



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

Interferometría electrónica del patrón de moteado con sensibilidad
en plano para el análisis de esfuerzos mecánicos y medición de
topografía usando luz divergente

Presenta:

M. en C. Jorge Ramón Parra Michel

Como requisito para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Óptica)

Asesora: Dra. Amalia Martínez García

León, Guanajuato, México. Febrero 2011

Resumen

Los nuevos materiales utilizados en la ingeniería como los plásticos, metales, cerámicas, materiales compuestos, entre otros, necesitan ser analizados extensamente para obtener sus propiedades mecánicas. Normalmente los especímenes utilizados en las pruebas de laboratorio tienen formas bien conocidas con el fin de simplificar y reducir las variables involucradas en el estudio de su comportamiento mecánico cuando se someten a tensiones. Realizar mediciones en elementos mecánicos con forma irregular complica enormemente el análisis de sus propiedades mecánicas. La técnica de interferometría electrónica del moteado es utilizada como una herramienta para el análisis del campo de deformación o para cuantificar propiedades mecánicas de los materiales, así como evaluar la topografía de objetos. También nos permite verificar diseños de elementos mecánicos obtenidos a través de simulaciones como la técnica de análisis por elemento finito.

Un parámetro importante a considerar cuando se utiliza la técnica de interferometría electrónica del moteado para la medición del campo de desplazamiento o de la topografía de superficies es el cálculo del vector de sensibilidad. El vector de sensibilidad está en función de la posición de las fuentes de iluminación y de la topografía del objeto. El vector de sensibilidad es constante en el caso de iluminación colimada no así en el caso de iluminación divergente. Dada la ventaja del uso de la iluminación divergente respecto a que se utiliza para iluminar superficies grandes, se calcula el vector de sensibilidad para el caso de iluminación divergente en la evaluación de la topografía de objetos grandes. Dado que el vector de sensibilidad depende de la topografía se propone un algoritmo basado en la técnica de Gauss-Seidel para la obtención de la forma del objeto. También se muestra una comparación entre los diferentes filtros pasa bajos para la reducción del ruido causado por el efecto del moteado.

Finalmente se muestra como se utiliza la técnica de Monte Carlo para calcular la incertidumbre estándar en las mediciones de topografía y del campo de deformación.

Dedicatoria

A ma femme, qui me montré voir la lumiere du autre façon.

A ma mère, a mon père , pasque je suis la sum de tout son efforts.

A ma belle-mère et a ma belle-sœur parce que je trouvé ma nouvelle famille.

A mon asesor, parce j'ai trouvé une bonne amie dans elle.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el proyecto número 48286-F, "*Interferometría de moteado para contorneo y análisis de deformaciones en 3D*", con el cual se adquirió parte del equipo para la realización de la presente tesis. Nuevamente se agradece al CONACYT por el soporte económico a través de la beca número 195716. Al Centro de Investigaciones en Óptica A. C. por todas las facilidades prestadas. Al Ing. Juan Antonio Rayas y al Dr. Raúl Cordero por sus útiles consejos y comentarios.

Igualmente se agradece al comité evaluador:

Dra. Amalia Martínez García, Directora de Tesis, (Centro de Investigaciones en Óptica A. C.),

Dr. Bernardino Barrientos García, (Centro de Investigaciones en Óptica A. C.),

Dr. Carlos Pérez López, (Centro de Investigaciones en Óptica A. C.),

Dr. César A. Sciammarella, (Illinois Institute of Technology),

Dr. Cruz Meneses Fabián, (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla),

Dr. Ramón Rodríguez Vera, (Centro de Investigaciones en Óptica A. C.),

por sus valiosas sugerencias y observaciones.

Índice

RESUMEN	i
INDICE.....	iv
INTRODUCCIÓN GENERAL.....	xii
CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES	2
CAPÍTULO 2: TEORÍA ELÁSTICA PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS	
Introducción	4
2.1 Teoría elástica.....	4
2.2 Relación entre desplazamiento y deformación	6
2.2.1. Estado triaxial de esfuerzos	8
2.2.2. Estado Biaxial de esfuerzos	10
2.3 Sólidos sometidos a tensión	11
2.4 Ecuaciones de equilibrio en el estado biaxial de esfuerzos	14
2.4.1 Funciones de esfuerzo de Airy	15
2.4.2 Funciones de esfuerzo de Airy en coordenadas cilíndricas	16
2.4.3 Funciones complejas de esfuerzo de Airy	18
2.4.4 Algunas soluciones a las funciones de esfuerzo de Airy.....	20
2.5 Factor de concentración de esfuerzos	26
2.5.1 Problema de la falla centrada.....	26
2.5.2 Factor de intensidad de esfuerzo	28
CAPÍTULO 3: FUNDAMENTOS DE LA INTERFEROMETRÍA ELECTRÓNICA DEL MOTEADO (ESPI)	
Introducción	33
3.1 Fenómeno de moteado	33
3.1.1 Formación del patrón de moteado objetivo.....	34
3.1.2 Formación del patrón de moteado subjetivo	40
3.2 Correlación de los patrones de moteado	41
3.3 Decorrelación de patrones de moteado.....	44
3.4 Fotografía de Moteado.....	45

3.5	Obtención de la fase $\Delta\phi$	48
3.5.1	Método de corrimiento de fase.....	48
3.5.2	Método de Fourier.....	52
3.6	Desenvolvimiento de la fase.....	54
3.7	Eliminación del ruido causado por el efecto de moteado para la obtención de la fase	56
3.7.1	Filtros pasa bajos	56
3.7.2	Filtros promediadores.....	58
CAPÍTULO 4: MEDICIÓN DEL CAMPO DE DEFORMACIÓN POR ESPI		
4.1	Interferometría y tipos de interferómetros	62
4.1.1	Interferómetros por división de frente de onda	63
4.1.2	Interferómetros por división de amplitud	66
4.2	Medición de los campos de desplazamiento por ESPI para el caso de iluminación colimada	68
4.2.1	Interferómetro con sensibilidad fuera de plano	68
4.2.2	Interferómetro con sensibilidad en plano	70
4.3	Vector de sensibilidad para iluminación divergente	72
4.3.1	Sistema con un solo haz de iluminación divergente	72
4.3.2	Sistema con dos haces de iluminación divergente	74
4.4	Obtención de la deformación a partir de la técnica ESPI	76
4.4.1	Técnica del límite de la diferencia del cociente.....	76
4.4.2	Técnica de la diferencia central	77
4.4.3	Método de Stokes.....	77
CAPÍTULO 5: MEDICIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO MEDIANTE ESPI		
	Introducción	82
5.1	Medición del factor de intensidad de esfuerzos por la técnica ESPI.....	82
5.2	Análisis de esfuerzos y la estimación del factor de intensidad de esfuerzo	85
5.3	Sistema óptico	88
5.4	Simulación por Análisis de Elemento Finito	90

5.5 Proceso experimental y resultado.....	90
5.6 Conclusiones.....	96
CAPÍTULO 6: USO DE LA TÉCNICA DE INTERFEROMETRÍA DE MOTEADO EN LA MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA UTILIZANDO ILUMINACIÓN DUAL	
Introducción	101
6.1 Modelo teórico propuesto para contorno de superficies	102
6.2 Experimentos y análisis de resultados	106
6.3 Conclusiones	116
CAPÍTULO 7: CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR MEDIANTE LA TÉCNICA DE MONTE CARLO PARA LA MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA Y DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO MEDIANTE ESPI	
Introducción	119
7.1 Ley de propagación de incertidumbres.....	120
7.2 Utilización del método de Monte Carlo para el análisis de la incertidumbre.....	121
7.3 Análisis teórico correspondiente a la evaluación de la incertidumbre	122
7.3.1 Cálculo de la incertidumbre estándar para la diferencia de fase.....	123
7.3.2 Cálculo de la incertidumbre estándar para las componentes del vector de sensibilidad	125
7.3.3 Cálculo de la incertidumbre estándar para la topografía del espécimen....	126
7.3.4 Cálculo de la incertidumbre estándar para el campo desplazamiento $u(x, y)$	126
7.4 Parte experimental.....	127
7.4.1 Evaluación de la topografía	127
7.4.2 Obtención del campo de desplazamiento $u(x, y)$	130
7.4.3 Evaluación de la incertidumbre correspondiente a la medición de la forma y de la deformación.....	133
CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES GENERALES	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Desplazamientos de los puntos P , A y B	8
Figura 2.2 Estado de esfuerzos en elemento de volumen.	9
Figura 2.3 Diagramas de curva de esfuerzo deformación para varios tipos de materiales.	12
Figura 2.4 Estado de esfuerzos en un elemento diferencial de área en coordenadas cilíndricas. ..	17
Figura 2.5 Geometría usada para la solución Michell para una placa sometida a tensión.	21
Figura 2.6 Solución normalizada de Michell a la función de Airy para la geometría y condiciones mostrada en la figura 2.5	22
Figura 2.7 Geometría usada por Williams para determinar los campos de esfuerzo alrededor de una grieta.	23
Figura 2.8 Solución por Williams para los campos de esfuerzo normalizado alrededor de una grieta en la dirección radial, según la ecuación 2.44a para la geometría mostrada en la figura 2.7.	25
Figura 2.9 Placa con una grieta centrada.	27
Figura 2.10 Campo de esfuerzo en la placa con una grieta centrada como se muestra en la figura 2.9, donde el esfuerzo aplicado es $\sigma = 10$ y $r > 2$ para evitar la singularidad.	28
Figura 2.11 Deformación de una grieta en tres modos independientes, a) <i>Modo I</i> , b) <i>Modo II</i> y c) <i>Modo III</i>	30
Figura 2.12 Distribución del esfuerzo y deformación normalizado en una grieta en función del Factor de Intensidad de esfuerzo K_I , a) σ_x , b) deformación en la dirección x , c) σ_y y d) deformación en la dirección y	31
Figura 3.1 Patrón de moteado típico cuando se utiliza iluminación láser.	33
Figura 3.2 Esparcimiento de la luz láser por una superficie rugosa.	34
Figura 3.3 Formación de una mota sobre un plano de observación (moteado objetivo).	35
Figura 3.4 Tamaño de una mota σ_0' en función del tamaño de iluminación D , $z=100$ mm, $\lambda = 442$ nm, $I=100$	39
Figura 3.5 Formación de una imagen de patrón de motas sobre un plano (moteado subjetivo). ..	40

Figura 3.6 a) Imagen de referencia I_1 , b) Imagen después de la deformación I_2 y c) Correlación de las dos imágenes.	44
Figura 3.7 Registro de un patrón de moteado antes y después de que la superficie rugosa se ha desplazado una cantidad $M \Delta x$	45
Figura 3.8 Fotografías del patrón de moteado de dos puntos de un disco rotado ligeramente.	48
Figura 3.9 Corrimiento de fase para $N=3$ pasos y sus mapa de fase envuelta correspondiente. ..	52
Figura 3.10 Método de obtención de la fase ϕ mediante el método de Fourier, a) Imagen del interferograma, b) el espectro de Fourier, c) $B(f-f_0, y)$ y d) la fase envuelta obtenida.	54
Figura 3.11 a) y c) fase envuelta, b) y d) fase desenvuelta correspondiente.	55
Figura 3.12 Función $h(x,y)$ para el filtrado de imágenes; a) máscara cuadrada (10×10), b) máscara circular ($radio=5$), c) máscara con perfil Gaussiano ($radio=5$).	57
Figura 3.13 a) Interferograma sin filtro, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.	58
Figura 3.14 a) Interferograma filtrado mediante una función media, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.	58
Figura 3.15 a) Interferograma filtrado mediante un filtro de convolución con kernel Gaussiano, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.	59
Figura 3.16 a) Interferograma filtrado mediante un filtro pasa bajas de Fourier con una máscara circular b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.	59
Figura 4.1 En el experimento de Young se observa un patrón de interferencia por división de frente de onda.	64
Figura 4.2 Diagrama del experimento de Young.	65
Figura 4.3 Formación de la interferencia por división de amplitud.	67
Figura 4.4 Diagrama para análisis del desplazamiento fuera de plano.	69
Figura 4.5 Arreglo óptico para determinar los desplazamientos fuera de plano.	69
Figura 4.6 Diagrama para el análisis de desplazamiento en plano.	70
Figura 4.7 Arreglo óptico para observar los desplazamientos en el plano.	71
Figura 4.8 Componentes del vector de sensibilidad fuera de plano: a) $e_{x'}$, b) $e_{y'}$, c) $e_{z'}$	73
Figura 4.9 Componentes del vector de sensibilidad en plano: a) $e_{x''}$, b) $e_{y''}$, c) $e_{z''}$	75

Figura 4.10 Una matriz de 3x3 se usa como elemento diferencial de superficie para encontrar la deformación utilizando el método de Stokes.	79
Figura 5.1 Geometría del espécimen con un enmallado para el análisis por elemento finito. La línea punteada delimita el área de observación y análisis.	84
Figura 5.2 Puntos de referencia donde se realizan las mediciones mediante ESPI para calcular el factor de intensidad de esfuerzos.	86
Figura 5.3 Esquema del sistema óptico utilizado con sensibilidad en plano.	89
Figura 5.4 Foto del sistema óptico utilizado. También se puede observar el espécimen montado en la máquina universal.	91
Figura 5.5 Relación de la carga deformación del espécimen obtenida mediante múltiples mediciones.	99
Figura 5.6 Patrón de franjas, fase envuelta y simulación por elemento finito respectivamente para a) campo de desplazamiento $u(x, y)$ y b) campo de desplazamiento $v(x, y)$. La carga mecánica aplicada al espécimen fue de 1.2 kN.	93
Figura 5.7 Campos de deformación obtenidos por ESPI después de haber aplicado el método de Stokes y la simulación por elemento finito: a) deformación ε_x obtenido por ESPI, b) misma deformación obtenido por FEA; c) deformación ε_y obtenido por ESPI y d) obtenido por FEA respectivamente. La carga aplicada al espécimen fue de 1.2 kN.	94
Figura 5.8 Desplazamientos en la dirección u y v a lo largo del eje con ángulo $\theta = 0$	95
Figura 5.9 Comparación de la los campos de deformación u y v a lo largo del eje con ángulo $\theta = 0$ para las mediciones ESPI y la simulación por FEA.	96
Figura 6.1 Esquema del arreglo óptico para la obtención de la topografía mediante la técnica ESPI con sensibilidad en plano.	103
Figura 6.2 Geometría para el análisis de contorno, el ángulo $\Delta\theta$ aparece muy exagerado para fines explicativos.	104
Figura 6.3 Algoritmo propuesto en la evaluación de la topografía.	106
Figura 6.4 Objeto de prueba y sistema óptico utilizado.	107
Figura 6.5 a) Interferograma utilizado con la fase envuelta obtenida y b) fase desenvuelta.	108

Figura 6.6 Evolución de e_x para los primeros tres ciclos del algoritmo propuesto para los datos mostrados en la tabla 1 donde a) corresponde al primer ciclo, b) el segundo ciclo y c) el tercer ciclo respectivamente para las mediciones (A) (B) y (C)	109
Figura 6.7 Evaluación de la forma del objeto a lo largo del eje horizontal , a) para medición A, b) para medición B y c) para medición C.	112
Figura 6.8 Error máximo de las mediciones (marcas) y su ajuste exponencial (línea) para diferentes distancias de las fuentes de iluminación a lo largo del eje z	113
Figura 6.9 Comparación de las mediciones corregidas mediante el algoritmo propuesto y las mediciones realizadas por la máquina de medición por coordenadas.	114
Figura 6.10 Estimación del error las para la primera y última iteración con respecto a la medición obtenida con la máquina de medición por coordenadas.	114
Figura 6.11 Comparación de los perfiles obtenidos al usar el modelo de iluminación divergente (en la primer iteración) e iluminación colimada.	115
Figura 6.12 Comparación de los perfiles entre la iluminación divergente y la supuesta iluminación colimada. La medición realizada con la iluminación divergente fue corregida mediante algoritmo propuesto.	115
Figura 6.13 Resultado de la topografía obtenida.	116
Figura 7.1. Esquema óptico para la medición de la topografía y de los campos de deformación en la dirección de x para una probeta con forma irregular.	123
Figura 7.2 Probeta de acero con forma irregular.	127
Figura 7.3 a) Interferograma asociado a la topografía de la superficie. b) Fase envuelta correspondiente al interferograma a).	128
Figura 7.4 Fase desenvuelta de la figura 7.3b.	128
Figura 7.5 Resultados del algoritmo propuesto para a) la componente del vector de sensibilidad e_x y b) el efecto en la forma del objeto Z_r a lo largo de la línea de referencia.	129
Figura 7.6 a) Interferograma asociado a la deformación de la superficie del espécimen y b) su correspondiente fase envuelta.	131
Figura 7.7 Fase desenvuelta asociada a la imagen mostrada en la figura 7.4 b).	131
Figura 7.8 Medición del desplazamiento en la dirección x de la superficie del espécimen cuando se utiliza el algoritmo propuesto.	132

Figura 7.9 Error entre la primera y última iteración para la forma del objeto Z_r , el desplazamiento u y la componente e_x del vector de sensibilidad.	132
Figura 7.10 Incertidumbre estándar para la fase asociado a la forma $U(\phi_e)$	133
Figura 7.11 Incertidumbre estándar $U(e_{xe})$ para la componente del vector de sensibilidad e_x	134
Figura 7.12 Incertidumbre estándar $U(Z_{re})$ para la forma Z_r	134
Figura 7.13 Incertidumbre estándar para la fase asociada al campo de desplazamiento u , $U(\phi_e)$	135
Figura 7.14 Incertidumbre estándar para el campo de desplazamiento $U(u_{ie})$	135

Lista de tablas

Tabla 5.1 Resultados para el Factor de Intensidad de Esfuerzo K_I para el espécimen mostrado e la figura 5.1.	96
Tabla 6.1. Posición de fuentes y su correspondiente ángulo de rotación.	107

INTRODUCCIÓN GENERAL

En los últimos años, el campo de la ingeniería ha impuesto requerimientos más estrictos en el diseño que respondan a los nuevos estándares nacionales e internacionales que hacen que las pruebas mecánicas se desarrollen con más eficiencia y exactitud.

Esto conlleva a la necesidad de crear técnicas de medición más modernas, siendo la óptica una herramienta útil en el campo de la metrología. Dentro de la metrología se puede considerar sistemas basados en la interferometría óptica cuyas ventajas son que se obtiene información de campo completo, en tiempo real, sensibilidad alta, además de ser técnicas donde no hay contacto con la superficie de prueba.

Los sistemas interferométricos pueden tener una resolución que van de unos cuantos micrómetros hasta milímetros. Estas técnicas pueden medir campos de deformación, topografía de superficies, campo de desplazamientos y gradientes de temperatura en mediciones de campo completo como ya ha sido mencionado, en contraposición a las técnicas tradicionales de medición que sólo son capaces de medir un número finito de puntos sobre una superficie.

En este trabajo, se utiliza la técnica de interferometría electrónica del moteado (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) como herramienta de medición para determinar campos de desplazamiento y deformación así como en la evaluación de la topografía de superficies.

Dado que la técnica ESPI se basa en el ruido conocido también como moteado, los interferogramas obtenidos con esta técnica tienen la presencia de moteado. Esto implica un problema en la valoración de los campos de deformación dado que éstos se determinan por la derivada de los campos de desplazamiento los cuales son campos “ruidosos” que introducen errores en determinación de los campos de deformación. En el desarrollo de esta tesis, se mostrarán una serie de errores y problemas en las mediciones imputables al uso de esta técnica, así como los procesos que se emplearon para solucionar estos inconvenientes. Otra contribución de la tesis es la implementación de un algoritmo basado en la técnica de Gauss-Seidel para la obtención de la topografía de objetos de grandes dimensiones mediante el uso de luz divergente. Finalmente se

calculan las incertidumbres de las mediciones de topografía y de campos de deformación haciendo uso del método de Monte Carlo.

El orden de presentación de la tesis es el siguiente:

En el **capítulo 1** se presentan los antecedentes de este trabajo. La tesis de maestría titulada “Interferometría electrónica de moteado y desplazamiento de fase en eventos dinámicos para el análisis de la deformación uniaxial en probetas metálicas soldadas”, del mismo autor, sirve como referencia de partida para la presente tesis.

En el **capítulo 2** se expone la teoría elástica para el análisis de esfuerzos. Se presenta la teoría de la elasticidad y la teoría de fallas en condiciones estáticas. También se muestran las ecuaciones de equilibrio en el estado biaxial de esfuerzos que explican las funciones de Airy y como se distribuyen los campos de esfuerzo y deformación. Se presentan modelos matemáticos que representan los campos de deformación alrededor de una grieta.

En el **capítulo 3** se revisarán los fundamentos de la técnica de interferometría electrónica del moteado. Se establece la correlación entre patrones de moteado a través de la diferencia de intensidades correspondientes a una imagen de referencia y a una correspondiente después de haber aplicado una carga mecánica. Como resultado se obtiene un patrón de franjas. Se explica cómo se obtiene la fase de este patrón de franjas a partir de los métodos de corrimiento de fase y de Fourier. Por último, se presentan diferentes filtros en la eliminación del ruido causado por el efecto de moteado.

En el **capítulo 4** se exponen los métodos de derivación para la obtención del campo de deformación a partir de los campos de desplazamiento. Se explica cómo funciona la técnica vectorial de Stokes para la obtención de las deformaciones a partir del cálculo del rotacional alrededor de un píxel.

En el **capítulo 5** se obtiene experimentalmente el factor de intensidad de esfuerzo en el primer modo para una probeta metálica. El factor de intensidad de esfuerzos es un parámetro que se utiliza en la ingeniería de diseño mecánico que nos permite establecer el nivel de seguridad de algún elemento mecánico sometido a tensión. La evaluación del factor de intensidad es de utilidad en la prevención de fallas en estado estático debido a la presencia de grietas. Los resultados

experimentales obtenidos mediante ESPI son comparados con los obtenidos mediante una simulación por la técnica de elementos finitos.

En el **capítulo 6** se hace un análisis teórico para la obtención de la topografía mediante iluminación dual y divergente. El vector de sensibilidad depende de la forma del objeto, lo cual es un problema para obtener la topografía del objeto bajo estudio. En esta tesis se propone un nuevo algoritmo basado en la técnica de Gauss-Seidel para la obtención de la topografía del objeto partiendo de una topografía correspondiente a un plano en el cálculo del vector de sensibilidad. También se muestran mediciones experimentales y una comparación de los errores que se pueden presentar si no se contempla adecuadamente la topografía del objeto en el cálculo del vector de sensibilidad.

En el **capítulo 7** se obtiene la incertidumbre estándar mediante la técnica de Monte Carlo para las mediciones de topografía y de los mapas de desplazamiento obtenidos.

Finalmente, en el **capítulo 8** se presentan las conclusiones generales, presentación de trabajos en congresos y los artículos científicos derivados de la tesis doctoral. Se propondrán algunos trabajos futuros relacionados con esta tesis.

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES

El diseño mecánico, como una de las ramas de ingeniería enfrenta el difícil proceso de evaluar la funcionalidad y la seguridad de los objetos que el ser humano usa. El prevenir daños físicos tanto para las personas como para máquinas o elementos estructurales es la primera prioridad para el diseñador. Se requieren realizar numerosas pruebas para establecer la confiabilidad de los elementos mecánicos con que se constituyen las máquinas y las estructuras con las que a diario tenemos contacto.

Podemos resumir que uno de los objetivos del diseñador es el escoger materiales y procesos de manufactura de tal manera que bajo un diseño correcto no falle durante su función ni presente fallas en cada uno de sus elementos. Esto obliga a que se efectúen análisis de esfuerzos y deformación para cada elemento mecánico que integra la máquina. La resistencia mecánica de un elemento de máquina depende en gran medida de las propiedades mecánicas del material con la que esté hecha. Las propiedades mecánicas de un material suelen determinarse a través de ensayos destructivos y no destructivos de muestras bajo condiciones de cargas mecánicas controladas. Por lo general estas pruebas no representan las condiciones reales de trabajo a las que se someten los elementos mecánicos y es necesario aplicar otras técnicas para evaluar esas propiedades. Como por ejemplo, técnicas ópticas como la interferometría electrónica del moteado nos permite conocer los desplazamientos en campo completo de los elementos de máquina cuando se someten a cargas externas ^[1].

Por ejemplo y en un caso particular, las deformaciones en las uniones soldadas pueden ser fácilmente determinadas mediante las técnicas ópticas. La técnica de interferometría electrónica del moteado nos permite identificar las zonas donde la tasa de deformación entre la soldadura y el material base son distintas, permitiéndonos así determinar los límites de resistencia mecánica de esa unión y sobre todo, en qué zona de la soldadura se presenta la máxima deformación. Esto representa una gran ventaja con respecto a las pruebas tradicionales que se basan en un contacto firme con el espécimen como es el caso de las galgas extensométricas ^[2] que solo pueden determinar en promedio esta deformación. Este caso de estudio fue abordado en la tesis de maestría ^[3] titulada "Interferometría electrónica del moteado y desplazamientos de fase en eventos dinámicos para el análisis de la deformación uniaxial en probetas metálicas soldadas". En

esa tesis se utiliza la interferometría electrónica del moteado y las técnicas de corrimiento de fase para determinar los patrones de deformación en elementos mecánicos unidos por medio de soldadura. Los resultados de esta técnica son comparados con simulaciones de elemento finito y muestran una buena correlación entre ambos resultados cuando la soldadura y el material base forman una superficie plana. Sin embargo, las dificultades que se presentaron en la realización de esa tesis merecen un análisis más profundo. Por ejemplo, cuando se realizó la soldadura en un elemento mecánico de forma compleja, las mediciones de la deformación no coinciden perfectamente con los predichos por el análisis de elemento finito. La anterior se debe a que no se contempló la forma del objeto en el cálculo del vector de sensibilidad.

En el trabajo correspondiente a la tesis doctoral se tratan y se resuelven los siguientes problemas:

1) La obtención de los campos de deformación a partir de los campos de desplazamiento mediante un método de derivación que proporcione mejor robustez que los métodos numéricos tradicionales. Se muestra cómo el teorema de Stokes puede ser utilizado como un método de diferenciación. 2) La evaluación de la topografía mediante el uso de iluminación divergente. Para ello se propone una topografía inicial correspondiente a la de un plano en la evaluación del vector de sensibilidad, el cual será utilizado en la evaluación iterativa de la topografía mediante la implementación de un algoritmo basado en la técnica de Gauss-Seidel para obtener un valor de la topografía cercano al verdadero. 3) Evaluación de la incertidumbre en la medición de la topografía y del campo de desplazamiento mediante la técnica de Monte Carlo.

Referencias

-
- [1] Charles Russell Coggrave, *Wholefield optical metrology: Surface Displacement measurement*. An internal and institutional document from Phase Vision Ltd. s.l. : <http://www.phasevision.com>

-
- [2] **Albert S. Kobayashi**, *Handbook on experimental mechanics*, VCH and SEM , New York, N.Y (1993)
- [3] **Parra Michel Jorge Ramón**, *Interferometría electrónica del moteado y desplazamientos de fase en eventos dinámicos para el análisis de la deformación uniaxial en probetas metálicas soldadas*. Tesis de maestría, Centro de Investigaciones en Óptica. A. C. León , Guanajuato (2006)

CAPÍTULO 2: TEORÍA ELÁSTICA PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS

Introducción

La teoría elástica aplicada a materiales tiene como objetivo establecer la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos en un objeto de prueba cuando se le aplica una carga mecánica o una carga térmica. La teoría elástica solamente está restringida para el caso del comportamiento lineal elástico entre los esfuerzos y la deformación, es decir, existe una linealidad proporcional entre la carga aplicada y los desplazamientos. Estos desplazamientos se consideran demasiados pequeños en comparación a las dimensiones del objeto de prueba.

El desarrollo de las soluciones para el campo de deformación a partir de la teoría elástica está rigurosamente fundado en las leyes de Newton para el movimiento, la geometría euclidiana y la ley de Hooke. En ocasiones, algunas aproximaciones aplicadas a los modelos matemáticos son consideradas al final del problema, considerando que éstas son puramente para poder ajustar y obtener ecuaciones que representen el comportamiento físico del material a la deformación cuando se somete a un estado de esfuerzos. De todos modos, la rigurosidad matemática de la teoría elástica nos ofrece ecuaciones que se ajustan casi perfectamente a las condiciones físicas reales de deformación del material.

2.1 Teoría elástica^[1]

Para poder entender las propiedades mecánicas de un cuerpo sólido frente a las fallas o a la deformación es necesario definir algunas variables tales como fuerza, carga, desplazamiento, esfuerzo y deformación. De acuerdo a los principios de la mecánica de fracturas en materiales sólidos, el comportamiento a la falla se puede dividir en dos áreas de estudio: la primera, la mecánica de la fractura lineal elástica (LEFM, Linear Elastic Failure Mechanics) es considerada como el fundamento para la teoría elástica lineal. La segunda, la mecánica de la fractura plástica (PFM, Plastic Failure Mechanics) tiene una utilidad para el análisis de la deformación plástica de materiales dúctiles. Por lo tanto para estudiar la fractura en algún elemento mecánico, conocer los estados de esfuerzos, fuerzas y deformaciones es absolutamente necesario.

La definición de fuerza dada por la segunda ley de Newton depende de la aceleración y de la masa del cuerpo sólido, pero para una masa en reposo susceptible a la deformación, la fuerza de Newton o la fuerza mecánica deben ser claramente distinguidas. Ambas cantidades tienen las mismas unidades pero significados físicos diferentes. A partir de esto, podemos asociar dos parámetros importantes en la ingeniería: el esfuerzo como función de la fuerza por unidad de área $\sigma = P/A$, con la ley de Hooke $E = \sigma/\varepsilon$ mediante el parámetro del módulo de elasticidad E y la deformación unitaria ε .

Para poder identificar las propiedades mecánicas de un sólido es necesario introducir las siguientes definiciones:

Deformación: es el movimiento de varios puntos en un sólido con respecto a otros. También puede interpretarse como una cantidad geométrica que depende del movimiento relativo entre dos o más puntos. En el idioma inglés se le conoce como *strain*.

Desplazamiento: es el movimiento de un punto en un sólido que se somete a una carga o fuerza y es representado mediante una cantidad vectorial.

Esfuerzo: es la resistencia interna que ejerce un sólido contra una carga a una fuerza externa. De tal modo que la carga aplicada P sobre el área A está asociado al esfuerzo σ mediante la ecuación de equilibrio de fuerzas¹:

$$\sum F = P - \sigma A = 0, \quad (2.1)$$

$$\sigma = \frac{P}{A}. \quad (2.2)$$

La teoría de la elasticidad trata con materiales isotrópicos sujeta a los esfuerzos elásticos, deformaciones y desplazamientos. La relación entre esfuerzos y deformaciones constituyen una serie de cuestiones que pueden ser clasificados como ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y ecuaciones con condiciones a la frontera^[2].

Factor de seguridad: este parámetro es usado en el diseño estructural para asegurar la integridad de los componentes de la estructura. El factor de seguridad S_F tiene como fin controlar los

esfuerzos de diseño y su magnitud depende de la experiencia del diseñador mecánico. El factor de seguridad S_F se define como:

$$S_F = \frac{\text{esfuerzo de diseño o admisible}}{\text{esfuerzo del material}} \quad \text{Para } S_F > 1. \quad (2.3)$$

Por ejemplo, un factor de seguridad $S_F = 2$ significa que la cantidad de esfuerzo capaz de soportar un elemento mecánico es el doble del esfuerzo admisible de trabajo a condiciones normales. Esto asegura que aunque de manera accidental se sobrecargue el elemento mecánico, este no vaya a fallar. Es importante conocer la distribución de esfuerzos de un elemento mecánico sometido a cargas para evitar concentraciones de esfuerzo que puedan superar la resistencia máxima del material.

2.2 Relación entre desplazamiento y deformación

La deformación se puede clasificar en: *deformación total* y *deformación unitaria* ε ; la primera considera el cambio de dimensión directamente en la pieza mecánica; esto es, cuánto ha aumentado o disminuido la dimensión lineal; y el segundo, considera el cambio con respecto a su dimensión original y dirección de la deformación. Es fácil darse cuenta que no puede haber deformación de un cuerpo sin que se presenten desplazamientos de los elementos que componen el material.

Haciendo un análisis más profundo, supongamos que un elemento diferencial en el plano xy de la figura 2.1 está sometido a varias fuerzas externas de tal manera que esté equilibrado estáticamente. Un punto P dentro de una superficie diferencial se está desplazando hasta la posición P' , según la figura, el desplazamiento de los puntos adyacentes a P , A y B a lo largo de los ejes coordenados en el plano xy son²:

$$\text{Para } A \text{ a lo largo de } x, u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.4a)$$

$$\text{Para } A \text{ a lo largo de } y, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad (2.4b)$$

$$\text{Para } B \text{ a lo largo de } x, u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad (2.4c)$$

$$\text{Para } B \text{ a lo largo de } y, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.4d)$$

Se observa que en el segmento PA tiene un incremento de longitud después de la deformación a lo largo del eje x de $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, donde la deformación unitaria es $\frac{\partial u}{\partial x}$; Por otro lado, podemos observar que el ángulo APB ha disminuido hasta $A'P'B'$. Entonces la deformación unitaria normal ε y la deformación unitaria angular γ del punto P a lo largo de x , y y z , se puede calcular respectivamente a partir del conjunto de ecuaciones 2.5:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}. \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde G es el módulo de elasticidad al cortante y E es el módulo de Elasticidad o Módulo de Young. σ y τ son los esfuerzos normal y cortante respectivamente.

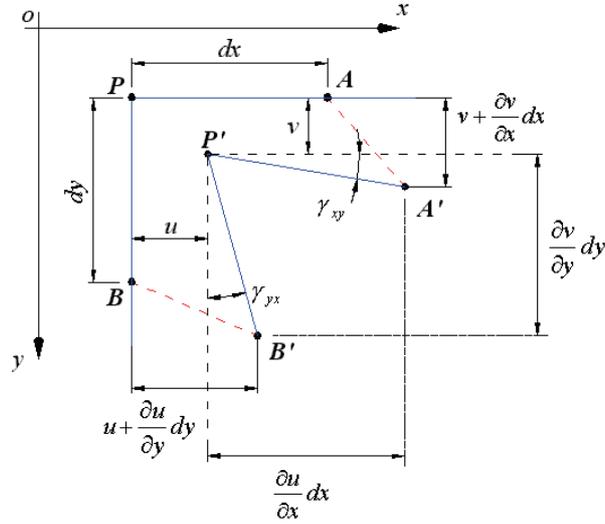


Figura 2.1 Desplazamientos de los puntos P, A y B.

2.2.1. Estado triaxial de esfuerzos

La teoría elástica de los materiales considera materiales isotrópicos y elásticos que poseen dos constantes fundamentales: el módulo de Young, E y la relación de Poisson, ν . La relación entre el esfuerzo y la deformación se puede expresar usando el principio de superposición mediante el sistema^{[3],[4]}:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Es preferible expresar lo anterior en función de los componentes del esfuerzo. Resolviendo para las componentes del esfuerzo encontramos la expresión:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ (1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \\ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

y para los esfuerzos cortantes como:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Por ejemplo, resolviendo para el esfuerzo en la dirección x en la ecuación (2.7) encontramos:

$$\sigma_x = \frac{E\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{(1+\nu)}, \quad (2.9)$$

la cual puede ser reducida de la manera siguiente:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_x. \quad (2.10)$$

Donde la constante λ se define como $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}$, λ , μ se conocen como las

constantes de Lamé y la cantidad $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ es conocida como la dilatación. La figura 2.2

muestra el estado de esfuerzos en un elemento diferencial de volumen.

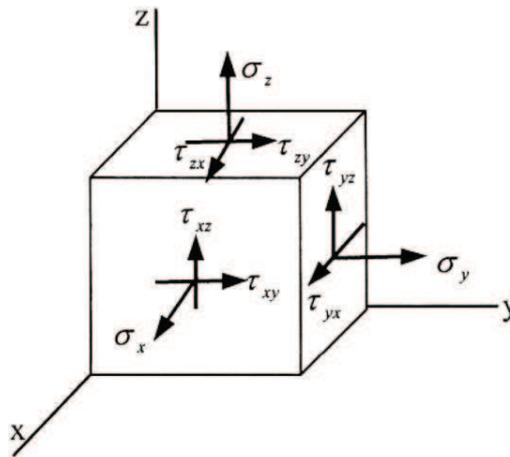


Figura 2.2 Estado de esfuerzos en elemento de volumen.

2.2.2. Estado Biaxial de esfuerzos

De las ecuaciones 2.6, 2.7 y 2.8, si despreciamos las componentes del esfuerzo en la dirección z y de acuerdo con la ley de Hooke para materiales sólidos e isotrópicos la deformación está asociada a los esfuerzos mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_x - \nu\sigma_y \\ \sigma_y - \nu\sigma_x \\ \sigma_x + \sigma_y \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \\ \varepsilon_y + \nu\varepsilon_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Los esfuerzos principales están orientados a lo largo de los ejes principales y no forzosamente a lo largo de los ejes x y y , los valores máximos y mínimos de los esfuerzos principales pueden encontrarse mediante el uso de la técnica del círculo de Mohr en un punto en un plano dimensional. Para el caso $\sigma_z = 0$, los esfuerzos principales se pueden calcular mediante las siguientes expresiones:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{\max}. \quad (2.16)$$

Donde τ_{\max} es el esfuerzo cortante máximo, y los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son ortogonales a lo largo de los ejes principales. De manera similar, la deformación principal a lo largo de los ejes principales puede encontrarse mediante:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto podemos conocer la deformación principal y su dirección a partir de las observaciones de las deformaciones en las direcciones de los ejes x y y .

2.3 Sólidos sometidos a tensión

Durante las pruebas de tensión en elementos mecánicos, la relación entre los esfuerzos y las deformaciones pueden obtenerse mediante un estado de esfuerzos uniaxiales. Desde un punto de vista de ingeniería, la deformación longitudinal es definida como la elongación que también es asociada a la ley de Hooke para la deformación elástica. Para la prueba de tensión la deformación uniaxial y la ley de Hooke se pueden definir como:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{1}{l} dl = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right), \text{ deformación natural o verdadera.} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \text{ deformación ingenieril.} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ Ley de Hooke.} \quad (2.20)$$

Donde Δl es el cambio de longitud de sólidos sometido a la tensión en una dirección dada. Como se puede notar, la ley de Hooke proporciona una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación. Sin embargo, la mayoría de los materiales estructurales tienen un grado de plasticidad que no la define la ley de Hooke. Por tal motivo esta ley sólo se limita a la relación elástica lineal de los materiales.

En general el comportamiento mecánico de los materiales sometidos a esfuerzos debido a cargas dependen en cierta medida de la micro estructura del material, de la razón de deformación y el medio ambiente. La capacidad de carga y la resistencia a la fractura está caracterizada por las curvas de esfuerzo deformación del material que se somete a la tensión. La figura 2.3 muestra las características que muestran los materiales en un diagrama de esfuerzo deformación.

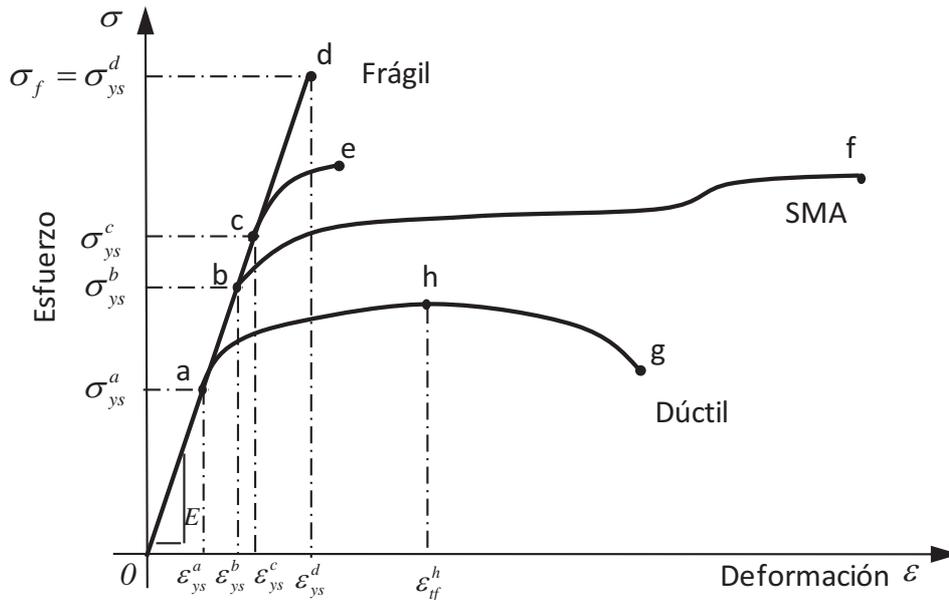


Figura 2.3 Diagramas de curva de esfuerzo deformación para varios tipos de materiales.

