



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

**Sistema de desplazamiento de haz
con dos grados de libertad para
Interferómetro de Desplazamiento Vectorial**

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta

Ing. Claudio Narciso Ramírez.

León Guanajuato, México

Agosto 2004

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor, la Dra. Marija Strojnik por su invaluable ayuda para la realización de este trabajo. Al Dr. Gonzalo Páez por su amistad y sabios consejos. A mis compañeros del grupo de Infrarrojo y de generación en general, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

También quiero darles las gracias a los profesores que me impartieron clases en el CIO, por compartir sus conocimientos y experiencias valiosas.

Quiero agradecer a mi madre por el apoyo que siempre he recibido.

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo económico del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Resumen

En el presente trabajo exponemos la caracterización de una nueva configuración de desplazamiento lateral de frente de onda, que puede ser utilizado en un interferómetro de desplazamiento vectorial.

Este trabajo de tesis consta de cinco capítulos. En el primer capítulo planteamos los objetivos que se persiguen en el trabajo de tesis. También exponemos las ventajas de la interferometría de desplazamiento vectorial, en comparación con la interferometría tradicional.

En el segundo capítulo tratamos sobre los fundamentos teóricos de la interferometría. Es decir, las condiciones que se deben presentar para que exista interferencia. Además presentamos los principales sistemas interferométricos.

La interferometría de desplazamiento se analiza en el tercer capítulo. La propagación del frente de onda, en la configuración propuesta, se deduce a través del trazo exacto de rayos en este capítulo.

Las ecuaciones del trazo exacto de rayos son la base para generar simulaciones con diferentes desplazamientos. Además, modificamos un interferómetro Mach-Zehnder implementando el sistema director del frente de onda en uno de sus brazos, para corroborar

las simulaciones. Dichas simulaciones y comparaciones se presentan en el capítulo número cuatro.

En el último capítulo exponemos las conclusiones del presente trabajo de tesis, y las tareas a futuro.

Índice

Contenido

1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos	6
1.3 Justificación	7
Referencias del capítulo 1	8
2. Fundamentos de interferometría	10
2.1 Introducción	10
2.2 Ondas	11
2.2.1 Ecuación de onda	11
2.2.2 Ondas armónicas	14
2.2.3 Ondas electromagnéticas	17
2.3 Interferencia de ondas electromagnéticas	19
2.4 Coherencia temporal y coherencia espacial	25
2.5 Interferencia por división de frente de onda	27
2.5.1 Experimento de Young	27
2.5.2 Espejo doble de Fresnel	31
2.5.3 Prisma doble de Fresnel	33
2.6 Interferencia por división de amplitud de onda	34
2.6.1 Franjas de igual inclinación	34
2.6.2 Franjas de igual espesor	39

2.7	Interferómetro Mach-Zehnder	42
2.8	Conclusiones	44
	Referencias del capítulo 2	45
3.	Interferómetro de desplazamiento	46
3.1	Introducción	46
3.2	Interferómetro de desplazamiento radial	46
3.3	Interferómetro de desplazamiento rotacional	50
3.4	Interferómetro de desplazamiento vectorial	54
3.4.1	Desplazamiento vectorial	55
3.4.2	Desplazamiento diferencial	57
3.4.3	Polinomio de aberraciones	58
3.4.4	Sistema director del frente de onda con dos prismas delgados	60
3.5	Nuevo sistema director del frente de onda	62
3.5.1	Prisma de cuña	62
3.5.2	Desviación de un haz por un par de prismas de cuña	65
3.6	Trazo exacto de rayos	67
3.6.1	Refracción	67
3.6.2	Traslación	71
3.6.3	Trazo exacto de rayos del sistema director del frente de onda	73
3.6.4	Incidencia oblicua	76
3.7	Desplazamientos ρ y θ como función d y ϕ	80
3.8	Conclusiones	88

Referencias del capítulo 3	89
4. Simulaciones y pruebas	91
4.1 Introducción	91
4.2 Desplazamiento de un haz	92
4.2.1 Trazo exacto de rayos	94
4.2.2 Desplazamiento vectorial como función de d y ϕ	99
4.2.3 Resultados experimentales	101
4.3 Interferograma de desplazamiento vectorial	104
4.3.1 Desplazamiento diferencial de frentes de onda con aberraciones	104
4.3.2 Simulación de interferogramas con aberraciones	107
4.3.3 Resultados experimentales	111
4.4 Conclusiones	114
Referencias del capítulo 4	117
5. Conclusiones	118
5.1 Conclusiones	118
5.2 Trabajo a futuro	120
Apéndice A. Cálculo de la normal \vec{N} de una superficie inclinada, en función del ángulo de giro ϕ	121

Lista de figuras

Capítulo 2

- Figura 2.1.** Onda viajando a velocidad constante v .
- Figura 2.2.** Onda armónica: a) temporalmente constante, b) espacialmente constante.
- Figura 2.3.** Ondas planas a lo largo del eje z .
- Figura 2.4.** Onda electromagnética. El campo eléctrico \mathbf{E} , el campo magnético \mathbf{B} y el vector de propagación \mathbf{k} , son mutuamente ortogonales.
- Figura 2.5.** Irradiancia de las franjas de interferencia como función de la diferencia de fase δ entre dos ondas.
- Figura 2.6.** Experimento de la doble rendija.
- Figura 2.7.** Perfil de distribución para la irradiancia en la interferometría de doble rendija.
- Figura 2.8.** Doble espejo de Fresnel.
- Figura 2.9.** Doble prisma de Fresnel.
- Figura 2.10.** Formación de franjas por una película dieléctrica de espesor d .
- Figura 2.11.** Formación de franjas de igual inclinación a diferentes ángulos de incidencia θ_i .
- Figura 2.12.** Franjas de igual espesor.
- Figura 2.13.** Anillos de Newton.
- Figura 2.14.** Interferómetro Mach-Zehnder.
- Figura 2.15.** Localización de franjas en un interferómetro Mach-Zehnder.

Capítulo 3

- Figura 3.1.** Esquema de un interferómetro de desplazamiento radial.
- Figura 3.2.** Gráfica de sensibilidad σ como función del desplazamiento R .

- Figura 3.3.** a) Interferómetro de desplazamiento rotacional,
b) región de interferencia en el plano XY.
- Figura 3.4.** Sensibilidad σ como función del desplazamiento rotacional θ .
- Figura 3.5.** Interferómetro de desplazamiento rotacional, con prisma Dove como sistema director del frente de onda.
- Figura 3.6.** Interferómetro de desplazamiento lateral basado en un interferómetro Michelson.
- Figura 3.7.** Interferómetro de desplazamiento lateral, basado en un interferómetro Jamin.
- Figura 3.8.** Desplazamiento vectorial de un frente de onda en el plano XY.
- Figura 3.9.** Diferencia de camino óptico entre un frente directo $W(x,y)$ y el desplazado $W_d(x_d,y_d)$.
- Figura 3.10.** a) Patrones de franjas obtenidos con un interferómetro Mach-Zehnder,
b) Interferómetro Mach-Zehnder.
- Figura 3.11.** a) Interferómetro de desplazamiento vectorial basado en un Mach-Zehnder,
b) sistema director del frente de onda.
- Figura 3.12.** Interferómetro de desplazamiento vectorial propuesto.
- Figura 3.13.** Principales parámetros de un prisma de cuña.
- Figura 3.14.** Refracción de un haz, debido a un prisma de cuña.
- Figura 3.15.** Esquema de la desviación de un haz debido a dos prismas de cuña.
- Figura 3.16.** Refracción de un rayo al pasar por una superficie que separa el medio \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 .
- Figura 3.17.** Traslación de un rayo del punto inicial \mathbf{r}_0 a un punto \mathbf{r} del plano $\phi(\mathbf{r})$.
- Figura 3.18.** Descripción del plano $\phi_2(\mathbf{r})$, a partir de su vector normal $\hat{\mathbf{N}}$ y un punto Q.
- Figura 3.19.** Esquema de un rayo atravesando dos prismas de cuña.
- Figura 3.20.** Incidencia oblicua de un haz en un sistema de dos prismas.
- Figura 3.21.** Desplazamiento vectorial de un rayo por el sistema director del frente de onda.

Capítulo 4

- Figura 4.1.** Interferómetro Mach-Zehnder modificado.
- Figura 4.2.** Prisma de cuña.
- Figura 4.3.** Sistema director del frente de onda.
- Figura 4.4.** Trazo de rayos para una distancia de 50mm entre prismas.
- Figura 4.5.** Trazo de rayos para una distancia de 100mm entre prismas.
- Figura 4.6.** Trazo de rayos para una distancia de 200mm entre prismas.
- Figura 4.7.** Posición de los rayos en el plano 5, distancia $d = 200\text{mm}$, ángulo de giro de los prismas a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$, e) $\phi = 135^\circ$, f) $\phi = 180^\circ$, g) $\phi = 270^\circ$.
- Figura 4.8.** Trazo de rayos a incidencia oblicua en el sistema director.
- Figura 4.9.** Posición de los rayos en el plano 5, al variar el ángulo de desplazamiento ϕ .
- Figura 4.10.** Variación del desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$ en función de la distancia d .
- Figura 4.11.** Variación del ángulo de desplazamiento θ en función del ángulo de giro ϕ .
- Figura 4.12.** Interferómetro de desplazamiento vectorial.
- Figura 4.13.** a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 0^\circ$, b) imagen real del desplazamiento.
- Figura 4.14.** a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 90^\circ$, b) imagen real del desplazamiento.
- Figura 4.15.** a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 180^\circ$, b) imagen real del desplazamiento.
- Figura 4.16.** a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 270^\circ$, b) imagen real del desplazamiento.
- Figura 4.17.** a) Frente de onda original $W(x,y)$ y desplazado $W_d(x_d,y_d)$ superpuestos. b) Diferencia de camino óptico $\Delta W(x,y)$.
- Figura 4.18.** a) Interferómetro Mach-Zehnder,
b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

Figura 4.19. a) Interferómetro Mach-Zehnder,
b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

Figura 4.20. a) Interferómetro Mach-Zehnder,
b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

Figura 4.21. Interferómetro de desplazamiento vectorial, con un haz expandido.

Figura 4.22. Arreglo experimental del interferómetro de desplazamiento vectorial utilizando el haz bajo prueba expandido.

Figura 4.23. Interferogramas de desplazamiento vectorial
a) desplazamiento $\Delta x = -1.37\text{mm}$, $\Delta y = 0\text{mm}$,
b) desplazamiento $\Delta x = -2.28\text{mm}$, $\Delta y = 0\text{mm}$.

Figura 4.24. Interferogramas de desplazamiento vectorial
a) desplazamiento $\Delta\rho = 1.14\text{mm}$ y $\theta = 0^\circ$,
b) desplazamiento $\Delta\rho = 2.28\text{mm}$ y $\theta = 0^\circ$.

Figura 4.25. Incidencia perpendicular en el sistema director.

Apéndice A

Figura A.1. Vista lateral y frontal de un prisma de cuña.

Lista de tablas

Capítulo 4

- Tabla 4.1.** Valores de los parámetros de los prismas.
- Tabla 4.2.** Desplazamientos $|\Delta\bar{\rho}|$, para diferentes distancias de separación d y ángulos de rotación ϕ de los prismas.
- Tabla 4.3** Valores de las constantes de las aberraciones medidos con el Wyco para una lente biconvexa.
- Tabla 4.4** Valores de las constantes de las aberraciones medidos con el Wyco para el doblete.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

El fenómeno de interferencia está intrínsecamente ligado a la naturaleza ondulatoria de la luz. Además, ha tenido una considerable influencia en el desarrollo de la física. Las observaciones de Young, y el razonamiento de la interferencia de las ondas que atraviesan dos orificios, fundamentan la teoría ondulatoria de la luz de Fresnel. Más aún, el experimento de Young ha sido usado para fundamentar la teoría moderna de coherencia. La teoría especial de la relatividad de Einstein se sustenta en el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley (Steel [1986]).

La interferometría es una de las herramientas fundamentales de la física experimental moderna. Sus aplicaciones se extienden a varias ramas de la ciencia. En 1907 Michelson obtuvo el premio Nóbel de física por “su instrumento óptico de precisión y las investigaciones espectroscópicas y metrológicas que llevó a cabo con él”, en la región visible del espectro electromagnético. Posteriormente se desarrollaron aplicaciones en otras regiones del espectro. Cabe resaltar que la interferencia en el infrarrojo es la más moderna de estas técnicas.

Un haz representa el camino que siguen un conjunto de ondas electromagnéticas. El frente de onda se refiere a la superficie que une todos los puntos de igual fase de un haz. Para que exista interferencia entre dos frentes de onda es necesario que estos sean mutuamente coherentes (tanto temporal como espacialmente). La coherencia temporal está ligada a la monocromaticidad del haz. Es decir, la frecuencia y la fase se mantienen estables en su dirección de propagación. La coherencia espacial se refiere al tamaño finito de la fuente. Esta representa el grado de correlación que existe entre ondas a lo largo del frente de onda, ortogonalmente a la dirección de propagación.

Cuando no existe coherencia entre dos frentes de onda, la diferencia de fases varía aleatoriamente. Por lo tanto, no se observa interferencia donde se superponen. Al contrario, si hay coherencia entre los dos frentes de onda que se superponen, se observan franjas brillantes u oscuras. Las franjas brillantes (interferencia constructiva) aparecen en las regiones donde no hay diferencia de fase entre los frentes de onda ($\delta = 0$) o es múltiplo de 2π ($\delta = 2m\pi$). Las franjas oscuras (interferencia destructiva) ocurren donde la diferencia de fase es múltiplo de $\delta = (2m + 1)\pi$.

Los parámetros para caracterizar las franjas son:

- a) Posición de las franjas.

Gracias a la posición de las franjas, es posible derivar la diferencia de fase o las variaciones de fase. La determinación de la posición de las franjas tiene aplicaciones en diversos campos. Como son la medición de longitudes, refractometría, estimación de la velocidad de la luz, microscopía por interferencia, microtopografía, pruebas ópticas y hologramas de interferencia.

b) Visibilidad de las franjas

De la visibilidad se conoce la distribución espacial y el espectro de la fuente.

c) Distribución de intensidad.

En este caso las aplicaciones son: espectroscopia, la función de transferencia óptica y la radioastronomía.

La aplicación que ha tenido el mayor desarrollo es la interferometría óptica para examinar y evaluar la calidad de superficies. La longitud de onda habilita la realización de mediciones extremadamente exactas de los contornos y la planicidad de una superficie.

La interferometría tiene la ventaja de ser no invasiva. Es decir no hay contacto con el objeto, lo cual podría ocasionar deformación, daño o ralladuras en la superficie. En contraparte otras técnicas como la perfilometría, donde el elemento sensor se desliza a través de la superficie analizada, ejercen presión (desgaste) sobre el objeto. Otra técnica es la microscopia óptica, que resuelve detalles muy finos pero no puede determinar la altura de los elementos en la imagen.

La característica más poderosa de la interferometría es su grado de detalle. Éste es función del frente de onda generado por la reflexión de la luz en una superficie, o por la transmisión de la luz a través de materiales dieléctricos. En condiciones ideales se pueden detectar irregularidades en superficies del orden de nanómetros (10^{-9} m). Todas estas mediciones se basan en el análisis de interferogramas (Yoshida [1998], Farrant [2003]).

Los interferogramas son patrones luminosos de franjas brillantes y oscuras. Generalmente representan el contorno o perfil topográfico de la superficie. Su interpretación requiere de análisis especializados.

El gran avance de la informática para la adquisición y procesamiento digital de imágenes, han mejorado, en sobre medida, el análisis de los interferogramas.

El primer interferómetro fue construido por Michelson en 1880, y lo utilizó para medir la velocidad de la tierra a través del éter. Sin embargo ocurrió todo lo contrario, se demostró la inexistencia del éter pero se pudo medir la velocidad de la luz en el vacío.

Posteriormente F. Twyman y A. Green patentaron una modificación al interferómetro de Michelson, y es hasta ahora un instrumento de gran importancia en el terreno de pruebas ópticas.

El interferómetro Mach-Zehnder fue utilizado durante la segunda guerra mundial por los Alemanes, en el estudio de flujos de aire alrededor de modelos de aeroplanos. También es ampliamente utilizado para determinar la relación entre variaciones de presión, temperatura o concentraciones en función del cambio en el índice de refracción (Hariharan [1985]).

El interferómetro Fabry-Perot produce franjas de interferencia muy finas que dan información sobre el espectro de frecuencias de la luz bajo estudio. Se utiliza ampliamente en espectroscopia de alta resolución.

Recientemente se han desarrollado sistemas ópticos de tamaño inusual que incorporan componentes de gran diámetro y sin simetría de rotación (tales como espejos segmentados o diluidos). Estas configuraciones requieren de pruebas ópticas novedosas, porque las técnicas tradicionales utilizan componentes de referencia de alta calidad y costo. Los interferómetros de desplazamiento representan una solución a este problema (Paez [2000]).

Los interferómetros tradicionales requieren de un frente de onda de referencia de alta calidad. En los interferómetros de desplazamiento, el frente de onda bajo prueba es comparado consigo mismo. La interferencia de los frentes de onda resulta en un interferograma que representa el diferencial total de la función del frente de onda. Cuando se prueban componentes sin simetría de rotación es posible seleccionar la dirección del desplazamiento para la cual la densidad de franjas es alta. Debido a la posibilidad de seleccionar el camino de la integral de línea en la reconstrucción del frente de onda, el desplazamiento en una dirección arbitraria se puede descomponer en las direcciones x y y , encontrando el diferencial total de la función del frente de onda (Torales [2001]).

En los últimos años se han propuesto y desarrollado interferómetros de desplazamiento para diversas aplicaciones: estudio de frentes de onda con simetría rotacional (Malacara [1968]), interferómetro de desplazamiento basado en el interferómetro de Michelson para pruebas de sistemas ópticos (Murty [1970]), interferómetro de desplazamiento lateral para luz infrarroja y visible (Lewandowski [1989]), interferómetro de desplazamiento rotacional para la detección de planetas fuera del sistema solar (Scholl [1996]), e interferómetro de desplazamiento vectorial para pruebas de componentes ópticos con simetría de rotación fuera de eje (Paez [2000]), solo por citar algunos.

1.2 Objetivos

Diseño y caracterización de un sistema de desplazamiento lateral del frente de onda para un interferómetro de desplazamiento vectorial.

Los objetivos particulares de esta tesis son los siguientes:

1. Análisis del sistema director por medio de trazo exacto de rayos para conocer el desplazamiento del frente de onda.
2. Probar una nueva configuración que permite desplazamientos lineales y no introduce tilt adicional al sistema.
3. Comparación entre los resultados simulados por software y los obtenidos experimentalmente con el interferómetro propuesto, para analizar la factibilidad del interferómetro de desplazamiento vectorial.
4. Desarrollo de pruebas ópticas a componentes ópticos con y sin simetría de rotación.

1.3 Justificación

Un elemento óptico asimétrico tiene la función de dos o más elementos ópticos con simetría rotacional. Por lo que son una solución óptima a problemas tecnológicos específicos. Sin embargo, los elementos ópticos sin simetría de rotación son difíciles de probar con la tecnología actual.

Para determinar la calidad y funcionamiento de componentes ópticos, se analizan las aberraciones del frente de onda generadas a lo largo de su propagación y refracción. Las aberraciones de un frente de onda pueden detectarse mediante el uso de un interferómetro y analizando el patrón de franjas registrado en el interferograma correspondiente.

El interferómetro de desplazamiento vectorial con desplazamiento ajustable, permite la detección de aberraciones en un frente de onda (simétricos o no). El desplazamiento ajustable permite seleccionar la dirección y la densidad de las franjas. El control sobre la densidad y orientación de las franjas facilita la implementación de algoritmos de recuperación con mayor exactitud del frente de onda.

Referencias del capítulo 1

Steel, W. H., “Interferometry”, second edition, Cambridge University Press, Great Britain, (1986).

Yoshida, S., Muhamad, M., Widiastuti, R., Kusnowo, A., “Optical interferometric technique for deformation analysis”, *Opt. Exp*, 2(13), pp. 516-530 (1998).

Farrant D. I., Petzing, J. N., “Sensitivity Errors in Interferometric Deformation Metrology”, *Appl. Opt.* 42(28), pp. 5634-5641 (2003).

Paez, G., Strojnik, M., Torales, G. G., “Vectorial shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 39, pp. 5172-5178 (2000).

Torales, G. G., Paez, G., Strojnik, M., “Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer”, *Opt. Eng.*, 40(5), pp. 767-773 (2001).

Malacara, D., Mendez, M., “Lateral shearing interferometry of wavefronts having rotational symmetry”, *Opt. Acta*, 15(1), pp. 59-63 (1968).

Murty, M. V. R. K., “A compact Lateral Shearing Interferometer Based on the Michelson Interferometer”, *Appl. Opt.* 9(5), pp. 1146-1148 (1970).

Lewandowski, J., "Lateral shear interferometer for infrared and visible light", *Appl. Opt.* 28(12), pp 2373-2380 (1989).

Scholl, M. S., "Signal generated by an extra-solar-system planet detected by a rotating rotationally shearing interferometer", *J. Opt. Soc. Am A*, 13(7), pp 1584-1592 (1996).

Hariharan, P., "Optical Interferometry", Academic Press, Australia, 1985.

Capítulo 2

Fundamentos de interferometría

2.1 Introducción

La interferencia se manifiesta en la naturaleza de muchas formas, en las distribuciones de color que resplandecen sobre una mancha de aceite, en la interacción de las ondulaciones de la superficie en un estanque de agua, etc. La interferencia de ondas electromagnéticas se rige por el principio de superposición. La irradiancia de la onda electromagnética resultante en un punto en el espacio, donde dos o más ondas de luz se superponen, es igual a la suma vectorial de las perturbaciones individuales. En este capítulo presentamos una introducción al fundamento físico de la interferencia de dos ondas monocromáticas.

Además se analizan las condiciones para que este fenómeno se manifieste. De entre la multitud de sistemas ópticos que producen interferencia, presentaremos algunos de los más importantes. Los sistemas interferométricos pueden ser categorizados de diversas maneras, una de ellas es la siguiente: por división de frente de onda y por división de amplitud.

2.2 Ondas

2.2.1 Ecuación de onda

Una onda es una perturbación del medio, que se propaga. El tipo de ondas de nuestro interés son transversales, que desplazan el medio en una dirección perpendicular al movimiento de la onda. En la figura 2.1 una onda unidimensional de forma arbitraria viaja junto con el sistema de coordenadas $O_v(x_v, y_v)$ y puede ser descrita con la ecuación (2.2.1)

$$y_v = f(x_v). \quad (2.2.1)$$

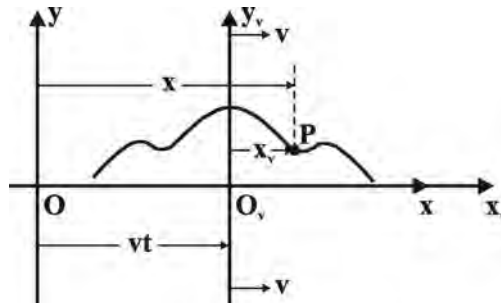


Figura 2.1. Onda viajando a velocidad constante v .

La onda se mueve a la derecha a lo largo del eje X con una velocidad constante v , relativa al sistema de coordenadas fijo $O(x, y)$. Mantiene su forma al moverse y cualquier punto $P(x_v, y_v)$ puede describirse en los dos sistemas. La relación entre las abscisas X y X_v es:

$$x_v = x - vt. \quad (2.2.2)$$

La ordenada Y es idéntica en ambos sistemas.

Para el sistema de coordenadas fijo el movimiento de la onda tiene la forma:

$$y = y_v = f(x_v) = f(x \pm vt). \quad (2.2.3)$$

Si la onda se mueve a la izquierda el signo de v se invierte. La ecuación (2.2.3) es la forma general de una onda viajando (Pedrotti [1993]).

De la ecuación (2.2.2) las derivadas parciales en el espacio y en el tiempo son:

$$\frac{\partial x_v}{\partial x} = 1 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial x_v}{\partial t} = \pm v. \quad (2.2.5)$$

En la derivada espacial de la Ec. (2.2.4) empleamos la regla de la cadena

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_v}. \quad (2.2.6)$$

En la segunda derivada espacial usamos nuevamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\partial y / \partial x)}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial x} \quad (2.2.7a)$$

y sustituimos las Ecs. (2.2.4) y (2.2.6) en la Ec. (2.2.7a)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \right) (\pm v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_v^2}. \quad (2.2.7b)$$

Utilizando el procedimiento anterior, la primera y segunda derivada en el tiempo son:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x_v} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\partial y / \partial t)}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_v} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x_v} \right) (\pm v) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_v^2}. \quad (2.2.9)$$

Sustituimos la ecuación (2.2.7b) en la parte derecha de la ecuación (2.2.9), para obtener la ecuación diferencial de una onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.2.10)$$

Cualquier onda de la forma de la ecuación (2.2.3) que satisface la ecuación diferencial (2.2.10) representa físicamente una onda que viaja (Hecht [2000]).

2.2.2 Ondas armónicas

Un tipo especial de ondas que satisfacen la ecuación diferencial (2.2.10) son las ondas armónicas:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}[k(x - vt)]. \quad (2.2.11)$$

La ecuación (2.2.11) representa una onda de amplitud A , moviéndose a lo largo de la dirección X con velocidad v . Dado que el argumento de una función sinusoidal debe ser adimensional, se introduce el término k con unidades $[\text{m}^{-1}]$.

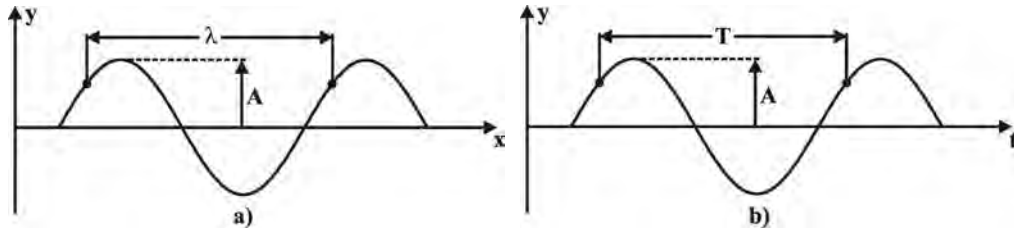


Figura 2.2. Onda armónica: a) temporalmente constante, b) espacialmente constante.

