



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

TESIS

Detección de planetas extra-solares con un interferómetro de desplazamiento rotacional: condiciones

Presenta:

Físico Maximiliano Galán González

Asesor:

Dra. Marija Strojnik

Como requisito para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Óptica)

León, Guanajuato, México, Agosto 2005

CONTENIDO

I. Introducción.

II. Búsqueda de planetas extra-solares

2.1. Introducción

2.2. Detección de planetas extra-solares por métodos indirectos

2.2.1. Sincronización de Pulsar

2.2.2. Medición de la velocidad radial

2.2.3. Astrometría

2.3.3. Detección por tránsito

2.3.4. Microlensing

2.3. Detección de planetas extra-solares por métodos directos

2.3.1. Coronógrafos estelares

2.4. Conclusiones

III. Principios básicos de interferometría e interferómetros

3.1. Introducción

3.2. Principios básicos de interferometría

3.3. Interferómetros

3.3.1. Interferómetro Mach-Zehnder

3.3.2. Interferómetro de desplazamiento rotacional

3.4. Luz parcialmente coherente

3.4.1. Teorema de van Cittert-Zernike

3.5. Conclusiones

IV. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un interferómetro de desplazamiento rotacional

4.1. Introducción

4.2. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDRI considerando que hay diferencia de camino óptico entre los brazos del interferómetro

4.2.1. Introducción

4.2.2. Obtención de la expresión analítica

4.2.3. Cancelación de la luz de la estrella

4.2.4. Simetría de rotación axial

4.2.5. Visibilidad del planeta como función de la DCO

4.2.6. Conclusiones

4.3. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDR considerando que la estrella tiene un pequeño ángulo de inclinación

4.3.1. Introducción

4.3.2. Obtención de la expresión analítica

4.3.3. Dependencia de la visibilidad respecto del ángulo de inclinación

4.3.4. Conclusiones

4.4. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDR considerando que la estrella tiene un pequeño ángulo de inclinación y que hay DCO

4.4.1. Introducción.

4.4.2. Obtención de la expresión general

4.4.3. Dependencia de la visibilidad respecto del ángulo de inclinación y de la DCO

4.4.4. Conclusiones

Apéndice I. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función de la DCO

Apéndice II. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función del ángulo de inclinación de la estrella

Apéndice III. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función del ángulo de inclinación de la estrella y de la DCO

Apéndice IV. Glosario

V. Conclusiones

Referencias

A mi mama, quien ha sido un ejemplo de superación y perseverancia

AGRADECIMIENTOS

A CONACYT y al CIO. A todo el personal del CIO y en especial a Guillermina Muñiz. A todos los profesores que me impartieron clase. A los miembros del grupo de infrarrojo y en especial al Dr. Gonzalo Páez y mi asesora, la Dra. Marija Strojnik.

Al CETI por permitirme estudiar la maestría.

A mis amigos de GDL y a mis nuevos amigos de León. A todos los estudiantes, a mis compañeros y en especial a mi grupo de amigos: Toño, Enoch, Camille, Mariana y Toledo. A Rosy y a mi familia.

I

Introducción

Detectar planetas parecidos a la Tierra fuera de nuestro sistema solar es uno de los grandes retos de nuestros tiempos. En los últimos años se han implementado una gran variedad de dispositivos ópticos, que han permitido detectar el efecto generado por planetas jovianos sobre sus estrellas huésped. Sin embargo, aún no se han logrado obtener imágenes directas de ningún planeta fuera de nuestro sistema solar. Básicamente existen dos tipos de arreglos con los cuales se prevé poder observar imágenes directas de planetas extra-solares: los coronógrafos y los interferómetros.

En el presente trabajo evaluamos la factibilidad de utilizar un interferómetro de desplazamiento rotacional para detectar planetas extra-solares. Primeramente, en el capítulo II, mostramos el estado del arte en lo que respecta a búsqueda de planetas extra-solares. Describimos brevemente las principales técnicas de detección de planetas extra-solares y los resultados que se han obtenido hasta el momento. En el capítulo III enunciamos los principios fundamentales de la teoría de interferencia y describimos el funcionamiento del interferómetro de desplazamiento rotacional.

En el capítulo IV atacamos el problema que nos compete. Iniciamos describiendo el problema, y obtenemos la ecuación analítica de la distribución de intensidad de un sistema estrella-planeta observado mediante un interferómetro de desplazamiento rotacional. Establecemos el patrón de franjas que generaría el sistema estrella-planeta, cuando la estrella se encuentra sobre el eje del telescopio y cuando no lo está. También consideramos el efecto que genera la diferencia de fase debida a la diferencia de caminos ópticos entre los brazos del interferómetro. Mediante los patrones de interferencia calculamos la visibilidad de la señal del planeta en función del ángulo de inclinación del telescopio (respecto de la estrella), y respecto de la diferencia de camino óptico que hay entre los brazos del interferómetro. Finalmente, en el capítulo V, discutimos los resultados.

II

Búsqueda de planetas extra-solares

2.1. Introducción

Uno de los grandes enigmas que queda por resolver es saber si hay vida en otros planetas. Actualmente se están realizando grandes esfuerzos para resolver el misterio. Por un lado están los vehículos y sondas espaciales (equipados con espectrógrafos e instrumentos ópticos sofisticados) enviados a registrar Marte y, en general, todo nuestro sistema solar, en busca de la mínima señal de vida.^[1,2,3] Por otra parte están los telescopios con los que intentamos detectar sistemas planetarios extra-solares y, en especial, planetas parecidos a la Tierra. La abundancia de planetas semejantes a la Tierra sería un fuerte indicio de que no estamos solos en el universo.

