



**CENTRO DE INVESTIGACIONES  
EN OPTICA, A.C.**

**Interferómetro de Desplazamiento Vectorial  
con Sensibilidad Ajustable**

Tesis que para obtener el grado de

*Doctor en Ciencias (Óptica)*

Presenta

M. C. Claudio Narciso Ramírez

## Resumen

En este trabajo de tesis proponemos al Interferómetro de Desplazamiento Vectorial (IDV) como un instrumento alternativo para evaluar frentes de onda asimétricos o con alto grado de aberración. De otra forma, al utilizar los interferómetros convencionales como el Fizeau o Twyman-Green se generan patrones de interferencia con una alta densidad de franjas, que requieren de superficies de referencia de alta calidad y costo. Además, la alta densidad de franjas produce patrones de Moiré que impiden recuperar la información del frente de onda original.

En el primer capítulo planteamos los objetivos que se persiguen en el trabajo de tesis. También exponemos las ventajas del IDV, en comparación con la interferometría tradicional, para evaluar frentes de onda aberrados por superficies con pequeños radios de curvatura, tal como una esfera transparente.

En el segundo capítulo analizamos la interferometría de desplazamiento. Estudiamos diferentes tipos de interferómetros de desplazamiento, sus características y funcionamiento teórico.

En el tercer capítulo caracterizamos el funcionamiento del sistema de desplazamiento de frente de onda propuesto. Analizamos la propagación de un frente de onda a través de un par de prismas usando trazo exacto de rayos. Determinamos las posibles causas de error en el desplazamiento del frente de onda y la forma de minimizarlo.

En el cuarto capítulo implementamos el IDV con el sistema de desplazamiento propuesto. Examinamos los patrones de franjas producidos al hacer incidir en el IDV algunos frentes de onda con diferentes tipos de aberraciones. Previamente determinamos los valores de estas aberraciones y simulamos en la computadora los patrones de interferencia con desplazamiento. Comparamos los patrones de franjas experimentales con simulaciones.

En el quinto capítulo utilizamos el IDV para evaluar el frente de onda transmitido por una esfera. Comparamos los gradientes de fase en diferentes secciones para estimar cualitativamente el grado de simetría de la esfera. Finalmente, comparamos los resultados experimentales con las predicciones teóricas.

En el último capítulo exponemos las conclusiones del presente trabajo de tesis.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Justificación	6
Referencias del capítulo 1	7
<b>2. Interferometría de desplazamiento</b>	
2.1 Introducción	11
2.2 Interferómetro de desplazamiento radial	15
2.3 Interferómetro de desplazamiento rotacional	18
2.4 Interferómetro de desplazamiento lateral	22
2.5 Interferómetro de desplazamiento vectorial	24
Referencias del capítulo 2	29
<b>3. Evaluación del sistema de desplazamiento del frente de onda del IDV</b>	
3.1 Introducción	31
3.2 Sistema de desplazamiento de un frente de onda	32
3.3 Trazo exacto de rayos	34
3.4 Desplazamiento del frente de onda producido por un sistema de prismas de cuña	35
3.5 Análisis de la desviación en el desplazamiento del frente de onda	
3.5.1 Desviación producida por diferencias entre los ángulos de cuña	41

3.5.2	Desviación producida por la incidencia oblicua del frente de onda en el sistema de desplazamiento	44
3.6	Verificación experimental del desplazamiento teórico	48
3.7	Resumen	52
	Referencias del capítulo 3	54
<b>4.</b>	<b>Análisis de los patrones de franjas obtenidos con el IDV</b>	
4.1	Introducción	56
4.2	Evaluación de un frente de onda difractado por una abertura circular	58
4.3	Evaluación de un frente de onda aberrado por una componente óptica	66
4.4	Resumen	70
	Referencias del capítulo 4	71
<b>5.</b>	<b>Evaluación de frentes de onda aberrados por una esfera utilizando el IDV</b>	
5.1	Introducción	72
5.2	Aberraciones introducidas por una esfera transparente	74
5.3	Implementación del IDV utilizando una esfera como componente óptica	83
5.4	Resumen	90
	Referencias del capítulo 5	92
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>A.</b>	<b>Apéndice: Propagación de un frente de onda a través del sistema de desplazamiento</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

El fenómeno de interferencia está intrínsecamente ligado a la naturaleza ondulatoria de la luz y ha tenido una considerable influencia en el desarrollo de la física. Las observaciones de Young y el razonamiento de la interferencia de las ondas que atraviesan dos orificios, fundamentan la teoría ondulatoria de la luz de Fresnel. Más aún, el experimento de Young es utilizado para fundamentar la teoría moderna de coherencia. La teoría especial de la relatividad de Einstein se sustenta en el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley [1].

La interferometría es una de las herramientas fundamentales de la física experimental moderna. Sus aplicaciones se extienden a varias ramas de la ciencia. En 1907 Michelson obtuvo el premio Nóbel de física por “su instrumento óptico de precisión y las investigaciones espectroscópicas y metrológicas que llevó a cabo con él” en la región visible del espectro electromagnético. Posteriormente se desarrollaron aplicaciones en otras regiones del espectro. Cabe resaltar que la interferencia en el infrarrojo es la más moderna de estas técnicas.

La aplicación que tiene el mayor desarrollo es la interferometría óptica para examinar y evaluar la calidad de superficies. La longitud de onda permite realizar mediciones extremadamente exactas de los contornos y la planicidad de una superficie. La característica más poderosa de la interferometría es su grado de detalle. Ésta es función del frente de onda generado por la reflexión de la luz en una superficie, o por su transmisión a través de materiales dieléctricos. En condiciones ideales se pueden detectar irregularidades en superficies del orden de nanómetros ( $10^{-9}$  m). Todas estas mediciones se basan en el análisis de interferogramas [2,3].

Los interferogramas son patrones luminosos de franjas brillantes y oscuras. Generalmente representan el contorno o perfil topográfico de la superficie. Su interpretación requiere de análisis especializados. El gran avance de la informática para la adquisición y procesamiento digital de imágenes mejoran, en sobre medida, el análisis de los interferogramas.

La interferometría tiene la ventaja de ser no invasiva. Es decir no hay contacto con el objeto, lo cual podría ocasionar deformación, daño o ralladuras en la superficie. En contraparte otras técnicas como la perfilometría, donde el elemento sensor se desliza a lo largo de la superficie, ejercen presión (desgaste) sobre el objeto. Otra técnica es la microscopía óptica, que resuelve detalles muy finos pero no puede determinar la altura de los elementos en la imagen.

El primer interferómetro fue construido por Michelson en 1880 y lo utilizó para medir la velocidad de la tierra a través del éter. Sin embargo ocurrió todo lo contrario, demostró la inexistencia del éter y pudo medir la velocidad de la luz en el vacío. Posteriormente F. Twyman y A. Green patentaron una modificación al interferómetro de Michelson, que es hasta ahora un instrumento de gran importancia en el terreno de pruebas ópticas.

Durante la segunda guerra mundial, los alemanes utilizaron el interferómetro Mach-Zehnder en el estudio de flujos de aire alrededor de modelos de aeroplanos. Ahora, se utiliza ampliamente para determinar la relación entre variaciones de presión, temperatura o concentraciones en función del cambio en el índice de refracción [4]. El interferómetro Fabry-Perot produce franjas de interferencia muy finas que dan información sobre el espectro de frecuencias de la luz bajo estudio. Se utiliza ampliamente en espectroscopia de alta resolución.

Componentes ópticos sin simetría de rotación, incluyendo espejos segmentados, se utilizan actualmente en grandes y modernos sistemas ópticos [5-8]; y en los telescopios espaciales de detección remota [9-14]. La fabricación y evaluación de estos componentes requiere la utilización de superficies de referencia de alta calidad y costo. Igualmente, dispositivos ópticos con una superficie esférica reemplazan a varias superficies esféricas. Las superficies esféricas son de gran interés en la óptica debido a la característica de tales superficies para formar una imagen puntual de un objeto puntual, excluyendo los efectos de difracción. Adicionalmente, en los últimos 40 años, el desarrollo de software más sofisticado ha resultado en diseños en el límite de difracción que incorporan un pequeño número de elementos ópticos esféricos.

La fabricación y evaluación de estas superficies con los interferómetros tradicionales, tales como el Fizeau o Twyman-Green, genera patrones de interferencia con una alta densidad de franjas. Esto se debe a la enorme diferencia de camino óptico entre el frente de onda, proveniente de la superficie sin simetría o esférica, y las superficies de referencia convencionales. Además, la alta densidad de franjas produce patrones de Moiré que impiden recuperar la información del frente de onda original. La interferometría de desplazamiento es una técnica alternativa para evaluar y medir errores en superficies sin simetría de rotación y esféricas [15-17]. Esta técnica no requiere de superficies de



referencia porque la amplitud del frente de onda se divide en dos partes, una parte cambia un poco y se compara consigo mismo. La interferometría de desplazamiento se utiliza para recuperar la topografía o perfil de una superficie a partir de la forma del patrón de franjas resultante [18-20]. También se emplea para medir la distancia entre objetos [21,22] y para analizar cambios locales en el índice de refracción debido a variaciones en la densidad del medio [23,24]. Estudiamos algunas configuraciones de interferómetros de desplazamiento con diferente grado de éxito [25-26]. Recientemente utilizamos el Interferómetro de Desplazamiento Vectorial para caracterizar las partes de una flama [27].

## 1.2 Objetivos

Caracterizar una nueva configuración del Interferómetro de Desplazamiento Vectorial con sensibilidad ajustable y que no introduce inclinación (tilt) en el frente de onda desplazado.

Los objetivos particulares son los siguientes:

1. Caracterizar el sistema de desplazamiento por medio de trazo exacto de rayos para determinar el desplazamiento del frente de onda.
2. Evaluar con el IDV frentes de onda provenientes de componentes ópticas previamente analizadas con otros instrumentos. Comparar los resultados simulados con los obtenidos experimentalmente.
3. Modelar una esfera como una componente óptica y calcular las aberraciones introducidas en el frente de onda transmitido.
4. Analizar con el IDV el frente de onda proveniente de la esfera y comparar los patrones de franjas experimentales con los simulados en las mismas condiciones.
5. Evaluar la simetría de los frentes de onda en diferentes posiciones de la esfera.

### 1.3 Justificación

Proponemos al Interferómetro de Desplazamiento Vectorial (IDV) como un instrumento alternativo para evaluar frentes de onda sin simetría de rotación o con alto grado de aberración. El desplazamiento ajustable nos permite seleccionar la dirección y la densidad adecuada de las franjas. Esto nos facilita la implementación de algoritmos de recuperación del frente de onda con mayor exactitud. Adicionalmente, empleamos el IDV como un instrumento para evaluar un frente de onda transmitido por una esfera, con un alto grado de aberración esférica. Este tipo de esferas se utilizan como un estándar de densidad y en otras aplicaciones científicas por los laboratorios de metrología [28,29].

Esta determinación experimental es en general considerada un reto por el radio de curvatura relativamente pequeño de la esfera,  $r_{esfera} = 36.2$  mm. Sobre un segmento de la esfera se producen una alta densidad de franjas, en comparación a las superficies ópticas tradicionales. Por lo tanto, es necesario un instrumento que se pueda ajustar para superficies de calidad variable, tal como un interferómetro de desplazamiento vectorial que permite un control preciso de la sensibilidad de la medición. Además, empleamos un detector con alta resolución (alto número de píxeles), para resolver las franjas en el patrón de interferencia.

En el siguiente capítulo exponemos el fundamento teórico de la interferometría de desplazamiento.

## Referencias del capítulo 1

- [1] W. H. Steel, *Interferometry*, second edition, Cambridge University Press, 1986, Great Britain.
- [2] S. Yoshida, M. Muhamad, R. Widiastuti, A. Kusnowo, “*Optical interferometric technique for deformation analysis*”, *Opt. Exp*, **2**(13), 516-530 (1998).
- [3] D. I. Farrant, J. N. Petzing, “*Sensitivity errors in interferometric deformation metrology*”, *Appl. Opt.* **42**(28), 5634-5641 (2003).
- [4] P. Hariharan, “*Optical Interferometry*”, Academic Press, 1985, Australia.
- [5] J. L. Flores, G. Paez, M. Strojnik, “*Design of a diluted aperture by use of the practical cutoff frequency*”, *Appl. Opt.* **38** (1999) 6010-6018.
- [6] J. L. Flores, G. Paez, M. Strojnik, “*Optimal aperture configuration for a segmented and partially diluted extremely large telescope*”, *J. Mod. Opt.* **50** (2003) 729-742.
- [7] J. L. Flores, M. Strojnik, G. Paez, G. Garcia-Torales, “*Effects of misalignment errors on the optical transfer functions of synthetic aperture telescopes*”, *Appl. Opt.* **43** (2004) 5926-5932.
- [8] G. Paez, M. Strojnik, J. Garcia-Marquez, “*On telescope performance evaluation*”, *J. Mod. Opt.* **51** (2004) 183-196.

- [9] E. C. Kintner, J. M. Hartley, E. S. Jacobs, P. J. Cucchiaro, “*Advanced development of internal calibration sources for remote sensing telescopes*”, *Proc. SPIE*, **5543** (2004) 313-319.
- [10] E. C. Kintner, W. K. Wong, E. S. Jacobs, P. J. Cucchiaro, R. J. Koshel, “*Efficient and versatile internal reference sources for remote sensing space telescopes*”, *Proc. SPIE*, **6297** (2006) 62970F.
- [11] M. S. Scholl, “*Design parameters for a two-mirror telescope for stray-light sensitive infrared applications*”, *Infrared Phys. Technol.* **37** (1996) 251-257.
- [12] M. S. Scholl, G. Paez, “*Image-plane incidence for a baffled infrared telescope*”, *Infrared Phys. Technol.* **38** (1997) 87-92.
- [13] M. S. Scholl, G. Paez, “*Using the y,y-bar diagram to control stray light noise in IR systems*”, *Infrared Phys. Technol.* **38** (1997) 25-30.
- [14] M. Strojnik, G. Paez, “*Infrared detection of a planet next to a bright star*”, *Infrared Phys. Technol.* **49** (2007) 312 -316.
- [15] J. C. Chanteloup, “*Multiple-wave lateral shearing interferometry for wave-front sensing*”, *Appl. Opt.* **44** (2005) 1559-1571.
- [16] S. Velghe, N. Guerineau, R. Haidar, B. Toulon, S. Demoustier, J. Primot, “*Two-color multi-wave lateral shearing interferometry for segmented wave-front measurements*”, *Opt. Express* **14** (2006) 9699-9708.

- [17] S. Mousset, C. Rouyer, G. Marre, N. Blanchot, “*Piston measurement by quadriwave lateral shearing interferometry*”, *Opt. Letters* **31** (2006) 2634-2636.
- [18] D. S. Mehta, S. K. Dubey, M. M. Hossain, Ch. Shakher, “*Simple multifrequency and phase-shifting fringe-projection system based on two-wavelength lateral shearing interferometry for three-dimensional profilometry*”, *Appl. Opt.* **44** (2005) 7515-7521.
- [19] A. Dubra, C. Paterson, C. Dianty, “*Double lateral shearing interferometer for the quantitative measurement of tear film topography*”, *Appl. Opt.* **44** (2005) 1191-1199.
- [20] A. Dubra, C. Paterson, C. Dianty, “*Study of the tear topography dynamics using a lateral shearing interferometer*”, *Opt. Express* **12** (2004) 6278-6289
- [21] D. S. Mehta. P. Singh, M. S. Faridi, S. Mirza, Ch. Shakher, “*Distance measurement with extended range using lateral shearing interferometry and Fourier transform fringe analysis*”, *Opt. Eng.* **44** (2005) 063602.
- [22] J. Chu, S. W. Kim, “*Absolute distance measurement by lateral shearing interferometry of point-diffracted spherical waves*”, *Opt. Express* **14** (2006) 5961-5967.
- [23] H. Suhara, “*Interferometric Measurement of the Refractive-Index Distribution in Plastic Lenses by Use of Computed Tomography*”, *Appl. Opt.* **41** (2002) 5317-5325.

[24] G. Coppola, P. Ferraro, M. Iodice, S. De Incola, “*Method for Measuring the Refractive Index and the Thickness of Transparent Plates with a Lateral-Shear, Wavelength-Scanning Interferometer*”, *Appl. Opt.* **42** (2003) 3882-3887.

[25] I. Moreno, G. Paez, M. Strojnik, “*Dove prism with increased throughput for implementation in a rotational-shearing interferometer*”, *Appl. Opt.* **42** (2003), 4514-4521.

[26] E. Gutierrez-Herrera, M. Strojnik, “*Interferometric tolerance determination for a Dove prism using exact ray trace*”, *Opt. Commun.* **281** (2008), 897-905.

[27] G. Paez, M. Strojnik, “*Vectorial shearing interferometry for combustion application*”, *Proc. SPIE*, **6307** (2006) 63070I

[28] K. Fujii, “*Present state of the solid and liquid density standards*”, *Metrologia*, **41** (2004) S1-S15.

[29] A. Picard, “*Mass determinations of a 1 kg silicon sphere for the Avogadro project*”, *Metrologia*, **43** (2006) 46-52.

## Capítulo 2

### Interferometría de desplazamiento

#### 2.1 Introducción

La interferencia se manifiesta en la naturaleza de muchas formas, en las distribuciones de color que resplandecen sobre una mancha de aceite, en la interacción de las ondulaciones de la superficie en un estanque de agua, etc. La interferencia de ondas electromagnéticas se rige por el principio de superposición. La irradiancia de la onda electromagnética resultante en un punto en el espacio, donde dos o más ondas de luz se superponen, es igual a la suma vectorial de las perturbaciones individuales.

Expresamos la superposición de ondas electromagnéticas en términos de sus campos eléctrico o magnético, utilizando la ecuación vectorial:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2.1)$$

Donde cada vector del campo eléctrico tiene la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon). \quad (2.2)$$



Aquí  $\vec{k}$  es el vector de propagación,  $\varepsilon$  es la fase inicial y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda.

La irradiancia resultante de la interferencia, que podemos detectar y observar físicamente, es el flujo de potencia promedio temporal de la cantidad de energía que atraviesa por unidad de tiempo una unidad de área perpendicular a la dirección del flujo de energía, esto es: [1]

$$I = \epsilon c \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3)$$

Donde  $c$  es la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8$  m/s) y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica. Sustituimos la expresión (2.1) en (2.3)

$$I = \epsilon c \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle, \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.4)$$

$$I = \epsilon c \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \epsilon c \langle \vec{E}_2^2 \rangle + \epsilon c \langle 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.5)$$

Los dos primeros términos en la ecuación (2.5) corresponden a las irradiancias  $I_1$  e  $I_2$  de cada onda. El tercero es el término de interferencia  $I_{12}$ , y produce un aumento o disminución de la irradiancia total.

Analizamos el término de interferencia:

$$I_{12} = \epsilon c 2 \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \rangle \left\langle \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2) \right\rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.6)$$

Después de varios procesos algebraicos, simplificamos la ecuación (2.6) como:

$$I_{12} = \epsilon c (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.7)$$

Aquí, el producto punto de los campos eléctricos afecta la visibilidad del término de interferencia. Cuando los campos eléctricos son paralelos, la visibilidad será máxima. Por el contrario, cuando los campos son perpendiculares entre si, el término de interferencia es cero. El argumento del coseno de la ecuación (7) es la diferencia de fase entre  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , que representamos como:

$$\delta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (2.8)$$

Cuando la diferencia de fase entre los campos eléctricos es igual a un múltiplo entero de  $2\pi$  existe interferencia constructiva, la irradiancia es máxima. Por otro lado, cuando es un múltiplo impar del  $\pi$ , la interferencia es destructiva, la irradiancia es mínima.

Para poder observar la distribución de franjas en un interferogramas, es necesario que las frecuencias de las ondas que se superponen sean aproximadamente iguales. Lo anterior debido a que una diferencia de frecuencia significativa resultaría en un desfase de variación rápida y por lo tanto, no se observarían franjas. Para asegurarnos que las ondas tienen la misma frecuencia, utilizamos fuentes cuasi-monocromáticas. Además, es necesario que las ondas mantengan su forma durante un tiempo.

El tiempo de coherencia  $\Delta t_c$  de una onda se define como el intervalo temporal en el que podemos predecir razonablemente la fase de la onda en un punto en el espacio. El tiempo de coherencia está relacionado directamente con el ancho de banda  $\Delta \nu$  finito de la fuente por la siguiente relación:

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta \nu} . \quad [\text{seg}] \quad (2.9)$$

La longitud de coherencia  $l_c$  de una onda está dada por la ecuación:

$$l_c = \frac{c}{\Delta \nu} . \quad [\text{m}] \quad (2.10)$$

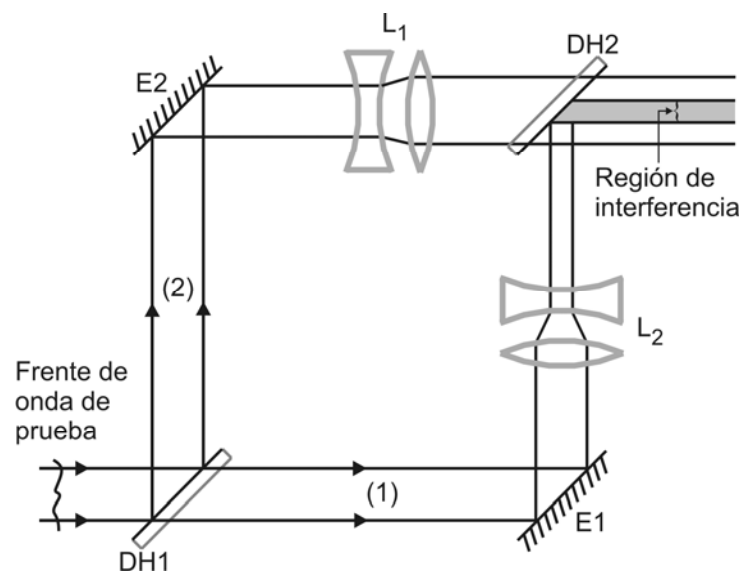
Es necesario que aparte de coherencia temporal exista coherencia espacial. La coherencia espacial depende de la extensión finita de la fuente en el espacio. Supongamos una fuente monocromática extendida, donde dos elementos radiantes puntuales están separados una distancia muy grande comparada con la longitud de onda  $\lambda$ . Ambos elementos aparentemente se comportarían de forma independiente, es decir, no habría correlación entre las fases de las dos perturbaciones emitidas.

En la interferometría de desplazamiento comparamos el frente de onda bajo prueba consigo mismo, sin usar una superficie de referencia de alta calidad. En esta técnica dividimos en amplitud el frente de onda en dos partes. Una parte se propaga sin cambios y la otra la modificamos en alguno de sus parámetros. Finalmente superponemos ambos frentes y obtenemos un patrón de interferencia [2].

Existen varios tipos de interferómetros de desplazamiento: radial, rotacional, lateral, vectorial y de inversión de frente de onda. Este último es un caso especial del interferómetro rotacional pero con un ángulo de desplazamiento igual a  $180^\circ$ .

## 2.2 Interferómetro de desplazamiento radial

En el interferómetro de la figura 2.1 utilizamos los componentes del sistema  $L_1$  para expandir uno de los frentes de onda. Con las lentes del sistema  $L_2$  reducimos el otro frente de onda. Posteriormente superponemos ambos frentes en el divisor de haz DH2.



**Figura 2.1.** Esquema de un interferómetro de desplazamiento radial. DH1 y DH2 son los divisores de haz, E1 y E2 son los espejos,  $L_1$  y  $L_2$  son sistemas de lentes para expandir o contraer el haz.

Uno de los frentes de onda se reduce por un factor ( $L_c < 1$ ), donde:

$$L_c = \frac{\rho}{\rho'} \quad (2.11)$$

Aquí  $\rho$  es la razón de la distancia radial de un punto en el patrón de interferencia, al máximo radio del frente de onda sin reducir.  $\rho'$  es la razón de un punto en el patrón de interferencia, al máximo radio del frente de onda reducido [3].

Expresamos el frente de onda que se reduce como:

$$W(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \rho'^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (2.12)$$

El otro frente de onda se expande por un factor ( $L_e \geq 1$ ), donde:

$$L_e = \frac{\rho}{\rho''}, \quad (2.13)$$

y escribimos la forma del frente de onda como:

$$W(\rho'', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \rho''^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (2.14)$$

En la región de interferencia la diferencia de camino óptico DCO es

$$\text{DCO} = W(\rho', \theta) - W(\rho'', \theta), \quad (2.15a)$$

$$\text{DCO} = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n (1 - R^n) \rho'^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (2.15b)$$

Aquí  $R$  es el desplazamiento radial efectivo que expresamos como:

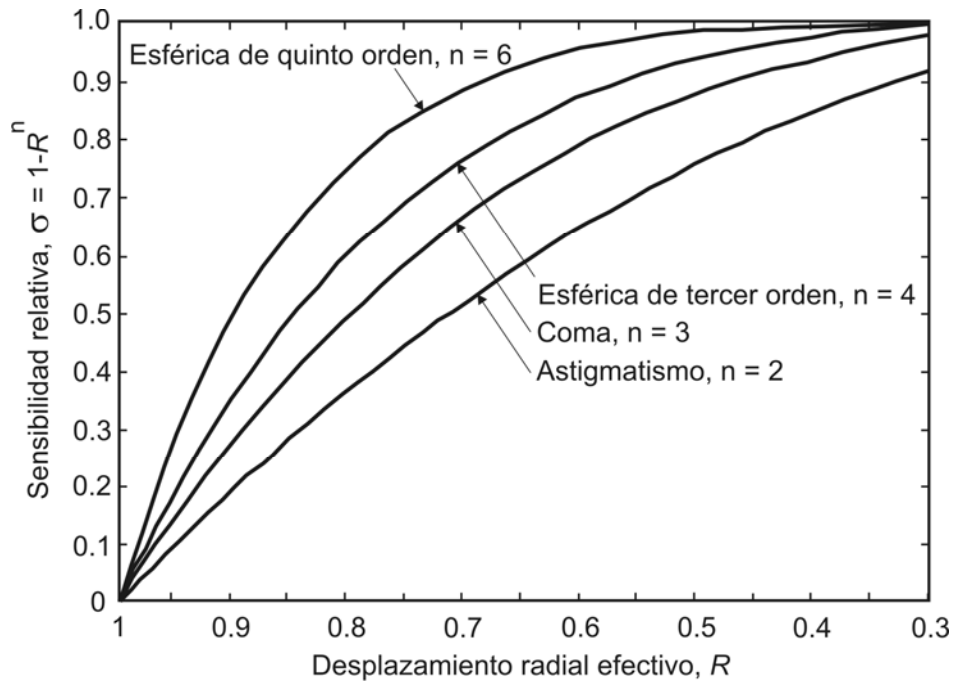
$$R = \frac{L_c}{L_e}. \quad (2.16)$$

La sensibilidad  $\sigma$  de un interferómetro de desplazamiento es el menor desplazamiento que produce un cambio en el patrón de franjas, detectable por el instrumento [4]. Representamos la sensibilidad relativa del interferómetro de desplazamiento radial con las ecuaciones:

$$\sigma = \frac{d(\text{DCO})/d\rho'}{dW(\rho', \theta)/d\rho'}, \quad (2.17a)$$

$$\sigma_{n,\ell} = 1 - R^n. \quad (2.17b)$$

En la gráfica de la figura 2.2 ilustramos la sensibilidad relativa  $\sigma$  como función del desplazamiento radial efectivo  $R$ , para diferentes tipos de aberraciones. Observamos que el interferómetro es más sensible a la aberración esférica [5].