Las ondas armónicas repiten su forma tanto espacial como temporalmente, como se muestra en la figura 2.2. En el espacio, la ecuación (2.2.11) repite su forma cada longitud de onda λ . Matemáticamente la onda se repite cada vez que el argumento de la función seno se incrementa en 2π

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}\{k[(x + \lambda) + vt]\} = A \operatorname{sen}[k(x + vt) + 2\pi]. \quad (2.2.12)$$

Por lo tanto de la ecuación (2.2.12) se obtiene:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.2.13)$$

a k se le llama también constante de propagación.

Por otro lado, la repetitividad de una onda armónica en el tiempo se da cada periodo T , y el argumento de la función seno se repite cada vez que se incrementa en 2π

$$\psi(x, y) = A \operatorname{sen} \left\{ k[x + v(t + T)] \right\} = A \operatorname{sen} [k(x + vt) + 2\pi]. \quad (2.2.14)$$

De la ecuación (2.2.14) deducimos que

$$kvT = 2\pi. \quad (2.2.15)$$

Sustituimos la ecuación (2.2.13) en la ecuación (2.2.15)

$$v = \frac{2\pi}{kT} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu. \quad (2.2.16)$$

La ecuación (2.2.16) relaciona la velocidad v de la onda con su longitud de onda λ y frecuencia ν .

Sustituimos las Ecs. (2.2.13) y (2.2.16) en la Ec. (2.2.11)

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}[kx + kv t] = A \operatorname{sen}\left[kx + \frac{2\pi}{T} t\right] = A \operatorname{sen}[kx + 2\pi\nu t]. \quad (2.2.17)$$

Aquí $2\pi\nu = \omega$ (frecuencia angular). Otra forma de representar la ecuación de onda (2.2.11)

es:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}[kx + \omega t]. \quad (2.2.18)$$

En un determinado tiempo (por ejemplo $t = 0$), la extensión espacial de una onda es:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}(kx). \quad (2.2.19)$$

Las superficies de igual fase son una familia de planos como se observa en la figura 2.3, y constituyen los frentes de onda (Pedrotti [1993]).

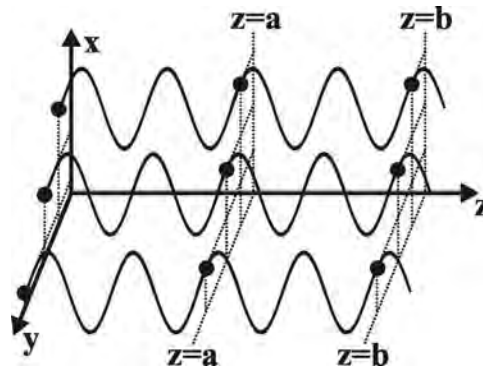


Figura 2.3. Ondas planas a lo largo del eje z.

La forma tridimensional de la onda viajera de la ecuación (2.2.18) está dada por:

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t). \quad (2.2.20)$$

La ecuación (2.2.20) representa una onda que se propaga en una dirección \vec{k} .

En la siguiente sección demostramos que las ondas electromagnéticas son un caso particular de las ondas armónicas.

2.2.3 Ondas electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell que describen la relación entre los campos eléctricos y magnéticos son: (Pedrotti [1993])

$$\nabla \times \vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma \vec{E} \quad (2.2.21a)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (2.2.21b)$$

Aquí \vec{H} es el vector intensidad magnética ($\vec{B} = \mu \vec{H}$), \vec{D} es el vector desplazamiento eléctrico, ϵ es la permitividad eléctrica y μ es la permeabilidad magnética,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.2.21c)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.2.21d)$$

donde σ es la conductividad eléctrica.

Con las ecuaciones (2.2.21a), (2.2.21b), (2.2.21c) y (2.2.21d) podemos obtener las ecuaciones diferenciales de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.22)$$

Por lo tanto es posible representar a una onda electromagnética como onda armónica de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.2.23a)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (2.2.23b)$$

Aquí \vec{E} y \vec{B} representan el campo eléctrico y magnético de la onda respectivamente, \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son sus amplitudes. Las componentes de la onda electromagnética viajan con el mismo vector de propagación \vec{k} como se muestra en la figura 2.4.

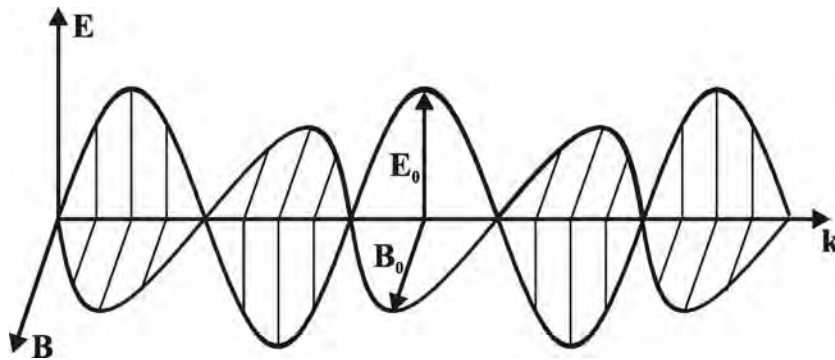


Figura 2.4. Onda electromagnética. El campo eléctrico \mathbf{E} , el campo magnético \mathbf{B} y el vector de propagación \mathbf{k} , son mutuamente ortogonales.

2.3 Interferencia de ondas electromagnéticas

Se puede demostrar con facilidad, que si ψ_1 y ψ_2 son soluciones independientes de la ecuación diferencial de onda, luego:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.3.2)$$

Entonces la combinación lineal

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2 \quad (2.3.2)$$

donde a y b son constantes, es también una solución (Pedrotti [1993]).

La superposición de ondas electromagnéticas puede expresarse en términos de su campo eléctrico o magnético, utilizando las ecuaciones vectoriales

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2.3.3a)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (2.3.3b)$$

Donde cada vector del campo eléctrico en la ec. (2.3.3a) tienen la forma armónica:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \quad (2.3.4)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2) \quad (2.3.5)$$

aquí \vec{k}_1 y \vec{k}_2 son los vectores de propagación, ϵ_1 y ϵ_2 son las fases iniciales de cada onda respectivamente.

Para detectar y observar físicamente los efectos de la interferencia calculamos la irradiancia resultante. Es decir el flujo de potencia promedio temporal de la cantidad de energía que atraviesa por unidad de tiempo una unidad de área perpendicular a la dirección del flujo de energía, esto es (Pedrotti [1993])

$$I = \epsilon \langle \vec{E}^2 \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.6)$$

Donde c es la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Sustituimos la Ec. (2.3.3a) en la Ec. (2.3.6)

$$I = \epsilon \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \epsilon \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.7)$$

Desarrollamos el producto punto de (2.3.7)

$$I = \epsilon \langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \rangle \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.8a)$$

$$I = \epsilon \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \epsilon \langle \vec{E}_2^2 \rangle + \epsilon \langle 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.8b)$$

Los dos primeros términos de la ecuación (2.3.8b) corresponden a las irradiancias I_1 e I_2 de cada onda. Al tercer término lo llamamos término de interferencia I_{12} , y produce un aumento o disminución de la irradiancia, como se demuestra más adelante.

De la ecuación (2.3.8b) el término de interferencia es:

$$I_{12} = \epsilon c \langle 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \rangle. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.9)$$

Sustituimos las Ecs. (2.3.4) y (2.3.5) en la ecuación (2.3.9) y analizamos sólo la parte del promedio temporal:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2) \rangle. \quad (2.3.10)$$

Simplificamos términos en la ecuación (2.3.10)

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(\alpha - \omega t) \cos(\beta - \omega t) \rangle. \quad (2.3.11)$$

Donde:

$$\alpha = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1 \quad (2.3.12a)$$

$$\beta = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2. \quad (2.3.12b)$$

Utilizamos las identidades trigonométricas:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \quad (2.3.13a)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \quad (2.3.13b)$$

en la ecuación (2.3.11)

$$\langle \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 \rangle = \bar{\mathbf{E}}_{01} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{02} \left[\cos(\alpha)\cos(\beta)\langle \cos^2(\omega t) \rangle + \cos(\alpha)\sin(\beta)\langle \cos(\omega t)\sin(\omega t) \rangle + \sin(\alpha)\cos(\beta)\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t) \rangle + \sin(\alpha)\sin(\beta)\langle \sin^2(\omega t) \rangle \right]. \quad (2.3.14)$$

Es fácil demostrar que:

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (2.3.15a)$$

$$\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t) \rangle = 0. \quad (2.3.15b)$$

Sustituimos las Ecs (2.3.15a) y (2.3.15b) en la Ec. (2.3.14) y simplificamos

$$\langle \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_{01} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{02} [\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)] \quad (2.3.16a)$$

$$\langle \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_{01} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{02} \cos(\alpha - \beta). \quad (2.3.16b)$$

Sustituimos las Ecs. (2.3.12a) y (2.3.12b) en la Ec. (2.3.16b)

$$\langle \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_{01} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{02} \cos[(\bar{\mathbf{k}}_1 - \bar{\mathbf{k}}_2) \cdot \bar{\mathbf{r}} + (\epsilon_1 - \epsilon_2)]. \quad (2.3.17)$$

Aquí el argumento del coseno es la diferencia de fase entre \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , que representamos como:

$$\delta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (2.3.18)$$

Finalmente sustituimos las Ecs. (2.3.17) y (2.3.18) en (2.3.9)

$$I_{12} = \epsilon c 2 \frac{\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}}{2} \cos(\delta) = \epsilon c (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.19)$$

La ecuación (2.3.19) muestra que la irradiancia I_{12} es modulada por el coseno de la diferencia de fase entre las ondas. Si el término δ varía aleatoriamente, el valor promedio temporal del término coseno llega a ser cero, las ondas son mutuamente incoherentes y no se observa un patrón de interferencia.

Por otro lado, obtenemos los términos I_1 e I_2 de la ecuación (2.3.8b) como:

$$I_1 = \epsilon c \langle \vec{E}_1^2 \rangle = \epsilon c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle = \epsilon c E_{01}^2 \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.20)$$

$$I_2 = \epsilon c \langle \vec{E}_2^2 \rangle = \epsilon c \langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \epsilon c E_{02}^2. \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.21)$$

En las ecuaciones (2.3.20) y (2.3.21) observamos que las irradiancias I_1 e I_2 son directamente proporcionales a las amplitudes de los campos eléctricos.

Cuando los campos eléctricos de las dos ondas son paralelos ($\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 1$), podemos expresar la ecuación (2.3.19) como:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.22)$$

Finalmente, sustituimos las ecuaciones (2.3.20), (2.3.21) y (2.3.22) en la Ec. (2.3.8b)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.23)$$

Cuando la diferencia de fase δ es igual a un múltiplo entero de 2π existe interferencia constructiva, la irradiancia es máxima. Por otro lado cuando es un múltiplo impar de π , la interferencia es destructiva y por lo tanto la irradiancia es mínima.

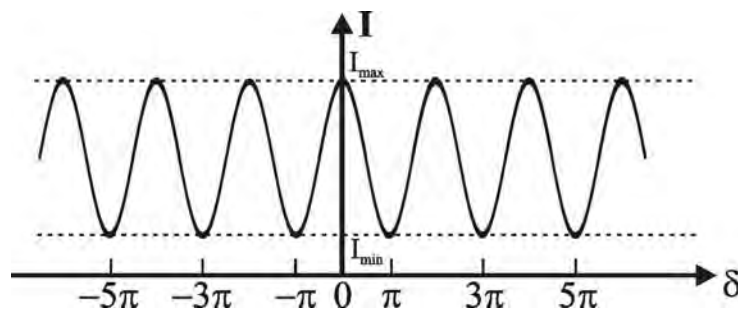


Figura 2.5. Irradiancia de las franjas de interferencia como función de la diferencia de fase δ entre dos ondas.

En la figura 2.5 graficamos la irradiancia de la interferencia de dos ondas en función de la diferencia de fase δ entre dichas ondas, lo cual resulta en franjas periódicas.

La visibilidad de las franjas de interferencia está definida como:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (2.3.24)$$

donde:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.25a)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.25b)$$

2.4 Coherencia temporal y coherencia espacial

Para poder observar la distribución de franjas en un interferograma, es necesario que las frecuencias de las ondas que se superponen sean aproximadamente iguales. Lo anterior debido a que una diferencia de frecuencia significativa resultaría en un desfase de variación rápida y por lo tanto, no se observarían franjas. Para asegurarnos que las ondas tienen la misma frecuencia, utilizamos fuentes cuasi-monocromáticas. Además es necesario que las ondas mantengan su forma durante un tiempo.

El tiempo de coherencia Δt_c de una onda se define como el intervalo temporal en el que podemos predecir razonablemente la fase de la onda en un punto en el espacio. El tiempo de coherencia está relacionado directamente con el ancho de banda ($\Delta\nu$) finito de la fuente por la siguiente relación:

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad [\text{seg}] \quad (2.4.1)$$

La longitud de coherencia de una onda está dada por la ecuación:

$$\ell_c = \frac{c}{\Delta\nu}. \quad [\text{m}] \quad (2.4.2)$$

Si se utiliza una fuente extendida para hacer interferencia es necesario que aparte de coherencia temporal, exista coherencia espacial. La coherencia espacial depende de la extensión finita de la fuente en el espacio. Supongamos una fuente monocromática extendida, donde dos elementos radiantes puntuales están separados una distancia muy grande comparada con la longitud de onda (λ). Ambos elementos aparentemente se comportarían de forma independiente, es decir, no habría correlación entre las fases de las dos perturbaciones emitidas (Hecht [2000]).

Un tipo especial de fuente de radiación que produce ondas cuasi-monocromáticas con alto grado de coherencia temporal y espacial, es el láser. El haz de un láser, por ejemplo He-Ne, con longitud de onda $\lambda = 632.8\text{nm}$, tiene un ancho de banda $\Delta\nu = 1.5\text{GHz}$ y una longitud de coherencia $\ell_c = 20\text{cm}$. Además la fuente produce un haz láser que se mantiene muy delgado.

2.5 Interferencia por división de frente de onda

Dos partes de un frente de onda, coherentes entre sí, se superponen de alguna forma para generar interferencia.

2.5.1 Experimento de Young

Este experimento fue llevado a cabo por Thomas Young en 1802. Consiste en hacer pasar luz monocromática a través de un pequeño orificio S (que es una aproximación a tener una fuente puntual) obteniendo del otro lado del orificio ondas esféricas y espacialmente coherentes. Posteriormente las ondas inciden en un par de orificios cercanos S_1 y S_2 , como se observa en la figura 2.6, dando como resultado un par de fuentes de luz mutuamente coherentes (Pedrotti [1993]). Finalmente se coloca una pantalla a una distancia s de los dos orificios, donde se observa el patrón de franjas de interferencia.

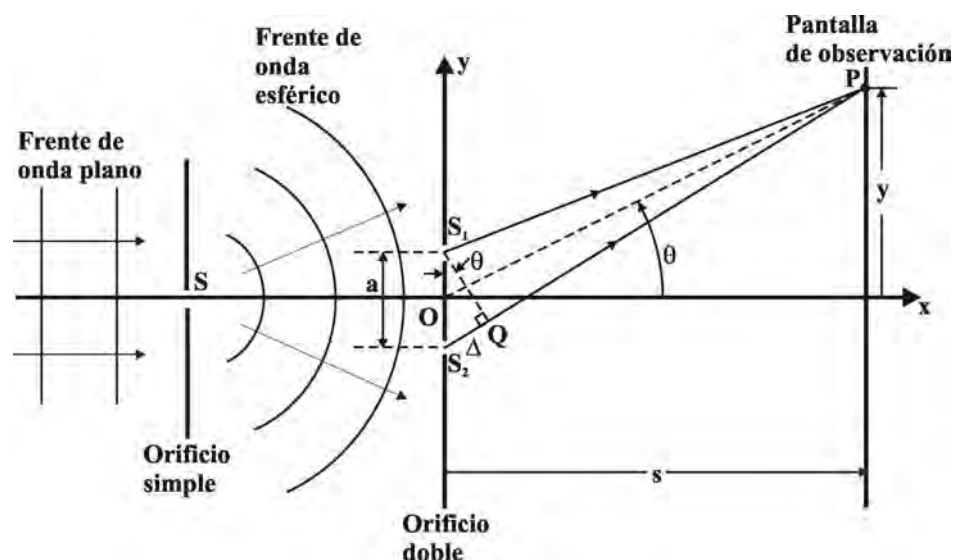


Figura 2.6. Experimento de la doble rendija.

Para encontrar la irradiancia resultante en un punto P de la pantalla, se determina primero la diferencia de fase δ entre los dos rayos incidentes en dicho punto. La diferencia de camino óptico entre los rayos que van de los orificios S_1 y S_2 al punto P de la pantalla es:

$$\text{DCO} = \Delta = S_2P - S_1P. \quad (2.5.1)$$

Cuando la diferencia de camino óptico es nula o múltiplo de la longitud de onda λ , ambas ondas llegan en fase y la irradiancia en el punto P es máxima. Por el contrario, cuando la diferencia de caminos ópticos es $\text{DCO} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ se presenta interferencia destructiva y la irradiancia resultante en el punto P es mínima.

De la figura 2.6, observamos que la diferencia de camino óptico es:

$$\text{DCO} = S_2Q = a \sin(\theta). \quad (2.5.2)$$

La razón entre la diferencia de camino óptico DCO y la diferencia de fase δ es:

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\text{DCO}}{\lambda}. \quad (2.5.3)$$

Despejamos la diferencia de fase de la ecuación (2.5.3)

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\text{DCO} \quad (2.5.4)$$

Hacemos $I_1 = I_2 = I_0$ en la ecuación (2.3.23) y obtenemos:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.5.5)$$

Sustituimos las ecuaciones (2.5.2) y (2.5.4) en (2.5.5)

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{a\pi \text{sen}(\theta)}{\lambda}\right). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.5.6)$$

De la ecuación (2.5.6) se observa que la irradiancia en un punto P está determinada por el ángulo θ , mostrado en la figura 2.6.

Alejando la pantalla, haciendo que la distancia de observación sea mucho más grande que “y”, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\text{sen}(\theta) \cong \tan(\theta) = \frac{y}{s}. \quad (2.5.7)$$

Sustituimos la ecuación (2.5.7) en la ecuación (2.5.6)

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{a\pi y}{\lambda s}\right). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.5.8)$$

La ecuación (2.5.8) muestra que la irradiancia está distribuida a lo largo del eje Y como una función coseno al cuadrado y se observa en la figura 2.7.

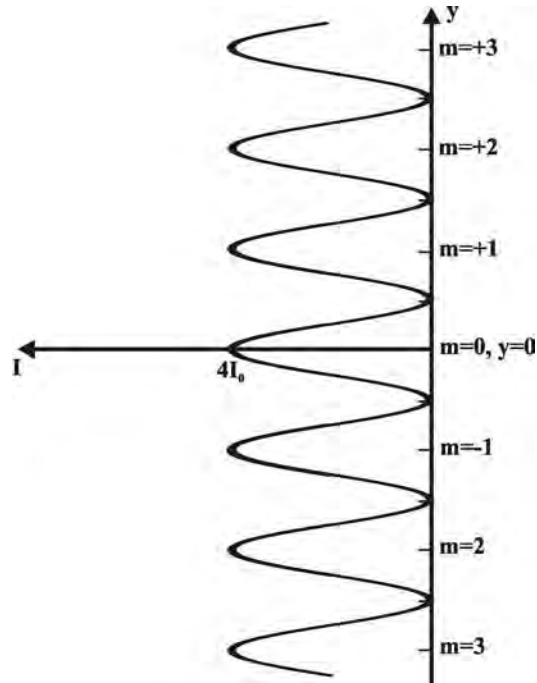


Figura 2.7. Perfil de distribución para la irradiancia en la interferometría de doble rendija.

Los máximos o interferencia constructiva en la ecuación (2.5.8) ocurren cuando:

$$DCO = S_2P - S_1P = m\lambda . \tag{2.5.9}$$

Sustituimos las Ecs. (2.5.2) y (2.5.7) en la Ec. (2.5.9)

$$m\lambda \cong a \frac{y_m}{s} . \tag{2.5.10}$$

De aquí, despejamos

$$y_m \cong \frac{s}{a} m\lambda . \tag{2.5.11}$$

La ecuación (2.5.11) nos indica la posición de la m -ésima franja brillante en la pantalla, se considera el máximo en cero como la franja 0 como se observa en la figura 2.7.

2.5.2 Espejo doble de Fresnel

Otro ejemplo de un interferómetro por división de frente de onda es el doble espejo de Fresnel de la figura 2.8.

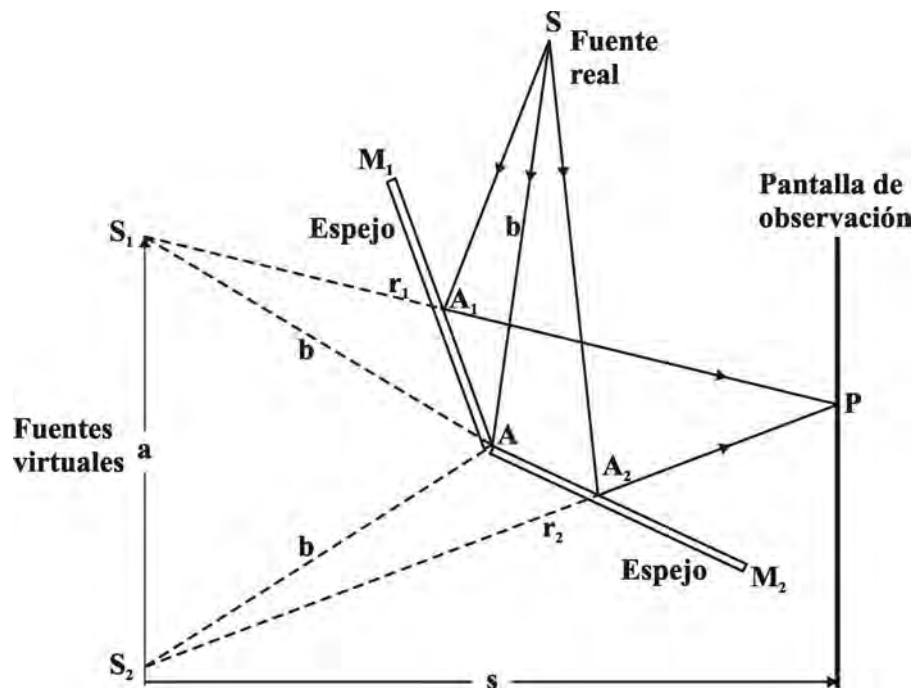


Figura 2.8. Doble espejo de Fresnel.

La luz de una fuente puntual S incide en dos espejos planos M_1 y M_2 inclinados, y subtendiendo un pequeño ángulo α entre ellos. La reflexión de los espejos simula dos fuente puntuales virtuales S_1 y S_2 , separadas entre si una distancia a , las cuales son mutuamente coherentes y que se superponen en una pantalla a una distancia s de las fuentes virtuales (Hecht [2000]).

El plano SS_1S_2 es normal a la línea A de intersección de los espejos. Si $SA = b$, entonces

$$S_1A = S_2A = b. \quad (2.5.12)$$

Los caminos ópticos que siguen los rayos reflejados en cada espejo son:

$$SA_1 + A_1P = r_1$$

$$SA_2 + A_2P = r_2. \quad (2.5.13)$$

Entonces, la diferencia de camino óptico entre los dos rayos es:

$$DCO = r_1 - r_2. \quad (2.5.14)$$

Los máximos de irradiancia en el patrón de franjas resultante aparecen donde DCO es múltiplo entero de la longitud de onda λ . La separación entre franjas está dada por:

$$\Delta y \cong \frac{s}{a} \lambda. \quad (2.5.15)$$

2.5.3 Prisma doble de Fresnel.

Consiste de dos prismas delgados unidos en las bases, como se observa en la figura 2.9. Un frente de onda cilíndrico incide en ambos prismas. La parte superior del frente de onda se refracta hacia abajo mientras que el segmento inferior se refracta hacia arriba. La interferencia se produce en la región de superposición. Nuevamente existen dos fuentes virtuales S_1 y S_2 separadas una distancia a , la cual puede expresarse en términos del ángulo α del prisma (Hecht [2000]).

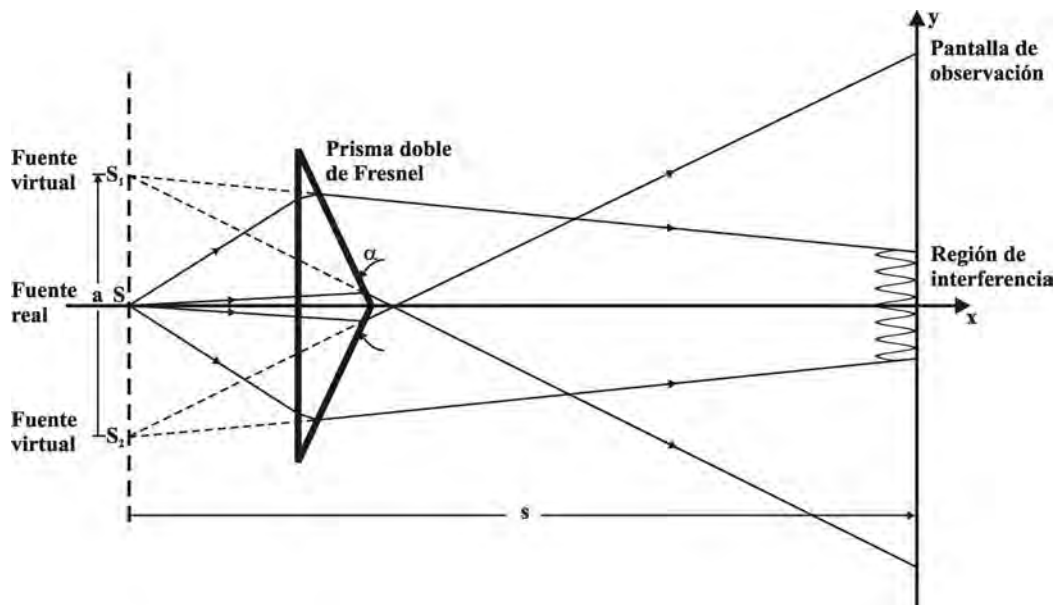


Figura 2.9. Doble prisma de Fresnel.