Las propiedades mecánicas de un sólido sometido a la tensión, como el esfuerzo de fluencia, la elongación, la ductibilidad y el módulo de elasticidad pueden obtenerse a partir estas curvas. Estas propiedades definen los materiales: pueden ser frágiles o dúctiles o presentar propiedades plásticas con memoria (shape memory alloy, SMA).

La resistencia a la fractura puede expresarse en términos de densidad de energía calculando el área bajo la curva del diagrama esfuerzo deformación. La resiliencia es una magnitud que cuantifica la cantidad de energía por unidad de volumen que almacena un material al deformarse elásticamente debido a una tensión aplicada. En términos simples es la capacidad de memoria de un material para recuperarse de una deformación, producto de una presión externa. Éste es un parámetro de control muy usado para clasificar la resistencia de los materiales. De acuerdo a la

figura 2.3 la resistencia a la fractura está asociada a la densidad de energía de la deformación elástica mediante la ecuación:

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon . \quad (2.21)$$

Resolviendo la integral usando la ley de Hooke, la energía de la deformación elástica puede calcularse mediante:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ys}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon_{ys}^2 = \frac{\sigma_{ys}^2}{2E} , \quad (2.22)$$

Donde ε_{ys} y σ_{ys} son la deformación y el esfuerzo en el punto de fluencia para cualquier tipo de material mostrados en las curvas de la figura 2.3 El punto de fluencia es el límite de transición entre la elasticidad y plasticidad de un material y éstos corresponden a los puntos a, b,c y d de la misma figura.

Para la deformación plástica, es necesario considerar la deformación posterior al punto de fluencia de tal manera que:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\varepsilon_f} E\varepsilon d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{ys}} E\varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{ys}}^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \\ &= \frac{\sigma_{ys}^2}{2E} + \int_{\varepsilon_{ys}}^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.23)$$

La ecuación 2.23 se puede resolver utilizando la *función del esfuerzo plástico*, $\sigma = f(\varepsilon)$, donde el esfuerzo plástico comprende el intervalo entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último, $\sigma_{ys} < \sigma < \sigma_{ultimo}$. Dos de las funciones del esfuerzo plástico más comunes son: la función de Ramerg-Osood y la función de Hollomon^[5]:

$$\sigma = \sigma_{ys} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha \varepsilon_{ys}} \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ función de Ramerg-Osood} \quad (2.24)$$

$$\sigma = k\varepsilon^n, \text{ función de Hollomon} \quad (2.25)$$

Donde n es una constante asociada al esfuerzo, k es una constante de proporcionalidad asociado a la tenacidad del material, σ es el esfuerzo plástico, σ_{ys} es el esfuerzo al punto de fluencia, ε es la deformación plástica, ε_{ys} es la deformación en el punto de fluencia y α es una constante asociada a la deformación. Por ejemplo, para un material dúctil, usando la ecuación 2.25 en la ecuación 2.23 y resolviendo, encontramos una ecuación para la densidad de la energía de deformación^[6]:

$$W = \frac{\sigma_{ys}^2}{2E} - \frac{k}{n+1} \left(\frac{\sigma_{ys}}{E} \right)^{n+1} + \frac{k\varepsilon_{ys}^{n+1}}{n+1} . \quad (2.26)$$

Esta es la cantidad de trabajo que puede soportar un material para mantenerse en un estado elástico.

2.4 Ecuaciones de equilibrio en el estado biaxial de esfuerzos

Suponiendo que $\sigma_z = 0$ y que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, en un estado biaxial de esfuerzos, las ecuaciones de equilibrio describen el campo de distribución de esfuerzos en las direcciones x y y en los términos de σ_x , σ_y y del esfuerzo cortante τ_{xy} . Las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cartesianas se obtienen mediante una sumatoria de fuerzas sobre el elemento diferencial de volumen analizado, de tal manera que la sumatoria da:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 , \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 . \quad (2.27b)$$

Y en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = 0 , \quad (2.28a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 . \quad (2.28b)$$

Donde r denota la componente de la dirección radial, θ para la dirección tangencial, F_r es la intensidad de la fuerza sobre el elemento de área diferencial en dirección radial y F_θ en la dirección tangencial.

2.4.1 Funciones de esfuerzo de Airy

En el año 1862, Sir George Biddell Airy^[7] presentó una nueva técnica para determinar la distribución de los campos de esfuerzo y deformación en elementos mecánicos sometidos a tensión^[8]. Esta técnica se le denomina como *el método de las funciones de esfuerzo de Airy*, puede usarse para encontrar la solución a las ecuaciones de equilibrio en el estado biaxial. Este método fue utilizado por H. M. Westergaard^[9] y analizado extensamente por Irwin^[10] para determinar el estado de esfuerzo y deformación alrededor de una fractura; en consecuencia, el método de Airy contribuyó en gran parte al desarrollo de la teoría de fallas en elementos mecánicos.

La función de Airy es usada para determinar analíticamente los esfuerzos σ_x , σ_y y $\tau_{x,y}$ en la región elástica. Las funciones de Airy deben satisfacer la ecuación bi-armónica de cuarto orden de tal manera que $\nabla^4\phi=0$, donde ϕ es la función (real o compleja) de esfuerzo de Airy y la ecuación de compatibilidad de esfuerzos (ec. 2.31). Suponiendo que los esfuerzos σ_x , σ_y y $\tau_{x,y}$ pueden ser representados por la función de Airy, se tiene:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \Psi(x, y) , \quad (2.29a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \Psi(x, y) , \quad (2.29b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} . \quad (2.29c)$$

Donde la función $\Psi(x, y)$ representa el campo de fuerzas sobre el elemento de área diferencial

tal que $F_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ y $F_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$. La ecuación bi-armónica de Airy para el estado de equilibrio se

puede representar de la forma:

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0, \quad (2.30)$$

y la ecuación de compatibilidad de esfuerzos^[11]:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\psi}{\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right). \quad (2.31)$$

Donde: $\psi = \nu$ para el plano de esfuerzos normales y $\psi = \nu/(1-\nu)$ para el plano de esfuerzos cortantes. Cualquier función de Airy que represente el campo de esfuerzos en un elemento mecánico deberá satisfacer las ecuaciones (2.30) y (2.31). Posteriormente, los campos de esfuerzos podrán obtenerse mediante la series de ecuaciones 2.29a, 2.29b y 2.29c.

2.4.2 Funciones de esfuerzo de Airy en coordenadas cilíndricas^[12]

Si consideramos un pequeño elemento diferencial de área en equilibrio y sometidos a un estado de fuerzas tal que $\sigma_z = 0$ y que su espesor sea muy pequeño en comparación a su ancho o largo, la suma de todas las fuerzas podrá representarse mediante las ecuaciones 2.28a y 2.28b. La figura 2.4 muestra el estado de esfuerzos del elemento diferencial en coordenadas cilíndricas.

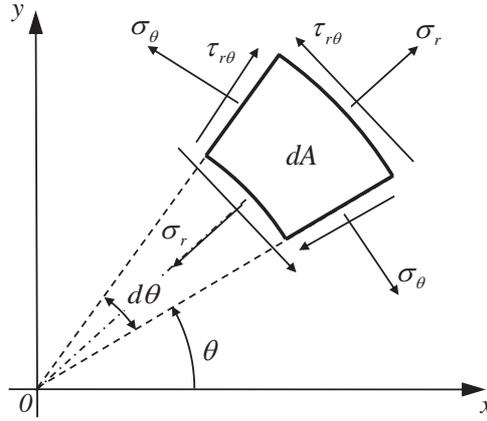


Figura 2.4 Estado de esfuerzos en un elemento diferencial de área en coordenadas cilíndricas.

Las ecuaciones de esfuerzo en coordenadas polares se expresan en relación a las funciones de Airy como:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \Psi(r, \theta) , \tag{2.32a}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \Psi(r, \theta) , \tag{2.32b}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} . \tag{2.32c}$$

Donde la función $\Psi(r, \theta)$ representa el campo de fuerzas sobre el elemento de área diferencial tal que $F_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ y $F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$. La ecuación bi-armónica de Airy en coordenadas cilíndricas se puede representar de la forma:

$$\nabla^4 \phi + (1-\nu) \nabla^2 \Psi(r, \theta) = 0 . \tag{2.33}$$

De igual modo, la ecuación de compatibilidad en coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = (1+\nu) \nabla^2 \Psi(r, \theta) . \tag{2.34}$$

Las ecuaciones 2.33 y 2.34 ofrecen mayor ventaja cuando se utilizan para el análisis de distribución de esfuerzo en geometrías curvas.

2.4.3 Funciones complejas de esfuerzo de Airy^[13]

El uso de funciones complejas como funciones de Airy tienen un sólido fundamento, uno de los trabajos más relevantes fue propuesto por Muskhelishvili^[14] en 1953 donde define una función compleja $f(\xi) = P(x, y) + iQ(x, y)$ donde $\xi = x + iy$ es una variable compleja. Si $f(\xi)$ es analítica, es decir, que cumple con las condiciones de Cauchy-Reiman, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ entonces la función $f(\xi)$ es derivable si tiene una única solución en cualquier punto dentro de un dominio. Usando el Laplaciano, la parte real e imaginaria de las funciones analíticas se pueden expresar como funciones armónicas:

$$\nabla^2 P = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.35a)$$

$$\nabla^2 Q = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.35b)$$

Usando la variable compleja ξ y su conjugado $\bar{\xi}$ las funciones de Airy pueden expresarse en términos de variables complejas, $\phi(x, y) = \phi(\xi, \bar{\xi})$ considerando que $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = i$, $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = 1$ y

$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} = -i$. Derivando la función compleja de Airy se puede obtener las funciones complejas

armónicas como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}} \right)^2; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}} \right)^2. \quad (2.36)$$

Por lo tanto:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}}, \quad (2.37)$$

y la función bi-armónica compleja de Airy se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi &= 16 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \bar{\xi}^2} = 0 \\ \nabla^4 \phi &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \bar{\xi}^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando dos veces la ecuación 2.38 con respecto a la variable compleja ξ y su conjugado $\bar{\xi}$,

esto es, haciendo la substitución $\nabla^4 \phi = F(\xi, \bar{\xi}) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \right)$ en la ecuación 2.38 e

integrando a ξ ; posteriormente el resultado se integra con respecto a $\bar{\xi}$. Esto da:

$\frac{\partial \phi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = g(\bar{\xi}) + h(\xi)$, donde g y h son funciones arbitrarias para $\bar{\xi}$ y ξ respectivamente.

Repitiendo encontramos $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}} = \int (g(\bar{\xi}) + h(\xi)) d\bar{\xi} = \xi g(\bar{\xi}) + \int h(\xi) d\xi + k(\bar{\xi})$; por último,

integramos nuevamente con respecto a $\bar{\xi}$: $\phi = \int (\xi g(\bar{\xi}) + J(\xi) + k(\bar{\xi})) d\bar{\xi}$, encontramos

finalmente: $\phi = \xi g(\bar{\xi}) + \bar{\xi} J(\xi) + k(\bar{\xi}) + w(\xi)$ donde g, J, k y w son funciones arbitrarias,

reorganizando tenemos:

$$\phi = f_1(\xi) + \bar{\xi} f_2(\xi) + f_3(\bar{\xi}) + \xi f_4(\bar{\xi}). \quad (2.39)$$

Donde las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 son funciones también arbitrarias dependientes de ξ y $\bar{\xi}$.

Debido a que la función de Airy es una función real, f_1 y f_3 así como f_2 y f_4 deben ser funciones

conjugadas entre ellos mismos de tal modo que $f_3(\bar{\xi}) = \overline{f_1(\xi)}$ y $\bar{\xi} f_2(\xi) = \overline{\xi f_4(\bar{\xi})}$. La

ecuación 2.39 se puede reducir a:

$$\phi = f_1(\xi) + \bar{\xi} f_2(\xi) + \overline{f_1(\xi)} + \xi \overline{f_2(\xi)}. \quad (2.40)$$

Por último, si se realiza la substitución para $f_1(\xi) = \frac{1}{2}\chi(\xi)$ y $f_2(\xi) = \frac{1}{2}\vartheta(\xi)$ donde $\chi(\xi)$ y $\vartheta(\xi)$ son también funciones arbitrarias, la función compleja de Airy se expresa en términos de dos funciones analíticas en términos de χ y ϑ como:

$$\phi = \frac{1}{2} \left[\xi^* \vartheta(\xi) + \xi \overline{[\vartheta(\xi)]} + \chi(\xi) + \overline{[\chi(\xi)]} \right], \quad (2.41)$$

o en su forma equivalente:

$$\phi = \text{Re} \left[\overline{\xi} \vartheta(\xi) + \chi(\xi) \right]. \quad (2.42)$$

Por último, si sustituimos la ecuación 2.42 en la ecuación 2.29 haciendo $\Psi(x, y) = 0$, podemos obtener la relación entre el esfuerzo y la función compleja de Airy:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[\frac{\partial \vartheta(\xi)}{\partial \xi} + \overline{\left(\frac{\partial \vartheta(\xi)}{\partial \xi} \right)} \right], \quad (2.43a)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2 \left[\overline{\xi} \frac{\partial^2 \vartheta(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi(\xi)}{\partial \xi^2} \right]. \quad (2.43b)$$

2.4.4 Algunas soluciones a las funciones de esfuerzo de Airy

Varias soluciones fueron propuestas para resolver la ecuación bi-armónica aplicada a las funciones de Airy y así obtener los campos de esfuerzo en elementos sometidos a tensión. Las soluciones dependen del tipo de geometría, tipos de carga y restricciones a las que se sujeta el elemento mecánico. Algunas soluciones las funciones de Airy son:

- La solución de Michell^{[15], [16]} :

Esta función de Airy propone la solución para los campos de esfuerzo para una placa sometida a tensión con un orificio en el centro. La función completa de Airy se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \phi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + e_0 \theta \\
 & + \left(a_1 r + b_1 r^3 + \frac{c_1}{r} + d_1 r \ln r \right) \cos \theta + j_1 r \theta \cos \theta \\
 & + \left(e_1 r + f_1 r^3 + \frac{g_1}{r} + h_1 r \ln r \right) \sin \theta + k_1 r \theta \sin \theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n r^{-n} + d_n r^{-n+2} \right) \cos n\theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(e_n r^n + f_n r^{n+2} + g_n r^{-n} + h_n r^{-n+2} \right) \sin n\theta
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Donde las constantes polinomiales $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ y k deben determinarse mediante condiciones a la frontera. Por ejemplo, para el caso de tensión uniforme en una placa simétrica como se muestra en la figura 2.5 se tiene la función: $\phi = a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r$. Aplicando la ecuación 2.32, podemos encontrar los campos de esfuerzos en la placa:

$$\sigma_r = \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0 (2 \ln r + 1), \quad \sigma_\theta = -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0 (2 \ln r + 3) \quad \text{y} \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Aplicando las condiciones en la frontera: $\left(r \rightarrow \infty; \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\theta), \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} (1 - \cos 2\theta) \right)$,

$\left(r \rightarrow a; \sigma_r = 0, \sigma_\theta = 0 \right)$ se obtiene las ecuaciones: $\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$ y

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta.$$

La figura 2.6 muestra la gráfica de distribución de esfuerzos.

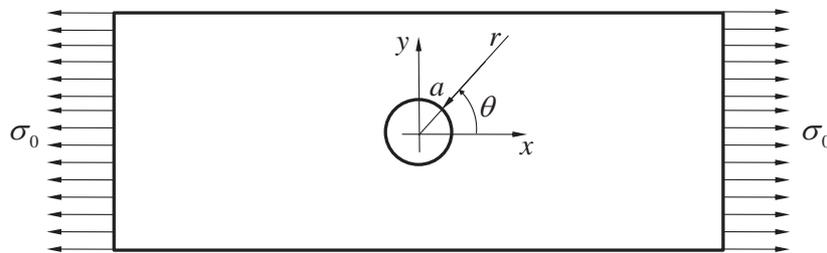


Figura 2.5 Geometría usada para la solución Michell para una placa sometida a tensión.

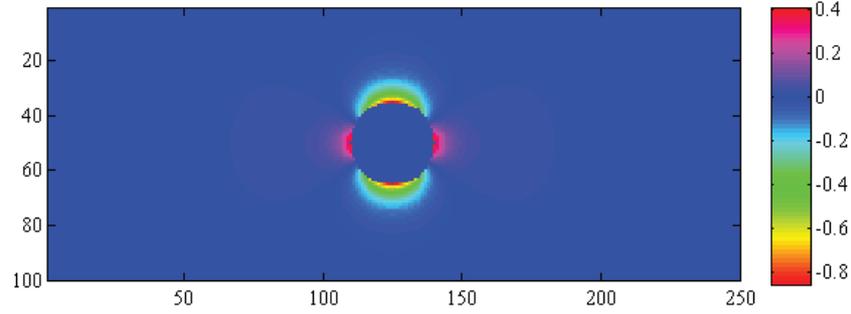


Figura 2.6 Solución normalizada de Michell a la función de Airy para la geometría y condiciones mostrada en la figura 2.5

- La solución de Williams^{[17], [18]}:

La función de Airy propuesta por Williams para el caso de una placa con una ranura en un extremo que puede simular una grieta (figura 2.7) está dado por:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} f_n(\theta). \quad (2.45)$$

Williams supuso que el material era isotrópico y totalmente elástico, es decir, no contempló los efectos de plasticidad del material como se verá más adelante. Los campos de esfuerzo en coordenadas polares se pueden obtener sustituyendo la ecuación 2.45 en la ecuación 2.32:

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-1} \left[(n+1) f_n(\theta) + \frac{d^2 f_n(\theta)}{d\theta^2} \right], \quad (2.46a)$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-1} \left[n(n+1) f_n(\theta) \right], \quad (2.46b)$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-1} \left[-n \frac{df_n(\theta)}{d\theta} \right]. \quad (2.46c)$$

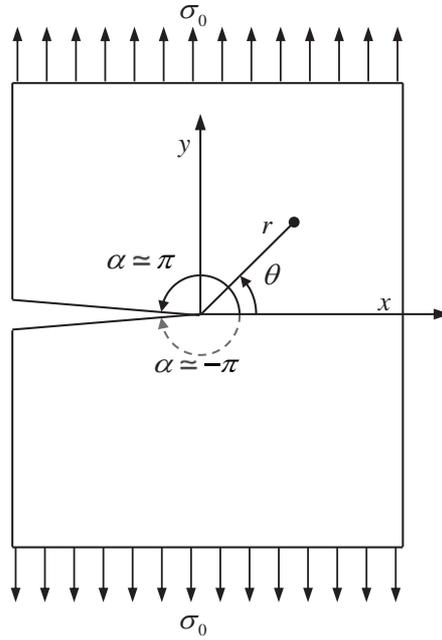


Figura 2.7 Geometría usada por Williams para determinar los campos de esfuerzo alrededor de una grieta.

Y la ecuación bi-armónica independiente de la coordenada r puede obtenerse sustituyendo la ecuación 2.45 en la ecuación 2.33 con $\Psi(x, y) = 0$ para obtener la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$\frac{d^4 f_n(\theta)}{d\theta^4} + (n+1)^2 \frac{d^2 f_n(\theta)}{d\theta^2} + (n-1)^2 \frac{d^2 f_n(\theta)}{d\theta^2} + [(n+1)^2 (n-1)^2] f_n(\theta) = 0 . \quad (2.47)$$

Una solución a la ecuación 2.47 nos da:

$$f_n(\theta) = a_n \sin(n+1)\theta + b_n \cos(n+1)\theta + c_n \sin(n-1)\theta + d_n \cos(n-1)\theta . \quad (2.48)$$

Donde los valores de n y las constantes a, b, c y d deben ser evaluados mediante las condiciones a la frontera determinadas por la geometría de la grieta y las cargas utilizadas. Por ejemplo, el contorno de la grieta debe estar libre de esfuerzos, esto es que: $\sigma_\theta(\pm\pi) = \tau_{r\theta}(\pm\pi) = 0$, lo que implica que de la ecuación 2.46 se obtengan las condiciones frontera $f_n(\pm\pi) = 0$ y $\frac{df_n(\pm\pi)}{d\theta} = 0$.

Estas condiciones fronteras junto con ecuación 2.48 forman un sistema de cuatro ecuaciones y

cuatro incógnitas (a_n , b_n , c_n y d_n). para que el sistema cumpla con las condiciones frontera, requiere que $\sin(2n\pi) = 0$ donde el valor de n es: $n = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \dots$. Estos valores deben analizarse con cuidado para descartar soluciones inválidas. Un criterio que se puede considerar para descartar las soluciones inválidas es la mostrada en la ecuación 2.21. La energía de la deformación elástica sobre un elemento diferencial de área debe ser una cantidad positiva cuando existe deformación alrededor de la grieta de tal modo que para un área diferencial en coordenadas cilíndricas $dW \propto \sigma^2 r dr d\theta \propto r^{2n-2} r dr d\theta$. Si W representa la energía total encerrada en una circunferencia de radio R y usando el criterio de la energía de la deformación elástica tenemos la condición:

$$W \propto \int_0^R r^{2n-1} dr. \quad (2.49)$$

Lo cual obliga que el valor del exponente de r en la ecuación 2.49 sea $2n-1 > -1$ y por lo tanto los valores de n sean $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$. Por último, usando los valores validos para n , la ecuación 2.48 y las condiciones fronteras $f_n(\pm\pi) = 0$ y $\frac{df_n(\pm\pi)}{d\theta} = 0$ podemos encontrar los valores de las cuatro incógnitas y darnos cuenta que están relacionadas entre sí de tal manera que:

$$b_n = -\frac{n-2}{n+2} d_n, \quad a_n = -c_n \quad \text{para } n=1, 3, 5, \dots \quad (2.50)$$

$$b_n = -d_n, \quad a_n = -\frac{n-2}{n+2} c_n \quad \text{para } n=2, 4, 6, \dots \quad (2.51)$$

La función de Airy para el campo de esfuerzo propuesta por Williams queda como:

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{n=1,3,5,\dots} r^{1+\frac{n}{2}} \left[d_n \left(\cos \frac{n-2}{2} \theta - \frac{n-2}{n+2} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right) + c_n \left(\sin \frac{n-2}{2} \theta - \sin \frac{n+2}{2} \theta \right) \right] \\ & + \sum_{n=2,4,6,\dots} r^{1+\frac{n}{2}} \left[d_n \left(\cos \frac{n-2}{2} \theta - \cos \frac{n+2}{2} \theta \right) + c_n \left(\sin \frac{n-2}{2} \theta - \frac{n-2}{n+2} \sin \frac{n+2}{2} \theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Usando la ecuación 2.52 en la ecuación 2.32 podemos obtener los campos de esfuerzo para la geometría mostrada en la figura 2.7:

$$\sigma_r = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) d_n , \quad (2.53a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) d_n , \quad (2.53b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) d_n . \quad (2.53c)$$

La figura 2.8 muestra el campo de esfuerzo descrito por la ecuación 2.53a para la dirección radial cuando se aplica una carga según la figura 2.7. Como podemos observar en la ecuación 2.53, los campos de esfuerzo crecen exponencialmente cuando $r \rightarrow 0$, esto explicaría por qué algunos materiales fallan súbitamente cuando se presenta una fractura. Cuando se implementa una rutina de cómputo para la solución de Williams, la coordenada $r = 0$ debe ser omitida con el fin de no crear un conflicto durante el procesamiento debido a esta singularidad.

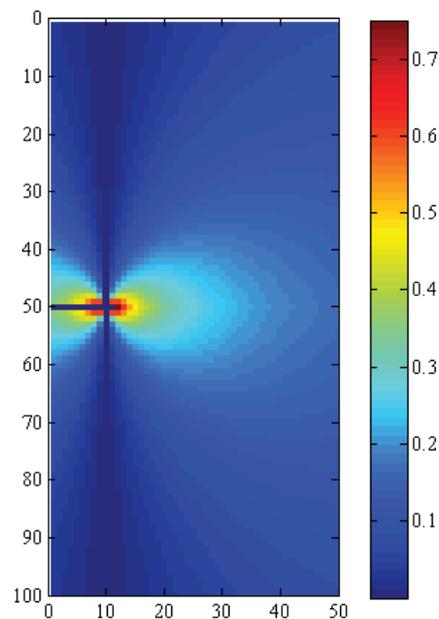


Figura 2.8 Solución por Williams para los campos de esfuerzo normalizado alrededor de una grieta en la dirección radial, según la ecuación 2.53a para la geometría mostrada en la figura 2.7.

2.5 Factor de concentración de esfuerzos ^[12]

El factor de intensidad de esfuerzos es un parámetro muy utilizado en el diseño mecánico, este parámetro previene la fractura bajo cargas estáticas debido a la presencia de grietas o discontinuidades abruptas en la geometría del elemento mecánico. El factor de intensidad de esfuerzo pueda obtenerse a partir de los modelos matemáticos de los campos de esfuerzo y deformación descritos por las funciones de Airy.

2.5.1 Problema de la falla centrada

Los campos de esfuerzo y deformación para una grieta ubicada en el centro de una placa suficientemente grande que está sometida a la tensión como se muestra en la figura 2.9, pueden obtenerse mediante las funciones complejas de Airy:

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4} \left(2\sqrt{z^2 - a^2} - z \right), \quad (2.54a)$$

$$\psi(z) = \frac{\sigma}{2} \left(z - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right). \quad (2.54b)$$

Donde z es una variable compleja. Puede verificarse fácilmente que las ecuaciones 2.54a y 2.54b satisface la ecuación bi-armónica de la ecuación 2.35a y 2.35b respectivamente. Es conveniente utilizar ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas polares y cartesianas de acuerdo a la geometría de la figura 2.9: $x = a + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = a + r \cos \theta + ir \sin \theta$. Sustituyendo la ecuación 2.54 en la ecuación 2.43 y utilizando las ecuaciones de transformación de coordenadas, podemos obtener los componentes de los campos de esfuerzos alrededor de la grieta como:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma \left(2 \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) = \sigma \sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (2.55a)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = \sigma \left(\frac{2ia^2 y}{\sqrt{z^2 - a^2}} + 1 \right) = \sigma \sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) + i \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right]. \quad (2.55b)$$

Posteriormente, separando las partes reales y las partes imaginarias podemos obtener los campos de deformación alrededor de una grieta centrada (figura 2.10) sujeta a las fuerzas de tensión mediante:

$$\sigma_x = \sigma \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (2.56a)$$

$$\sigma_y = \sigma \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (2.56b)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right). \quad (2.56c)$$

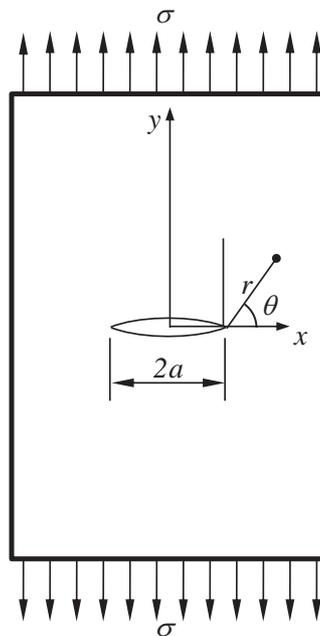


Figura 2.9 Placa con una grieta centrada.

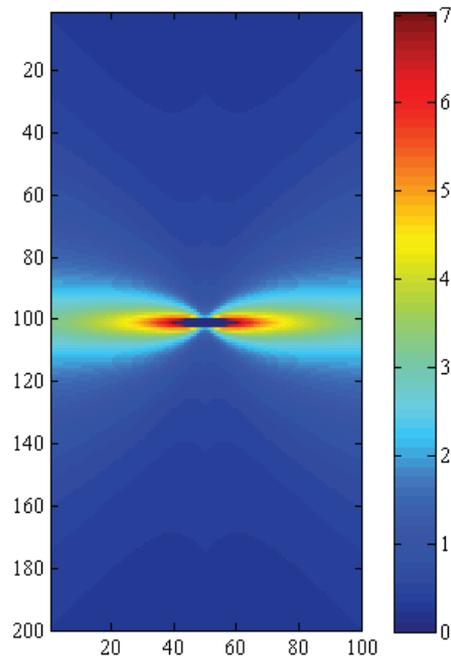


Figura 2.10 Campo de esfuerzo en la placa con una grieta centrada como se muestra en la figura 2.9, donde el esfuerzo aplicado es $\sigma = 10$ y $r > 2$ para evitar la singularidad.

Podemos notar que los campos de esfuerzos descritos por las ecuaciones 2.53 y 2.56 son similares, aún cuando la solución de Williams represente un diferente caso en la geometría del elemento mecánico. Se puede concluir, que para materiales elásticos, los campos de esfuerzos alrededor de una grieta tiene una distribución invariante con un punto de singularidad dependiente del radio r . Como lo sugiere Williams, determinar las constantes (en la ecuación 2.53) depende de la geometría y de las condiciones frontera del elemento mecánico y en la magnitud del esfuerzo en la grieta. La importancia de estas constantes fue reconocida por Irwin^{[19], [20]}, quien las denominó como los *factores de intensidad de esfuerzo*, K . Este parámetro es de suma importancia y es un concepto fundamental para la teoría de la mecánica de falla lineal elástica LEFM.

2.5.2 Factor de intensidad de esfuerzo^[12]

Una grieta puede sujetarse a tres modos independientes de cargas produciendo deformaciones y esfuerzos dependiendo de la dirección de la carga aplicada. La figura 2.11 muestra los tres modos de carga: *Modo I* de apertura normal, *Modo II* de corte en el plano y *Modo III* de corte fuera de

plano. En el primer modo, la carga apunta a la dirección normal al plano de la grieta de tal modo que las caras de la grieta se separen una de otra. En el segundo modo, un plano de la grieta se desliza sobre el otro cortando en el plano xy ; mientras que en el tercer caso, el corte puede ocurrir en los planos xz o yz . El factor de intensidad de esfuerzos se clasifica dependiendo del modo de apertura de una grieta y se denominan K_I , K_{II} y K_{III} .

Los esfuerzos alrededor de una grieta para el primer modo puede escribirse en términos del factor de intensidad de esfuerzo como:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (2.57a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (2.57b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right). \quad (2.57c)$$

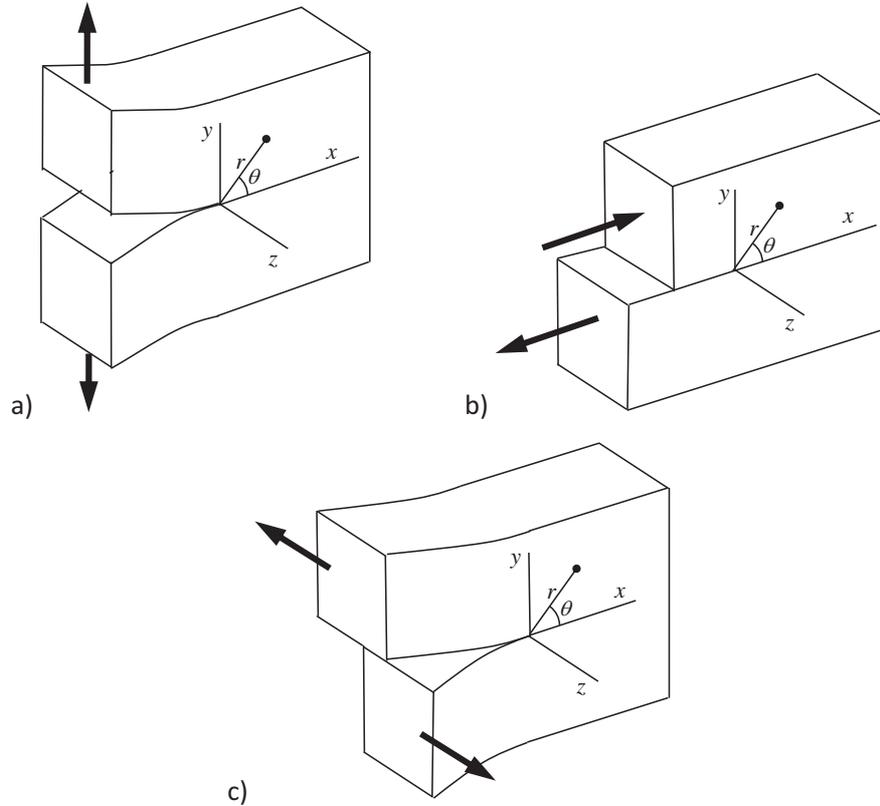


Figura 2.11 Deformación de una grieta en tres modos independientes, a) *Modo I*, b) *Modo II* y c) *Modo III*.

Como se mencionó, el factor de intensidad de esfuerzo es función de la carga aplicada, del tamaño de la grieta y de la geometría de la pieza. También, podemos observar que la proporcionalidad del factor de intensidad de esfuerzo con respecto a la carga aplicada refleja la naturaleza lineal de la teoría de la elasticidad. En general, el factor de intensidad de esfuerzo puede definirse en la región $(r, \theta = 0)$ como:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y; \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy} \quad \text{y} \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}. \quad (2.58)$$

La figura 2.12 muestra la distribución de esfuerzos para K_I . El factor de intensidad de esfuerzo en la ecuación (2.58) especifica la magnitud del esfuerzo en la grieta cerca del punto de singularidad en condiciones elásticas.

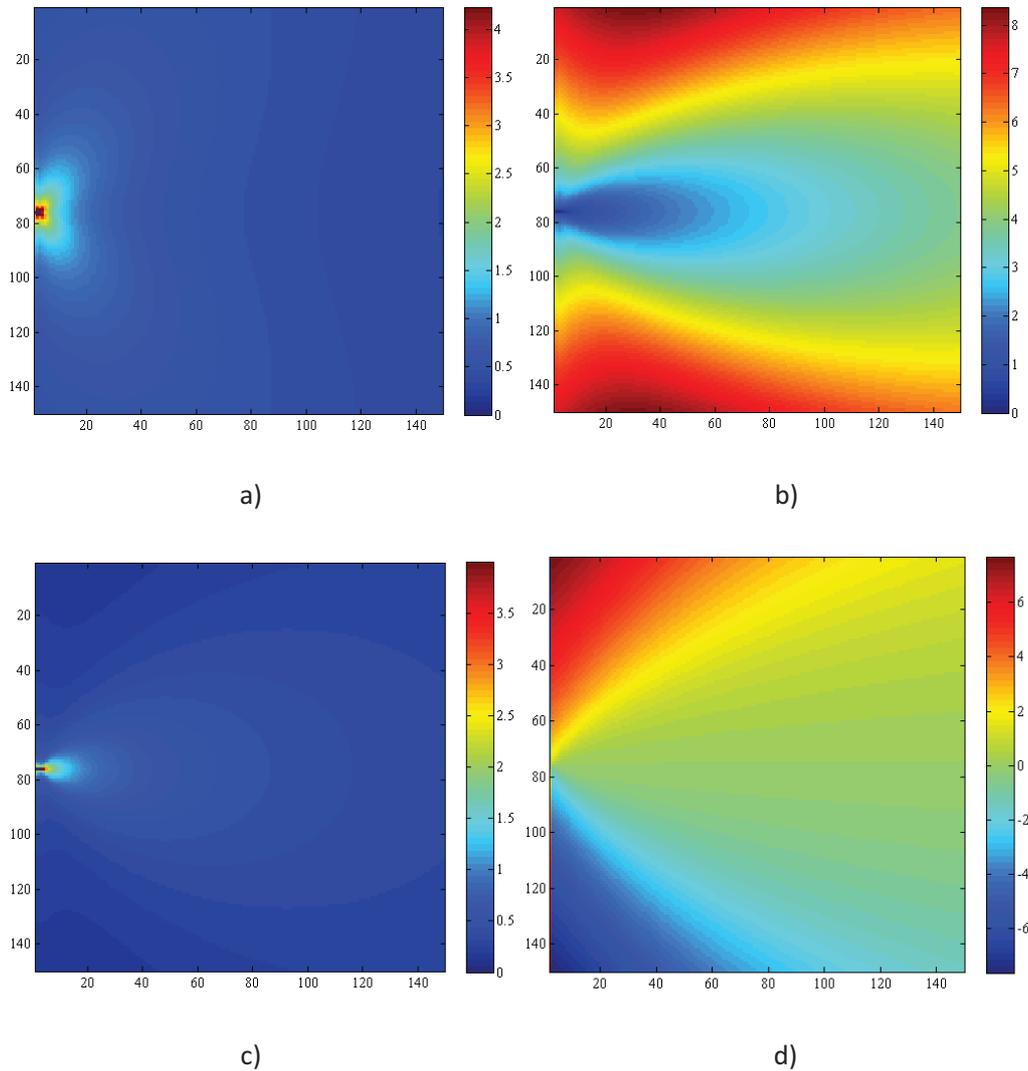


Figura 2.12 Distribución del esfuerzo y deformación normalizado en una grieta en función del Factor de Intensidad de esfuerzo K_I , a) σ_x , b) deformación en la dirección x, c) σ_y y d) deformación en la dirección y.

Referencias

[1] J. Shigley, C. Mischke, *Mechanical engineering design*, McGraw-Hill, (2003).
 [2] Timoshenko, Stephen. *Theory of elasticity*, Ed. McGraw-Hill College, (1970).
 [3] A.D. Michal. *Matrix and tensor calculus with applications to mechanics, Elasticity, and Aeronautics*. John Wiley, New York, (1947).
 [4] L. Brillouin, *Tensors in mechanics and elasticity*, Academic Press, New York, (1964).

-
- [5] C. Zener and J. H. Hollomon, "*Effect of strain rate upon plastic flow of steel*", J. Appl. Phys. **15** (1944), 22-32.
- [6] W. S. Peeling, "*Design options for selection of fracture control procedures in the modernization of codes, rules, and standards*", Proceedings Joint United states – Japan symposium on applications of pressure component codes, Tokyo, Japan, (1973).
- [7] G. B. Airy, "*On the strains in the interior of beams*", British Association Report, Cambridge, (1862).
- [8] G. B. Airy, "*Philosophical Transactions of the Royal Society*", **153** (1863), 49-80.
- [9] Westergaard H. M. "*Bearing Pressures and Cracks*", J. Appl. Mech., **6** (1939), 49-53.
- [10] G. R. Irwin, "*Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*", J. Applied Mechanics, **24** (1957), 361–364.
- [11] K. Hellan, *Introduction to fracture mechanics*, McGraw-Hill. (1985).
- [12] C. H. Wang, *Introduction to fracture mechanics*, DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, Melbourne Victoria, (1996).
- [13] Zihai Shi, *Crack Analysis in Structural Concrete, Theory and Applications*, Elsevier Ltd, New York, (2009).
- [14] Muskhelishvili, N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, 3rd Edition, P. Noordhoff, Groningen, (1953).
- [15] J. H. Michell, "*On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates*", Proceedings of the London Mathematical Society, **31** (1899), 100-124.
- [16] I. H. Stampouloglou and E. E. Theotokoglou, "*Additional separated-variable solutions of the biharmonic equation in polar coordinates*", J. Appl. Mech. **77** (2010), 21003-21010.
- [17] M.L. Williams, "*Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*", J. Appl. Mech. **19** (1952), 526-528.
- [18] M. L. Williams, "*On the stress distribution at the base of a stationary crack*", J. Appl. Mech. **24** (1957), 109–114.
- [19] G. R. Irwin, *Fracture, handbuch der physik VI*, S. Flugge ed., Springer, Berlin, (1958).
- [20] G. R. Irwin, "*Plastic zone near a crack and fracture toughness*", Mechanical and Metallurgical Behavior of Sheet Materials, Proc. 7th Sagamore Conf. IV-63-IV-78. (1960).