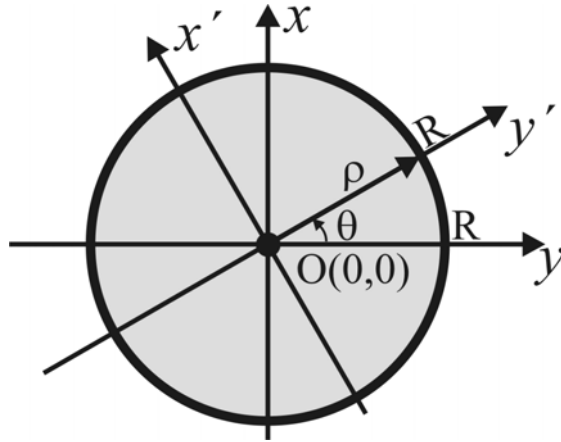


**Figura 2.2.** Gráfica de sensibilidad  $\sigma$  como función del desplazamiento  $R$ .

Utilizamos el interferómetro de desplazamiento radial para medir frentes de onda aberrados con componentes radiales; como la aberración esférica.

### 2.3 Interferómetro de desplazamiento rotacional

En la interferometría de desplazamiento rotacional giramos uno de los frentes de onda un ángulo  $\theta$ . Los frentes de onda original y desplazado conservan las coordenadas del centro, como lo observamos en la figura 2.3.



**Figura 2.3.** La región de interferencia tiene las mismas dimensiones que los frentes de onda original y el desplazado, en el plano  $(x,y)$ .

Cuando rotamos uno de los frentes de onda también cambiamos su sentido de polarización. Esto representa un problema ya que al superponer ambos frentes, la diferencia en la polarización afecta el contraste de las franjas. Si el ángulo de giro muy pequeño, la disminución del contraste es despreciable. Tenemos entonces, un interferómetro de desplazamiento rotacional diferencial.

El patrón de franjas resultante se forma por una intensidad de modulación más una intensidad de fondo. El término sinusoidal de modulación depende únicamente de la diferencia de fase entre los frentes de onda. En coordenadas polares, la irradiancia de la interferencia es:

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \{1 + \cos[\Phi(\rho, \phi) - \Phi(\rho + \Delta\rho, \phi + \Delta\phi)]\}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.18)$$

Aquí  $I_B$  es la intensidad de fondo

$$I_B(\rho) = [I(\rho_1)I(\rho_2)]^{1/2}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.19)$$



Para desplazamientos angulares infinitesimales, reemplazamos los incrementos con diferenciales en la ecuación (2.18)

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \{1 + \cos[\Phi(\rho, \phi) - \Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi)]\}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.20)$$

Expandimos en series de Taylor la fase  $\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi)$  y tomamos solo los términos más significativos de la expansión:

$$\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi) = \Phi(\rho, \phi) + \left[ \frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial\rho} \right] \partial\rho + \rho \left[ \frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial(\rho\phi)} \right] \partial\phi. \quad (2.21)$$

Dado que el desplazamiento es solo rotacional hacemos  $\partial\rho = 0$  en la ecuación (2.21)

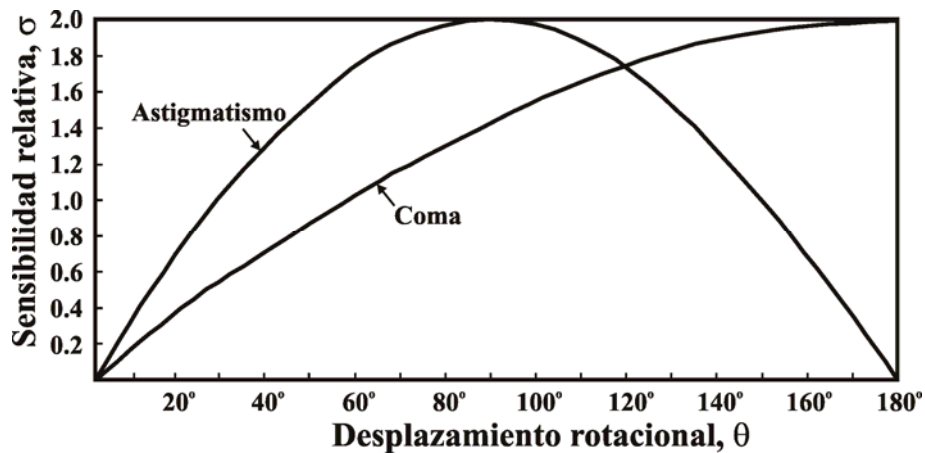
$$\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi) - \Phi(\rho, \phi) = \rho \left[ \frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial(\rho\phi)} \right] \partial\phi = \left[ \frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial\phi} \right] \partial\phi. \quad (2.22)$$

Sustituimos la ecuación (2.22) en la ecuación (2.20)

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \left\{ 1 + \cos \left[ \left( \frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial\phi} \right) \partial\phi \right] \right\}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.23)$$

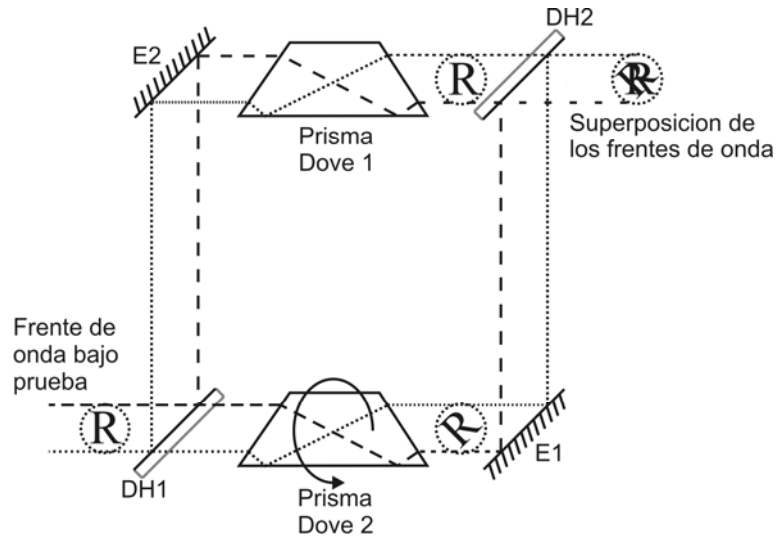
Deducimos de la ecuación (2.23) que el patrón de interferencia depende de la derivada de la componente angular del frente de onda. Por lo tanto este interferómetro es sensible a aberraciones que no tienen simetría de rotación, tales como astigmatismo y coma [6]. El interferómetro detecta cualquier desviación de la simetría rotacional del frente de onda bajo prueba.

Cuando el ángulo de rotación de uno de los frentes de onda es de  $90^\circ$ , la sensibilidad del interferómetro es máxima para la detección de la aberración de astigmatismo. La máxima sensibilidad para la aberración de coma sucede cuando el ángulo de rotación es de  $180^\circ$ . En la figura 2.4 mostramos la sensibilidad del interferómetro de desplazamiento rotacional como función del ángulo de rotación del frente de onda.



**Figura 2.4.** Sensibilidad  $\sigma$  como función del desplazamiento rotacional  $\theta$ .

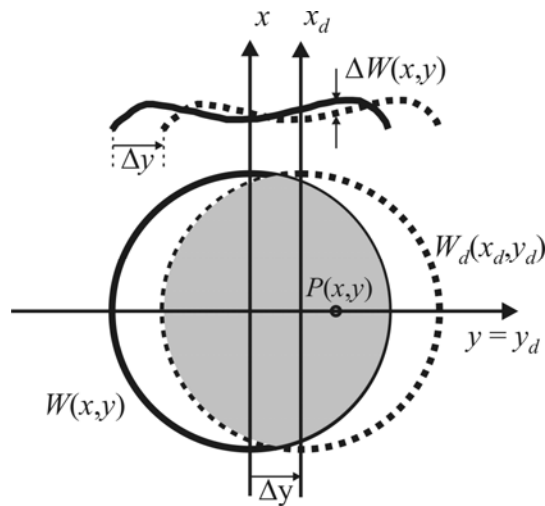
Recientemente en el grupo de infrarrojo, del Centro de Investigaciones en Óptica, implementamos una novedosa configuración del interferómetro de desplazamiento rotacional, el cual incorporamos un prisma Dove como sistema director [7].



**Figura 2.5.** Interferómetro de desplazamiento rotacional con prismas Dove como sistema director de frente de onda.

### 2.4 Interferómetro de desplazamiento lateral

En esta técnica de interferometría desplazamos lateralmente uno de los frentes de onda. El patrón de franjas se forma en la superposición de los frentes de onda original  $W(x,y)$  y desplazado  $W_d(x_d,y_d)$ , como lo ilustramos en la figura 2.6 [8].



**Figura 2.6.** Diferencia de camino óptico entre el frente de onda original  $W(x,y)$  y el desplazado  $W_d(x_d,y_d)$ .

La irradiancia que observamos en el patrón de franjas la representamos con la ecuación: [9]

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.24)$$

Aquí relacionamos la diferencia de fase  $\delta$  con la diferencia de camino óptico DCO, entre los frentes de onda, con la expresión:

$$\delta = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \text{DCO} \quad (2.25)$$

Denotamos al frente desplazado en la dirección del eje  $y$  como  $W(x, y - \Delta y)$ . La diferencia de camino óptico entre los frentes de onda es:

$$\text{DCO} = \Delta W(x, y) = W(x, y - \Delta y) - W(x, y). \quad (2.26)$$

En la región de interferencia, las franjas brillantes aparecen cuando:

$$W(x, y - \Delta y) - W(x, y) = m\lambda. \quad (2.27)$$

Aquí  $m$  es un número entero y representa el orden de interferencia y  $\lambda$  es la longitud de onda.

Por otro lado, definimos la derivada parcial de una función como:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (2.28)$$

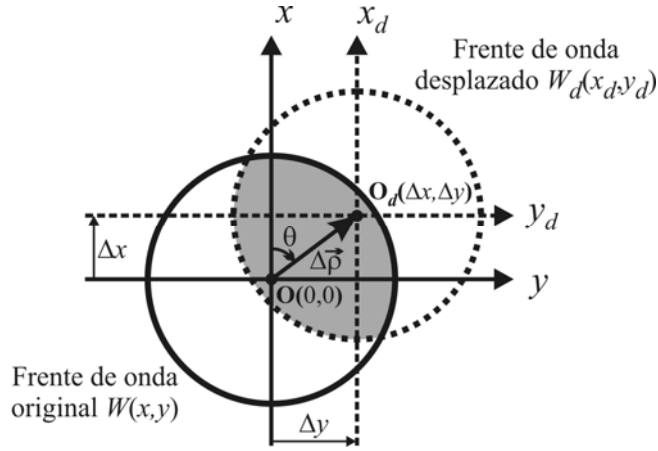
Aplicamos esta definición a la ecuación (2.27) con un pequeño desplazamiento  $\Delta y$  y obtenemos:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \Delta y = m\lambda. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) es la derivada del frente de onda en la dirección del desplazamiento. Estamos comparando el frente de onda bajo prueba consigo mismo y evitamos el uso de componentes de referencias de alta calidad y costo. Ésta es la principal ventaja del interferómetro de desplazamiento lateral.

## 2.5 Interferómetro de desplazamiento vectorial

La interferometría de desplazamiento vectorial es similar a la de desplazamiento lateral. La diferencia es que además de seleccionar la magnitud del desplazamiento, controlamos también la dirección del mismo, como lo ilustramos en la figura 2.7.



**Figura 2.7.** Frente de onda original y desplazado. Los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  se pueden obtener del vector desplazamiento  $\Delta \vec{\rho}$  y del ángulo  $\theta$ .

Describimos con el vector  $\Delta \vec{\rho}$  el desplazamiento del frente de onda  $W_d(x_d, y_d)$  con respecto al original  $W(x, y)$ . En el plano imagen, la superposición de los frentes de onda produce un patrón de franjas que contiene la información de la diferencia de camino óptico DCO en la dirección del desplazamiento, y la podemos expresar como:

$$\text{DCO} = \Delta W = W_d(x_d, y_d) - W(x, y), \quad (2.30a)$$

$$\Delta W = W(x + \Delta x, y + \Delta y) - W(x, y) \quad (2.30b)$$

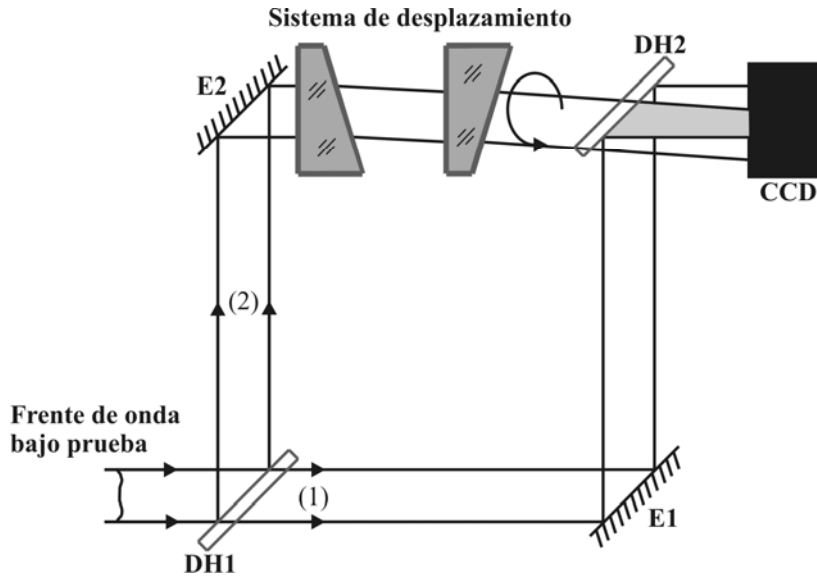
Para pequeños desplazamientos, consideramos las componentes  $\Delta x$  y  $\Delta y$  como cantidades infinitesimales. En este caso, la diferencia de camino óptico representa el diferencial total de la función del frente de onda en la dirección del desplazamiento [10], y la podemos expresar como un número entero de las longitudes de onda:

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} dy = m\lambda . \quad (2.31)$$

La habilidad del operador para controlar el número de franjas  $m$  es particularmente útil cuando evaluamos componentes ópticas asimétricas. Seleccionamos la dirección del desplazamiento para la cual la densidad de franjas es la más apropiada. Al medir aberraciones diminutas requerimos de desplazamientos grandes para producir un número conveniente de franjas (3 ó 5). Para medir aberraciones grandes es preferible tener un número manejable de franjas (igualmente 3 ó 5), y esto lo conseguimos con pequeños desplazamientos [11].

Reconstruimos el frente de onda original a partir de la integración directa de sus gradientes. Así, prescindimos de la evaluación de la función *tangente inversa* y de complejos métodos de reconstrucción de fase [12-16].

En la figura 2.8 mostramos un interferómetro Mach-Zehnder con un par de prismas de cuña como sistema de desplazamiento del frente de onda en uno de los brazos,.



**Figura 2.8.** Interferómetro de desplazamiento vectorial basado en un Mach Zehnder. El frente de onda bajo prueba proviene de la componente óptica que estamos evaluando.

Dividimos el frente de onda bajo prueba en dos partes en el divisor de haz DH1. Aquí, una parte se transmite y la otra se refleja. Con el espejo E2 reflejamos uno de los frentes de onda hacia el sistema de desplazamiento donde modificamos su trayectoria y lo dirigimos hacia el segundo divisor de haz DH2. En el otro brazo, con el espejo E1 reflejamos el otro frente onda hacia DH2 donde superponemos ambos frentes. Finalmente registramos el patrón de franjas con la CCD.

Esta configuración de prismas de cuña tiene la desventaja que introduce un inclinación (tilt) adicional al frente de onda en la dirección del desplazamiento. La cantidad de inclinación depende de los ángulos de rotación de los prismas ( $\omega_1, \omega_2$ ). El ángulo de desviación de un haz que atraviesa el sistema de prismas es:

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) = 2(n - 1)\alpha \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right). \quad (2.32)$$



Aquí  $\alpha$  es el ángulo de cuña de los prismas y  $n$  es el índice de refracción del material de los prismas.

La magnitud del desplazamiento vectorial  $\Delta\rho$  a una distancia  $z$  es:

$$\Delta\rho = \left| z \tan \left[ 2(n-1)\alpha \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \right] \right|. \quad (2.33)$$

En el siguiente capítulo presentamos y analizamos una configuración novedosa del sistema de desplazamiento. Con esta configuración eliminamos la inclinación adicional introducida al frente de onda desplazado.

## Referencias del capítulo 2

- [1] F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, second edition, Prentice Hall, USA, 1993.
- [2] G. Páez, M. Strojnik, G. G. Torales, “*Vectorial shearing interferometer*”, *Appl. Opt.* 39(28), 5172-5178 (2000).
- [3] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, second edition, John Wiley and Sons, Inc., (1992), 173-206.
- [4] P. K. Rastogi, “*Optical measurement technique and applications*”, Artech House, Inc., Boston, London (1997).
- [5] G. Páez, M. Strojnik, “*Differential rotationally-shearing interferometer: implementation concept*”, *Proc. SPIE.* 3061, 417-424 (1997a).
- [6] G. Páez, M. Strojnik, “*Interferometric patterns of asymmetrical wavefronts with differential rotationally-shearing interferometer*”, *Proc. SPIE.* 3061, 425-434 (1997b).
- [7] I. Moreno, G. Páez, M. Strojnik, “*Dove prism with increased throughput for implementation in a rotational-shearing interferometer*”, *Appl. Opt.* 42(22), 4514-4521 (2003).
- [8] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 2002, 286-411.

- [9] M. Strojnik, G. Paez, M. V. Mantravadi, *Optical Shop Testing*, John Wiley and Sons, 2007, 122 - 184.
- [10] G. G. Torales, G. Páez, M. Strojnik, “*Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer*”, *Opt. Eng.* **40(5)**, 767-773 (2001).
- [11] G. Paez, M. Strojnik, “*Fringe analysis and phase reconstruction from modulated intensity patterns*”, *Opt. Letters*, **22** 1669-1671 (1997).
- [12] G. Paez, M. Strojnik, “*Convergent, recursive phase reconstruction from noisy, modulated intensity patterns by use of synthetic interferograms*”, *Opt. Letters*, **23** 406-408 (1998).
- [13] G. Paez, M. Strojnik, “*Phase-shifted interferometry without phase unwrapping: reconstruction of a decentered wave front*”, *J. Opt. Soc. Am. A.* **16** 475-480 (1999).
- [15] G. Paez, M. Strojnik, “*Phase reconstruction from undersampled intensity patterns*”, *J. Opt. Soc. Am. A.* **17** 46-52 (2000).
- [16] J. Muñoz, M. Strojnik, G. Paez, “*Phase recovery from a single undersampled interferogram*”, *Appl. Opt.* **42** 6846-6852 (2003).

## **Capítulo 3**

### **Evaluación del sistema de desplazamiento del frente de onda del IDV**

#### **3.1 Introducción**

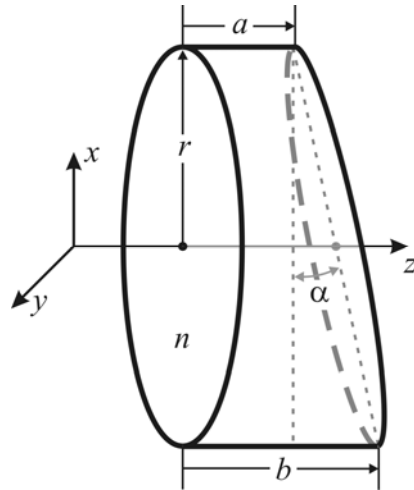
En este capítulo proponemos una configuración novedosa de un sistema de desplazamiento utilizando dos prismas de cuña para desplazar vectorialmente un frente de onda. Modificamos la dirección de propagación del frente de onda con los prismas [1,2]. Utilizamos dos prismas en lugar de uno para lograr los desplazamientos precisos [3,4]. En trabajos anteriores ya incorporamos prismas de cuña como sistema de desplazamiento [5-7]. Colocamos los prismas de cuña en un brazo de un interferómetro Mach-Zehnder. La dirección y la magnitud del desplazamiento del frente de onda dependían de los ángulos de rotación de cada prisma, la diferencia entre ellos, y la distancia entre el sistema de desplazamiento y el plano de detección. Además, se introducía una inclinación en el frente de onda desplazado [8,9]. La sensibilidad del interferómetro se seleccionaba para obtener una adecuada cantidad de franjas en la dirección deseada [10,11].

En nuestro sistema de desplazamiento, las superficies de la cuña están cara a cara y siempre son paralelas. Esto tiene dos ventajas: la primera es que el desplazamiento es constante desde el sistema de prismas hasta el plano de detección. La segunda, es que no se introduce inclinación en el frente de onda desplazado. En la siguiente sección describimos el sistema de desplazamiento, sus

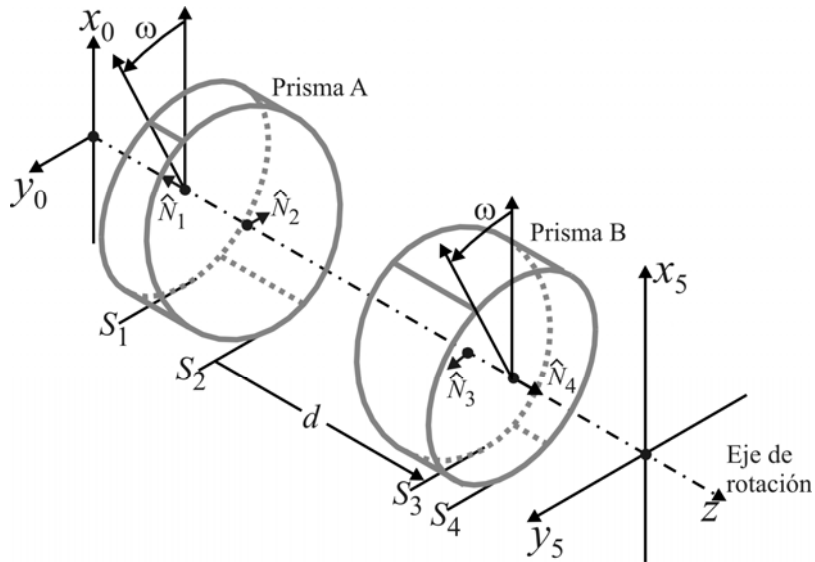
componentes, sus grados de libertad y las restricciones de movimiento que presenta. Después, en la sección 3.3, planteamos las ecuaciones de refracción y propagación de un rayo, considerando su propiedad geométrica de ser perpendicular al frente de onda. Utilizamos las ecuaciones de trazo de rayos en la sección 3.4 para examinar la propagación del frente de onda a través del sistema de desplazamiento propuesto y determinamos el desplazamiento vectorial del rayo en el plano de detección. En la sección 3.5 analizamos las posibles desviaciones del desplazamiento debido a la diferencia entre los ángulos de cuña de los prismas y a la incidencia oblicua del frente de onda en el sistema de desplazamiento. En la última sección, comparamos los resultados experimentales con las predicciones teóricas basadas en el trazo exacto de rayos.

### 3.2 Sistema de desplazamiento de un frente de onda

El sistema de desplazamiento consiste de un par de prismas de cuña (ver figura 3.1). En la nueva configuración de prismas, los centros geométricos de las superficies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , y  $S_4$  son colineales y están sobre el eje de rotación de ambos prismas, como lo ilustramos en la figura 3.2. El eje de rotación es perpendicular a las superficies  $S_1$  y  $S_4$  ( $\hat{N}_1 = -\hat{N}_4$ ). Las superficies de la cuña ( $S_2$  y  $S_3$ ) están cara a cara y siempre son paralelas entre si ( $\hat{N}_2 = -\hat{N}_3$ ).



**Figura 3.1.** Los prismas están hechos de vidrio óptico con un índice de refracción  $n$ . Tienen forma cilíndrica con espesor  $a$  y un ángulo de cuña  $\alpha$ .



**Figura 3.2.** Caracterizamos las superficies con vectores normales.  $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3$  y  $\hat{N}_4$  son los vectores normales a las superficies  $S_1, S_2, S_3$ , y  $S_4$ , respectivamente, en el sistema de desplazamiento.

Los grados de libertad permitidos para realizar el desplazamiento vectorial de un frente de onda son el ángulo de rotación  $\omega$  de ambos prismas, y la distancia  $d$  entre ellos. Los dos prismas giran sobre el mismo eje de rotación.