2.6 Interferencia por división de amplitud de onda

En este caso, la interferencia se genera dividiendo la amplitud del frente de onda. Es decir, parte de la irradiancia del frente de onda se desvía por medio de un semi-espejo (por poner un ejemplo), y la otra parte sigue su trayectoria sin cambio alguno. Posteriormente las dos irradiancias se hacen coincidir, y se superponen para obtener un patrón de franjas.

2.6.1 Franjas de igual inclinación

Cuando la luz incide en una película de un material dieléctrico, ésta se divide en partes que se reflejan y se refractan en las superficies (interfaces) de la película. Suponemos que el material es no absorbente y que los coeficientes de reflexión para la amplitud en las interfaces son bajos. Por lo tanto podemos tomar solo los dos primeros haces reflejados \vec{E}_{1r} y \vec{E}_{2r} , como se observa en la figura 2.10.

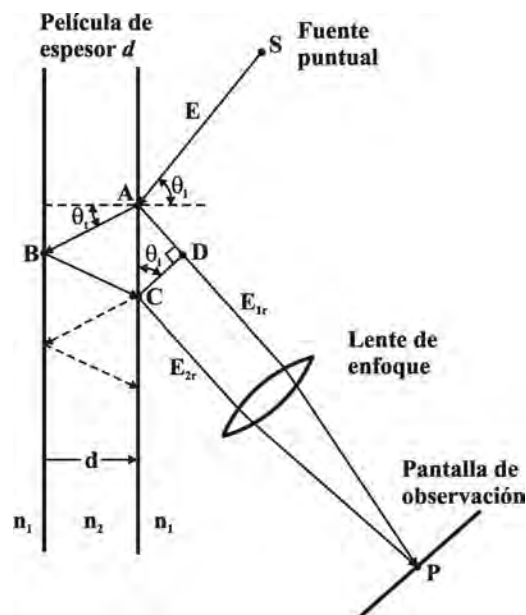


Figura 2.10. Formación de franjas por una película dieléctrica de espesor d .

Así, consideramos a la película como un elemento que divide la amplitud del haz original \vec{E} , en dos haces de menor amplitud \vec{E}_{1r} y \vec{E}_{2r} . Estos haces proceden de dos fuentes coherentes virtuales, colocadas detrás de la película. Los haces reflejados son paralelos entre sí y se les puede hacer converger en un punto P (Hecht [2000]).

La diferencia de camino óptico para los dos primeros rayos reflejados es:

$$DCO = n_2[AB + BC] - n_1AD. \quad (2.6.1)$$

De la figura 2.10 observamos que las distancias:

$$AB = BC = \frac{d}{\cos(\theta_t)}. \quad (2.6.2)$$

Sustituimos la Ec. (2.6.2) en la Ec. (2.6.1)

$$DCO = \frac{2n_2d}{\cos(\theta_t)} - n_1AD. \quad (2.6.3)$$

Por otro lado tenemos que la distancia:

$$AD = AC\text{sen}(\theta_t). \quad (2.6.4)$$

Aplicamos la ley de Snell en la primera superficie y despejamos $\text{sen}(\theta_i)$:

$$\text{sen}(\theta_i) = \frac{n_2}{n_1} \text{sen}(\theta_t). \quad (2.6.5)$$

Sustituimos la ecuación (2.6.5) en la ecuación (2.6.4)

$$AD = AC \frac{n_2}{n_1} \text{sen}(\theta_t). \quad (2.6.6)$$

Además, de la figura 2.10 observamos que la distancia:

$$AC = 2d \tan(\theta_t). \quad (2.6.7)$$

Sustituimos la Ec. (2.6.7) en la Ec. (2.6.6)

$$AD = \frac{2n_2 d \text{sen}^2(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_t)}. \quad (2.6.8)$$

Finalmente sustituimos la Ec. (2.6.8) en la Ec. (2.6.3)

$$DCO = \frac{2n_2 d}{\cos(\theta_t)} - \frac{2n_2 d \text{sen}^2(\theta_t)}{\cos(\theta_t)} = \frac{2n_2 d}{\cos(\theta_t)} [1 - \text{sen}^2(\theta_t)]. \quad (2.6.9)$$

Simplificamos la ecuación (2.6.9) para obtener la diferencia de camino óptico, en función del índice de refracción de la película (n_2), del espesor d y el ángulo de refracción θ_t

$$\text{DCO} = 2n_2d \cos(\theta_t). \quad (2.6.10)$$

La diferencia de fase δ , obtenida con la ecuación (2.6.4) es ahora:

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \text{DCO} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2n_2d \cos(\theta_t) = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d \cos(\theta_t). \quad (2.6.11)$$

Existe un desfase adicional que resulta de las reflexiones involucradas. Esto es, independientemente de la polarización de la onda incidente, los dos haces reflejados sufren un desfase relativo de π radianes (Hecht [2000]), por lo tanto:

$$\delta = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d \cos(\theta_t) \pm \pi. \quad (2.6.12)$$

Obtenemos interferencia constructiva en los puntos donde la diferencia de fase δ es múltiplo de 2π

$$\delta = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d \cos(\theta_t) - \pi = 2m\pi. \quad (2.6.13)$$

Por otro lado la interferencia destructiva se da cuando δ es un múltiplo impar de π .

La diferencia de fase δ es dependiente del ángulo θ_i , o de manera equivalente θ_t . Más aún, está determinada por la posición del punto P. Por lo tanto al cambiar la inclinación de la lente, la posición de las franjas también cambian como se muestra en la figura 2.11. A las franjas que aparecen en los puntos P_1 y P_2 se les denominan franjas de igual inclinación.

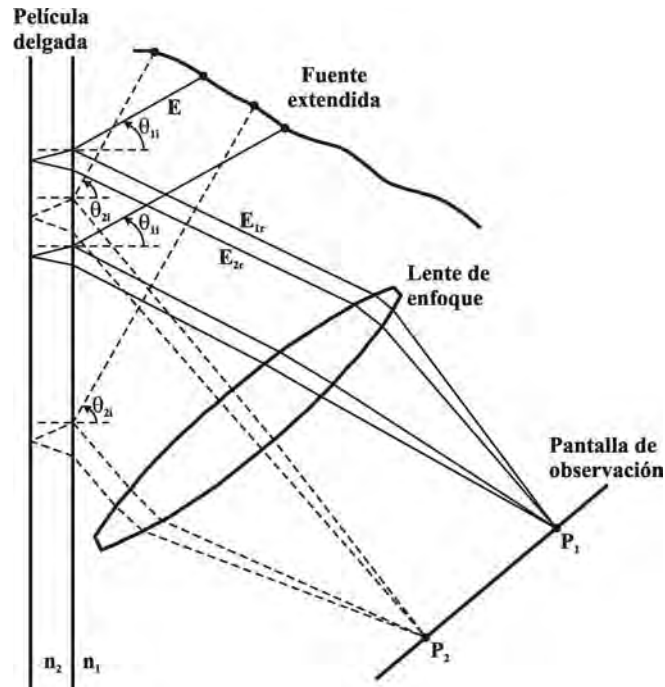


Figura 2.11. Formación de franjas de igual inclinación a diferentes ángulos de incidencia θ_i .

2.6.2 Franjas de igual espesor

Cuando una superficie plana se pone en contacto con un plano óptico, por ejemplo, el espacio lleno de aire entre las superficies genera figuras de interferencia (interferogramas). Si la superficie es verdaderamente plana y se coloca un espaciador delgado entre las superficies, se forman una serie de franjas rectas e igualmente espaciadas, lo cual se debe a la formación de una película de aire con forma de cuña entre las dos superficies. Cada franja es entonces el lugar geométrico de todos los puntos en la película de aire cuyo espesor óptico es constante (Hecht [2000]).

En una película de espesor variable d , la diferencia de camino óptico DCO de la ecuación (2.6.10) se modifica sin que el ángulo de observación (θ_i) cambie. Si se fija a incidencia normal la dirección de la luz que ilumina la película como en la figura 2.12, las franjas del interferograma estarán asociadas al espesor de la película y se denominan franjas de Fizeau (Pedrotti [1993]).

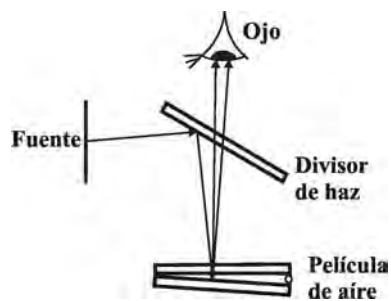


Figura 2.12. Franjas de igual espesor.

En incidencia normal la ecuación (2.6.10) queda como:

$$\text{DCO} = 2n_2d . \quad (2.6.14)$$

Entonces, las franjas se presentan cuando:

$$2n_2d + \Delta_r = \begin{cases} m\lambda & \text{brillante} \\ \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda & \text{oscura.} \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Aquí Δ_r es $\lambda/2$ o 0, dependiendo si hay o no un desplazamiento de fase relativo de π entre los rayos reflejados desde las superficies superior e inferior de la película.

En la figura 2.13 se observa que si una de las superficies es esférica y la otra plana, el patrón de franjas resulta en anillos, llamados anillos de Newton. La uniformidad en la distribución de círculos concéntricos es una medida del nivel de perfección en la forma de la lente (Pedrotti [1993]).

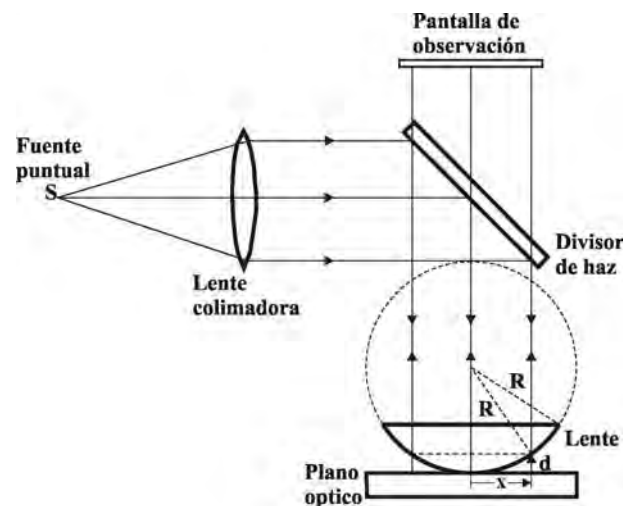


Figura 2.13. Anillos de Newton.

Siendo R el radio de curvatura de la superficie esférica, la relación entre la distancia x y el espesor d de la película está dado por:

$$x^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2. \quad (2.6.16)$$

Dado que el radio de curvatura R es mucho mayor que el espesor d de la película, podemos simplificar la ecuación (2.6.16)

$$x^2 = 2Rd. \quad (2.6.17)$$

La interferencia constructiva de orden m -ésimo ocurre donde:

$$2n_2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda. \quad (2.6.18)$$

El radio del anillo brillante m -ésimo se calcula combinando las expresiones (2.6.18) y (2.6.17)

$$x_m = \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n_2} R \right]^{1/2}. \quad (2.6.19)$$

El radio del anillo oscuro m -ésimo es:

$$x_m = \left(\frac{m\lambda R}{n_2} \right)^{1/2}. \quad (2.6.20)$$

2.7 Interferómetro Mach-Zehnder

Los elementos de un interferómetro Mach-Zehnder son: una fuente de luz coherente, un expansor de haz, un filtro espacial, dos divisores de haz (DH1 y DH2), y dos espejos (E1 y E2), como se muestra en la figura 2.14. A diferencia del interferómetro de Michelson, en el Mach-Zehnder la radiación electromagnética se divide en dos haces que viajan caminos separados (Tolansky [1955]).

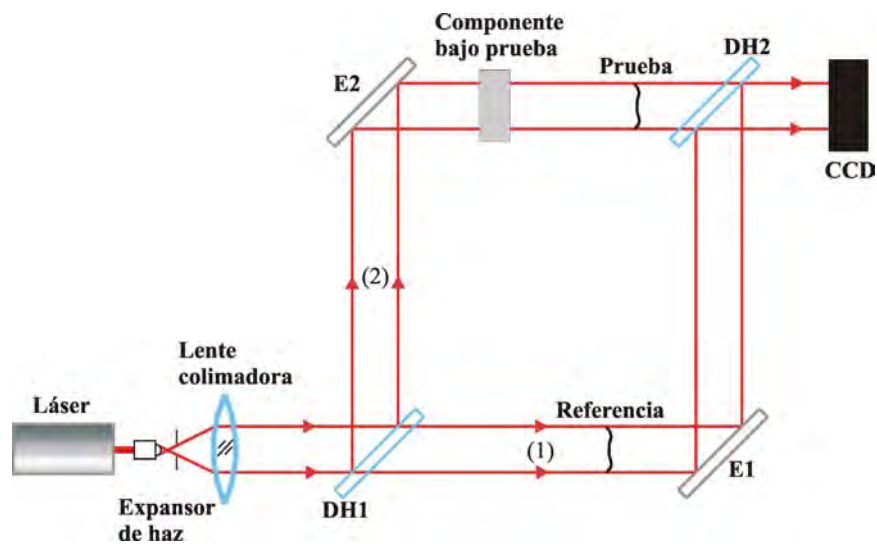


Figura 2.14. Interferómetro Mach-Zehnder.

El haz que incide en la placa semi-reflejante DH1 se divide en dos partes. El espejo E1 refleja el primer haz, lo dirige hacia el segundo divisor de haz DH2. El espejo E2 refleja el segundo haz hacia la lente bajo prueba, que lo transmite al segundo divisor de haz, que lo refleja de nuevo para superponerse con el primer haz.

Para obtener franjas de interferencia con un haz expandido, se coloca una fuente puntual S en el foco de una lente positiva L_1 . Lo anterior, para iluminar con un haz colimado el divisor de haz DH_1 (como se observa en la figura 2.15). El espejo E_1 está ligeramente

inclinado, tanto con respecto al otro espejo como a los dos divisores de haz. W_1 y W_2 representan los planos de los frentes de onda correspondiente a los haces 1 y 2. El plano W_2' es la imagen virtual de W_2 en el segundo divisor de haz DH_2 .

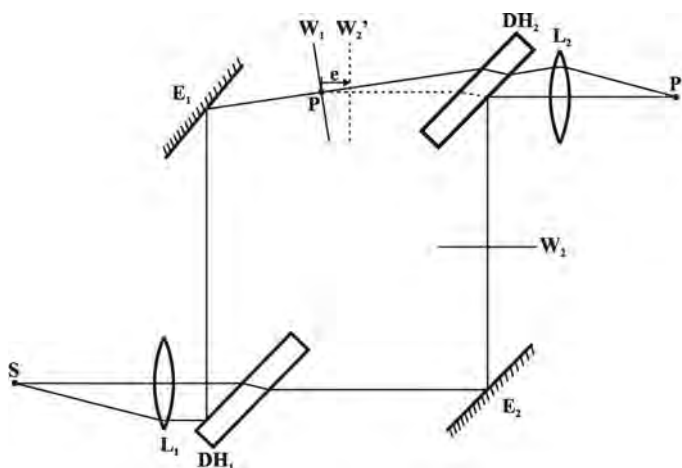


Figura 2.15. Localización de franjas en un interferómetro Mach-Zehnder.

La diferencia de fase entre W_1 y W_2' en el punto P es:

$$\Delta\phi = kne. \quad (2.7.1)$$

Aquí, e es la distancia del punto P a W_2' y n es el índice de refracción del medio entre W_1 y W_2' . Si P y P' son dos puntos conjugados de la lente L_2 , es posible observar las franjas en P'. En este caso se observan franjas de cuña formadas por la interferencia de los planos W_1 y W_2' (Francon [1966]).

Las franjas brillantes corresponden a $ne = m\lambda$, y las franjas oscuras a $ne = (m + \frac{1}{2})\lambda$.

Cuando los frentes de onda de ambos brazos del interferómetro son paralelos, las franjas están localizadas en el infinito (Hariharan [1985]).

2.8 Conclusiones

El fenómeno de interferencia de ondas electromagnéticas se debe a la interacción de dos o más ondas. Éstas producen una irradiancia resultante que varía de la suma de las irradiancias individuales. Las frecuencias de las ondas que interfieren deben ser aproximadamente iguales (coherencia temporal). Una diferencia de frecuencia resultaría en un desfase de variación rápida y dependiente del tiempo. Lo cual haría que el término I_{12} , de la ecuación de irradiancia (2.3.9), promediara cero durante el intervalo de detección. Otra condición necesaria para que exista interferencia, es la coherencia espacial (por ejemplo, que las ondas provengan de la misma fuente).

La distribución del patrón de franjas obtenida con un interferómetro, está directamente relacionada con la diferencia de camino óptico entre los frentes de onda. La diferencia de camino óptico puede deberse a la deformación de uno de los frentes de onda. Luego de transmitirse o reflejarse por una componente óptica (lente, espejo, etc). La distancia entre franjas es el equivalente a una longitud de onda de la radiación electromagnética utilizada. Además es posible detectar deformaciones de un frente de onda al superponerlo a otro considerado “plano”.

Referencias del capítulo 2

Pedrotti, F. L., Pedrotti, L. S., "Introduction to Optics", second edition, Prentice Hall, USA, 1993. Chap. IX, X, XI.

Hecht, E., "Óptica", tercera edición, Addison Wesley, España, 2000. Chap. II, VII, IX.

Hariharan, P., "Optical Interferometry", Academic Press, Australia, 1985. Chap. II.

Francon, M., "Optical Interferometry", Academic Press, USA, 1966. Chap. IV.

Tolansky, S., "An Introduction to Interferometry", Longmans Green and Co. LTD, Great Britain, 1955. pp. 115-117.

Capítulo 3

Interferómetro de desplazamiento

3.1 Introducción

La técnica de interferometría de desplazamiento nos permite la reconstrucción de un frente de onda $W(x,y)$ (que se compara consigo mismo), sin utilizar una referencia de alta calidad. El frente de onda bajo prueba se divide en dos partes: una parte se propaga sin cambios y la otra parte es modificada en alguno de sus parámetros. A continuación, se superponen ambas partes y se obtiene el patrón de interferencia (Páez [2000]).

Existen diversos tipos de interferómetros de desplazamiento: radial, rotacional, lateral, vectorial y de inversión de frente de onda. Este último es un caso especial del interferómetro rotacional pero con un ángulo de desplazamiento igual a 180° .

3.2 Interferómetro de desplazamiento radial

En el interferómetro Mach-Zehnder de la figura 3.1 los componentes del sistema S_1 expanden uno de los frentes de onda. Las lentes del sistema S_2 contraen el otro frente de onda. Posteriormente en el divisor de haz (DH2) se superponen ambos frentes.

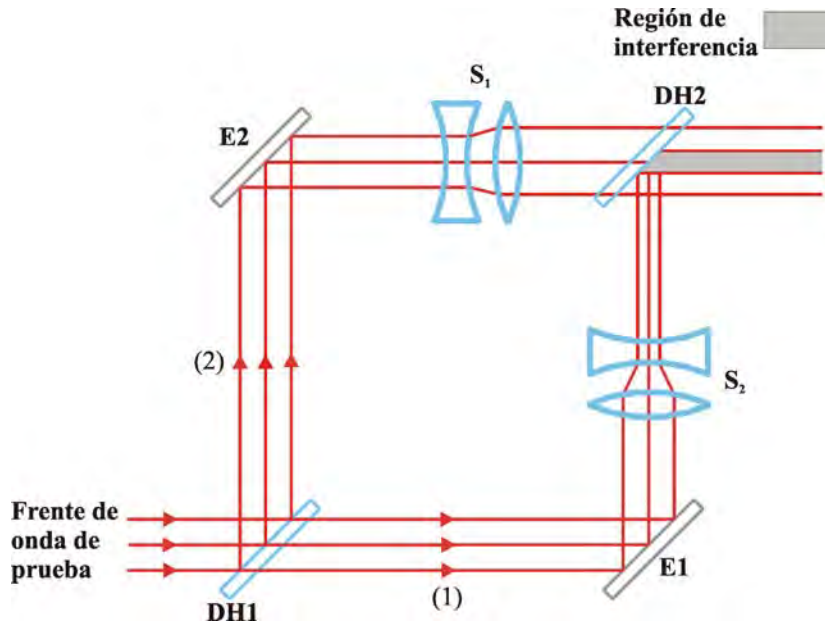


Figura 3.1. Esquema de un interferómetro de desplazamiento radial.

Un frente de onda se contrae por un factor ($S_c < 1$), donde:

$$S_c = \frac{\rho}{\rho'}. \quad (3.2.1)$$

Aquí ρ es la razón de la distancia radial de un punto en el patrón de interferencia, al máximo radio del frente de onda sin contraer. Y ρ' es la razón de un punto en el patrón de interferencia, al máximo radio del frente de onda contraído (Malacara [1992]).

El frente de onda que se contrae puede escribirse como:

$$W(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \rho^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (3.2.2)$$

Ademas, el otro frente de onda se expande por un factor ($S_e \geq 1$), donde:

$$S_e = \frac{\rho}{\rho''} \quad (3.2.3)$$

y la forma del frente de onda puede escribirse como:

$$W(\rho'', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \rho''^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (3.2.4)$$

El patrón de interferencia está dado por la diferencia de camino óptico (DCO)

$$\text{DCO} = W(\rho', \theta) - W(\rho'', \theta) \quad (3.2.5a)$$

$$\text{DCO} = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n (1 - R^n) \rho''^n [a_{n\ell} \cos(\ell\theta) + b_{n\ell} \text{sen}(\ell\theta)]. \quad (3.2.5b)$$

Aquí R es el desplazamiento radial efectivo, definido como:

$$R = \frac{S_c}{S_e}. \quad (3.2.6)$$

La sensibilidad σ de un interferómetro de desplazamiento está definida como el menor desplazamiento que produce un cambio en el patrón de franjas, detectable por el instrumento (Rastogi [1997]).

La sensibilidad en el interferómetro de desplazamiento radial se expresa con la ecuación:

$$\sigma = \frac{d(\text{DCO})/d\rho'}{dW(\rho', \theta)/d\rho'} \quad (3.2.7a)$$

$$\sigma_{n,\ell} = 1 - R^n. \quad (3.2.7b)$$

La gráfica de la figura 3.2 muestra la sensibilidad relativa σ como función del desplazamiento radial efectivo R , para diferentes tipos de aberraciones (Malacara [1992]).

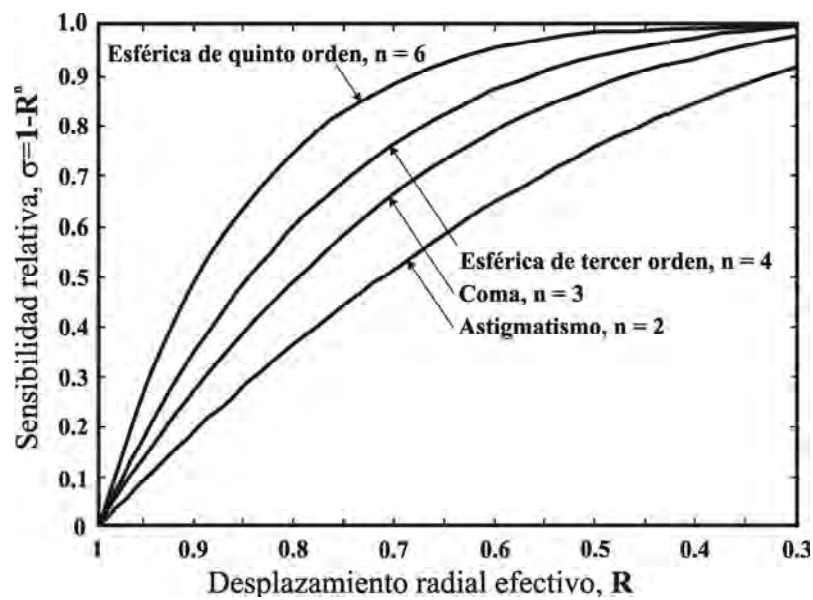


Figura 3.2. Gráfica de sensibilidad σ como función del desplazamiento R .

El interferómetro de desplazamiento radial se utiliza en la medición de frentes de onda aberrados. Pero especialmente de frentes con componentes radiales; como la aberración esférica. En la gráfica de la figura 3.2 se observa como el interferómetro es más sensible a la aberración esférica.

3.3 Interferómetro de desplazamiento rotacional

Se utiliza en la medición de frentes de onda asimétricos. La medición se realiza mediante la detección de cualquier desviación de su simetría rotacional (Paez [1997a]).

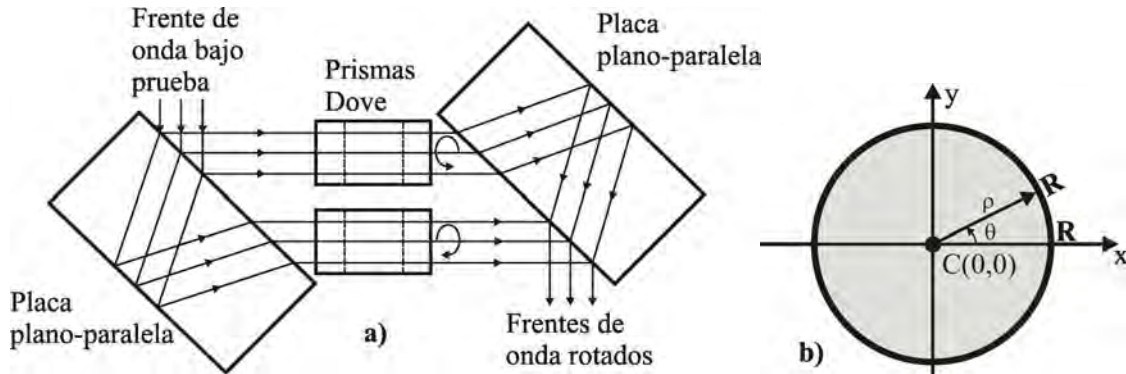


Figura 3.3. a) Interferómetro de desplazamiento rotacional, b) región de interferencia en el plano XY.

En el interferómetro de la figura 3.3a, uno de los frentes de onda se rota un ángulo θ . Éste mantiene sus coordenadas del centro sin reducir la región de interferencia como se observa en la figura 3.3b.

Al rotar uno de los frentes de onda cambia también su sentido de polarización. Esto representa un problema ya que al superponer ambos frentes, la diferencia en la polarización afecta el contraste de las franjas. Lo que significa que el producto punto $(\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02})$, presente en la ecuación de irradiancia (2.3.19), varía. Cuando se rota uno de los frentes de onda un ángulo muy pequeño, la disminución del contraste es despreciable. Tenemos entonces, un interferómetro de desplazamiento rotacional diferencial (Paez [1997a]).