CAPÍTULO 3: FUNDAMENTOS DE LA INTERFEROMETRÍA ELECTRÓNICA DEL MOTEADO (ESPI)

Introducción

La coherencia espacial y temporal de la luz láser nos ofrece un fenómeno interesante: cuando se hace incidir luz láser en una superficie difusa ya sea transparente u opaca, el patrón de intensidad en la transmisión o reflexión de la luz da una apariencia granular, es decir se presenta un efecto de moteado, (speckle en inglés). Estas motas varían de tamaño y posición dependiendo de la posición del observador.

Antes de la invención del láser, este fenómeno se consideraba como simple ruido observado en fotografías y superficies rugosas debido a la coherencia temporal y espacial de algunas fuentes de iluminación monocromáticas. Alrededor de los años de 1970, ya con luz láser, se reporta la utilización de este ruido con fines de medición mediante técnicas de la interferencia de moteado ^[1].

3.1 Fenómeno de moteado

Cuando luz monocromática altamente coherente espacialmente con longitud de onda λ , es reflejada o transmitida por una superficie con una rugosidad mayor a λ produce reflexiones múltiples en diferentes direcciones tal que hay interferencia aleatoria de unos trenes de ondas con otros, dando lugar al efecto de moteado. La figura 3.1 muestra una fotografía de este fenómeno.

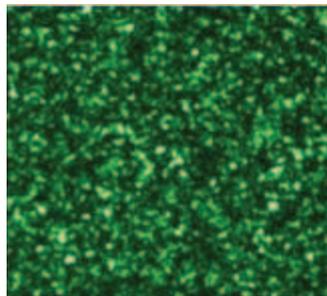


Figura 3.1 Patrón de moteado típico cuando se utiliza iluminación láser.

El tamaño de las motas depende tanto de la geometría del sistema óptico que registra el efecto del moteado, de la longitud de onda de la luz utilizada y el tamaño de la superficie iluminada. La formación del patrón de moteado es de dos tipos: el patrón de moteado objetivo y el patrón de moteado subjetivo.

3.1.1 Formación del patrón de moteado objetivo

Como se mencionó anteriormente, el efecto de moteado se produce debido al esparcimiento de un haz de luz coherente cuando incide en una superficie rugosa, figura 3.2, un haz o varios haces de luz esparcidos interfieren creando puntos brillantes y oscuros.

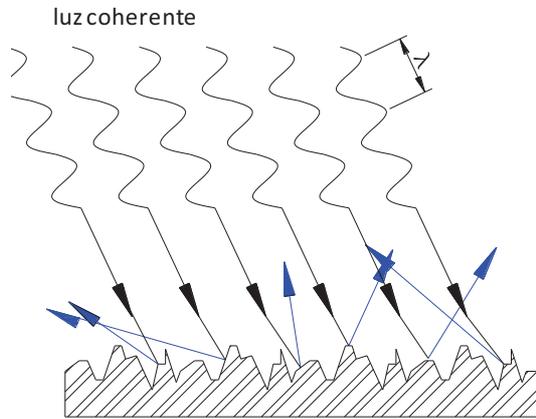


Figura 3.2 Esparcimiento de la luz láser por una superficie rugosa.

De acuerdo al principio de Huygens el cual propone que cada punto en un frente de onda en propagación, emite un tren de ondas esféricas de tal modo que después de cierto tiempo, el frente de onda estará formado por la envolvente del tren de estas ondas esféricas.

Cada punto de la superficie iluminada por un haz láser emite una onda secundaria hacia el punto *B* de la figura 3.3 de la forma²:

$$E_n(r_n) = \frac{1}{r_n} E'_{0n} e^{i(k \cdot r_n + \phi'_n)}, \tag{3.1}$$

donde E'_{0n} es la amplitud del haz; r_n y ϕ'_n es la distancia y la fase respectivamente de un punto sobre la superficie iluminada al punto B sobre la superficie S , k es el número de onda del haz. La suma de todas las ondas está definido como:

$$E(B) = \sum_n \frac{1}{r_n} E'_{0n} e^{i(k \cdot r_n + \phi'_n)} . \tag{3.2}$$

La teoría del límite central de probabilidad que indica que, en condiciones muy generales, si $E(B)$ es la suma de los haces independientes $E'_{0n} e^{i(k \cdot r_n + \phi'_n)}$, entonces la función de distribución de $E(B)$ se aproxima bien a una distribución normal también llamada *distribución Gaussiana*. Así pues, el teorema asegura que esto ocurre en B cuando la amplitud y la fase de cada tren de onda es independiente una de otra y además de que la fase está comprendida entre los valores de $(-\pi, \pi)$. Por lo tanto, aplicando la teoría mencionada y considerando que la sumatoria de la ecuación 3.2 es análoga a la sumatoria de fasores, podemos reescribir la ecuación 3.1 de la forma:

$$E_n(r_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} |E_{0n}| e^{i(\phi_n)} , \tag{3.3}$$

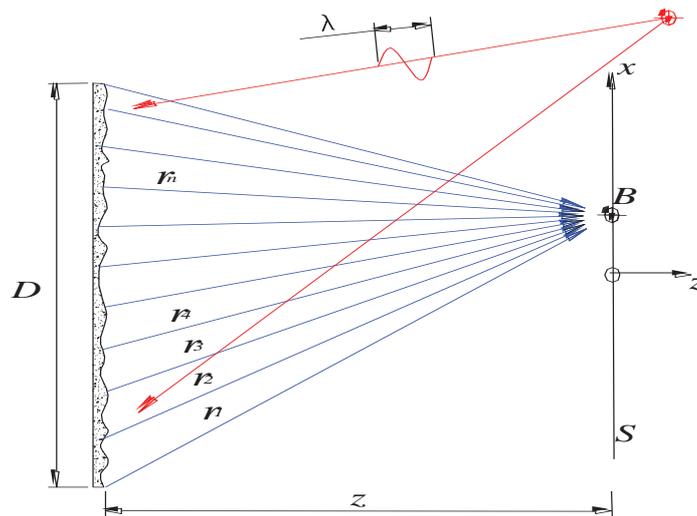


Figura 3.3 Formación de una mota sobre un plano de observación (moteado objetivo).

Donde N representa el total de trenes de onda incidentes en B , E_{0n}/\sqrt{N} es la amplitud resultante de la sumatoria de todos los haces de iluminación y φ_n es la fase resultante de la suma de todos los trenes de onda incidentes. La parte real e imaginaria de la ecuación 3.3 son:

$$\operatorname{Re}\{E\} = E_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N |E_{0n}| \cos(\varphi_n), \quad (3.4a)$$

$$\operatorname{Im}\{E\} = E_{im} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N |E_{0n}| \sin(\varphi_n). \quad (3.4b)$$

Observemos que el promedio de las amplitudes E_r y E_{im} es igual a cero porque la fase varía de $-\pi$ hasta π . Calculando ahora la varianza y la correlación, recordando que:

$$\langle \cos \varphi_a \cos \varphi_b \rangle = \langle \sin \varphi_a \sin \varphi_b \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} : a = b \\ 0 : a \neq b \end{cases}, \quad (3.5a)$$

$$\langle \cos \varphi_a \sin \varphi_b \rangle = \langle \sin \varphi_a \cos \varphi_b \rangle = 0. \quad (3.5b)$$

Podemos calcular la amplitud del moteado:

$$\langle E_r^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle |E_{0n}| |E_{0m}| \rangle \langle \cos(\varphi_n) \cos(\varphi_m) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \langle |E_{0n}|^2 \rangle, \quad (3.6a)$$

$$\langle E_{im}^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle |E_{0n}| |E_{0m}| \rangle \langle \sin(\varphi_n) \sin(\varphi_m) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \langle |E_{0n}|^2 \rangle, \quad (3.6b)$$

$$\langle E_r E_{im} \rangle = 0. \quad (3.6c)$$

Ahora, aplicando la teoría del límite central de la probabilidad y considerando que $N \rightarrow \infty$ y que E_r y E_{im} tienen un perfil gaussiano, encontramos que la densidad de probabilidad asociado a E_r y a E_{im} es³:

$$P_{r,im}(E_r, E_{im}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{E_r^2 + E_{im}^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.7)$$

y la varianza queda expresada como:

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \langle |E_{0n}|^2 \rangle . \quad (3.8)$$

Puesto que la intensidad $I = \langle E_{0n}^2 \rangle$ y la fase φ son independientes una de otra, el campo resultante está compuesto por la parte real y la imaginaria, esto es:

$$E_r = \sqrt{I} \cos \varphi , \quad (3.9a)$$

$$E_{im} = \sqrt{I} \sin \varphi . \quad (3.9b)$$

Considerando lo anterior, entonces introduciendo la ecuación (3.9) en la ecuación (3.7) y tomando en consideración la ecuación (3.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} P_{r,im}(E_r, E_{im}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\sqrt{I} \cos \varphi)^2 + (\sqrt{I} \sin \varphi)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} & \text{para } [I \geq 0] \text{ y } [-\pi \leq \varphi \leq \pi] \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} . \quad (3.10) \\ &= P_{r,im}(I, \varphi) \end{aligned}$$

Para conocer qué parte corresponde a la intensidad del moteado y qué parte a la fase, la ecuación 3.10 puede considerarse estar compuesta por dos funciones independientes ya que la intensidad I y la fase ϕ son independientes una de la otra de tal manera que:

$$P_{I,\phi}(I, \phi) = p_I(I) p_\phi(\phi) , \quad (3.11)$$

e integrando cada función en sus límites:

$$p_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{I,\phi}(I, \varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} & \text{para } I \geq 0 \\ 0 & \text{para todo lo demás} \end{cases} , \quad (3.12a)$$

$$p_{\varphi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{I,\varphi}(I, \varphi) dI = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{para } -\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \text{para todo lo demás} \end{cases} . \quad (3.12b)$$

De los resultados de la ecuación (3.12) podemos observar que la fase del patrón de moteado es constante y que la intensidad en el patrón disminuye exponencialmente. El promedio de la intensidad es $\langle I \rangle = 2\sigma^2$ a partir de la varianza de σ podemos determinar la visibilidad o contraste V del patrón de moteado mediante:

$$V = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} . \quad (3.13)$$

Para determinar el tamaño de una mota, supongamos ahora que en el punto B sobre la superficie S de nuestro sensor llega dos haces de luz de diferentes regiones de nuestro objeto cuando es iluminado por luz láser en un diámetro D . La figura 3.3 nos muestra este arreglo.

Puesto que en B se interceptan los dos haces (y que pudieran ser muchos más de la superficie en D) podemos suponer que un haz llega primero que otro. Por lo tanto la diferencia de fase será⁴:

$$\Delta\phi = 2\pi f x = \frac{2\pi D}{\lambda z} x . \quad (3.14)$$

La frecuencia máxima será:

$$f_{\max} = \frac{D}{\lambda z} . \quad (3.15)$$

Por lo tanto el periodo de la mota de la figura 3.3 será el tamaño mínimo de la mota (objetivo) observada:

$$\sigma_0 = \frac{\lambda z}{D} . \quad (3.16)$$

Para un sistema óptico se debe considerar los sistemas de lentes; según J.W. Goodman^[3], el tamaño se puede considerar como la separación que existe entre los dos primeros mínimos de la función Bessel de primer orden J_1 esto es cuando $J_1(x)=0$ y cuando $x=1.22\pi$, esto quiere decir

que el tamaño depende del límite de difracción. A partir de la relación de autocorrelación para el sistema óptico compuesto con lentes:

$$R(r) = \langle I \rangle^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1\left(\frac{\pi Dr}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi Dr}{\lambda z}} \right|^2 \right\}, \tag{3.17}$$

donde D es el diámetro de la iluminación, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $R(r)$ es la intensidad de la mota observable, la separación está dada por:

$$\sigma'_0 = \frac{2.44\lambda z}{D}. \tag{3.18}$$

Por ejemplo, la figura 3.4 muestra gráficamente lo dicho por las ecuaciones 3.17 y 3.18 cuando cambia el diámetro de iluminación D :

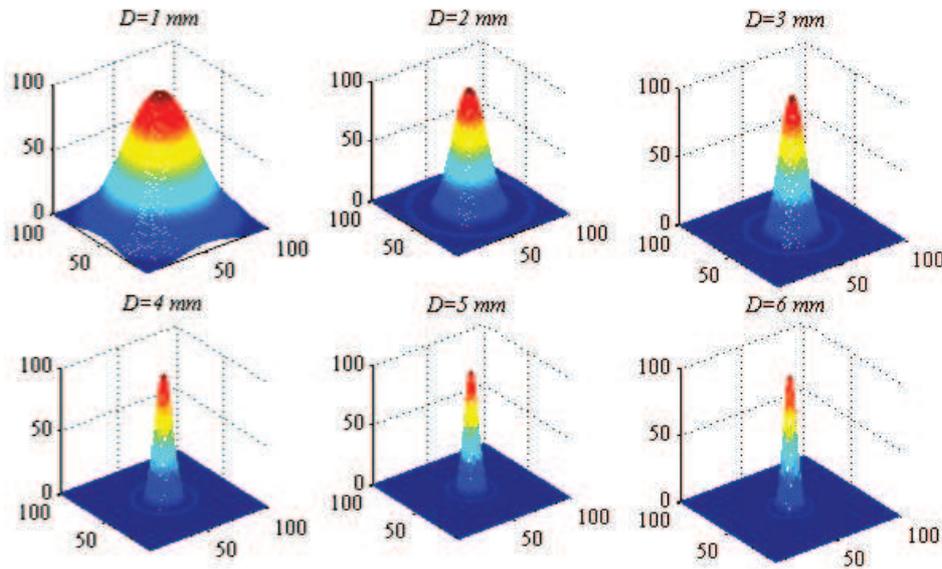


Figura 3.4 Tamaño de una mota σ'_0 en función del tamaño de iluminación D , $z=100$ mm, $\lambda = 442$ nm, $I=100$.

3.1.2 Formación del patrón de moteado subjetivo

La amplificación de un sistema óptico también modifica el tamaño de la mota registrada. Para la figura 3.5 podemos describir el tamaño de la mota proyectada sobre una superficie debido a la formación de una imagen a través del uso de una lente. El tamaño de la mota (subjetivo) será ^[4]:

$$\sigma_s = \frac{\lambda b}{D} . \tag{3.19}$$

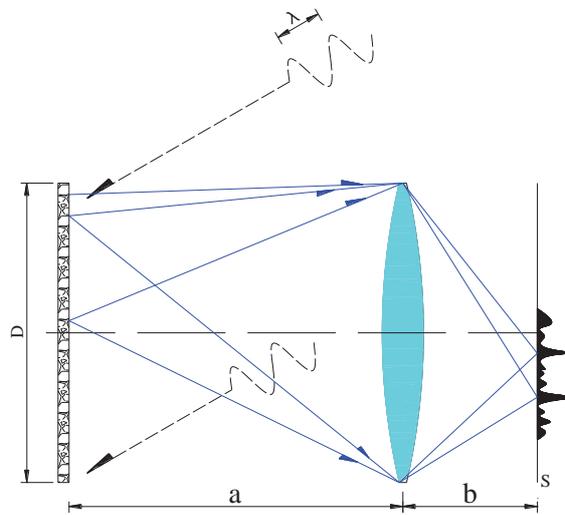


Figura 3.5 Formación de una imagen de patrón de motas sobre un plano (moteado subjetivo).

Introduciendo la definición de apertura numérica para el lente: $F \equiv \frac{f_L}{D}$, donde f_L es la distancia focal de la lente, obtenemos:

$$\sigma_s = (1+m)\lambda F , \tag{3.20}$$

donde m es la amplificación dada por:

$$m = \frac{(b - f_L)}{f_L} . \tag{3.21}$$

Como comentarios a la formación de moteado, podemos decir que si iluminamos una superficie rugosa con un láser, el efecto de moteado está formado por la interferencia de los haces esparcidos por la superficie rugosa y esta interferencia se da en cualquier punto entre la superficie iluminada y la superficie S . Si se coloca un detector tipo CCD en S podrá detectar un patrón de intensidad asociado al efecto de moteado debido a la interferencia de los haces esparcidos sobre el detector independientemente si la trayectoria de esos haces hayan sido afectado por un sistema de lentes. Por lo tanto, mientras que para un objeto que forme su imagen en S a través de un sistema de lentes, para un patrón de moteado no es así.

3.2 Correlación de los patrones de moteado

La interferometría ocurre cuando al menos dos haces de luz se sobreponen entre ellas; en el caso del efecto de moteado, dos patrones también pueden interferir, en este caso el proceso se llama correlación. Para obtener una buena correlación es necesario implementar un sistema óptico que nos garantice condiciones necesarias de estabilidad. Por ejemplo, un sistema que mantenga constante la intensidad y la fase de los haces de iluminación. El registro del patrón de moteado puede efectuarse mediante el uso de películas fotográficas o sensores como los empleados en las cámaras digitales. La ventaja de esta última, es que puede realizar operaciones entre imágenes casi instantáneamente y evitar así los largos tiempos que se toman los procesos de revelado fotográfico y holográfico. La interferometría de moteado consiste básicamente en la superposición de dos imágenes de patrones de motas antes y después de un cambio asociado en el objeto. En esta interferencia no se observan las clásicas franjas de interferencia óptica observada entre dos haces de luz puesto que la fase de cada mota es estadísticamente independiente. Sin embargo, cada mota en una imagen puede interferir con su correspondiente en la otra imagen. Por lo tanto la interferometría del moteado se puede tratar muy similar como si se tratara de la interferencia óptica clásica⁵. La fase del patrón de moteado se considera como un promedio variablemente distribuida en la imagen en el rango de $(0, 2\pi)$.

Para entender esto, el procedimiento para esta técnica es como sigue: supongamos que se ilumina una superficie con luz láser, la luz se esparce en todas direcciones debido a la rugosidad de la superficie. Algunos haces llegan al detector que normalmente es el sensor de una cámara CCD y

según la ecuación 3.3, esta onda sobre el detector tiene la forma $E_A = E_{0A}(x, y)e^{i\varphi_A(x, y)}$ donde E_{0A} es la amplitud de la onda y φ_A es su fase aleatoria debido a la rugosidad. Una segunda onda $E_B = E_{0B}(x, y)e^{i\varphi_B(x, y)}$ usada como referencia también llega al sensor de la cámara. Como solamente las intensidades $I = |E|^2 = E \cdot E^*$ de las ondas de iluminación son detectadas en el sensor del CCD, entonces la intensidad estará dada por:

$$\begin{aligned}
 I_1(x, y) &= |E_A(x, y) + E_B(x, y)|^2 \\
 &= (E_A(x, y) + E_B(x, y))(E_A(x, y) + E_B(x, y))^* \\
 &= [E_{0A}(x, y)e^{i\varphi_A(x, y)} + E_{0B}(x, y)e^{i\varphi_B(x, y)}][E_{0A}(x, y)e^{-i\varphi_A(x, y)} + E_{0B}(x, y)e^{-i\varphi_B(x, y)}] \\
 &= (E_{0A}(x, y))^2 + E_{0A}(x, y)E_{0B}(x, y)e^{+i\varphi_A(x, y) - i\varphi_B(x, y)} + E_{0B}(x, y)E_{0A}(x, y)e^{i\varphi_B(x, y) - i\varphi_A(x, y)} + (E_{0B}(x, y))^2 \\
 &= (E_{0A}(x, y))^2 + (E_{0B}(x, y))^2 + E_{0A}(x, y)E_{0B}(x, y)e^{+i(\varphi_A(x, y) - \varphi_B(x, y))} + E_{0B}(x, y)E_{0A}(x, y)e^{-i(\varphi_A(x, y) - \varphi_B(x, y))} \\
 &\quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Utilizando las identidades de Euler podemos simplificar la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned}
 I_1(x, y) &= I_A + I_B + \sqrt{I_A I_B} [e^{i(\varphi_A - \varphi_B)} + e^{-i(\varphi_A - \varphi_B)}] \\
 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\varphi_A - \varphi_B) \quad . \quad (3.23) \\
 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos \psi
 \end{aligned}$$

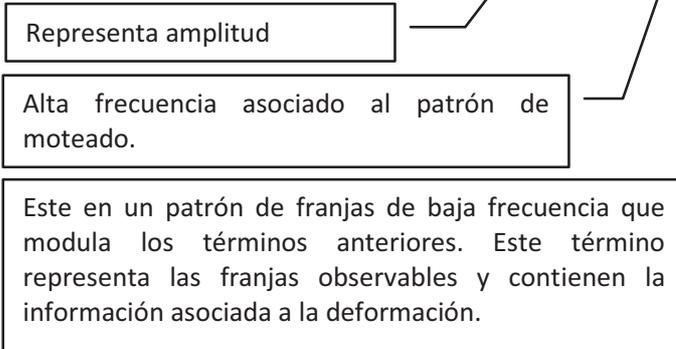
Donde $\psi(x, y)$ es la diferencia de fase del patrón del moteado de la primera imagen en cada punto (x, y) de la superficie iluminada. Esta primera imagen es capturada y almacenada en la computadora.

Ahora suponemos que la superficie es deformada y por lo tanto, la onda que llega ahora al detector proveniente de la superficie iluminada tiene una variación en la fase $\Delta\varphi$ asociada a la deformación. La onda que incide sobre el sensor CCD tiene ahora la forma $E'_A = E'_{0A}(x, y)e^{i(\varphi_A(x, y) + \Delta\varphi)}$. Repitiendo nuevamente la deducción mostrada en las ecuaciones 3.22 y 3.23 con las ondas incidentes E'_A y E_B sobre el sensor CCD se puede obtener una segunda imagen y almacenarla cuya distribución de intensidades estará dado por:

$$I_2(x, y) = I'_A + I_B + 2\sqrt{I'_A I_B} \cos[\psi + \Delta\varphi] \quad . \quad (3.24)$$

Suponemos que las amplitudes E'_{0A} y E_{0A} son iguales, por lo tanto $I_A = I'_A$. Substrayendo $I_2(x, y)$ de $I_1(x, y)$ por medio del procesado digitalmente las imágenes obtenemos un interferograma que es la correlación por sustracción entre las imágenes I_1 y I_2 . En el interferograma podemos observar un patrón de franjas relacionadas con deformación de la superficie iluminada de la siguiente manera:

$$I(x, y) = (I_1(x, y) - I_2(x, y)) = 4\sqrt{I_A I_B} \left[\sin\left(\psi + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\phi\right) \right]. \quad (3.25)$$



De la ecuación 3.25 podemos observar que un interferograma contiene una distribución de intensidad de baja frecuencia de la forma $\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ que se observará en un monitor como una serie de franjas brillantes y oscuras. El término $\sin\left(\psi + \frac{1}{2}\Delta\phi\right)$ representa el efecto de ruido. La brillantez B en el monitor es proporcional a la diferencia de voltaje que recibe el detector cuando incide la intensidad $I(x, y)$, de modo que la señal de video que se observa tiene una brillantez que puede ser representada como:

$$B = 4K\sqrt{I_A I_B} \sin\left(\psi + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin \frac{\Delta\phi}{2}, \quad (3.26)$$

donde K es una constante de proporcionalidad asociada a las intensidades del patrón de moteado. Se ha tomado el valor absoluto en la ecuación 3.26 para evitar pérdidas en la señal de video.

Las franjas pueden representar un campo de desplazamiento, un campo de deformación, o topografía de objetos, dependiendo del tipo de arreglo óptico que se utilice para obtener los patrones de moteado. La figura 3.6 muestra dos patrones de moteado y su correlación por substracción.

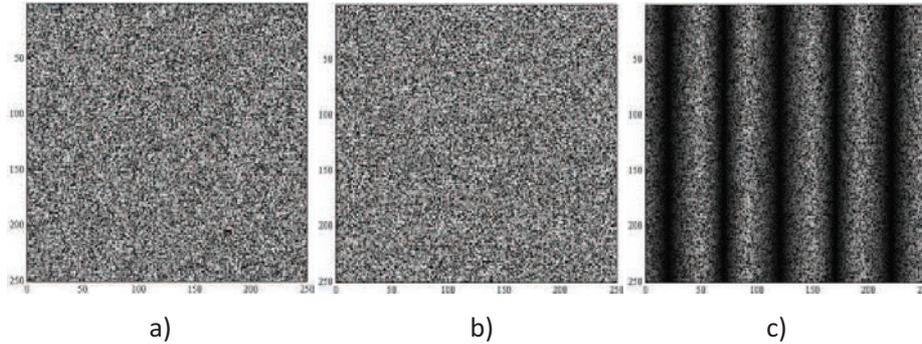


Figura 3.6 a) Imagen de referencia I_1 , b) Imagen después de la deformación I_2 y c) Correlación de las dos imágenes.

3.3 Decorrelación de los patrones de moteado

La visibilidad de un patrón de franjas se puede ver afectada cuando aumenta el número de franjas, de tal manera que la separación entre franjas se aproxima al valor del tamaño promedio de las motas. La visibilidad del patrón de franjas es proporcional al coeficiente de correlación Z definida por:

$$|Z| = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (3.27)$$

donde N es el número de motas por cada franja observada debido a la correlación. Obsérvese que cuando $N=1$, $|Z|=0$ no hay correlación. En otras palabras, las causas fundamentales de la decorrelación son desplazamientos grandes que disminuye el número de motas por cada franja. Para el caso del patrón de moteado subjetivo, el sistema óptico influye en la decorrelación de modo que para un desplazamiento Δx sobre el plano donde se forma la imagen (plano sensor), la decorrelación ocurre cuando el desplazamiento Δx es mayor al tamaño promedio de las motas, es decir $\sigma'_o < \Delta x$, donde:

$$\Delta x = \frac{f_L \lambda}{mD} . \tag{3.28}$$

3.4 Fotografía de Moteado

En la figura 3.7 se muestra una superficie rugosa la cual es iluminada mediante luz coherente de una longitud de onda λ . Se registra un patrón de moteado en el plano xy en el cual puede estar una película fotográfica. Si el objeto se mueve una cantidad $\Delta\xi$ en la dirección ξ , el patrón de moteado también se moverá sobre la película fotográfica una cantidad $M\Delta x$ donde M es la amplificación del sistema óptico usado para formar la imagen en la película fotográfica.

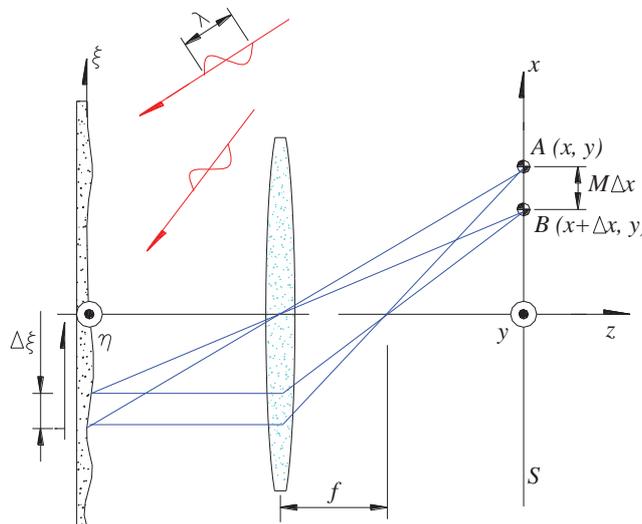


Figura 3.7 Registro de un patrón de moteado antes y después de que la superficie rugosa se ha desplazado una cantidad $M\Delta x$.

La primera y segunda exposición es registrada en una sola placa fotográfica de acetato, comúnmente conocido como un “negativo”:

$$\begin{aligned} \text{Primera exposición: } & I(x, y), \\ \text{Segunda exposición: } & I(x + M\Delta x, y), \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $I(x,y)$ representa la intensidad de la luz registrada en el punto (x,y) de la placa fotográfica. Por lo tanto el registro está compuesto por dos imágenes que al ser reproducido, muestra una transmitancia $t(x,y)$ de la forma:

$$t(x, y) = t_0 + \beta T (I(x, y) + I(x - M\Delta x, y)) , \quad (3.30)$$

donde t_0 es el ruido de fondo en forma de una componente constante, β y T son constantes que modifican la transmitancia asociados a las propiedades físicas y químicas del negativo.

La distribución de la intensidad en el plano focal estará dada por el patrón de moteado del objeto y su transformada de Fourier de la forma:

$$U_f(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) \mathfrak{F}\{t(x, y)\} , \quad (3.31)$$

donde $K(\xi, \eta)$ está relacionada con la iluminación sobre la superficie y por lo tanto es una constante. Para cada punto (x,y) en el plano focal le corresponde un punto en la superficie iluminada, la relación es:

$$\eta = \frac{y_f}{\lambda f} , \quad (3.32a)$$

$$\xi = \frac{x_f}{\lambda f} , \quad (3.32b)$$

Substituyendo la ecuación 3.30 en 3.31, obtenemos:

$$U_f(\xi, \eta) \approx t_0 \delta(\xi, \eta) + \beta T \mathfrak{F}\{I(x, y)\} [1 + e^{i2\pi\Delta x \xi}] , \quad (3.33)$$

cuyo espectro se puede aproximar a:

$$I_s(\xi, \eta) = |U_f(\xi, \eta)|^2 = |\mathfrak{F}\{I(x, y)\}|^2 4 \cos^2(\pi\Delta x \xi) + \text{otros términos despreciables.} \quad (3.34)$$

En esta última relación podemos observar que al reconstruir la imagen capturada en el negativo y proyectándola en una pantalla en el plano focal, vamos a observar la intensidad de la imagen original de la superficie iluminada. La distribución de intensidad observada estará asociada a una

función cosenoidal $4\cos^2(\pi\Delta x\xi)$ que modifica la intensidad en forma de franjas oscuras y claras visibles cuyas separaciones están dadas por:

$$\Delta x_f = \frac{\lambda f}{M\xi}, \quad (3.35)$$

donde M es la amplificación del sistema óptico; λ es la longitud de onda de la luz de iluminación y f es la distancia focal de la lente.

Si el negativo se ilumina con un haz láser, se podrá proyectar el patrón descrito por la ecuación 3.33 sobre una pantalla a una distancia z con respecto al negativo. Entonces el período de las franjas observadas en el plano focal será:

$$p = \frac{\lambda z}{M\Delta x_f}. \quad (3.36)$$

De lo anterior podemos concluir que la técnica de fotografiar el patrón de moteado puede servir como herramienta para poder medir desplazamientos en plano de un objeto con solo medir el período de las franjas proyectadas. La dirección del desplazamiento de la superficie iluminada es perpendicular a las franjas. La figura 3.8 muestra imágenes de patrones de franjas que se pueden proyectar cuando se ilumina la porción del negativo que contiene la información del desplazamiento de un disco iluminado cuando es rotado un pequeño ángulo.

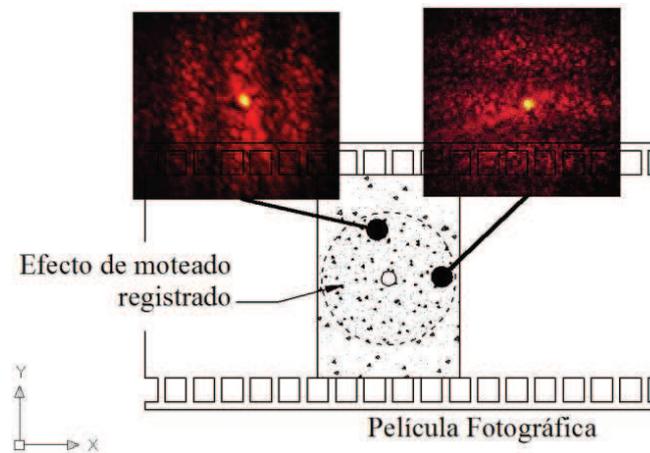


Figura 3.8 Fotografías del patrón de moteado de dos puntos de un disco rotado ligeramente

Actualmente se puede llevar a cabo la correlación de los dos patrones de moteado de manera digital que es la técnica que se conoce fotografía digital de moteado ^[6] (Digital Speckle Photography, DSP)

3.5 Obtención de la fase

Las técnicas más utilizadas para la extracción de la fase son el método de Fourier desarrollado por Takeda ^{[7], [8]} y el método de corrimiento de fase presentado por Carré ^[9] y utilizado por Crane ^[10] para la medición de la fase $\Delta\phi$, término contenido en la ecuación 3.25 y asociado a las franjas de baja frecuencia que corresponde a la información de la deformación.

3.5.1 Método de corrimiento de fase ^[11]

Es posible conocer la fase $\Delta\phi$ si se obtienen varios interferogramas con un incremento constante en la fase de tal manera que se pueda formar un sistema de ecuaciones lineales. Como sabemos que el patrón de franjas de un interferograma está relacionado a una función senoidal, es conveniente reescribir la ecuación 3.25 de manera muy general en la forma $I = a + b\cos(\Delta\phi' + \phi)$, donde ϕ es un corrimiento en la fase. La constante a se refiere a la intensidad de fondo y $b\cos(\Delta\phi' + \phi)$ la intensidad del patrón de franjas. Si se utiliza el método de

los mínimos cuadrados para determinar las constantes desconocidas a , b y $\Delta\phi'$. Podemos utilizar la ecuación:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= a + b \cos(\Delta\phi' + \phi) \\ &= a + b \cos(\Delta\phi') \cos(\phi) - b \sin(\Delta\phi') \sin(\phi), \\ &= D_1 + D_2 \cos \phi + D_3 \sin \phi \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $D_1 = a$, $D_2 = b \cos \Delta\phi'$ y $D_3 = -b \sin \Delta\phi'$. Para encontrar las constantes a , b y $\Delta\phi'$ se requieren obtener por lo menos $N \geq 3$ interferogramas:

$$I_n = D_1 + D_2 \cos \phi_n + D_3 \sin \phi_n; \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.38)$$

La varianza ε es definido por:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (D_1 + D_2 \cos \phi_n + D_3 \sin \phi_n - I_n)^2. \quad (3.39)$$

Tomando las primeras derivadas parciales de ε con respecto a las constantes desconocidas D_1 ,

D_2 y D_3 e igualando las derivadas obtenidas a cero, esto es: $\frac{d}{dD_1}(\varepsilon) = 0$, $\frac{d}{dD_2}(\varepsilon) = 0$ y

$\frac{d}{dD_3}(\varepsilon) = 0$, se puede encontrar un sistema de ecuaciones simultáneas expresada matricialmente

como:

$$\begin{bmatrix} N & \sum \cos \phi_n & \sum \sin \phi_n \\ \sum \cos \phi_n & \sum \cos^2 \phi_n & \sum \cos \phi_n \sin \phi_n \\ \sum \sin \phi_n & \sum \cos \phi_n \sin \phi_n & \sum \sin^2 \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_n \\ \sum I_n \cos \phi_n \\ \sum I_n \sin \phi_n \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

La ecuación 3.40 puede evaluarse con respecto a la frecuencia ϕ_n y es necesaria que sea constante para todas las imágenes^[12]. La ecuación 3.40 se puede simplificar de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_n \\ \sum I_n \cos \phi_n \\ \sum I_n \sin \phi_n \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

La fase $\Delta\varphi'$ puede calcularse por:

$$\tan \Delta\varphi' = -\frac{D_3}{D_2} = -\frac{\sum_{n=1}^N I_n \left(A_{11} + A_{12} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + A_{13} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right)}{\sum_{n=1}^N I_n \left(A_{21} + A_{22} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + A_{23} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right)}, \quad (3.42)$$

donde los coeficientes A son :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) & A_{21} &= (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) \\ A_{12} &= (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) & A_{22} &= (a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) \\ A_{13} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) & A_{23} &= (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

y suponiendo que los N interferogramas son obtenidos en intervalos espaciales constantes ^[13]

donde $\phi_n = \frac{2\pi(n-1)}{N} + \phi_1$ y sujeta a las condiciones que $\sum_{n=1}^N \sin \phi_n = 0$, $\sum_{n=1}^N \cos \phi_n = 0$,

$\sum_{n=1}^N \sin 2\phi_n = 0$ y $\sum_{n=1}^N \cos 2\phi_n = 0$. En otras palabras, que la suma de la frecuencia en cada

coordenada de los interferogramas sea un periodo completo de 2π . Utilizando las condiciones anteriores, la ecuación 3.41 puede escribirse de la forma:

$$\begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_n \\ \sum I_n \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \\ \sum I_n \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

cuya solución es:

$$\alpha_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_n, \quad (3.45a)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad (3.45b)$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right). \quad (3.45c)$$

Por último, utilizando las ecuaciones 3.45b y 3.45c en relación a la ecuación 3.41, se puede encontrar la fase $\Delta\phi'$ envuelta mediante:

$$\tan \Delta\phi' = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\sum_{n=1}^N I_n \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{\sum_{n=1}^N I_n \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}. \quad (3.46)$$

Por ejemplo, si $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $n=4$, entonces $\phi_n = \frac{2\pi(n-1)}{N} + \phi_1$, la ecuación 3.46 se reduce al algoritmo de corrimiento de fase para 4 pasos:

$$\tan(\Delta\phi') = \tan\left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}\right), \quad (3.47)$$

y para el corrimiento de fase de 3 pasos a 120° :

$$\tan(\Delta\phi') = \left(-\frac{\sqrt{3}(I_1 - I_3)}{I_1 - 2I_2 + I_3}\right). \quad (3.48)$$

Nótese que los valores de $\Delta\phi'$ estarán comprendido en el rango $(-\pi, \pi)$, es decir la fase obtenida estará envuelta en el intervalo $(-\pi, \pi)$ como se muestra en la figura 3.9. Thomas Kreis⁽²⁾ trata con más detalle distintos tipos de algoritmos de corrimiento de fase con distintos pasos y fases $\Delta\phi$. La figura 3.9 muestra el conjunto de imágenes para la obtención de la fase envuelta según la ecuación 3.48, por el algoritmo de tres pasos.

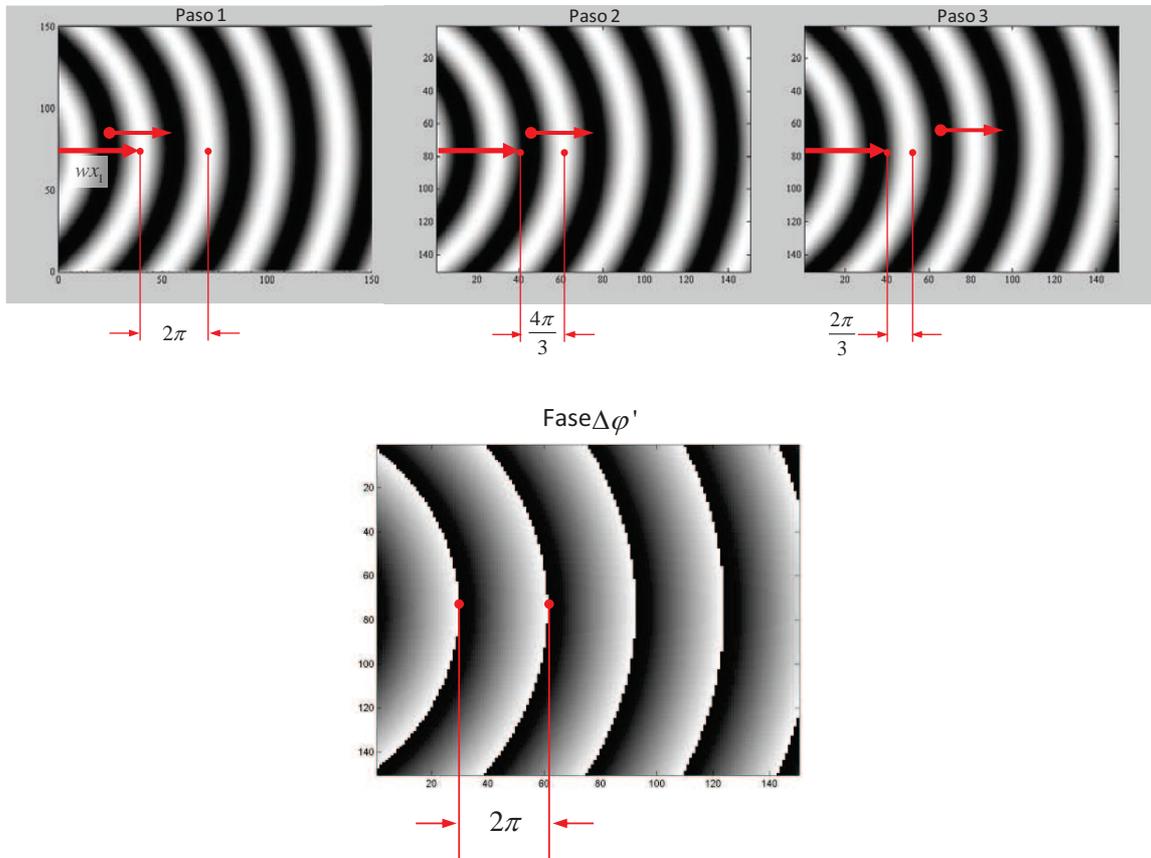


Figura 3.9 Corrimiento de fase para $N=3$ pasos y sus mapa de fase envuelta correspondiente.