### 3.3 Trazo exacto de rayos

Determinamos la propagación de un frente de onda a través del sistema de desplazamiento utilizando el método de trazo exacto de rayos. Aplicamos las ecuaciones de refracción y propagación para calcular el desplazamiento del frente de onda. A continuación presentamos estas dos ecuaciones:

La ecuación de refracción es:

$$\hat{P}_i = \mu_i \hat{P}_{i-1} + \left[ -\mu_i (\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i) + \sqrt{1 - \mu_i^2 \left[ 1 - (\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i)^2 \right]} \right] \hat{N}_i, \quad i = 1, 2 \dots 5 \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \frac{n_1}{n_2}, \quad \mu_2 = \mu_4 = \frac{n_2}{n_1}.$$

La ecuación (3.1) representa la dirección  $\hat{P}_i$  del rayo refractado por la *i-ésima* superficie. En estas ecuaciones  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción del medio y del material del prisma respectivamente.

La ecuación de propagación es:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \left[ \frac{(t_i \hat{k} - \vec{r}_{i-1}) \cdot \hat{N}_i}{\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i} \right] \hat{P}_{i-1}. \quad [\text{mm}] \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) nos da la posición  $r_i(x_i, y_i, z_i)$  donde el rayo cruza la *i-ésima* superficie,  $t$  es la distancia desde el origen a cada superficie, medida a lo largo del eje de rotación  $z$ .

La normal de las superficies  $S_i$ , en términos de los ángulos de cuña  $\alpha$  y de rotación  $\omega$  es:

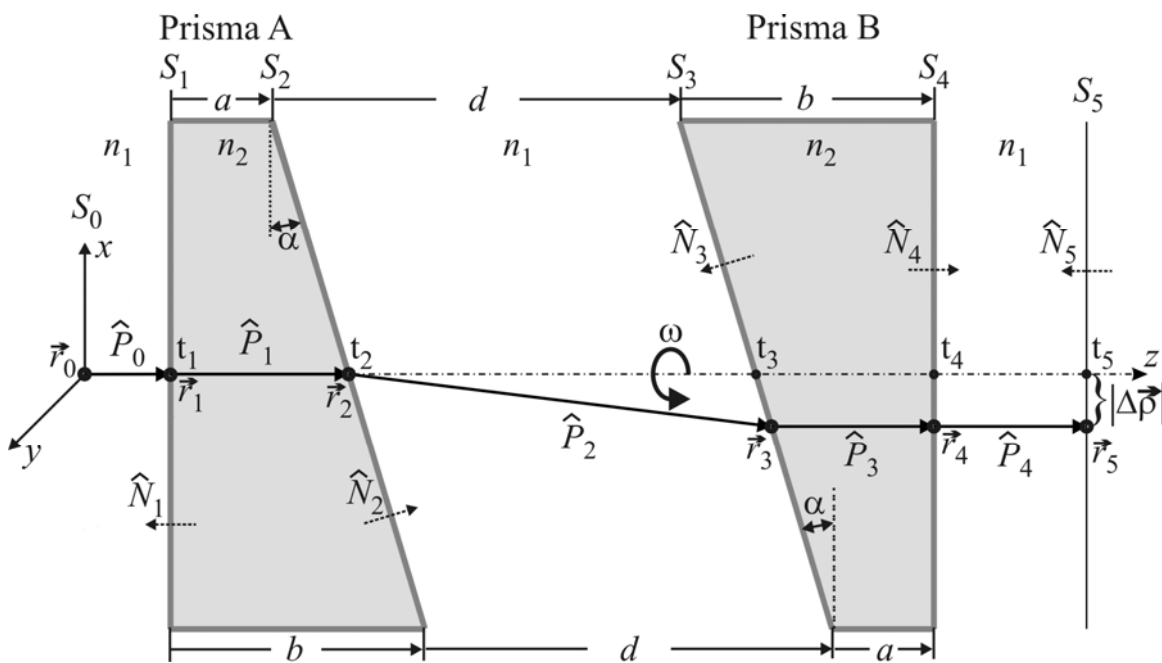
$$\hat{N} = (\sin \alpha \cos \omega) \hat{i} + (\sin \alpha \sin \omega) \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}. \quad (3.3)$$

Aquí,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

### 3.4 Desplazamiento del frente de onda producido por un sistema de prismas de cuña

La figura 3.3 muestra la propagación de un rayo desde el plano objeto  $S_0$  hasta el plano imagen  $S_5$ .

Vemos que el rayo desplazado cruza al plano imagen en el punto  $r_5$ .



**Figura 3.3.** Un rayo incide perpendicular en  $S_1$  y cruza a las superficies de los prismas en  $r_1, r_2, r_3$ , y  $r_4$ .



Las restricciones del sistema de desplazamiento con la nueva configuración de prismas son:

$$\hat{N}_2 = -\hat{N}_3 \quad (3.4a)$$

y

$$\hat{N}_1 = -\hat{N}_4. \quad (3.4b)$$

Por otro lado, las condiciones iniciales del rayo son:

$$\vec{r}_0 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \quad (3.5a)$$

y

$$\hat{P}_0 = -\hat{N}_1 = \hat{k}. \quad (3.5b)$$

Sustituimos las expresiones (3.4a) y (3.5b) en las ecuaciones de trazo exacto de rayos para las superficies  $S_1$  a  $S_5$  (ver apéndice A). Después de algunas operaciones algebraicas, las coordenadas del rayo cruzando el plano imagen  $S_5$  son:

$$x_5 = \beta d \cos \omega, \quad (3.6a)$$

$$y_5 = \beta d \sin \omega \quad (3.6b)$$

y

$$z_5 = t_5. \quad (3.6c)$$

Aquí, la variable  $\beta$  está definida como:

$$\beta(n_1, n_2, \alpha) = \left( 1 - \frac{\frac{n_2}{n_1} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \right) \sin \alpha \cos \alpha . \quad (3.7)$$

La variable  $\beta$  depende del índice de refracción del material  $n_2$ , del índice de refracción del medio  $n_1$  y del ángulo de cuña  $\alpha$  de los prismas.

Calculamos la magnitud y el ángulo del vector de desplazamiento  $\Delta \vec{\rho}$  en términos de las coordenadas  $r_5(x_5, y_5)$  con las ecuaciones:

$$|\Delta \vec{\rho}| = \sqrt{(x_5 - x_0)^2 + (y_5 - y_0)^2} , \quad [\text{mm}] \quad (3.8)$$

$$\theta = \omega + \pi . \quad [\text{rad}] \quad (3.9)$$

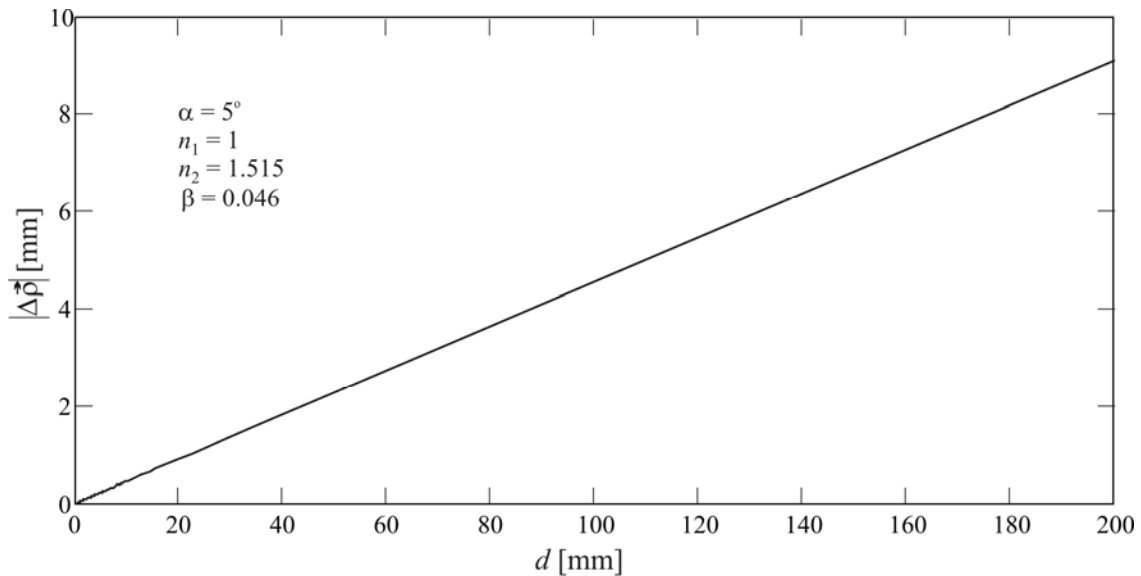
Sustituimos la ecuación (3.6) en (3.8) para obtener la magnitud del desplazamiento:

$$|\Delta \vec{\rho}| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \beta d \sqrt{(\cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2} , \quad [\text{mm}] \quad (3.10)$$

$$|\Delta \vec{\rho}| = \beta d . \quad [\text{mm}] \quad (3.11)$$

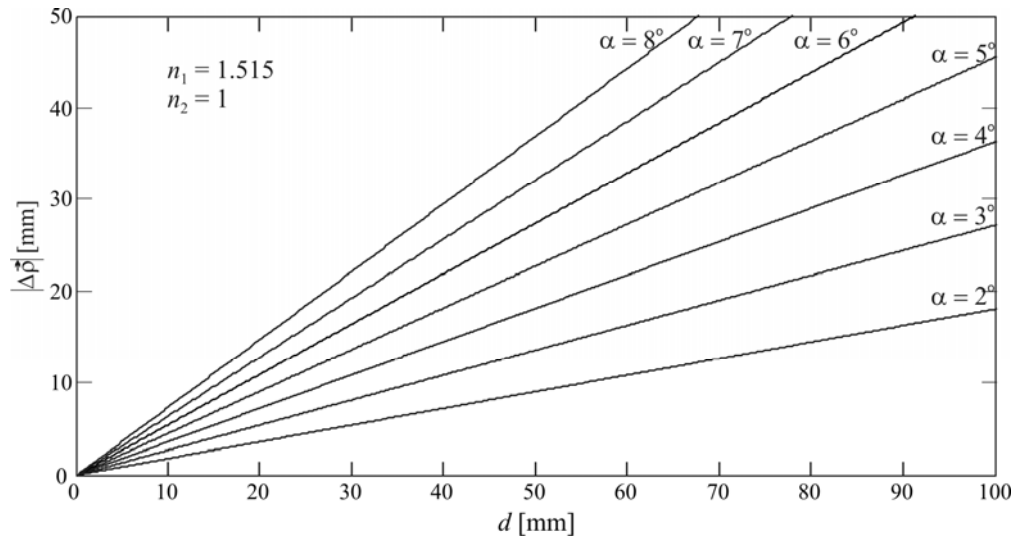
Aquí observamos que la magnitud del desplazamiento es proporcional a la distancia  $d$  entre los prismas y es independiente del ángulo de rotación  $\omega$ . Mientras que el ángulo  $\theta$  del desplazamiento depende del ángulo de rotación  $\omega$  de ambos prismas.

Durante el desarrollo matemático obtuvimos que la dirección del rayo desplazado es la misma que la del rayo original,  $\hat{P}_0 = \hat{P}_4$ . Podemos afirmar que esta configuración de prismas no introduce inclinación en el frente de onda desplazado [12].



**Figura 3.4.** La magnitud del desplazamiento como función de la distancia entre prismas. El valor de  $\beta$  es la pendiente de la línea recta y ésta representa la sensibilidad al desplazamiento del sistema.

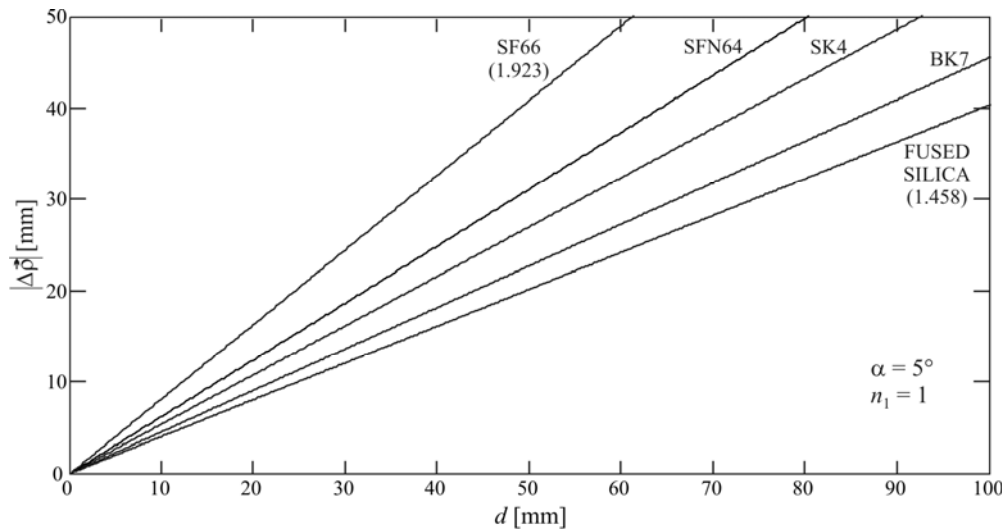
En la figura 3.4 graficamos el desplazamiento producido por un sistema de prismas de cuña específico.  $\beta$  representa la sensibilidad del sistema al desplazamiento. Definimos la sensibilidad al desplazamiento como la cantidad de desplazamiento  $|\Delta \vec{p}|$  en relación a la distancia  $d$  entre los prismas. Podemos seleccionar otra sensibilidad al desplazamiento cambiando el material (índice de refracción) y/o el ángulo de cuña de los prismas.



**Figura 3.5.** La magnitud del desplazamiento como función de la distancia entre los prismas, con el ángulo de cuña  $\alpha$  como parámetro. La cantidad de desplazamiento se incrementa con el ángulo de cuña  $\alpha$  de los prismas.

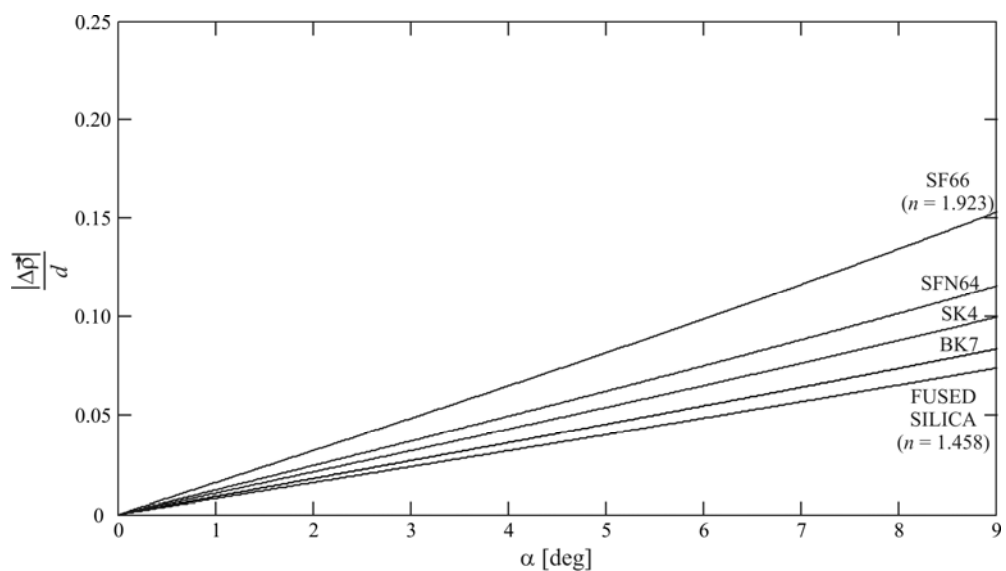
La magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$  como función de la distancia  $d$ , para diferentes valores del ángulo de cuña, se muestran en la figura 3.5. La razón de cambio de  $|\Delta\vec{\rho}|$  (sensibilidad al desplazamiento) se incrementa con el ángulo  $\alpha$ . Si requerimos de desplazamientos  $|\Delta\vec{\rho}|$  de mucha precisión utilizamos prismas con ángulos de cuña menores a  $5^\circ$ . De esta forma, al separar los prismas obtenemos desplazamientos más pequeños.

En la figura 3.6 exhibimos el cambio en la sensibilidad al desplazamiento utilizando prismas de diferentes materiales. En este caso, la sensibilidad al desplazamiento se incrementa con el índice de refracción del material  $n_2$ .



**Figura 3.6.** La magnitud del desplazamiento como función de la distancia entre los prismas, con el índice de refracción  $n$  como parámetro. La cantidad de desplazamiento se incrementa con el valor del índice de refracción del material de los prismas de cuña.

Finalmente, en la figura 3.7 mostramos la sensibilidad del sistema al desplazamiento como función del ángulo de cuña de los prismas, con el índice de refracción de varios materiales como parámetro. Esta gráfica es muy útil cuando diseñamos el sistema de desplazamiento para una sensibilidad específica. Podemos seleccionar la sensibilidad de un sistema para una gran cantidad de materiales, variando el ángulo de cuña.



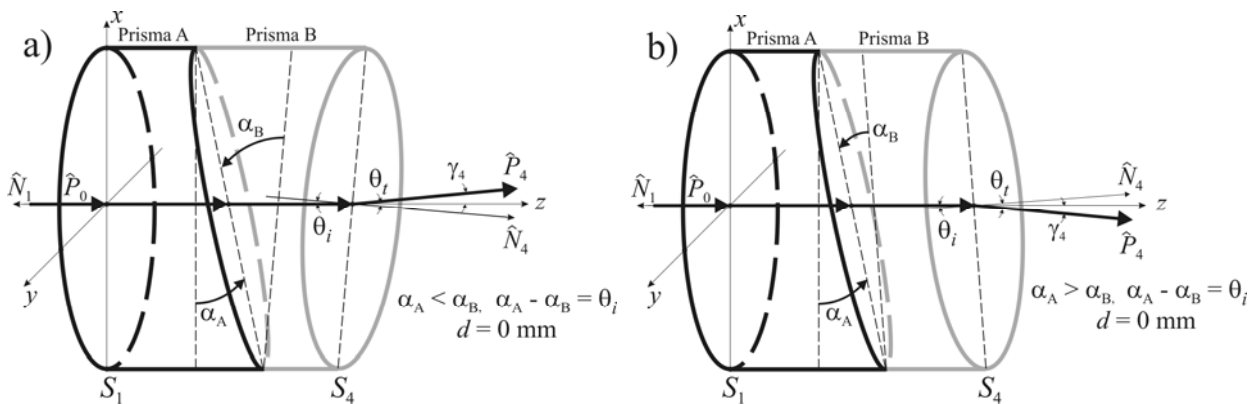
**Figura 3.7.** Sensibilidad al desplazamiento  $\beta$  como función del ángulo de cuña  $\alpha$ , con el índice de refracción  $n$  como parámetro.

### 3.5 Análisis de la desviación en el desplazamiento del frente de onda

Analizamos las dos principales fuentes de desviación en el desplazamiento del frente de onda, la que se debe a las diferencias entre los ángulos de cuña de los prismas y la que se debe por la incidencia oblicua del frente de onda en el sistema de desplazamiento.

#### 3.5.1 Desviación producida por diferencias entre los ángulos de cuña

Los prismas de cuña se fabrican con márgenes de tolerancia en sus dimensiones y ángulos. Estos márgenes dependen de varios aspectos: el tipo de material, la forma del prisma, la tecnología empleada en su fabricación y el mismo proceso de fabricación. La literatura reporta que las tolerancias típicas de los ángulos de los prismas son  $\pm 5$  arcmin. En la figura 3.8 mostramos un rayo que se propaga a través de dos prismas con diferente ángulo de cuña.



**Figura 3.8.** La desviación del rayo depende de la diferencia entre los ángulos de cuña  $\alpha_A \neq \alpha_B$ . a)  $\alpha_A < \alpha_B$ , la magnitud del desplazamiento disminuye hasta cero y después se incrementa, b)  $\alpha_A > \alpha_B$ , la magnitud del desplazamiento siempre se incrementa y nunca es cero.

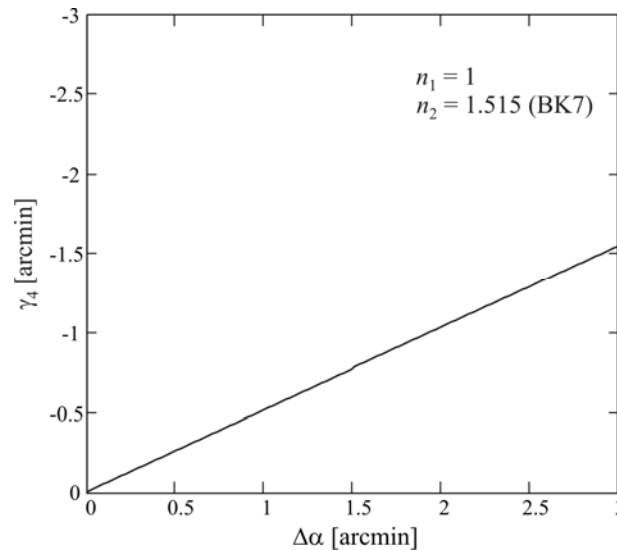
El rayo incide perpendicular en el prisma A ( $\hat{P}_0 = -\hat{N}_1$ ). Cuando el rayo se transmite del prisma A al B no se desvía porque los prismas están en contacto ( $d = 0$  mm). La diferencia en los ángulos de cuña ( $\alpha_A \neq \alpha_B$ ) produce una desviación de la normal a la superficie  $S_4$ . El rayo incide en la segunda superficie del segundo prisma  $S_4$  con un ángulo  $\theta_i$  igual a la diferencia entre los ángulos de cuña,

$$\theta_i = \Delta\alpha = \alpha_A - \alpha_B. \quad (3.12)$$

Finalmente, el ángulo de desviación del rayo es:

$$\gamma_4 = \theta_t - \theta_i. \quad (3.13)$$

Cuando graficamos el ángulo de desviación  $\gamma_4$  como función de la diferencia entre los ángulos de cuña  $\Delta\alpha$ , obtenemos una línea recta con una pendiente  $m = 0.517$ , como lo ilustramos en la figura 3.9. Por lo tanto, el ángulo de desviación  $\gamma_4$  es aproximadamente la mitad de la diferencia  $\Delta\alpha$ .

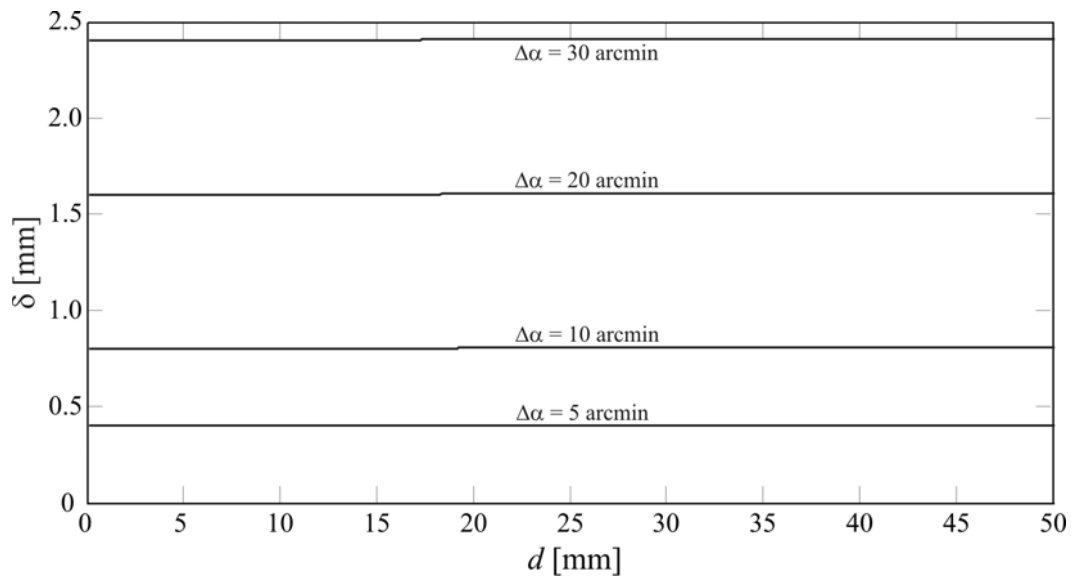


**Figura 3.9.** El ángulo de desviación  $\gamma_4$  como función de la diferencia  $\Delta\alpha$  entre los ángulos de cuña. Las direcciones del rayo original y el desplazado son diferentes ( $\hat{P}_1 \neq \hat{P}_4$ ).

Calculamos la desviación  $\delta$  del desplazamiento con la siguiente expresión:

$$\delta = |\Delta\vec{\rho}|_{\Delta\alpha \neq 0} - |\Delta\vec{\rho}|_{\Delta\alpha = 0} \quad [\text{mm}] \quad (3.14)$$

La figura 3.10 muestra la desviación  $\delta$  del desplazamiento para diferentes valores de  $\Delta\alpha$ . Evaluamos las ecuaciones de trazo exacto de rayos en cada una de las superficies del sistema de desplazamiento, para calcular la magnitud del desplazamiento del frente de onda  $|\Delta\vec{\rho}|_{\Delta\alpha \neq 0}$  cuando los ángulos de cuña no son iguales,. La magnitud del desplazamiento del frente de onda, para el caso  $\Delta\alpha = 0$ , la calculamos con la ecuación (3.11).