El patrón de interferencia resultante se forma por una intensidad de modulación sobre una intensidad de fondo. El término sinusoidal de modulación depende únicamente de la diferencia de fase. En coordenadas polares, la irradiancia de la interferencia es

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \{1 + \cos[\Phi(\rho, \phi) - \Phi(\rho + \Delta\rho, \phi + \Delta\phi)]\}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (3.3.1)$$

Aquí I_B es la intensidad de fondo

$$I_B(\rho) = [I(\rho_1)I(\rho_2)]^{1/2}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (3.3.2)$$

Para desplazamiento angulares infinitesimales, reemplazamos los incrementos con diferenciales en la ecuación (3.3.1)

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \{1 + \cos[\Phi(\rho, \phi) - \Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi)]\}. \quad [\text{W/m}^2] \quad (3.3.3)$$

Expandimos en series de Taylor la fase $\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi)$, y tomamos solo los términos más significativos de la expansión:

$$\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi) = \Phi(\rho, \phi) + \left[\frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial\rho} \right] \partial\rho + \rho \left[\frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial(\rho\phi)} \right] \partial\phi. \quad (3.3.4)$$

Dado que el desplazamiento es solo rotacional hacemos $\partial\rho = 0$ en la Ec. (3.3.4)

$$\Phi(\rho + \partial\rho, \phi + \partial\phi) - \Phi(\rho, \phi) = \rho \left[\frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial(\rho\phi)} \right] \partial\phi = \left[\frac{\partial\Phi(\rho, \phi)}{\partial\phi} \right] \partial\phi. \quad (3.3.5)$$

Sustituimos la ecuación (3.3.5) en la ecuación (3.3.3) obteniendo:

$$I(\rho, \phi) = 2I_B(\rho) \left\{ 1 + \cos \left[\left(\frac{\partial \Phi(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right) \partial \phi \right] \right\}. \quad (3.3.6)$$

De la ecuación (3.3.6) deducimos que el patrón de interferencia depende de la derivada de la componente angular del frente de onda. Por lo tanto este interferómetro es sensible a aberraciones que no tienen simetría de rotación, tales como astigmatismo y coma (Paez [1997b]).

Cuando el ángulo de rotación de uno de los frentes de onda es de 90° , la sensibilidad del interferómetro es máxima para la detección de la aberración de astigmatismo. La máxima sensibilidad para la aberración de coma está dada para un ángulo de rotación de 180° . En la figura 3.4 se muestra la sensibilidad del interferómetro de desplazamiento rotacional como función del ángulo de rotación del frente de onda.

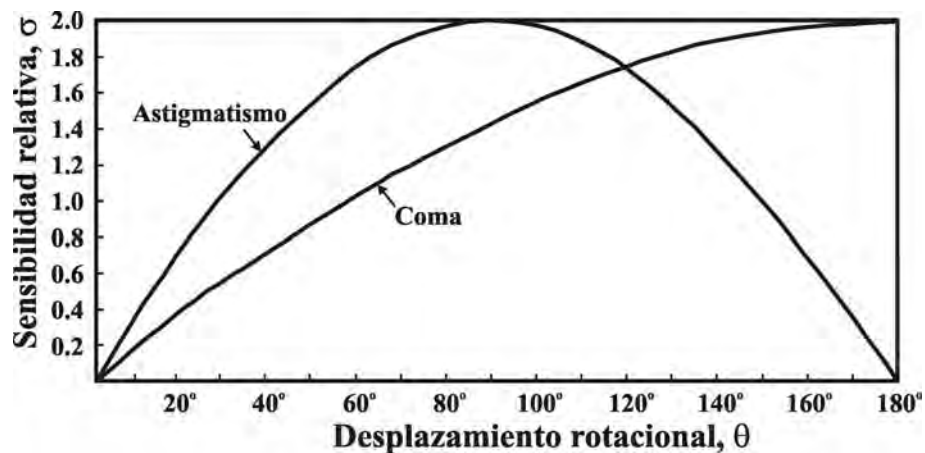


Figura 3.4. Sensibilidad σ como función del desplazamiento rotacional θ .

Recientemente se ha implementado una novedosa configuración del interferómetro de desplazamiento rotacional, el cual incorpora un prisma *Dove* como sistema director

(Moreno [2003]).

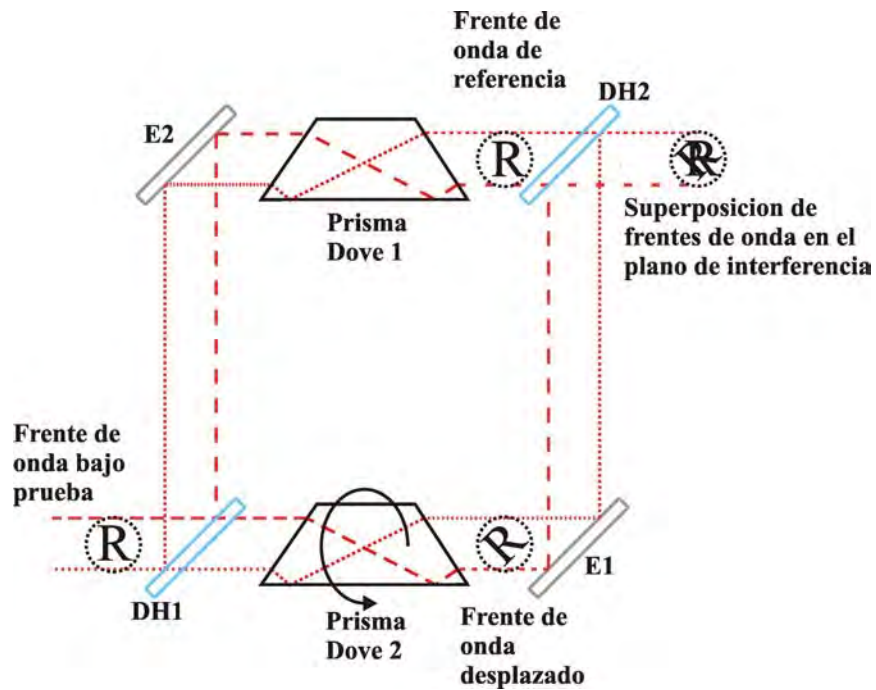


Figura 3.5. Interferómetro de desplazamiento rotacional, con prisma *Dove* como sistema director de frente de onda.

3.4 Interferómetro de desplazamiento vectorial

Existen arreglos de interferómetros de desplazamiento vectorial desarrollados a partir del interferómetro de Michelson (Murty [1970]), como se muestra en la figura 3.6.

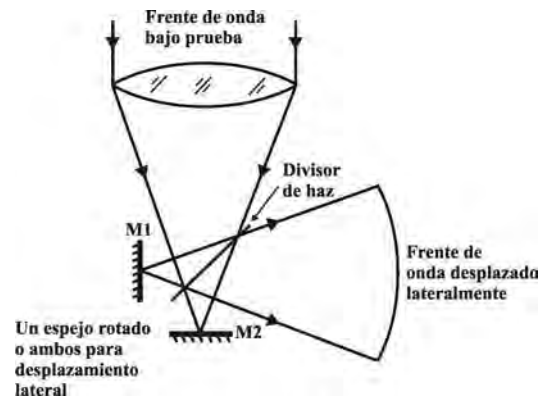


Figura 3.6. Interferómetro de desplazamiento lateral basado en un interferómetro Michelson.

La mayoría de los interferómetros de desplazamiento vectorial se basan en el interferómetro Jamin o Mach-Zehnder. Un ejemplo de interferómetro Jamin se observa en la figura 3.7 (Mantravadi [1992]). El frente de onda bajo prueba incide en una placa de vidrio plano-paralela. Las caras de la placa están cubiertas con película semi-reflejante, de tal forma que el frente de onda se divide en partes que se reflejan y se refractan. El haz que se transmite a una segunda placa, se refleja internamente desplazando lateralmente el frente de onda.

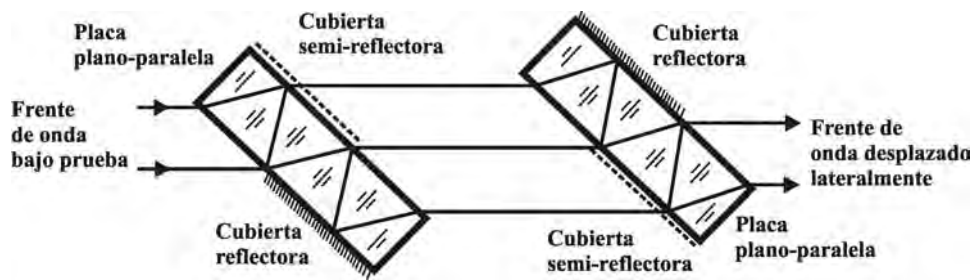


Figura 3.7. Interferómetro de desplazamiento lateral, basado en un interferómetro Jamin.

3.4.1 Desplazamiento vectorial

La técnica de interferometría de desplazamiento vectorial consiste en desplazar lateralmente uno de los frentes de onda una cantidad muy pequeña. Todos los puntos del frente de onda desplazado se mueven la misma magnitud $|\Delta\vec{\rho}|$ y un ángulo θ respecto a un eje de referencia, como en la figura 3.8. Así obtenemos el patrón de interferencia entre el frente de onda original $W(x,y)$ y el desplazado $W_d(x_d,y_d)$ (Mantravadi [1992]).

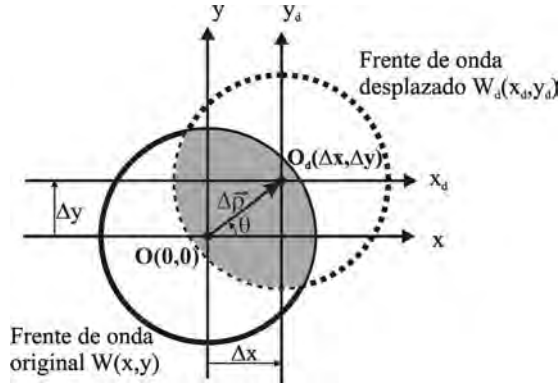


Figura 3.8. Desplazamiento vectorial de un frente de onda en el plano XY.

La irradiancia observada en el patrón de interferencia está dada por la ecuación (2.3.23)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.3.23)$$

Aquí la diferencia de fase δ está relacionada con la diferencia de camino óptico Δ entre ambas ondas, por medio de la ecuación (2.5.4)

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Delta \quad (2.5.4)$$

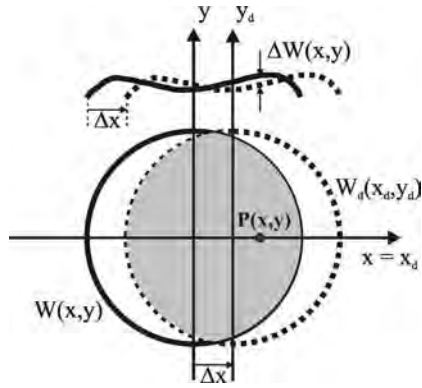


Figura 3.9. Diferencia de camino óptico entre un frente directo $W(x,y)$ y el desplazado $W_d(x_d, y_d)$.

Cuando desplazamos el frente de onda $W(x,y)$ en la dirección del eje X una cantidad Δx , como en la figura 3.9, podemos escribir el frente desplazado como $W(x - \Delta x, y)$. La diferencia de camino óptico entre ambos es:

$$DCO = \Delta W(x, y) = W(x - \Delta x, y) - W(x, y). \quad (3.4.1)$$

De manera similar, la diferencia de camino óptico entre un frente de onda desplazado Δy en la dirección del eje Y y el frente original es:

$$DCO = \Delta W(x, y) = W(x, y - \Delta y) - W(x, y). \quad (3.4.2)$$

En general en un interferómetro de desplazamiento vectorial la diferencia de camino óptico entre los frentes de onda (original y desplazado) es:

$$DCO = W_d(x_d, y_d) - W(x, y). \quad (3.4.3)$$

3.4.2 Desplazamiento diferencial

Podemos expresar la ecuación (3.4.3) en términos de los desplazamientos laterales como:

$$\text{DCO} = W(x - \Delta x, y - \Delta y) - W(x, y). \quad (3.4.4)$$

Para pequeños desplazamientos, las cantidades Δx y Δy son consideradas infinitesimales.

La derivada parcial de una función puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \quad (3.4.5)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (3.4.6)$$

Aplicamos esta definición a la ecuación (3.4.4) y obtenemos:

$$\text{DCO} = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} dy = dW(x, y). \quad (3.4.7)$$

La ecuación (3.4.7) representa el diferencial total de la función del frente de onda bajo prueba. Además, las franjas brillantes en el interferograma se forman donde la diferencia de camino óptico es múltiplo de la longitud de onda

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} dy = m\lambda. \quad (3.4.8)$$

Aquí m es el orden de interferencia.

La ecuación (3.4.8) muestra la principal ventaja del interferómetro de desplazamiento vectorial. El interferograma representa la derivada del frente de onda en la dirección del desplazamiento, evitando el uso de componentes de referencias de alta calidad y costo. Cuando se prueban componentes o se detectan aberraciones sin simetría de rotación, es posible seleccionar la dirección del desplazamiento para la cual la densidad de franjas es la más apropiada. Al medir aberraciones diminutas se requiere de desplazamientos grandes para producir un número conveniente de franjas (3 o 5). Para medir aberraciones grandes es deseable tener un número manejable de franjas (igualmente 3 o 5), y esto se consigue con pequeños desplazamientos (Torales [2001]).

3.4.3 Polinomio de aberraciones

Podemos expresar un frente de onda $W(x,y)$ en coordenadas rectangulares o esféricas como un polinomio de la forma:

$$W(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i c_{ij} x^j y^{i-j} . \quad (3.4.9)$$

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \rho^n [a_{n\ell} \cos^\ell(\theta) + b_{n\ell} \sin^\ell(\theta)] \quad (3.4.10)$$

Donde cada término del polinomio $W(x,y)$ describe una deformación o aberración del frente de onda. Los términos correspondientes a cada una de las aberraciones primarias son:

$$W(x, y) = \begin{cases} c_{00} & \text{Pistón} \\ + c_{10}x & \text{Tilt respecto al eje x} \\ + c_{01}y & \text{Tilt respecto al eje y} \\ + c_{02}(x^2 + y^2) & \text{Defoco} \\ + c_{11}(x^2 + 3y^2) & \text{Astigmatismo} \\ + c_{31}y(x^2 + y^2) & \text{Coma} \\ + c_{40}(x^2 + y^2)^2 & \text{Esférica} \end{cases} \quad (3.4.11)$$

En la figura 3.10a se muestran los interferogramas de las aberraciones de tilt, esférica, coma y astigmatismo, dentro y fuera de foco.

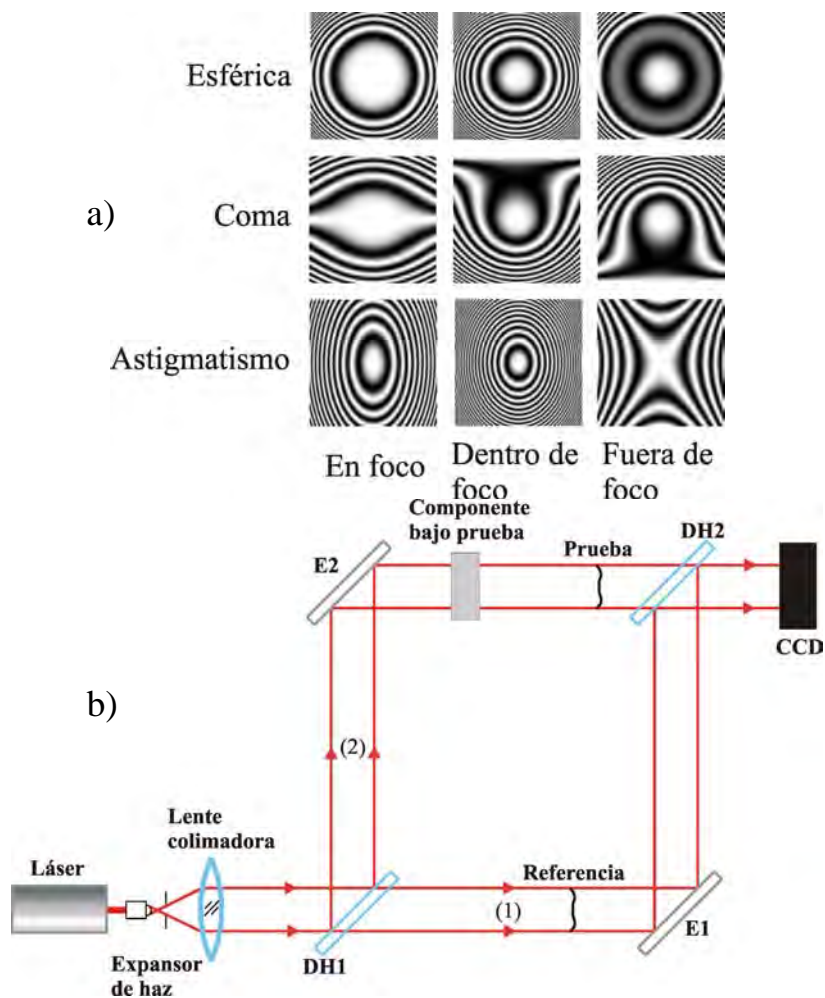


Figura 3.10. a) Patrones de franjas obtenidos con un interferómetro Mach-Zehnder, b) Interferómetro Mach-Zehnder.

3.4.4 Sistema director del frente de onda con dos prismas delgados

La figura 3.11a muestra un interferómetro Mach-Zehnder modificado con un par de prismas de cuña. Éstos producen un desplazamiento vectorial del haz en uno de sus brazos.

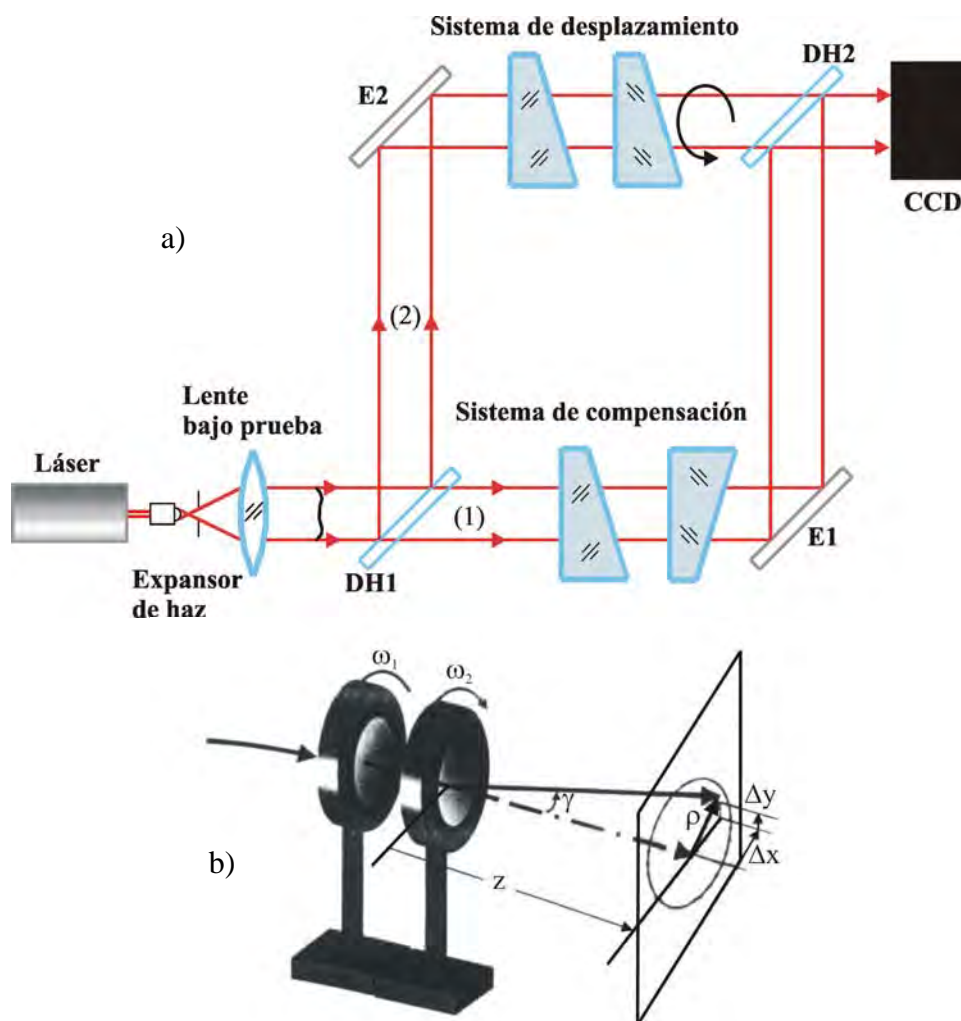


Figura 3.11. a) Interferómetro de desplazamiento vectorial basado en un Mach-Zehnder, b) sistema director del frente de onda.

Utilizamos una fuente de luz coherente, en este caso un láser. Expandimos y filtramos el haz. Usamos la lente bajo prueba para colimar el haz expandido. El frente de onda $W(x,y)$ del haz colimado contiene las aberraciones producidas por la lente en cuestión.

El frente de onda $W(x,y)$ se divide en dos partes en el divisor de haz DH1, una parte se transmite (1) y la otra se refleja (2). El espejo E2 refleja el frente de onda (2) hacia el sistema director donde es modificada su trayectoria y atraviesa el segundo divisor de haz DH2. El espejo E1 refleja el frente (1) y lo dirige hacia DH2, este último lo refleja nuevamente para superponer ambos frentes. Finalmente en la pantalla se observa el patrón de interferencia.

El sistema director analizado (figura 3.11b) tiene una desventaja. Introduce un tilt adicional, al frente de onda, en la dirección del desplazamiento. La cantidad de tilt depende de los ángulos de rotación de los prismas (ω_1, ω_2). El ángulo de desviación de un haz (figura 3.11b) que atraviesa los prismas es:

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) = 2(n-1)\alpha \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right). \quad (3.4.12)$$

Aquí α es el ángulo apex de los prismas de cuña y n es el índice de refracción del material de los prismas (Torales [2001]).

La magnitud del desplazamiento vectorial ρ a una distancia z es:

$$\rho = \left| z \tan \left[2(n-1)\epsilon \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \right] \right|. \quad (3.4.13)$$

En la siguiente sección presentamos y analizamos un sistema director novedoso. Con este pretendemos eliminar el tilt adicional introducido al frente de onda.

3.5 Nuevo sistema director del frente de onda

El interferómetro de la figura 3.12 tiene, en uno de sus brazos, un par de prismas de cuña.

Dichos prismas se están utilizando como sistema director del frente de onda.

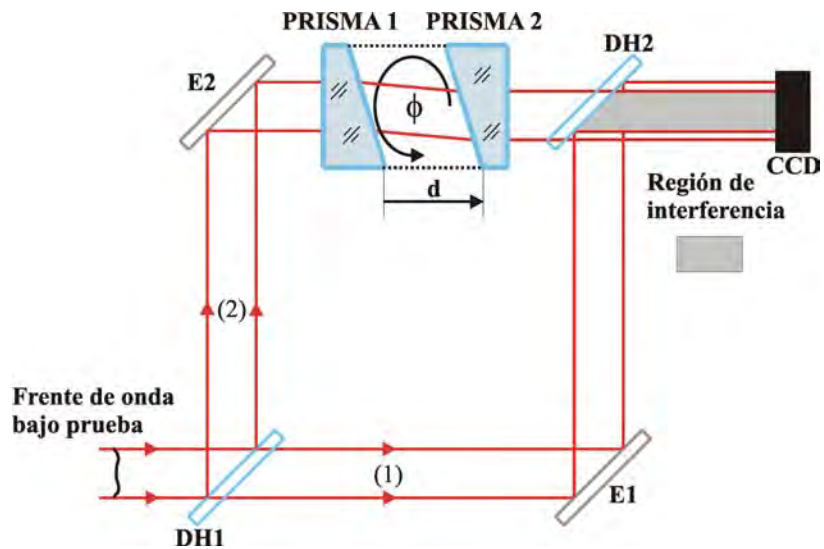


Figura 3.12. Interferómetro de desplazamiento vectorial propuesto.

3.5.1 Prisma de cuña

Un prisma de cuña refracta el haz que llega a una de sus superficies, desviándolo de su trayectoria original. La figura 3.13 muestra un corte transversal de un solo prisma.

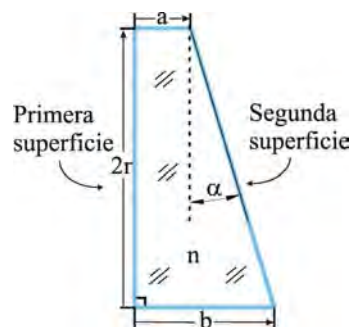


Figura 3.13. Principales parámetros de un prisma de cuña.

Los principales parámetros de un prisma de cuña son: a es el espesor del prisma, r es el radio del lado recto, n es el índice de refracción del material del prisma y α es el ángulo de la cuña (ángulo apex)

Un haz que incide perpendicularmente en la primera superficie no sufre refracción, pero en la segunda superficie se refracta y se desvía un ángulo γ como se observa en la figura 3.14.

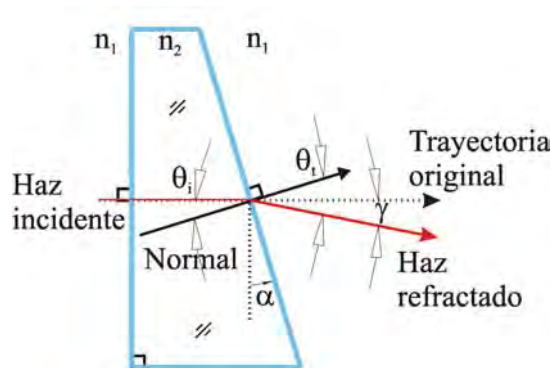


Figura 3.14. Refracción de un haz, debido a un prisma de cuña.