3.5.2 Método de Fourier

En varias mediciones ópticas podemos encontrar un patrón de franjas de la forma:

$$I = a + b \cos(2\pi f_0 x + \Delta\varphi'), \quad (3.49)$$

donde f_0 es la frecuencia portadora y $\Delta\varphi'$ es el cambio de fase asociado al campo de deformación, en este caso, a y b son las intensidades de fondo y del patrón de franjas respectivamente. Esta ecuación se puede expresar en el campo complejo aplicando la identidad

de Euler $\cos \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)$, de tal manera que puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 I &= a + \frac{1}{2}b \left[e^{i2\pi f_0 x} e^{i\Delta\phi'} \right] + \frac{1}{2}b \left[e^{-i2\pi f_0 x} e^{-i\Delta\phi'} \right], \\
 &= a + c \left[e^{i2\pi f_0 x} \right] + c^* \left[e^{-i2\pi f_0 x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

donde se hizo la sustitución $c(x, y) = \frac{1}{2}be^{i\Delta\phi'(x, y)}$ y el símbolo * denota el conjugado. Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 3.50 encontramos con respecto a la variable x se obtiene:

$$\mathfrak{F}\{I\} = A(f, y) + C(f - f_0, y) + C^*(f + f_0, y). \tag{3.51}$$

Eliminando convenientemente mediante un filtro los términos $A(f, y)$ y $C^*(f + f_0, y)$, haciendo que $f_0=0$ (esto es, centrando el término $C(f-f_0, y)$) y aplicando la transformada inversa de Fourier a $C(f, y)$ con respecto a f se obtiene el término $c(x, y)$. Este término puede ser expresado en sus componentes real e imaginaria, esto es, $\mathfrak{F}^{-1}\{C(f, y)\} = \text{Re}(c(x, y)) + i\text{Im}(c(x, y))$, de tal modo que la fase se puede obtener como:

$$\Delta\phi' = \arctan \left[\frac{\text{Im}(c(x, y))}{\text{Re}(c(x, y))} \right]. \tag{3.52}$$

Un ejemplo de este método se observa en la figura 3.10 donde a) son las franjas simuladas de un interferograma con variaciones que simulan una deformación lineal en dirección horizontal hacia la derecha, b) muestra el espectro de la transformada de Fourier obtenido mediante el valor absoluto de la ecuación 3.50, c) se emplea una máscara para eliminar los lóbulos central y real del espectro de Fourier y d) se centra $B(f-f_0, y)$ haciendo $f_0=0$, de esta última se obtiene su transformada inversa para obtener la fase mediante la ecuación 3.52.

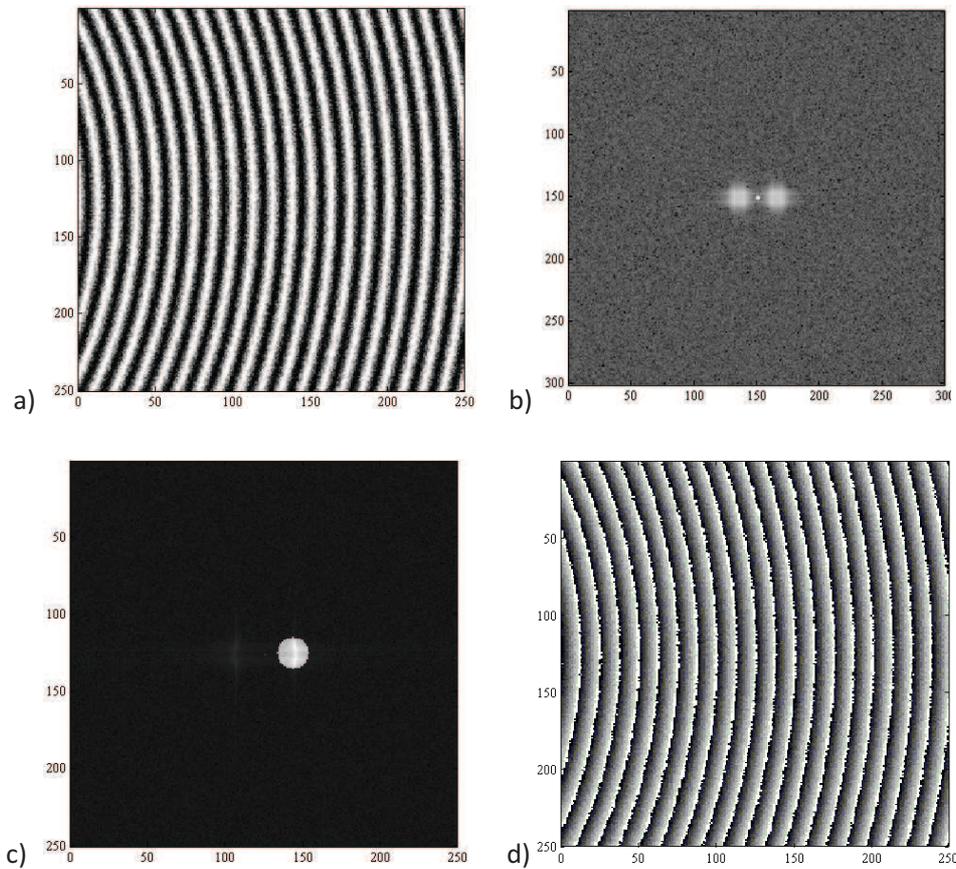


Figura 3.10 Método de obtención de la fase ϕ mediante el método de Fourier, a) Imagen del interferograma, b) el espectro de Fourier, c) $B(f-f_0, y)$ y d) la fase envuelta obtenida.

El método de Fourier tiene dos desventajas importantes: primero, los filtros utilizados deben adaptarse lo mejor posible para no restar información útil correspondiente a $B(f+f_0, y)$ ya que la fase recuperada podría tener errores y segundo, puesto que se analiza un solo patrón de franjas asociado al interferograma, el signo de la fase queda sin definir, es decir la fase acarrea una ambigüedad de signo.

3.6 Desenvolvimiento de la fase

Debido a que la fase estimada es obtenida mediante la función arcotangente, (ecuaciones 3.46 y 3.52) ésta tiene un valor comprendido en el módulo de 2π de la fase real. Por ese motivo se dice

que la fase obtenida de este modo está envuelta en el intervalo de $-\pi$ a π . La relación entre una fase envuelta y la fase desenvuelta está dada por la ecuación:

$$\phi_{des}(x, y) = \phi(x, y) + 2\pi k(x, y), \tag{3.53}$$

donde ϕ_{des} es la fase desenvuelta en un intervalo continuo, ϕ es la fase envuelta en el modulo 2π y k es un valor entero que corrige los saltos de 2π de la fase envuelta. Para los mapas de fase envuelta de buena calidad y sin ruido, calcular el valor correcto de k no representa mucha dificultad; cualquier algoritmo que pueda detectar el salto de la fase de 2π entre 2 puntos continuos del mapa de fase envuelta, sumará o restará la diferencia absoluta entre esos puntos de tal manera que la fase envuelta pase a ser continua. La figura 3.11 muestra un ejemplo entre una fase envuelta y su desenvolvimiento de fase para una línea y un mapa de fase. El verdadero problema del desenvolvimiento de la fase de interferogramas obtenidos por ESPI es el ruido asociado al patrón de moteado que hace complicado detectar real y efectivamente los saltos de 2π . Existen varios métodos y algoritmos para desenvolver la fase. Dennis C. Ghiglia y Mark D. Printt ^[14] muestra una serie de técnicas, algoritmos y programas para el desenvolvimiento de la fase.

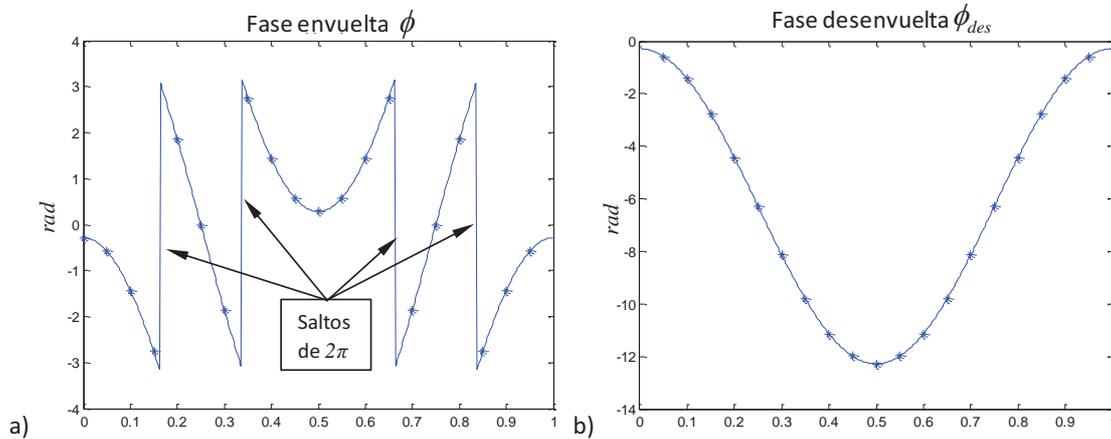


Figura 3.11 a) y c) fase envuelta, b) y d) fase desenvuelta correspondiente

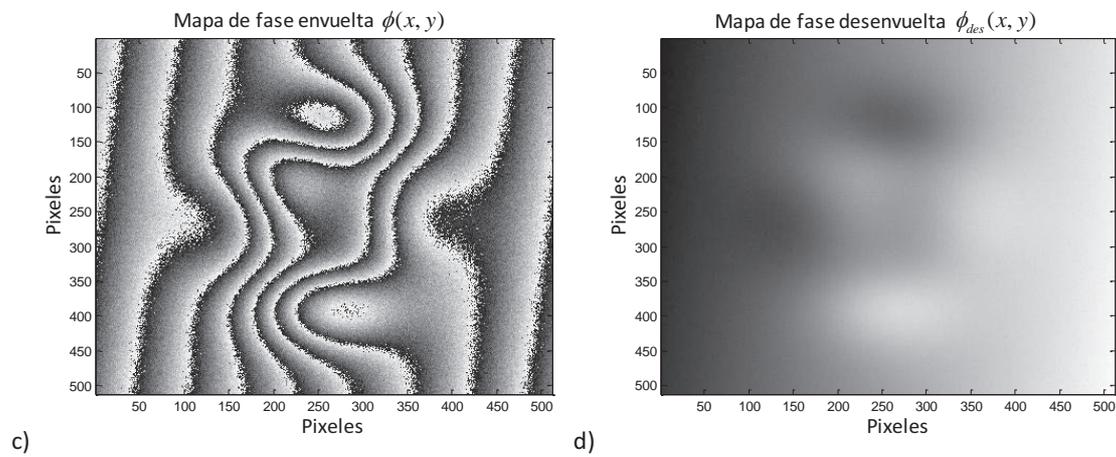


Figura 3.11 (continuación)

3.7 Eliminación del ruido causado por el efecto de moteado para la obtención de la fase

Debido a la naturaleza aleatoria y ruidosa de un interferograma basado en el efecto de moteado, es necesario filtrar las imágenes mediante el uso de filtros pasa-bajas para poder suavizar y en los mejores casos eliminar el ruido existente ^[15]. La aplicación de estos filtros también afecta la información asociada a la deformación y en consecuencia producen errores en las mediciones experimentales obtenidas. El concepto de filtrado, está asociado a eliminar elementos de la imagen en el espacio de las frecuencias. Mientras que el suavizado de imágenes, es un proceso que promedia los pesos de una pequeña área de la imagen de tal forma que el ruido de la imagen se regule a su entorno.

3.7.1 Filtros pasa bajos

La aplicación de filtros pasa bajos tienden un efecto difusor sobre la imagen, es decir, atenúan o eliminan la información en las altas frecuencias. Uno de sus mejores usos es la atenuación de ruido en las imágenes. El proceso de filtrado de una imagen se realiza aprovechando las propiedades de la convolución de la transformada de Fourier. Esto es, la transformada de Fourier de la imagen multiplicada por la transformada de Fourier del filtro. Posteriormente se aplica la transformada inversa de Fourier al resultado obtenido para obtener una imagen filtrada. En otras

palabras, el proceso de filtrado se realiza en el espacio de las frecuencias. Podemos representar el proceso de filtrado mediante la ecuación ^[16]:

$$I_{fil}(x, y) = \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \mathfrak{T} \{ I(x, y) \} \mathfrak{T} \{ h(x, y) \} \right\}. \quad (3.54)$$

Donde $I_{fil}(x,y)$ es la imagen filtrada, $I(x,y)$ es la imagen y $h(x,y)$ es una función de filtrado. Para imágenes obtenidas digitalmente, la ecuación 3.54 se expresa en su forma discreta mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathfrak{T} \{ I(x, y) \} = F(fu, fv) \approx \frac{1}{NM} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M I(x, y) \exp \left[-i2\pi \frac{(fu)(x)}{N} + \frac{(fv)(y)}{M} \right], \quad (3.55a)$$

$$\mathfrak{T} \{ h(x, y) \} = H(fu, fv) \approx \frac{1}{NM} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M h(x, y) \exp \left[-i2\pi \frac{(fu)(x)}{N} + \frac{(fv)(y)}{M} \right], \quad (3.55b)$$

y la imagen filtrada se obtiene mediante:

$$I_{fil}(x, y) = \mathfrak{T}^{-1} \{ F(fu, fv)H(fu, fv) \} \\ \approx \frac{1}{NM} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M F(fu, fv)H(fu, fv) \exp \left[i2\pi \frac{(fu)(x)}{N} + \frac{(fv)(y)}{M} \right]. \quad (3.56)$$

La figura 3.12 muestra algunas funciones $h(x,y)$ aplicables para los filtros de convolución y de Fourier.

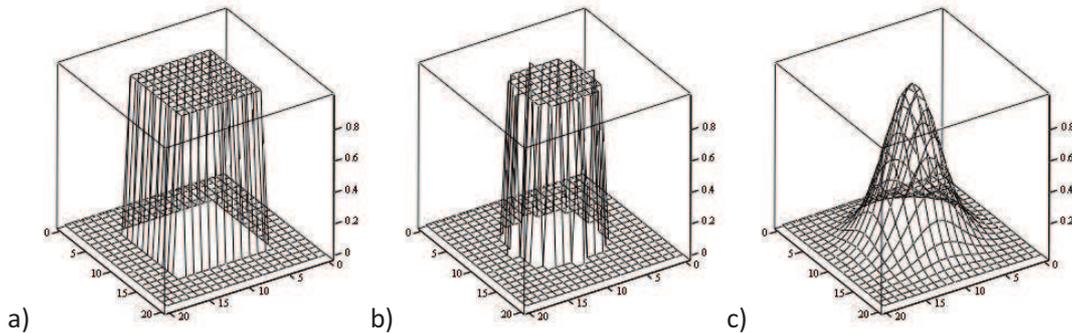


Figura 3.12 Función $h(x,y)$ para el filtrado de imágenes; a) máscara cuadrada (10×10), b) máscara circular ($radio=5$), c) máscara con perfil Gaussiano ($radio=5$).

3.7.2 Filtros promediadores

Los filtros promediadores ajustan los datos de las imágenes a intervalos que dependen de la vecindad del píxel del cual se está operando. Los filtros como la media y la mediana nos permiten eliminar el ruido promediando los datos alrededor del píxel ruidoso y substituyéndolo por el nuevo valor.

Las figuras 3.13-3.16 muestran el ejemplo de un interferograma, el mapa de fase envuelta y la gráfica de la fase desenvuelta respectivamente, obtenidos para diferentes tipos de filtros aplicados a un mismo patrón de franjas el cual es mostrado en la figura 3.13a). Del comparativo entre los diferentes filtros para la reducción del ruido causado por el efecto del moteado, se observa que el filtro correspondiente al filtro Gaussiano da que el mejor resultado.

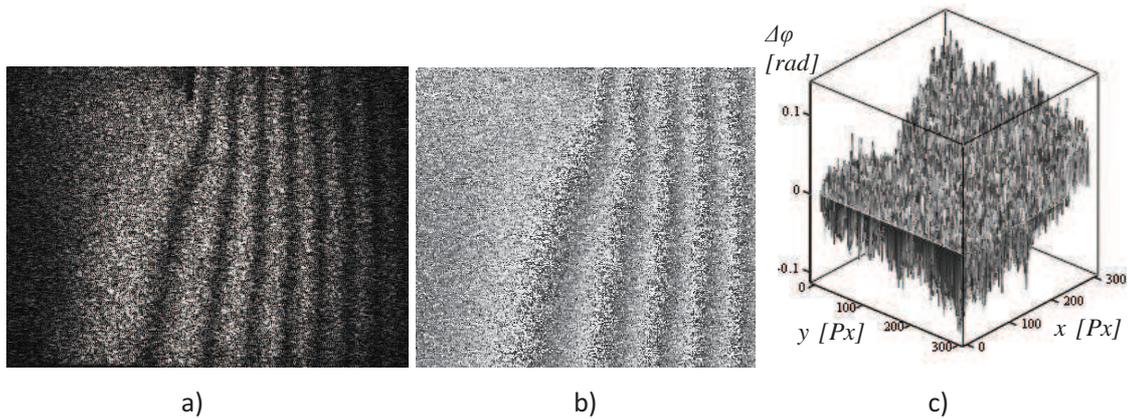


Figura 3.13 a) Interferograma sin filtro, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.

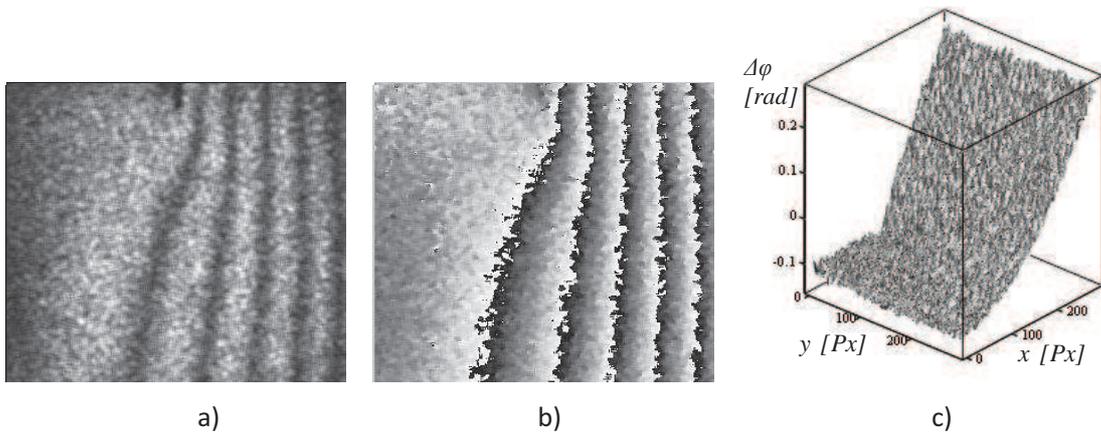


Figura 3.14 a) Interferograma filtrado mediante una función media, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.

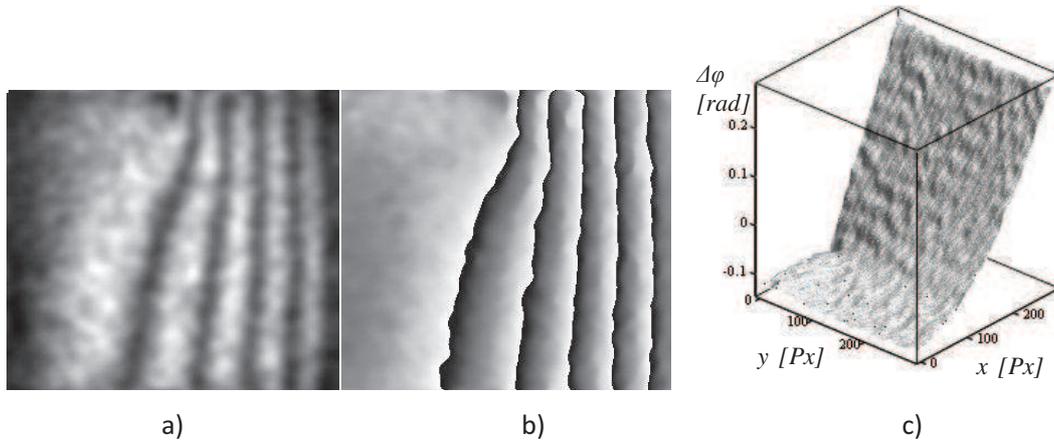


Figura 3.15 a) Interferograma filtrado mediante un filtro de convolución con kernel Gaussiano, b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.

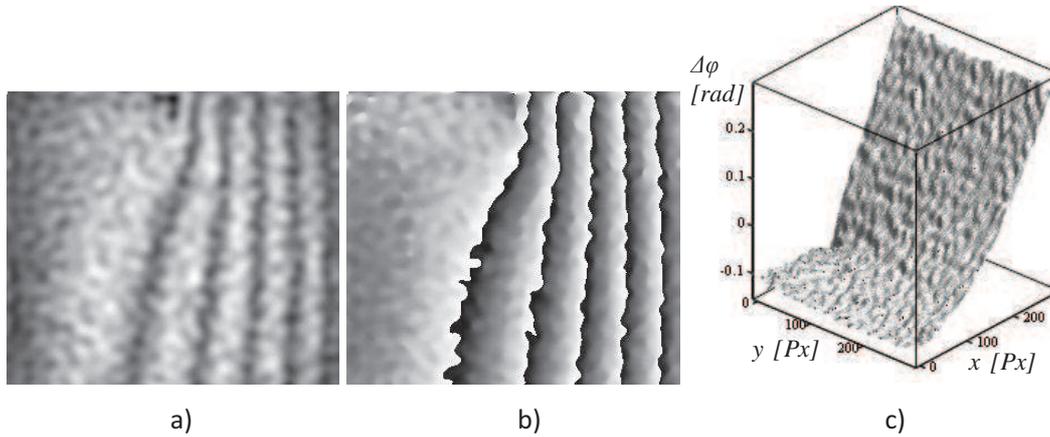


Figura 3.16 a) Interferograma filtrado mediante un filtro pasa bajas de Fourier con una máscara circular b) Fase envuelta y c) Gráfica de la fase desenvuelta.

Referencias

[1] Eugene HECHT, *Óptica*, Addison Wesley iberoamericana, Madrid, (2000).
 [2] Thomas Kreis, *Holographic Interferometry, principles and methods*, Akademie Verlag, Berlin, (1996).

-
- [3] J.W. Goodman “*Statistical properties of laser speckle patterns*”, in Dainty, J.C. (ed) Topics in applied physics 9: laser Speckle and Related Phenomena, Springer Verlag, Berlin. Appl. Opt. **9** (1975), 9-75.
- [4] Kjell j. Gasvik, *Optical Metrology*, third edition, WILEY, (2002).
- [5] C.R. Coggrave, “*Wholefield optical metrology: Surface displacement measurement*”, a internal and institutional document from Phase Vision Ltd. <http://www.phasevision.com>
- [6] Marcelino Anguiano-Morales, Amalia Martínez, Guillermo Garnica, J. A. Rayas, Fernando Mendoza Santoyo, “*Micro- and macro deformation measurement by extension of correlation technique*”, Optik, por publicarse en el 2011.
- [7] M. Takeda and K. Mutoh, “*Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes*”, Appl. Opt. **22** (1983), 3977-3982.
- [8] M. Takeda, H. Ina and S. Kobayashi, “*Fourier-transform method of fringe-pattern analysis computer-based topography and interferometry*”, J. Opt. Soc. Am. **72** (1982), 156-60.
- [9] P. Carré, “*Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du bureau international des poids et mesures*”, Metrologia, **2** (1966), 13–23.
- [10] R. Crane, “*Interference phase measurement*”, Appl. Opt., **8** (1969) 538–542,.
- [11] Daniel Malacara, Manuel Servín, Zacarias Malacara, *Interferogram analysis for optical testing*, CRC Press, (2005)
- [12] J.E. Greivenkamp, “*Generalized data reduction for heterodyne interferometry*”, Opt. Eng. **23** (1984), 350–352.
- [13] C.J. Morgan, “*Least squares estimation in phase-measurement interferometry*”, Opt. Lett. **7** (1982), 368–370.

-
- [14] D. C. Ghiglia, and M. D. Pritt, *Two-Dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software*, Ed. John Wiley & Sons, (1998).
- [15] Valery P. Shchepinov, Vladimir S. Pisarev, *Strain and Stress Analysis by Holographic and Speckle interferometry*. Ed. John Wiley & Sons, (1996).
- [16] Scott E. Umbaugh, *Computer Imaginig, Digital Image análisis and processing*, CRC Press Book, Taylor & Francis Ed, (2005).

CAPÍTULO 4: MEDICIÓN DEL CAMPO DE DEFORMACIÓN POR ESPI

4.1 Interferometría y tipos de interferómetros

La teoría ondulatoria de la naturaleza electromagnética de la luz proporciona una base natural para explicar el fenómeno de interferencia^[1]. Para observar el fenómeno de interferencia se debe cumplir con la condición de coherencia espacial y temporal de los haces de iluminación. La expresión que describe la propagación de un frente de onda de iluminación óptica es una ecuación diferencial en derivadas parciales, lineal y homogénea de segundo orden. Esta ecuación también obedece al importante principio de superposición para la magnitud del campo eléctrico resultante \vec{E} en el punto en el espacio donde dos o más ondas de luz se sobreponen.

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

donde ε y μ son las permeabilidades eléctrica y magnética en un medio. Una solución a la ecuación 4.1, está dada por^[2]:

$$E_1 = A_1 e^{i(k_1 r - \omega t - \phi_1)}, \quad (4.2)$$

donde k_1 es el número de onda dado por $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$, r es la distancia entre la fuente y un punto de observación, ω es la frecuencia dado por $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y ϕ_1 es una constante del corrimiento de la fase con respecto a un punto de referencia. Por otro lado, la interferencia óptica equivale a la interacción de dos o más ondas de luz altamente coherente. La irradiancia en el punto de observación viene dada por $I = |E|^2 = E \cdot E^*$. Se puede observar que la irradiancia de dos ondas superpuestas estará dada por:

$$|(E_1 + E_2)|^2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^*, \quad (4.3)$$

$$(E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = \left(A_1 e^{i(k_1 r - \phi_1)} + A_2 e^{i(k_2 r - \phi_2)} \right) \left(A_1 e^{-i(k_1 r - \phi_1)} + A_2 e^{-i(k_2 r - \phi_2)} \right), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
 I &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \left(\frac{e^{i(k_1r - \phi_1 - k_2r + \phi_2)} + e^{-i(k_1r - \phi_1 - k_2r + \phi_2)}}{2} \right) \\
 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k_1r - k_2r + \phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde $2A_1A_2 \cos(k_1r - k_2r + \phi_2 - \phi_1)$ se conoce como el término de interferencia y $(k_1r - k_2r + \phi_2 - \phi_1)$ es la diferencia de fase entre dos ondas. La diferencia de fase dependerá de la diferencia del camino óptico entre las dos ondas.

Los sistemas interferométricos se dividen en dos grupos: interferómetros de división de frente de onda e interferómetros de división de amplitud. La primera consiste en dividir el frente de onda en dos partes para crear dos frentes de onda secundarios que viajarán por caminos distintos y juntándose en algún punto para producir la interferencia. En el segundo caso, el frente de onda primario se divide en dos ondas secundarias de tal manera que la suma de sus amplitudes sean igual a la primaria. Los dos frentes de onda secundarios viajarán por caminos diferentes antes de recombinarse e interferir.

4.1.1 Interferómetros por división de frente de onda^[3]

Un ejemplo clásico de un sistema interferométrico de división de frente de onda es el de doble rendija de Young. La interferencia se puede observar sobre una pantalla ubicada a una distancia s cuando una fuente de luz puntual y altamente coherente ilumina una superficie que contiene dos rendijas de ancho muy pequeño, separados por una distancia a . el frente de onda de la fuente puntual tiene la forma de una superficie esférica pero al estar ubicado lejos de la superficie con la doble rendija, esta se puede aproximar a un frente de onda plano. La figura 4.1 muestra la configuración del experimento de Young para observar esta interferencia. En la figura 4.2 se observa un diagrama para el análisis matemático. Si trazamos dos líneas de los puntos S_1 y S_2 a P que es la posición de una franja brillante, podemos notar que las líneas no son de la misma longitud, es decir, tienen distintos caminos ópticos. Definimos el vector $\vec{r}_1 = \overline{S_1P}$ y el vector $\vec{r}_2 = \overline{S_2P}$ por lo tanto la diferencia entre sus magnitudes es:

$$|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| = |S_1 B| \quad (4.6)$$

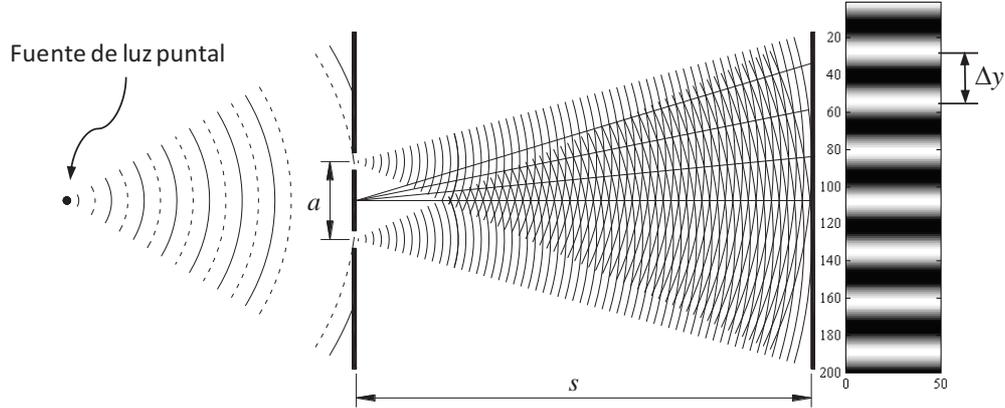


Figura 4.1 En el experimento de Young se observa un patrón de interferencia por división de frente de onda.

Tomando en cuenta que si el ángulo θ es muy pequeño, la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ puede utilizarse en la ecuación 4.6 obteniendo una expresión equivalente de la forma:

$$|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| \approx a\theta \quad (4.7)$$

Adicionalmente, el ángulo θ puede obtenerse mediante la relación trigonométrica entre la distancia s y la posición de una franja brillante en P de modo que $\theta \approx \frac{y}{s}$. Tomando en cuenta que la interferencia constructiva (la franja brillante en P) es un múltiplo de la longitud de onda de la fuente luminosa, $m\lambda$, para $m=0, 1, 2, \dots$ entonces, la posición de una franja brillante y_m se puede obtener a partir de la ecuación 4.7 de la forma:

$$a \frac{y_m}{s} \approx m\lambda \quad (4.8)$$

y la separación entre franjas se puede obtener mediante la diferencia entre las posiciones entre dos franjas brillantes consecutivas como:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m \approx \frac{s(m+1)\lambda}{a} - \frac{sm\lambda}{a} \quad (4.9)$$

$$\Delta y \approx \frac{s\lambda}{a}$$

Utilizando la diferencia de fase $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ que depende de los caminos ópticos entre r_1 y r_2 , la ecuación 4.9 puede relacionarse con las ecuaciones 4.5 si $A_1^2 = A_2^2 = I_0$ y utilizando la identidad trigonométrica $\cos(\delta) = 2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1$ para obtener el campo de distribución de intensidades del interferograma mediante:

$$I(y) = 4I_0^2 \cos^2\left(\frac{ya\pi}{s\lambda}\right). \quad (4.10)$$

La ecuación 4.10 es verdadera bajo las suposiciones de que la rendija tiene un ancho infinitesimal y la separación a también es pequeña. Los efectos de difracción no se han tomado en cuenta cuando la distancia y es muy grande y arreglo de rendijas muy pequeño.

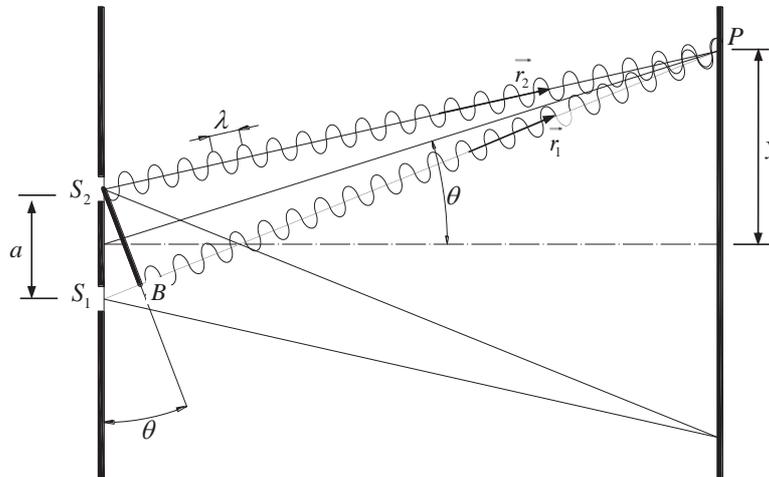


Figura 4.2 Diagrama del experimento de Young.

4.1.2 Interferómetros por división de amplitud ^[3]

En los interferómetros que funcionan por división de amplitud, la onda primaria es dividida en dos ondas secundarias, una transmitida y otra reflejada, mediante un divisor de haz. Por ejemplo, una lámina delgada de vidrio transparente o un espejo semiplataado permitirán transmitir parte de la amplitud de la luz incidente mientras que al mismo tiempo reflejará la amplitud de la luz restante. Estas dos ondas viajan por diferentes caminos antes de recombinarse e interferir. Si las dos ondas producidas por la división del haz, pueden ser reunidas de alguna manera sobre un detector, habrá interferencia en tanto que la coherencia espacial de la onda de luz primaria sea igual a las de las ondas secundarias. En estos interferómetros la cantidad de franjas de interferencia resultantes son proporcionales a la inclinación entre los haces o a la diferencia del camino óptico entre ellos dependiendo de la configuración óptica utilizada.

El fenómeno de interferencia por división de amplitud se puede analizar utilizando una placa transparente de espesor h y con un índice de refracción n_f como se muestra en la figura 4.3. Los dos haces de luz resultantes recorren dos caminos diferentes. La diferencia del camino para los dos primeros rayos reflejados E_{R1} y E_{R2} :

$$DCO = n_f (\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 (\overline{AD}) , \quad (4.11)$$

y puesto que la magnitud de la línea $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{h}{\cos \theta_f}$, además, $\overline{AD} = \overline{AC} \sin \theta_1$ y la ley de

Snell: $n_1 \sin \theta_1 = n_f \sin \theta_f$, la ecuación 4.11 se puede reescribir de la forma:

$$DCO = \frac{2n_f h}{\cos \theta_f} (1 - \sin^2 \theta_f) , \quad (4.12)$$

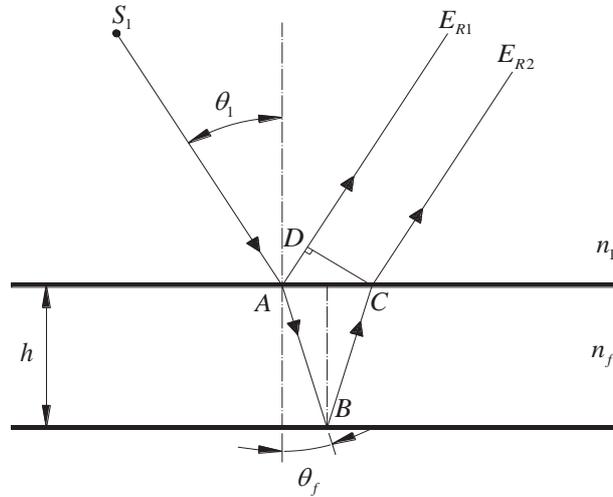


Figura 4.3 Formación de la interferencia por división de amplitud.

o expresado de una manera más conveniente:

$$DCO = 2n_f h \cos \theta_f . \tag{4.13}$$

Como se puede observar, la diferencia de camino óptico está en función del espesor de la placa h , de su índice de refracción n_f , y del ángulo de incidencia que por la ley de Snell transmite el rayo a un ángulo θ_f . Tomando en cuenta que existe un desfase de π radianes entre la reflexión interna y externa. El desfase correspondiente y asociado con la diferencia del camino óptico es el producto del módulo del vector de onda y DCO , es decir $\Delta\phi = k \cdot DCO \pm \pi$. Esto expresa que hay una diferencia relativa entre los dos haces reflejados E_{R1} y E_{R2} que puede interpretarse como una diferencia de fase $\Delta\phi$. De manera que:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} n_f h \cos \theta_f \pm \pi , \tag{4.14}$$

donde las franjas brillantes aparece cuando $h \cos \theta_f = (2m+1) \frac{\lambda}{4}$ donde $m=0, 1, 2, \dots$ y las

franjas oscuras cuando $d \cos \theta_f = 2m \frac{\lambda}{4}$.

4.2 Medición de los campos de desplazamiento por ESPI para el caso de iluminación colimada

[4], [5]

4.2.1 Interferómetro con sensibilidad fuera de plano^[6]

En este tipo de interferómetro (figura 4.4) se tiene un haz de iluminación colimada dirigida hacia el objeto, n_s representa el vector de iluminación. Un segundo haz de iluminación (el de referencia) se dirige hacia la cámara CCD, éste no está representado en la figura y no es necesario considerarlo en la obtención del cambio de la fase. El vector de observación se representa mediante n_o .

Sea P la posición de un punto sobre la superficie antes de aplicar un desplazamiento; P' la posición del mismo después del desplazamiento del objeto de prueba. Las componentes del desplazamiento se denotan como u en la dirección x y como w en la dirección z . El desplazamiento es tal que no ocurre desplazamiento en la dirección y . Analizando la diferencia de camino óptico para el caso de iluminación colimada se obtiene una diferencia de fase dada por^[7]:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} [w(1 + \cos\theta) + u \sin\theta], \quad (4.15)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de iluminación y de observación. Para valores aproximados a $\theta = 0$, la ecuación 4.15 se aproxima a:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} w, \quad (4.16)$$

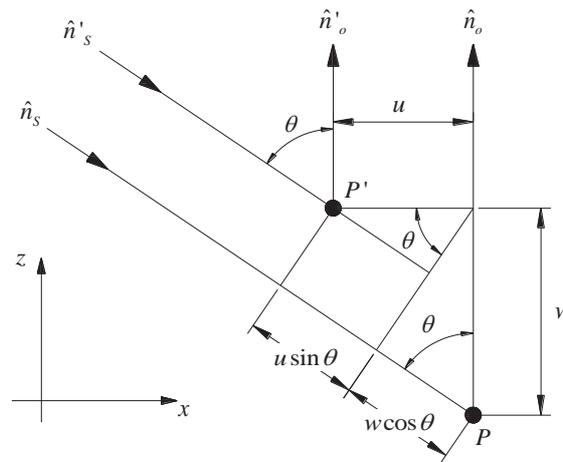


Figura 4.4 Diagrama para análisis del desplazamiento fuera de plano.

que nos indica que la fase está directamente relacionada con los desplazamientos en la dirección de z , es decir fuera del plano xy . La figura 4.5 muestra un arreglo óptico típico para observar los desplazamientos fuera de plano, el cual corresponde a un interferómetro tipo Michelson.