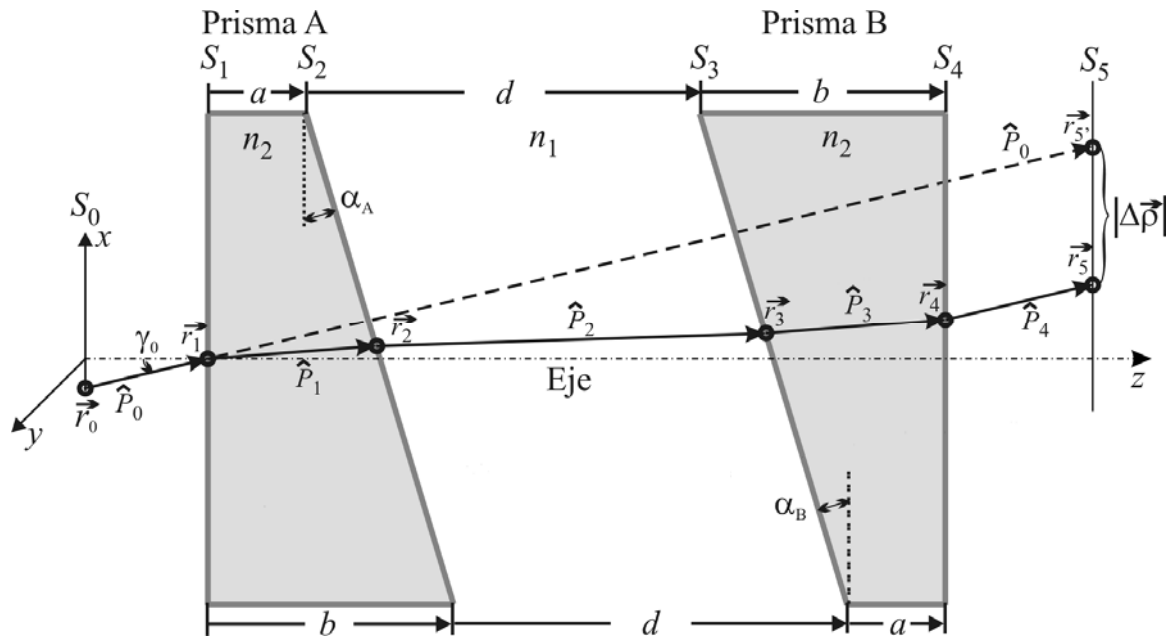
**Figura 3.10.** La desviación  $\delta$  como función de la distancia  $d$  entre prismas, con la diferencia entre los ángulos de cuña  $\Delta\alpha$  como parámetro. La desviación  $\delta$  es constante para cualquier distancia  $d$  entre prismas.

A continuación, analizamos otro tipo de desviación debida a la incidencia oblicua del frente de onda.



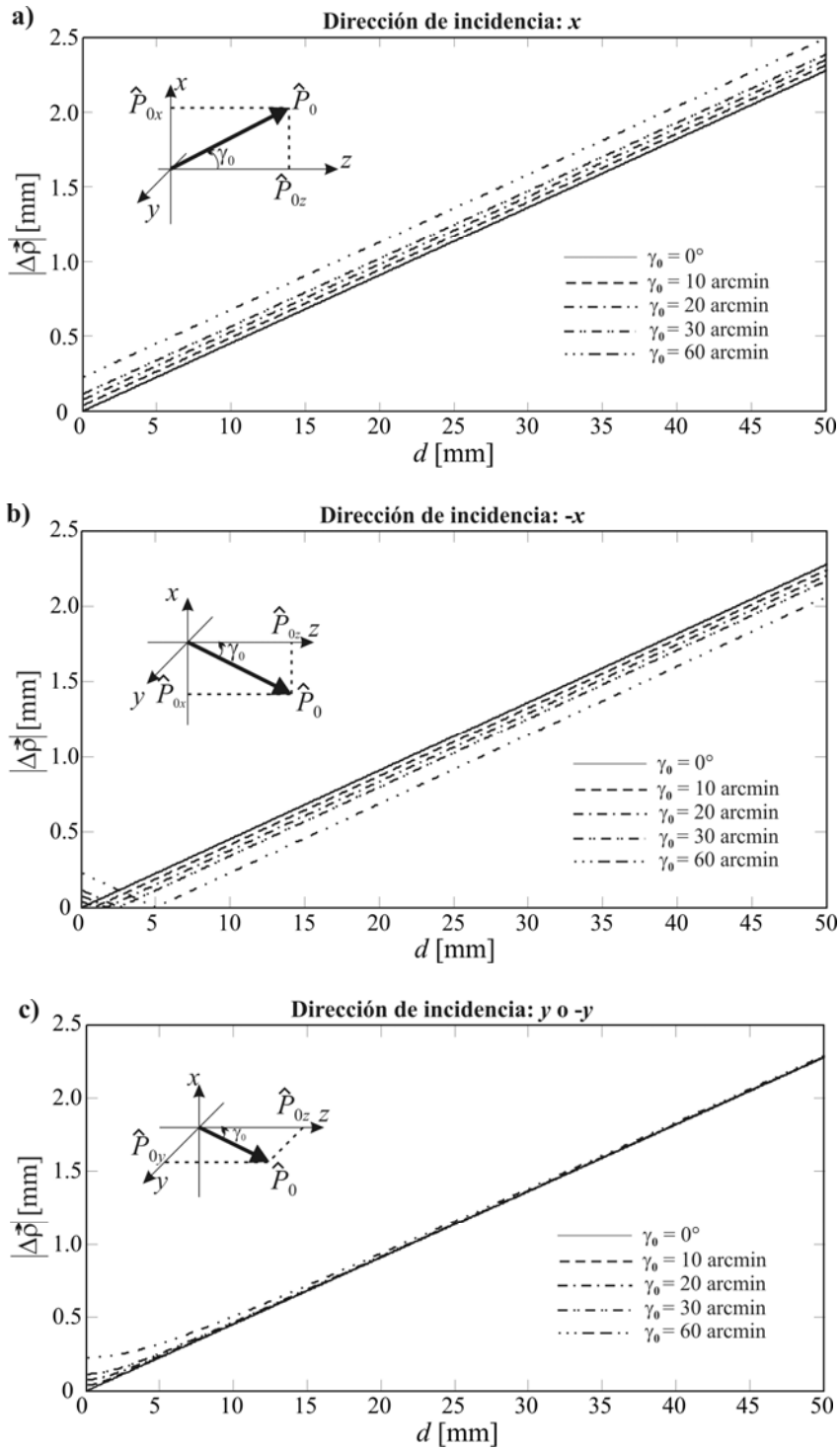
### 3.5.2 Desviación producida por la incidencia oblicua del frente de onda en el sistema de desplazamiento

Denotamos como  $\gamma_0$  al ángulo entre el rayo incidente y la normal a la superficie  $S_1$ , como lo mostramos en la figura 3.11.

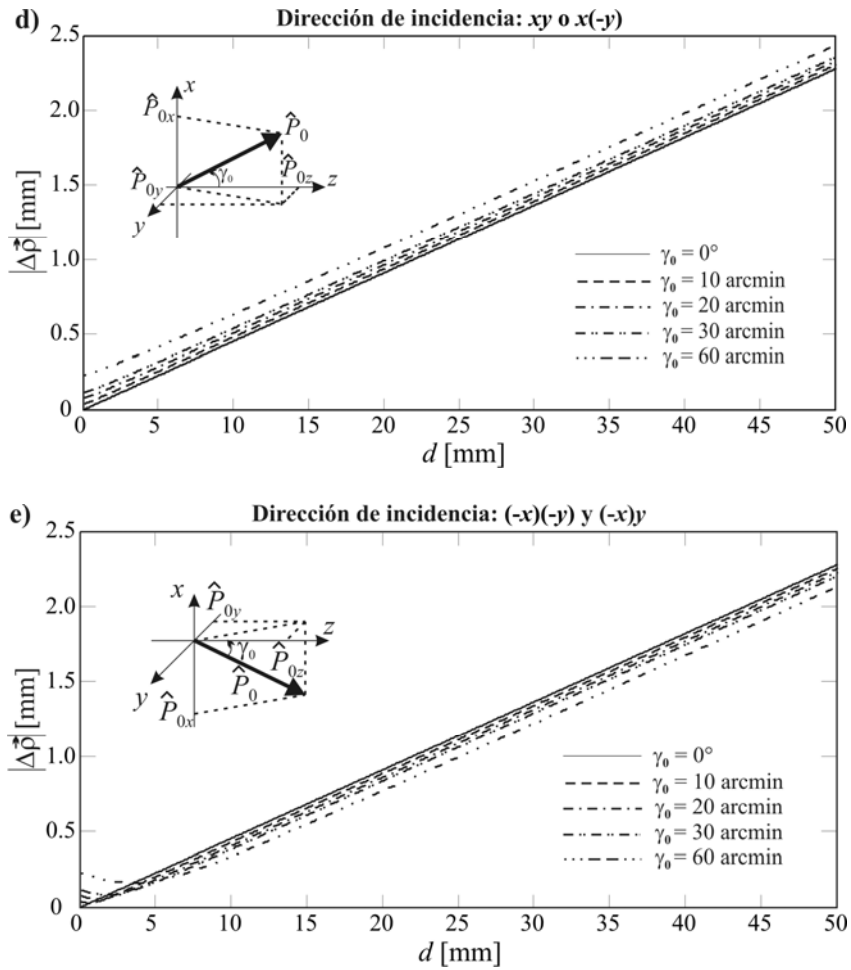


**Figura 3.11.** El rayo incide oblicuamente en la superficie  $S_1$  con el ángulo de incidencia  $\gamma_0$  y se propaga a través del sistema de desplazamiento hasta el plano de observación  $S_5$ .

En el sistema de desplazamiento ideal suponemos que los ángulos de cuña son iguales ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) y que las superficies de los prismas son paralelas ( $\hat{N}_1 = -\hat{N}_4, \hat{N}_2 = -\hat{N}_3$ ). La magnitud del desplazamiento  $|\Delta \vec{p}|$  es la diferencia entre el punto de incidencia del rayo desplazado  $r_5$ , en la superficie  $S_5$ , y la proyección del rayo original  $r_5'$ , igualmente en la superficie  $S_5$  (ver figura 3.11). En la figura 3.12 mostramos como la magnitud del desplazamiento depende de la dirección de propagación ( $\hat{P}_0 = P_{0x}\hat{i} + P_{0y}\hat{j} + P_{0z}\hat{k}$ ) del rayo que incide en el sistema de desplazamiento.



**Figura 3.12.** Magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$  como función de la distancia de separación entre prismas  $d$ , con el ángulo de incidencia  $\gamma_0$  como parámetro. a) La dirección del rayo  $\hat{P}_0$  que incide en la superficie  $S_1$  del sistema de desplazamiento tiene componentes en los ejes  $x, z$ , b) el rayo tiene componentes en los ejes  $-x, z$ , c) el rayo en la dirección  $\hat{P}_0$  tiene componentes en los ejes  $y, z$  o  $-y, z$



**Figura 3.12, continuación.** Magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$  como función de la distancia de separación entre prismas  $d$ , con el ángulo de incidencia  $\gamma_0$  como parámetro. d) El rayo tiene componentes en los ejes  $x, y, z$ , e) el rayo tiene componentes en los ejes  $-x, -y, z$ .

En las gráficas de la figura 3.12 observamos que la desviación de la magnitud del desplazamiento  $\delta$  es mayor cuando la trayectoria del haz incidente  $\hat{P}_0$  está en el mismo plano de la normal a las superficies  $S_2$  y  $S_3$  de los prismas.

En la tabla 1 comparamos la desviación  $\delta$  del haz debida a la diferencia entre los ángulos de cuña, con la debida a la incidencia oblicua del haz en el sistema de prismas.

Diferencia de los ángulos de cuña $\Delta\alpha$ [arcmin]	Desviación del desplazamiento $\delta$ [ $\mu\text{m}$ ]	Ángulo de incidencia $\gamma_0$ [arcmin]	Desviación del desplazamiento $\delta$ [ $\mu\text{m}$ ]
5	400	5	$\approx 18$
10	800	10	$\approx 35$
20	1600	20	$\approx 75$
30	2400	30	$\approx 110$
60	4810	60	$\approx 220$

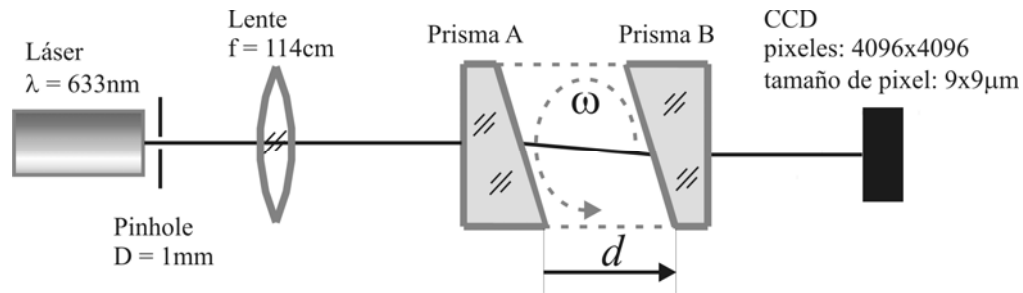
**Tabla 1.** La desviación  $\delta$  del desplazamiento, en función de la diferencia de los ángulos de cuña  $\Delta\alpha$  y en función del ángulo de incidencia del haz  $\gamma_0$ .

Podemos apreciar que la desviación debida a la incidencia oblicua es aproximadamente 20 veces más pequeña que la desviación debida a la diferencia entre los ángulos de cuña. Así, concluimos que para conocer con precisión la magnitud del desplazamiento, los prismas de cuña deben ser lo más semejantes posible tanto en sus dimensiones como en sus ángulos.

A continuación describimos el arreglo experimental que utilizamos para verificar nuestros resultados teóricos.

### 3.6 Verificación experimental del desplazamiento teórico

Implementamos el arreglo experimental de la figura 3.13. Incorporamos en el experimento una cámara de alta resolución para registrar el desplazamiento lateral de un rayo.



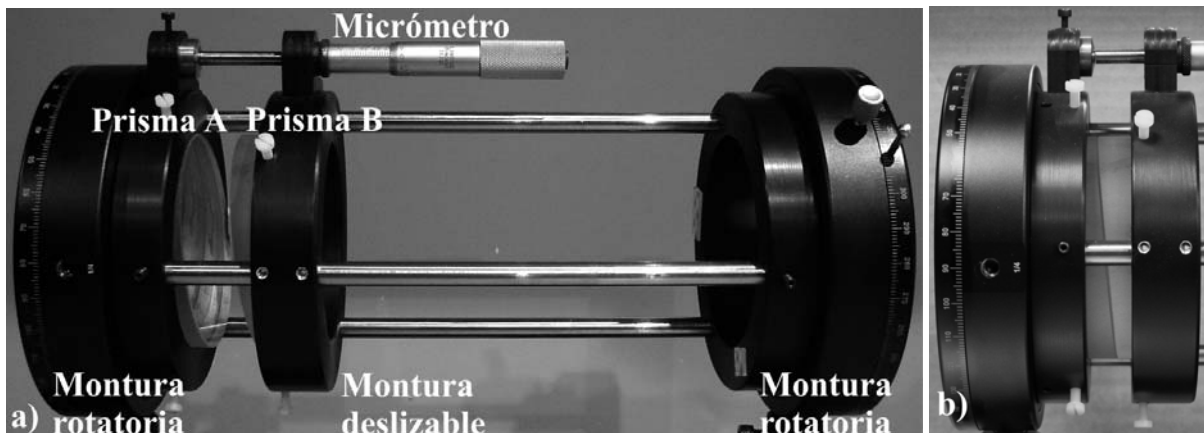
**Figura 3.13.** Esquema del arreglo experimental para medir el desplazamiento del frente de onda por el sistema de prismas de cuña. La fuente de iluminación es un láser He-Ne ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ), con una longitud de coherencia de 20 cm. Disminuimos la divergencia del láser con una lente positiva. Esta cámara puede digitalizar imágenes con 16 bits de resolución (65,536 niveles de gris).

Los prismas de cuña del sistema de desplazamiento fueron diseñados y fabricados en el CIO. Los prismas son de vidrio BK7 ( $n = 1.515$  para la longitud de onda del láser He-Ne). Medimos los valores de los ángulos de cuña de los prismas con un autocolimador en el taller de pruebas ópticas, ver tabla 3.

	Ángulo de cuña $\alpha$ :	Índice de refracción $n$ :
<b>Prisma A</b>	$5^\circ 01'$	1.515 (BK7)
<b>Prisma B</b>	$5^\circ 40''$	1.515
<b>Prisma C</b>	$5^\circ 01' 39''$	1.515
<b>Prisma D</b>	$4^\circ 59'$	1.515
<b>Prisma E</b>	$5^\circ 02' 30''$	1.515

**Tabla 3.** Valores de los ángulos de cuña. Seleccionamos el par de prismas con la menor diferencia entre sus ángulos de cuña,  $\Delta\alpha_{A-B} = 20''$ , calculamos una desviación de  $\delta = 48.5 \mu\text{m}$ .

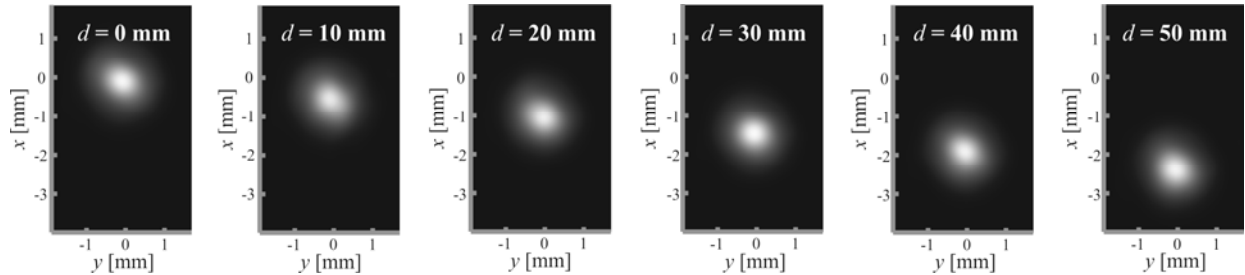
En la figura 3.14a mostramos el sistema de desplazamiento compuesto por los prismas de cuña en una montura rotatoria, también diseñada y fabricada en el CIO. Esta montura esta formada por dos goniómetros interconectados por tres barras metálicas para que ambos prismas roten simultáneamente. Colocamos el prisma A en uno de los goniómetros de tal forma que el láser incide perpendicular en la superficie  $S_1$  ( $\hat{P}_0 = \hat{N}_1$ ). Ponemos el prisma B en una montura que podemos desplazar a lo largo de las barras metálicas. Colocamos el prisma B en contacto con el prisma A y entonces lo sujetamos firmemente a la montura, como observamos en la figura 3.14b. Con este procedimiento nos aseguramos que las superficies  $S_2$  y  $S_3$  son paralelas ( $\hat{N}_2 = -\hat{N}_3$ ).



**Figura 3.14.** Sistema de desplazamiento del frente de onda. a) Colocamos el prisma A en una montura giratoria de tal forma que el láser incide perpendicularmente en la primera superficie del prisma A, b) para hacer paralelas entre si las superficies que están cara a cara, las ponemos en contacto y fijamos el prisma B en la montura deslizable.

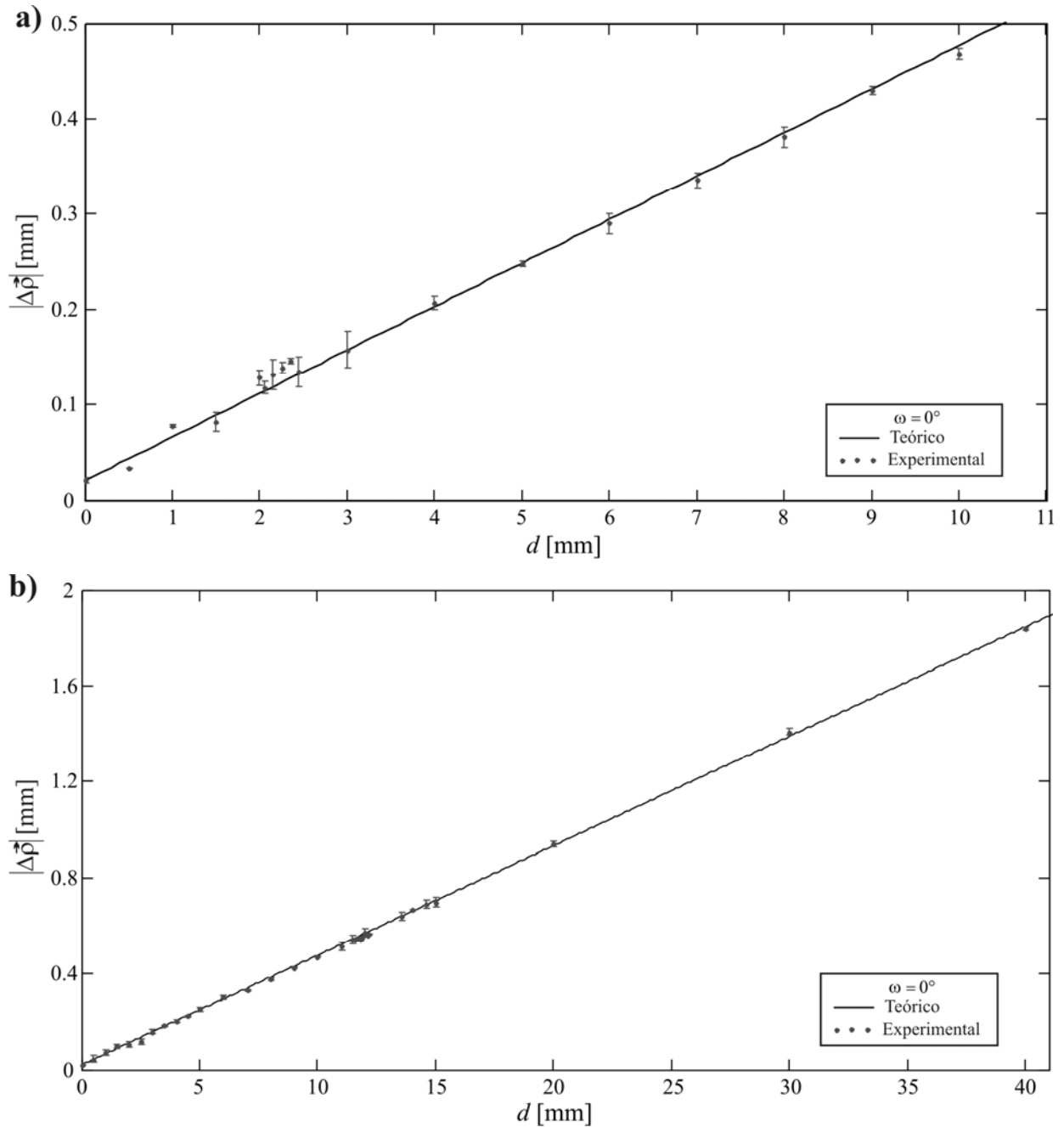
El desplazamiento del frente de onda lo obtenemos al separar los prismas. Seleccionamos la distancia  $d$  entre los prismas con el micrómetro de la montura deslizable. Registramos la imagen del frente de onda desplazado con una cámara de alta resolución, ver figura 3.15. Procesamos y filtramos las imágenes en una computadora. Aprovechamos la distribución de intensidad Gaussiana

del frente de onda para determinar las coordenadas del centro. Calculamos el valor del desplazamiento del frente de onda usando estas coordenadas.



**Figura 3.15.** Imágenes del desplazamiento del frente de onda del láser con diferentes distancias  $d$  entre prismas. Registramos el desplazamiento con la CCD de alta resolución. El frente de onda del láser mantiene su distribución de intensidad Gaussiana.

Mostramos los desplazamientos experimentales y teóricos los en la figura 3.16. Calculamos el desplazamiento teórico con las ecuaciones de trazo exacto de rayos (3.1), (3.2) y (3.3). Sustituimos, en las ecuaciones de trazo de rayos, los valores de los ángulos de cuña  $\alpha_A$  y  $\alpha_B$ , el índice de refracción  $n$ , la distancia entre los prismas  $d$  y la distancia desde el sistema de desplazamiento hasta la cámara (plano imagen). En la figura 3.16, las marcas “•” corresponden a los puntos de incidencia del frente de onda en la CCD. La línea continua representa el desplazamiento teórico cuando la diferencia entre los ángulos de cuña de los prismas es  $\Delta\alpha = 20$  arcsec y el ángulo de incidencia es  $\gamma_0 = 0^\circ$  (perpendicular a la primera superficie del prisma A).



**Figura 3.16.** La magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$  del rayo como función de la distancia  $d$  entre prismas: a)  $0 < d < 11$  mm, b)  $0 < d < 40$  mm.

Atribuimos las diferencias entre los valores teóricos y los datos obtenidos en el laboratorio a errores experimentales debidos a la montura mecánica del sistema de desplazamiento. En la tabla 4 mostramos el error RMS de las diferencias entre los valores teóricos y experimentales.



Desplazamiento	Teórico ( $\mu\text{m}$ )	Experimental ( $\mu\text{m}$ )	Diferencia ( $\mu\text{m}$ )	Error RMS ( $\mu\text{m}$ )
a) X:	-340	-336	4.00	7.58
Y:	0	-5.60	5.60	3.53
b) X:	-705	-699	6.00	7.57
Y:	0	-6.69	6.69	6.37

**Tabla 4.** Diferencia entre los datos experimentales y los valores teóricos, obtenidos con trazo exacto de rayos y componentes ópticas perfectas y alineadas con precisión. Calculamos el error RMS entre los datos experimentales y los valores teóricos para un intervalo de desplazamientos de a) 0 a 10 mm, y de b) 0 a 40 mm.

### 3.7 Resumen

Analizamos y caracterizamos un sistema de desplazamiento de frente de onda. El sistema consiste de un par de prismas de cuña casi idénticos. Los grados de libertad, bajo control del operador son el ángulo de rotación  $\omega$  de ambos prismas y la distancia  $d$  entre ellos. Demostramos que no se introduce inclinación en el frente de onda desplazado, es decir, la magnitud del desplazamiento es constante desde el sistema de desplazamiento hasta el plano de detección.

Determinamos que la dirección del desplazamiento depende de la orientación de los prismas. Mientras que la magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$  es proporcional a la distancia  $d$  entre los prismas. Esta constante de proporcionalidad representa la sensibilidad al desplazamiento del sistema y la seleccionamos para cualquier material de los prismas variando el ángulo de cuña de los mismos.

