriscos negros sobre las tres curvas en la figura 10 a), que muestran a la variación de la velocidad axial en tres diferentes puntos del campo de visualización de las imágenes con respecto al tiempo, de otra manera cada imagen de velocidad axial se muestrea en esos tres puntos diferentes y cada imagen corresponde a un intervalo diferente de tiempo, el rango en que se aplica POD es donde las velocidades son periódicas y no hay fluctuaciones. De igual forma para los casos de $Re=300$ y $Re=500$ mostrados en la figura 10 b) y c) respectivamente.

La energía asociada con cada modo POD es dada por los eigenvalores, λ . La energía relativa para cada modo POD se calcula con la ecuación

$$E_n = \frac{\lambda^n}{\sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n}$$

y visualizadas en la siguiente tabla de datos

No. Modos (λ)	<i>Re=100</i>		<i>Re=300</i>		<i>Re=500</i>	
	<i>u</i> (%)	<i>v</i> (%)	<i>u</i> (%)	<i>v</i> (%)	<i>u</i> (%)	<i>v</i> (%)
1	50.6628	50.0030	51.5277	49.3974	53.6264	49.6075
2	44.4455	46.6780	44.3840	47.4489	37.7957	44.5969
3	2.2514	1.3490	1.8719	1.0185	3.6862	2.2477
4	2.1542	1.2242	1.2217	0.9657	1.9866	1.0971
5	0.2226	0.3608	0.4336	0.5518	1.2846	1.0563
6	0.2195	0.3488	0.3572	0.5106	0.7150	0.9821
7	0.0210	0.0169	0.0934	0.0391	0.4493	0.1585
8	0.0177	0.0152	0.0577	0.0313	0.2277	0.1053

Tabla 3. Energías relativas para *u* y *v* para los diferentes valores de *Re=100*, *Re=300*, *Re=500*.

En la Tabla 3 se muestran los valores de energía relativa que contienen cada uno de los ocho primeros modos. Para cada uno de los números de Reynolds que se analizan es notorio por los valores que se muestran, que la energía aparece en pares de dos y después hay una gran diferencia en la energía del par siguiente de modos. Por ejemplo, en la velocidad axial para el caso de *Re=100*, Los Modos 1 y 2 tienen un valor de energía de 50.6 % y 50 % del total respectivamente. El siguiente par, los Modos 3 y 4 tienen un valor de 2.25 % y 1.13 % del total respectivamente. Este compartimiento en la energía de los modos es característico de esta clase de flujos, llamados *flujos de capa cortante* (Inglés – Shear Layer). Se observa, que, para los tres diferentes números de Reynolds los dos primeros modos contienen aproximadamente más del 90 % de la

energía del sistema tanto para u como para v . Para el caso de números de Reynolds de 500 se aprecia una ligera distribución de energía entre mas modos, es decir, la energía no se concentra en los primeros dos modos.

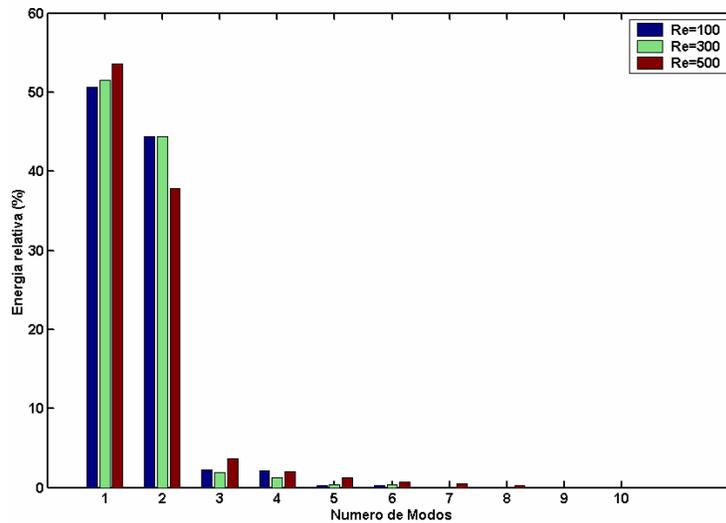


Figura 11. Energías relativas para $Re=100, 300$ y 500 para la velocidad axial.

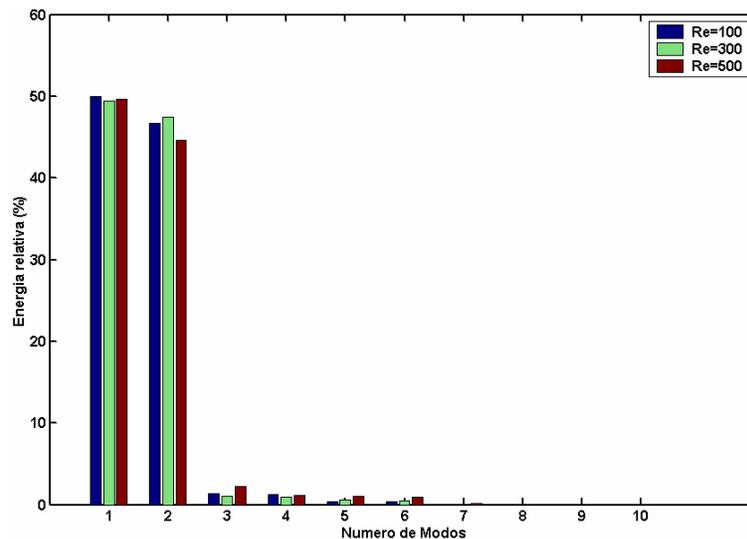


Figura 12. Energías relativas para $Re=100, 300$ y 500 para la velocidad transversal.

Las figuras 11 y 12 muestran la energía relativa para los modos correspondientes a la velocidad axial y vertical respectivamente. Lo que resulta a primera vista es la gran cantidad de energía contenida en los dos primeros modos.

Al ir sumando los modos de uno por uno podemos ver la energía relativa acumulada obteniendo un porcentaje como a continuación se observa en las siguientes figuras.