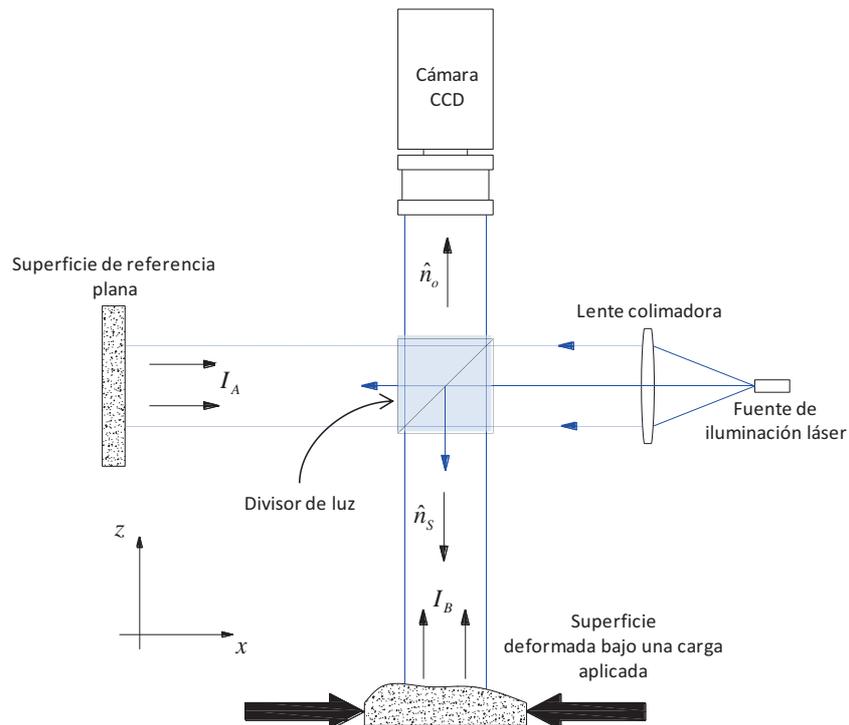


Figura 4.5 Arreglo óptico para determinar los desplazamientos fuera de plano.

4.2.2 Interferómetro con sensibilidad en plano^[8]

En la figura 4.6 se presenta el diagrama de un arreglo de doble iluminación colimada. Este tipo de arreglo presenta una sensibilidad en plano como se verá más adelante. En el caso mostrado corresponde a una sensibilidad en la dirección en x .

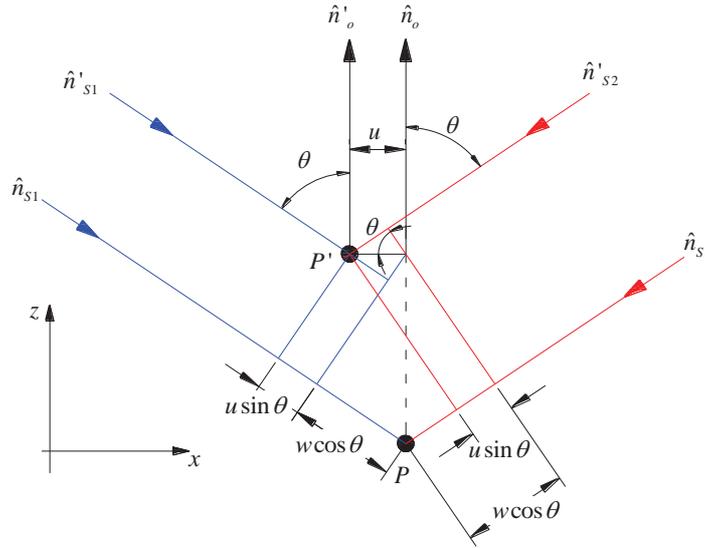


Figura 4.6 Diagrama para el análisis de desplazamiento en plano.

La diferencia de camino óptico considerando el vector unitario de iluminación \hat{n}_{s1} , ya se obtuvo previamente para el caso de un haz de iluminación:

$$DCO_{s1} = w(1 + \cos \theta) + u \sin \theta . \tag{4.17}$$

La diferencia del camino óptico asociado al vector de iluminación \hat{n}_{s2} , puede expresarse como:

$$DCO_{s2} = w(1 + \cos \theta) - u \sin \theta . \tag{4.18}$$

Las diferencias de fase asociadas a cada fuente de iluminación queda entonces determinadas por:

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [w(1 + \cos \theta) + u \sin \theta] , \tag{4.19a}$$

$$\Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [w(1 + \cos \theta) - u \sin \theta] . \tag{4.19b}$$

Por último, la diferencia de fase total se puede obtener mediante la relación $\Delta\phi = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2$, por lo tanto, las ecuaciones 4.19a y 4.19b se simplifican a la forma:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} u \sin \theta, \tag{4.20}$$

de donde se puede obtener el campo de desplazamiento u .

La figura 4.7 muestra un arreglo óptico típico para observar los desplazamientos en el plano sobre una superficie.

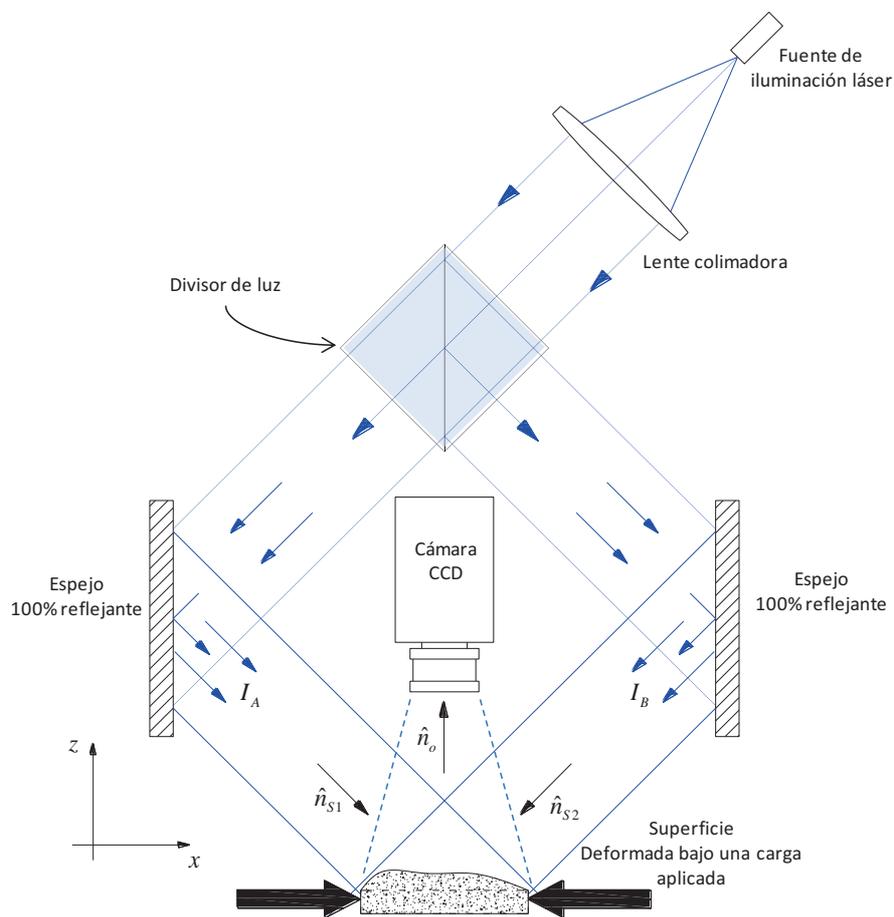


Figura 4.7 Arreglo óptico para observar los desplazamientos en el plano.

4.3 Vector de sensibilidad para iluminación divergente^[9]

En el análisis de objetos grandes es conveniente el uso de iluminación divergente en cuyo caso el vector de sensibilidad asociado no es constante como en el caso de iluminación colimada. Se presentan los casos para un haz de iluminación e iluminación dual, lo cual conlleva a sistemas con sensibilidad fuera de plano y sensibilidad de plano, respectivamente.

4.3.1 Sistema con un solo haz de iluminación divergente

En general tenemos que la diferencia de fase $\Delta\phi$ está dada por:

$$\Delta\phi = \vec{e} \cdot \vec{d}, \quad (4.21)$$

donde \vec{e} corresponde al vector de sensibilidad del sistema óptico y \vec{d} está asociado al campo de desplazamiento. Las componentes del campo de desplazamiento son denotas como u, v y w , para las direcciones x, y, z respectivamente.

Para el caso de un sistema fuera de plano, el vector de sensibilidad está definido por:

$$\vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{n}_o - \hat{n}_s)$$

Siendo \hat{n}_o el vector unitario de observación y \hat{n}_s el vector unitario de iluminación, los cuales pueden ser determinados mediante las expresiones:

$$\hat{n}_o = \frac{(x - x_o)\hat{i} + (y - y_o)\hat{j} + (z - z_o)\hat{k}}{\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}}, \quad (4.22)$$

$$\hat{n}_s = \frac{(x - x_s)\hat{i} + (y - y_s)\hat{j} + (z - z_s)\hat{k}}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}}, \quad (4.23)$$

siendo (x_o, y_o, z_o) , (x_s, y_s, z_s) , y (x, y, z) las coordenadas asociadas a la observación, posición de la fuente de iluminación y de cada punto del objeto, respectivamente. Las componentes del vector de sensibilidad quedan determinadas como:

$$e_x = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(x-x_o)}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}} - \frac{(x-x_s)}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}} \right], \quad (4.24a)$$

$$e_y = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(y-y_o)}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}} - \frac{(y-y_s)}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}} \right], \quad (4.24b)$$

$$e_z = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(z-z_o)}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}} - \frac{(z-z_s)}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}} \right], \quad (4.24c)$$

La figura 4.8 muestra un ejemplo de la evaluación de las componentes del vector de sensibilidad de un sistema fuera de plano cuando se utiliza iluminación divergente. Los valores considerados en las ecuaciones 4.24a-c son: $\lambda = 552 \times 10^{-6} \text{ mm}$, $(x_o, y_o, z_o) = (0, 0, 700)$, $(x_s, y_s, z_s) = (0, 0, 700)$ en mm . La superficie considerada corresponde a un plano por lo que $z=0$. Como se puede observar, la máxima sensibilidad se encuentra en la componente e_z .

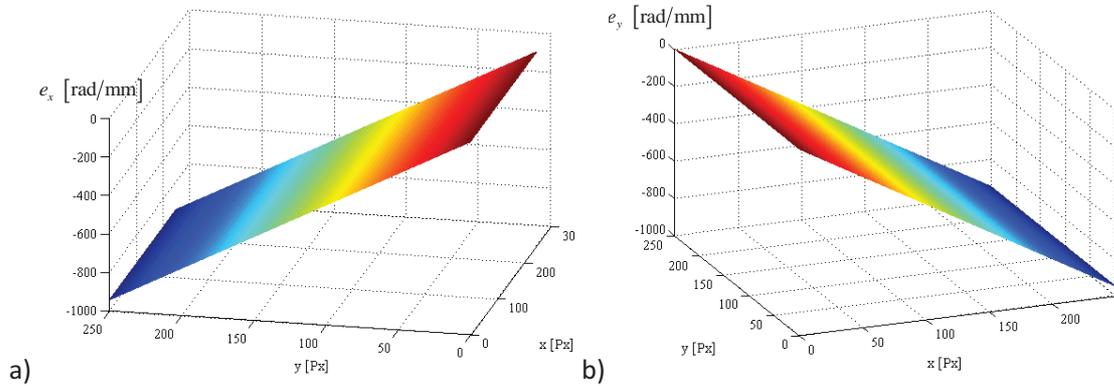


Figura 4.8 Componentes del vector de sensibilidad fuera de plano: a) e_x , b) e_y , c) e_z .

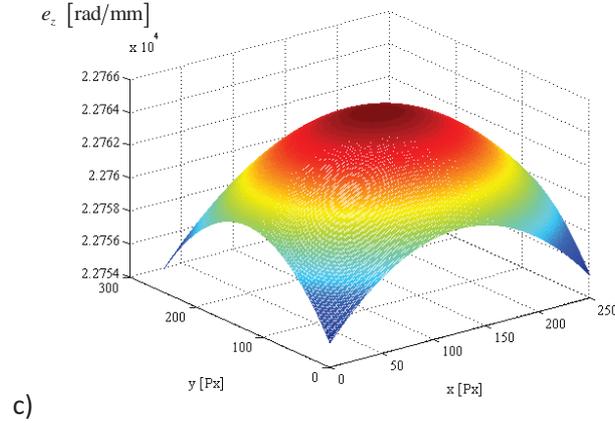


Figura 4.8 (continuación)

4.3.2 Sistema con dos haces de iluminación divergente

En el caso de un sistema de iluminación dual divergente se colocan dos fuentes de iluminación de manera simétrica con respecto al eje óptico. Sea (x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}) y (x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}) , las coordenadas asociadas a la posición de las fuentes, respectivamente. El vector de sensibilidad asociado a cada haz corresponde a:

$$\vec{e}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{n}_o - \hat{n}_{s1}), \quad (4.25)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{n}_o - \hat{n}_{s2}). \quad (4.26)$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{e} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1, \quad (4.27)$$

$$\vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{n}_{s1} - \hat{n}_{s2}). \quad (4.28)$$

Las componentes del vector de sensibilidad corresponden a:

$$e_x = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{x - x_{s1}}{\sqrt{(x - x_{s1})^2 + (y - y_{s1})^2 + (z - z_{s1})^2}} - \frac{x - x_{s2}}{\sqrt{(x - x_{s2})^2 + (y - y_{s2})^2 + (z - z_{s2})^2}} \right], \quad (4.29a)$$

$$e_y = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{y - y_{s1}}{\sqrt{(x - x_{s1})^2 + (y - y_{s1})^2 + (z - z_{s1})^2}} - \frac{y - y_{s2}}{\sqrt{(x - x_{s2})^2 + (y - y_{s2})^2 + (z - z_{s2})^2}} \right], \quad (4.29b)$$

$$e_z = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{z - z_{s1}}{\sqrt{(x - x_{s1})^2 + (y - y_{s1})^2 + (z - z_{s1})^2}} - \frac{z - z_{s2}}{\sqrt{(x - x_{s2})^2 + (y - y_{s2})^2 + (z - z_{s2})^2}} \right], \quad (4.29c)$$

La figura 4.9 muestra el cálculo de las componentes del vector de sensibilidad para los valores considerados en las ecuaciones 4.29a-c: $\lambda = 552 \times 10^{-6} \text{ mm}$, $(x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}) = (-300, 0, 1000)$ $(x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}) = (300, 0, 1000)$ en mm . La superficie considerada corresponde a un plano por lo que $z=0$. Como se puede observar, la máxima sensibilidad se encuentra en la componente e_x .

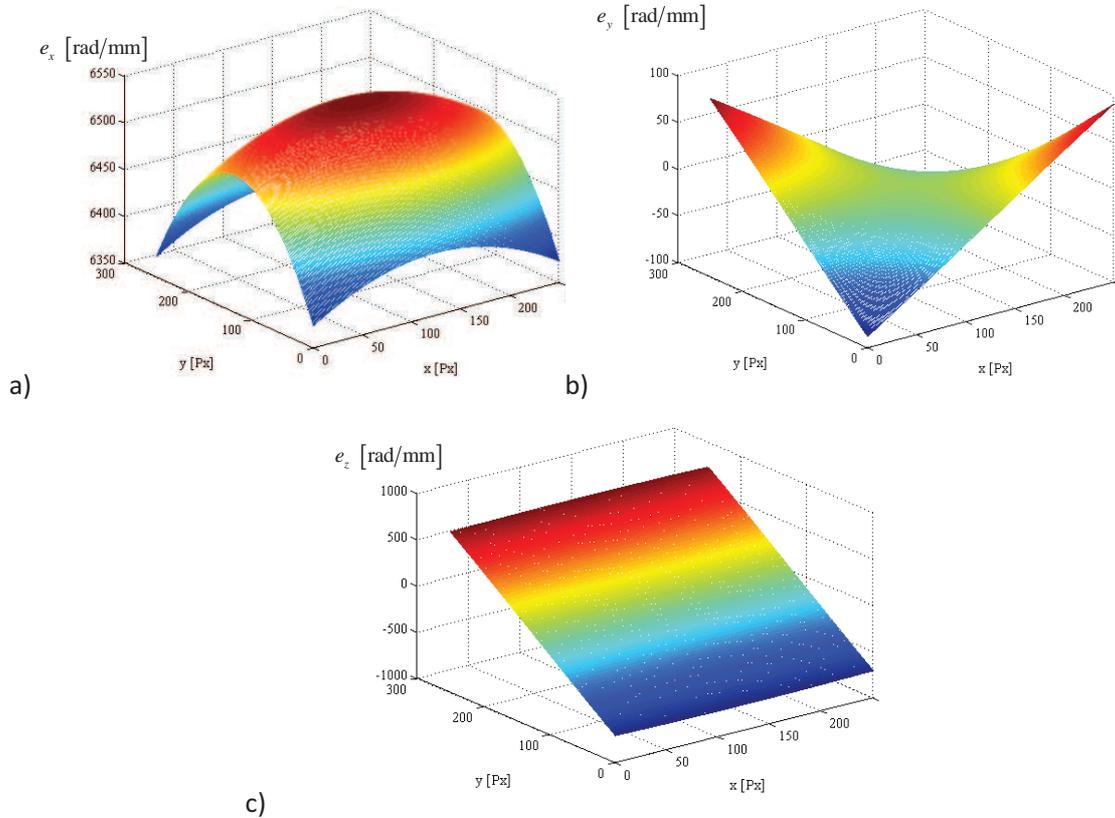


Figura 4.9 Componentes del vector de sensibilidad en plano: a) e_x , b) e_y , c) e_z .

4.4 Obtención de la deformación a partir de la técnica ESPI^[10]

El campo de deformación se puede obtener a partir de la derivada de las componentes del campo de desplazamiento. El vector desplazamiento está definido por sus componentes u , v y w como ya ha sido mencionado.

Los campos de deformación quedan definidos como^[11]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (4.30)$$

La evaluación de las derivadas parciales de los campos de desplazamiento se puede llevar a cabo por algún método numérico. Entre las técnicas más populares están la técnica del límite de la diferencia del cociente, técnica de la diferencia central y el método de Newton que son relativamente simples de programar computacionalmente mientras que por otro lado, el método de diferenciación de Stokes, nos ofrece un mejor resultado cuando se utiliza en el proceso digital de imágenes.

4.4.1 Técnica del límite de la diferencia del cociente

Por definición, el diferencial se define como:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \quad (4.31)$$

La parte derecha de la ecuación 4.31 sugiere que el diferencial de una función se puede obtener mediante la diferencia entre dos valores ubicados en las coordenadas de los puntos $(x + \Delta x)$ y (x) que están separados por una muy pequeña cantidad Δx . En esta técnica, la diferencia en el punto en (x) se realiza utilizando la coordenada del punto subsecuente. Si utilizamos una secuencia de n datos para $\{h_x\}$ donde $h_x \rightarrow 0$, para $x=1,2,3...n$ el cálculo de la secuencia diferenciada a lo largo de la dirección x estará dado por:

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx f'(x) = \frac{f(x + h_x) - f(x)}{h_x} . \quad (4.32a)$$

4.4.2 Técnica de la diferencia central

El método consiste en aproximar la función en la vecindad del punto en que se desea la derivada, mediante una parábola de segundo, tercer o mayor grado, y utilizar entonces la derivada de la parábola en ese punto como la derivada aproximada de la función. Lo anterior se obtiene utilizando los desarrollos en serie de Taylor hasta el segundo orden para la función $f(x)$ en los puntos $(x+h)$ y $(x-h)$.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \dots, \quad (4.33)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \dots. \quad (4.34)$$

La diferencia entre las ecuaciones 4.33 y 4.34 da como resultado:

$$f(x+h) - f(x-h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - f(x) + f'(x)h - \frac{f''(x)h^2}{2!}, \quad (4.35)$$

el cual se reduce a:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (4.36)$$

Otras fórmulas similares pueden encontrarse si se utiliza desarrollos mayores en serie de Taylor, por ejemplo, si se utiliza hasta el cuarto orden, la diferencia central estará dado por:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}. \quad (4.37)$$

Esta ecuación, la 4.37, es conocida como el método de extrapolación de Richardson^[12].

4.4.3 Método de Stokes

La naturaleza del efecto de moteado en un interferograma dificulta el cálculo de las derivadas de los campos de desplazamiento para obtener los campos de la deformación. Se sabe que los

métodos numéricos mostrados arriba producen errores inaceptables^[13]. Algunas soluciones a este problema involucran algunas funciones para suavizar o interpolar los datos para obtener funciones de superficies equivalentes que puedan representar los campos de desplazamiento medidos por interferometría. Otro método propuesto emplea la técnica de Stokes que nos permite obtener derivadas con bajo nivel de incertidumbre^[14]. Para este caso, la técnica de Stokes es aplicada en un elemento diferencial de superficie en el plano xy como $ds = \Delta x \Delta y$ donde las dimensiones Δx y Δy son las dimensiones de la imagen en pixeles normalmente. Por lo tanto una matriz de 3×3 pixeles representa un diferencial de superficie de $4\Delta x \Delta y$. Las componentes del vector desplazamiento $u(P)$ y $v(P)$ pueden ser expresado por la ley de Stokes en las coordenadas del punto $P(i,j)$ por:

$$\oint_L \vec{d} \cdot d\vec{L} = \int_S (\nabla \times \vec{d}) \cdot \vec{dS} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot 4\Delta x \Delta y, \quad (4.38)$$

donde las derivadas parciales y los desplazamientos en la dirección z son despreciados debido a que un interferómetro con sensibilidad en plano no registra ese desplazamiento. El tercer término vectorial $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot 4\Delta x \Delta y$ representa el vector rotacional de desplazamiento en el punto $P(i,j)$ del elemento diferencial de superficie a lo largo de una trayectoria de línea cerrada alrededor del elemento de superficie $4\Delta x \Delta y$, como se ve en la figura 4.10. Además, este término es análogo a la deformación cortante en esa superficie.

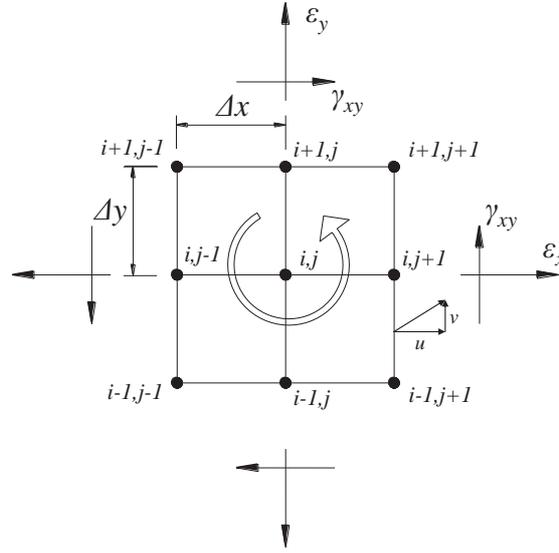


Figura 4.10 Una matriz de 3x3 se usa como elemento diferencial de superficie para encontrar la deformación utilizando el método de Stokes.

Si utilizamos la regla trapezoidal para la integración estándar a lo largo de la línea cerrada para el primer término de la ecuación 4.38 y eliminando los términos ortogonales podemos obtener la relación:

$$\oint_L \vec{d} \cdot d\vec{L} = \left[u_{i-1,j-1} + 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} \right] \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left[u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} \right] \cdot \frac{\Delta x}{2} + \left[v_{i-1,j+1} + 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} \right] \cdot \frac{\Delta y}{2} - \left[v_{i+1,j-1} + 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1} \right] \cdot \frac{\Delta y}{2} \quad (4.39)$$

Donde términos u y v son los desplazamientos de cada píxel en la matriz de 3x3. Intercambiando mutua y convenientemente los términos escalares Δx y Δy , la ecuación 4.39 junto con la ecuación 4.38 se pueden reescribir como:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left[u_{i-1,j-1} + 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} \right] \cdot \frac{1}{8\Delta y} + \left[u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} \right] \cdot \frac{1}{8\Delta y} + \left[v_{i-1,j+1} + 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} \right] \cdot \frac{1}{8\Delta x} - \left[v_{i+1,j-1} + 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1} \right] \cdot \frac{1}{8\Delta x} \quad (4.40a)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\left[u_{i-1,j-1} + 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}\right] \cdot \frac{1}{8\Delta x} + \left[u_{i+1,j+1} + 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}\right] \cdot \frac{1}{8\Delta x} + \left[v_{i-1,j+1} + 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}\right] \cdot \frac{1}{8\Delta y} - \left[v_{i+1,j-1} + 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1}\right] \cdot \frac{1}{8\Delta y} \quad (4.40b)$$

De esta manera se puede calcular el campo de deformación en la direcciones x y y .

Referencias

- [1] The Optical Society of America, Michael Bass, *Handbook of Optics*, New York, (1995).
- [2] Daniel Malacara, Brian J. Thompson, *Handbook of Optical Engineering*, Marcel Dekker Inc., New York, (2001).
- [3] Hartmann Römer, *Theoretical Optic: An Introduction*, Wiley-VCH, Weinheim, (2005)
- [4] Andrew J. Moore, John R. Tyrer, "Two-dimensional strain measurement with ESPI", *Opt. Lasers Eng.* **24** (1996) 381-402.
- [5] Rajpal Sirohi, N. Krishna Mohan, "Speckle interferometry for deformation measurement", *J. Mod. Opt.* **39** (1992) 1293 – 1300.
- [6] R. K. Mohanty, C. Joenathan, Rajpal S. Sirohi, "Speckle and speckle-shearing interferometers combined for the simultaneous determination of out-of-plane displacement and slope", *App. Opt.* **24** (1985) 3106-3109.
- [7] Thomas F. Begemann, Jan Burke, "Speckle interferometry: three-dimensional deformation field measurement with a single interferogram", *Appl. Opt.* **40** (2001) 5011-5022.
- [8] Juan B. Hurtado-Ramos, J. Blanco-García, A. Fernández, F. Ribas, "An ESPI system for determining in-plane deformations. Three-dimensional analysis of the carrier fringes and a proposal for analysis of transient in-plane deformations", *Meas. Sci. Technol.* **12** (2001) 644.

-
- [9] David Farrant, Jon Petzing, "*Sensitivity errors in interferometric deformation metrology*", *Appl. Opt.* **42** (2003) 5634-5641.
- [10] Fernando Labbe, Raúl R Cordero, Amalia Martínez, Ramón Rodríguez-Vera, "*Measuring displacement derivatives by electronic speckle pattern shearing interferometry (ESPSI)* ", *Meas. Sci. Technol.* **16** (2005) 1677.
- [11] Stephen P. Timoshenko, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, 2nd Ed. (1951).
- [12] L. F. Richardson, "*The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam*", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A210** (1911) 307–357.
- [13] Ignacio Lira, Raúl R Cordero, Manuel François, Cristián Vial-Edwards, "*The uncertainty of experimental derivatives: application to strain measurement*", *Meas. Sci. Technol.* **15** (2004) 2381–2388.
- [14] Markus Raffel, Chris Willert, Jürgen Kompenhans, *Particle image velocimetry: a practical guide*, Springer, (2002).

CAPÍTULO 5: MEDICIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO MEDIANTE ESPI

Introducción

Como se mencionó en el capítulo 2, sección 2.5, el factor de concentración de esfuerzos es un parámetro muy utilizado en el diseño mecánico. La estimación del factor de intensidad de esfuerzo puede realizarse utilizando las funciones analíticas de Airy considerando la geometría, el material y las condiciones de carga a la cual la probeta estará sujeta.

Encontrar una función de Airy que se ajuste a las condiciones reales de trabajo de una pieza mecánica sometida a tensión es sumamente complicado. Es más fácil tratar de determinar los factores de intensidad de esfuerzo mediante mediciones directas de la deformación alrededor de una fractura. Normalmente estas mediciones se realizan mediante técnicas no ópticas, por ejemplo, el uso de galgas extensométricas firmemente adheridas a los elementos mecánicos son muy populares para medir el campo de deformación. Sin embargo, aunque se obtengan mediciones de la deformación queda pendiente considerar la geometría de elemento mecánico para poder estimar correctamente el factor de intensidad de esfuerzo.

Las técnicas ópticas como herramienta de medición permiten obtener el campo de deformación de un elemento mecánico sobre toda la superficie observada. Se puede observar fácilmente los campos de desplazamiento o deformación independientemente de los efectos de la geometría de la pieza. Las técnicas ópticas tienen la ventaja de proporcionar información suficiente para estimar el factor de concentración de esfuerzos mediante la comparación de las mediciones de los campos de deformación o desplazamiento y los modelos matemáticos expresados por las funciones de Airy.

5.1 Medición del factor de intensidad de esfuerzos por la técnica ESPI^{[1], [2]}

T. J. Dolan^[3] *et al.* demostraron que la mayoría de los materiales presentan defectos en su estructura interna que modifican sus propiedades mecánicas. Esta es la principal razón por la cual

es complicado obtener cálculos precisos concernientes a la resistencia o a la deformación mecánica del material. La mayoría de las teorías que predicen la falla mecánica estática están basados en análisis estadístico^[4]. Por ejemplo, dos de esas teorías son las conocidas como la teoría de Von Mises-Hencky y la teoría del esfuerzo cortante máximo de Tresca que usan el punto de fluencia como criterio de falla^[5]. Para establecer un límite de resistencia estática en alguna pieza mecánica sometida a tensión es necesario realizar múltiples mediciones de los niveles de esfuerzos en diferentes condiciones de carga. Sin embargo, cuando estas mediciones son comparadas con los modelos matemáticos existe cierta cantidad de incertidumbre. Por ejemplo, Thomas J. Dolan *et. al.*^[6] y Mischke^[7], compararon los límites de tensión y de flexión a la fatiga de manera independiente obteniendo resultados muy similares pero no idénticos.

En años recientes, los adelantos en la tecnología computacional han permitido desarrollar programas que simulan la deformación en elementos mecánicos y consecuentemente calcular los niveles de esfuerzo mediante el análisis de elementos finitos (FEA, Finite Element Analysis, en inglés). Estos programas permiten predecir las fallas y calcular los factores de intensidad de esfuerzo en elementos mecánicos en condiciones de trabajo^[8]. La principal desventaja de la técnica FEA es que se desarrolla en un ambiente simulado y altamente controlado. Es necesario involucrar técnicas y análisis de incertidumbres como las simulaciones basadas en la técnica de Monte Carlo para establecer un rango para el límite de resistencia mecánica real. Por ejemplo, el factor de intensidad esfuerzos es obtenido suponiendo que las propiedades mecánicas del material de la probeta mecánica son bien conocidas, sin embargo, las restricciones y las condiciones fronteras supuestas para la probeta mecánica pueden no adaptarse a las condiciones reales. Por lo tanto, las simulaciones de deformación y de esfuerzos pueden dar un resultado erróneo del cálculo de un factor de intensidad de esfuerzo.

En los procesos de diseño y en manufactura es necesario realizar mediciones directamente en los elementos mecánicos para asegurar la calidad del cumplimiento de los estándares asignados^[9], como por ejemplo, una pieza mecánica hecha de acero ASTM A36 debe soportar un esfuerzo a la fluencia de por lo menos 240 MPa sin tener una deformación mayor al 2%. Los métodos ópticos que pueden medir los procesos de deformación en campo completo presentan una ventaja en comparación a los métodos que pueden medir en un solo punto como por ejemplo las galgas

extensométricas. Sin embargo, se debe prestar especial cuidado en el procesamiento digital de imágenes para evitar que datos útiles sean modificados.

La técnica ESPI, como técnica no destructiva, es capaz de medir directamente los campos de desplazamiento sobre la superficie de prueba. Los datos adquiridos son imágenes que pueden ser almacenadas en la memoria de una computadora^{[10], [11]}. En un proceso posterior los campos de deformación son obtenidos mediante el análisis de los interferogramas y la evaluación del vector de sensibilidad^[12]. Mediciones de gran precisión pueden ser obtenidas mediante la técnica ESPI^[13], sin embargo, la característica ruidosa del patrón de moteado de un interferograma puede inducir errores cuando la imagen es procesada. La aplicación de filtros digitales tipo “pasa-bajas” a los interferogramas pueden reducir el ruido del patrón de moteado.

La medición del factor de intensidad de esfuerzos (SIF, Stress Intensity Factor en inglés) en el modo I (K_I) alrededor de una grieta se realiza mediante el análisis de las imágenes de los interferogramas obtenidas por ESPI. Se utiliza el método de corrimiento de fase^[14] para obtener los campos de desplazamiento y el método de diferenciación de Stokes para obtener los campos de deformación. Los resultados obtenidos son introducidos a los modelos matemáticos propuestos por Irwin^[15] para la geometría mostrada en la figura 5.1 para calcular el factor de intensidad de esfuerzo K_I , este resultado es comparado con una simulación por el análisis de elemento finito.

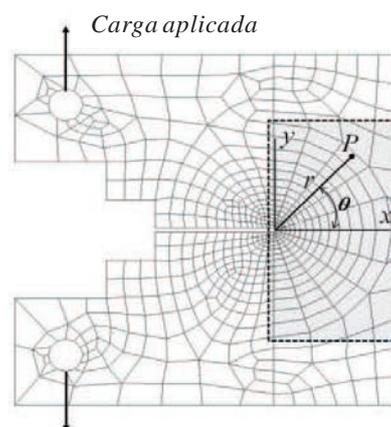


Figura 5.1 Geometría del espécimen con un enmallado para el análisis por elemento finito. La línea punteada delimita el área de observación y análisis.

5.2 Análisis de esfuerzos y la estimación del factor de intensidad de esfuerzo

La falla estructural de elementos mecánicos puede ser relacionada a los niveles de esfuerzos presentes. La falla siempre empieza con una fractura o grieta en estructura molecular del material. Esta condición produce un incremento en la concentración de esfuerzos al final de la falla^[16]. Sin embargo, aunque materiales homogéneos presenten imperfecciones en su estructura molecular, el tamaño de la grieta y su localización pueden depender de los procesos de manufactura y de la calidad de los procesos para la obtención del material. Además, un pequeño rayón o un pequeño defecto superficial puede ser el inicio de una fractura estructural considerando en las alturas localizadas elevan los niveles de esfuerzos que teóricamente van al infinito.

Los materiales no elásticos pueden soportar grandes niveles de esfuerzos sin experimentar deformación de fluencia localizada^[17] ni concentración de esfuerzos alrededor de la falla. Otro factor que influye en la concentración de esfuerzos se relaciona con la forma geométrica del elemento mecánico^[18]. Contornos geométricos inadecuados pueden modificar la distribución de esfuerzos mientras la resistencia mecánica se ve modificada por la concentración de esfuerzos, por lo que la falla puede ocurrir a cargas que pueden estar por debajo a la que originalmente fueron calculadas. Por otro lado, la teoría lineal-elástica para la falla mecánica y la ley de Hooke son totalmente aplicables^[19]. Basado en la anterior, los modelos matemáticos propuestos por Irwin¹² para los campos de desplazamiento alrededor de una grieta pueden asociarse a los campos de esfuerzo a través de la ley de Hooke en el régimen elástico del material mediante las ecuaciones^[20]:

$$\begin{bmatrix} I_u(r, \theta) \\ I_v(r, \theta) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} A_n r^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} (3-4\mu) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta + \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\frac{n\theta}{2} \\ (3-4\mu) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) + \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\frac{n\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(r, \theta) \\ \sigma_{yy}(r, \theta) \\ \tau_{xy}(r, \theta) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{\frac{n-2}{2}} \begin{bmatrix} \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2}\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2}\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left((-1)^n + \frac{n}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial I_u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = E \frac{\partial I_v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial I_u}{\partial y} + \frac{\partial I_v}{\partial x} \right). \quad (5.3)$$

La variable A_n es un coeficiente desconocido asociado a las funciones de esfuerzo. Cuando $n=I$, esta variable está asociada al factor de intensidad de esfuerzo en el modo I . Los modelos matemáticos para el desplazamiento son $I_u(r, \theta)$ e $I_v(r, \theta)$ en las direcciones de u y v respectivamente. E , G y μ son las constantes elásticas: el módulo Young, el módulo de elasticidad al cortante y la razón de Poisson respectivamente. Las coordenadas (r, θ) están en el sistema de coordenadas polares cuyo origen se encuentra al final de la grieta. Las ecuaciones 5.1 y 5.2 pueden ser utilizadas para determinar el factor de intensidad esfuerzos mediante una comparación entre éstas y las mediciones obtenidas por la técnica ESPI. Se han escogido varios puntos de referencia sobre la probeta para realizar estas mediciones como se muestra en la figura 5.2.

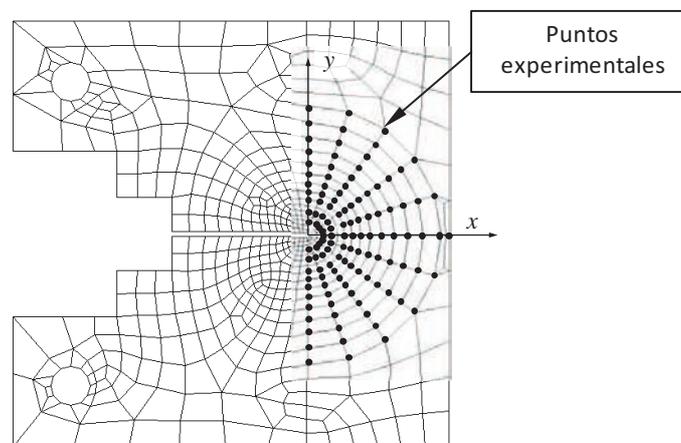


Figura 5.2 Puntos de referencia donde se realizan las mediciones mediante ESPI para calcular el factor de intensidad de esfuerzos.

Para calcular los coeficientes desconocidos A_n es necesario obtener un sistema lineal ecuaciones a partir de las ecuaciones 5.1 o 5.2. Por ejemplo, para resolver un número n de incógnitas, usando la ecuación 5.1, se puede crear sistema lineal con un sobre-determinado número de mediciones alrededor de la grieta. El sistema se puede resolver por medio de la técnica de los mínimos

cuadrados minimizando el error debido al efecto del moteado en los interferogramas^[21]. Sean S_u y S_v definidos por

$$S_u = \sum_{k=1}^N (u_k(r, \theta) - I_{u_k}(r, \theta))^2, \quad (5.4)$$

y

$$S_v = \sum_{k=1}^N (v_k(r, \theta) - I_{v_k}(r, \theta))^2, \quad (5.5)$$

donde u y v son las k -ésimas mediciones obtenidas por ESPI en el espécimen y N es el total de puntos donde se realizaron las mediciones. $I_u(r, \theta)$ y $I_v(r, \theta)$ se obtienen a partir de la ecuación 5.1.

Usando la técnica de los mínimos cuadrados, esto es, diferenciando las ecuaciones 5.4 y 5.5 con respecto a A_{in} e igualándolas a cero, $\frac{dS_u}{dA_{in}} = 0$ y $\frac{dS_v}{dA_{in}} = 0$, se puede formar un sistema lineal de ecuaciones en términos de A_{in} de la forma:

$$[S][A] = [C]. \quad (5.6)$$

Donde las matrices $[C]$ y $[A]$ tienen las dimensiones $n \times 1$. Además, estas matrices representan la matriz de constantes y la matriz de incógnitas asociados al factor de intensidad de esfuerzos. La matriz $[S]$ tienen las dimensiones $n \times n$ y sus elementos contiene los coeficientes de A_{in} . La solución a la ecuación 5.6 está dada por:

$$[A] = [S]^{-1}[C]. \quad (5.7)$$

Por último, el factor de intensidad de esfuerzos puede determinarse mediante la relación^[22]:

$$K_I = A_{I1} 2\sqrt{2\pi}. \quad (5.8)$$

Por otro lado, se pueden obtener resultados teóricos considerando la configuración del espécimen. El factor de intensidad de esfuerzos teóricos en el modo I al final de la grieta puede encontrarse mediante la ecuación ^[23]:

$$K_I = \frac{F}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right), \quad (5.9)$$

Donde la función $f\left(\frac{a}{W}\right)$ depende de la configuración de la geometría y las condiciones de carga del espécimen, B es el espesor del espécimen, W es el ancho del espécimen y a la longitud de la grieta. F es la carga aplicada. Para el espécimen de prueba mostrado en la figura 5.1, la función $f\left(\frac{a}{W}\right)$ se expresa como¹⁷:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{2 + \frac{a}{W}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left[0.886 + 4.64\left(\frac{a}{W}\right) - 13.32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.60\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]. \quad (5.10)$$

5.3 Sistema óptico

Durante la carga mecánica, cada punto P de la superficie de prueba se desplaza en sus tres direcciones: x , y y z . El campo de desplazamiento de la superficie puede ser representado mediante el vector de desplazamiento $\vec{d}(P) = u(p)\hat{i} + v(p)\hat{j} + w(p)\hat{k}$. La evaluación de los campos de desplazamiento en plano se realiza mediante un sistema óptico que consta de cuatro haces de iluminación divergentes como se muestra en la figura 5.3, correlacionando imágenes de antes y después de la deformación.