Sabemos que los índices de refracción del medio (n_1) y del material del prisma (n_2) son en magnitud:

$$n_2 > n_1 . \quad (3.5.1)$$

Para calcular el ángulo de desviación γ que sufre el haz, aplicamos la ley de Snell en la segunda superficie

$$n_2 \text{sen} \theta_i = n_1 \text{sen} \theta_r . \quad (3.5.2)$$

En la región paraxial (ángulos pequeños), escribimos la ecuación (3.5.2) como:

$$n_2\theta_i = n_1\theta_t . \quad (3.5.3)$$

De la figura 3.14, observamos que los ángulos de incidencia y transmisión de un haz se relacionan por:

$$\theta_t = \theta_i + \gamma . \quad (3.5.4)$$

Hacemos $n_1 \approx 1$ (aire) en la ecuación (3.5.3), y sustituimos la ecuación (3.5.4) en la ecuación (3.5.3)

$$n_2\theta_i = \theta_i + \gamma . \quad (3.5.5)$$

Finalmente, despejamos γ de la ecuación (3.5.5)

$$\gamma = (n_2 - 1)\theta_i . \quad (3.5.6)$$

A continuación analizamos la desviación, en dos dimensiones, de un haz que incide perpendicular a una cara del sistema de dos prismas de cuña .

3.5.2 Desviación de un haz por un par de prismas de cuña

El haz de la figura 3.15, viaja en el medio n_1 en la dirección Z, e incide perpendicularmente en la primera superficie del prisma 1. No sufre refracción y mantiene su trayectoria en el medio n_2 . Al llegar a la segunda superficie incide con un ángulo θ_{i1} con respecto a la normal 1, y se refracta con un ángulo θ_{t1} .

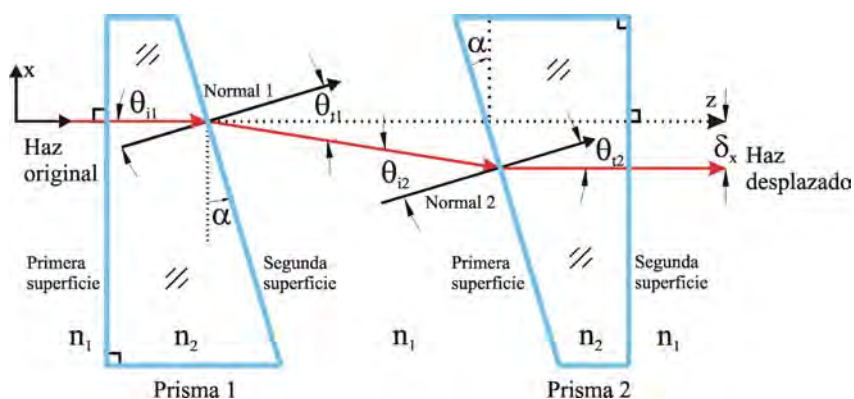


Figura 3.15. Esquema de la desviación de un haz debido a dos prismas de cuña.

En la interfaz entre los medios n_2 y n_1 de la segunda superficie del prisma 1, escribimos la ley de Snell como:

$$n_2 \text{sen} \theta_{i1} = n_1 \text{sen} \theta_{t1} . \quad (3.5.7)$$

Aquí, n_1 es el índice de refracción del medio que rodea los prismas, y n_2 es el índice de refracción del material de los prismas.

Posteriormente el rayo incide en la primera superficie del prisma 2, con un ángulo θ_{i2} respecto a la normal 2, y se refracta con un ángulo θ_{t2} .

En la interfaz entre el medio n_1 y el medio n_2 , escribimos la ley de Snell como:

$$n_1 \text{sen} \theta_{i2} = n_2 \text{sen} \theta_{t2}. \quad (3.5.8)$$

Hacemos las normales 1 y 2 de los prismas de la figura 3.15, paralelas entre si

$$\theta_{i1} = \theta_{i2}. \quad (3.5.9)$$

Sustituimos la ecuación (3.5.9) en la ecuación (3.5.8)

$$n_1 \text{sen} \theta_{i1} = n_2 \text{sen} \theta_{t2}. \quad (3.5.10)$$

Y sustituimos la ecuación (3.5.10) en la ecuación (3.5.7)

$$n_2 \text{sen} \theta_{i1} = n_2 \text{sen} \theta_{t2}. \quad (3.5.11)$$

De la ecuación (3.5.11) deducimos que:

$$\theta_{i1} = \theta_{t2}. \quad (3.5.12)$$

Concluimos que un haz que incide perpendicular al sistema de dos prismas de cuña, sale perpendicular pero desplazado. A continuación introducimos el trazo exacto de rayos como herramienta para describir la propagación de haces entre diferentes medios.

3.6 Trazo exacto de rayos

Utilizamos trazo exacto de rayos con el fin de modelar la propagación tridimensional de un frente de onda, dentro del sistema director. Además, recordando, un rayo representa la normal de un frente de onda. Esto nos permite evaluar el funcionamiento del sistema de prismas y conocer con precisión la desviación de un haz.

El trazo exacto de rayos describe dos fenómenos que ocurren en la propagación de haces a través de diferentes medios: refracción y traslación.

3.6.1 Refracción

Para describir la trayectoria de un rayo es necesario conocer un punto y la dirección del rayo (Stavroudis [1972]). Expresamos la ley de Snell en forma vectorial como:

$$n_1 (\hat{P}_0 \times \hat{N}) = n_2 (\hat{P}_1 \times \hat{N}). \quad (3.6.1)$$

Donde \hat{P}_0 , \hat{P}_1 son los vectores unitarios de los rayos incidente y refractado respectivamente. Éstos se encuentran en el plano de incidencia. Además \hat{N} es un vector unitario normal a la superficie refractora.

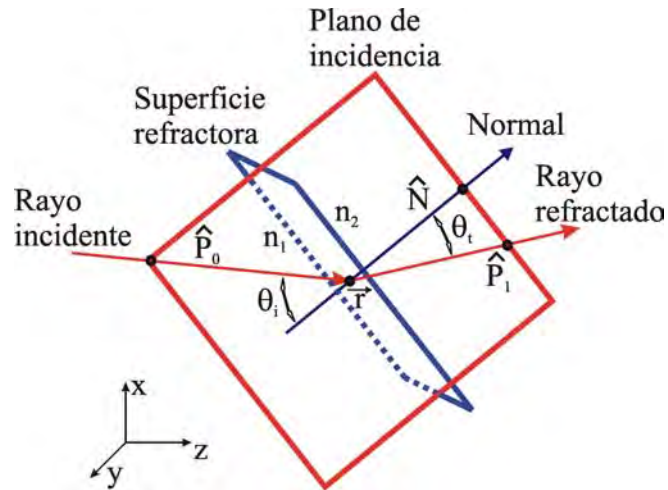


Figura 3.16. Refracción de un rayo al pasar por una superficie que separa el medio n_1 y n_2 .

Hacemos $\mu = \frac{n_1}{n_2}$ en la ecuación (3.6.1)

$$\hat{P}_1 \times \hat{N} = \mu (\hat{P}_0 \times \hat{N}). \quad (3.6.2)$$

El equivalente escalar de la ecuación (3.6.2) es:

$$\text{sen}\theta_t = \mu \text{sen}\theta_i. \quad (3.6.3)$$

Agrupamos todos los términos de un solo lado de la igualdad en la ecuación (3.6.2)

$$(\hat{P}_1 - \mu \hat{P}_0) \times \hat{N} = 0. \quad (3.6.4)$$

La ecuación (3.6.4) nos indica que los vectores $(\hat{P}_1 - \mu\hat{P}_0)$ y \hat{N} son paralelos, y por lo tanto existe una cantidad escalar κ tal que:

$$\hat{P}_1 - \mu\hat{P}_0 = \kappa\hat{N}. \quad (3.6.5)$$

Despejamos \hat{P}_1 de la ecuación (3.6.5)

$$\hat{P}_1 = \mu\hat{P}_0 + \kappa\hat{N}. \quad (3.6.6)$$

Para encontrar el valor de κ , elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (3.6.6)

$$(\hat{P}_1)^2 = (\mu\hat{P}_0 + \kappa\hat{N})^2. \quad (3.6.7)$$

Dado que la ecuación (3.6.7) contiene vectores, podemos expresar la multiplicación como el producto punto:

$$\hat{P}_1 \cdot \hat{P}_1 = (\mu\hat{P}_0 + \kappa\hat{N}) \cdot (\mu\hat{P}_0 + \kappa\hat{N}) \quad (3.6.8a)$$

$$\hat{P}_1 \cdot \hat{P}_1 = \mu^2(\hat{P}_0 \cdot \hat{P}_0) + \mu\kappa(\hat{P}_0 \cdot \hat{N}) + \mu\kappa(\hat{N} \cdot \hat{P}_0) + \kappa^2(\hat{N} \cdot \hat{N}). \quad (3.6.8b)$$

De álgebra vectorial sabemos:

$$\hat{P}_1 \cdot \hat{P}_1 = \hat{P}_0 \cdot \hat{P}_0 = \hat{N} \cdot \hat{N} = 1 \quad (3.6.9a)$$

$$\hat{P}_0 \cdot \hat{N} = \hat{N} \cdot \hat{P}_0. \quad (3.6.9b)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.6.9a) y (3.6.9b) en la ecuación (3.6.8b)

$$1 = \mu^2 + 2\mu\kappa(\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \kappa^2. \quad (3.6.10)$$

Trasladamos todos los términos a un solo lado de la igualdad y agrupamos, para obtener la ecuación cuadrática

$$\kappa^2 + 2\mu(\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}})\kappa + \mu^2 - 1 = 0. \quad (3.6.11)$$

Resolvemos la ecuación cuadrática (3.6.11)

$$\kappa = -\mu(\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm \sqrt{1 - \mu^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}})^2 \right]}. \quad (3.6.12)$$

Sustituimos la ecuación (3.6.12) en la ecuación (3.6.6), y obtenemos la expresión completa de la dirección del rayo refractado

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mu\hat{\mathbf{P}}_0 + \left(-\mu(\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm \sqrt{1 - \mu^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}})^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}. \quad (3.6.13)$$

3. 6. 2 Traslación

Podemos representar cualquier punto \vec{r} , de un rayo que inicia en $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ y que viaja en la dirección $\hat{P}(X, Y, Z)$, por la ecuación (Stavroudis [1972])

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \eta \hat{P}. \quad (3.6.14)$$

Aquí \vec{r} es un punto donde incide el rayo con dirección \hat{P} en el plano $\phi(\vec{r})$, η es la distancia del punto de inicio \vec{r}_0 al punto \vec{r} y \hat{N} es la normal al plano $\phi(\vec{r})$.

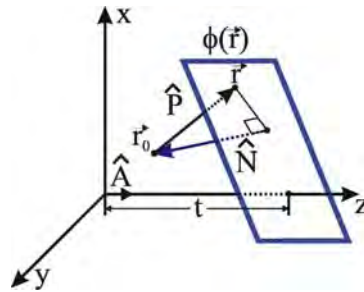


Figura 3.17. Traslación de un rayo del punto inicial \mathbf{r}_0 a un punto \mathbf{r} del plano $\phi(\mathbf{r})$.

Podemos expresar la ecuación (3.6.14) en forma escalar como:

$$x = x_0 + \eta X \quad y = y_0 + \eta Y \quad z = z_0 + \eta Z. \quad (3.6.15)$$

Para encontrar la ecuación de un plano requerimos de al menos 3 puntos del plano, o el vector normal y un punto del plano. Del plano $\phi_2(\mathbf{r})$ de la figura 3.18 conocemos el vector unitario normal \hat{N} y un punto Q del plano. Utilizamos un segundo punto P cualquiera del plano, cuyo vector posición es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

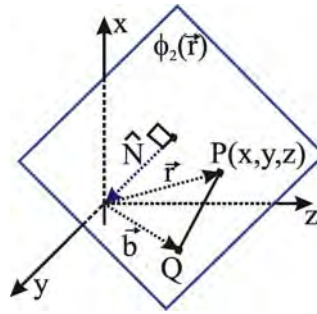


Figura 3.18 Descripción del plano $\phi_2(\vec{r})$, a partir de su vector normal \hat{N} y un punto Q.

Dado que el vector $PQ = \vec{b} - \vec{r}$ es perpendicular a \hat{N} , podemos expresar la ecuación del plano $\phi_2(\vec{r})$ como:

$$\phi_2(\vec{r}) = (\vec{b} - \vec{r}) \cdot \hat{N} = 0. \quad (3.6.16)$$

Entonces, escribimos la ecuación del plano $\phi(\vec{r})$ de la figura 3.17 como:

$$(t\hat{k} - \vec{r}) \cdot \hat{N} = 0 \quad (3.6.17)$$

donde t es la distancia del origen al punto donde el eje Z cruza el plano $\phi(\vec{r})$.

Sustituimos la ecuación (3.6.14) en la ecuación (3.6.17)

$$(t\hat{A} - \vec{r}_0 - \eta\hat{P}) \cdot \hat{N} = 0 \quad (3.6.18a)$$

$$t(\hat{A} \cdot \hat{N}) - \vec{r}_0 \cdot \hat{N} - \eta(\hat{P} \cdot \hat{N}) = 0. \quad (3.6.18b)$$

Despejamos η de la ecuación (3.6.18b)

$$\eta = \frac{(\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \hat{\mathbf{N}}}{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{N}}}. \quad (3.6.19)$$

Sustituimos la ecuación (3.6.19) en la ecuación (3.6.14), y obtenemos el vector posición del punto donde el rayo cruza un plano después de una traslación como:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_0 + \left[\frac{(\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \hat{\mathbf{N}}}{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{N}}} \right] \hat{\mathbf{p}}. \quad (3.6.20)$$

En la siguiente sección, utilizamos las ecuaciones (3.6.13) y (3.6.20) para describir la trayectoria de un rayo que atraviesa el sistema director de frente de onda propuesto.

3.6.3 Trazo exacto de rayos del sistema director del frente de onda

Analizamos la propagación de un frente de onda a través de un sistema de dos prismas de cuña separados una distancia d y que giran sobre un eje un ángulo ϕ . El eje de giro cruza cada prisma por el centro de las superficies rectas de forma perpendicular. Además, se hace coincidir con el eje Z como se observa en la figura 3.19.

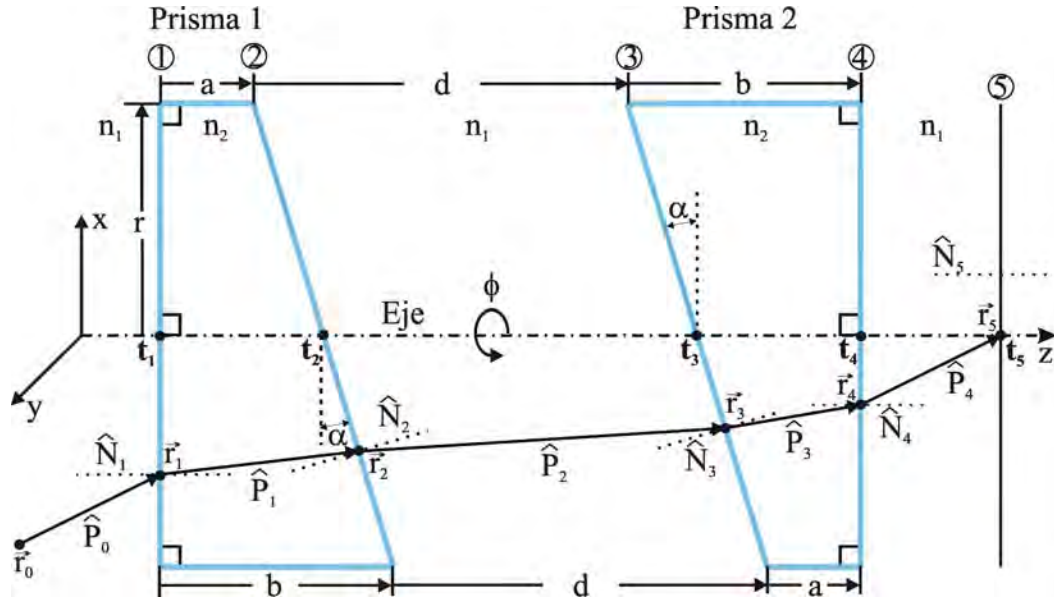


Figura 3.19. Esquema de un rayo atravesando dos prismas de cuña.

Un rayo inicia en el punto $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ con una trayectoria $\hat{P}_0(X_0, Y_0, Z_0)$, y atraviesa las superficies de los prismas en los puntos \vec{r}_1 al \vec{r}_4 sucesivamente. Se conocen además las normales de cada una de las superficies de los prismas y los puntos del t_1 al t_5 donde el eje de giro cruza los prismas.

Las ecuaciones que describen el punto de intersección con la primera superficie y su dirección luego de la refracción son:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \left[\frac{(t_1 \hat{A} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}_1}{\hat{P}_0 \cdot \hat{N}_1} \right] \hat{P}_0 \quad (3.6.21a)$$

$$\hat{P}_1 = \mu_1 \hat{P}_0 + \left(-\mu_1 (\hat{P}_0 \cdot \hat{N}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 [1 - (\hat{P}_0 \cdot \hat{N}_1)^2]} \right) \hat{N}_1 \quad (3.6.21b)$$

$$\mu_1 = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.6.21c)$$

En la segunda superficie, la intersección y su dirección son:

$$\bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{r}}_1 + \left[\frac{(\mathbf{t}_2 \hat{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{r}}_1) \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}{\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2} \right] \hat{\mathbf{P}}_1 \quad (3.6.22a)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mu_2 \hat{\mathbf{P}}_1 + \left(-\mu_2 (\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2)^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_2 \quad (3.6.22b)$$

$$\mu_2 = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.6.22c)$$

En la tercera superficie, la intersección y su dirección son:

$$\bar{\mathbf{r}}_3 = \bar{\mathbf{r}}_2 + \left[\frac{(\mathbf{t}_3 \hat{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{N}}_3}{\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3} \right] \hat{\mathbf{P}}_2 \quad (3.6.23a)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_3 = \mu_3 \hat{\mathbf{P}}_2 + \left(-\mu_3 (\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3) + \sqrt{1 - \mu_3^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3)^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_3 \quad (3.6.23b)$$

$$\mu_3 = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.6.23c)$$

En la cuarta superficie, la intersección y su dirección son:

$$\bar{\mathbf{r}}_4 = \bar{\mathbf{r}}_3 + \left[\frac{(\mathbf{t}_4 \hat{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{r}}_3) \cdot \hat{\mathbf{N}}_4}{\hat{\mathbf{P}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_4} \right] \hat{\mathbf{P}}_3 \quad (3.6.24a)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_4 = \mu_4 \hat{\mathbf{P}}_3 + \left(-\mu_4 (\hat{\mathbf{P}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_4) + \sqrt{1 - \mu_4^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_4)^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_4 \quad (3.6.24b)$$

$$\mu_4 = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.6.24c)$$

Finalmente el rayo con dirección $\hat{P}_4(X_4, Y_4, Z_4)$ incide en el plano (5) en el punto

$\vec{r}_5(x_5, y_5, z_5)$ como:

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_4 + \left[\frac{(t_5 \hat{A} - \vec{r}_4) \cdot \hat{N}_5}{\hat{P}_4 \cdot \hat{N}_5} \right] \hat{P}_4. \quad (3.6.25)$$

Las ecuaciones (3.6.21) a la (3.6.25) representan el trazo exacto de rayos para el sistema director.

3.6.4 Incidencia oblicua

En la figura 3.20, un rayo incide con trayectoria, oblicua (P_0) a la primera superficie del sistema. Donde las superficies (1) y (4) y las superficies (2) y (3) son paralelas entre si, $\hat{N}_1 = \hat{N}_4$ y $\hat{N}_2 = \hat{N}_3$.

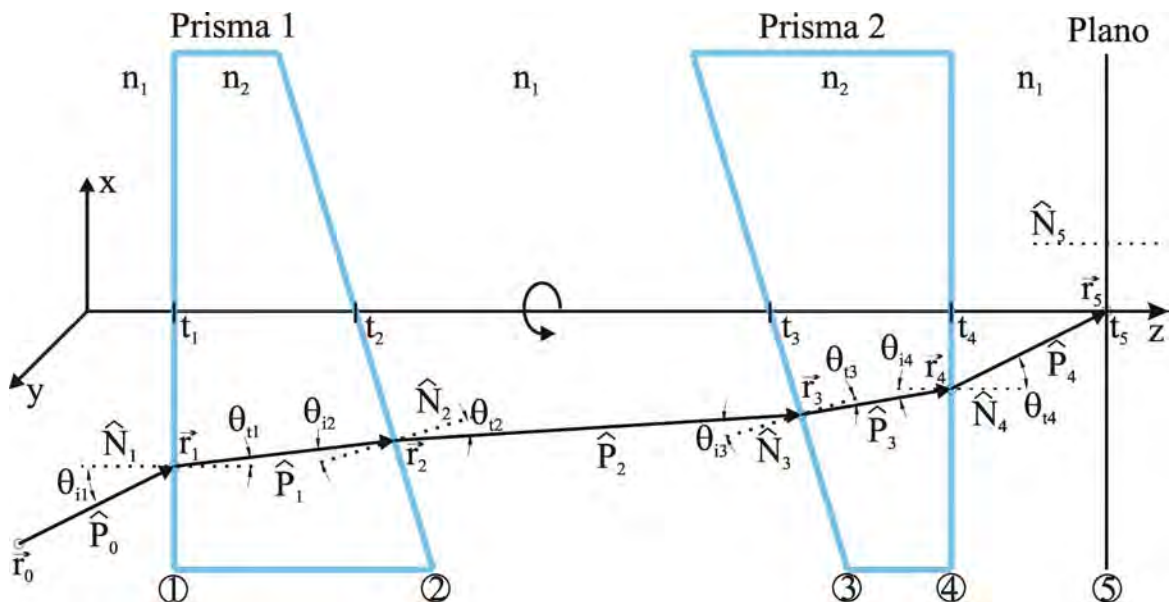


Figura 3.20. Incidencia oblicua de un haz en un sistema de dos prismas.

Escribimos la ley de Snell en la interfases de las superficies (2) y (3) como:

$$\hat{\mathbf{P}}_2 \times \hat{\mathbf{N}}_2 = \mu_2 (\hat{\mathbf{P}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2) \quad (3.6.26)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_3 \times \hat{\mathbf{N}}_3 = \mu_3 (\hat{\mathbf{P}}_2 \times \hat{\mathbf{N}}_3). \quad (3.6.27)$$

Dado que $\mu_1 = \mu_3$ y $\hat{\mathbf{N}}_2 = \hat{\mathbf{N}}_3$, rescribimos las ecuaciones (3.6.26) y (3.6.27)

$$\hat{\mathbf{P}}_2 \times \hat{\mathbf{N}}_3 = \mu_2 (\hat{\mathbf{P}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2) \quad (3.6.28)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_3 \times \hat{\mathbf{N}}_2 = \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_2 \times \hat{\mathbf{N}}_3). \quad (3.6.29)$$

Sustituimos la Ec. (3.6.28) en la Ec. (3.6.29)

$$\hat{\mathbf{P}}_3 \times \hat{\mathbf{N}}_2 = \mu_1 \mu_2 (\hat{\mathbf{P}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2). \quad (3.6.30)$$

Aquí, es fácil demostrar que $\mu_1 \mu_2 = 1$.

Agrupamos los términos de la ecuación (3.6.30) de un solo lado de la igualdad

$$(\hat{\mathbf{P}}_3 - \hat{\mathbf{P}}_1) \times \hat{\mathbf{N}}_2 = 0. \quad (3.6.31)$$

La ecuación (3.6.31) tiene tres soluciones posibles

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{P}}_3 - \hat{\mathbf{P}}_1) = \hat{\mathbf{N}}_2 \\ (\hat{\mathbf{P}}_3 - \hat{\mathbf{P}}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{N}}_2 = 0. \end{cases} \quad (3.6.32)$$

Seleccionamos $(\hat{\mathbf{P}}_3 - \hat{\mathbf{P}}_1) = 0$ de las soluciones (3.6.32), por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{P}}_3 = \hat{\mathbf{P}}_1. \quad (3.6.33)$$

En la superficie (4), dado que $\mu_2 = \mu_4$, $\hat{\mathbf{N}}_1 = \hat{\mathbf{N}}_4$ y utilizando la ecuación (3.6.33), escribimos la ecuación (3.6.24b) como:

$$\hat{\mathbf{P}}_4 = \mu_2 \hat{\mathbf{P}}_1 + \left(-\mu_2 (\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_1. \quad (3.6.34)$$

En la superficie (1), hacemos el producto punto en ambos miembros de la ecuación (3.6.21b) por el vector unitario $\hat{\mathbf{N}}_1$ y se obtiene:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 = \left\{ \mu_1 \hat{\mathbf{P}}_0 + \left(-\mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_1 \right\} \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 \quad (3.6.35a)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 = \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \left(-\mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2 \right]} \right) (\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) \quad (3.6.35b)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 = \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) - \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2 \right]}. \quad (3.6.35c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.6.21b) y (3.6.35c) en (3.6.34) se llega a:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_4 = & \mu_2 \left\{ \mu_1 \hat{\mathbf{P}}_0 + \left(-\mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \right) \hat{\mathbf{N}}_1 \right\} + \\
& \left(-\mu_2 \left\{ \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) - \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \right\} + \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \mu_2^2 \left[1 - \left\{ \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) - \mu_1 (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) + \sqrt{1 - \mu_1^2 [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \right\}^2 \right]} \right) \hat{\mathbf{N}}_1.
\end{aligned} \tag{3.6.36}$$

Simplificamos términos y hacemos $\mu_1 \mu_2 = 1$ en la ecuación (3.6.36)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_4 = & \hat{\mathbf{P}}_0 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) \hat{\mathbf{N}}_1 + \sqrt{\mu_2^2 - [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \hat{\mathbf{N}}_1 + \\
& \left(-\sqrt{\mu_2^2 - [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} + \mu_2 \sqrt{\mu_1^2 - [1 - \mu_1^2 \left\{ \sqrt{\mu_2^2 - [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \right\}^2]} \right) \hat{\mathbf{N}}_1.
\end{aligned} \tag{3.6.37}$$

Simplificamos la ecuación (3.6.37) obteniendo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_4 = & \hat{\mathbf{P}}_0 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) \hat{\mathbf{N}}_1 + \sqrt{\mu_2^2 - [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \hat{\mathbf{N}}_1 - \sqrt{\mu_2^2 - [1 - (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} \hat{\mathbf{N}}_1 + \\
& (\hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) \hat{\mathbf{N}}_1.
\end{aligned} \tag{3.6.38}$$

Finalmente:

$$\hat{\mathbf{P}}_4 = \hat{\mathbf{P}}_0. \tag{3.6.39}$$

Concluimos que un rayo que viaja en la dirección $\hat{\mathbf{P}}_0$ y entra en el sistema director de la figura 3.20, donde $\hat{\mathbf{N}}_1 = \hat{\mathbf{N}}_4$ y $\hat{\mathbf{N}}_2 = \hat{\mathbf{N}}_3$, sale del sistema en la misma dirección $\hat{\mathbf{P}}_4 = \hat{\mathbf{P}}_0$.