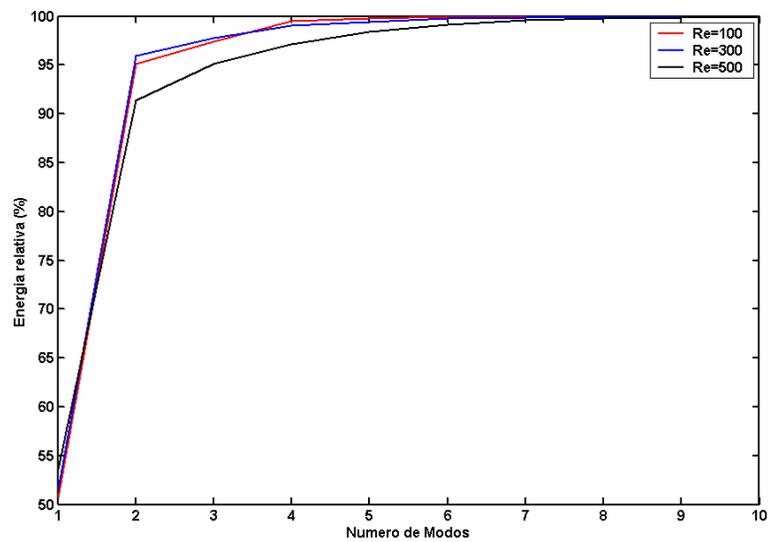


Figura 13. Energía relativa acumulada para los Re de 100, 300 y 500 para la velocidad axial.

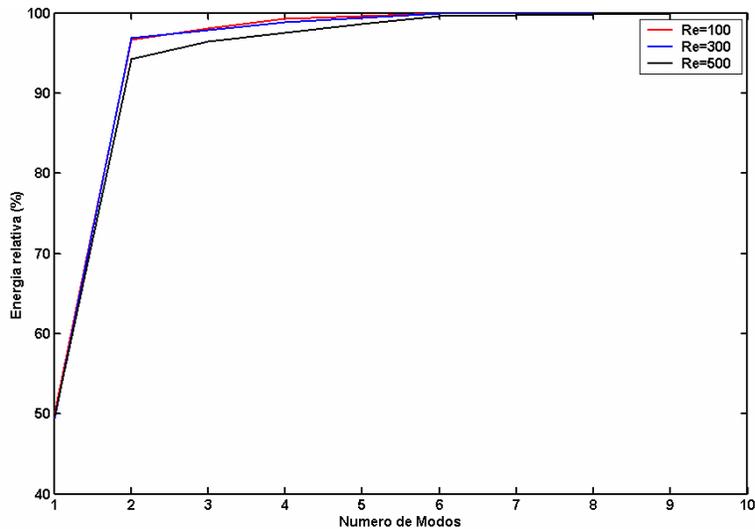


Figura 14. Energía relativa acumulada para los Re de 100, 300 y 500 para la velocidad transversal.

Como se observa en las figuras 13 y 14 los primeros dos modos para cada caso contienen la mayor parte de la energía, pero para $Re=500$ se observa que se requiere de agregar más modos para que la energía relativa se acerque al 100% ya sea en la velocidad axial o transversal.

La forma de los primeros seis modos se muestran en las figuras 15 y 16. Los modos POD podrían representar estructuras coherentes del flujo de fluido, tal como lo apuntó Lumley [1]. Sin embargo, L. Sirovich [2] señaló que la forma de los modos POD son simple patrones que describen el flujo, pero sin un significado físico. En este trabajo nos inclinaremos a la observación que dió Sirovich. Los modos en u y v tienen características similares. Podemos notar, como en la velocidad axial, el primer par y el tercer par de modos son anti-simétricos con respecto a la coordenada x . Se puede observar en la figura también, como hay un corrimiento espacial a lo largo del movimiento del fluido. Esto es confirmado por las constantes de reconstrucción mostradas en la figura 17 donde existe un corrimiento temporal de aproximadamente $\pi/2$. Las constantes de reconstrucción representan la proyección de cada imagen instantánea sobre los modos. Se observa que las constantes de reconstrucción tienen un comportamiento sinusoidal. Se puede notar también, que a mayor número de modo la frecuencia de la constante de reconstrucción se incrementa. Esto último es consistente con el incremento de patrones al incrementarse el número de modos.