En la misma figura, las fuentes están representadas por S_1^i y S_2^i . Las coordenadas de las fuentes están ubicadas en (x_1^i, y_1^i, z_1^i) y (x_2^i, y_2^i, z_2^i) respectivamente; donde $i=1,2$. A. Martínez *et. al.* ^[24] presentan un sistema de cuatro haces para la obtención de las dos componentes de desplazamiento en plano. En este caso las ecuaciones correspondientes, dado los valores de las componentes del vector de sensibilidad pueden ser aproximados como:

$$\Delta\phi_x(x, y) = e_x(x, y)u(x, y), \tag{5.11}$$

correspondiente al par de fuentes de iluminación ubicadas en el eje x . Mientras que para el par de fuentes de iluminación ubicada en el eje y :

$$\Delta\phi_y(x, y) = e_y(x, y)v(x, y). \tag{5.12}$$

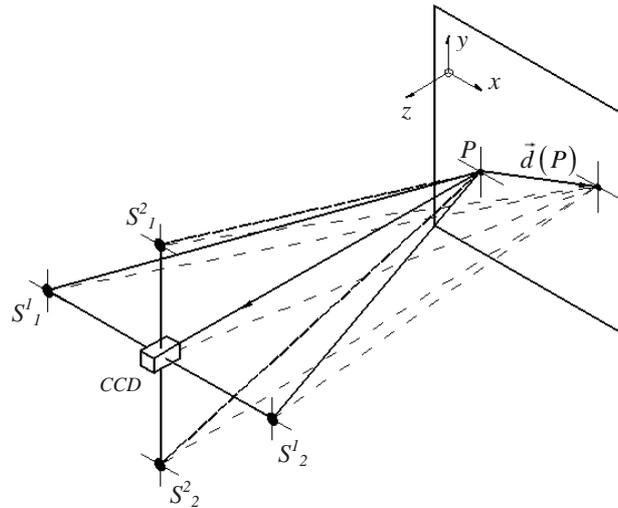


Figura 5.3 Esquema del sistema óptico utilizado con sensibilidad en plano.

Una vez obtenidos los campos de desplazamientos $u(P)$ y $v(P)$, se puede obtener los campos de deformación a través de las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5.13}$$

Las fases del patrón de franjas $\Delta\phi_x$ y $\Delta\phi_y$ son obtenidas mediante el algoritmo de corrimiento de fase de tres pasos^[25]:

$$\Delta\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(I_3(x, y) - I_2(x, y))}{2I_1(x, y) - I_2(x, y) - I_3(x, y)}\right). \tag{5.14}$$

5.4 Simulación por Análisis de Elemento Finito

La técnica de análisis por elementos finitos (FEA, Finite Element Analysis en inglés) consiste en dividir la geometría del elemento mecánico en la que se quiere resolver una ecuación diferencial de un campo escalar o vectorial en un dominio, en pequeños elementos, teniendo en cuenta unas ecuaciones de campo en cada elemento, los elementos del entorno de vecindad y las fuentes generadoras de campo en cada elemento. Habitualmente, esta técnica es muy utilizada para el análisis de los campos de deformación y esfuerzo. También es utilizado para muchos otros problemas físicos que se formulan mediante la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales cuya solución es posible modelar como por ejemplo la transmisión del calor, los campos electromagnéticos y cálculo de estabilidad de estructuras. Esta técnica se encuentra automatizada mediante software. Por ejemplo, los resultados de una simulación de la deformación alrededor de una grieta en una probeta similar a la presentada en la figura 5.1 es presentado por A. A. Kotlyarenko *et. al.* ^[26]

La simulación por elemento finito consta de tres etapas principalmente. Primero, la etapa del pre-procesamiento donde se define el modelo del elemento finito y los factores ambientales que influyen en él. Segundo, la etapa de solución y por último, el post-proceso de resultados usando herramientas de visualización de resultados. Los modelos para los elementos finitos utilizados en esta tesis son elementos de dos dimensiones y 8 nodos con 3 grados de libertad, esto es que los nodos podrán desplazarse en las direcciones de u , v y rotar en su propio eje. Este tipo de elemento se deforma de manera similar a un elemento equivalente en la superficie observada del espécimen sometido a tensión ^[27]. La simulación utilizada en esta tesis utilizó el software ANSYS. Estos resultados se discutirán más adelante.

5.5 Proceso experimental y resultados

Una placa de aluminio estructural tipo 1050A con 6 mm de espesor con una fractura fue utilizada como espécimen. Sus propiedades mecánicas son: módulo de elasticidad $E = 71\text{ GPa}$, razón de Poisson $\mu = 0.334$, y esfuerzo a la fluencia de $S_{yp} = 152\text{ MPa}$. El espécimen fue montado en una máquina universal INSTRON para realizar la prueba de tracción como se muestra en la figura 5.4. Una cámara CCD (8 bits y 255 niveles de gris) registra las imágenes de la superficie de la probeta

donde las dimensiones observadas corresponden a 432×326 pixeles (58×36 mm) a una tasa de captura de 30 fps. Un laser de He-Cd con una longitud de onda $\lambda = 442$ nm forma parte del sistema óptico. Filtros espaciales que funcionan como las fuentes de iluminación divergente están localizadas en las coordenadas (en milímetros): $S_1^1(-450, 0, 490)$, $S_2^1(452, 0, 490)$, $S_1^2(0, 270, 690)$ y $S_2^2(0, -270, 690)$. Se ha aumentado la sensibilidad en el eje x del sistema óptico para poder compensar la tasa de deformación debido a la razón de Poisson entre los desplazamientos u y v . El máximo valor del vector de sensibilidad en el eje x es de 19.7×10^3 rad/mm, mientras que para el eje y es de 10.4×10^3 rad/mm.

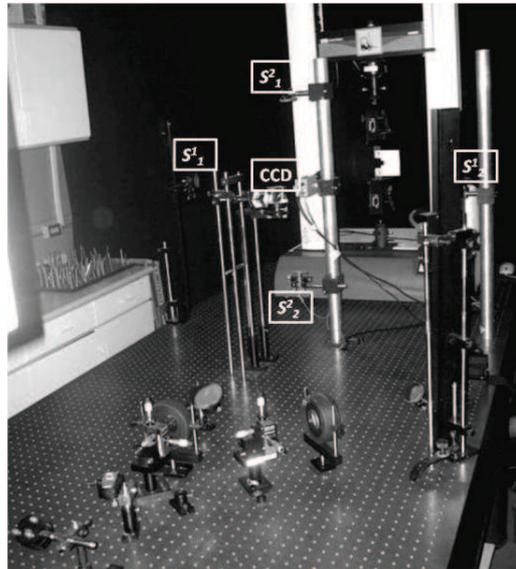


Figura 5.4 Foto del sistema óptico utilizado. También se puede observar el espécimen montado en la máquina universal.

Los parámetros de la máquina universal fueron programados para un desplazamiento entre mordazas de 0.125 mm/min; ésta es la deformación mínima en la dirección y entre los extremos atornillados del espécimen. Adicionalmente una pre-carga de 0.5 kN fue aplicada para evitar desplazamientos debido al acomodamiento del espécimen durante las mediciones de los campos de deformación. En cada prueba se realizaron registros de los campos de desplazamiento de la superficie observada a cada 20 N hasta los 2.2 kN. Se evitó someter al espécimen a una carga mayor para evitar los daños en la estructura molecular del material y así asegurar la repetitividad

de la prueba. Se compararon los resultados de las pruebas de carga- deformación. Los resultados se observan en la figura 5.5 donde podemos observar que existe una buena repetitividad entre el intervalo de 1.2 kN y 1.8 kN .

El campo de deformación es obtenido mediante la técnica ESPI, donde el tiempo requerido para realizar el corrimiento de fase de tres pasos y la obtención de las imágenes fue de apenas 0.1 seg. el cual representa una deformación entre los extremos de la probeta de solo $0.1\ \mu\text{m}$ en la dirección y . Podemos suponer que la velocidad de deformación con respecto a la tasa de captura de cada imagen es suficientemente lento para considerar que el corrimiento de fase se realiza en condiciones cuasi-estáticas. Por lo tanto el desplazamiento de cuerpo rígido del espécimen puede despreciarse. El proceso de adquisición de imágenes se realizó cada incremento de carga de 20 N , hasta tener un acumulable en la carga mecánica correspondiente a 2.2 kN . Cada par de fuentes de iluminación ubicadas en los ejes x y y fueron alternándose durante las mediciones para obtener los mapas de desplazamientos u y v del espécimen. Los interferogramas analizados fueron los obtenidos en el rango de carga correspondiente entre 1.2 kN y 1.8 kN .

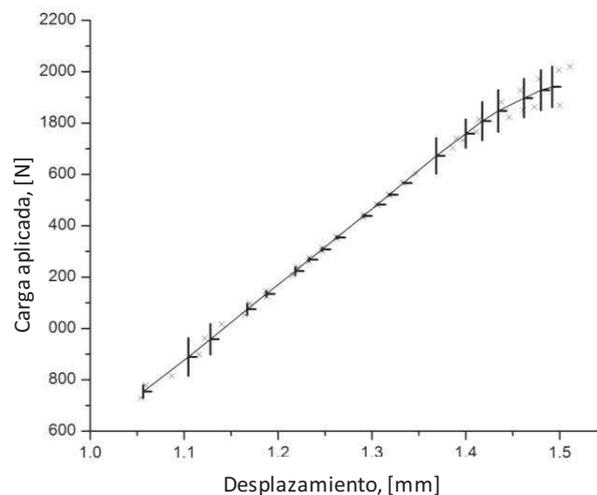


Figura 5.5 Relación de la carga deformación del espécimen obtenida mediante múltiples mediciones.

Ignacio Lira *et. al.*^[28] reportan que se obtienen errores grandes si se aplica directamente una diferenciación numérica a los mapas de desplazamiento obtenidos a partir de los interferogramas

que no hayan sido filtrados por algún tipo de filtro pasa bajas previamente. El proceso de filtrado de la información ruidosa de los interferogramas es muy útil, sin embargo parte de la información útil puede modificarse o perderse. El filtraje pasa bajos aplicado a los interferogramas consiste en un filtro de convolución con un kernel con perfil Gaussiano. Este tipo de kernel reduce considerablemente el ruido asociado al patrón de moteado sin la pérdida sustancial de información útil en el contorno de la imagen del espécimen.

La fase del patrón de franjas se obtiene utilizando el método de corrimiento de fase de tres pasos. Del cálculo del vector de sensibilidad para cada uno de los dos sistemas de iluminación dual y de la información de la fase se evalúan los campos de desplazamiento u y v respectivamente, figura 5.6. Utilizando el método de Stokes de la ecuación 4.40b se pueden calcular los campos de deformaciones en las direcciones x y y como se muestra en la figura 5.7.

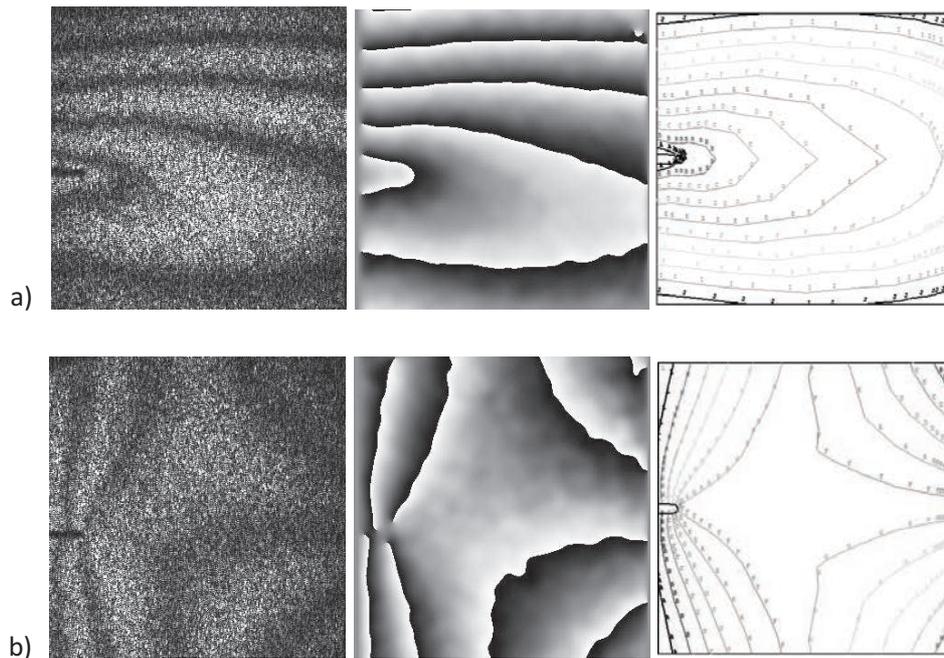


Figura 5.6 Patrón de franjas, fase envuelta y simulación por elemento finito respectivamente para a) campo de desplazamiento $u(x, y)$ y b) campo de desplazamiento $v(x, y)$. La carga mecánica aplicada al espécimen fue de 1.2 kN.

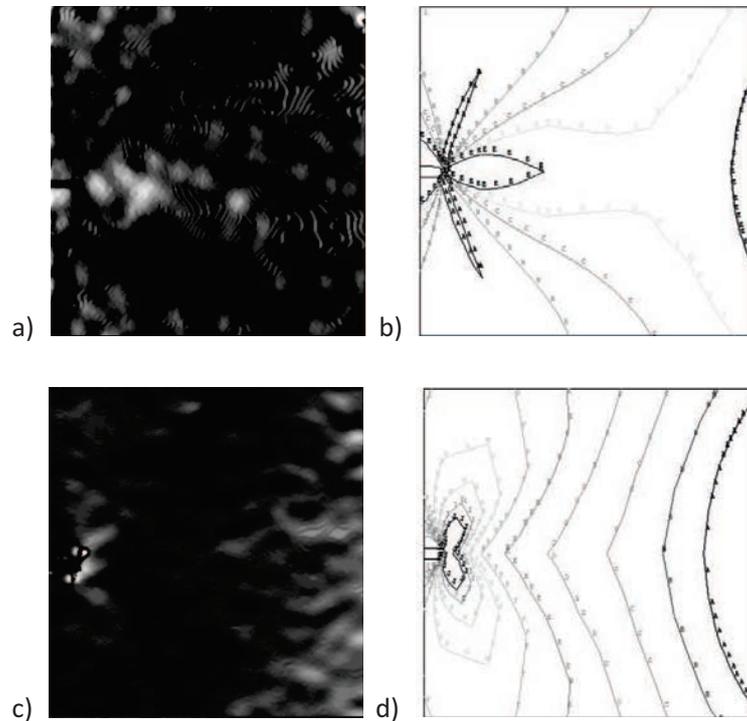


Figura 5.7 Campos de deformación obtenidos por ESPI después de haber aplicado el método de Stokes y la simulación por elemento finito: a) deformación ε_x obtenido por ESPI, b) misma deformación obtenida por FEA; c) deformación ε_y obtenido por ESPI y d) obtenido por FEA respectivamente. La carga aplicada al espécimen fue de 1.2 kN .

Como se observan en la figuras 5.6 y 5.7, los patrones de desplazamiento y los campos de deformación (en este último se utiliza el método de Stokes) obtenidos por ESPI concuerdan con los resultados obtenidos por la simulación con FEA. Sin embargo se puede observar una ligera asimetría en los desplazamientos en la dirección de x , probablemente atribuible a la rotación del espécimen mientras se aplicaba la carga. En contraste, esa rotación no se observa en los campos de desplazamiento en la dirección y (de hecho no se observa ningún desplazamiento de cuerpo rígido en esa dirección).

La figura 5.8 muestra la gráfica de los desplazamientos obtenidos por FEA, ESPI y del cálculo numérico de la ecuación 5.1 respectivamente a lo largo del eje x , cuando $\theta = 0$. Como se puede

observar los desplazamientos en v son casi aproximados en el caso de las tres técnicas utilizadas. En el caso del campos de desplazamientos u , las mediciones son ligeramente diferentes. Esto puede ser atribuido a vibraciones pequeñas propias de la máquina universal. Esto puede introducir un desplazamiento constante, es decir, mientras que en cada medición se realiza en condiciones cuasi-estáticas, la deformación se va acumulando conforme se desarrolla la prueba. Los desplazamientos en la dirección x se incrementan a lo largo del ángulo $\theta = 0$ debido al momento inducido en el espécimen con respecto al origen de la fractura. La figura 5.9 muestra una comparación entre ESPI y FEA de la deformación a lo largo del ángulo $\theta = 0$. Como se puede observar cerca de la fractura las deformaciones obtenidas por ambas técnicas son similares. Usando las mediciones en varios puntos (los que se muestran en la figura 5.2) se puede estimar el factor de intensidad de esfuerzo K_I . La tabla 1 muestra los valores estimados para K_I a las cargas de 1.2 kN y 1.8 kN. El máximo factor de intensidad de esfuerzo estimado por la técnica FEA fue de 9.87 [MPa·mm^{0.5}] a una carga de 1.2 kN. El factor de intensidad de esfuerzo máximo obtenido por la técnica ESPI fue de 18.32 [MPa·mm^{0.5}] a 1.8 kN.

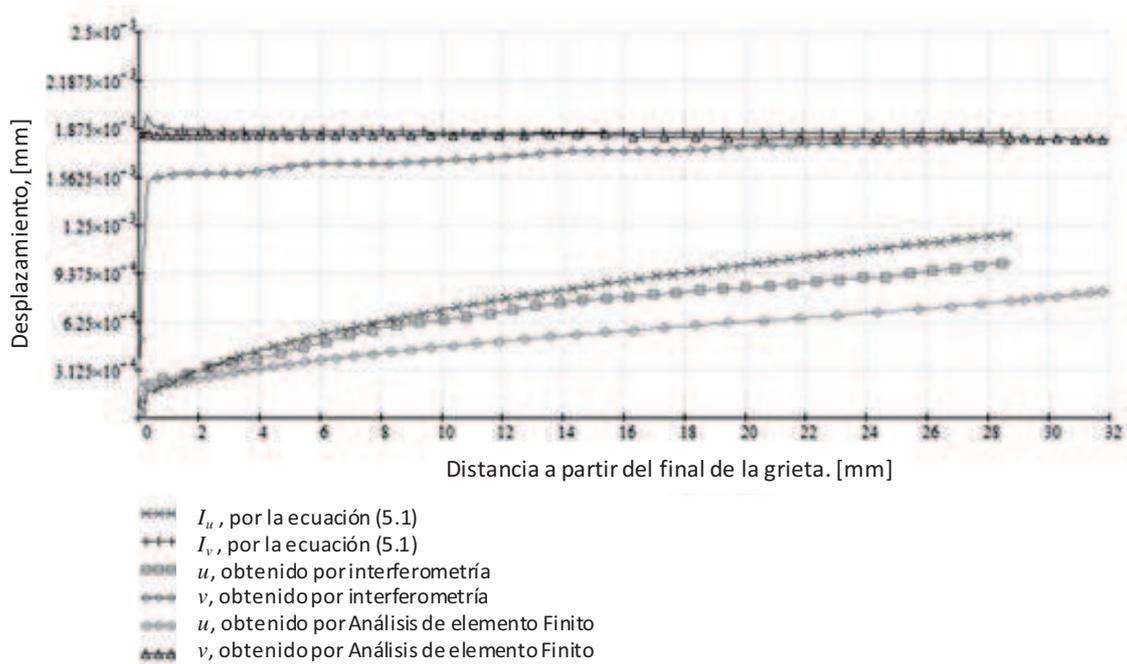


Figura 5.8 Desplazamientos en la dirección u y v a lo largo del eje con ángulo $\theta = 0$.

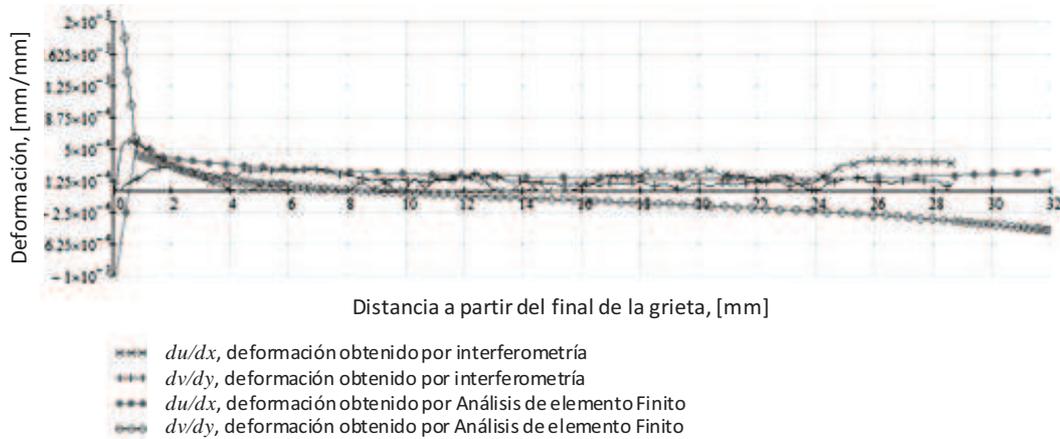


Figura 5.9 Comparación de los campos de deformación u y v a lo largo del eje con ángulo $\theta = 0$ para las mediciones ESPI y la simulación por FEA.

Tabla 5.1 Resultados para el Factor de Intensidad de Esfuerzo K_I para el espécimen mostrado en la figura 5.1.

Carga aplicada (KN)	Factor de intensidad de esfuerzo K_I (MPa m ^{0.5})		
	Experimental	Numérico	Simulación
	ESPI	Eq. (5.9)	FEA
1.20	15.42	11.254	9.872
1.80	18.32	18.288	16.146

5.6 Conclusiones

La interferometría electrónica del patrón de moteado es una técnica muy útil para el análisis de la deformación en elementos mecánicos. Se puede utilizar los campos de desplazamiento y deformación para calcular el factor de intensidad de esfuerzos en el primer modo. Algunas complicaciones se presentan debido a la naturaleza ruidosa del patrón de moteado. La utilización de filtros pasa bajas para reducir el efecto del moteado en los interferogramas es absolutamente necesario para obtener mejores resultados. Sin embargo, se debe tener especial atención en que

el filtro no elimine información útil o que los datos se modifiquen de tal manera que al aplicarse un proceso de derivación numérica se obtengan resultados erróneos. Aunque la técnica de diferenciación de Stokes está asociada al estudio de la mecánica de fluidos, también puede ser aplicado a la mecánica de materiales si consideramos que el proceso de la deformación es análogo al flujo de un sólido a una velocidad extremadamente baja. Podemos decir que el método de Stokes es otro medio alternativo para obtener deformaciones a partir de la diferenciación de los mapas de desplazamiento. Este método ofrece mejores resultados que los métodos tradicionales basados en la definición de la derivada ya que el método de Stokes evalúa en ocho pixeles alrededor de un pixel central.

Debido a que la tasa de deformación del espécimen es muy baja, la técnica de corrimiento de fase puede ser utilizada con un error tolerable y por lo tanto el desplazamiento de cuerpo rígido puede ser despreciado. Los resultados obtenidos del factor de intensidad de esfuerzos a través de la simulación FEA y el cálculo numérico son similares. Hemos comprobado que la técnica ESPI es útil para medir el factor de intensidad de esfuerzo en elementos mecánicos sin la necesidad de efectuar un análisis numérico o simulaciones. La información obtenida mediante esta técnica es de utilidad en el proceso de diseño mecánico ya que ayuda a comprobar directamente las propiedades mecánicas de los elementos diseñados.

Referencias

- [1] Jorge Parra Michel, Amalia Martínez, J. A. Rayas, “*Computation of crack tip elastic strain intensity factor in mode I by electronic speckle pattern interferometry*”, Proc. SPIE No. **7432** (2009), 74321B.
- [2] Jorge Parra Michel, Amalia Martínez, J. A. Rayas, “*Computation of crack tip elastic stress intensity factor in mode I by in-plane electronic speckle pattern interferometry*”, Rev. Mex. Fís. **56** (2010), 394–400.

-
- [3] T.J. Dolan, *"Preclude Failure: A philosophy for material selection and simulated service testing"*, SESA J. Exp. Mech. **10** (1970), 1-14.
- [4] Joseph Marin, *Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1952)
- [5] N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J. (1993)
- [6] Thomas J. Dolan, *Physical properties, ASME handbook-metals Engineering design*, McGraw-Hill, New York. (1953)
- [7] Charles R. Mischke, *Elements of mechanical analysis*, Addison-Wesley, (1963)
- [8] Ramesh, K. and Pathank, P. M., *"Validation of finite element modeling through photoelasticity fringes contours"*. Commun. Numer. Methods Eng. **15** (1999) 229-238.
- [9] M. Ravichandran, P.R.D. Karthick Babu, V. Rao and K. Ramesh, *"New Initiatives on Comparison of Whole-Field Experimental and Numerical results"*, Strain **43** (2007) 119.
- [10] Lianxiang Yang, Andreas Etemeyer, *"Strain measurement by three-dimensional electronic speckle pattern interferometry: potentials, limitations, and applications"*, Opt. Eng. **42** (2003) 1257–1266.
- [11] D.B. Barker, M.E. Fourney, *"Three-dimensional Speckle Interferometric Investigation of the Stress intensity Factor along a Crack Front"*, Exp. Mech. **17** (1977) 241-247.
- [12] Andrew J. Moore & John R. Tyrer, *"Two-dimensional Strain Measurement with ESPI"*, Opt. Lasers Eng. **24** (1996) 381-402.
- [13] Pramod K. Rastogi, *Digital Speckle Pattern Interferometry and Related Techniques*, John Wiley & sons, Ltd. England. (2001)
- [14] Katherine Creath, *"Phase-shifting speckle interferometry"*, Appl. Opt. vol. **24** (1985) 3053-3058.

-
- [15] Irwin, G. R. “*Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*”, J. Appl. Mech. **24** (1957) 361–364.
- [16] L. P. Pook, *Linear elastic fracture mechanics for engineers, theory and applications*, WIT Press, Southampton, Boston, (2000)
- [17] N.E. Dowling, *Mechanical behavior of materials*, Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J., (1993)
- [18] R. E. Peterson, *Stress concentration factors*, John Wiley & Son, New York. (1975)
- [19] F. Erdogan, “*Stress intensity factors*”. J. Appl. Mech. **50** (1983) 992-1002.
- [20] S.N. Atluri, Kobayashi A.S., *Handbook on experimental mechanics*, ed. Kobayashi A.S. 2nd ed; VCH SEM, New York., (1993)
- [21] W. J. Dally, C. A. Sciammarella and J. Shareef, “*Determination of Stress Intensity Factor K from In-plane Displacement Measurements*”, Proc. of the Vth International Congress on Experimental Mechanics, Montreal, (1984)
- [22] S. Yoneyama, T. Ogawa, Y. Kobayashi, “*Evaluating mixed-mode stress intensity factors from full-field displacement fields obtained by optical methods*”, Eng. Fract. Mech. **74** (2007) 1399-1412.
- [23] T.L. Anderson, *Fracture mechanics, Fundamentals and applications*, 2nd ed; CRC Press, Boca Raton, FL., (1991)
- [24] Amalia Martínez, J. A. Rayas, R. Rodríguez-Vera, H. J. Puga, “*3D deformation measurement from the combination of in-plane and out-of-plane ESPI interferometers*”, Appl. Opt. **43** (2004) 4652-4658.
- [25] Thomas Kreis, *Holographic interferometry, principles and methods*, Akademie Verlag, Berlin, (1996)

-
- [26] A. A. Kotlyarenko, T. A. Prach, V. V. Kharchenko and A. Yu. Chirkov, “*Numerical simulation of stress-strain state near crack tip in a compact tensile specimen*”, *Strength Mater.* **41** (2009) 106-112.
- [27] G. Villanueva, J.A. Plaza, E. González and J. Bausells, “*Transfer of small structures by bonding*”, *Microsyst. Technol.* **12** (2006) 455–461.
- [28] Ignacio Lira, Raúl R Cordero, Manuel François, Cristián Vial-Edwards, “*The uncertainty of experimental derivatives: application to strain measurement*”, *Meas. Sci. Technol.* **15** (2004) 2381.

CAPÍTULO 6: USO DE LA TÉCNICA DE INTERFEROMETRÍA DE MOTEADO EN LA MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA UTILIZANDO ILUMINACIÓN DUAL

Introducción

Muchos son los trabajos publicados acerca de la obtención de la topografía de superficies mediante iluminación dual colimada^[1-2-3]. Por ejemplo, R. Rodríguez-Vera^[2] muestra una técnica para la obtención de la topografía de objetos considerando una rotación de las fuentes de iluminación alrededor del objeto, mientras que Charles Joenathan^[3] muestra otra técnica similar pero rotando el objeto. La técnica utilizada corresponde a la técnica de interferometría electrónica de moteado (ESPI por sus siglas en inglés). Esta técnica también es útil en la determinación de los campos de desplazamiento. Tradicionalmente para su evaluación se utilizan arreglos ópticos colimadores con iluminación dual, donde la colimación es una restricción en la medición de objetos de grandes dimensiones. En la mayoría de las aplicaciones industriales, se requiere medir superficies de dimensiones grandes y los espacios físicos donde se realizan tales mediciones son restringidos. Una solución al problema anterior es el uso de iluminación divergente. Se sabe que los campos de desplazamiento y la fase óptica están relacionados a través del vector de sensibilidad^[4-5-6]. La evaluación de este último a su vez depende de las posiciones de las fuentes de iluminación y de la topografía del objeto. Esto complica la evaluación de la topografía mediante el uso de iluminación divergente. Podemos observar que la mayoría de las superficies de los especímenes utilizados en experimentos mecánicos, tiene al menos una superficie de forma conocida, ya sea una superficie esférica, piramidal o simplemente una superficie plana en la cual se realizan las mediciones. Estas formas se escogen solamente por simplicidad al momento de efectuar los análisis, cálculos y operaciones. Por ejemplo, La obtención de los campos de esfuerzo alrededor de una fractura para el estudio de las propiedades mecánicas de algún material se realiza sobre la parte plana de una probeta. Estas simplificaciones de la forma superficial de los elementos de prueba pueden originar resultados incorrectos si estos se utilizan en elementos mecánicos de formas complejas y en condiciones fuera de laboratorio.

En este capítulo se propone utilizar un algoritmo iterativo basado en la técnica de Gauss-Seidel para el cálculo de la topografía^[7]. Se obtiene mediciones de la topografía mediante ESPI y una

máquina de coordenadas (CMM). Las mediciones son obtenidas considerando la ecuación para el modelo de luz colimada y la ecuación obtenida para luz divergente.

6.1 Modelo teórico propuesto para contorno de superficies

La figura 6.1 muestra un esquema del sistema óptico utilizado para la obtención de la topografía por la técnica ESPI con sensibilidad en plano. Un haz láser es dividido mediante un divisor de haz (BS) y guiado por medio de fibras ópticas a las fuentes de iluminación S_1 y S_2 cuyas coordenadas están en (x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}) y (x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}) respectivamente. Sean (x, y, z) las coordenadas de un punto P sobre la superficie como se muestra en la figura 6.2. En el caso de la obtención de la topografía, se captura una primera imagen mediante la cámara CCD. Posteriormente, la superficie del espécimen es ligeramente rotada a lo largo del eje y y una segunda imagen es capturada y guardada. Hasta ahora, el punto P se ha desplazado hasta el punto P' debido a la rotación. Un patrón interferencia se puede obtener mediante la diferencia entre la primera y la segunda imagen^[8]. Un espejo montado sobre un piezoeléctrico (M/Pz) permite aplicar el método de corrimiento de fase^[9], mientras que el algoritmo de Carré con cuatro pasos^[10] es utilizado para encontrar la fase del patrón de franjas. La diferencia de fase observada sobre el punto P de la superficie se define mediante la ecuación^[11]:

$$\varphi(P) = \vec{e}(P) \cdot \vec{d}(P). \quad [6.1]$$

Recordando que $\vec{e}(P) = e_x(P)\hat{i} + e_y(P)\hat{j} + e_z(P)\hat{k}$ es el vector de sensibilidad y $\vec{d}(P) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ es el vector desplazamiento. El vector de desplazamiento puede obtenerse mediante la diferencia vectorial entre $\vec{rp} = px\hat{i} + py\hat{j} + pz\hat{k}$ y $\vec{rp}' = p'x\hat{i} + p'y\hat{j} + p'z\hat{k}$ como se muestra en la figura 6.2. Para el caso de iluminación divergente, el vector de sensibilidad se define como^[4]:

$$\vec{e}(P) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left[\frac{\vec{S}_1 P}{|S_1 P|} - \frac{\vec{S}_2 P}{|S_2 P|} \right], \quad [6.2]$$

donde las componentes ortogonales del vector de sensibilidad son:

$$e_x = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(x - x_{s1})}{|\overline{S_1P}|} - \frac{(x - x_{s2})}{|\overline{S_2P}|} \right], \quad [6.3a]$$

$$e_y = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(y - y_{s1})}{|\overline{S_1P}|} - \frac{(y - y_{s2})}{|\overline{S_2P}|} \right], \quad [6.3b]$$

$$e_z = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(z - z_{s1})}{|\overline{S_1P}|} - \frac{(z - z_{s2})}{|\overline{S_2P}|} \right], \quad [6.3c]$$

donde $|\overline{S_1P}| = \sqrt{(x - x_{s1})^2 + (y - y_{s1})^2 + (z - z_{s1})^2}$, $|\overline{S_2P}| = \sqrt{(x - x_{s2})^2 + (y - y_{s2})^2 + (z - z_{s2})^2}$

y λ es la longitud de onda de las fuentes de iluminación.

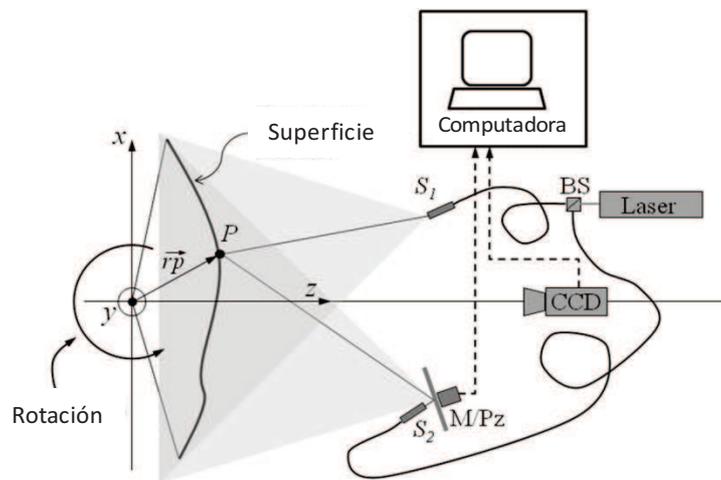


Figura 6.1 Esquema del arreglo óptico para la obtención de la topografía mediante la técnica ESPI con sensibilidad en plano.

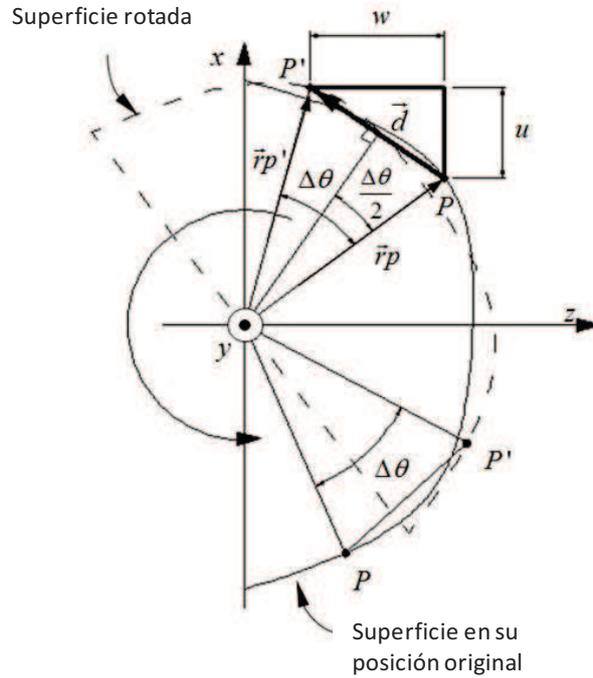


Figura 6.2 Geometría para el análisis de contorneo, el ángulo $\Delta\theta$ aparece muy exagerado para fines explicativos.

El desplazamiento del punto P ocurrirá en el plano xz , siendo la rotación con respecto al eje y . Por lo tanto, para el vector desplazamiento $\vec{d} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$, la componente v puede despreciarse. Para determinar la cantidad de desplazamiento de P tendremos que tener en cuenta la aproximación numérica para el ángulo de rotación $\Delta\theta$ de tal manera que: $|\sin(\Delta\theta)| \approx |\Delta\theta|$ y $|\cos(\Delta\theta)| \approx 1$. La cantidad de desplazamiento $|\vec{d}|$ del punto P se puede encontrar con la relación:

$$|\vec{d}| = |rp| \sin(\Delta\theta) \approx |rp| \Delta\theta. \tag{6.4}$$

Observando la figura 6.2, podemos relacionar las cantidades de desplazamiento u y w con las relaciones:

$$u = |\vec{d}| \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx |\vec{d}| \frac{\Delta\theta}{2}, \tag{6.5a}$$

$$w = |\vec{d}| \cos(\Delta\theta) \approx |\vec{d}|. \quad [6.5b]$$

Una simple cámara solo puede detectar desplazamientos en plano; en otras palabras, una cámara no puede detectar la profundidad o el desplazamiento en la dirección de z . Sin embargo, debido a la rotación del objeto, se puede relacionar los desplazamientos observados con el desplazamiento en la dirección de z por medio de las ecuaciones 6.5a y 6.5 obteniendo:

$$u \approx w \cdot \frac{\Delta\theta}{2}. \quad [6.6]$$

Debido a que la configuración del sistema óptico utilizado es simétrico, la componente e_z del vector de sensibilidad puede ser despreciado ya que su contribución al vector de sensibilidad es menor al 0.1%⁵. De las ecuaciones 6.3a y 6.6 se puede obtener una expresión que relacione la diferencia de fase con la componente de desplazamiento w del punto $P(x,y)$ observado:

$$\varphi(x, y) = e_x w \frac{\Delta\theta}{2}. \quad [6.7]$$

La altura Z_r del relieve de la superficie observada puede obtenerse usando las componentes vectoriales en la dirección de \hat{k} de la diferencia vectorial entre \vec{rp} y \vec{rp}' mostrado en la figura 2.

De tal modo que la componente w del desplazamiento también está relacionado con la altura del relieve superficial obtenido por la diferencia $(p'z - pz)$. La ecuación 6.7 puede reescribirse obteniendo la ecuación para el cálculo de la topografía:

$$Z_r = (p'z - pz) = \frac{\varphi(x, y)}{e_x(x, y, z)} \cdot \frac{2}{\Delta\theta}. \quad [6.8]$$

La ecuación 6.8 considera iluminación divergente para el contorno de superficies pero sigue habiendo una dependencia de la topografía en la variable z del vector de sensibilidad. Para resolver la ecuación 6.8 se propone el uso de un algoritmo basado en la técnica de Gauss-Seidel mostrado en la figura 6.3. El algoritmo inicia calculando el vector de sensibilidad suponiendo que la forma de la superficie es plana, es decir, $z = 0$ (ecuación 6.3a). La primera iteración proporciona

una altura aproximada para el valor Z_r . Si la cantidad $|z - Z_r|$ es mayor a una tolerancia preestablecida ε , entonces z es remplazada por el valor calculado Z_r .