Demostramos que la desviación del desplazamiento debida a la diferencia entre los ángulos de cuña de los prismas es mayor que la que le corresponde a la incidencia oblicua del frente de onda. Es

decir, el sistema de desplazamiento es más sensible a diferencias entre los ángulos de cuña de los prismas que a la incidencia oblicua del frente de onda. Así, valores idénticos de los ángulos de cuña son necesarios para calcular el desplazamiento del frente de onda con mayor precisión.

Los datos experimentales confirman los resultados teóricos de los desplazamientos. Existe una diferencia RMS de  $7 \mu\text{m}$  entre el desplazamiento teórico y el experimental. Atribuimos ésta diferencia a errores experimentales, errores de fabricación y de alineación de los prismas, ya que las variaciones de  $|\Delta\vec{\rho}|$  son pequeñas y aleatorias.

En el siguiente capítulo incorporamos el sistema de desplazamiento caracterizado aquí, en un interferómetro Mach-Zehnder, para formar un interferómetro de desplazamiento vectorial. Examinamos varios frentes de onda con diferentes tipos de aberraciones para verificar el funcionamiento práctico del IDV.

### Referencias del capítulo 3

- [1] J. B. Song, Y. W. Lee, I. W. Lee, Y. H. Lee, “*Simple Phase-Shifting Method in a Wedge-Plate Lateral-Shearing Interferometer*”, *Appl. Opt.* **43** (2004) 3989-3992.
- [2] H. H. Lee, J. H. You, S. H. Park, “*Phase-shifting lateral shearing interferometer with two pairs of wedge plates*”, *Opt. Letters*, **28** (2003) 2243-2245.
- [3] M. Strojnik, G. G. Torales, G. Paez, “*Vectorial shearing interferometer*”, *Proc. SPIE*, **3744** (1999) 529-539.
- [4] G. G. Torales, M. Strojnik, G. Paez, “*Risley prisms to control wave-front tilt and displacement in a vectorial shearing interferometer*”, *Appl. Opt.* **41** (2002) 1380-1384.
- [5] G. Paez, M. Strojnik, J. Sandoval, J. Castrellon, P. Vacas-Jacques, G. Garcia-Torales, “*Prism system to control wavefront tilt and position in vectorial shearing interferometer*”, *Proc. SPIE*, **4369** (2001) 680-691.
- [6] G. Paez, M. Strojnik, G. G. Torales, “*Vectorial shearing interferometer*”, *Appl. Opt.* **39** (2002) 5172-5178.
- [7] G. G. Torales, G. Paez, M. Strojnik, “*Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer*”, *Opt. Eng.* **40** (2001), 767-773.

- [8] G. Paez, G. G. Torales, M. Strojnik, “*Interferometer patterns of vectorial shearing interferometer*”, *Proc. SPIE*, **3759** (1999) 153-162.
- [9] G. Paez, M. Strojnik, “*Features of the vectorial shearing interferometer*”, *Proc. SPIE*, **4231** (2000) 328-339.
- [10] G. Paez, M. Strojnik, “*Versatility of the vectorial shearing interferometer*”, *Proc. SPIE*, **4486** (2002) 513-521.
- [11] G. G. Torales, G. Paez, M. Strojnik, J. Villa, J. L. Flores, A. G. Alvarez, “*Experimental intensity patterns obtained from a 2D shearing interferometer with adaptable sensitivity*”, *Opt. Commun.* **257** (2006) 16-26.
- [12] C. Ramirez, M. Strojnik, “*Performance evaluation of a wave-front displacement system for vectorial shearing interferometer*”, *Opt. Commun.* **281** (2008), 347-355.

## **Capítulo 4**

### **Análisis de los patrones de franjas obtenidos con el IDV**

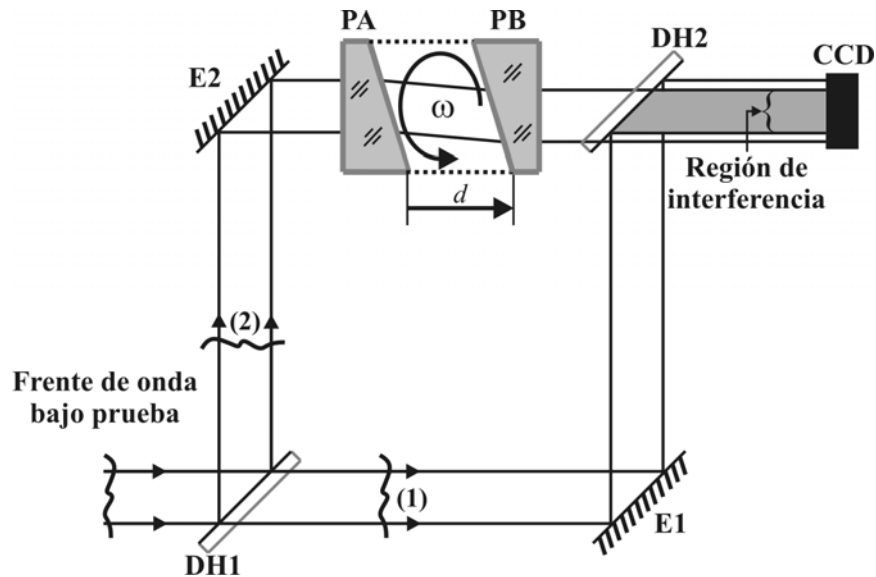
#### **4.1 Introducción**

En este capítulo implementamos el IDV. Comprobamos su funcionamiento comparando los patrones de franjas obtenidos experimentalmente y los simulados con cálculos teóricos. Obtenemos los patrones de franjas al examinar con el IDV frentes de onda con diferentes tipos de aberraciones. Previamente determinamos la forma de los frentes de onda aberrados analizando los patrones de franjas obtenidos con otros instrumentos interferométricos. Con los datos de los frentes de onda simulamos los patrones de franjas que se obtienen con el IDV.

En el capítulo anterior, empleamos el trazo de rayos para caracterizar el funcionamiento del sistema de desplazamiento aprovechando la característica geométrica de los rayos de ser perpendiculares al frente de onda. Ahora evaluaremos frentes de onda expandidos.

Basamos nuestra implementación del IDV en un interferómetro Mach Zehnder. Incorporamos el sistema de desplazamiento en uno de los brazos, como lo ilustramos en la figura 4.1. El frente de onda bajo prueba incide en el divisor de haz DH1. Aquí dividimos la amplitud en dos partes. En un brazo del interferómetro, utilizamos los prismas de cuña PA y PB para desplazar su frente de onda.

En el otro brazo el frente de onda continúa su camino sin ningún cambio. Superponemos ambos frentes de onda en el divisor de haz DH2, y obtenemos el patrón de franjas en el espacio posterior del segundo divisor de haz. Capturamos la distribución de irradiancia del patrón de franjas con una CCD de alta resolución. La CCD está conectada a una computadora donde almacenamos, analizamos y desplegamos las imágenes del patrón de franjas.



**Figura 4.1.** El diagrama esquemático describe una vista superior del interferómetro de desplazamiento vectorial. Los elementos del interferómetro son: los divisores de haz DH1 y DH2, los espejos E1 y E2. El sistema de desplazamiento está formado por un par de prismas de cuña PA y PB. Registramos el patrón de franjas con una CCD con 4096 x 4096 píxeles y la enviamos vía el puerto USB a la computadora.

En la sección 4.2 evaluamos el haz de un láser difractado por una abertura circular pequeña. Modelamos el frente de onda difractado con las funciones de Lommel. Simulamos el patrón de franjas teórico de la interferencia de dos frentes difractados y lo comparamos con el obtenido experimentalmente. Posteriormente, en la sección 4.3 reemplazamos la abertura circular por componentes ópticas previamente analizadas con un interferómetro WYCO.

## 4.2 Evaluación de un frente de onda difractado por una abertura circular

Analizamos un frente de onda difractado por una abertura circular de radio  $a$ . Representamos el frente de onda Gaussiano del láser, en el plano  $(x,y)$ , con la siguiente expresión: [1]

$$\psi(x,y) = A e^{-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2}}, \quad (4.1)$$

$$A = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_0^2}}. \quad (4.2)$$

Aquí,  $P$  es la potencia total del haz Gaussiano,  $r_0$  es el radio de la cintura del haz. Expresamos la difracción del frente de onda como:

$$\psi_d(x,y) = \text{circ}\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \cdot \psi(x,y). \quad (4.3)$$

Modelamos la abertura circular con la función de transferencia  $\text{circ}\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)$ . Desarrollamos la

ecuación (4.3) en coordenadas polares  $(r,\theta)$ , en el plano de la abertura:

$$\psi_d(r,\theta) = \psi_d(r) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_0^2}} A' e^{ikz_w} e^{-\left(\frac{1}{R_0^2} - i\frac{\pi}{\lambda z_w} B\right) r^2} \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right), \quad (4.4)$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Aquí,  $z_w$  es la distancia desde la cintura del haz Gaussiano hasta la abertura circular. Definimos  $A'$  como la amplitud del haz y lo calculamos de la siguiente forma:

$$A' = \frac{\left(\pi r_0^2\right)^2 - i\lambda z \left(\pi r_0^2\right)}{\left(\pi r_0^2\right)^2 + (\lambda z)^2}. \quad (4.5)$$

Determinamos el radio del haz  $R_0$  como:

$$R_0^2 = \left(\frac{\lambda z}{\pi r_0}\right)^2 + r_0^2. \quad (4.6)$$

$B$  es el radio de curvatura de la Gaussiana y lo obtenemos de la siguiente ecuación:

$$B = \left[ 1 - \frac{\left(\pi r_0^2\right)^2}{(\lambda z)^2 + \left(\pi r_0^2\right)^2} \right] z. \quad (4.7)$$

Reescribimos la ecuación (4.4) para determinar la propagación a campo lejano (Fraunhofer) del haz Gaussiano difractado en el plano de detección ( $\rho, \phi$ ) como: [2]



$$\psi(\rho, \varphi) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i\pi\rho^2}{\lambda z}} \iint \psi_d(r) e^{\frac{i\pi}{\lambda z} r^2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z} r\rho \cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta, \quad (4.8)$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Podemos representar la función de Bessel de orden 0 como una integral de la siguiente forma:

$$J_0\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z} r\rho \cos(\theta-\varphi)} d\theta. \quad (4.9)$$

Aplicamos la identidad de la expresión (4.9) en la ecuación (4.8) y obtenemos:

$$\psi(\rho, \varphi) = \frac{2\pi e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i\pi\rho^2}{\lambda z}} \int_0^\infty \psi_d(r) e^{\frac{i\pi}{\lambda z} r^2} J_0\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) r dr. \quad (4.10)$$

Sustituimos la ecuación (4.4) en la ecuación (4.10) y simplificamos de la siguiente forma:

$$\psi(\rho, \varphi) = \frac{2\pi A''}{i\lambda z} e^{ikz} e^{\frac{i\pi\rho^2}{\lambda z}} \int_0^a e^{-B'' r^2} J_0\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) r dr. \quad (4.11)$$

Aquí definimos  $A''$  y  $B''$  como:

$$A'' = \sqrt{\frac{2p}{\pi r_0^2}} A' e^{ikz_w}, \quad (4.12)$$

$$B'' = \frac{1}{R_0^2} - i \frac{\pi}{\lambda z} \left( \frac{Bz}{z_w} + 1 \right). \quad (4.13)$$

La solución analítica de la ecuación (4.11) tiene la forma:

$$\int_0^y x^{\nu+1} e^{px^2} J_\nu(qx) dx = \frac{q^\nu e^{py^2}}{(i2p)^{\nu+1}} \left[ U_{\nu+1}(i2py^2, qy) + iU_{\nu+2}(i2py^2, qy) \right], \quad (4.14)$$

$$\int_0^a e^{-B''r^2} J_0\left(\frac{2\pi r \rho}{\lambda z}\right) r dr = \frac{e^{-B''a^2}}{(-i2B'')} \left[ U_1\left(-i2B''a^2, \frac{2\pi \rho a}{\lambda z}\right) + iU_2\left(-i2B''a^2, \frac{2\pi \rho a}{\lambda z}\right) \right]. \quad (4.15)$$

Aquí  $U_\nu$  es la función de Lommel que definimos como:

$$U_\nu(w, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2i} J_{\nu+2i}(z). \quad (4.16)$$

Sustituimos la ecuación (4.15) en (4.11):

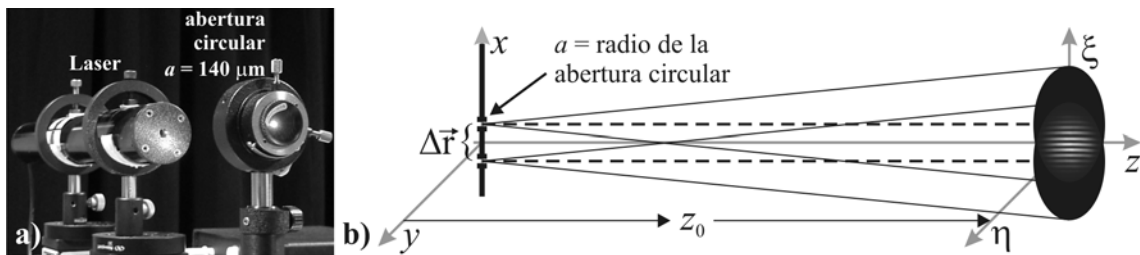
$$\psi(\rho, \varphi) = \frac{2\pi A''}{i\lambda z} e^{ikz} e^{\frac{i\pi \rho^2}{\lambda z}} \left[ \frac{e^{-B''a^2}}{-i2B''} \left[ U_1\left(-i2B''a^2, \frac{2\pi \rho a}{\lambda z}\right) + U_2\left(-i2B''a^2, \frac{2\pi \rho a}{\lambda z}\right) \right] \right] \quad (4.17)$$

Simplificamos la ecuación (4.17):

$$\psi(\rho, \varphi) = \frac{\pi A''}{\lambda z B''} e^{i \left( kz + \frac{\pi \rho^2}{\lambda z} \right) - B'' a^2} \left[ U_1 \left( -i 2 B'' a^2, \frac{2 \pi \rho a}{\lambda z} \right) + U_2 \left( -i 2 B'' a^2, \frac{2 \pi \rho a}{\lambda z} \right) \right] \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) representa al frente de onda difractado pero conserva la forma Gaussiana.

A continuación, evaluamos el frente de onda difractado con el IDV. Modelamos el patrón de franjas resultante como la interferencia de dos frentes de onda difractados por un par de aberturas, como lo mostramos en la figura 4.2.



**Figura 4.2** a) Difractamos el frente de onda de un láser con una abertura circular de radio  $a$ , b) en el plano  $(x,y)$  simulamos un par de aberturas separadas una distancia  $|\Delta \vec{r}|$ , observamos la interferencia de los dos frentes de onda difractados a una distancia  $z_0$  de las aberturas, en el plano  $(\xi,\eta)$ .

En cada abertura, podemos expresar el frente de onda difractado en términos de la ecuación (4.18).

Las ecuaciones de los dos frentes de onda difractados y desplazados en el plano de observación  $(\xi,\eta)$ , en coordenadas polares  $[\rho(\xi,\eta), \varphi]$  son:

$$\psi_1(\rho_1, \varphi) = \frac{\pi A_0''}{\lambda z_0 B_0''} e^{i \left( kz_0 + \frac{\pi \rho_1^2}{\lambda z_0} \right) - B_0'' a^2} \left[ U_1 \left( -i 2 B_0'' a^2, \frac{2 \pi \rho_1 a}{\lambda z_0} \right) + U_2 \left( -i 2 B_0'' a^2, \frac{2 \pi \rho_1 a}{\lambda z_0} \right) \right], \quad (4.19)$$

$$\psi_2(\rho_2, \varphi) = \frac{\pi A_1''}{\lambda z_1 B_1''} e^{i \left( kz_1 + \frac{\pi \rho_2^2}{\lambda z_1} \right) - B_1'' a^2} \left[ U_1 \left( -i 2 B_1'' a^2, \frac{2 \pi \rho_2 a}{\lambda z_1} \right) + U_2 \left( -i 2 B_1'' a^2, \frac{2 \pi \rho_2 a}{\lambda z_1} \right) \right]. \quad (4.20)$$

Aquí,

$$\rho_1(\xi, \eta) = \sqrt{\left( \xi - \frac{|\Delta \bar{\rho}|}{2} \right)^2 + \eta^2}, \quad (4.21)$$

$$\rho_2(\xi, \eta) = \sqrt{\left( \xi + \frac{|\Delta \bar{\rho}|}{2} \right)^2 + \eta^2}, \quad (4.22)$$

$$|\Delta \bar{\rho}| = |\Delta \bar{r}|. \quad (4.23)$$

En la ecuación (4.20), el término  $z_1$  se debe la diferencia de camino óptico entre los brazos del interferómetro. La presencia de los prismas de cuña (sistema de desplazamiento) en uno de los brazos solamente hace que sea diferente el camino óptico entre los mismos:

$$z_1 = z_0 + (n_2 - n_1) \cdot z_{\text{prismas}} \quad (4.24)$$

Aquí,  $n_2$  y  $z_{\text{prismas}}$  son los índices de refracción y el espesor de los prismas, respectivamente.

La incidencia total en el plano de observación  $(\xi, \eta)$  es:

$$I = (\psi_1 + \psi_2) \cdot (\psi_1^* + \psi_2^*) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (4.25)$$

Aquí  $I_1$  e  $I_2$  son las intensidades de los dos frentes de onda.

$$I_1 = \psi_1(\rho_1, \varphi) \cdot \psi_1^*(\rho_1, \varphi), \quad (4.26)$$

$$I_2 = \psi_2(\rho_2, \varphi) \cdot \psi_2^*(\rho_2, \varphi). \quad (4.27)$$

$I_3$  representa el término de interferencia

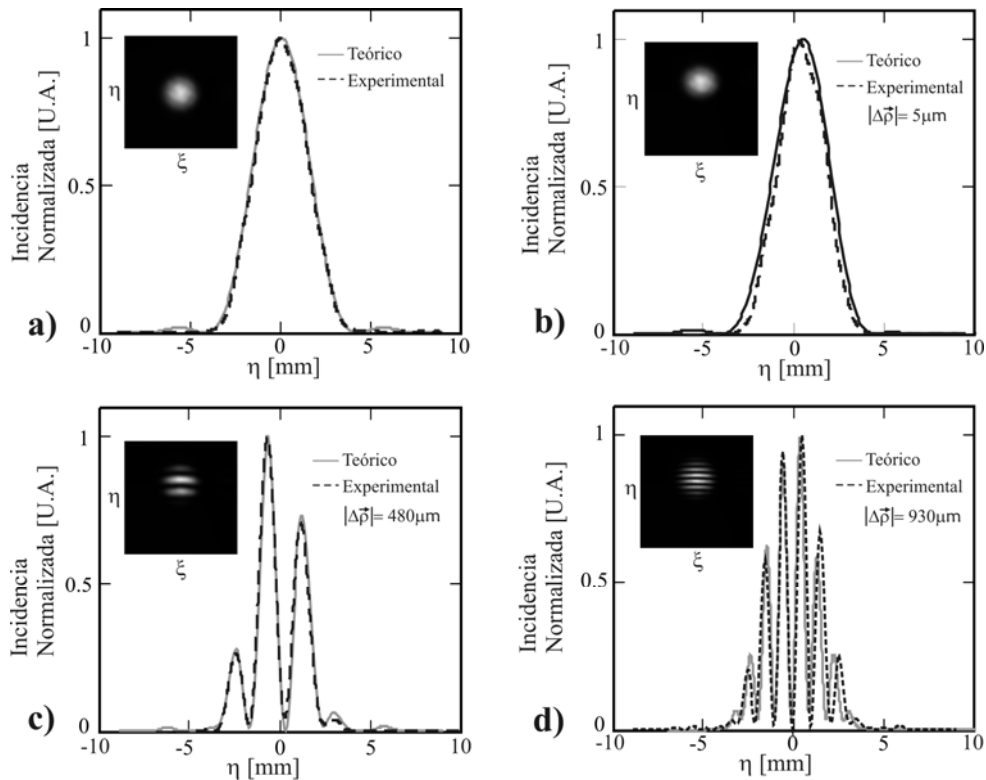
$$I_3 = \psi_1(\rho_1, \varphi) \cdot \psi_2^*(\rho_2, \varphi) + \psi_1^*(\rho_1, \varphi) \cdot \psi_2(\rho_2, \varphi). \quad (4.28)$$

En el arreglo experimental, el radio de la abertura circular es  $a = 140\mu\text{m}$ , la distancia desde la abertura hasta el plano de detección es  $z_0 = 1530\text{mm}$ , la diferencia de camino óptico entre los brazos del interferómetro es  $\Delta z = 19.6\text{mm}$ . En la tabla 1 mostramos la magnitud de los desplazamientos empleados. Posteriormente sustituimos estos datos en las ecuaciones (4.26) a (4.28) para generar los patrones de franjas simulados.

Separación entre prismas $d$ [mm]	Desplazamiento $ \Delta\vec{\rho} $ [ $\mu\text{m}$ ]
0	5
10	480
20	930

**Tabla 1.** Desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$ .

Presentamos la incidencia normalizada del frente de onda difractado por una abertura circular en la figura 4.3a. La incidencia de los patrones de franjas experimentales es semejante a la de los patrones simulados, como lo ilustramos en las figuras 4.3b, 4.3c y 4.3d.



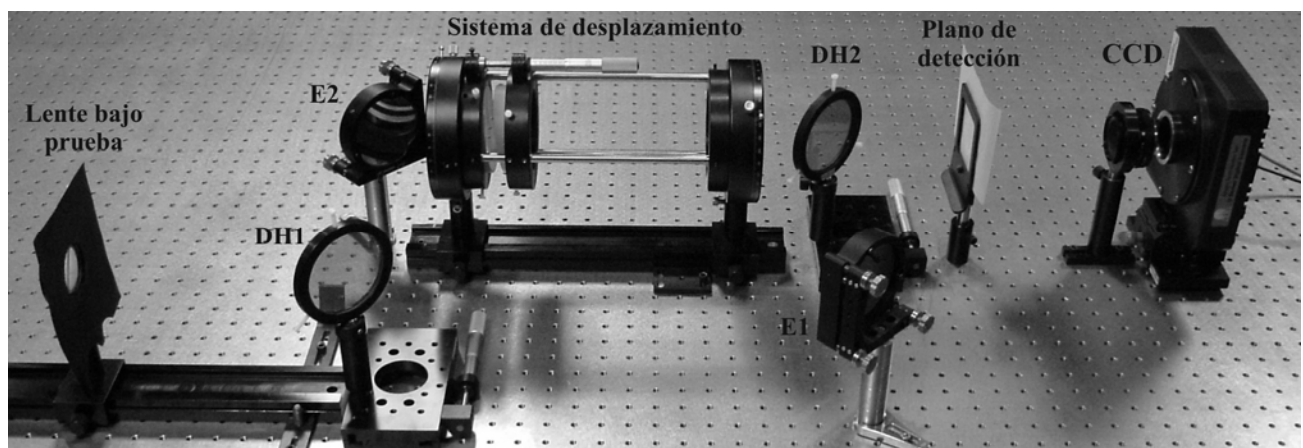
**Figura 4.3** a) Patrón de difracción producido por una abertura circular. Patrones de franjas generados por la superposición de dos frentes de onda difractados, la separación entre las aberturas es: b)  $|\Delta\vec{\rho}| = 5\mu\text{m}$ , c)  $|\Delta\vec{\rho}| = 480\mu\text{m}$ , y d)  $|\Delta\vec{\rho}| = 930\mu\text{m}$ .

Los patrones de franjas experimentales son prácticamente iguales a los simulados. Aquí observamos que la resolución del IDV se mejora incrementando la magnitud del desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$ .

A continuación, evaluamos un frente de onda aberrado. Este análisis asemeja muy cercanamente la complejidad de analizar los frentes de onda aberrados por una esfera.

### 4.3 Evaluación de un frente de onda aberrado por una componente óptica.

Iluminamos una componente óptica con el haz láser filtrado y expandido. Posteriormente analizamos el frente de onda transmitido con el IDV, como se ilustra en la figura 4.4. En el plano de superposición obtenemos un patrón de franjas que contiene la información del gradiente de la fase del frente de onda original en la dirección del desplazamiento.



**Figura 4.4.** Arreglo experimental del IDV para analizar el frente onda transmitido por una lente.

Para simular los patrones de franjas teóricos, utilizamos las ecuaciones de interferencia de dos haces (2.24) y (2.25):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta), \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.24)$$

$$\delta = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \text{DCO}. \quad (2.25)$$

La diferencia de fase  $\Delta W$  está dada por la ecuación (2.30b). Expandimos el frente de onda aberrado en términos de los polinomios de Zernike en coordenadas polares [3]:

$$W(\rho, \theta) = C_0 + C_1 \rho \cos \theta + C_2 \rho \sin \theta + C_3 (2\rho^2 - 1) + C_4 \rho^2 \cos(2\theta) + C_5 \rho^2 \sin(2\theta) + \\ C_6 (3\rho^2 - 2) \rho \cos \theta + C_7 (3\rho^2 - 2) \rho \sin \theta + C_8 (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1). \quad (4.13)$$

Mostramos las aberraciones correspondientes a los términos de Zernike en la tabla 2.