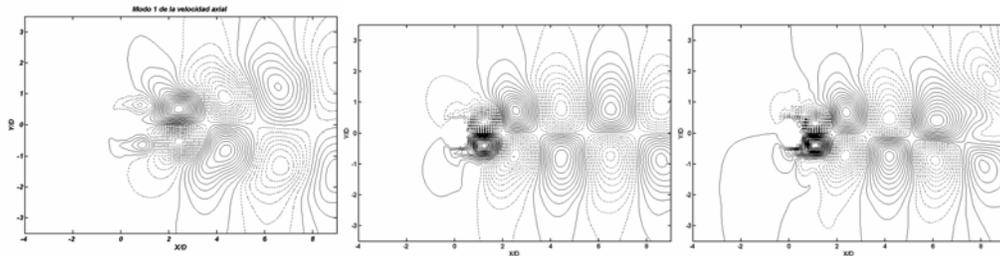
Modos en u

$Re=100$

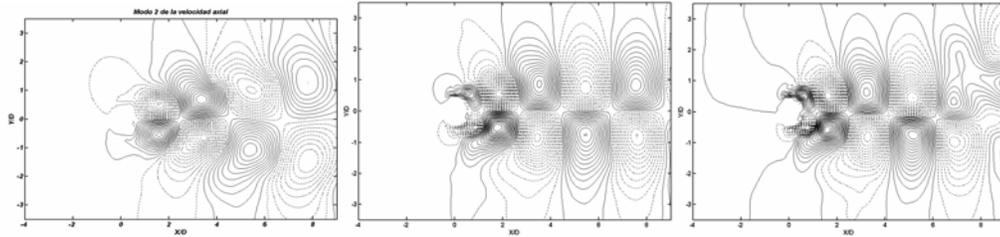
$Re=300$

$Re=500$

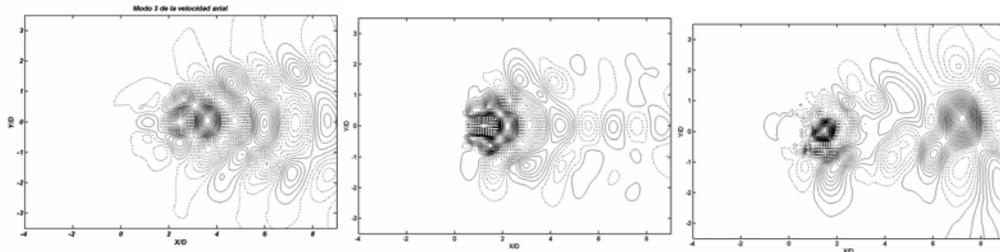
1



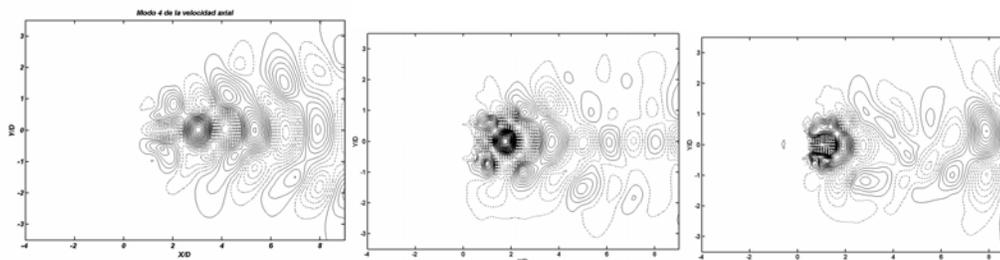
2



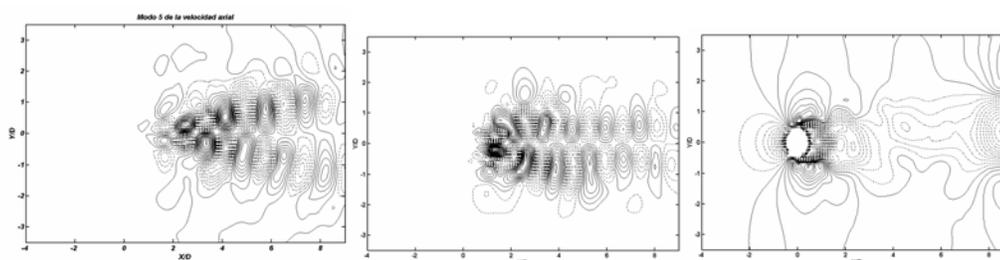
3



4



5



6

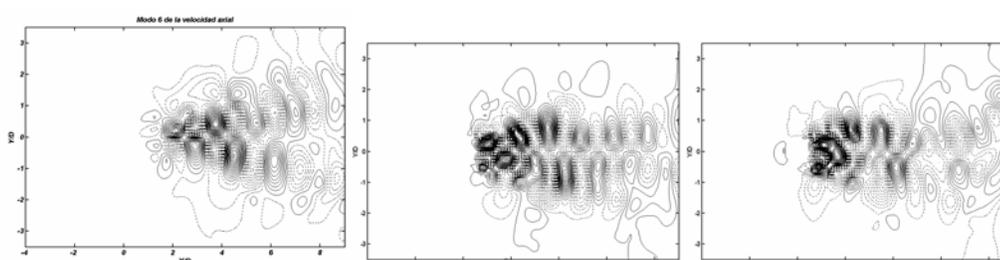


Figura 15. Primeros seis modos axiales para el $Re=100$, 300 y 500 .