3.7 Desplazamientos $|\Delta\vec{p}|$ y θ como función d y ϕ

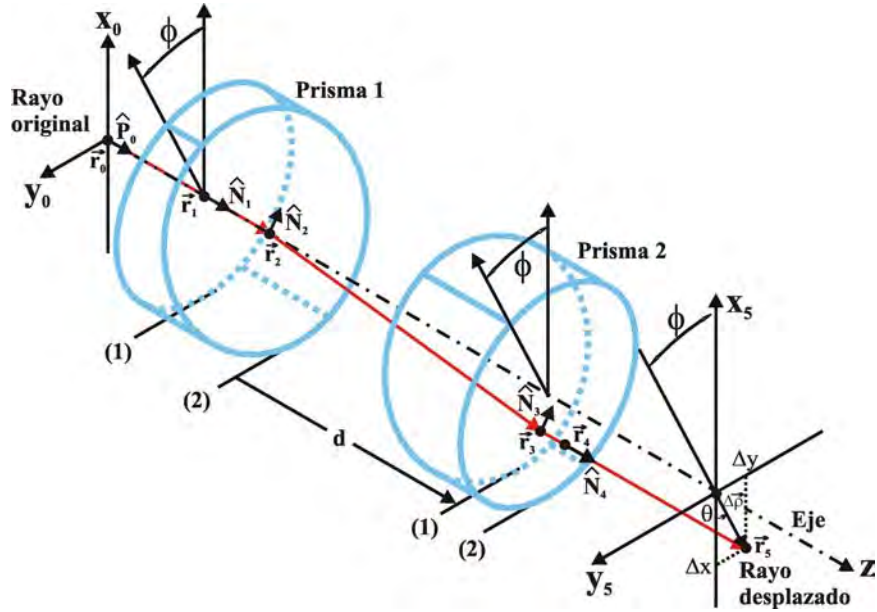


Figura 3.21. Desplazamiento vectorial de un rayo por el sistema director de frente de onda.

Las condiciones de operación del sistema director de la figura 3.21 son

$$\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{N}_4 = \hat{k} \\ \hat{N}_2 = \hat{N}_3 \\ \hat{P}_0 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k} \\ \vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}. \end{cases} \quad (3.7.1)$$

En la figura 3.21 $|\Delta\vec{p}|$ es la magnitud del desplazamiento, θ es el ángulo del desplazamiento, d es la distancia de separación entre prismas, ϕ es el ángulo de giro ambos prismas, \vec{r}_0 a \vec{r}_5 son los puntos de intersección del rayo con los planos 0 al 5.

El rayo incide perpendicularmente en la cara (1) del prisma 1 ($\hat{P}_0 \cdot \hat{N}_1 = 1$).

Sustituimos los valores iniciales de un rayo \vec{r}_0 y \hat{P}_0 de (3.7.1) en las ecuaciones (3.6.21a) y (3.6.21b) de refracción y traslación en la primera superficie

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} + \left[\frac{-x_0\hat{i} - y_0\hat{j} - (z_0 - t_1)\hat{k}}{1} \right] \hat{k} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + (z_0 - z_0 + t_1)\hat{k} \\ &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + t_1\hat{k}\end{aligned}\quad (3.7.2)$$

$$\hat{P}_1 = \mu_1\hat{k} + \left[-\mu_1(1) + \sqrt{1 - \mu_1^2(1-1)} \right] \hat{k} = \mu_1\hat{k} - \mu_1\hat{k} + \hat{k} = \hat{k}.\quad (3.7.3)$$

Calculamos la normal \hat{N}_2 con la ecuación A.12 del apéndice A

$$\hat{N}_2 = \text{sen}(\alpha)\cos(\phi)\hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)\hat{j} + \cos(\alpha)\hat{k}.\quad (3.7.4)$$

Hacemos el producto punto $\hat{P}_1 \cdot \hat{N}_2$ con las ecuaciones (3.7.3) y (3.7.4)

$$\hat{P}_1 \cdot \hat{N}_2 = \hat{k} \cdot [\text{sen}(\alpha)\cos(\phi)\hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)\hat{j} + \cos(\alpha)\hat{k}] = \cos(\alpha).\quad (3.7.5)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.7.2), (3.7.3), (3.7.4) y (3.7.5) en las ecuaciones (3.6.22a) y (3.6.22b), correspondientes a la refracción y traslación en la superficie (2) del prisma 1

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + t_1\hat{k} + \left[\frac{(-x_0\hat{i} - y_0\hat{j} + (t_2 - t_1)\hat{k}) \cdot (\text{sen}(\alpha)\cos(\phi)\hat{i} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)\hat{j} + \cos(\alpha)\hat{k})}{\cos(\alpha)} \right] \hat{k} \\ \vec{r}_2 &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + t_1\hat{k} + [-x_0 \tan(\alpha)\cos(\phi) - y_0 \tan(\alpha)\text{sen}(\phi) + (t_2 - t_1)] \hat{k} \\ \vec{r}_2 &= x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + [t_2 - x_0 \tan(\alpha)\cos(\phi) - y_0 \tan(\alpha)\text{sen}(\phi)] \hat{k}\end{aligned}\quad (3.7.6)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mu_2 \hat{\mathbf{k}} + \left(-\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \left[1 - \cos^2(\alpha) \right]} \right) \left[\sin(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}} \right]$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mu_2 \hat{\mathbf{k}} + \left[-\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \right] \left[\sin(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (3.7.7)$$

En la ecuación (3.7.7) simplificamos los términos constantes en uno solo:

$$\beta_2 = -\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)}. \quad (3.7.8)$$

Sustituimos la ecuación (3.7.8) en la ecuación (3.7.7)

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \beta_2 \sin(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \beta_2 \sin(\alpha) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + [\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)] \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.7.9)$$

Hacemos el producto punto $\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3$:

$$\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 = \hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 = \frac{\left[\beta_2 \sin(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \beta_2 \sin(\alpha) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \hat{\mathbf{k}} \right] \cdot \left[\sin(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}} \right]}{\left[\sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right]}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 = \beta_2 \left[\sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right] + \mu_2 \cos(\alpha) = \beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha) \quad (3.7.10)$$

Utilizamos las ecuaciones (3.7.6), (3.7.8), (3.7.9) y (3.7.10), para calcular la traslación y refracción del rayo en la superficie (1) del prisma 2.

Calculamos primero la traslación del rayo con las ecuación (3.6.23a)

$$\bar{\mathbf{r}}_3 = \left[\frac{x_0 \hat{\mathbf{i}} + y_0 \hat{\mathbf{j}} + [t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\phi) - y_0 \tan(\alpha) \text{sen}(\phi)] \hat{\mathbf{k}} + \left(-x_0 \hat{\mathbf{i}} - y_0 \hat{\mathbf{j}} + [t_3 - t_2 + x_0 \tan(\alpha) \cos(\phi) + y_0 \tan(\alpha) \text{sen}(\phi)] \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)} \right] \quad (3.7.11)$$

$$\left[\beta_2 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \beta_2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}} + [\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)] \hat{\mathbf{k}} \right].$$

Simplificamos y agrupamos términos de la ecuación (3.7.11)

$$\bar{\mathbf{r}}_3 = \left[x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \right] \hat{\mathbf{j}} + \left[t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\phi) - y_0 \tan(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.7.12)$$

Luego simplificamos los términos constantes:

$$\beta_3 = \frac{(t_3 - t_2) \cos(\alpha)}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)}. \quad (3.7.13)$$

Calculamos la trayectoria del rayo después de refractarse en la superficie (1) del prisma 2

con la ecuación (3.6.23b)

$$\hat{\mathbf{P}}_3 = \frac{\mu_1 \left[\beta_2 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \beta_2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}} + (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha)) \hat{\mathbf{k}} \right]}{\left[-\mu_1 [\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)] + \sqrt{1 - \mu_1^2 \left[1 - (\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha))^2 \right]} \right]} \left[\text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\mu_1 \beta_2 + \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \right) \sin(\alpha) \cos(\phi) \right] \hat{i} + \\
\hat{P}_3 = & \left[\left(\mu_1 \beta_2 + \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \right) \sin(\alpha) \sin(\phi) \right] \hat{j} + \\
& \left[\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \beta_2 \cos(\alpha) - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right] \hat{k} .
\end{aligned} \tag{3.7.14}$$

Sustituimos la ecuación (3.7.8) en la ecuación (3.7.14) y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_3 = & 0\hat{i} + 0\hat{j} + \left[\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \left[-\mu_2 \cos(\alpha) + \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \right] \cos(\alpha) \right. \\
& \left. - \mu_1 \sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right] \hat{k} \\
\hat{P}_3 = & \hat{k} .
\end{aligned} \tag{3.7.15}$$

En la superficie (2) del prisma 2, utilizamos la ecuación de traslación (3.6.24a)

$$\begin{aligned}
& [x_0 + \beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \cos(\phi)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \sin(\phi)] \hat{j} + \\
\vec{r}_4 = & [t_2 - x_0 \tan(\alpha) \cos(\phi) - y_0 \tan(\alpha) \sin(\alpha) + \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha))] \hat{k} + \\
& \left[\frac{[t_4 - t_2 + x_0 \tan(\alpha) \cos(\phi) + y_0 \tan(\alpha) \sin(\alpha) - \beta_3 (\mu_2 + \beta_2 \cos(\alpha))]}{\hat{P}_3 \cdot \hat{N}_4} \right] \hat{k} .
\end{aligned} \tag{3.7.16}$$

Entonces, el producto punto es:

$$\hat{P}_3 \cdot \hat{N}_4 = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 . \tag{3.7.17}$$

Sustituimos la ecuación (3.7.17) en la ecuación (3.7.16) y simplificamos

$$\vec{r}_4 = [x_0 + \beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \cos(\phi)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \sin(\alpha) \sin(\phi)] \hat{j} + t_4 \hat{k} . \tag{3.7.18}$$

Para calcular la refracción en la superficie (2) del prisma 2, sustituimos las ecuaciones (3.7.17) y (3.7.15) en la ecuación de refracción (3.6.24b)

$$\hat{P}_4 = \mu_2 \hat{k} + \left(-\mu_2(1) + \sqrt{1 - \mu_2^2 [1 - (1)^2]} \right) \hat{k} = \mu_2 \hat{k} - \mu_2 \hat{k} + \hat{k}$$

$$\hat{P}_4 = \hat{k}. \quad (3.7.19)$$

En el plano imagen, sustituimos la ecuación (3.7.18) y el producto $\hat{P}_4 \cdot \hat{N}_5 = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ en la ecuación de traslación (3.6.25)

$$\bar{r}_5 = [x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi)] \hat{j} + t_4 \hat{k} + \left[\frac{t_5 - t_4}{1} \right] \hat{k}$$

$$\bar{r}_5 = [x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi)] \hat{i} + [y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi)] \hat{j} + t_5 \hat{k}. \quad (3.7.20)$$

La magnitud del desplazamiento $\Delta \bar{\rho}$ está definido como:

$$|\Delta \bar{\rho}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (3.7.21)$$

Calculamos los desplazamiento laterales:

$$\Delta x = x_5 - x_0 = x_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) - x_0 = \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \quad (3.7.22)$$

$$\Delta y = y_5 - y_0 = y_0 + \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) - y_0 = \beta_2 \beta_3 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi). \quad (3.7.23)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.7.22) y (3.7.23) en la ecuación (3.7.21)

$$|\Delta\bar{\rho}| = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\sqrt{\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)} = \beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha) \quad (3.7.24)$$

Sabemos que la distancia entre prismas es:

$$d = t_3 - t_2. \quad (3.7.25)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.7.8) y (3.7.25) en la ecuación (3.7.13)

$$\beta_3 = \frac{(t_3 - t_2)\cos(\alpha)}{\beta_2 + \mu_2 \cos(\alpha)} = \frac{d \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)}}. \quad (3.7.26)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.7.8) y (3.7.26) en la ecuación (3.7.24) para obtener el desplazamiento $|\Delta\bar{\rho}|$ en función de la separación d entre los prismas:

$$|\Delta\bar{\rho}| = d \left| \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{\mu_2 \text{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\sqrt{1 - \mu_2^2 \text{sen}^2(\alpha)}} \right|. \quad (3.7.27)$$

El término entre las barras en la ecuación (3.7.27) es constante. Éste depende únicamente

de las características de los prismas, del ángulo de cuña α y de la razón $\mu_2 = \frac{n_2}{n_1}$ entre los

índices de refracción. Por lo tanto, la razón de cambio del desplazamiento $|\Delta\bar{\rho}|$ es

directamente proporcional a la separación d entre los prismas.

El desplazamiento angular θ se define como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{\beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)}{\beta_2\beta_3\text{sen}(\alpha)\text{cos}(\phi)}\right) = \arctan\left(\frac{\text{sen}(\phi)}{\text{cos}(\phi)}\right) = \arctan[\tan(\phi)]$$

$$\theta = \phi \tag{3.7.28}$$

Concluimos que el desplazamiento angular θ y el ángulo de giro ϕ de los prismas es el mismo.

3.8 Conclusiones

Hemos desarrollado las ecuaciones de trazo exacto de rayos para un sistema de desplazamiento vectorial del frente de onda.

También demostramos que la dirección de un haz que emerge del sistema de desplazamiento propuesto, es igual a la dirección original del mismo. De igual manera se estableció que el haz se desplaza lateralmente mediante la implementación del sistema. Lo anterior, sin introducir ningún tilt adicional al sistema.

Demostramos que en incidencia perpendicular, la magnitud del desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$ no depende del ángulo de giro ϕ de los prismas. También el ángulo θ del desplazamiento del vector $\Delta\vec{\rho}$ es el mismo que el ángulo de giro ϕ de los prismas.

Los desplazamientos $|\Delta\vec{\rho}|$ y θ son linealmente dependientes de la distancia d y el ángulo ϕ de giro de los prismas, respectivamente. Más aún, cabe mencionar que, se puede variar la magnitud del desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$ modificando los parámetros de fabricación del sistema de desplazamiento. Al cambiar los valores del índice de refracción y ángulo de cuña, cambiamos la sensibilidad del sistema. Esto hace a la pendiente de la recta más horizontal o vertical, en la gráfica de distancia d entre prismas vs desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$.

Referencias del capítulo 3

Murty, M. V. R. K., “A compact lateral shearing interferometer based on the Michelson interferometer”, *Appl. Opt.* 9(5), pp. 1146-1148 (1970).

Stavroudis, O. N., “The optics of rays, wavefronts and caustics”, Academic Press, New York, 1972.

Malacara, D., “Radial, rotational and reversal shear interferometers”, *Optical Shop Testing*, pp. 173-206, second edition, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1992.

Mantravadi, M., V., “Lateral shearing interferometers”, *Optical Shop Testing*, pp. 123-172, second edition, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1992.

Páez, G., Strojnik, M., “Differential rotationally-shearing interferometer: implementation concept”, *SPIE*. 3061, pp. 417-424 (1997a).

Páez, G., Strojnik, M., “Interferometric patterns of asymmetrical wavefronts with differential rotationally-shearing interferometer”, *SPIE*. 3061, pp. 425-434 (1997b).

Rastogi P.K., “Optical measurement technique and applications”, Artech House, Inc., Boston, London (1997).

Elster, C., Weingärtner, I., “Solution to the shearing problem”, *Appl. Opt.* 38(23), pp. 5024-5031 (1999).

Páez, G., Strojnik, M., Torales, G. G., “Vectorial shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 39(28), pp. 5172-5178 (2000).

Torales, G. G., Páez, G., Strojnik, M., “Simulations and experimental results with a vectorial shearing interferometer”, *Opt. Eng.* 40(5), pp. 767-773 (2001).

Torales, G. G., Strojnik, M., Páez, G., “Risley prisms to control wave-front tilt and displacement in a vectorial shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 41(7), pp. 1380-1384 (2002).

Moreno, I., Páez, G., Strojnik, M., “Dove prism with increased throughput for implementation in a rotational-shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 42(22), pp. 4514-4521 (2003).

Capítulo 4

Simulaciones y pruebas

4.1 Introducción

En este capítulo reportamos los resultados experimentales para comprobar la validez del trazo exacto de rayos, por lo tanto del desplazamiento, del nuevo sistema director del frente de onda. Comparamos los datos teóricos obtenidos con las ecuaciones, con los datos experimentales. También analizamos algunos patrones de franjas producidos, con la incorporación del nuevo sistema director a un interferómetro Mach-Zehnder.

4.2 Desplazamiento de un haz

Como primer experimento hacemos incidir el haz láser sin expandir en el divisor DH1, donde una parte de la amplitud del haz se transmite (1) y otra se refleja (2). Utilizamos los espejos E1 y E2 para superponer los haces (1) y (2) en el divisor DH2. Colocamos dos prismas de cuña en el camino del haz (2) para desplazarlo, como se observa en la figura 4.1.

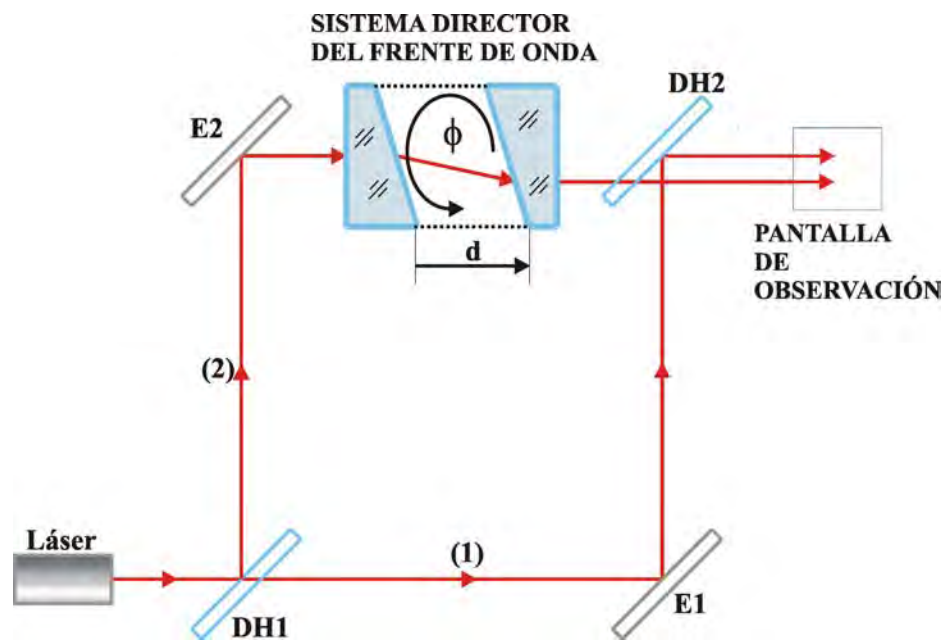


Figura 4.1. Interferómetro Mach-Zehnder modificado.

El haz (1) se mantiene sin cambio para utilizarlo de referencia y medir el desplazamiento del haz (2) en la pantalla de observación.

En la figura 4.2 mostramos los principales parámetros de un prisma de cuña. Los valores correspondientes a los prismas utilizados en el laboratorio se encuentran en la tabla 4.1.

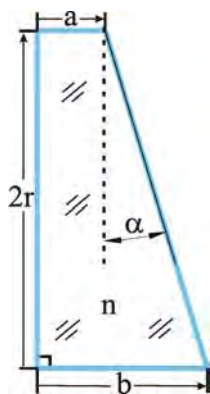


Figura 4.2. Prisma de cuña.

	Símbolo:	Valor:	Unidades:
Índice de refracción	n	1.517	U. A.
Ángulo de cuña	α	5	grados
Espesor del prisma	a	15	mm
Radio	r	45	mm

Tabla 4.1. Valores de los parámetros de los prismas.

4.2.1 Trazo exacto de rayos

Empleamos el trazo de rayos para evaluar la propagación de un haz a través del sistema director del frente de onda. Resumimos las ecuaciones (3.6.21) a (3.6.25) obtenidas en el capítulo anterior para hacer el trazo exacto de rayos

$$\hat{\mathbf{P}}_\ell = \mu_\ell \hat{\mathbf{P}}_{\ell-1} + \left[-\mu_\ell (\hat{\mathbf{P}}_{\ell-1} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\ell) + \sqrt{1 - \mu_\ell^2 [1 - (\hat{\mathbf{P}}_{\ell-1} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\ell)^2]} \right] \hat{\mathbf{N}}_\ell \quad \text{refracción (4.2.1)}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_\ell = \bar{\mathbf{r}}_{\ell-1} + \left[\frac{[t_\ell \hat{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{r}}_{\ell-1}] \cdot \hat{\mathbf{N}}_\ell}{\hat{\mathbf{P}}_{\ell-1} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\ell} \right] \hat{\mathbf{P}}_{\ell-1} \quad \ell = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{traslación (4.2.2)}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}} \quad \text{normal (4.2.3)}$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.2.4)$$

$$\mu_2 = \mu_4 = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.2.5)$$

Donde n_1 es el índice de refracción del medio, n_2 es el índice de refracción del material del prisma, α es el ángulo de cuña de los prismas, ϕ es el ángulo de giro de los prismas, t es la distancia al origen de la intersección entre el eje de giro y las superficies 1, 2, 3, 4 y 5.

Sustituimos los valores de los parámetros de los prismas de la tabla 4.1 en las ecuaciones (4.2.1) a (4.2.5) para hacer el trazo de rayos. Evaluamos la condición cuando el rayo incide perpendicular a la primera cara del prisma, los prismas no giran $\phi = 0$ y solamente variamos la distancia d entre ellos.

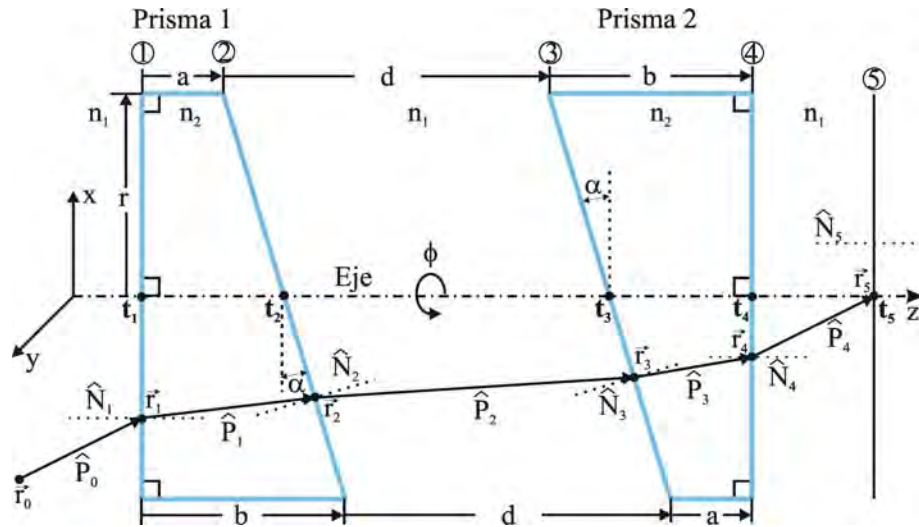


Figura 4.3. Sistema director del frente de onda.

Los valores iniciales de un rayo son:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} \\ \hat{P}_0 = \hat{k}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Las restricciones de operación de los prismas son:

$$\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{N}_4 = \hat{k} \\ \hat{N}_2 = \hat{N}_3. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

En las simulaciones calculamos los puntos en los que el rayo atraviesa cada superficie de los prismas y el plano 5 ($\vec{r}_1 \dots \vec{r}_5$) y la trayectoria que sigue ($\hat{P}_1 \dots \hat{P}_4$), como se observa en la figura 4.3.

Posteriormente empleamos un programa de Diseño Asistido por Computadora (CAD) para dibujar los prismas y los rayos.

Las figuras (4.4), (4.5) y (4.6) muestran la propagación de rayos para diferentes distancias de separación entre prismas.

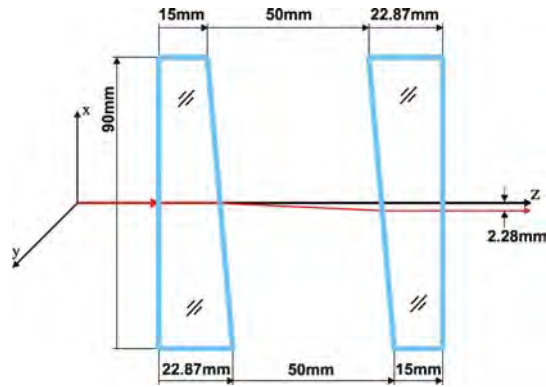


Figura 4.4. Trazo de rayos para una distancia de 50mm entre prismas.

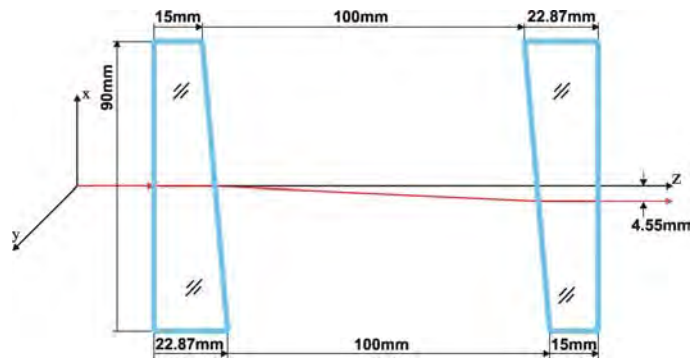


Figura 4.5. Trazo de rayos para una distancia de 100mm entre prismas.