<b>Coefficientes de Zernike:</b>	<b>Aberración:</b>
$C_1$	X - tilt
$C_2$	Y - tilt
$C_3$	Defoco
$C_4$	Astigmatismo 0° y defoco
$C_5$	Astigmatismo 45° y defoco
$C_6$	Coma y tilt - x
$C_7$	Coma y tilt - y
$C_8$	Esférica y defoco

**Tabla 2.** Aberraciones correspondientes a los primeros ocho términos del polinomio de Zernike.

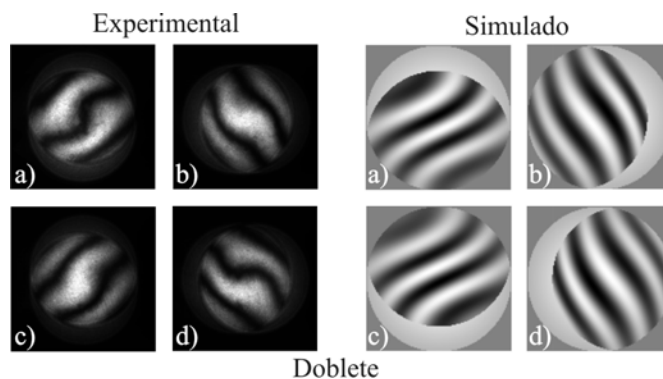


Analizamos tres componentes ópticas: un doblete acromático de 5 cm de diámetro y 22.5 cm de distancia focal, y dos lentes biconvexas también de 5 cm de diámetro y 10 cm de distancia focal. Las lentes fueron previamente analizadas con un interferómetro comercial (WYCO) para determinar las aberraciones que introducen en un frente de onda. En la tabla 3 observamos los valores de las aberraciones.

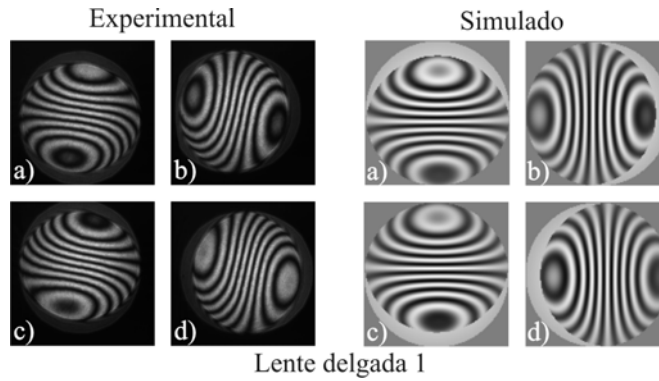
Componente	Astigmatismo 0° y defoco, [ $\lambda$ ]	Astigmatismo 45° Y defoco, [ $\lambda$ ]	Coma y x-tilt, [ $\lambda$ ]	Coma y y-tilt, [ $\lambda$ ]	Esférica y defoco, [ $\lambda$ ]
<b>Doblete</b>	2.737	-1.617	-0.009	-0.037	0.120
<b>Lente delgada 1</b>	-0.665	-0.044	-0.197	-0.280	1.203
<b>Lente delgada 2</b>	0.783	0.429	0.143	0.164	1.138

**Tabla 3.** Valores de las aberraciones de las componentes ópticas medidas con el interferómetro WYCO.

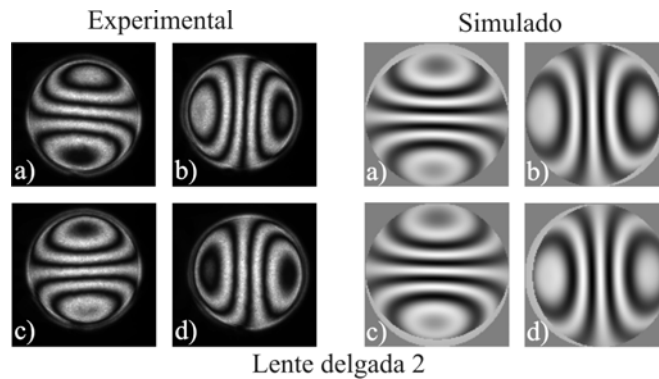
Usamos los valores de la tabla 3 en las ecuaciones (2.30b), (2.24) y (4.13) para simular los patrones de franjas teóricos. Las figuras 4.5 a 4.7 ilustran los patrones de franjas simulados y experimentales para cada componente óptica analizada.



**Figura 4.5.** Patrones de franjas obtenidos con los siguientes desplazamientos: a)  $\Delta x = -4.84$  mm,  $\Delta y = 0$ ; b)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = -4.79$  mm; c)  $\Delta x = 4.84$  mm,  $\Delta y = 0$ ; d)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 4.79$  mm. La forma irregular del patrón de franjas se debe al cementado de las lentes para formar el doblete. Aunque el desplazamiento entre los frentes de onda es apreciable, se producen pocas franjas en el patrón de interferencia porque la lente fue diseñada para introducir pocas aberraciones.



**Figura 4.6.** Patrones de franjas obtenidos con los siguientes desplazamientos: a)  $\Delta x = -4.84$  mm,  $\Delta y = 0$ ; b)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = -4.79$  mm; c)  $\Delta x = 4.84$  mm,  $\Delta y = 0$ ; d)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 4.79$  mm. La forma y la cantidad de franjas se deben principalmente a la aberración de defoco y a la aberración esférica.



**Figura 4.7.** Patrones de franjas obtenidos con los siguientes desplazamientos: a)  $\Delta x = -1.31$  mm,  $\Delta y = 0$ ; b)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = -1.29$  mm; c)  $\Delta x = 1.31$  mm,  $\Delta y = 0$ ; d)  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 1.29$  mm. Esta lente tiene valores de aberraciones similares a la lente delgada 1, pero los patrones tienen menos cantidad de franjas porque el desplazamiento entre los frentes de onda es menor.

El número y la forma de las franjas de los patrones simulados y experimentales tienen un alto grado de similitud. Es notable la capacidad para controlar la sensibilidad por medio del IDV, tomando por ejemplo las dos últimas figuras y comparando los valores del desplazamiento. Es claro que en la prueba de lentes delgadas 1, el incremento de la sensibilidad sirve para probar cualitativamente las imperfecciones de la componente en más detalle, en comparación con la prueba de la lente delgada 2. El control de la sensibilidad es, así, una característica deseable cuando requerimos mediciones precisas (esfericidad).

#### 4.4 Resumen

Demostramos el rendimiento del Interferómetro de Desplazamiento Vectorial para evaluar un frente de onda difractado por una abertura circular. Para asemejar más cercanamente la complejidad de la evaluación de una esfera de vidrio probamos algunas componentes ópticas. Los patrones de franjas simulados utilizando los valores de las aberraciones en los polinomios de Zernike, corresponden a los obtenidos experimentalmente.

Es posible mejorar la sensibilidad del IDV, incrementando la magnitud del desplazamiento, y consecuentemente el número de franjas en el plano de detección. El control de la sensibilidad es una característica deseable cuando se requieren mediciones sofisticadas. El uso de una configuración más sensible ayuda en la detección de potenciales defectos finos en la componente óptica.

En el capítulo 5 utilizamos el IDV para evaluar las aberraciones introducidas por una esfera en el frente de onda transmitido.

#### Referencias del capítulo 4

- [1] J. D. Gaskill, Propagation and diffraction of optical wave fields, in J. D. Gaskill (Ed.), *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, John Wiley & Sons, Inc., 1978, 420-442.
- [2] J. W. Goodman, Fresnel and Fraunhofer Diffraction, in J. W. Goodman (Ed.), *Introduction to Fourier Optics*, The McGraw-Hill Companies, 1996, 63-95.
- [3] J. C. Wyant, K. Creath, Basic wave front aberration theory for optical metrology, in R. Shannon and J. C. Wyant (Eds), *Applied Optics and Optical Engineering XI*, Academic Press Inc, 1992, 2-53.

## Capítulo 5

### Evaluación de frentes de onda aberrados por una esfera utilizando el IDV

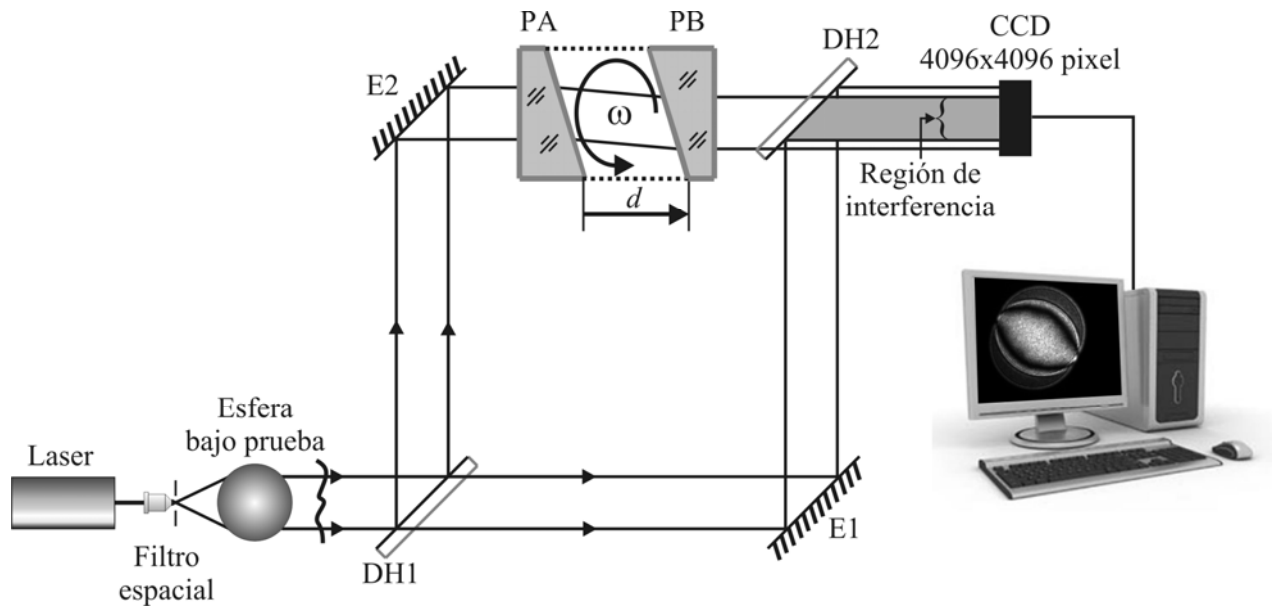
#### 5.1 Introducción

En este capítulo empleamos el Interferómetro de Desplazamiento Vectorial para evaluar el frente de onda transmitido por una esfera. Hacemos incidir el haz expandido de un láser en una sección circular (sub-apertura) de una esfera de transparente, el haz se propaga en el interior y se transmite al exterior del otro lado. Posteriormente analizamos las aberraciones introducidas por la esfera en el haz transmitido. También, describimos el arreglo experimental y reportamos los resultados con diferentes valores de desplazamiento vectorial (magnitud y dirección). Comparamos los resultados experimentales y las predicciones teóricas.

Utilizamos el IDV para determinar como cambia el frente de onda aberrado desde una sub-apertura de referencia a un número finito de sub-aperturas en la superficie de la esfera. Comparamos los gradientes de fase en diferentes secciones de la esfera.

El IDV implementado en el laboratorio está basado en una configuración interferométrica Mach Zehnder. Incorporamos el sistema de desplazamiento del frente de onda en uno de los brazos [1], como lo ilustramos en la figura 5.1. En la aplicación actual, es particularmente importante tener por

separado el control de la magnitud y dirección del desplazamiento con el fin de examinar un área de la esfera en diferentes direcciones.

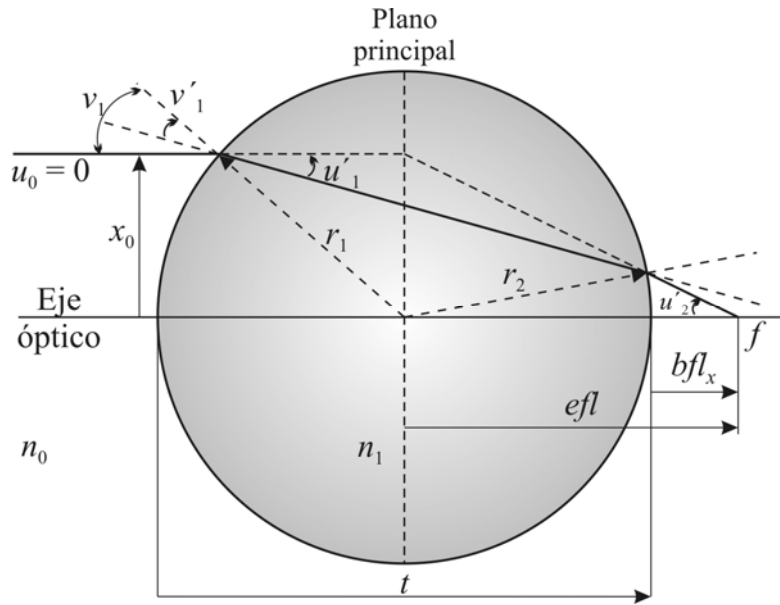


**Figura 5.1.** En el diagrama esquemático describimos una vista superior del IDV y la esfera bajo prueba. El frente de onda transmitido por la esfera incide en el IDV. Los elementos del interferómetro son: los divisores de haz DH1 y DH2, los espejos E1 y E2. El sistema de desplazamiento, en un brazo del interferómetro, está formado por un par de prismas de cuña PA y PB. Registramos el patrón de franjas con una CCD con 4096 x 4096 píxeles.

En la siguiente sección estudiamos la esfera como una componente óptica. Analizamos las aberraciones introducidas por la esfera en el frente de onda de un láser expandido. Finalmente, describimos la evaluación de sub-aperturas en la sección transversal de la esfera. En la sección 5.3 comparamos el patrón de franjas generado por diferentes sub-aperturas de la esfera. La sección 5.4 está dedicada a las conclusiones.

## 5.2 Aberraciones introducidas por una esfera

Analizamos la esfera bajo prueba como una lente gruesa, con radios de curvatura  $r_1 = -r_2 = r$ . El grosor de la lente en la región paraxial es  $2r$ . En este caso, los planos principales cruzan por el centro de esfera, como lo indicamos en la figura 5.2.



**Figura 5.2.** Trazo de rayos a través de la esfera utilizada como una lente gruesa. El ancho y el radio de la esfera son  $t$  y  $r$  respectivamente. El ángulo de incidencia del rayo en la superficie de la esfera es  $v_1$  y el ángulo de transmisión es  $v_1'$ . Un rayo paralelo al eje óptico ( $u_0 = 0$ ) con altura  $x_0$  es desviado por la esfera hacia el punto focal  $f$ .

Calculamos los puntos focales, la distancia focal efectiva  $efl$  y la distancia focal posterior  $bfl$  [2] con las ecuaciones:

$$efl = f = \left\{ (n_1 - n_0) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n_1 - n_0) t}{n_1 r_1 r_2} \right] \right\}^{-1}, \quad [\text{mm}] \quad (5.1)$$

$$bfl = f - \frac{tf(n_1 - n_0)}{n_1 r_2}. \quad [\text{mm}] \quad (5.2)$$

Deducimos una expresión para la distancia focal posterior como función de la altura del rayo  $x_0$  empleando el trazo exacto de rayos

$$bfl_x = - \left[ \frac{x_0}{1 + \cos(v_1)} + \frac{t \cdot \text{sen}(u'_1)}{\cos(u'_1) + \cos(v'_1)} \right] \frac{\cos(2u'_1) + \cos(v_1)}{\text{sen}(2u'_1)}. \quad [\text{mm}] \quad (5.3)$$

De la figura 5.2, expresamos el término  $\text{sen}(v_1)$  como:

$$\text{sen}(v_1) = \frac{x_0}{r_1}. \quad (5.4)$$

De la ley de Snell, calculamos  $\text{sen}(v'_1)$

$$\text{sen}(v'_1) = \frac{n_0}{n_1} \text{sen}(v_1) = \frac{n_0 x_0}{n_1 r_1}. \quad (5.5)$$

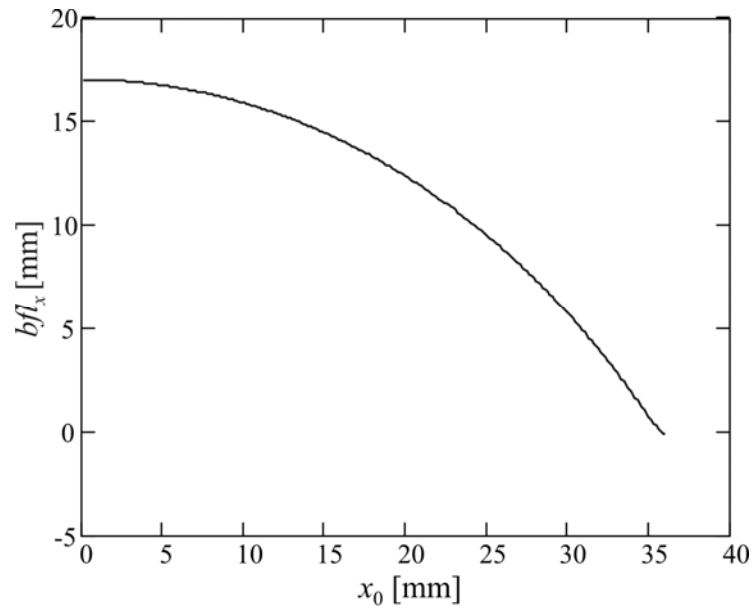
Nuevamente, de la figura 5.2 calculamos los términos  $\text{sen}(u'_1)$  y  $\cos(u'_1)$  como:

$$\text{sen}(u'_1) = \text{sen}(v'_1 - v_1) = \frac{x_0}{n_1 r_1} \left( \sqrt{n_0^2 - \left( \frac{n_0 x_0}{r_1} \right)^2} - \sqrt{n_1^2 - \left( \frac{n_0 x_0}{r_1} \right)^2} \right), \quad (5.6)$$



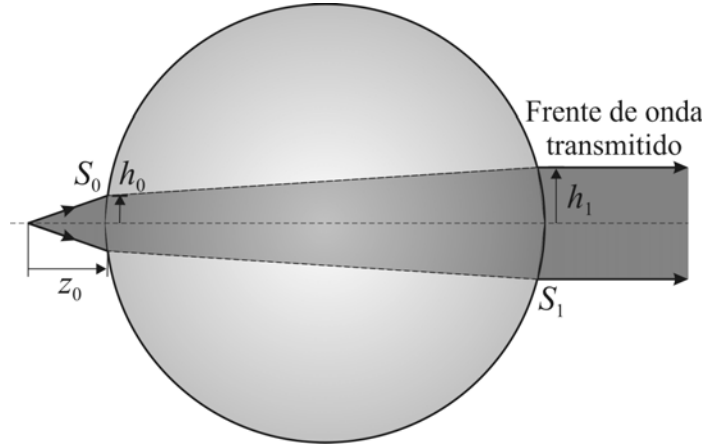
$$\cos u'_1 = \cos(v'_1 - v_1) = \sqrt{1 - \left(n_0^2 + n_1^2\right) \left(\frac{x_0}{n_1 r_1}\right)^2 + \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 \left(\frac{x_0}{r_1}\right)^4 + \frac{n_0}{n_1} \left(\frac{x_0}{r_1}\right)^2}. \quad (5.7)$$

Los otros términos los obtenemos utilizando identidades trigonométricas. En la figura 5.3 graficamos  $bfl_x$  como una función de la altura del rayo  $x_0$ . Para los rayos no paraxiales la distancia focal depende de la altura del rayo respecto al eje óptico (aberración esférica).



**Figura 5.3.** La distancia focal posterior  $bfl_x$  de una esfera disminuye cuando la altura  $x_0$  del rayo se incrementa.

El haz aberrado por la esfera es el frente de onda bajo prueba que incide en el IDV, como se muestra en la figura 5.4. En general, podemos representar la fase de un frente de onda como un polinomio de Zernike, en coordenadas polares [3], solamente si la superficie no tiene una dependencia azimutal:



**Figura 5.4.** Evaluamos las superficies  $S_0$ ,  $S_1$ , y las inhomogeneidades en la región sombreada. Aquí,  $h_0$  es la altura máxima de la pupila de entrada y  $h_1$  es la altura del frente de onda transmitido. La distancia entre el expansor de haz y la superficie de la esfera  $S_0$  es  $z_0 = bfl_x$ .

$$W(\rho) = C_0 + C_3(2\rho^2 - 1) + C_8(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1) + C_{15}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1) + C_{24}(70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1). \quad (5.8)$$

Los coeficientes  $C_i$  del  $i$ -ésimo término, corresponden a las diferentes aberraciones del frente de onda.  $C_0$  es pistón,  $C_3$  es defoco,  $C_8$  es esférica y defoco. Cuando la esfera de vidrio es perfectamente redonda (es decir, tiene el mismo radio en cada punto de su superficie), homogénea, centrada en el eje óptico y a la distancia focal  $bfl$  del expansor de haz, solo introduce aberración esférica en el frente de onda transmitido [4]. Podemos reescribir la ecuación (5.8) como:

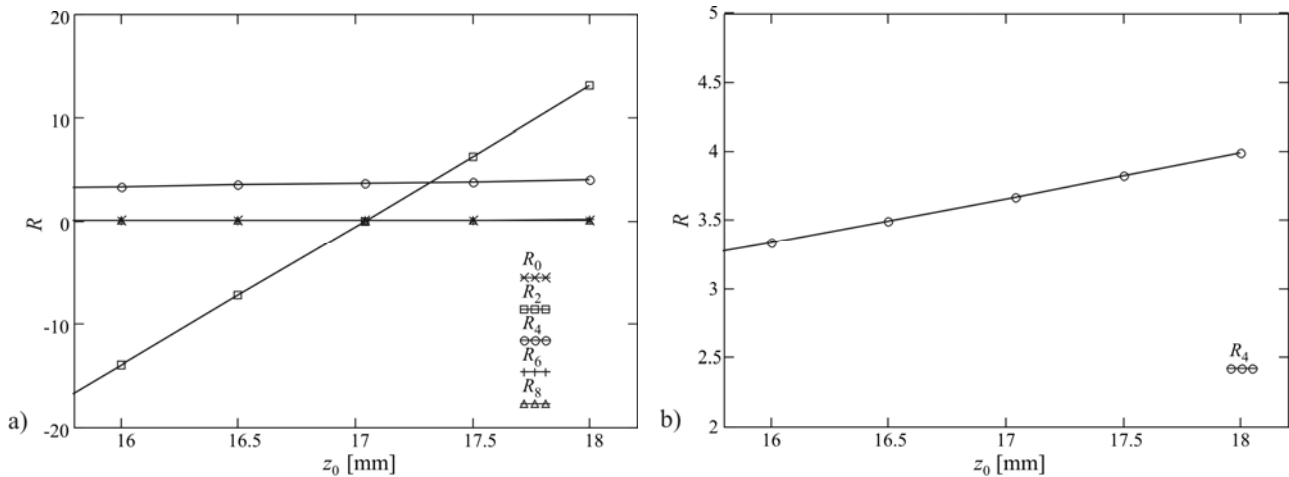
$$W(\rho) = (C_0 - C_3 + C_8 - C_{15} + C_{24}) \rho^0 + (2C_3 - 6C_8 + 12C_{15} - 20C_{24}) \rho^2 + (6C_8 - 30C_{15} + 90C_{24}) \rho^4 + (20C_{15} - 140C_{24}) \rho^6 + 70C_{24}\rho^8, \quad (5.9a)$$

$$W(\rho) = R_0\rho^0 + R_2\rho^2 + R_4\rho^4 + R_6\rho^6 + R_8\rho^8. \quad (5.9b)$$

Agrupamos los coeficientes  $C_i$  con potencias semejantes de  $\rho$ , en la ecuación (5.9b), en un nuevo coeficiente  $R_i$  para cada potencia de  $\rho$ . En la tabla 1, mostramos los valores de los coeficientes  $R$  calculados para una esfera de vidrio BK7, con un índice de refracción  $n = 1.515$ , de radio  $r = 36.2$  mm, y que es iluminada por un láser expandido con una apertura numérica de  $NA = 0.13$ .

$z_0$ [mm]	$R_0$	$R_2$	$R_4$	$R_6$	$R_8$
14	$5.6702 \times 10^{-7}$	-40.7116	2.7602	0.0709	0.0029
15	$7.2930 \times 10^{-7}$	-27.4597	3.0420	0.0822	0.0036
16	$9.3008 \times 10^{-7}$	-14.0681	3.3413	0.0948	0.0043
16.50	$1.0472 \times 10^{-6}$	-7.3202	3.4978	0.1015	0.0048
17.0395	$1.1877 \times 10^{-6}$	0.0000	3.6717	0.1093	0.0053
17.50	$1.3202 \times 10^{-6}$	6.2788	3.8245	0.1162	0.0057
18	$1.4784 \times 10^{-6}$	13.1297	3.9948	0.1241	0.0063

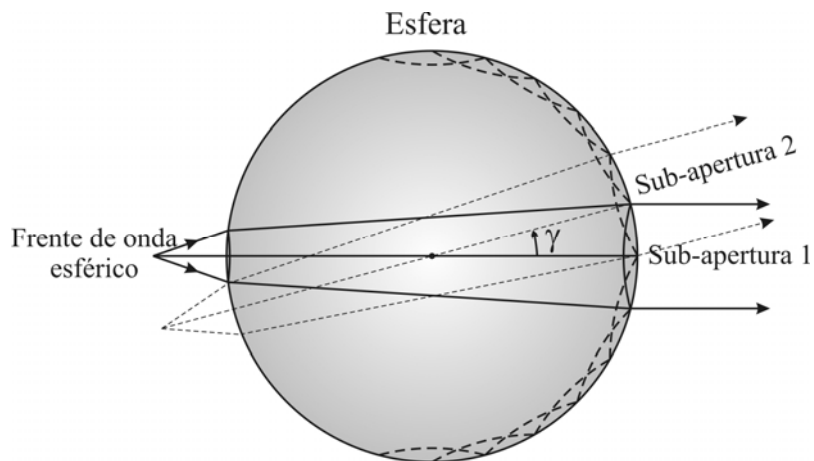
**Tabla 1.** Valores de los coeficientes  $R$  calculados para una esfera de vidrio BK de radio  $r = 36.2$  mm. Los valores  $R$  de cada renglón corresponden a una distancia  $z_0$  entre la fuente de iluminación y la superficie de la esfera.



**Figura 5.5.** Coeficientes  $R$  en función de la distancia  $z_0$  entre la fuente de iluminación y la superficie de la esfera. a) A la distancia focal  $z_0 = bfl_x$ , los valores de los coeficientes  $R$  son prácticamente cero y pueden ser despreciados, excepto  $R_4$ . b) La aberración esférica  $R_4\rho^4$  cambia lentamente con la distancia  $z_0$ , con una pendiente  $m_4 = 0.34$ , en comparación con la pendiente del coeficiente  $R_2$ ,  $m_2 = 13.70$ . Calculamos los coeficientes  $R$  para una esfera de vidrio BK7 ( $n = 1.515$ ) con un radio  $r = 36.2$  mm.