Modos en v $Re=100$

$Re=300$

$Re=500$

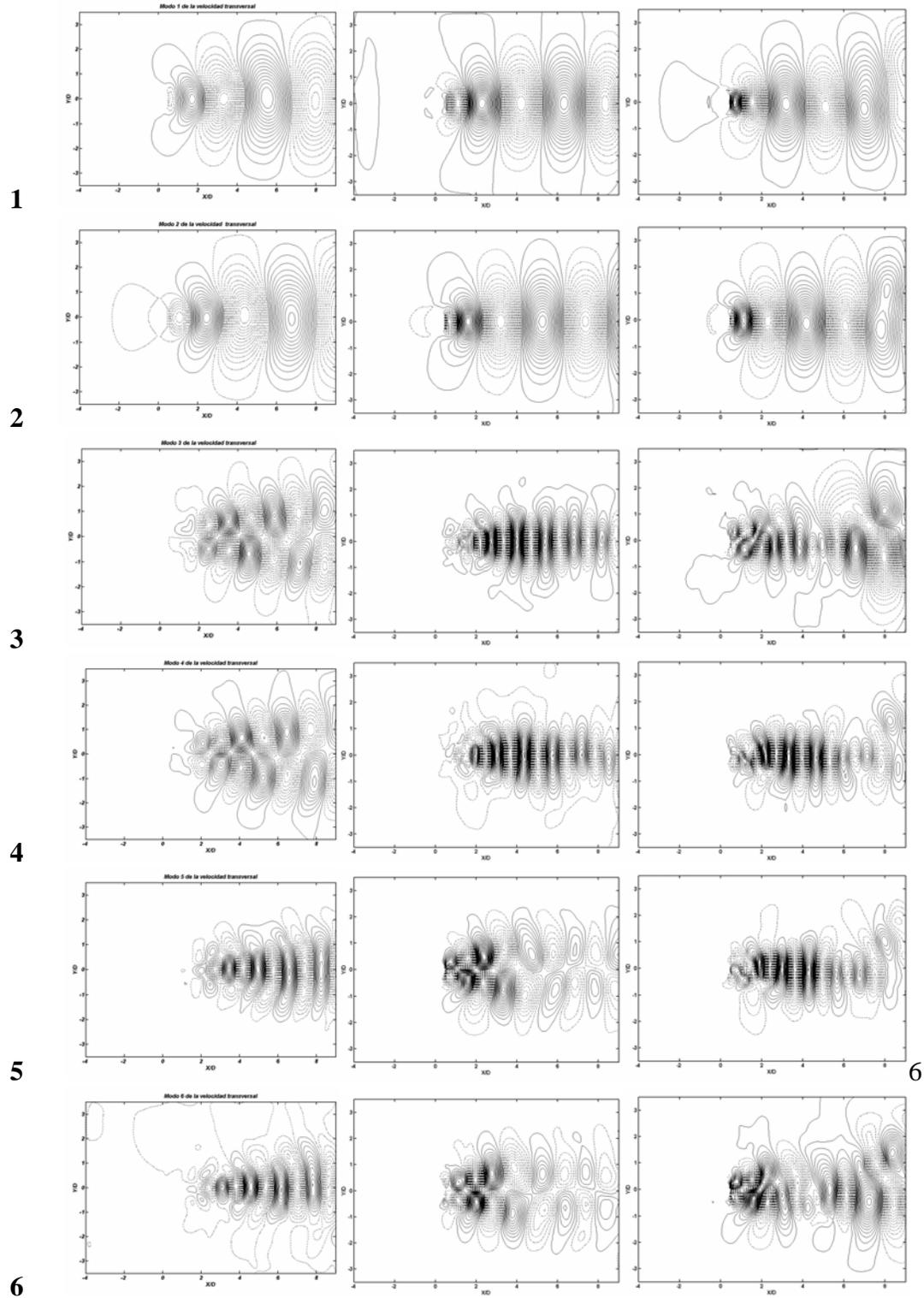


Figura 16. Primeros seis modos transversales para los $Re=100$, 300 y 500 .

Constantes de Reconstrucción Axiales y Transversales

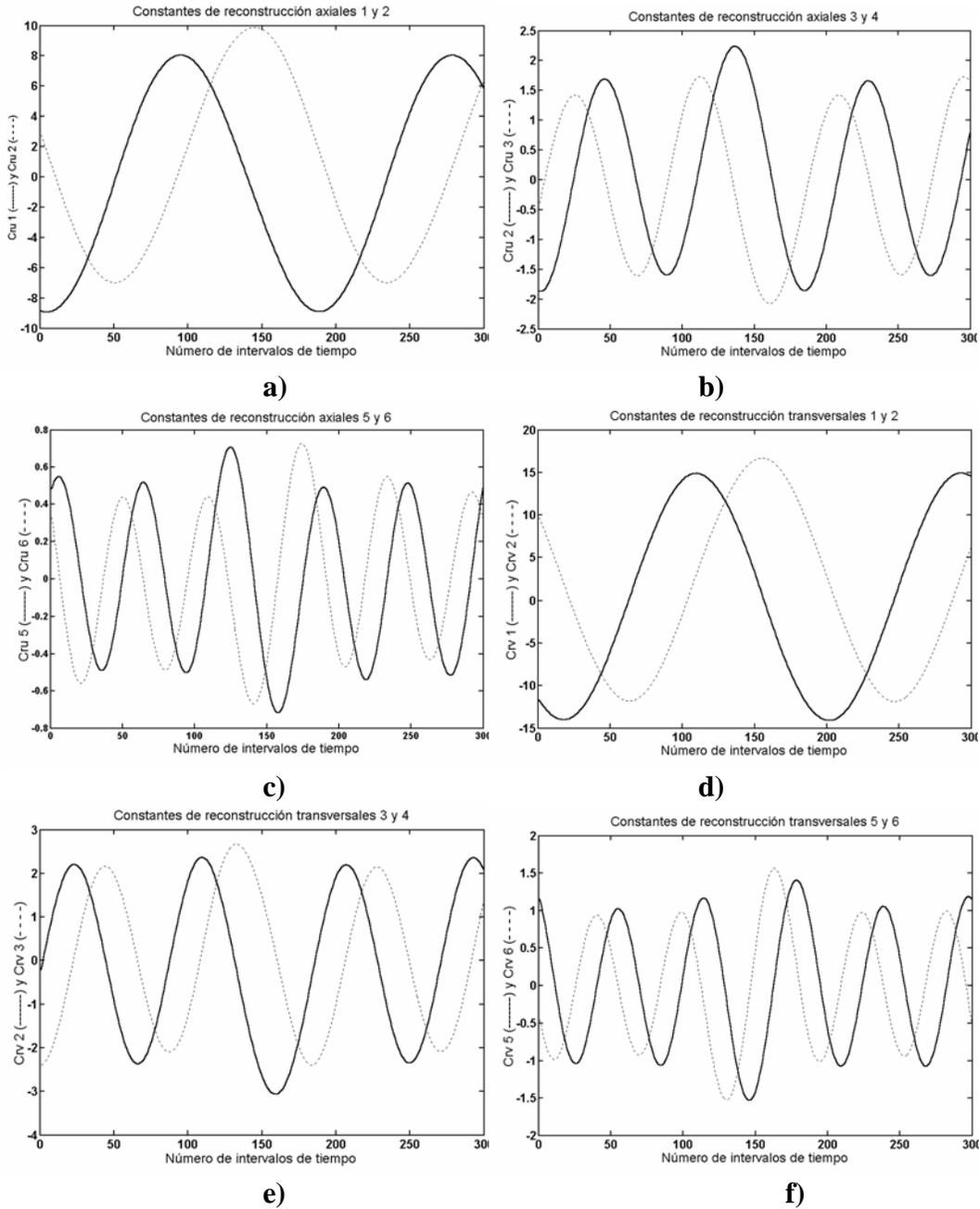


Figura 17. Primeras seis constantes de reconstrucción de las velocidades axiales de a) a la c) y transversales de d) a f) , donde las líneas continuas son las constantes u y v 1,3,5 y las punteadas las constantes u y v 2,4,6.