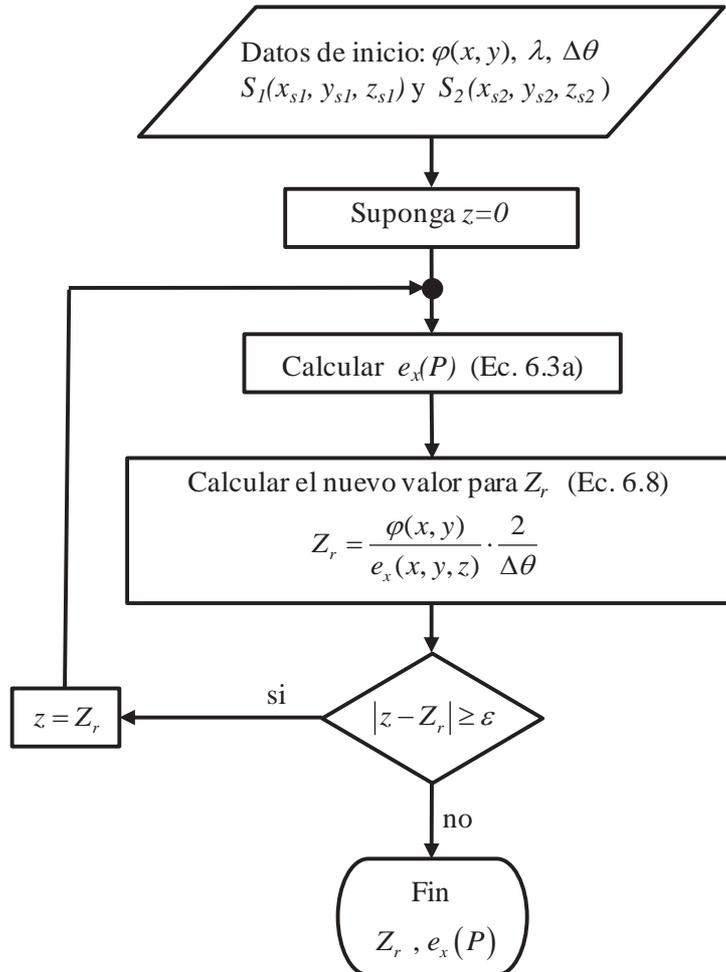


Figura 6.3 Algoritmo propuesto en la evaluación de la topografía.

6.2 Experimentos y análisis de resultados

Para el análisis de la funcionalidad del algoritmo, el objeto de prueba el cual puede verse en el sistema óptico en la figura 6.4, fue medido previamente mediante una máquina de medición por coordenadas (CMM). Las dimensiones de la superficie de análisis son de $320 \times 270 \text{ mm}^2$ de superficie con una altura máxima aproximada de 45 mm.

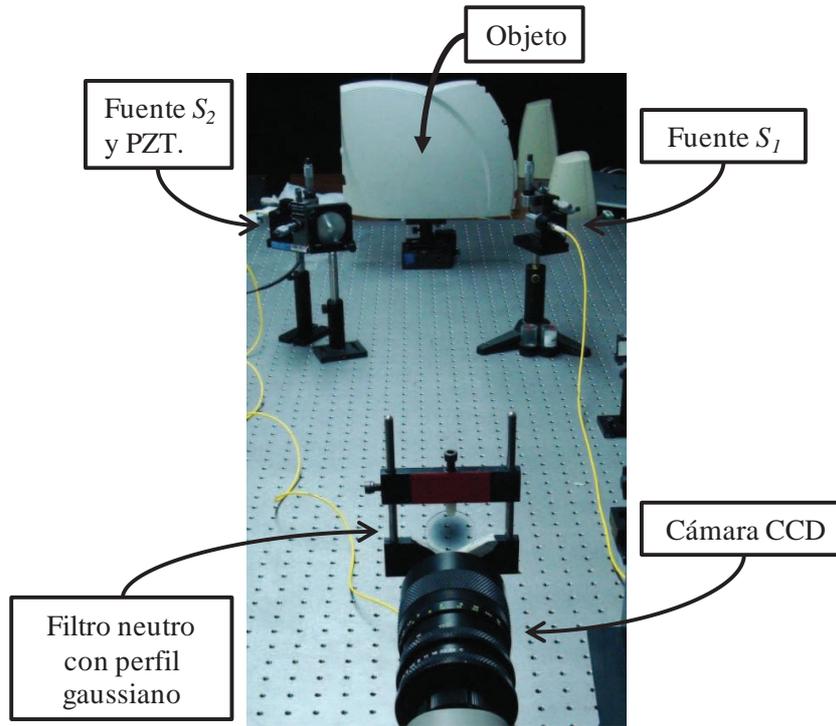


Figura 6.4 Objeto de prueba y sistema óptico utilizado.

Dos fibras ópticas acoplados a objetivos de microscopio de 60x fungen como fuentes de iluminación divergente. Un espejo montado sobre un piezoeléctrico situado frente de una de las fuentes de iluminación se usa para implementar la técnica del corrimiento de fase. Un filtro neutro con perfil gaussiano montado frente a la cámara se utiliza para regular la saturación y la intensidad sobre el sensor CCD de la cámara. El objeto se montó sobre la base de un micrómetro con desplazamiento angular.

Se evaluó la topografía del objeto con distintas posiciones de las fuentes de iluminación. Los datos son mostrados en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. Posición de fuentes y su correspondiente ángulo de rotación.

Medición	Coordenadas para S_1 , [mm]	Coordenadas para S_2 , [mm]	Rotación $\Delta\theta$ [rad]
A	(203, 0, 612)	(-203, 0, 613)	4.3×10^{-4}
B	(203, 0, 768)	(-203, 0, 769)	4.6×10^{-4}
C	(155, 0, 1180)	(-155, 0, 1180)	3.8×10^{-4}

La técnica de corrimiento de fase utilizando el algoritmo de Carré para cuatro pasos fue utilizado para evaluar la fase ^[12]. Un filtro pasa-bajos de convolución con un kernel gaussiano se utilizó en cada interferograma para reducir el error producido por el efecto de moteado. La figura 6.5 muestra un patrón de franjas del interferograma obtenido por ESPI con su correspondiente fase envuelta y fase desenvuelta. Los datos utilizados para el cálculo de la componente e_x del vector de sensibilidad se obtuvieron de la tabla 1. Para cada iteración, aplicando el algoritmo mostrado en la figura 6.3, la componente e_x del vector de sensibilidad fue re-evaluado. Unas cuantas iteraciones son necesarias para obtener una buena convergencia en la topografía de la superficie produciendo diferencias máximas menores al 3% entre el segundo y tercer ciclo. La figura 6.6 muestra los resultados para las tres primeras iteraciones de la componente e_x usando el algoritmo propuesto para las condiciones mostradas en la tabla 6.1.

Como se esperaba, la posición de las fuentes de iluminación modificaron los valores de la componente e_x del vector de sensibilidad. La figura 6.7 muestra las mediciones corregidas a lo largo del eje horizontal mostrado sobre la superficie del espécimen.

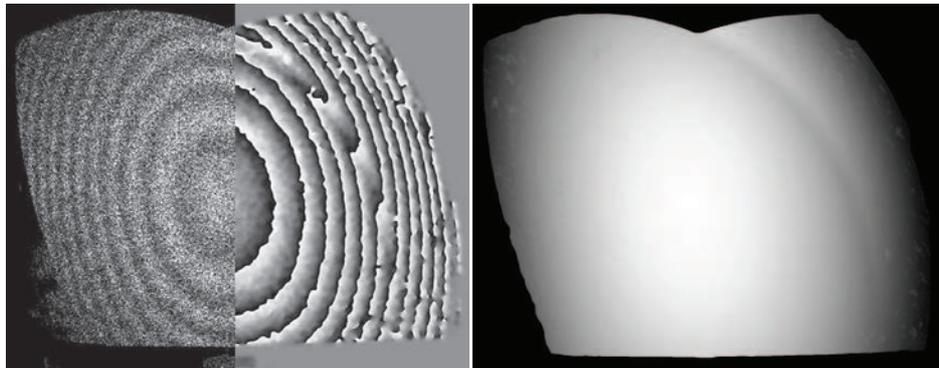


Figura 6.5 a) Interferograma utilizado con la fase envuelta obtenida y b) fase desenvuelta

El error decrece cuando se alejan las fuentes de iluminación con respecto al espécimen en el caso del uso del modelo matemático para iluminación colimada. De acuerdo con las mediciones de la máquina de medición por coordenadas CMM, observamos un error máximo 14% en los resultados obtenidos sin corrección de la componente e_x del vector de sensibilidad para tres iteraciones en el

caso de la medición A. La figura 6.8 muestra el error de las mediciones en distintas posiciones de las fuentes de iluminación (mostrados en la tabla 1). En la gráfica aparece reportado el error para una cuarta posición de las fuentes con la finalidad de tener un mayor número de puntos en el ajuste exponencial. La aproximación exponencial se calculó con los factores $A= 12.39661$, $t= 1072.1902$ y $y_0= -0.58975$ en la expresión:

$$y(x) = Ae^{-\frac{x}{t}} + y_0 \quad [6.9]$$

(A)

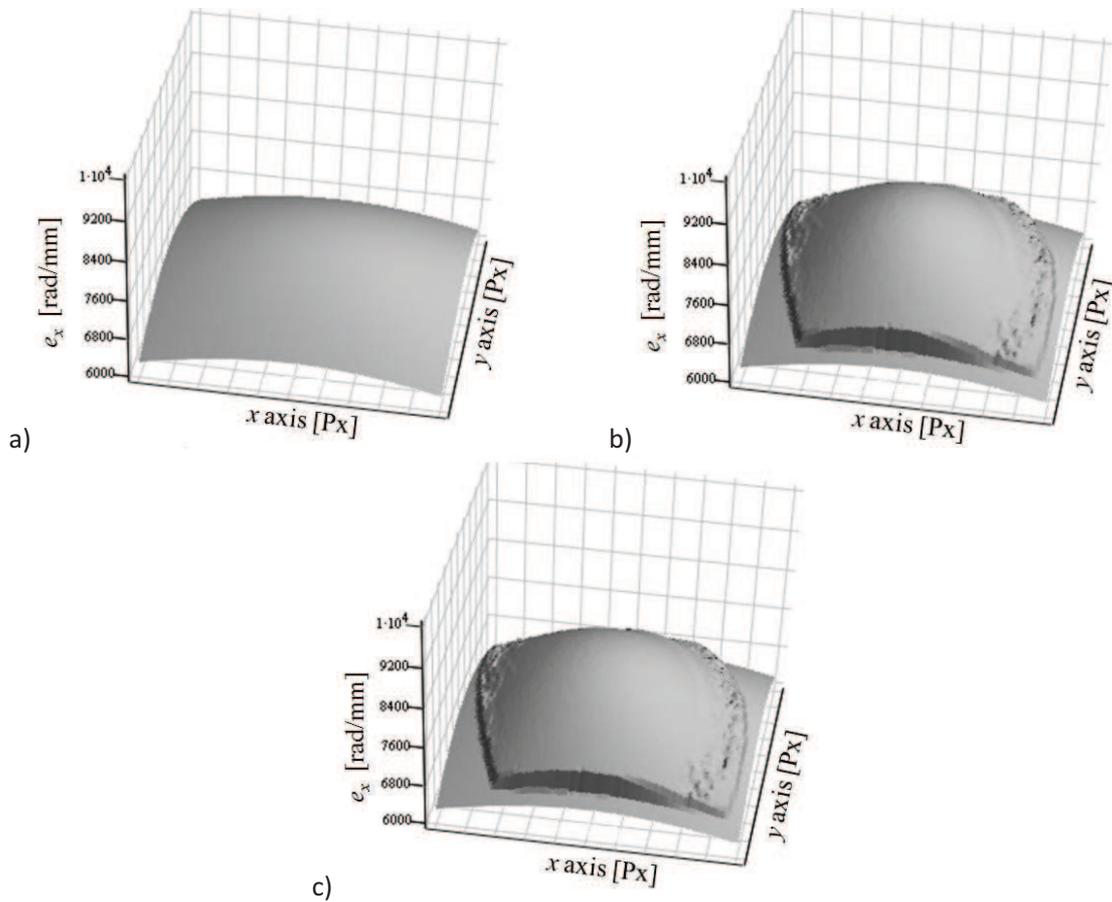


Figura 6.6 Evolución de e_x para los primeros tres ciclos del algoritmo propuesto para los datos mostrados en la tabla 1 donde a) corresponde al primer ciclo, b) el segundo ciclo y c) el tercer ciclo respectivamente para las mediciones (A) (B) y (C).

(B)

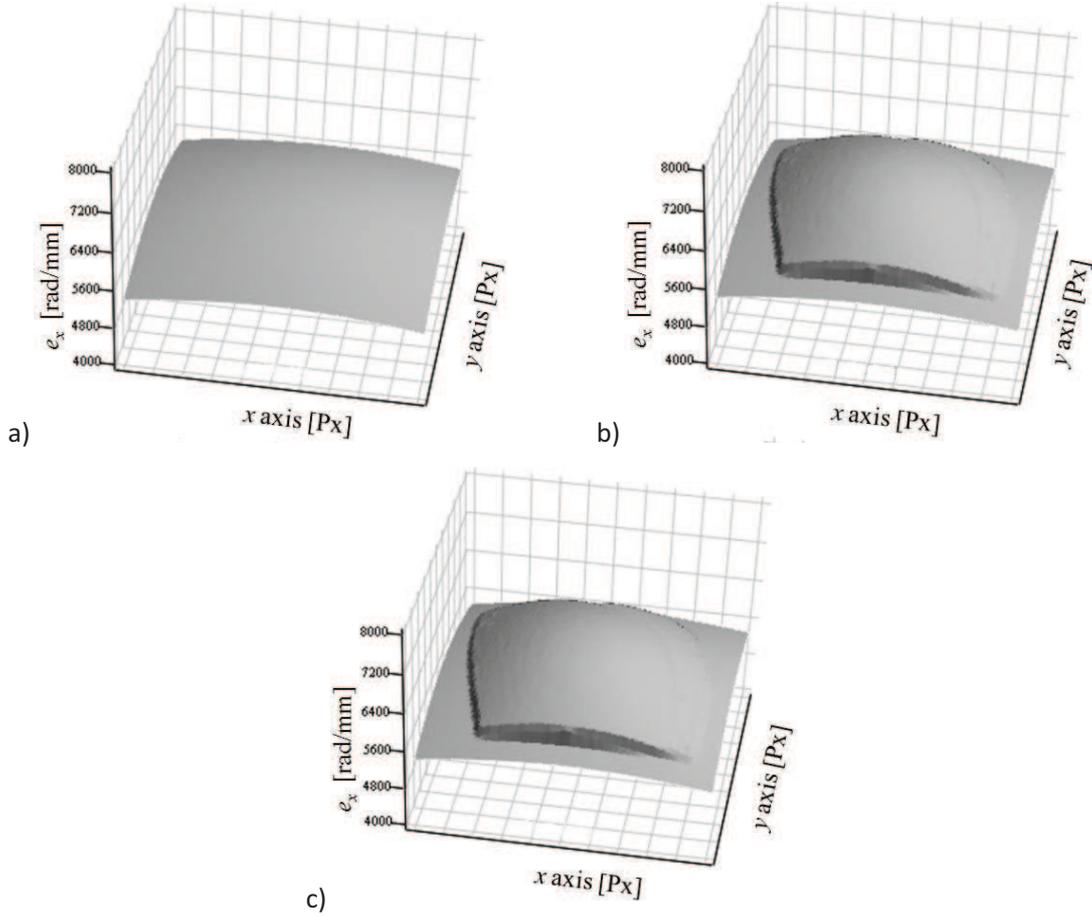


Figura 6.6 (continuación).

(C)

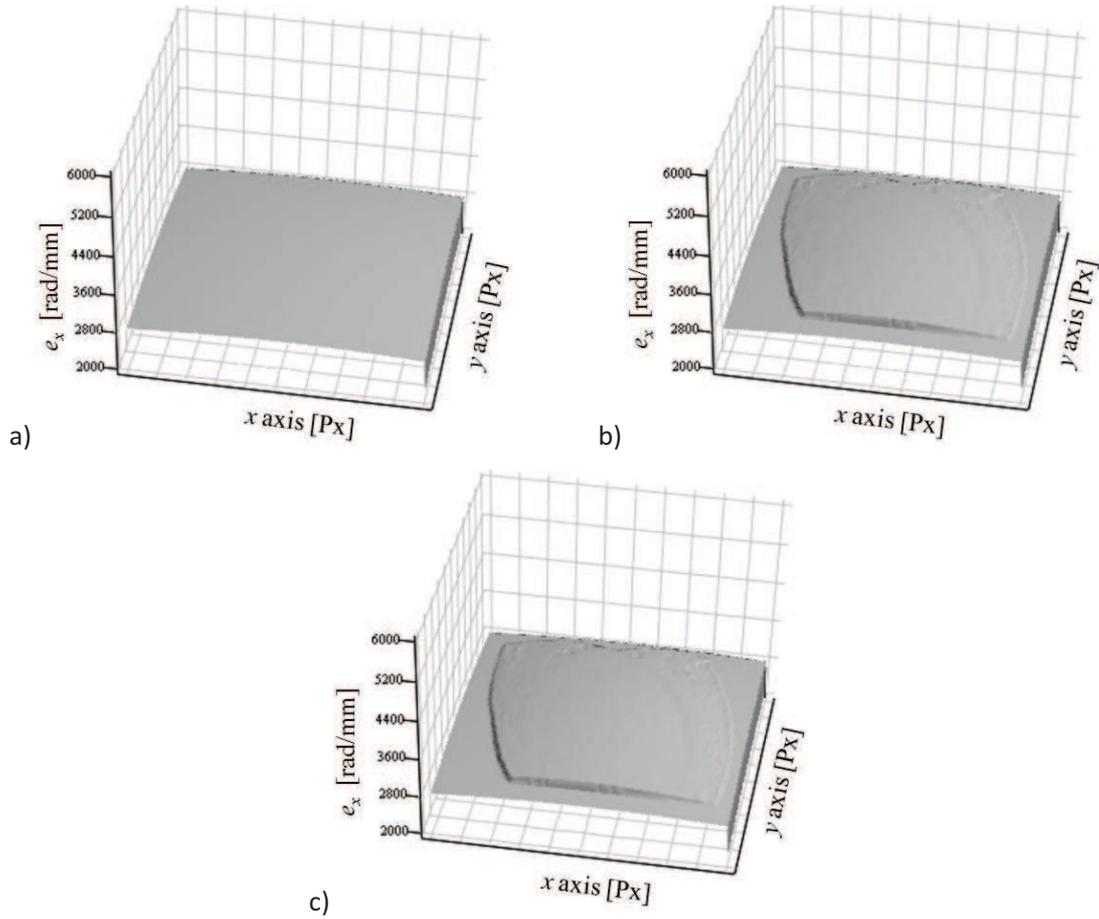


Figura 6.6 (continuación).

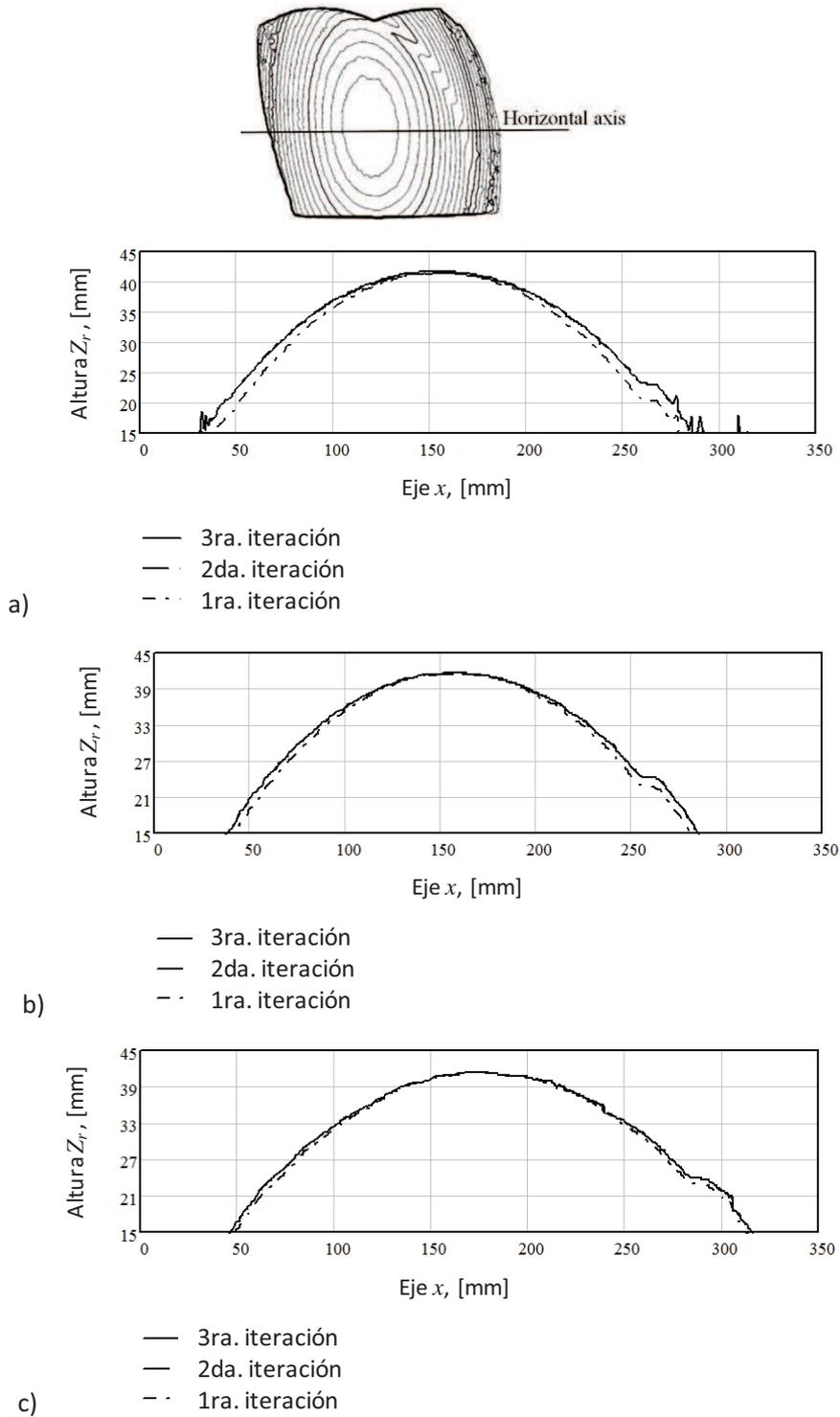


Figura 6.7 Evaluación de la forma del objeto a lo largo del eje horizontal en: a) medición A, b) medición B y c) medición C.

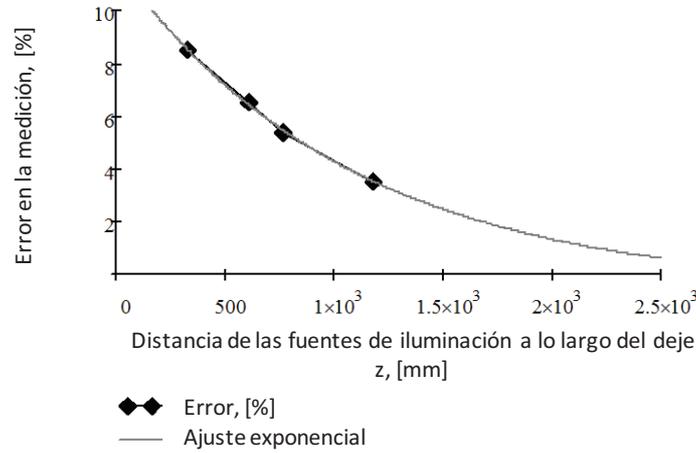


Figura 6.8 Error máximo de las mediciones (símbolos de rombos) y su ajuste exponencial (línea continua) para diferentes distancias de las fuentes de iluminación a lo largo del eje z.

La figura 6.9 muestra una comparación entre los perfiles corregidos por el algoritmo propuesto y las mediciones realizadas por la máquina de medición por coordenadas. La estimación del error de la medición A correspondiente a la tabla 6.1, entre la primera y última iteración con respecto a la medida obtenida mediante la máquina de coordenadas se muestran en la figura 6.10. Las figuras 6.11 y 6.12 muestran las mediciones del error suponiendo que la fuente de iluminación es colimada para el cálculo del vector de sensibilidad (ec.4.20). Adicionalmente, se puede notar que en la figura 6.11 se tiene un error mínimo en la región paraxial. Esto se debe a que los valores del vector de sensibilidad para los casos de la iluminación divergente y colimada son semejantes. En la figura 6.12, se comparan las mediciones cuando se utiliza iluminación divergente y la supuesta iluminación colimada. Por último, la figura 6.13 muestra la topografía final de la superficie del espécimen de acuerdo a las condiciones de medición A mostradas en la tabla 6.1.

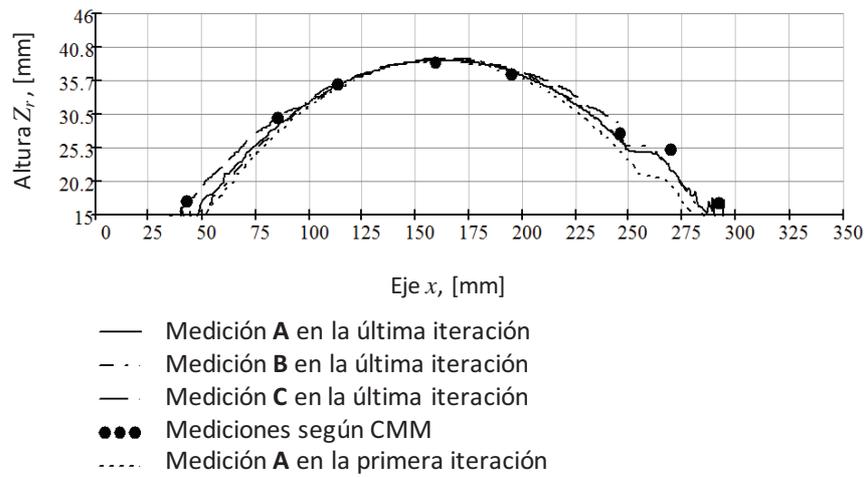


Figura 6.9 Comparación de las mediciones corregidas mediante el algoritmo propuesto y las mediciones realizadas por la máquina de medición por coordenadas.

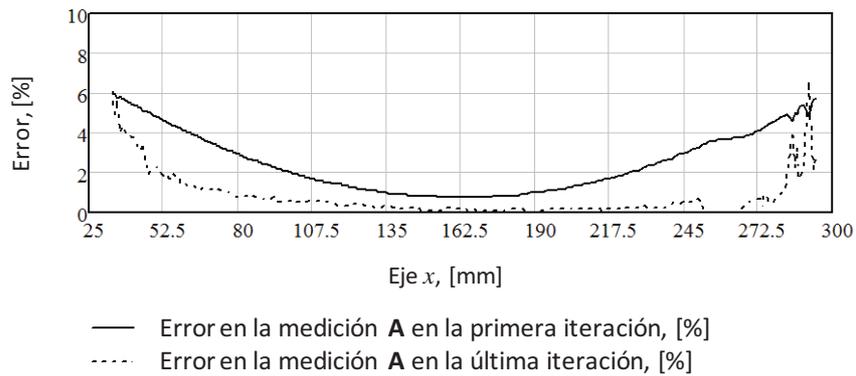


Figura 6.10 Estimación del error las para la primera y última iteración con respecto a la medición obtenida con la máquina de medición por coordenadas.

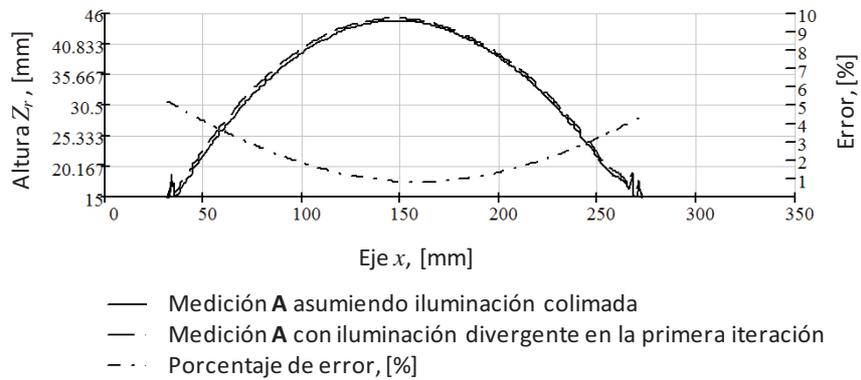


Figura 6.11 Comparación de los perfiles obtenidos al usar el modelo de iluminación divergente (en la primer iteración) e iluminación colimada.

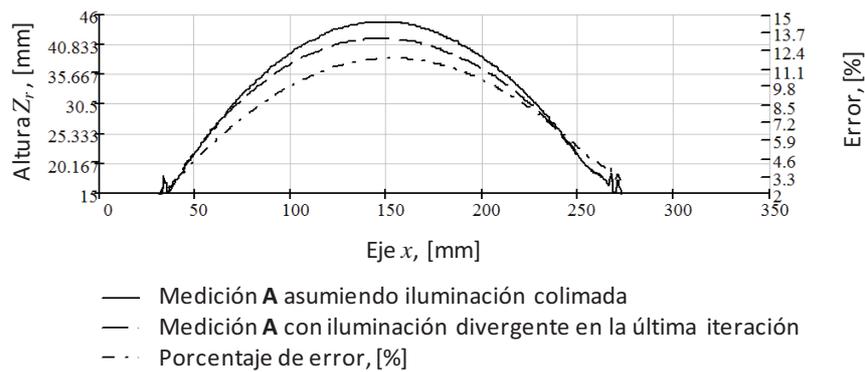


Figura 6.12 Comparación de los perfiles entre la iluminación divergente y la supuesta iluminación colimada. La medición realizada con la iluminación divergente fue corregida mediante algoritmo propuesto.

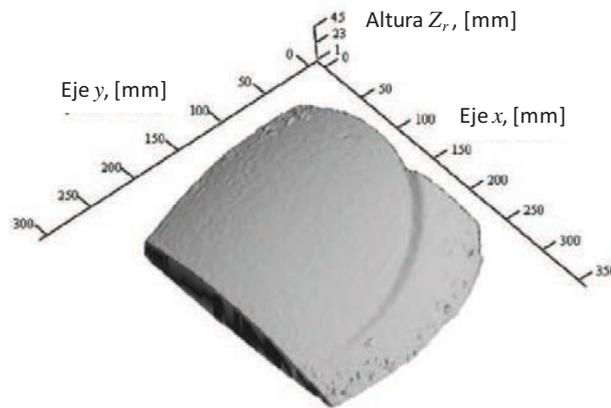


Figura 6.13 Resultado de la topografía obtenida.

6.3 Conclusiones

En este trabajo se desarrolló una rutina que progresivamente permite una aproximación al valor real de la topografía de la superficie del objeto mediante la corrección progresiva de los parámetros en cada punto de la superficie. En todos los casos se consideró la iluminación divergente para cada posición de las fuentes de iluminación. El algoritmo propuesto puede ser aplicado para calcular la topografía de objetos con formas irregulares y a cualquier tamaño.

Se obtuvo el error en la medición de la topografía cuando se utiliza el modelo de iluminación divergente e iluminación colimada en el cálculo del vector de sensibilidad, teniendo iluminación divergente en el sistema óptico. El algoritmo propuesto basado en el método de Gauss-Seidel se usa para encontrar la superficie del objeto corrigiendo los valores del vector de sensibilidad de tal modo que se reducen los errores en las mediciones de la topografía de la superficie del objeto en cada iteración. Se obtiene un error máximo del 14% entre la primera y tercera iteración. Este algoritmo es útil ya que proporciona un vector de sensibilidad que contempla la forma y que puede usarse para el análisis de la deformación en superficies irregulares. Si las fuentes de iluminación divergente se colocan suficientemente lejos de la superficie del objeto, las componentes e_y y e_z del vector de sensibilidad se aproximan a cero y los resultados de la topografía del objeto utilizando el algoritmo propuesto se aproximan a las mediciones que se obtendrían si se utilizara iluminación colimada alrededor de la región paraxial como se muestra

en la figura 6.8. En la misma figura también se observa que el error es menor al 1% si la distancia de la posición de las fuentes de iluminación con respecto al plano de referencia es mayor a 2.5 m.

Referencias

- [1] Y. Zou, H. Diao, X. Peng, and H. Tiziani, "Geometry for contouring by electronic speckle pattern interferometry based on shifting illumination beams", *Appl. Opt.* **31** (1992) 6616.
- [2] Ramón Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza-Santoyo, "Electronic speckle contouring", *J. Opt. Soc. Am.* **9** (1992).
- [3] Charles Joenathan, Berthold Pfister, H.J. Tiziani, "Countorning by electronic speckle pattern interferometry employing dual beam illumination", *Appl. Opt.* **29** (1990).
- [4] Amalia Martínez, R. Rodríguez-Vera, J.A. Rayas, H. J. Puga, "Error in the measurement due to the divergence of the object illumination wave front for in-plane interferometers", *Opt. Commun.* **223** (2003), 239-246.
- [5] Amalia Martinez, Raúl Cordero, J. A. Rayas, H. J. Puga, R. Rodríguez-Vera, "Uncertainty analysis of displacement measured by in-plane electronic speckle pattern inerferometry with sherical wave front", *Appl. Opt.* **44** (2005).
- [6] David I. Farrant, Jon N. Petzing, "Sensitivity errors in interferometric deformation metrology", *Appl. Opt.* **42** (2003).
- [7] Jorge Parra-Michel, Amalia Martínez, Marcelino Anguiano-Morales, J. A. Rayas, "Measuring object shape by using in-plane electronic speckle pattern interferometry with divergent illumination ", *Meas. Sci. Technol.* **21** (2010) 045303.
- [8] Kjell J. Gasvik, *Optical metrology*. John Wiley & Sons, London (2002)
- [9] Yeou-Yen Cheng, James Wyant, "Phase shifter calibration in phase- shifting interferometry", *Appl. Opt.* **24** (1985) 3049-3052.

-
- [10] Daniel Malacara, Manuel Servín, Zacarias Malacara, *interferogram analysis for optical testing*, 2nd ed., CRC Press, New York (2005)
- [11] Thomas Kreis, *Holographic interferometry, principles and methods*, Akademimie Verlag, Berlin (1996)
- [12] Qian Kemaο, Shu Fangjun, Wu Xiaoping, "Determination of the best phase step of the Carré algorithm in phase shifting interferometry", *Meas. Sci. Technol.* **11** (2000) 1220-1223.

CAPÍTULO 7: CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR MEDIANTE LA TÉCNICA DE MONTE CARLO PARA LA MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA Y DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO MEDIANTE ESPI

Introducción

La incertidumbre es, junto con la trazabilidad, uno de los conceptos metrologógicos fundamentales. Por otra parte, la incertidumbre y la precisión de un resultado analítico son términos muy relacionados entre sí. El término precisión está asociado a la proximidad de concordancia entre valores obtenidos por medio de múltiples mediciones de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones especificadas ^[1]. Mientras que la incertidumbre considera todas las fuentes posibles de error que intervienen en el resultado final de la medición. Pero la diferencia más importante se encuentra en el hecho que el concepto de incertidumbre está íntimamente ligado con el concepto de trazabilidad, y no así al de precisión, Ya que la trazabilidad de un resultado analítico no se podría establecer sin considerar la incertidumbre asociada a dicho resultado.

La guía ISO 3534-1 [ISO 1993], define incertidumbre como una estimación asociada al resultado de un ensayo que caracteriza el intervalo de valores dentro de los cuales se afirma que está el valor verdadero. Esta definición tiene poca aplicación práctica ya que *el valor verdadero* no puede conocerse. Esto ha hecho que el Vocabulario de Metrología Internacional, VIM [BIPM, 1993], evite el término *valor verdadero* en su nueva definición y defina la incertidumbre como un parámetro, asociado al resultado de una medida, que caracteriza el intervalo de valores que puede ser razonablemente atribuidos al mensurando ^[2]. En esta definición el mensurando indica: *la propiedad sujeta a medida*. El concepto de incertidumbre refleja una duda acerca de la veracidad del resultado obtenido una vez que se han evaluado todas las posibles fuentes de error y que se han aplicado las correcciones oportunas. Por lo tanto, la incertidumbre nos da una idea de la calidad del resultado ya que nos muestra un intervalo alrededor del valor estimado dentro del cual se encuentra el valor considerado como verdadero^[3].

En cualquier medición se debe determinar claramente el mensurando. Muchas veces la información del mensurando es adquirido a través de las lecturas de un instrumento de medición única. En este caso nos referiremos a una cantidad de medición directa. Sin embargo, la

información del mesurando puede obtenerse indirectamente a través de otras cantidades mensuradas cuyos valores pueden o no medirse directamente. En general, para estimar el valor del mesurando se debe establecer un modelo de medición adecuado que represente la cantidad de salida que se debe medir en función de las magnitudes, variables, mensurados o cantidades de entrada.

7.1 Ley de propagación de incertidumbres ^[3]

Si el modelo de medición es una función lineal o ligeramente no lineal es posible expresar la incertidumbre estándar de las cantidades de salida en términos de la incertidumbre estándar de las cantidades de entrada a través de la ley generalizada de la propagación de la incertidumbre GLPU (General Law of Propagation of Uncertainty). Si consideramos un vector de cantidades de entradas $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ asociado al vector de salida desconocido $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ mediante el modelo de medición $M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. La matriz de incertidumbres con dimensiones $n \times n$ es:

$$\mathbf{U}^2(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} U^2(p_1) & \dots & U(p_1, p_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U(p_n, p_1) & \dots & U^2(p_n) \end{bmatrix}, \quad [7.1]$$

donde los términos de la diagonal de la matriz son los cuadrados de la incertidumbre estándar de las cantidades de entrada y las demás términos son las incertidumbres mutuas. Estos últimos términos son cero si los elementos del vector \mathbf{p} no están correlacionados. La ley GLPU nos permite obtener la matriz de incertidumbres $\mathbf{U}^2(\mathbf{q})$ mediante la ecuación:

$$\mathbf{U}^2(\mathbf{q}) = [\mathbf{S}][\mathbf{U}^2(\mathbf{p})][\mathbf{S}]^T. \quad [7.2]$$

La matriz \mathbf{S} se define como $\mathbf{S} = -[\mathbf{S}(\mathbf{q})]^{-1}[\mathbf{S}(\mathbf{p})]$ donde:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial M_1}{\partial p_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_m}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial M_m}{\partial p_m} \end{bmatrix}, \quad [7.3a]$$

$$\mathbf{S}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial M_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial M_m}{\partial q_m} \end{bmatrix}. \quad [7.3b]$$

Se puede notar que para el caso de una sola cantidad de salida q , la ley GLPU se reduce a la ley de propagación de incertidumbres LPU (Law of Propagation of Uncertainty) y la formulación matricial es innecesaria.

Para evaluar la incertidumbre estándar de las mediciones de entrada se necesita considerar la manera en cómo la medición está hecha. Si las mediciones de entrada se repiten varias veces bajo las mismas condiciones, entonces la evaluación de la incertidumbre será de tipo A; por otro lado si las mediciones de entrada se realizan una sola vez a través de otros modelos matemáticos o son importados de otras fuentes la evaluación será de tipo B ^[4]. En muchos casos las evaluaciones de la incertidumbre de tipo B puede realizarse mediante la técnica de simulación de Monte Carlo con la función de densidad de probabilidad apropiada. En esta tesis se utilizó esta técnica para obtener las incertidumbres de las mediciones correspondientes a la topografía y al campo de desplazamiento en la dirección x donde todas las mediciones de entrada son del tipo B.

7.2 Utilización del método de Monte Carlo para el análisis de la incertidumbre ^[5]

El método de Monte Carlo es uno de los muchos métodos para el análisis de propagación de la incertidumbre, donde el objetivo es determinar cómo una variación aleatoria en la cantidad de entrada o error afecta a la sensibilidad, el rendimiento o la confiabilidad del sistema que se está modelando.

El método de Monte Carlo es clasificado como un método de muestreo, porque las cantidades de entradas se generan aleatoriamente a partir de una función de densidad de probabilidad (Probability Density Function: PDF) para simular el proceso de toma de muestras de una población real. Por lo tanto, tratamos de elegir una distribución de probabilidad para las entradas que más se acerque a los datos conocidos o que mejor representa las lecturas del instrumento de medición bajo las siguientes condiciones:

- El modelo de medición debe ser una función continua con respecto a las cantidades de entrada \mathbf{q} y para las cantidades de salida \mathbf{p} .
- Las PDF debe ser también continuas y monomodales de tal manera que el mejor estimado para p_n pueda asociarse fácilmente a la PDF.