En la figura 5.5b graficamos el valor del término  $R_4$ , correspondiente a la aberración esférica, como función de la distancia  $z_0$ . Si seleccionamos la distancia entre el expansor de haz y la esfera diferente a la distancia focal, añadimos aberración de defoco al frente de onda. La magnitud de las aberraciones introducidas en el frente de onda transmitido es mínima cuando la fuente de iluminación está a la distancia focal paraxial  $bfl$  de la esfera.

El IDV mide un valor del radio de curvatura por cada posición y orientación de la esfera. Para una completa evaluación de la esfera la rotamos alrededor de un eje vertical con el fin de examinar diferentes sub-aperturas, como lo ilustramos en la figura 5.6.

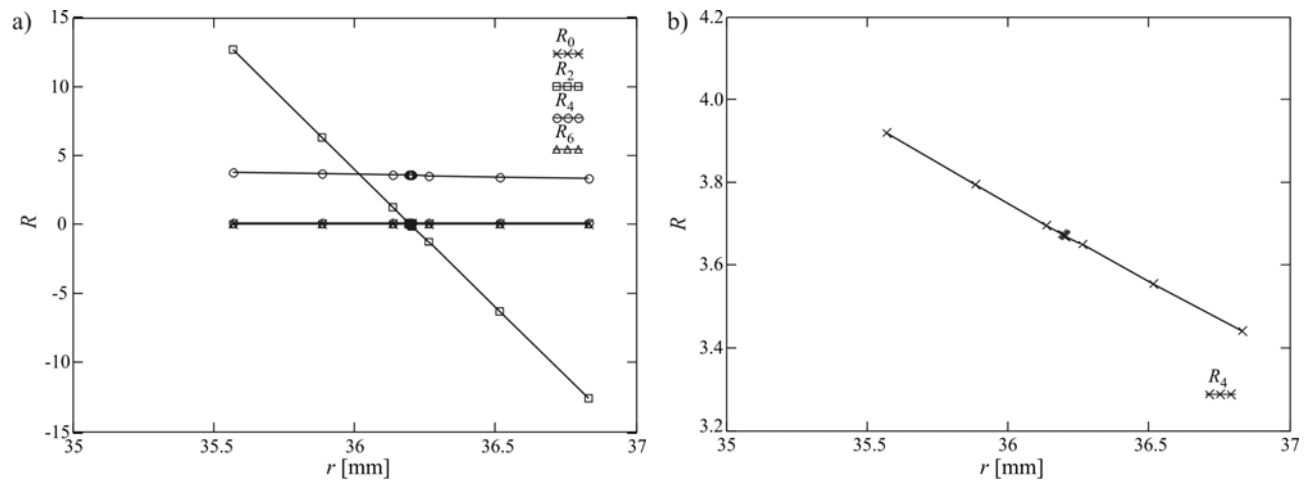


**Figura 5.6.** Rotamos la esfera un ángulo  $\gamma$  alrededor de un eje que atraviesa su centro y es perpendicular a la dirección de propagación del haz. Permitimos alrededor del 50% de empalme entre aperturas para lograr la completa cobertura de la superficie de la esfera.

Las diferencias de los patrones de franjas entre sub-aperturas son atribuibles a las variaciones en el radio en curvatura. Cada haz muestrea dos radios de curvatura, uno al entrar y otro al salir de la esfera. Así, cada frente de onda transmitido puede ser representado por:

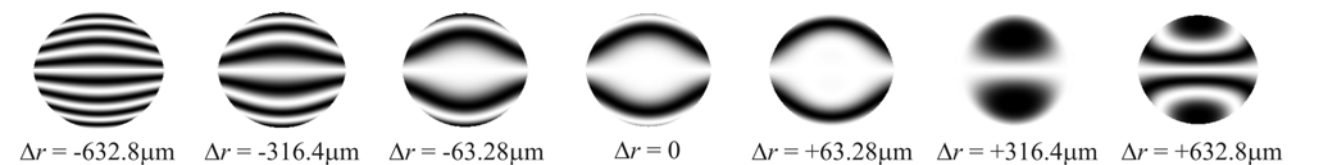
$$W_{medición}(x,y) = W_{\Delta r}(x,y) + W_{Aberración\ Esférica}(x,y). \quad (5.10)$$

Aquí,  $W_{\Delta r}$  es la contribución del error medido debido a variaciones en la geometría esférica, y  $W_{Aberración\ Esférica}$  es la aberración esférica intrínseca, y debe ser igual para todos los puntos en la esfera a la misma altura del eje óptico.



**Figura 5.7.** Coeficientes  $R$  en función del radio  $r$  de la esfera, a) los coeficientes correspondientes a las aberraciones esférica y defoco cambian rápidamente cuando el radio de la esfera se modifica. Calculamos los coeficientes  $R$  para una esfera de vidrio BK7 y un radio esperado de  $r = 36.2$  mm.

Mostramos en la figura 5.7 los valores calculados de los términos  $R$  como función del radio  $r$  de la esfera. Si el radio de la esfera cambia cuando la rotamos, los valores de las aberraciones de defoco  $R_2$  y esférica  $R_4$  también varían. En consecuencia, los respectivos patrones de franjas cambian su forma como lo observamos en la figura 5.8.



**Figura 5.8.** Patrón de franjas simulado con un desplazamiento entre los frentes de onda de  $|\Delta\bar{\rho}| = 1.663\text{mm}$ . La esfera simulada es de vidrio BK7 ( $n = 1.515$ ) con una variación  $\Delta r$  del valor del radio esperado, como se especifica en cada caso.

La ecuación para obtener el coeficiente de aberración esférica de la superficie  $S_0$  de la esfera es: [5]

$$B_0 = \frac{1}{2} h_0^4 \left[ n_0^2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{z_0} \right)^2 \left( \frac{1}{n_1 z'_0} - \frac{1}{n_0 z_0} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Aquí  $z'_0$  es la distancia imagen, dada como sigue:

$$\frac{n_1}{z'_0} = \frac{n_1 - n_0}{r_0} + \frac{n_0}{z_0}. \quad (5.12)$$

De manera similar, en la superficie  $S_1$  la ecuación de la aberración esférica es

$$B_1 = \frac{1}{2} h_1^4 \left[ n_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{z_1} \right)^2 \left( \frac{1}{n_0 z'_1} - \frac{1}{n_1 z_1} \right) \right], \quad (5.13)$$

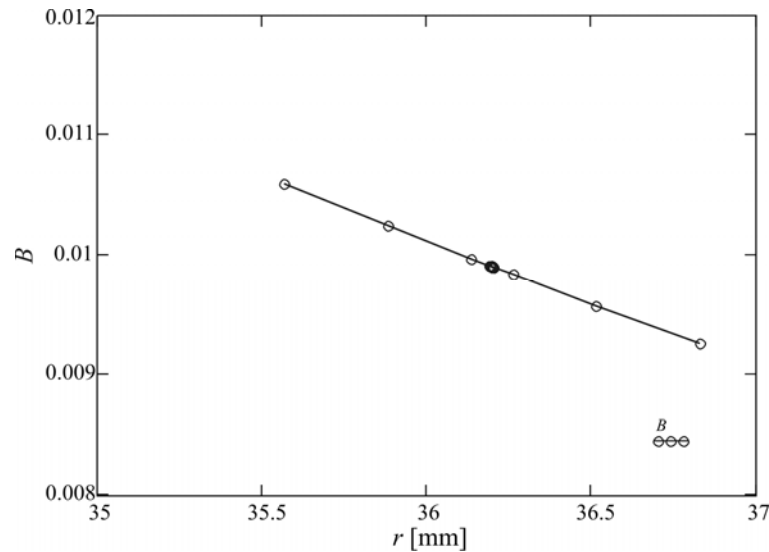
La variable  $z'_1$  está dada por:

$$\frac{n_0}{z'_1} = \frac{n_0 - n_1}{r_1} + \frac{n_1}{z_1}. \quad (5.14)$$

La aberración esférica total introducida por la esfera es la suma de las contribuciones desde las superficies  $S_0$  (ecuación 5.11) y  $S_1$  (ecuación 5.13)

$$B = B_0 + B_1 \quad (5.15)$$

El coeficiente correspondiente a la aberración esférica  $B$  depende de la altura de la pupila de entrada  $h_0$ , de la altura de la pupila de salida  $h_1$ , del radio nominal  $r$  de la esfera, y del índice de refracción  $n_1$  de la esfera. Los valores de los términos  $B$  como función del radio  $r$  de la esfera están graficados en la figura 5.9.



**Figura 5.9.** Los coeficientes  $B$  como función del cambio en el radio de la esfera. Calculamos los coeficientes para una esfera de vidrio BK7 ( $n = 1.515$ ) y un radio nominal de  $r = 36.2$  mm.

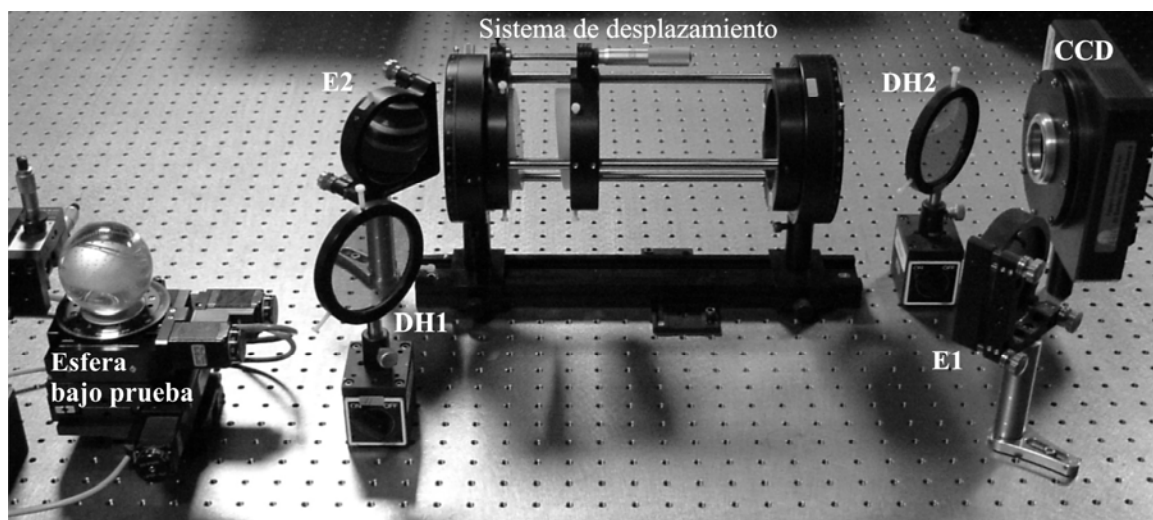
La cantidad de variación de esfericidad en el frente de onda bajo prueba puede calcularse del frente de onda medido como:

$$W_{\Delta r}(\rho, \theta) = W_{medición}(\rho, \theta) - R_4 \rho^4, \quad (5.16)$$

Así, podemos determinar experimentalmente la cantidad de aberración esférica para cada sub-apertura. En la siguiente sección utilizamos el IDV para detectar cambios en los gradientes del frente de onda en diferentes sub-aperturas de la esfera bajo prueba.

### 5.3. Implementación del IDV utilizando una esfera como componente óptica

Mostramos en la figura 5.10 el arreglo experimental que utilizamos para evaluar los frentes de onda transmitidos por una esfera. Expandimos y filtramos el haz de un láser He-Ne ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) con el fin de iluminar la esfera bajo prueba. El frente transmitido por la esfera incide en el IDV como frente de onda bajo prueba. En el plano de detección observamos el patrón de franjas producido por la superposición de los frentes de onda original y desplazado. Detectamos el patrón de franjas con una CCD, lo almacenamos y analizamos en una computadora.

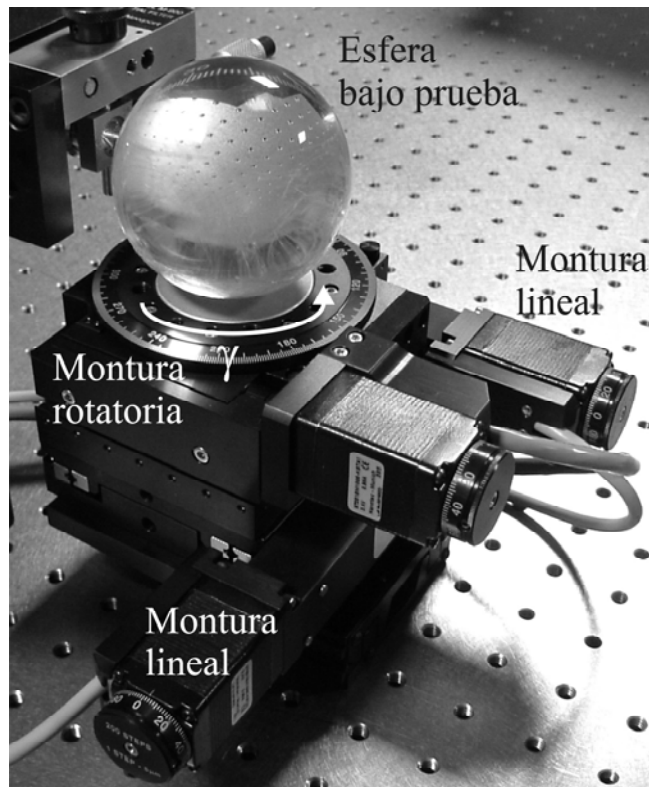


**Figura 5.10.** Arreglo experimental implementado. Los divisores de haz están hechos de vidrio óptico BK7 de alta calidad y tienen un espesor de 6 mm. Las superficies de los divisores tienen una calidad óptica pico-valle de  $\lambda/5$  en el 80% de su superficie. Los espejos están hechos de vidrio Pyrex con una película delgada de aluminio de alta reflectancia. Una segunda capa de silicio cubre el aluminio para evitar su oxidación. Las superficies de los espejos tienen una calidad óptica pico-valle de  $\lambda/5$  en el 80% de su superficie. En el plano de detección colocamos una CCD de 4096 x 4096 píxeles. Guardamos el patrón de franjas y lo enviamos a una computadora.

El material de la esfera de vidrio es BK7 con un índice de refracción  $n = 1.515$  en la longitud de onda de 633 nm. Medimos con un micrómetro digital de alta resolución ( $\pm 10 \mu\text{m}$ ) el diámetro de la esfera que es de 72.4 mm. Por lo tanto, el radio nominal de la esfera que utilizaremos en los

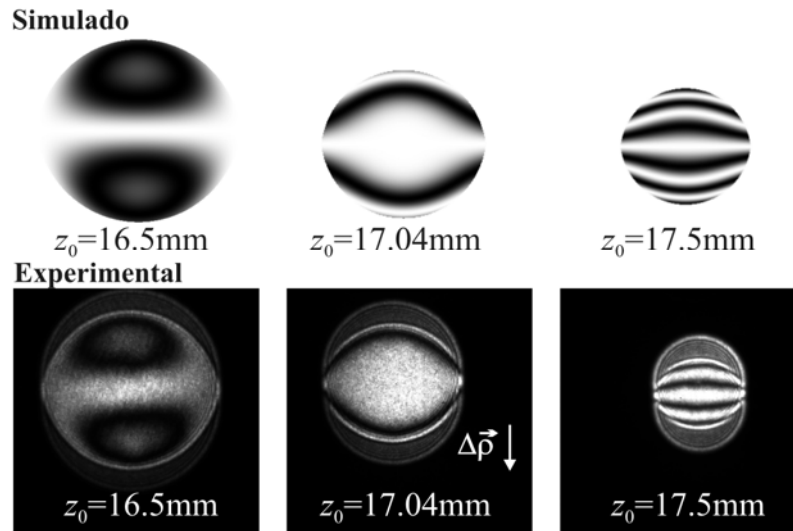


cálculos y simulaciones es de  $r = 36.2$  mm,. Empleamos tres monturas motorizadas para posicionar la esfera en el eje óptico del haz expandido, controlar la distancia  $z_0$  entre el expansor de haz y la esfera, y para rotar la esfera, como lo mostramos en la figura 5.11. Con las ecuaciones (5.8) y (5.9) calculamos la distancia focal paraxial  $efl = 53.246$  mm y la distancia focal posterior  $bfl = 17.046$  mm. Posicionamos la esfera a la distancia del foco paraxial  $z_0 = bfl$ .



**Figura 5.11.** Iluminamos la esfera con un frente de onda esférico desde un expansor de haz. El sistema de posicionamiento de la esfera está formado por dos plataformas lineales motorizadas, acopladas perpendicularmente con el fin de mover la esfera en un plano horizontal. Las plataformas lineales tienen una resolución de  $0.625 \mu\text{m}$  a  $1/8$  de paso. Empleamos una tercera plataforma giratoria para rotar la esfera un ángulo  $\gamma$  con una resolución de  $4.5$  arcsec a  $1/8$  de paso.

En la figura 5.12, mostramos los patrones de franjas experimentales obtenidos con el IDV y los patrones simulados bajo las mismas condiciones. La magnitud del desplazamiento es  $|\Delta\vec{p}| = 1.663$  mm en la dirección  $-x$  ( $\theta = 180^\circ$ ), la altura de la pupila de entrada es  $h_0 = 2.272$  mm, y la altura de la pupila de salida es  $h_1 = 7.099$  mm.



**Figura 5.12.** a) Patrones de franjas simulados con los datos de la esfera y con un desplazamiento dado, b) patrones de franjas experimentales obtenidos con el IDV. Desplazamos la esfera a lo largo del eje óptico  $\Delta z_0 = \pm 0.5\text{mm}$  cercano a la distancia del foco paraxial  $z_0 = 17.046\text{ mm}$ . La magnitud del desplazamiento es  $|\Delta \vec{\rho}| = 1.663\text{mm}$  en la dirección  $-x$ . A la distancia focal,  $z_0 = bfl$ , el patrón de franjas obtenido tiene la menor cantidad de franjas.

Calculamos los valores de los coeficientes del polinomio de Zernike en función del radio de la esfera, el índice de refracción del material, y la altura de la pupila de entrada y salida del haz en la esfera, ver tabla 2. Sustituimos estos coeficientes en el polinomio de Zernike (ecuación 5.8), y la expresión resultante en la ecuación del gradiente de fase (2.30b). Finalmente, obtenemos el patrón de franjas simulado con la ecuación de interferencia (2.24). Entonces, estamos en la posición de poder comparar los patrones de franjas simulados con los obtenidos experimentalmente, para comprobar nuestros resultados.

<b>Coefficientes:</b>	<b>Valor:</b>
$C_0$	1.2522
$C_3$	1.8871
$C_8$	0.6408
$C_{15}$	0.0059
$C_{24}$	$7.52 \times 10^{-5}$

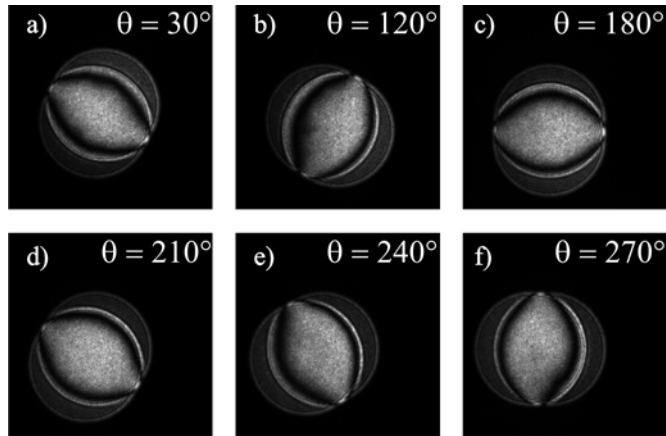
**Tabla 2.** Valores de los coeficientes para el polinomio de Zernike.

Verificamos la distancia  $z_0$  analizando la forma del patrón de franjas de la figura 5.12. Aquí observamos que cuando  $z_0$  es mayor o menor que  $bfl$ , el número de franjas aumenta debido a que la magnitud de la aberración de defoco también aumenta. En la tabla 3 mostramos los valores de los coeficientes  $R$ , calculados con la ecuación (5.9). Observamos que la magnitud de la aberración de defoco  $R_2$  cambia rápidamente, mientras que el término correspondiente a la aberración esférica  $R_4$  varía lentamente con respecto a la distancia  $z_0$ . Las otras aberraciones pueden ser despreciadas porque sus valores son más pequeños por un orden de magnitud con respecto al valor de la aberración esférica y de defoco.

$z_0$	16.5mm	17.04mm	17.5mm
$R_0$	$1.0472 \times 10^{-6}$	$1.1877 \times 10^{-6}$	$1.3202 \times 10^{-6}$
$R_2$	-7.3202	$-3.4774 \times 10^{-5}$	6.2788
$R_4$	3.4978	3.6717	3.8245
$R_6$	0.1015	0.1092	0.1162
$R_8$	0.0048	0.0053	0.0057

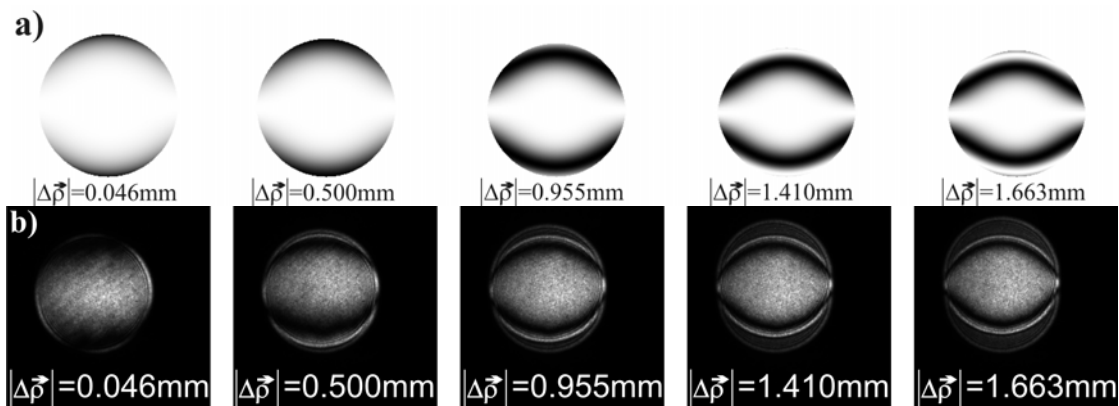
**Tabla 3.** Valores de los coeficientes  $R$  para el polinomio del frente de onda.

Realizamos el desplazamiento en diferentes direcciones para evaluar el grado de simetría del frente de onda bajo prueba, como lo ilustramos en la figura 5.13. Mantenemos fija la magnitud del desplazamiento  $|\Delta \vec{p}| = 1.663 \text{mm}$ , y conservamos la distancia  $z_0 = bfl$ . La forma de las franjas siempre es la misma, considerando la dirección del desplazamiento como el eje del patrón.



**Figura 5.13.** Patrones de franjas experimentales obtenidos con el IDV. La magnitud del desplazamiento es  $|\Delta\vec{\rho}| = 1.663\text{mm}$ .

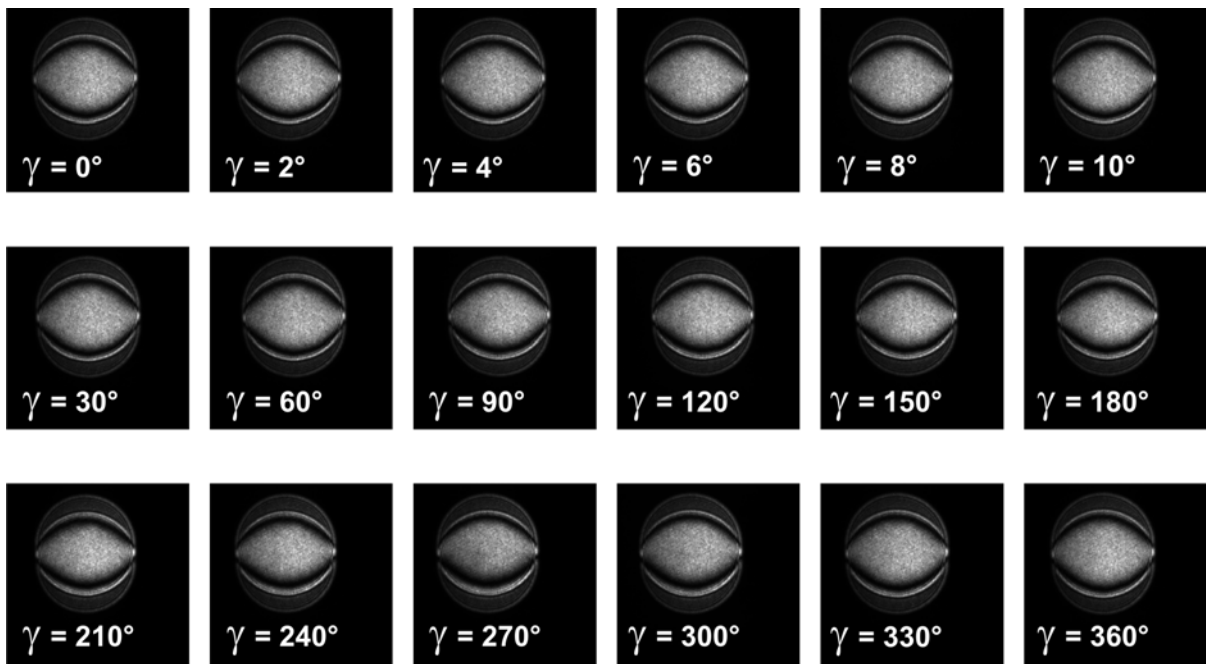
En la figura 5.14 mostramos los patrones de franjas obtenidos de la evaluación de la esfera de vidrio con diferentes magnitudes de desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$ . Para validar los patrones de franjas experimentales los simulamos con el desplazamiento asociado. Es posible mejorar la sensibilidad del IDV aumentando la magnitud del desplazamiento y consecuentemente el número de franjas en el plano de detección [6].