Para observar la factibilidad del método de POD en descomponer la velocidad en eigenfunciones y constantes de reconstrucción, se procedió a reconstruir una instantánea de las velocidades, u y v , seleccionada en forma aleatoria. Se usó las ecuaciones (2.22) y (2.23) dadas en capítulo 2.

En las figuras 18 y 19 se muestra la reconstrucción de u y v respectivamente, usando diferentes número de modos, las principales características del flujo de fluido son capturadas. Agregar más modos en la reconstrucción, como es el caso de 20 modos, solo se agrega información a los detalles finos del flujo en análisis y que en ocasiones es de poco interés.

Velocidades Axiales Reconstruidas

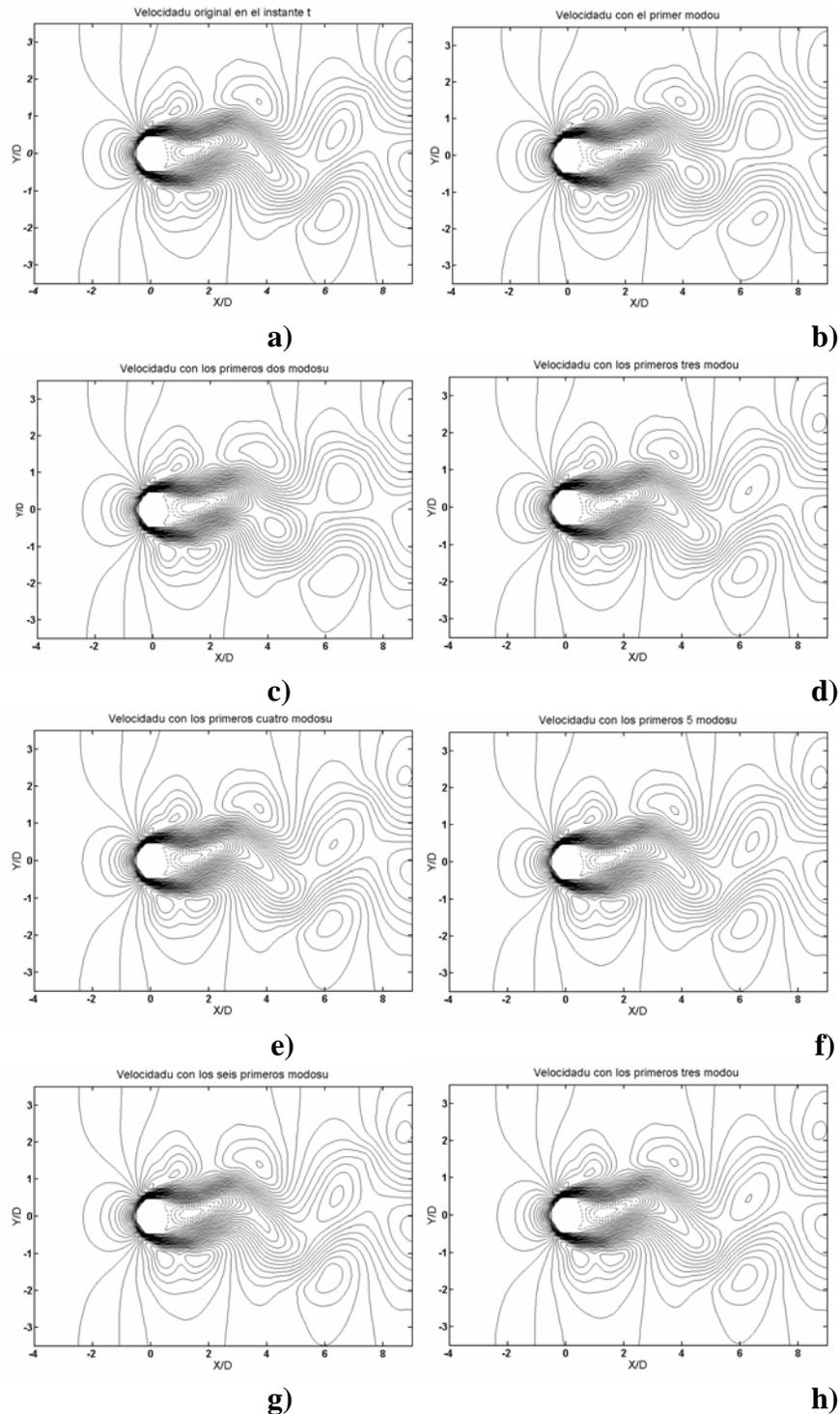


Figura 18 Reconstrucción de velocidades axiales a) Velocidad original, b) Con el primer modo, c) Con dos primeros modos, d) Con tres primeros modos, e) Con cuatro modos f) Cinco modos, g) Seis modos y h) Velocidad con los ocho primeros modos en u la cual es una aproximación más detallada de a).