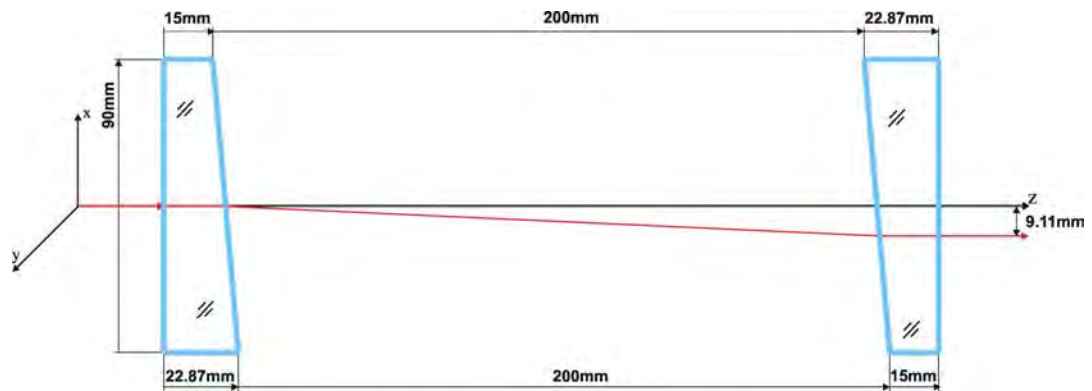


Figura 4.6. Trazo de rayos para una distancia de 200mm entre prismas.

Ahora giramos ambos prismas en el mismo sentido pero mantenemos fija la distancia entre ellos, $d = 200\text{mm}$. En la figura 4.7 mostramos solo la posición de los rayos de referencia (o) y los desplazados (x) en el plano 5, ya que un dibujo en “tres dimensiones” resulta complicado y poco ilustrativo.

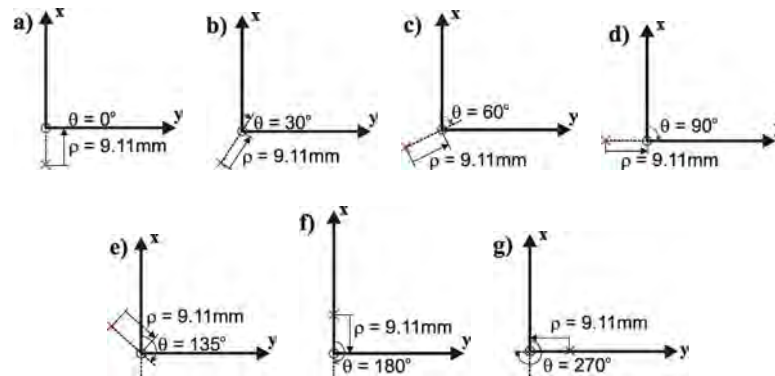


Figura 4.7. Posición de los rayos en el plano 5, distancia $d = 200\text{mm}$, ángulo de giro de los prismas a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$, e) $\phi = 135^\circ$, f) $\phi = 180^\circ$, g) $\phi = 270^\circ$.

A continuación analizamos el caso de incidencia oblicua de un rayo en la primera superficie del prisma 1. Los valores iniciales de un rayo son ahora

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} \\ \hat{P}_0 = P_{0x}\hat{i} + P_{0y}\hat{j} + P_{0z}\hat{k}. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Las restricciones del sistema siguen siendo las que se indican en (4.2.7).

Sustituimos los valores de los prismas de la tabla 4.1 en las ecuaciones de trazo de rayos (4.2.1) a (4.2.5) y calculamos los puntos $\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_5$. En la figura 4.8 se muestra la gráfica de trazo exacto de rayos para incidencia oblicua, la distancia entre prismas es $d = 100\text{mm}$ y el ángulo de giro $\phi = 0^\circ$.

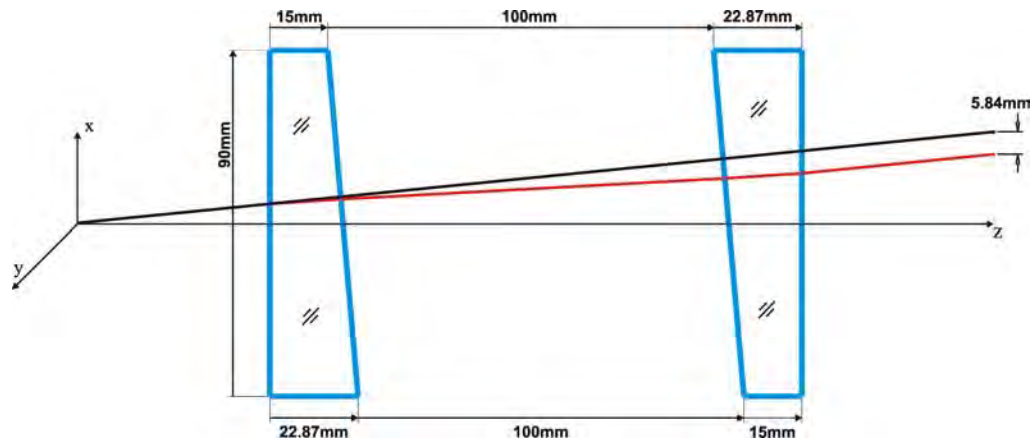


Figura 4.8. Trazo de rayos a incidencia oblicua en el sistema director.

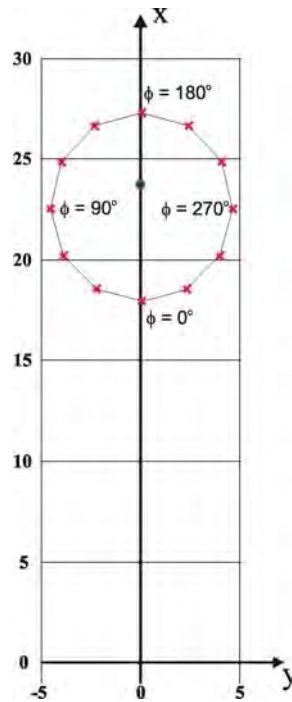


Figura 4.9. Posición de los rayos en el plano 5, al variar el ángulo de desplazamiento ϕ .

Al girar los prismas desde $\phi = 0^\circ$ hasta 360° , sin variar la distancia d entre prismas, el rayo oblicuo forma una elipse en el plano 5 (que se alarga en la dirección del rayo original). La magnitud del semieje menor es de 4.59mm, y del semieje mayor es de 4.67mm (ver figura 4.9).

Con las simulaciones llevadas a cabo hasta este momento, hemos comprobado la autenticidad de las ecuaciones de trazo exacto de rayos obtenidas en el capítulo anterior. Todos los puntos calculados con las ecuaciones (4.2.1) a (4.2.5) coinciden con las superficies 1, 2, 3, 4 y 5 en los dibujos hechos en el programa CAD.

Comprobamos que en incidencia normal la magnitud del desplazamiento no depende del ángulo de giro de los prismas. En incidencia oblicua la magnitud del desplazamiento si varía al girar los prismas. El rayo que incide en el plano 5 tiene una trayectoria paralela al rayo original, pero desplazada lateralmente, sin importar el ángulo de incidencia.

En la siguiente sección analizamos el desplazamiento de un haz como función de la distancia d y el ángulo ϕ de giro de los prismas.

4.2.2 Desplazamiento vectorial como función d y ϕ

Para calcular el desplazamiento, de un haz cuando atraviesa el sistema director, sustituimos los valores del índice de refracción n y del ángulo de cuña α de la tabla 4.1 en la ecuación (3.7.27).

$$|\Delta\vec{p}| = \left| \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{\mu_2 \sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\sqrt{1 - \mu_2^2 \sin^2(\alpha)}} \right| d$$

$$|\Delta\vec{p}| = 0.046d. \tag{4.2.8}$$

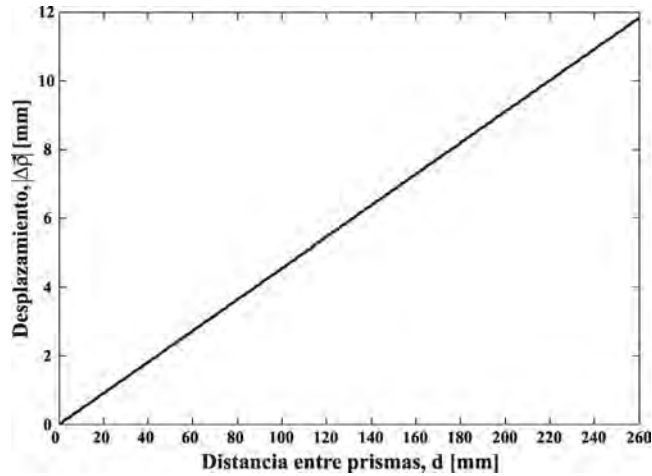


Figura 4.10. Variación del desplazamiento $|\Delta\bar{\rho}|$ en función de la distancia d .

De la ecuación (4.2.8) y de la gráfica de la figura 4.10, observamos que el desplazamiento $|\Delta\bar{\rho}|$ es directamente proporcional a la distancia d entre prismas, con una variación lineal y muy pequeña de $|\Delta\bar{\rho}| \approx 4.5\text{mm}$ por cada $d = 100\text{mm}$.

La ecuación (3.7.28) nos indica que los ángulos de giro ϕ de los prismas y el ángulo de desplazamiento θ son iguales, dibujamos esta relación en la gráfica de la figura 4.11.

$$\theta = \phi. \tag{4.2.9}$$

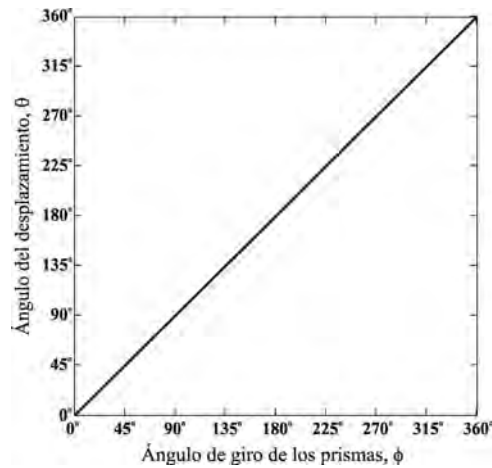


Figura 4.11. Variación del ángulo de desplazamiento θ en función del ángulo de giro ϕ .

En la siguiente sección reportamos los resultados experimentales obtenidos al desplazar un haz, y los comparamos con los datos teóricos de las simulaciones.

4.2.3 Resultados experimentales

Construimos el interferómetro de desplazamiento vectorial, como se observa en la fotografía de la figura 4.12. Usamos como fuente de energía un láser de He-Ne (2mW de potencia), de longitud de onda $\lambda = 632.8\text{nm}$. Utilizamos dos espejos (E), y dos divisores de haz (DH) con una relación de energía transmitida contra reflejada de 50:50. En uno de los brazos del interferómetro colocamos un riel para deslizar uno de los prismas de cuña. El haz láser incide perpendicular a la primera superficie. Variamos la distancia d y el ángulo de giro ϕ , y tomamos mediciones del desplazamiento.

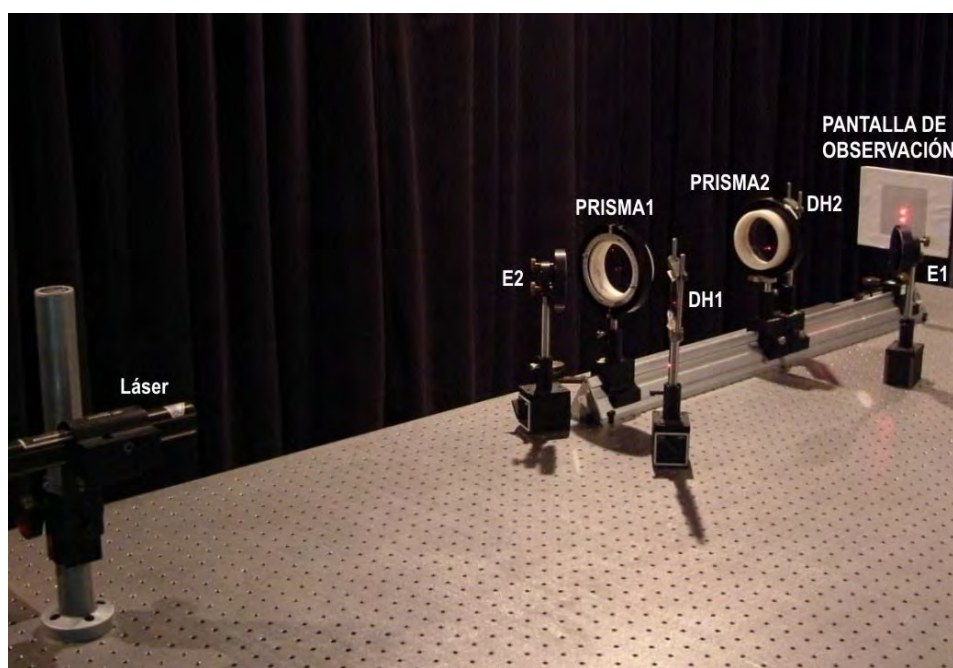


Figura 4.12. Interferómetro de desplazamiento vectorial.

Los desplazamientos fueron medidos en la pantalla de observación, sobre la cual imprimimos una retícula graduada en milímetros. Colocamos el centro de la retícula en la posición de incidencia del haz de referencia, y de ahí medimos la distancia hasta el punto donde incidía el haz desplazado.

En la tabla 4.2 resumimos los datos medidos para diferentes ángulos de giro y desplazamientos de los prismas.

Separación d [mm]	Calculado	Desplazamiento $ \Delta\vec{\rho} $ [mm]			
		$\phi = 0^\circ$	$\phi = 90^\circ$	$\phi = 180^\circ$	$\phi = 270^\circ$
50	2.28	2.25	2.2	2.3	2.3
100	4.55	4.5	4.5	4.65	4.55
150	6.83	6.85	6.95	7	6.95
200	9.11	9.05	9.05	9.05	9.1
250	11.39	11.5	11.45	11.5	11.55
300	13.66	13.6	13.45	13.65	13.7
350	15.94	16	16	16.05	16.1

Tabla 4.2. Desplazamientos $|\Delta\vec{\rho}|$ promedio, para diferentes distancias de separación d y ángulos de rotación ϕ de los prismas.

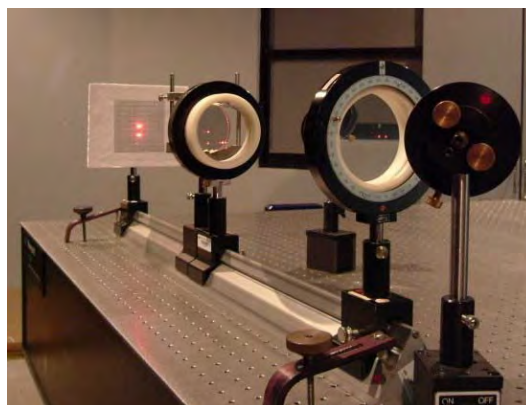
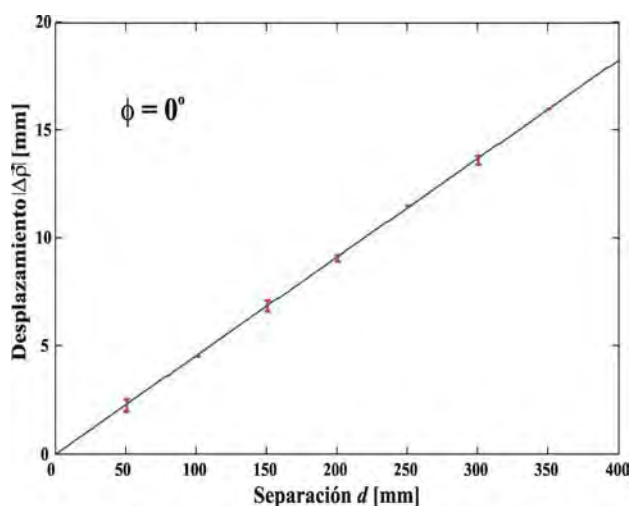


Figura 4.13. a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 0^\circ$, b) imagen real del desplazamiento.

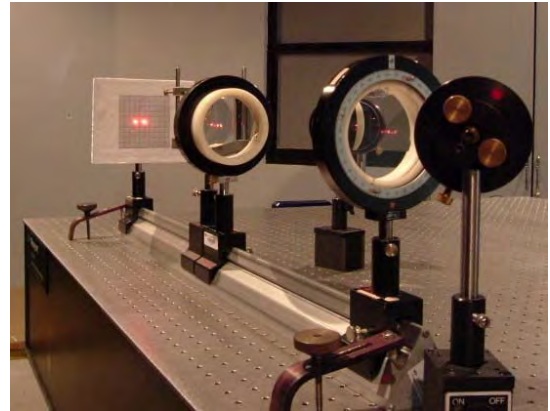
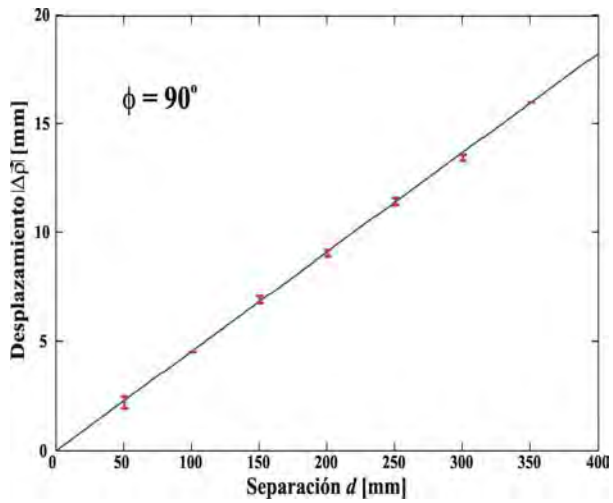


Figura 4.14. a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 90^\circ$,
b) imagen real del desplazamiento.

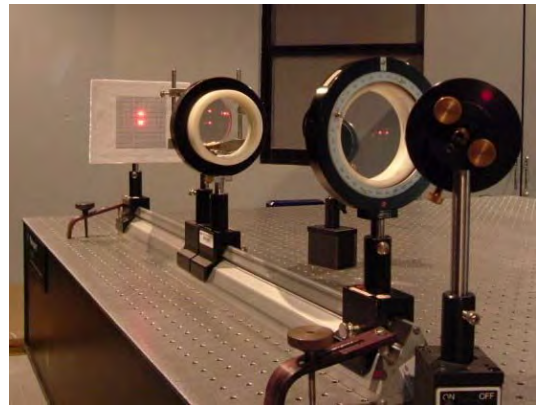
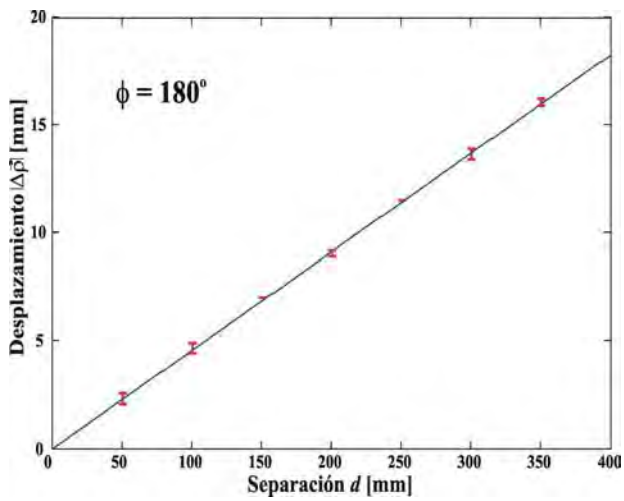


Figura 4.15. a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 180^\circ$,
b) imagen real del desplazamiento.

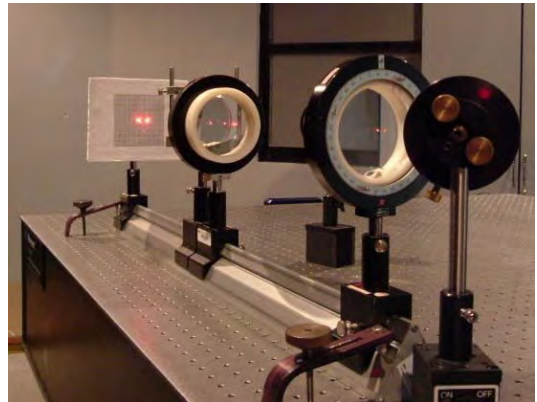
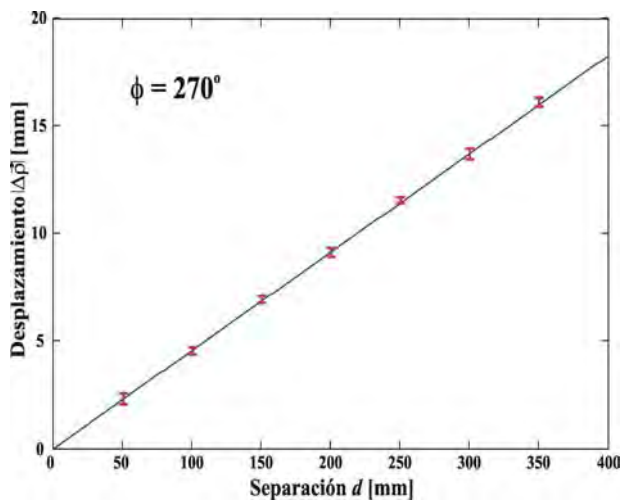


Figura 4.16. a) Desplazamiento vectorial para $\phi = 270^\circ$,
b) imagen real del desplazamiento.

En la siguiente sección analizamos la superposición de dos frentes de onda con diferentes tipos de aberraciones.

4.3 Interferograma de desplazamiento vectorial

Como resultado de la superposición de dos frentes de onda, uno de ellos desplazado lateralmente, obtenemos un patrón de franjas que representa el diferencial de la función del frente de onda original $W(x,y)$. La magnitud y dirección del desplazamiento han sido previamente establecidas. Por lo tanto es posible simular los patrones de franjas para diferentes tipos de aberraciones.

4.3.1 Desplazamiento diferencial de frentes de onda con aberraciones

Analicemos el tipo de franjas producidas por el interferómetro de desplazamiento vectorial utilizando la ecuación (3.4.11) para las aberraciones primarias. Además aplicando el concepto de desplazamiento diferencial de la ecuación (3.4.8). Por simplicidad analizamos el caso con desplazamiento en la dirección X, una cantidad Δx .

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} dy = m\lambda \quad (3.4.8)$$

$$W(x, y) = \begin{cases} c_{00} & \text{Pistón} \\ + c_{10}x & \text{Tilt respecto al eje x} \\ + c_{01}y & \text{Tilt respecto al eje y} \\ + c_{02}(x^2 + y^2) & \text{Defoco} \\ + c_{11}(x^2 + 3y^2) & \text{Astigmatismo} \\ + c_{31}y(x^2 + y^2) & \text{Coma} \\ + c_{40}(x^2 + y^2)^2 & \text{Esférica.} \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Esférica. El interferograma de desplazamiento vectorial en la dirección X está dado por

$$\Delta W = 4c_{04}(x^2 + y^2)x\Delta x = m\lambda . \quad (4.3.1)$$

Cuando la aberración primaria esférica es muy pequeña y no hay defoco, la ecuación (4.3.1) puede aproximarse a una ecuación cúbica.

Coma. Cuando el desplazamiento es en la dirección X, las franjas de interferencia tienen la forma de la ecuación

$$\Delta W = 2c_{31}xy\Delta x = m\lambda . \quad (4.3.2)$$

Las franjas tienen la forma de hipérbolas rectangulares, y las asíntotas se localizan en las direcciones X e Y.

Si el desplazamiento es en la dirección Y, la forma de las franjas está dada por la ecuación

$$\Delta W = c_{31}(x^2 + 3y^2)\Delta y = m\lambda . \quad (4.3.3)$$

En este caso las franjas tienen la forma de un sistema de elipses concéntricas.

Astigmatismo. El interferograma de desplazamiento en la dirección X, se observa como una serie de franjas paralelas perpendiculares a la dirección del desplazamiento

$$\Delta W = 2c_{11}x\Delta x = m\lambda . \quad (4.3.4)$$

Si el desplazamiento es en la dirección Y, las franjas tendrán la forma

$$\Delta W = 6c_{11}y\Delta y = m\lambda . \quad (4.3.5)$$

Defoco. El interferograma de desplazamiento vectorial para esta aberración, en la dirección X está dado por

$$\Delta W = 2c_{02}x\Delta x = m\lambda . \quad (4.3.6)$$

Las franjas del interferograma son rectas, paralelas y equidistantes. Las franjas son perpendiculares a la dirección del desplazamiento. Cuando la aberración es grande, el espacio entre franjas es pequeño [Mantravadi (1992)], [Malacara (1998)].

En la siguiente sección mostramos la simulación de interferogramas de desplazamiento vectorial. Lo anterior para diferentes tipos de aberración y con distintos valores de desplazamiento.

4.3.2 Simulación de interferogramas con aberraciones

El patrón de franjas en un interferograma está dado por la superposición de la irradiancia de las ondas que lo forman. Dicha superposición se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta). \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.2.23)$$

Aquí I_1 es la irradiancia de la onda (1) e I_2 es la irradiancia de la onda (2), δ es la diferencia de fase entre ambas y se relaciona con la diferencia de camino óptico por medio de la expresión:

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \text{DCO}. \quad (2.4.4)$$

Aquí λ es la longitud de las ondas electromagnéticas que interfieren. La DCO en un interferómetro de desplazamiento vectorial está dado por la expresión:

$$\text{DCO} = \Delta W(x, y) = W(x - \Delta x, y - \Delta y) - W(x, y). \quad (3.4.3)$$

El patrón de franjas se encuentra en la región de intersección de los frentes de onda directo y desplazado en el plano de detección, como se ve en la figura 4.17a. La diferencia de camino óptico $\Delta W(x, y)$ entre los frentes de onda se observa más fácilmente en la figura 4.17b.

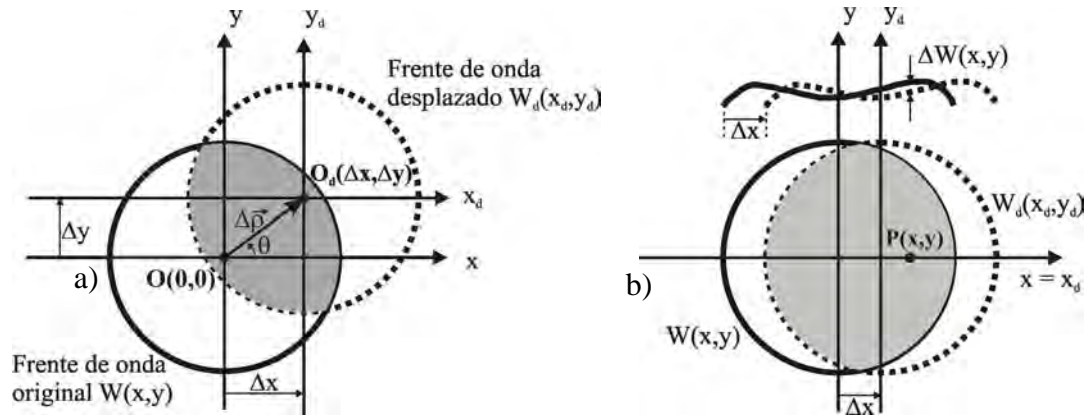


Figura 4.17. a) Frente de onda original $W(x,y)$ y desplazado $W_d(x_d,y_d)$ superpuestos.
b) Diferencia de camino óptico $\Delta W(x,y)$.