**Figura 5.14.** Patrones de franjas a) simulados y b) experimentales, utilizando el IDV con diferentes magnitudes de desplazamiento  $|\Delta\vec{\rho}|$ . La dirección del desplazamiento es  $-x$ . La distancia  $x_0$  es constante e igual a la distancia focal posterior ( $bfl = 17.046\text{ mm}$ ) de la esfera. Cuando el desplazamiento es pequeño  $|\Delta\vec{\rho}| < 1\text{ mm}$ , el número de franjas y la sensibilidad del IDV son bajas. El uso de una configuración sensible facilita la detección de potenciales defectos finos en el patrón. Así, observamos más fácilmente las variaciones entre los patrones de franjas.

Estimamos cualitativamente la simetría del elemento bajo prueba comparando los gradientes de fase en diferentes sub-aperturas de la esfera. Usamos la montura de rotación para girar la esfera un ángulo  $\gamma$ . En este caso, el sistema de desplazamiento del frente de onda está configurado para sensibilidad moderada.

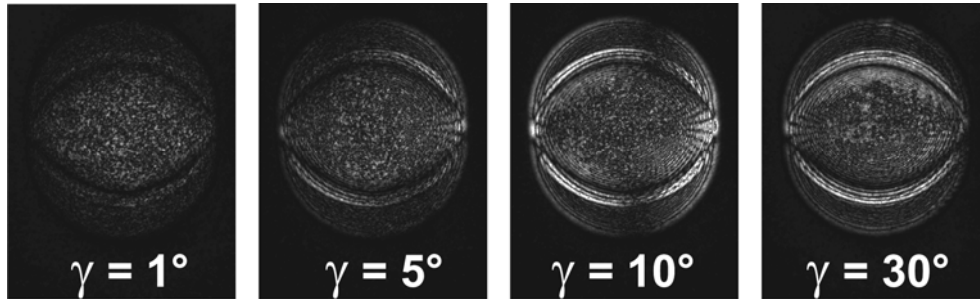
En la figura 5.15 mostramos los patrones de franjas que obtuvimos con el IDV al girar la esfera un ángulo  $\gamma$ . La forma y el número de las franjas son similares para las sub-aperturas examinadas en el plano del ecuador de la esfera.



**Figura 5.15.** Patrones de franjas experimentales obtenidos con el IDV. Rotamos la esfera un ángulo  $\gamma$ . La magnitud del desplazamiento es  $|\Delta\vec{p}| = 1.663\text{mm}$  en la dirección  $-x$ . La distancia entre el expansor de haz y la esfera es  $z_0 = 17.046\text{ mm}$ .

Un análisis más detallado de las diferencias entre los patrones de franjas, tomados en el ecuador, revela que existen pequeñas variaciones a lo largo de este eje. Calculamos las diferencias entre

patrones de franjas con diferentes ángulos de giro  $\gamma$ , y observamos pequeñas variaciones entre ellos, como se ilustra en la figura 5.16.



**Figura 5.16.** Diferencias entre los patrones de franjas experimentales.

Intervalo de giro $\Delta\gamma$	Diferencia RMS entre patrones de franjas (niveles de gris)
1°	3.075
5°	4.048
10°	7.386
30°	5.838

**Tabla 4.** Diferencia RMS entre los patrones de franjas en función del intervalo de giro  $\Delta\gamma$  entre los patrones correspondientes.

La diferencia RMS entre los patrones de franjas se incrementa con el intervalo del ángulo de giro  $\Delta\gamma$ , como se muestra en la tabla 4. Esta diferencia se debe en parte a errores experimentales producto del movimiento lateral de la esfera al momento de girar. Para minimizar este error podemos tomar los patrones de franjas en intervalos de  $\Delta\gamma = 5^\circ$ . En tal caso, el empalme entre las sub-aperturas evaluadas es mayor al 50%. Así aseguramos la completa cobertura del ecuador de la esfera.

## 5.4 Resumen

Describimos un interferómetro de desplazamiento vectorial optimizado para evaluar un frente de onda aberrado por una esfera. Utilizamos la esfera como componente óptica, la iluminamos con un frente de onda expandido y el frente transmitido es el frente bajo prueba en el IDV. La aberración esférica, introducida en el frente de onda depende del radio local de la esfera, del índice de refracción del vidrio y del cono de iluminación de la fuente.

Calculamos los coeficientes de Zernike para determinar el valor de las aberraciones introducidas por una esfera perfecta en el frente de onda transmitido. Sustituimos estos coeficientes en el polinomio de aberraciones de Zernike y en la ecuación de interferencia para simular los patrones de franjas desplazados. Los patrones simulados tienen un alto grado de similitud a los obtenidos experimentalmente.

Determinamos que cuando la esfera es perfectamente redonda (es decir, tiene el mismo radio en cada punto de su superficie), homogénea, centrada en el eje óptico y a la distancia focal  $bfl$  del expansor de haz, solo introduce aberración esférica en el frente de onda transmitido.

Al implementar el IDV, utilizamos monturas mecánicas controladas con motores de pasos de muy alta resolución ( $0.625 \mu\text{m}$  a  $1/8$  de paso y  $4.5 \text{ arcsec}$  a  $1/8$  de paso). Esto nos permitió colocar la esfera en el eje óptico del expansor de haz y a la distancia focal posterior de la esfera. De otra forma, añadimos otro tipo de aberraciones (como defoco y coma) al frente de onda transmitido por la esfera. Con la montura rotatoria controlamos los ángulos de giro de la esfera con gran precisión. En cada posición de la esfera, el frente de onda transmitido contiene la aberración esférica intrínseca

más una pequeña contribución por variaciones en el radio de curvatura de la esfera. La forma del patrón de franjas resultante está directamente relacionada con la aberración esférica intrínseca y con el radio de la esfera en una posición determinada.

En nuestra investigación encontramos que el IDV es cualitativamente factible como un instrumento para estimar el grado de simetría de una esfera de vidrio transparente. Comparamos los gradientes de fase (patrón de franjas) de diferentes sub-aperturas. Un análisis más detallado de las diferencias entre los patrones de franjas, tomados en el ecuador de la esfera, revela que existen pequeñas variaciones a lo largo de este eje. Esto se debe en parte a errores experimentales producto del movimiento lateral de la esfera al momento de girar.



## Referencias del capítulo 5

- [1] G. G. Torales, M. Strojnik, G. Paez, “Risley prisms to control wave-front tilt and displacement in a vectorial shearing interferometer”, *Appl. Opt.* **41** (2002) 1380-1384.
- [2] W. J. Smith, *Modern Optical Engineering*, McGraw-Hill, 2000, pp. 21-59.
- [3] J. C. Wyant, K. Creath, *Applied Optics and Optical Engineering XI*, Academic Press Inc, 1992, pp. 2-53.
- [4] B. C. Bergner, A. Davies, “Self-calibration for transmitted wave-front measurements”, *Appl. Opt.* **46** (2007), 18-24.
- [5] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 2002, pp. 286-411.
- [6] G. G. Torales, G. Paez, M. Strojnik, J. Villa, J. L. Flores, A. G. Alvarez, “Experimental intensity patterns obtained from a 2D shearing interferometer with adaptable sensitivity”, *Opt. Commun.* **257** (2006), 16-26.

## Capítulo 6

### Conclusiones

#### 6.1 Resumen

Analizamos y caracterizamos con trazo exacto de rayos una configuración novedosa de un sistema de desplazamiento que consta de dos prismas de cuña. Utilizamos el sistema de prismas para desplazar vectorialmente un frente de onda. Los grados de libertad bajo control del operador son el ángulo de rotación  $\omega$  de ambos prismas y la distancia de separación  $d$  entre ellos.

Incorporamos el sistema de desplazamiento en un brazo de un interferómetro Mach-Zehnder para formar el Interferómetro de Desplazamiento Vectorial. Evaluamos frentes de onda previamente conocidos o examinados con otro interferómetro comercial (Wyco) para comprobar el funcionamiento teórico y experimental del IDV.

Utilizamos una esfera transparente como componente óptica. Iluminamos una pequeña sección de su superficie con el frente de onda expandido y filtrado de un láser. Utilizamos el frente transmitido por la esfera como frente de onda bajo prueba en el IDV. Detectamos el patrón de franjas resultante con una CCD, lo almacenamos y analizamos en una computadora. Estimamos cualitativamente la

simetría de la esfera bajo prueba por comparación de los patrones de franjas de diferentes sub-aperturas.

Calculamos los coeficientes de Zernike correspondientes a las aberraciones inducidas por una esfera perfecta en un frente de onda. Sustituimos estos coeficientes en el polinomio de aberraciones de Zernike y en la ecuación de interferencia para simular los patrones de franjas desplazados. Comparamos los patrones de franjas simulados con los obtenidos experimentalmente con el IDV.

## 6.2 Resultados y conclusiones

Determinamos que con la configuración de prismas de cuña propuesta, la dirección del desplazamiento vectorial  $\Delta\vec{\rho}$  depende de la orientación de los prismas y la magnitud es proporcional a la distancia de separación  $d$  entre ellos,  $|\Delta\vec{\rho}| = \beta d$ . La constante de proporcionalidad  $\beta$  representa la sensibilidad al desplazamiento del sistema y depende de los ángulos de cuña de los prismas, el índice de refracción de los mismos y el índice de refracción del medio. Además, en el desarrollo matemático comprobamos que la dirección del haz desplazado es la misma que el haz original. Por lo tanto, no introduce inclinación en el frente de onda desplazado

Demostramos que la desviación del desplazamiento debida a la diferencia entre los ángulos de cuña de los prismas es mayor que la que le corresponde a la incidencia oblicua del frente de onda. Por lo tanto, necesitamos que los valores de los ángulos de cuña tengan alto grado de similitud para calcular el desplazamiento del frente de onda con precisión. En las pruebas con el sistema de

prismas observamos que los datos experimentales del desplazamiento confirman los cálculos teóricos. Existe una diferencia RMS de  $7\mu\text{m}$  entre los resultados teóricos y experimentales. Atribuimos ésta diferencia a errores experimentales, errores de fabricación y de alineación de los prismas, ya que las variaciones de la magnitud  $|\Delta\vec{\rho}|$  son pequeñas y aleatorias.

Comprobamos el rendimiento del IDV para evaluar un frente de onda difractado por una abertura circular o aberrado por componentes ópticas. Los patrones de franjas simulados tienen un alto grado de similitud con los obtenidos experimentalmente.

Determinamos teóricamente que cuando la esfera es perfectamente redonda (es decir, tiene el mismo radio de curvatura en cada punto de su superficie), homogénea, centrada en el eje óptico y a la distancia focal paraxial  $bfl$  del expansor de haz, solo introduce aberración esférica en el frente de onda transmitido. Si la esfera no está centrada en el eje óptico del sistema de iluminación o la distancia entre el expansor de haz y la esfera es diferente de  $bfl$ , introduce otro tipo de aberraciones como defoco y coma.

La forma y el número de las franjas son similares para las sub-aperturas examinadas en el plano del ecuador de la esfera. Un análisis más detallado de las diferencias entre los patrones de franjas revela que existen pequeñas variaciones. Esto se debe en parte a errores experimentales por el movimiento lateral de la esfera al momento de girar. Para minimizar este error podemos tomar los patrones de franjas cada  $\Delta\gamma = 5^\circ$ . En tal caso, el empalme entre las sub-aperturas evaluadas es mayor al 50%. Así aseguramos la completa cobertura del ecuador de la esfera.

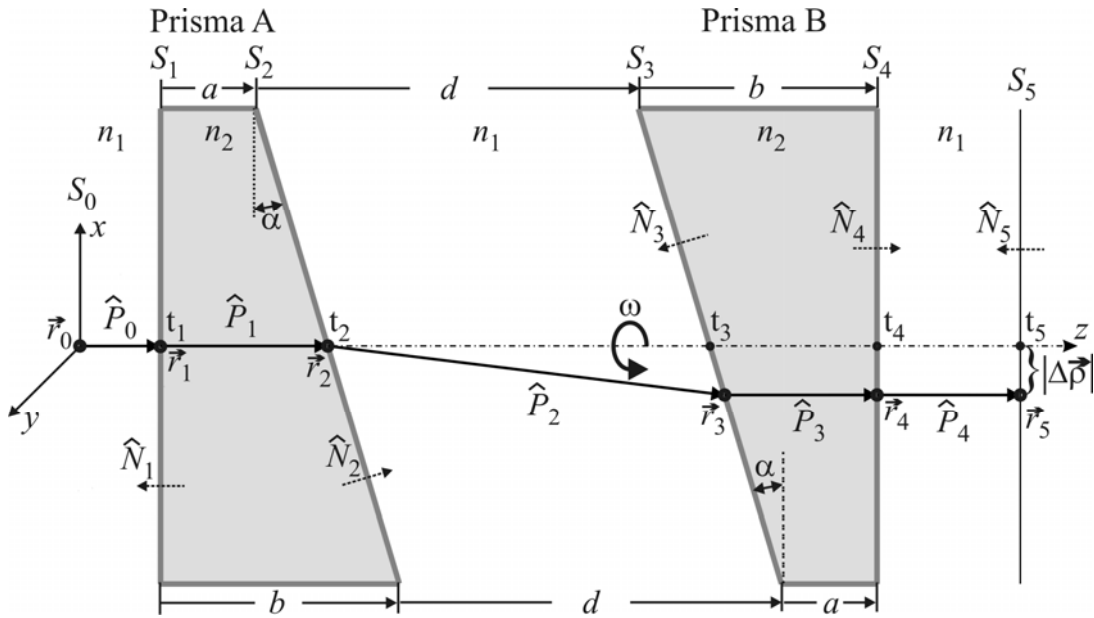
Demostramos que el IDV es un instrumento de mucha utilidad para evaluar la simetría de esferas transparentes.

Como trabajo a futuro que se puede desarrollar con el IDV esta el evaluar frentes de onda por reflexión en superficies bajo prueba. Recuperar la forma del frente de onda original por integración del gradiente de la fase, contenida en el patrón de franjas que se obtiene con el IDV. Finalmente, creemos que el Interferómetro de Desplazamiento Vectorial puede ser útil en aplicaciones biomédicas, por ejemplo en la caracterización de tejidos in vivo, etc.

## Apéndice A

### Propagación de un frente de onda a través del sistema de desplazamiento

Utilizamos las ecuaciones de trazo exacto de rayos para modelar la propagación de un frente de onda a través del sistema de prismas de la figura A.1.



**Figura A.1.** Desplazamiento vectorial de un rayo por el sistema de prismas de cuña.  $|\Delta\vec{\rho}|$  es la magnitud del desplazamiento,  $d$  es la distancia de separación entre prismas,  $\vec{r}_0$  a  $\vec{r}_5$  son los puntos donde el rayo cruza a las superficies  $S_0$  a  $S_5$ , respectivamente.

La ecuación de refracción es:

$$\hat{P}_i = \mu_i \hat{P}_{i-1} + \left[ -\mu_i (\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i) + \sqrt{1 - \mu_i^2 [1 - (\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i)^2]} \right] \hat{N}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \frac{n_1}{n_2}, \quad \mu_2 = \mu_4 = \frac{n_2}{n_1}.$$

$\hat{P}_i$  es la dirección del rayo refractado por la  $i$ -ésima superficie,  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción del medio y del material del prisma respectivamente.

La ecuación de propagación es:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \left[ \frac{(t_i \hat{k} - \vec{r}_{i-1}) \cdot \hat{N}_i}{\hat{P}_{i-1} \cdot \hat{N}_i} \right] \hat{P}_{i-1}. \quad [\text{mm}] \quad (3.2)$$

$r_i(x_i, y_i, z_i)$  es la posición donde el rayo cruza la  $i$ -ésima superficie,  $t$  es la distancia desde el origen a cada superficie medida a lo largo del eje  $z$ .

La normal de las superficies  $S_i$ , en términos de los ángulos de cuña  $\alpha$  y de rotación  $\omega$  es:

$$\hat{N} = (\sin \alpha \cos \omega) \hat{i} + (\sin \alpha \sin \omega) \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}. \quad (3.3)$$

Las condiciones de operación del sistema director de la figura A.1 son:

$$\begin{cases} \hat{N}_1 = -\hat{N}_4 = -\hat{k} \\ \hat{N}_2 = -\hat{N}_3 \\ \hat{P}_0 = \hat{k} \\ \vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

El rayo incide perpendicularmente en la superficie  $S_0$  del prisma A  $\hat{P}_0 = -\hat{N}_1 = \hat{k}$ .

Sustituimos los valores iniciales de un rayo  $\vec{r}_0$  y  $\hat{P}_0$  de (A.1) en las ecuaciones (3.1) y (3.2) para la superficie  $S_1$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} + \left[ \frac{-x_0\hat{i} - y_0\hat{j} - (z_0 - t_1)\hat{k}}{1} \right] \hat{k} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + (z_0 - z_0 + t_1)\hat{k} \\ &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + t_1\hat{k}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

$$\hat{P}_1 = \mu_1\hat{k} + \left[ -\mu_1(1) + \sqrt{1 - \mu_1^2(1-1)} \right] \hat{k} = \mu_1\hat{k} - \mu_1\hat{k} + \hat{k} = \hat{k} . \quad (\text{A.3})$$

La expresión de la normal  $\hat{N}_2$  para la superficie  $S_2$  es:

$$\hat{N}_2 = \text{sen}(\alpha)\cos(\omega) \hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} . \quad (\text{A.4})$$

Hacemos el producto punto  $\hat{P}_1 \cdot \hat{N}_2$

$$\hat{P}_1 \cdot \hat{N}_2 = \hat{k} \cdot \left[ \text{sen}(\alpha)\cos(\omega) \hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right] = \cos(\alpha) . \quad (\text{A.5})$$

Sustituimos las expresiones (A.2), (A.3), (A.4) y (A.5) en las ecuaciones (3.1) y (3.2), correspondientes a la refracción y propagación en la superficie  $S_2$  del prisma A:

$$\vec{r}_2 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + t_1\hat{k} + \left[ \frac{\left( -x_0\hat{i} - y_0\hat{j} + (t_2 - t_1) \hat{k} \right) \cdot \left( \text{sen}(\alpha)\cos(\omega) \hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right)}{\cos(\alpha)} \right] \hat{k}$$



$$\begin{aligned}\bar{r}_2 &= x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + t_1 \hat{k} + \left[ -x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) - y_0 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) + (t_2 - t_1) \right] \hat{k} \\ \bar{r}_2 &= x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + \left[ t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) - y_0 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \right] \hat{k}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_2 &= \mu_2 \hat{k} + \left( -\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \left[ 1 - \cos^2(\alpha) \right]} \right) \left[ \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right] \\ \hat{P}_2 &= \mu_2 \hat{k} + \left[ -\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)} \right] \left[ \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right].\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

En la ecuación (A.7) agrupamos los términos constantes en uno solo:

$$\beta_2 = -\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}.\quad (\text{A.8})$$

Sustituimos la ecuación (A.8) en la ecuación (A.7)

$$\hat{P}_2 = \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + \left[ \mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha) \right] \hat{k}.\quad (\text{A.9})$$

Hacemos el producto punto  $\hat{P}_2 \cdot \hat{N}_3$ :

$$\begin{aligned}\hat{P}_2 \cdot \hat{N}_3 &= -\hat{P}_2 \cdot \hat{N}_2 = \left[ \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \hat{k} \right] \cdot \\ &\quad \left[ \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right] \\ \hat{P}_2 \cdot \hat{N}_3 &= \beta_2 \left[ \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right] + \mu_2 \cos(\alpha) = \beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Utilizamos las ecuaciones (A.6), (A.8), (A.9) y (A.10), para calcular la propagación y refracción del rayo en la superficie  $S_3$  del prisma B.

Calculamos primero la propagación del rayo con la ecuación (3.2)

$$\vec{r}_3 = \left[ \frac{x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + [t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) - y_0 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\omega)] \hat{k} + \left( -x_0 \hat{i} - y_0 \hat{j} + [t_3 - t_2 + x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) + y_0 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\omega)] \hat{k} \right) \cdot \hat{N}_2}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\left[ \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \beta_2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \hat{j} + [\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)] \hat{k} \right] .$$

Simplificamos y agrupamos términos de la ecuación (A.11)

$$\vec{r}_3 = \left[ x_0 + \beta_2 \beta_3 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega) \right] \hat{i} + \left[ y_0 + \beta_2 \beta_3 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\omega) \right] \hat{j} + \left[ t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) - y_0 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) + \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \right] \hat{k}. \quad (\text{A.12})$$

Luego simplificamos los términos constantes:

$$\beta_3 = \frac{(t_3 - t_2) \cos(\alpha)}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)}. \quad (\text{A.13})$$

Calculamos la trayectoria del rayo después de refractarse en la superficie  $S_3$  del prisma B con la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \left[ \beta_2 \text{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \beta_2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\omega) \hat{j} + (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \hat{k} \right] \\
\hat{P}_3 = & + \left[ -\mu_1 [\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)] + \sqrt{1 - \mu_1^2} \left[ 1 - (\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha))^2 \right] \right] \\
& \left[ \text{sen}(\alpha) \cos(\omega) \hat{i} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\omega) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \right] \\
& \left[ \left( \mu_1 \beta_2 + \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)} \right) \text{sen}(\alpha) \cos(\omega) \right] \hat{i} + \\
\hat{P}_3 = & \left[ \left( \mu_1 \beta_2 + \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)} \right) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\omega) \right] \hat{j} + \\
& \left[ \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \beta_2 \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right] \hat{k} .
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Sustituimos la ecuación (A.8) en la ecuación (A.14) y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_3 = & 0\hat{i} + 0\hat{j} + \left[ \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \left[ -\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)} \right] \cos(\alpha) \right. \\
& \left. - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right] \hat{k} \\
\hat{P}_3 = & \hat{k} .
\end{aligned} \tag{A.15}$$

En la superficie  $S_4$  del prisma B, utilizamos la ecuación de traslación (3.2)

$$\vec{r}_4 = \left[ \begin{array}{l} [x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\omega)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\omega)] \hat{j} + \\ [t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) - y_0 \tan(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha))] \hat{k} + \\ \left[ \frac{[t_4 - t_2 + x_0 \tan(\alpha) \cos(\omega) + y_0 \tan(\alpha) \text{sen}(\alpha) - \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha))]}{\hat{P}_3 \cdot \hat{N}_4} \right] \hat{k} \end{array} \right] \hat{k} . \quad (\text{A.16})$$

Entonces, el producto punto es:

$$\hat{P}_3 \cdot \hat{N}_4 = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1. \quad (\text{A.17})$$

Sustituimos la ecuación (A.17) en la ecuación (A.16) y simplificamos

$$\vec{r}_4 = [x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\omega)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\omega)] \hat{j} + t_4 \hat{k}. \quad (\text{A.18})$$

Para calcular la refracción en la superficie  $S_4$  del prisma B, sustituimos las ecuaciones (A.17) y (A.15) en la ecuación de refracción (3.1)

$$\hat{P}_4 = \mu_2 \hat{k} + \left( -\mu_2 (1) + \sqrt{1 - \mu_2^2 [1 - (1)^2]} \right) \hat{k} = \mu_2 \hat{k} - \mu_2 \hat{k} + \hat{k}$$

$$\hat{P}_4 = \hat{k}. \quad (\text{A.19})$$

En el plano imagen  $S_5$ , sustituimos la ecuación (A.18) y el producto  $\hat{P}_4 \cdot \hat{N}_5 = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$  en la ecuación de propagación (3.2)

$$\begin{aligned}\bar{r}_5 &= [x_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\cos(\omega)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega)] \hat{j} + t_4\hat{k} + \left[ \frac{t_5 - t_4}{1} \right] \hat{k} \\ \bar{r}_5 &= [x_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\cos(\omega)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega)] \hat{j} + t_5\hat{k}.\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

La magnitud del desplazamiento  $\Delta\vec{\rho}$  está definido como:

$$|\Delta\vec{\rho}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} . \quad (\text{A.21})$$

Calculamos las componentes del desplazamiento:

$$\Delta x = x_5 - x_0 = x_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\cos(\omega) - x_0 = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\cos(\omega) \quad (\text{A.22})$$

$$\Delta y = y_5 - y_0 = y_0 + \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega) - y_0 = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\omega). \quad (\text{A.23})$$

Sustituimos las ecuaciones (A.22) y (A.23) en la ecuación (A.21)

$$|\Delta\vec{\rho}| = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\sqrt{\cos^2(\omega) + \text{sen}^2(\omega)} = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha) \quad (\text{A.24})$$

Sabemos que la distancia entre prismas es:

$$d = t_3 - t_2. \quad (\text{A.25})$$

Sustituimos las ecuaciones (A.8) y (A.25) en la ecuación (A.13)

$$\beta_3 = \frac{(t_3 - t_2) \cos(\alpha)}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)} = \frac{d \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)}}. \quad (\text{A.26})$$

Sustituimos las ecuaciones (A.8) y (A.26) en la ecuación (A.24) para obtener el desplazamiento  $|\Delta \vec{\rho}|$  en función de la separación  $d$  entre los prismas:

$$|\Delta \vec{\rho}| = d \left| \sin(\alpha) \cos(\alpha) - \frac{\mu_2 \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{\sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)}} \right|. \quad (\text{A.27})$$

El término entre las barras en la ecuación (A.27) es constante. Éste depende únicamente del ángulo de cuña  $\alpha$  de los prismas y de la razón  $\mu_2 = \frac{n_2}{n_1}$  entre los índices de refracción. Por lo tanto, la magnitud del desplazamiento  $|\Delta \vec{\rho}|$  es directamente proporcional a la separación  $d$  entre los prismas.

El desplazamiento angular  $\theta$  se define como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{\beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \sin(\omega)}{\beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \cos(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)}\right) = \arctan[\tan(\omega)]$$

$$\theta = \omega \quad (\text{A.28})$$

Concluimos que el desplazamiento angular  $\theta$  y el ángulo de giro  $\omega$  de los prismas es el mismo.