Velocidad Transversal Reconstruida

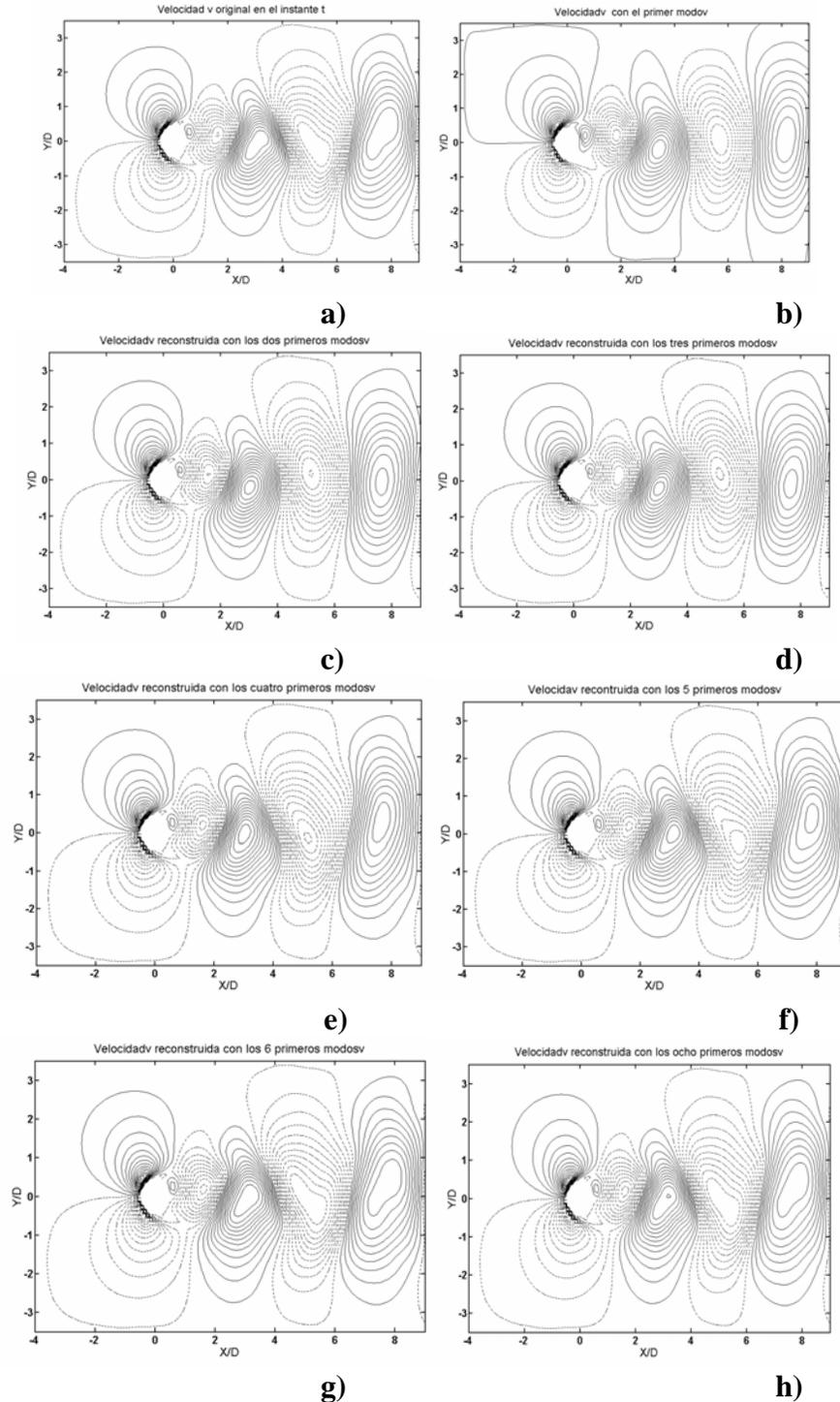


Figura 19. Velocidad transversal reconstruida a) Velocidad original, b) Con el primer modo, c) Con dos modos, d) Con tres modos, e) Con cuatro modos, f) Con cinco modos, g) Con seis modos y h) que es la que contiene los primeros ocho modos estando mas definida.

En la figura 20 se muestra el error relativo calculado con la formula

$$e = \frac{\left\| u - \sum_{n=1}^{N_T} a(t) \tilde{u}(x, y) \right\|^2}{\|u\|^2},$$

al realizar la reconstrucción para la velocidad u , en el cual, se

pueden ver valores extremadamente pequeños. La reconstrucción de la velocidad transversal, v , es mas complicada que la velocidad axial, u . Se observa que conforme se aumenta el número de modos las velocidades reconstruidas son cada vez más parecidas a la velocidad que se escogió de forma aleatoria y al pasar esto el numerador de la formula del error tiende a cero.

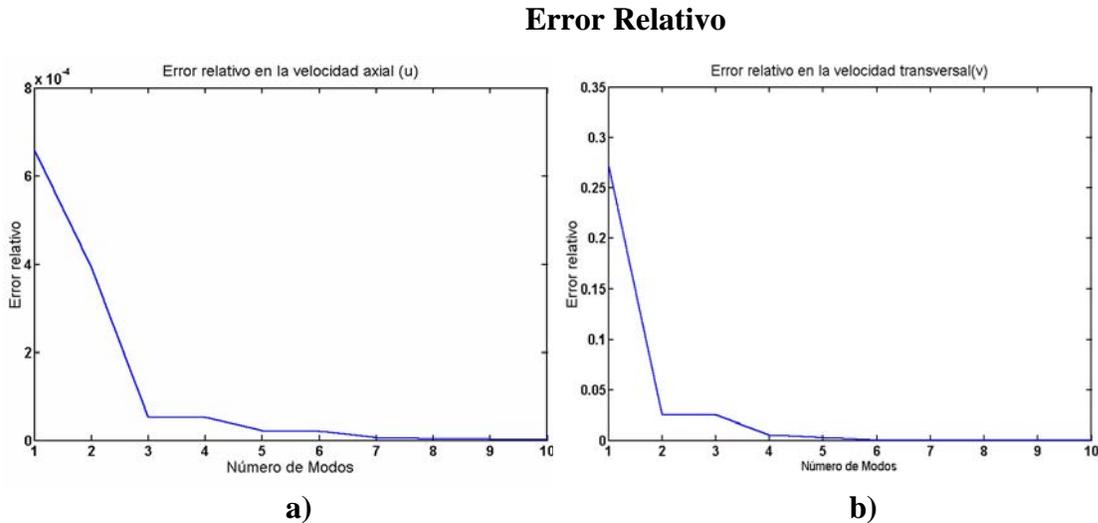


Figura 20. Error en las velocidades de reconstrucción contra velocidades con la energía total.

En la figura 20 a) se muestra el error al reconstruir la velocidad axial y en la figura 20 b) se muestra el error en la reconstrucción de la velocidad transversal, como se puede ver en ambos casos con los primeros ocho modos el error se aproxima a cero.