Una vez establecido las PDF para cada cantidad de entrada, se realiza una simulación en base al modelo de medición: primero: se genera un valor aleatorio representativo para cada cantidad de entrada p_n de acuerdo a la PDF asignada. Por ejemplo, si el mejor estimado para una cantidad de entrada es 3.5 y se le asigna una PDF rectangular en el intervalo ± 2 , un número aleatorio comprendido en el intervalo $[3.3, 3.7]$ será utilizado para representar p_n . De acuerdo al modelo de medición se obtiene un vector con cantidades de salida \mathbf{q} . Tras repetir N veces ($N \geq 10000$) este procedimiento se puede obtener \mathbf{q}_N vectores de salida y se podrá observar el comportamiento de cómo las cantidades de entrada afectan a las cantidades de salida, es decir, nos muestra un intervalo en el cual se encuentra la cantidad de salida del mensurado. Los datos generados a partir de la simulación de Monte Carlo se pueden representar como distribuciones de probabilidad asociados al modelo de medición del mensurado.

7.3 Análisis teórico correspondiente a la evaluación de la incertidumbre

Tanto el vector de sensibilidad como diferencia de fase (mediciones de salida) son obtenidos indirectamente a través de mediciones de otras cantidades (mediciones de entrada) utilizando los modelos de medición apropiados. Es posible expresar la incertidumbre estándar de las mediciones

de salida en términos de la incertidumbre estándar de las mediciones de entrada a través de la ley generalizada de la propagación de incertidumbres, GLPU. La figura 7.1 muestra un esquema óptico para la medición de la topografía y de los campos de deformación en la dirección de x para una probeta con forma irregular.

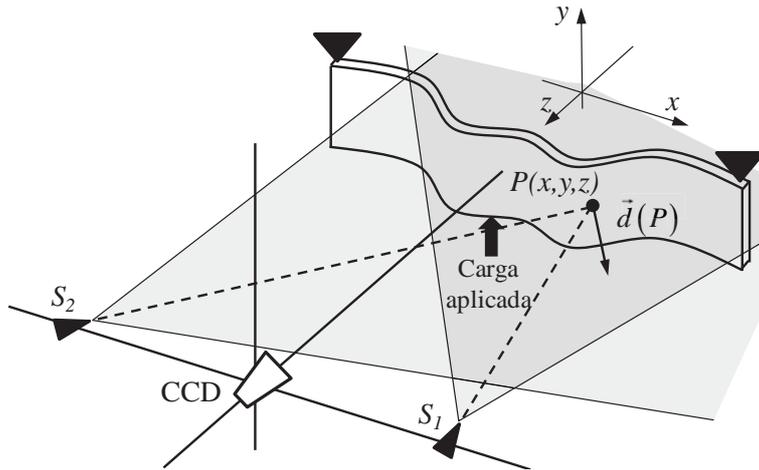


Figura 7.1. Esquema óptico para la medición de la topografía y de los campos de deformación en la dirección de x para una probeta con forma irregular.

7.3.1 Cálculo de la incertidumbre estándar para la diferencia de fase^{[6], [7]}

La fase envuelta puede ser obtenida mediante el algoritmo de Carré de cuatro pasos mediante la ecuación:

$$\tan^2 \psi = \frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)} \quad [7.4]$$

La incertidumbre asociada a la medición de fase ψ es el resultado combinado de los errores de calibración del dispositivo piezoeléctrico ε_ϕ , perturbaciones ambientales ε_e que desplazan la posición de las franjas de un interferograma y el ruido óptico ε_n . La influencia de estos errores afectan los valores de la intensidad de un interferograma I_n en la forma:

$$I_n(x, y) = A + B \cos \left(\psi + \frac{n}{4} (2\pi + \varepsilon_\phi) + \varepsilon_e \right) + \varepsilon_n, \quad [7.5]$$

donde $n=1,2,3,4$ y A, B son las intensidades de los interferogramas. La dispersión de las mediciones de salida ψ está asociada a una función de distribución de probabilidad PDF (Probability Distribution Function, por sus siglas en inglés) para cada medición de entradas expresadas mediante el vector $\mathbf{P} = (\phi, \varepsilon_\phi, \varepsilon_e, \varepsilon_n)^T$ a través del modelo de medición $\psi_e = M(\mathbf{P})$. Un programa de cómputo genera números aleatorios de acuerdo a la distribución PDF asignada para los valores $(\varepsilon_\phi, \varepsilon_e, \varepsilon_n)$ de tal modo que se obtiene un valor de salida ψ_1 para la fase envuelta. Inmediatamente después se emplea un algoritmo de desenvolvimiento de fase y se guarda la fase desenuelta. Este proceso se repite $N = 1 \times 10^4$ veces hasta conseguir un vector $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N)$ cuyos elementos corresponden a los mapas de fase desenuelta. La frecuencia de distribución del vector nos permite identificar el PDF de la fase ψ . La desviación estándar de la fase de los elementos del vector $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N)$ está asociado a la incertidumbre estándar $u(\psi_e)$ (donde $\psi = q$) por las relaciones:

$$q_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad [7.6]$$

$$u(q_e) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (q_i - q_e)^2}. \quad [7.7]$$

Recordemos que los valores de la fase ψ están en un intervalo continuo. Los errores $(\varepsilon_\phi, \varepsilon_e, \varepsilon_n)$ asociados a la intensidad de los interferogramas I_n de la ecuación 7.5 son de naturaleza tal que nos permiten asignar una PDF de forma rectangular a cada una. El error máximo estimado para el dispositivo piezoeléctrico es $\varepsilon_\phi = (\pi/10)$ rad en el intervalo $[-(\pi/10), (\pi/10)]$ rad. Las perturbaciones ambientales y vibraciones ε_e que provocan que intensidad del interferograma oscile levemente al observarse la fase en el rango $[-(\pi/20), (\pi/20)]$ rad. Por último, la intensidad de cada pixel puede variar en el intervalo de $[-10, 10]$ en la escala de grises de 8 bits.

7.3.2 Cálculo de la incertidumbre estándar para las componentes del vector de sensibilidad^[8]

El modelo de medición se basa en la ecuación 6.3 considerando que solamente se está usando la componente e_x del vector de sensibilidad para medir el campo de desplazamiento $u(x, y)$. El modelo de medición se expresa como $e_{xe} = M(Q)$, en la forma:

$$e_{xe} = \left[\frac{(x - x_{s1} + err_{xs1})}{\sqrt{(x - x_{s1} + err_{xs1})^2 + (y - y_{s1} + err_{ys1})^2 + (Z_r - z_{s1} + \varepsilon)^2}} - \frac{(x - x_{s2} + err_{xs2})}{\sqrt{(x - x_{s2} + err_{xs2})^2 + (y - y_{s2} + err_{ys2})^2 + (Z_r - z_{s2} + \varepsilon)^2}} \right] \frac{2\pi}{\lambda}, \quad [7.8]$$

donde la cantidad de entrada Q ésta expresada mediante el vector $\mathbf{Q} = (x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}, x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}, x, y, Z_r)^T$. La medición de las coordenadas de las fuentes de iluminación se realizó mediante un flexómetro que tiene una resolución de 1 mm , por tal motivo se consideró que el máximo error en las mediciones de las coordenadas de las fuentes de iluminación es de $err = \pm 1 \text{ mm}$. Las cantidades de entrada x, y están asociados con el punto P sobre la superficie del espécimen, las cantidades Z_r y ε se obtienen a partir del algoritmo propuesto en el capítulo 6. Se escogieron valores al azar de acuerdo a una función de distribución de probabilidad rectangular para el rango de err . Considerando que el error máximo razonable asociado a la longitud de onda λ deberá ser utilizado es de aproximadamente 0.1 nm ^[8], se ha decidido despreciar la contribución de la incertidumbre asociado a λ en la evaluación de la incertidumbre del vector de sensibilidad. Posteriormente, usando el método de Monte Carlo se estimó el promedio de la componente del vector de sensibilidad e_{xe} asociado a la incertidumbre estándar $u(e_{er})$ mediante las ecuaciones 7.6 y 7.7 donde ahora $e_{xe} = q$.

7.3.3 Cálculo de la incertidumbre estándar para la topografía del espécimen

La forma de la superficie del espécimen está representada mediante las coordenadas (x, y, Z_r) donde la incertidumbre estándar de la coordenada Z_r está en función de tres cantidades de entrada: la fase para la forma $\varphi(x, y)$, la componente del vector de sensibilidad e_x y la rotación $\Delta\theta$ de la superficie del espécimen alrededor del eje y . De acuerdo a las ecuaciones 7.5 y 7.8, las cantidades de entrada \mathbf{Q} corresponden a los datos de la componente e_{xe} del vector de sensibilidad y de la fase asociada a la forma del objeto \mathbf{P} . El error de ángulo de rotación fue estimado en base a la repetitividad de la medición. El error estimado para la rotación es $err_\theta = \pm 50 \times 10^{-6}$ rad también con la función de distribución de probabilidad rectangular. El vector de cantidades de entrada para expresar la incertidumbre estándar debido a la rotación de la superficie del espécimen es $\mathbf{R} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \Delta\theta + err_\theta)^T$ a través del modelo de medición $Z_{re} = M(\mathbf{R})$ definido como:

$$Z_{re} = \frac{\varphi_e}{e_{xe}} \frac{2}{(\Delta\theta + err_\theta)}. \quad [7.9]$$

Usando nuevamente la técnica de Monte Carlo, la desviación estándar de la coordenada Z_r de la superficie del espécimen está asociada a la incertidumbre estándar $u(Z_{re})$ por las ecuaciones 7.6 y 7.7 con $Z_{re} = q$.

7.3.4 Cálculo de la incertidumbre estándar para el campo desplazamiento $u(x, y)$

La componente del incertidumbre estándar para el campo de desplazamientos $u(x, y)$ se obtiene a través del vector $\mathbf{S} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})^T$ donde las cantidades de entrada \mathbf{P} y \mathbf{Q} se obtienen previamente de acuerdo a lo descrito en las secciones 7.3.1 y 7.3.2. Utilizando el modelo de medición $u_{le} = M(\mathbf{S})$, la incertidumbre estándar asociado al desplazamiento se define como:

$$u_{le} = \frac{\phi_{xe}}{e_{xe}}. \quad [7.10]$$

Las ecuaciones 7.6 y 7.7 se utilizarán nuevamente con $u_{le} = q$ para calcular la incertidumbre estándar asociado al desplazamiento $u(u_{le})$.

7.4 Parte experimental

El objeto de prueba consiste en una probeta de acero de forma irregular como la mostrada en la figura 7.2. El procedimiento experimental para la obtención de la forma es similar a la descrita en la sección 6.3. Una vez obtenida la topografía se procede a aplicar una carga mecánica para deformar la muestra. El arreglo óptico utilizado corresponde a un sistema con sensibilidad en plano en ambos casos. Se presentan los resultados para la incertidumbre en las mediciones realizadas.

7.4.1 Evaluación de la topografía

El diagrama del arreglo óptico usado corresponde a la mostrada en la figura 7.1. La posición de las fuentes de iluminación fueron $S_1(270,0,569)$ y $S_2(-269,0,570)$ donde las unidades de medición están en milímetros. Una fuente de iluminación láser con una longitud de onda de 532 nm se utilizó para iluminar la superficie del espécimen mostrada en la figura 7.2. El espécimen fue montado en una base de rotación al que incorpora un micrómetro angular. Un instrumento virtual creado en el software LabView® fue utilizado para el procesamiento digital de las imágenes y para el control del dispositivo piezoeléctrico utilizado para la técnica de corrimiento de fase.

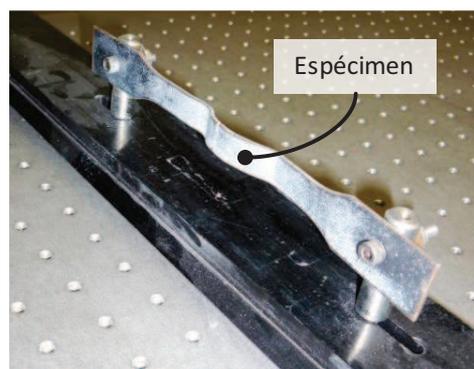


Figura 7.2 Probeta de acero con forma irregular.

Se observa un patrón de franjas asociado a la forma de la superficie, el cual se obtiene mediante la diferencia de las imágenes (de 640×480 Px) tomadas antes y después de la rotación del objeto. Una rotación de $\Delta\theta = 349.97 \times 10^{-6}$ rad fue suficiente para obtener el patrón de interferencia. Utilizando la técnica de corrimiento de fase, se obtiene la fase del patrón de franjas. En este caso se utilizó el algoritmo de Carré con cuatro pasos. La figura 7.3 muestra el patrón de interferencia asociado a la topografía del espécimen con su correspondiente fase envuelta en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La figura 7.4 muestra la fase desenvuelta donde se muestra una línea que se usa de referencia para propósitos de análisis. La forma del objeto y la componente e_x del vector de sensibilidad para el sistema óptico utilizado son obtenidas mediante el algoritmo propuesto en el capítulo 6. Se utilizó una tolerancia aceptable para Z_r de $\varepsilon = 0.0001$ mm.

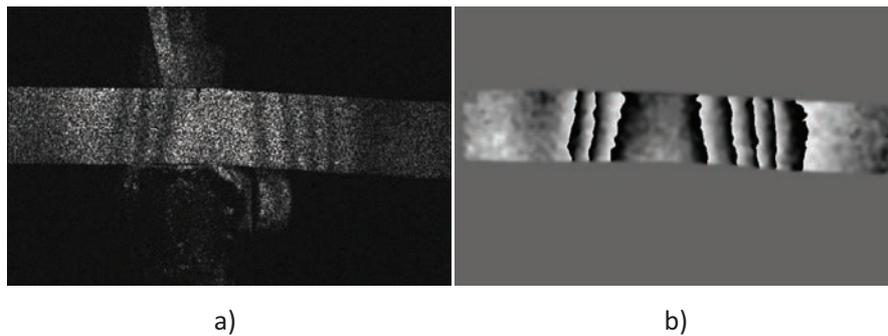


Figura 7.3 a) Interferograma asociado a la topografía de la superficie. b) Fase envuelta correspondiente al interferograma a).

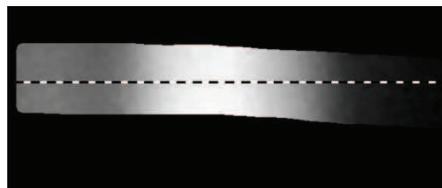


Figura 7.4 Fase desenvuelta de la figura 7.3b.

Los datos de entrada del algoritmo para la obtención de la topografía del objeto son: la fase desenvuelta φ asociado a la forma del objeto, las coordenadas de las fuentes de iluminación S_1 y

S_2 , la rotación de la superficie del espécimen $\Delta\theta$, la longitud de onda λ de la iluminación láser utilizado y un valor de tolerancia aceptable ε .

La figura 7.5a muestra la evolución de la componente e_x del vector de sensibilidad y la figura 7.5b muestra el efecto del vector de sensibilidad sobre la forma del objeto Z_r obtenido a lo largo de la línea de referencia de la figura 7.4 cuando se aplica el algoritmo propuesto para las tres primeras y onceava iteraciones. Se puede observar que el algoritmo es autoconsistente y que el resultado converge rápidamente en unas cuantas iteraciones.

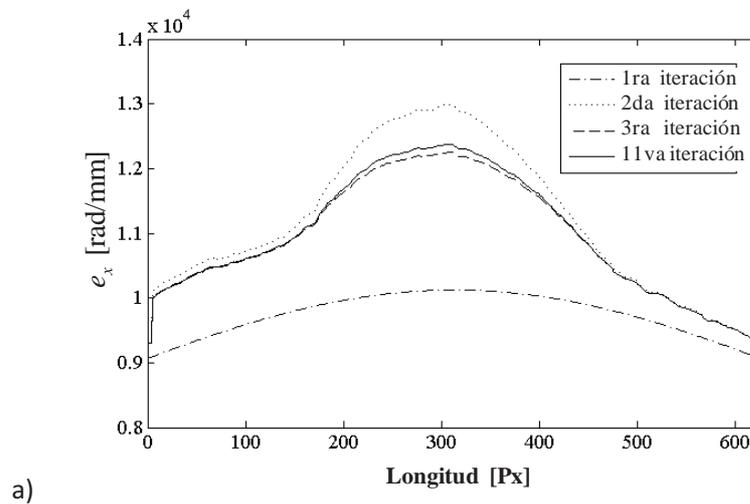


Figura 7.5 Resultados del algoritmo propuesto para a) la componente del vector de sensibilidad e_x y b) el efecto en la forma del objeto Z_r a lo largo de la línea de referencia.

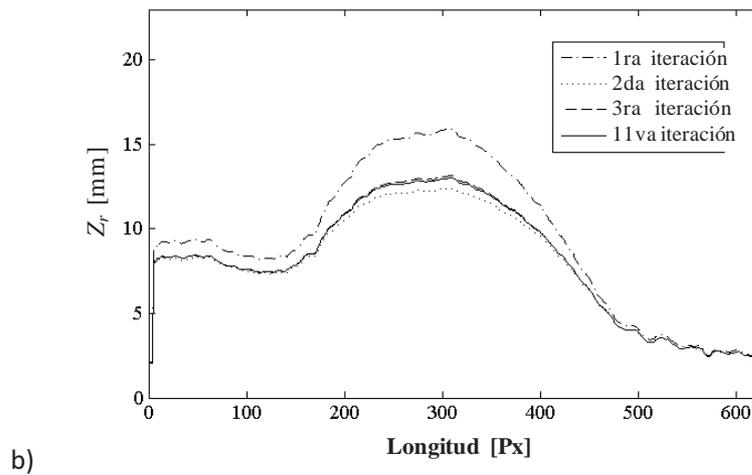


Figura 7.5 (Continuación)

7.4.2 Obtención del campo de desplazamiento $u(x, y)$

La medición de la deformación en la dirección x se realiza mediante el mismo sistema óptico utilizado en la evaluación de la topografía. Las cargas mecánicas fueron aplicadas mediante tornillos de presión sobre el espécimen para producir la deformación. El interferograma se obtiene entonces substrayendo las imágenes capturadas por la cámara donde la primera imagen se usa como referencia (espécimen libre de carga) y de esta se van restando las imágenes subsecuentes correspondientes a imágenes del objeto donde se le ha aplicado la carga mecánica. Nuevamente el algoritmo de Carré y la técnica de corrimiento de fase son empleados del mismo modo. El interferograma, la fase envuelta y la fase desenvuelta asociada a la deformación del espécimen se pueden observar las figuras 7.6 y 7.7 respectivamente. También se utiliza una línea en la misma posición para propósitos de análisis. Para reducir el ruido causado por el efecto del moteado, en todos los casos se utilizó un filtro pasa-bajos basado en un filtro de convolución con un kernel Gaussiano antes de utilizar el algoritmo de Carré.

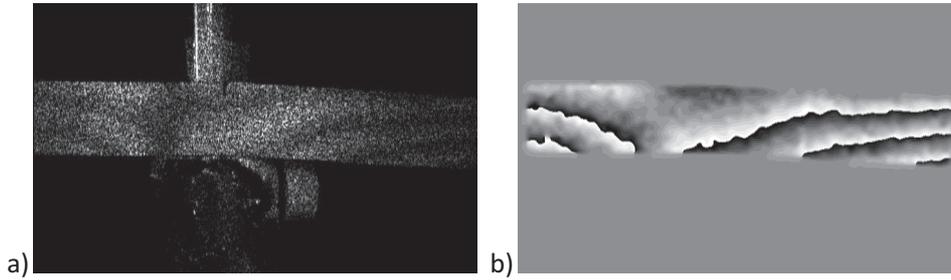


Figura 7.6 a) Interferograma asociado a la deformación de la superficie del espécimen y b) su correspondiente fase envuelta.

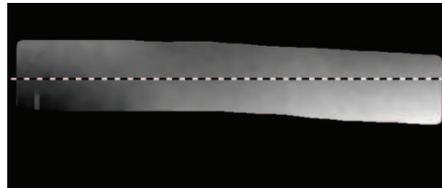


Figura 7.7 Fase desenvuelta asociada a la imagen mostrada en la figura 7.4 b).

La figura 7.8 muestra la medición del desplazamiento en la dirección x a lo largo de la línea de análisis sobre la superficie del espécimen cuando se utiliza el algoritmo propuesto. La línea de la primera iteración supone una topografía del objeto de $z = 0$ en el cálculo del vector de sensibilidad. Se puede observar una gran diferencia en las mediciones del desplazamiento cuando la componente e_x del vector de sensibilidad se corrige mediante el algoritmo propuesto entre la primera y la onceava iteración. En la misma figura y considerando las condiciones de carga del espécimen, la gráfica se puede dividir en tres regiones: una deformación negativa en el intervalo entre 0 y 200 píxeles aproximadamente que puede ser interpretado como un desplazamiento hacia la izquierda. Una deformación positiva entre el intervalo 350 y 626 píxeles aproximadamente interpretado como un desplazamiento hacia la derecha, y por último un intervalo central donde casi no se observa desplazamientos.

En la figura 7.9 se muestra el error entre la primera y la última iteración (onceava) para la topografía Z_r , el campo de desplazamiento u y la componente e_x del vector de sensibilidad. Los errores máximos obtenidos corresponden a: 22.6% para la componente e_x del vector de sensibilidad, 18.2% para la forma del objeto Z_r y 10% para el campo de desplazamiento u . Estos

errores se deben al valor evaluado en la iteración correspondiente de la topografía. Conforme el valor de ésta se aproxima a la que consideramos verdadera, el error en el cálculo del vector de sensibilidad disminuirá.

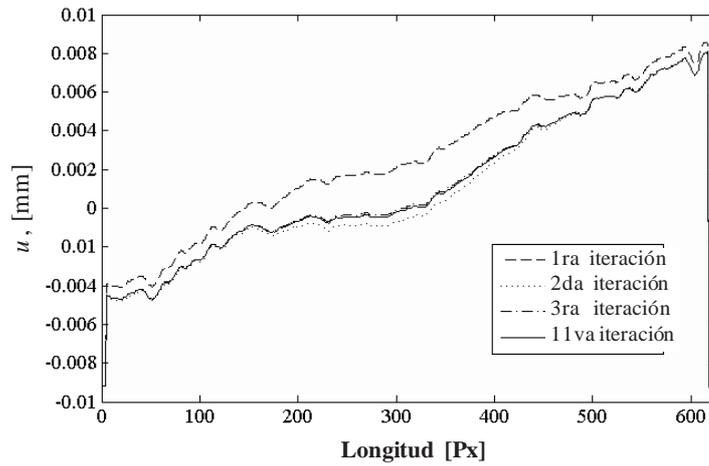


Figura 7.8 Medición del desplazamiento en la dirección x de la superficie del espécimen cuando se utiliza el algoritmo propuesto.

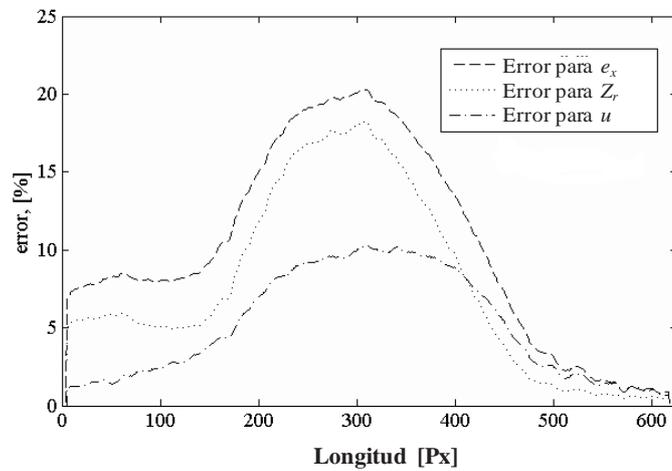


Figura 7.9 Error entre la primera y última iteración para la forma del objeto Z_r , el desplazamiento u y la componente e_x del vector de sensibilidad.

7.4.3 Evaluación de la incertidumbre correspondiente a la medición de la forma y de la deformación

Se procede ahora a la evaluación de la incertidumbre de las mediciones de la topografía y del campo de deformación mediante la técnica de Monte Carlo. Esta técnica genera un vector de salida de mensurados a partir de cantidades de entrada generadas aleatoriamente en base a los modelos de medición. Este proceso requiere que se repita suficiente veces, en este caso se utilizó $N = 1 \times 10^4$ veces. La subrutina del algoritmo de Monte Carlo se realizó en el software MatLab®. La figura 7.10 muestra la incertidumbre estándar para la fase $U(\varphi_e)$ asociada a la forma del objeto como se indica en la sección 7.3.1.

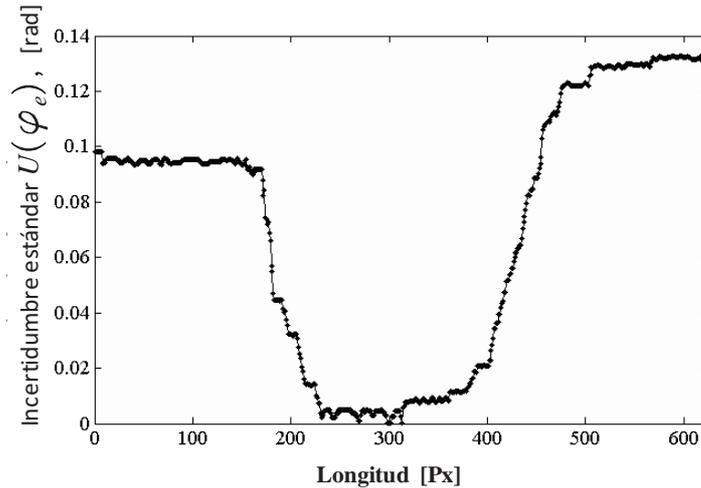


Figura 7.10 Incertidumbre estándar para la fase asociado a la forma $U(\varphi_e)$.

De la misma manera, las incertidumbres estándar de las mediciones de la componente del vector de sensibilidad $U(e_{ex})$ y de la forma del objeto $U(Z_{re})$ se muestran en las figuras 7.11 y 7.12 respectivamente. La incertidumbre estándar calculada para e_x son del mismo orden a los resultados obtenidos por Amalia Martínez *et. al.*^[8], mientras que la incertidumbre estándar la forma del objeto Z_r está estrechamente asociada a $(\Delta\theta + err_\theta)$.

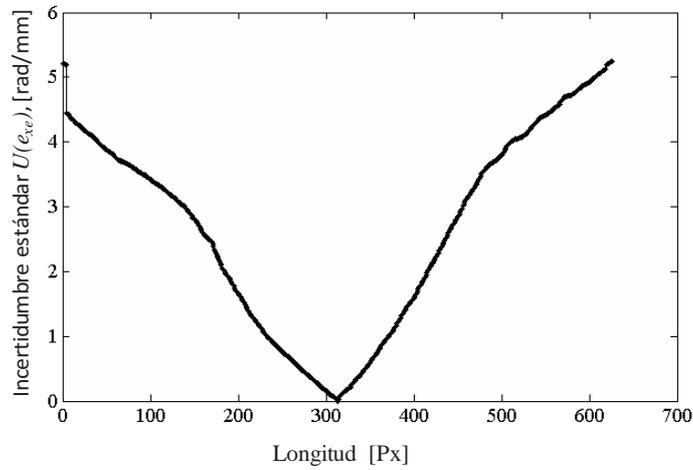


Figura 7.11 Incertidumbre estándar $U(e_{xe})$ para la componente del vector de sensibilidad e_x .

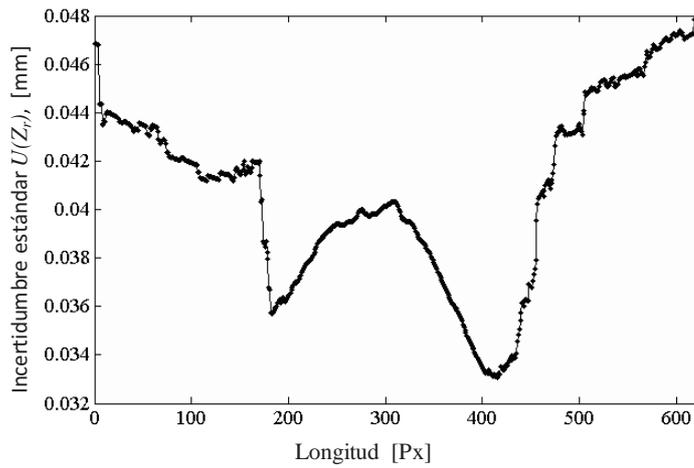


Figura 7.12 Incertidumbre estándar $U(Z_{re})$ para la forma Z_r .

La figura 7.13 muestra la incertidumbre estándar de la fase asociada a los desplazamientos $U(\Delta\phi_e)$ debido a la carga mecánica aplicada. Podemos observar que la incertidumbre de la fase asociada a la topografía es aproximadamente cinco veces mayor que la fase asociada al campo de desplazamiento. Por último, la figura 7.14 muestra la incertidumbre estándar para el campo de desplazamiento $U(u_{le})$.

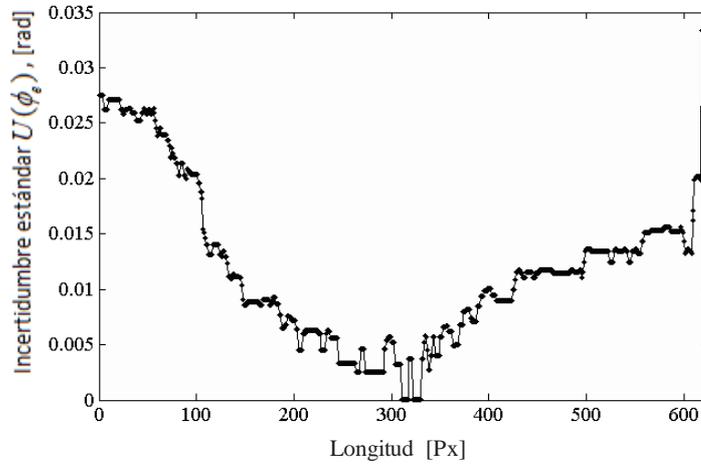


Figura 7.13 Incertidumbre estándar para la fase asociada al campo de desplazamiento u , $U(\phi_e)$.

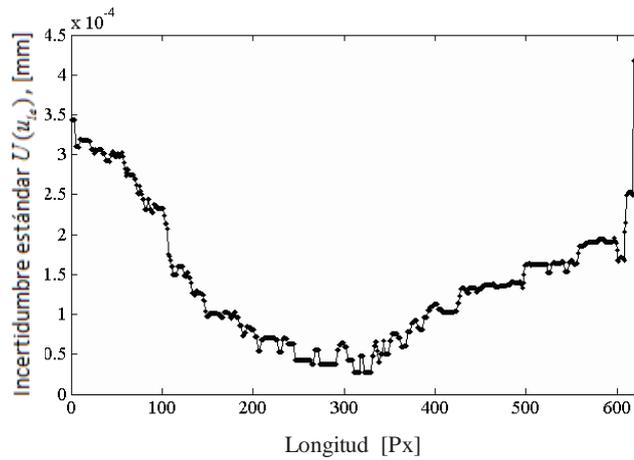


Figura 7.14 Incertidumbre estándar para el campo de desplazamiento $U(u_x)$.

Como un ejemplo para la interpretación de los resultados, de las figuras 7.5 y 7.12 podemos observar que en la posición correspondiente a 300 Px de la imagen, tenemos una medición para $Z_r = 12.5 \pm 0.04 \text{ mm}$ mientras que en la posición correspondiente a 150 Px, tenemos una medición para $Z_r = 7.5 \pm 0.012 \text{ mm}$. De las figuras 7.8 y 7.14 podemos medir un desplazamiento en la dirección x de $u = 0.0025 \pm 0.00004 \text{ mm}$ en la posición de 300 Px, mientras que para la posición de 150 Px el desplazamiento es de $u = 0.0015 \pm 0.00010 \text{ mm}$.

Referencias

-
- [1] ISO/IEC 17025:2005, *General requirements for the competence of testing and calibration laboratories*. ISO standards, (2005)
 - [2] International Organization for Standardization, *“Evaluation of measurement data, Guide to the expression of uncertainty in measurement”*, International Organization for Standardization, Geneva, (1993)
 - [3] Ignacio Lira, *“Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance”*, *Meas. Sci. Technol.* **13** (2002) 1502.
 - [4] JCGM 100:2008, *“Evaluation of measurement data-Guide to the expression of uncertainty in measurement”*, GUM 1995 with minor corrections, (2008)
 - [5] JCGM 101:2008, *Evaluation of measurement data— Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”-Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, GUM 1995 with minor corrections, (2008)
 - [6] Raul R. Cordero, Jerome Molimard, Amalia Martínez, Fernando Labbe, *“Uncertainty analysis of temporal phase-stepping algorithms for interferometry”*, *Opt. Comm.* **275** (2007) 144-155.
 - [7] Pedro Americo Almeida, Magalhaes Jr., Perrin Smith Neto, Clovis Sperb de Barcellos, *“Generalizacion of the carré algorithm”*, *Latin American Journal of Solids and Structures.* **6** (2009) 213- 227.
 - [8] Amalia Martínez, Raúl Cordero, Juan Antonio Rayas, Héctor José Puga, Ramón Rodríguez-Vera, *“Uncertainty analysis of displacements measured by in-plane electronic speckle-pattern interferometry with spherical wave fronts”*, *Appl. Opt.* **44** (2005) 1141-1149 .

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES GENERALES Y TRABAJO FUTURO

Indudablemente, la técnica de interferometría electrónica del moteado es una herramienta útil para la medición de los campos de deformación y desplazamiento así como para la medición de topografía. La técnica presentada se basa en un sistema con sensibilidad en plano, así como el uso de iluminación divergente.

Parte del desarrollo de esta tesis permite demostrar que la técnica de interferometría electrónica del moteado puede corroborar las soluciones basadas en las funciones de Airy para las ecuaciones de equilibrio de estado de esfuerzos biaxiales. Los campos de desplazamiento propuestos por las funciones de Airy son modelos matemáticos que tratan de explicar cómo los campos de esfuerzo se distribuyen sobre un elemento mecánico. Modelar matemáticamente funciones de Airy resultaría extremadamente difícil para elementos mecánicos de topografía irregular. La técnica ESPI nos permite medir los campos de deformación y desplazamientos de ese elemento mecánico y por lo tanto obtener los campos de esfuerzos directamente en ese caso. Lo anterior representa una enorme ventaja para el diseño y el análisis de esfuerzos mecánicos, puesto que la técnica ESPI no está restringida a la forma de los objetos de prueba.

Dado el uso de la técnica de ESPI, la cual está basada en el moteado (ruido), éste afecta la calidad de la fase obtenida y en consecuencia se introducen errores en las mediciones. El uso de filtros pasa-bajos para el procesamiento de las imágenes de los interferogramas nos permite reducir el ruido asociado al efecto de moteado. Se hizo una comparación entre distintos tipos de filtros, observándose en este caso, que el filtro por convolución con un kernel con perfil gaussiano es el filtro que mejor reduce el ruido.

Para la evaluación de la topografía se hace uso de iluminación dual divergente donde se introduce un pequeño giro al objeto de prueba. El estudio consiste en la colocación simétrica del par de fuentes en diferentes posiciones con respecto al plano de referencia en $z = 0$. Las posiciones aproximadas corresponden a $z = 612,768$ y 1180 mm respectivamente. Las mediciones de topografía consideran que el vector de sensibilidad es constante es decir que se tiene iluminación colimada, lo cual no corresponde, pues la iluminación es divergente. Cuando la posición de las fuentes de iluminación divergente corresponde a 612 mm, el cálculo del vector de sensibilidad debe considerar la topografía del objeto ya que si no se considera, se obtiene un error máximo del

20% en la medición de la topografía con respecto a las mediciones obtenidas por el CMM. Lo que es lo mismo, el uso del vector de sensibilidad constante no es recomendable para el cálculo de la topografía.

En esta tesis se propuso un algoritmo iterativo que nos permite evaluar progresivamente la topografía del objeto la cual es considerada en la evaluación de la componente e_x del vector de sensibilidad para el caso de iluminación divergente. Se observa que el algoritmo propuesto basado en la técnica de Gauss-Seidel en la solución de sistemas de ecuaciones lineales es autoconsistente, es decir, que se pueda obtener una solución estable en unas cuantas iteraciones. La anterior ofrece la ventaja de ocupar pocos recursos computacionales. La obtención de la forma superficial y de los campos de deformación se realiza mediante el empleo del mismo sistema óptico con sensibilidad en plano sin ninguna modificación adicional.

Debido a las perturbaciones físicas que puedan afectar al sistema óptico, el resultado de las mediciones puede verse afectado. La incertidumbre en las mediciones ópticas se debe principalmente a las vibraciones del sistema óptico, al ruido en la señal de video, a las lecturas de los instrumentos de medición y errores atribuibles a la manipulación de los componentes del sistema. En este trabajo se muestra como la técnica de Monte Carlo es utilizado para el análisis de la incertidumbre estándar en mediciones realizadas por la técnica de interferometría electrónica del moteado. Por ejemplo, en este trabajo se encontró que la incertidumbre estándar máxima para la medición de la topografía de un objeto con forma irregular corresponde a 0.04 mm para un punto cuya altura es de 12.5 mm. Mientras que la incertidumbre estándar máxima para las mediciones de deformación fue de 4×10^{-5} mm para una medición de desplazamiento u de 0.0025 mm.

Como trabajo futuro se propone probar que el algoritmo propuesto puede mejorar significativamente las mediciones de los campos de deformación y de los factores de concentración de esfuerzo en elementos mecánicos con forma irregular o en elemento unidos mediante soldaduras cuando se utilice la técnica ESPI. Adicionalmente se deberá hacer un análisis de la incertidumbre de las mediciones.

Debido a que la deformación en algunos elementos mecánicos ocurre en dirección radial, se propone desarrollar un interferómetro con sensibilidad en plano en dirección radial mediante el

uso de lentes cónicos (axicones). Esto es porque la iluminación dual solo favorece la medición en un solo sentido y se requeriría de dos sistemas de iluminación dual para poder obtener mediciones en la dirección radial.

El trabajo realizado en la presente tesis fue presentado en:

Artículos publicados con riguroso arbitraje:

- **Jorge Parra-Michel**, Amalia Martínez, Marcelino Anguiano-Morales and J. A. Rayas, *“Measuring object shape by using in-plane electronic speckle pattern interferometry with divergent illumination”*, Meas. Sci. Technol. **21** (2010), 045303.
- **J. Parra-Michel**, Amalia Martínez y J. A. Rayas, *“Computation of crack tip elastic stress intensity factor in modes I by in-plane electronic speckle pattern interferometry”*, Rev. Mex. Fís. **56** (2010), 394–400.

Participación en Congresos:

- **Jorge Parra**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas; *“Cálculo de factor de concentración de esfuerzos en uniones metálicas soldadas por interferometría electrónica del moteado con sensibilidad en plano”*. IV Encuentro Participación de la mujer en la ciencia. (2007), León, Guanajuato.
- **Jorge Parra**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas; *“Filtraje y diferenciación de interferogramas en el análisis de la deformación mecánica experimental obtenidas por interferometría electrónica del moteado”*. V Encuentro Participación de la mujer en la ciencia. (2008), León, Guanajuato.
- **Jorge Parra**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas, Marcelino Anguiano; *“Utilización de la técnica ESPI con sensibilidad en plano en la obtención de la deformación uni-axial en uniones metálicas soldadas”*. XIX Congreso Nacional de Física, (2006), San Luis Potosí, S. L. P.
- **Jorge Parra**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas, Marcelino Anguiano; *“Análisis de la evolución de la deformación y cálculo de factor de intensidad de esfuerzos en uniones metálicas soldadas por interferometría electrónica del moteado con sensibilidad en plano”*.

Congreso Nacional de Física (2007), Boca del Río, Veracruz.

- **Jorge Parra**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas; *“Utilización de la interferometría electrónica del moteado en el cálculo del factor de intensidad de esfuerzo en el modo I en la deformación elástica en fracturas”*. Congreso Nacional de Física (2008), Zacatecas, Zacatecas.
- **Jorge Parra-Michel**, Amalia Martínez, Juan Antonio Rayas; *“Computation of crack tip elastic strain intensity factor in mode I by electronic speckle pattern interferometry”*. SPIE, optics + photonics conferences (2009), San Diego, California, USA.
- Amalia Martínez, **Jorge Parra-Michel**, M. Anguiano, J. A. Rayas; *“Topometry by using in-plane electronic speckle pattern interferometry with divergent illumination”*. 7th Ibero-American Conference on Optics, 10th and Latin-American Meeting on Optics, Lasers and Applications (2010), Lima, Perú.