Para simular los patrones de franjas producidos por frentes de onda con diferentes tipos de aberración, utilizamos el polinomio de aberraciones $W(x,y)$ (ecuación 4.3.11). Sustituimos uno a la vez los términos del polinomio para cada aberración en la expresión de diferencia de camino óptico (3.4.3), con los desplazamiento Δx y Δy seleccionados. Finalmente sustituimos el término de DCO en la ecuación de irradiancia (2.2.23). Dado que sólo deseamos conocer la forma de las franjas podemos hacer la siguiente aproximación a la ecuación de irradiancia

$$I \approx \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \Delta W(x,y) \right]. \quad [W/m^2] \quad (4.3.7)$$

Aquí, $\lambda = 632.8\text{nm}$. A continuación se muestran los interferogramas de desplazamiento vectorial para las aberraciones primarias de esférica, coma y astigmatismo.

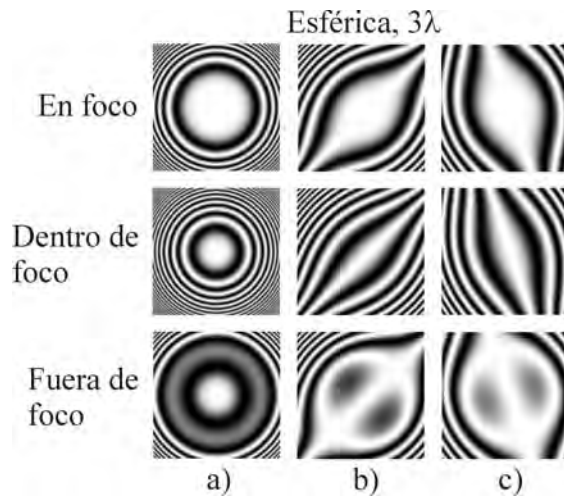


Figura 4.18. a) Interferómetro Mach-Zehnder,
 b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
 c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

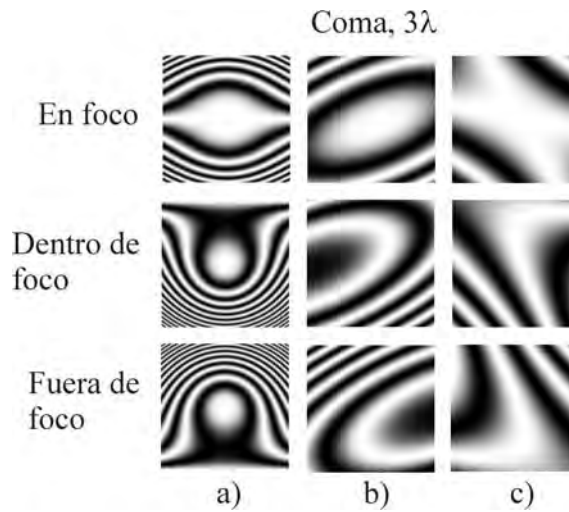


Figura 4.19. a) Interferómetro Mach-Zehnder,
 b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
 c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

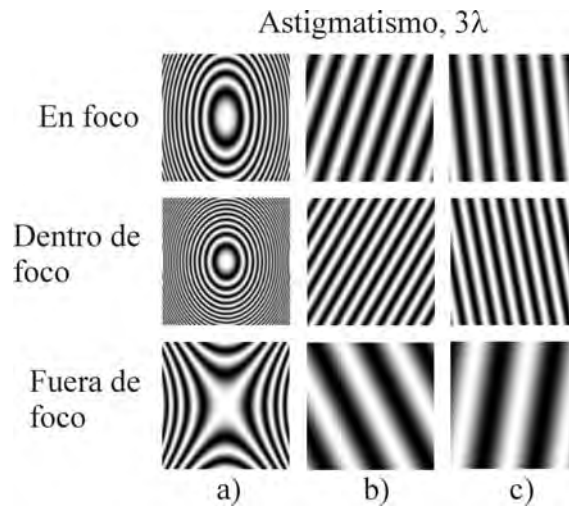


Figura 4.20. a) Interferómetro Mach-Zehnder,
 b) desplazamiento $\Delta x = -1.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 2.12\text{mm}$, $\theta = -45^\circ$,
 c) desplazamiento $\Delta x = 0.5\text{mm}$, $\Delta y = 1.5\text{mm}$, $\Delta\rho = 1.58\text{mm}$, $\theta = 251.56^\circ$.

4.3.3 Resultados experimentales

En el interferómetro Mach-Zehnder modificado, expandimos y filtramos el haz láser.

Usamos la lente bajo prueba para colimar el haz expandido, y lo dirigimos hacia el divisor de haz (DH1), como se observa en la figura 4.21.

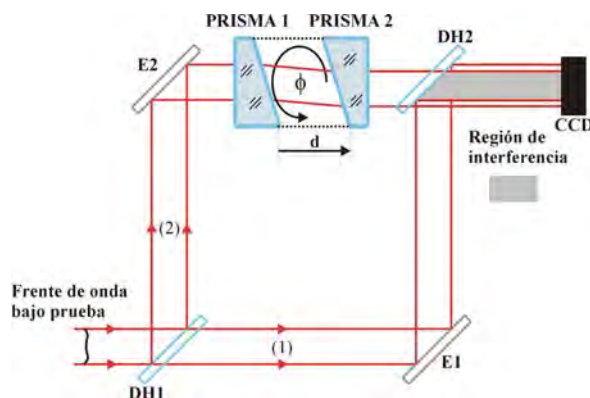


Figura 4.21. Interferómetro de desplazamiento vectorial, con un haz expandido.

Hacemos incidir la superposición de los haces directo (1) y desplazado (2) en un CCD de 4096x4096 píxeles, 9x9 μm por píxel y con 12 bits de resolución, como se observa en la fotografía de la figura 4.22.

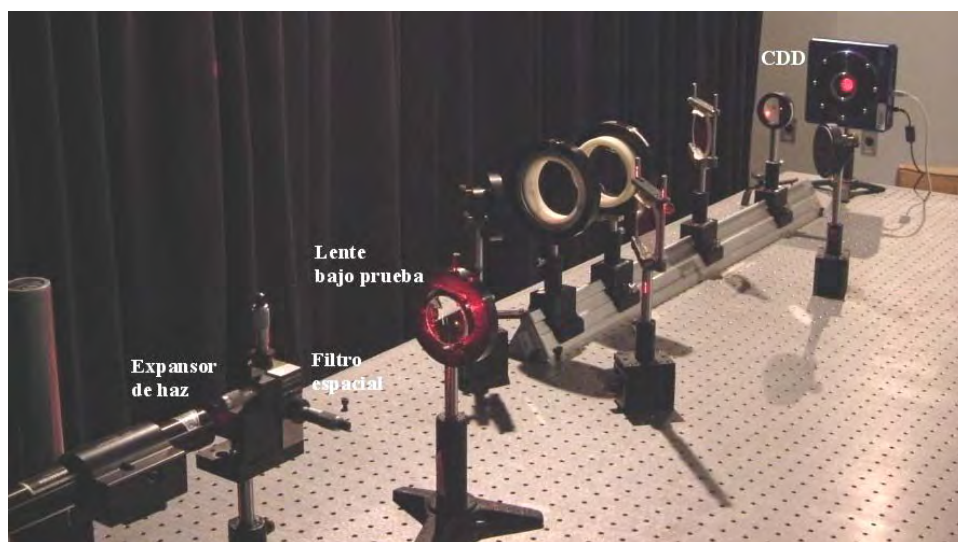


Figura 4.22. Arreglo experimental del interferómetro de desplazamiento vectorial utilizando el haz bajo prueba expandido.

En las pruebas utilizamos dos lentes, una lente tiene las siguientes aberraciones medidas en un interferómetro Wyco. [Manual Wyco]

Coeficientes de aberraciones.		
Aberración:	Valor: (longitudes de onda)	Ángulo:
Esférica	7.413λ	
Astigmatismo	-0.163λ	20.297°
Coma	0.615λ	-78.486°
Tilt	0.568λ	169.965°

Tabla 4.3. Valores de aberraciones medidos con el Wyco para una lente biconvexa.

En la figura 4.23 mostramos los interferogramas simulados con los valores de la tabla 4.3 y los obtenidos con el arreglo experimental de la figura 4.22.

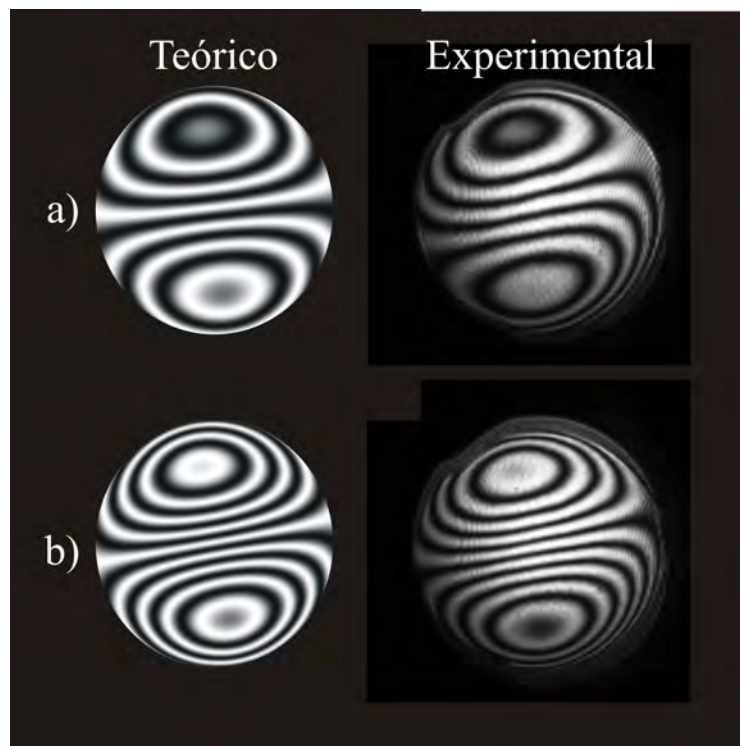


Figura 4.23. Interferogramas de desplazamiento vectorial
a) desplazamiento $\Delta x = -1.37\text{mm}$, $\Delta y = 0\text{mm}$,
b) desplazamiento $\Delta x = -2.28\text{mm}$, $\Delta y = 0\text{mm}$.

La figura 4.24 muestra los patrones de franjas para un doblete, corregido de aberración esférica (ver tabla 4.4), la lente se encuentra fuera de foco.

Coeficientes de aberraciones.		
Aberración:	Valor: (longitudes de onda)	Ángulo:
Esférica	-2.175λ	
Astigmatismo	-0.558λ	-88.019°
Coma	1.959λ	135.554°
Tilt	2.174λ	-62.248°

Tabla 4.4. Valores de aberraciones medidos con el Wyco para el doblete.

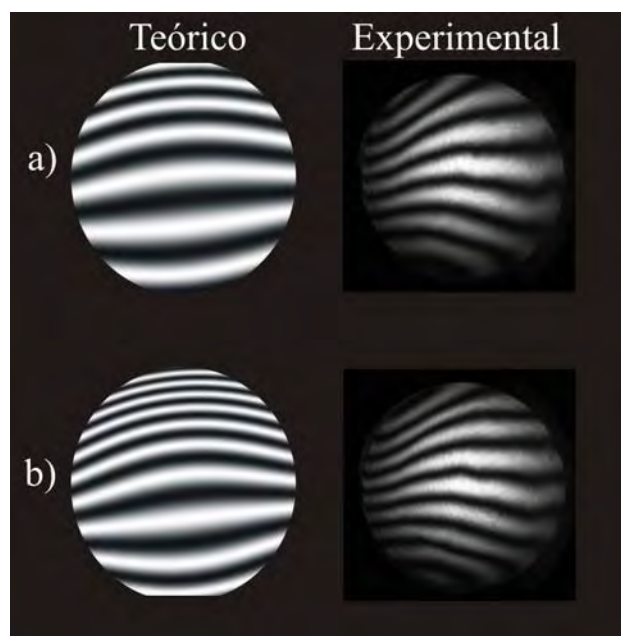


Figura 4.24. Interferogramas de desplazamiento vectorial
a) desplazamiento $\Delta x = -1.14\text{mm}$ y $\theta = 0^\circ$,
b) desplazamiento $\Delta x = -2.28\text{mm}$ y $\theta = 0^\circ$.

Los patrones de franjas obtenidos con el interferómetro de desplazamiento vectorial muestran una gran semejanza con los simulados mediante el polinomio de aberraciones (3.4.11). Si bien los patrones de franjas experimentales y simulados no son exactamente iguales, si se observa que la forma de las franjas es la esperada para las aberraciones que producen las lentes bajo prueba.

4.4 Conclusiones

Con las ecuaciones de trazo exacto de rayos, deducidas en el capítulo tres, simulamos la propagación de un haz a través del sistema de desplazamiento vectorial. En la simulación, los rayos efectivamente se refractan en la superficie de los prismas. Y pasan por los puntos $\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_5$, correspondientes efectivamente a las superficies de la 1 a la 5. Esto comprueba la habilidad de nuestras ecuaciones para predecir el comportamiento del sistema.

Para incidencia perpendicular la magnitud del desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$ de los rayos no varía al girar ambos prismas un ángulo ϕ , depende solamente de la distancia d entre ellos. Al girar ambos prismas el vector de desplazamiento $\Delta\vec{\rho}$ forma un ángulo $\theta = \phi$ con respecto al eje X en la dirección negativa, como se observa en la figura 4.25.

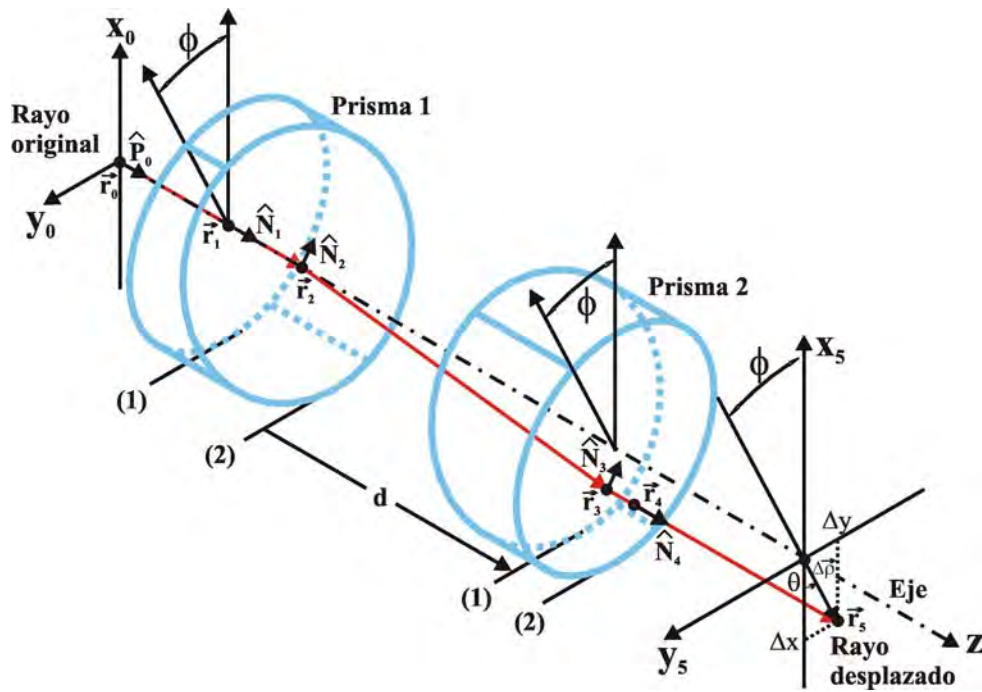


Figura 4.25. Incidencia perpendicular en el sistema director.

Para incidencia oblicua la magnitud del desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$ si varía al girar ambos prismas.

La dirección del rayo emergente del sistema director, para cualquier tipo de incidencia, es paralela a la dirección inicial del rayo. Cabe notar que el rayo se desplaza en función de los parámetros del sistema

Las simulaciones y los resultados experimentales comprueban la veracidad de las ecuaciones del trazo de rayos (3.6.21) a (3.6.25), de la magnitud $|\Delta\vec{\rho}|$ (3.7.27) y del ángulo θ (3.7.28) del vector de desplazamiento $\Delta\vec{\rho}$, deducidas en el capítulo tres.

Las pequeñas diferencias entre los datos teóricos y los experimentales se deben a que con las monturas existentes no es posible realizar desplazamientos y girar los prismas con mayor precisión. Otra fuente de error en las mediciones es la resolución de la pantalla de observación. Ya que ésta tiene como unidad mínima el milímetro, mientras que los desplazamientos teóricos son de fracciones de milímetro. Además el diámetro de haz del láser se va ensanchando, y al llegar a la pantalla es ligeramente mayor a 3mm, lo cual aumenta la incertidumbre de donde medir los desplazamientos.

Simulamos interferogramas de desplazamiento vectorial, para frentes de onda con diferentes tipos de aberraciones. Las simulaciones muestran que los interferogramas de desplazamiento tienen menor número de franjas, lo cual facilita el procesamiento digital de

los mismos. Se observa también que el número de franjas y la forma de las mismas depende de la dirección y magnitud del vector desplazamiento $\Delta\vec{\rho}$.

Probamos lentes con diferentes aberraciones y encontramos gran similitud en la forma de los interferogramas simulados y los obtenidos con el interferómetro de desplazamiento vectorial.

Referencias del capítulo 4

Manual de referencia del interferómetro Wyco, DOS/RTI Software Reference Manual, Apéndice D.

Mantravadi, M., V., “Lateral shearing interferometers”, Optical Shop Testing, pp. 123-172, second edition, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1992.

Malacara, D., Servin, M., Malacara, Z., “Interferogram análisis for optical testing”, Marcel Dekker Inc., USA, 1998.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Conclusiones

La interferometría tradicional requiere de componentes de referencia de alta calidad, de una planicidad $\lambda/20$ o superior. El frente de onda de referencia debe tener una calidad superior a la del frente de onda bajo prueba, de otra forma las mediciones son erróneas.

La interferometría de desplazamiento tiene la ventaja de que el frente de onda bajo prueba se compara consigo mismo. El patrón de franjas resultante representa el diferencial total del frente de onda. Posteriormente se pueden utilizar técnicas de integración y de procesamiento digital de imágenes para recuperar el frente de onda original.

Desarrollamos las ecuaciones de trazo exacto de rayos para la nueva configuración de prismas delgados del sistema director de frente de onda. Estas ecuaciones describen los puntos donde un rayo atraviesa cada superficie de los prismas y las trayectorias de refracción. Comprobamos que la dirección del rayo desplazado, por el sistema, es paralela a la del rayo original.

En la nueva configuración del sistema director, las variables en control del operador son la distancia entre prismas d y el ángulo de giro ϕ . La magnitud $|\Delta\vec{\rho}|$ y el ángulo θ del vector desplazamiento $\Delta\vec{\rho}$, son linealmente dependientes de la distancia d y el ángulo de giro ϕ de los prismas, respectivamente.

Armamos un interferómetro Mach-Zehnder e incorporamos en uno de los brazos, el sistema director del frente de onda. Con el interferómetro demostramos experimentalmente las ecuaciones de trazo exacto de rayos y de desplazamiento $|\Delta\vec{\rho}|$.

Simulamos interferogramas de desplazamiento vectorial, para frentes de onda con diferentes tipos aberraciones. Es posible seleccionar la dirección y magnitud del desplazamiento $\Delta\vec{\rho}$ para detectar diferentes aberraciones en los frentes de onda. Las simulaciones muestran que los interferogramas de desplazamiento tienen menor número de franjas, lo cual facilita el procesamiento digital de los mismos.

Probamos lentes con diferentes aberraciones y encontramos gran similitud en la forma de los interferogramas simulados y los obtenidos con el interferómetro de desplazamiento vectorial.

5.2 Trabajo a futuro

Se requiere mejorar el diseño mecánico de las monturas de los prismas, para que nos permitan desplazamientos más precisos. La montura debe ser capaz de hacer girar ambos prismas en la misma dirección y el mismo ángulo simultáneamente. Además debe permitir variar la distancia entre prismas.

También se requiere el análisis de sensibilidad del sistema director, para evaluar la cantidad de error que pueden introducir la calidad de los prismas, de las monturas, mala alineación, etc.

Otro tema de interés es la recuperación del frente de onda con $\Delta\rho$ y θ conocidos con precisión.

**Apéndice A. Cálculo de la normal \vec{N} de una superficie inclinada,
en función del ángulo de giro ϕ**

El eje de giro del prisma de cuña de la figura A.1 coincide con el eje Z. El ángulo de giro ϕ del prisma se mide con respecto al eje X.

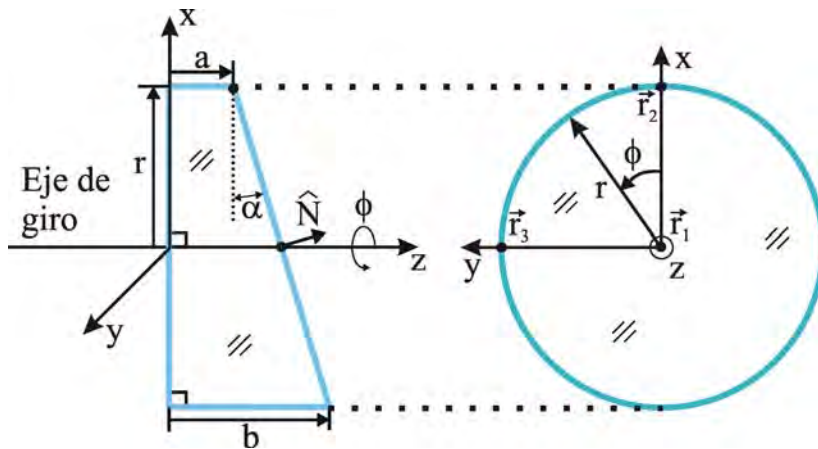


Figura A.1. Vista lateral y frontal de un prisma de cuña.

Las dimensiones del prisma son:

a y b son la base menor y mayor respectivamente,

α es el ángulo de la cuña,

r el radio de la primera superficie.

Seleccionamos tres puntos \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 de la segunda superficie del prisma para calcular su normal.

El punto \vec{r}_1 tiene coordenadas:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, y_1 = 0, \\z_1 &= a + \frac{b-a}{2} = a + r \tan(\alpha).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Aquí

$$\tan(\alpha) = \frac{b-a}{r}.\tag{A.2}$$

El punto \vec{r}_2 tiene de coordenadas:

$$\begin{aligned}x_2 &= r, y_2 = 0, \\z_2 &= a + \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos(\phi) = a + r \tan(\alpha)[1 - \cos(\phi)].\end{aligned}\tag{A.3}$$

El punto \vec{r}_3 tiene de coordenadas:

$$\begin{aligned}x_3 &= 0, y_3 = r, \\z_3 &= a + \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2} \sin(\phi) = a + r \tan(\alpha)[1 - \sin(\phi)].\end{aligned}\tag{A.4}$$

Para encontrar la dirección del vector normal a la superficie que contiene a los puntos \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 hacemos:

$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1. \quad (\text{A.5})$$

Calculamos los productos cruz de la ecuación (A.5)

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & a + r \tan(\alpha) \\ r & 0 & a + r \tan(\alpha)[1 - \cos(\phi)] \end{vmatrix} = -[-r(a + r \tan(\alpha))] \hat{j} = r[a + r \tan(\alpha)] \hat{j} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r & 0 & a + r \tan(\alpha)[1 - \cos(\phi)] \\ 0 & r & a + r \tan(\alpha)[1 - \sin(\phi)] \end{vmatrix} = \begin{matrix} [-r(a + r \tan(\alpha)[1 - \cos(\phi)])] \hat{i} \\ -[r(a + r \tan(\alpha)[1 - \sin(\phi)])] \hat{j} \\ + r^2 \hat{k} \end{matrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & r & a + r \tan(\alpha)[1 - \sin(\phi)] \\ 0 & 0 & a + r \tan(\alpha) \end{vmatrix} = [r(a + r \tan(\alpha))] \hat{i}. \quad (\text{A.8})$$

Rescribimos la ecuación (A.5)

$$\vec{N} = \begin{matrix} \{r[a + r \tan(\alpha)] - r[a + r \tan(\alpha)(1 - \cos(\phi))]\} \hat{i} \\ + \{r[a + r \tan(\alpha)] - r[a + r \tan(\alpha)(1 - \sin(\phi))]\} \hat{j} \\ + r^2 \hat{k}. \end{matrix} \quad (\text{A.9})$$

Simplificamos la ecuación (A.9)

$$\vec{N} = r^2 \tan(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + r^2 \tan(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + r^2 \hat{k}. \quad (\text{A.10})$$

Obtenemos el vector unitario de la normal \vec{N} haciendo:

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}}}. \quad (\text{A.11})$$

Sustituimos la ecuación (A.10) en la ecuación (A.11)

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{r^2 [\tan(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + \tan(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + \hat{k}]}{r^2 [(\tan(\alpha) \cos(\phi))^2 + (\tan(\alpha) \text{sen}(\phi))^2 + 1]^{1/2}} = \frac{\tan(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + \tan(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + \hat{k}}{[\tan^2(\alpha) [\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)] + 1]^{1/2}} \\ \hat{N} &= \frac{\tan(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + \tan(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + \hat{k}}{[\tan^2(\alpha) + 1]^{1/2}} = \frac{\tan(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + \tan(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + \hat{k}}{\sec(\alpha)} \\ \hat{N} &= \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \hat{i} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \hat{j} + \cos(\alpha) \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

El vector unitario (A.12) representa la normal de la segunda superficie del prisma de la figura A.1, y es importante para el trazo exacto de rayos.