4.2 Modelos Usando Galerkin

En esta sección se discute los modelos de bajo orden para el flujo en el cilindro con los modos POD que se obtienen para $Re=100$.

Las ecuaciones diferenciales que se resuelven se dieron en el capítulo 2. Las condiciones iniciales se obtienen de proyectar la primera instantánea de u y v en el primer modo POD. El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene de aplicar método Galerkin se resuelve usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Estas

ecuaciones fueron programadas en MatLab, el tiempo que se escoge para que las ecuaciones converjan es del orden de 1×10^{-6} . Dependiendo del numero de modos que se utilice es el numero de ecuaciones que se usa para resolver, expuesto explícitamente con ecuación, $Número_ecuaciones = 2xNumero_modos$.

Nos enfocaremos únicamente para un el caso de un $Re_L=100$, , para aplicar el método Galerkin mostrados en la figura 21. En este caso se utilizaron 2 modos para solución de las ecuaciones por lo que se resolvió un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales las cuales dan cuatro soluciones que se comparan con las constantes de reconstrucción.

Resultados para Dos Modos

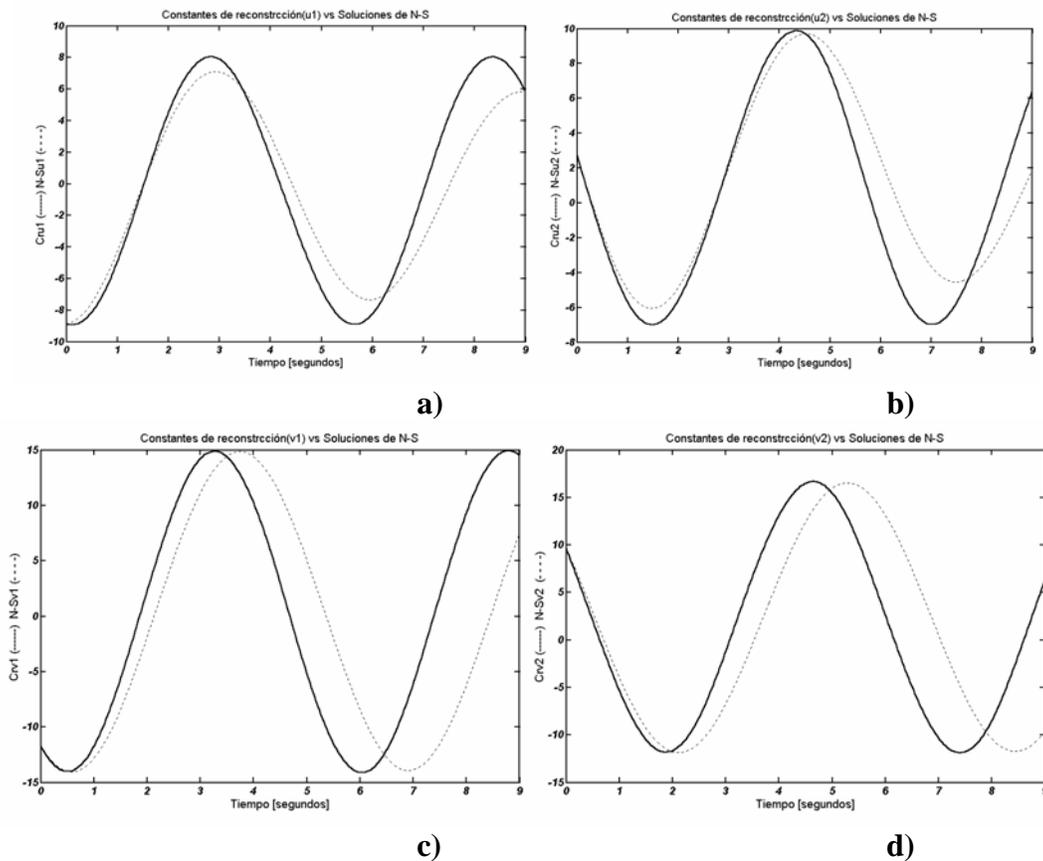


Figura 21. Soluciones y comparación de resultados a) y b) son soluciones para los dos modos u, c) y d) son las soluciones para los modos v, donde las líneas continuas son las constantes de reconstrucción, y las líneas punteadas son las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para cuatro modos se resolvieron ocho ecuaciones diferenciales ordinarias obteniendo cuatro soluciones para los modos axiales y cuatro para los modos transversales, a continuación mostraremos las ocho soluciones obtenidas

Resultados para Cuatro Modos

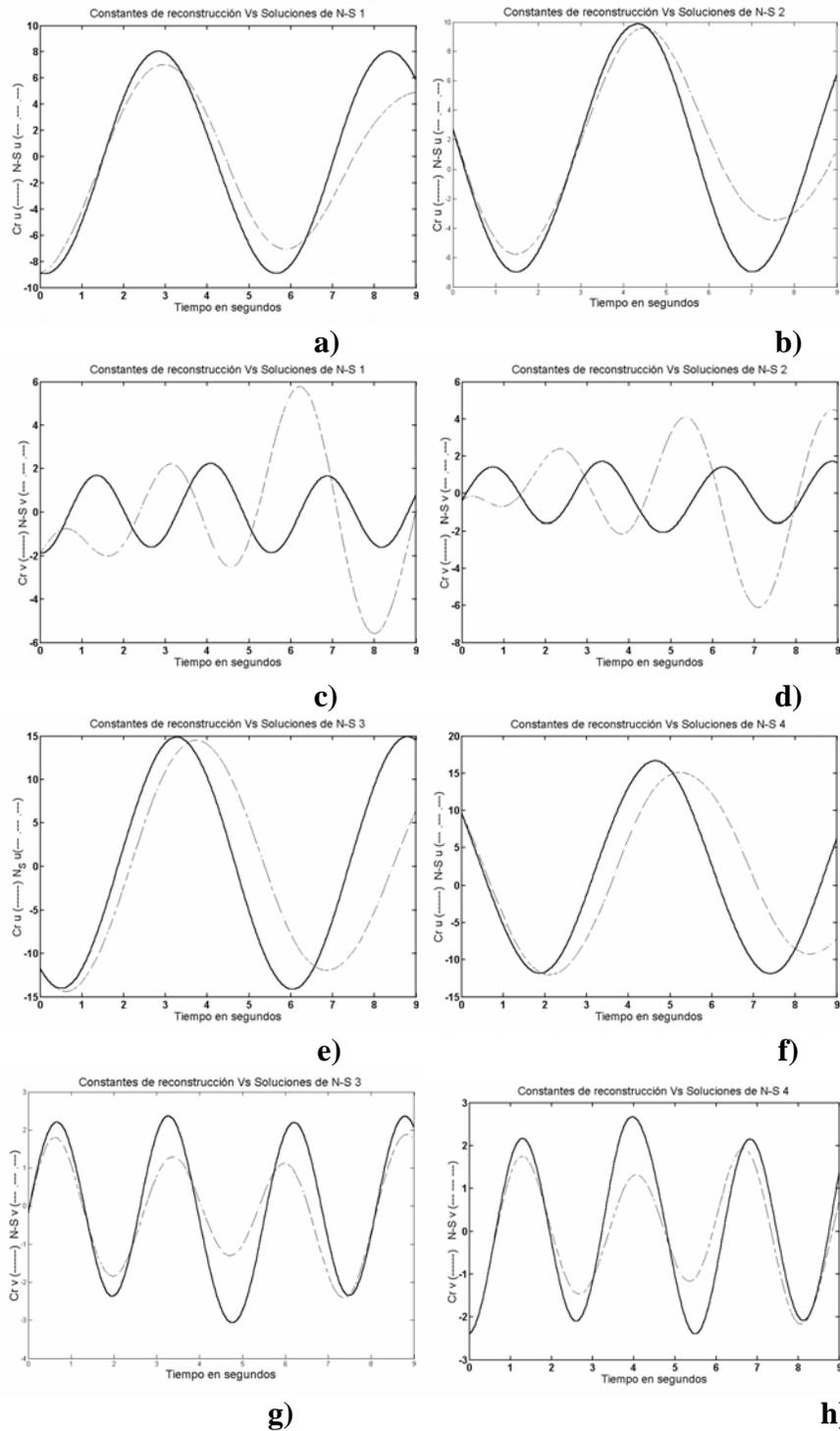


Figura 22. Soluciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes para cuatro modos en u de a) a d) y cuatro en v de e) a h), donde las líneas continuas son las constantes de reconstrucción y las punteadas son las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para el caso de las comparaciones entre las constantes de reconstrucción y las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para dos modos las soluciones son comparables, para el caso de cuatro modos mostradas en la figura 22 existe un desfase en las soluciones para los modos axiales 3 y 4, como se resolvió un sistema de ecuaciones con condiciones iniciales, tal vez una pequeña variación en las condiciones iniciales de estos modos pudo dar un desfase.

Capítulo 5

Conclusiones

Se hicieron las simulaciones en elemento finito de un cilindro circular inmerso en un fluido viscoso, para el número de Reynolds $Re=100$, $Re=300$ y $Re=500$. Obteniendo un ensamble de imágenes correspondientes a la velocidad axial y transversal, a las cuales se les aplicó Descomposición Ortogonal Propia (POD), aplicando el método de imágenes o (snapshots) se obtiene un subconjunto finito de datos ortogonales los cuales tienen inherentes las características del sistema que estamos analizando quedando de esta forma un problema de eigenvalores, obteniendo las eigenfunciones o modos POD para cada variable, observando que los primeros dos modos contenían más del 90% de la energía se procedió a aplicar la técnica de modelos de bajo orden. A los primeros dos modos de cada variable se les aplicó proyección de Galerkin obteniendo las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes usando un algoritmo de Runge-Kutta y comparadas con las constantes de reconstrucción obtenidas con el modelo de POD, los cuales son aceptables. También se aplicó a los primeros cuatro modos y se comparó con las constantes de reconstrucción, en este caso existe una notable diferencia en alguno de los casos. Los Modos POD de presión no se les aplicó la proyección ya que aumentaría el número de ecuaciones en los cálculos de las ecuaciones de Navier-Stokes y el sistema de Runge-Kutta, además sería un caso de flujos compresibles y eso es un trabajo a futuro.

Bibliografía

- [1] Lumley J. ,'Coherent structures in turbulence', In Transition and Turbulence (R.E. Meyer) (1981), pp. 215-241, Academic
- [2] Laurence Sirovich. Turbulence and the Dinamics of coherent Structures, Part 1: Coherent Structures*. Brown University. 1987.
- [3] Aubry, Holms, Lumbley, Stone, ' The dinamics of Coherent Structures in the wall region of turnulent shear layers' , J. Fluid mechanics. (1988), 192, pp. 115-174.
- [4] Clarence W. Rowley. Modeling simulation, and Control of Cavity Flow Oscillations. California Institute of Technology. Pasadena, California. 2002.
- [5] D. Moreno, A. Krothapalli, M. B. Alkisslar, and L. M. Lourenco. Low-dimensional model of a supersonic rectangular jet. Physical Review E **69**, (2004).
- [6] The Proper Orthogonal Decomposition in The Analisis of Turbulent Flows. Gal Berkooz, Philip Holmes, and John L. Lumbley. Cornel university, Ithaca, New York 14853. 1993.
- [7] L. Sirovich and M. Kirby Center for Fluids Mechanics and Division of applied Mathematics, Brown University Providence, Rhode Island 02912. M. Winter United Technologies Research Center, Hartford, Connecticut 06108. American institute of Physics 1990.
- [8] Evguenii V. Kurmyshev, Raúl E. Sánchez-Yáez. Fundamentos de Métodos Matemáticos Para Física e Ingeniería. Editorial Limusa. 2003.