Los desafíos para detectar planetas extra-solares están en el hecho de que la señal del planeta, si es que existe, se encuentra escondida bajo el ruido de la señal de la estrella, la cual es mucho mayor en magnitudes estelares y en extensión espacial. La intensidad de la estrella es mil millones de veces mayor que la intensidad del planeta en el visible, y un millón de veces en el infrarrojo.^[4,5] Además, hay que añadir el inconveniente de la proximidad entre la estrella y el planeta; vistos desde Tierra subtenden un ángulo de separación que se encuentra entre un décimo de segundo de arco y un milisegundo de arco. Así, la tarea de detectar planetas directamente se reduce a separar la señal de éste de la señal de la estrella. Desafortunadamente no existen detectores capaces de resolver la insignificante señal del planeta; ni aún cuando se utiliza el mejor telescopio existente para realizar la observación.

El interés por detectar planetas extra-solares ha sido renovado recientemente, sobre todo por el desarrollo de tecnologías requeridas para la fabricación de componentes ópticos, corrección activa de la imagen y telescopios ópticos de gran apertura. Gracias a esto, en los últimos 10 años se han encontrado alrededor de 150 planetas,^[1] la totalidad de los cuales

han sido detectados por medios indirectos; a partir de la influencia del planeta sobre la órbita de la estrella huésped. La mayoría de los planetas extra-solares observados son gigantes, como Saturno y Júpiter (o aún mayores),^[1,3] o planetas en formación.^[6]

Desafortunadamente los planetas gigantes no cuentan con un ambiente propicio para que se geste la vida. Pero, ¿existen planetas como la Tierra? Los astrónomos creen que podemos encontrar planetas terrestres (similares a la Tierra) orbitando alrededor de estrellas con iluminación, edad y tamaño semejantes a las del Sol. Debido a que los planetas terrestres son menores que los planetas gigantes los retos para detectarlos son aún mayores.

Paralelamente a las observaciones por medios indirectos, se han ido proponiendo e implementando arreglos ópticos que permiten cancelar parcialmente la luz de la estrella; principalmente interferómetros y coronógrafos.^[4,5,7] Al observar y analizar la luz del planeta, los métodos directos nos dan información de la composición de los planetas detectados. En los próximos años se tiene previsto poner en órbita interferómetros que nos permitan detectar planetas terrestres.*

Cada técnica de observación es sensible a diferentes tipos de planetas, y nos proporciona información complementaria sobre los planetas que pueden encontrar. En las siguientes secciones presentamos una breve descripción de algunas de las principales técnicas de observación por métodos indirectos y directos.

2.2. Detección de planetas extra-solares por métodos indirectos

Los métodos indirectos tienen la ventaja de requerir menor precisión de los instrumentos para ser efectivos. Esto ha permitido que en la última década se hayan detectado alrededor de 150 planetas. A continuación presentamos una breve descripción de cada una de las principales técnicas y algunos de los resultados obtenidos.

* La NASA (National Aeronautics and Space Administration) y la ESA (European Space Agency) han invertido en programas estratégicos a largo plazo (Origins de la NASA y Darwin de la ESA), tanto de investigación científica como de desarrollo tecnológico, encaminados a detectar y caracterizar planetas terrestres fuera de nuestro sistema Solar.

2.2.1. Sincronización de Pulsar

La primera confirmación de la detección de un planeta extra-solar fue hecha mediante la sincronización de un pulsar. Los pulsares son estrellas de neutrones magnetizadas que rotan rápidamente y emiten ondas de radio que, para un observador en la Tierra son vistas como pulsos periódicos. El periodo de los pulsares más estables está dentro del rango de los mejores relojes conocidos. Para rotaciones rápidas del pulsar, el pulso medio de llegada puede ser medido con una precisión de milisegundos.^[1]

Aunque los pulsos son emitidos periódicamente, los tiempos en que éstos alcanzan al observador no son constantes si la distancia entre el pulsar y el telescopio varía de manera no lineal. El movimiento de la Tierra alrededor del Sol y la propia rotación de la Tierra causan tales variaciones, las cuales pueden ser calculadas, y corregidas en los datos. La existencia de variaciones periódicas en los datos corregidos puede indicar la presencia de un compañero orbital del pulsar. Tales variaciones son más sensibles a planetas masivos, ya que el tirón gravitacional que generan es mayor y por lo tanto ocasiona efectos más claros de observar.

El primer planeta extra-solar fue descubierto por Alexander Wolszczan y Dale Frail a principios de los 90's.^[8] Encontraron periodicidades en el tiempo de llegada del pulso proveniente del pulsar 1257+12 (el cual tiene un periodo rotacional de 6 ms) aún después de corregir el movimiento del telescopio alrededor del Sol, y atribuyeron estas variaciones a dos compañeros del pulsar. Uno de los compañeros tiene un periodo orbital de 66.54 días y el producto de su masa por el seno del ángulo de inclinación respecto del plano del cielo es $M \sin i = 3.4 M_{\oplus}$ (M_{\oplus} es la masa de la Tierra); el otro planeta tiene un periodo de 98.22 días y $M \sin i = 2.8 M_{\oplus}$ (estas masas asumen que el pulsar es 1.4 veces más masivo que el Sol). Ambos planetas tienen órbitas con excentricidades cercanas a 0.02. Observaciones posteriores mostraron el efecto de perturbaciones entre ambos objetos sobre sus órbitas, de tal modo que confirmaron la hipótesis de los planetas e implicaron que i es ligeramente menor a 60° .^[9]

Adicionalmente, los datos sugieren que probablemente hay un planeta más, con masa igual a la de la luna, orbitando entre los otros dos.^[10] Y hay indicios de un cuarto planeta con masa cercana a la de Saturno, orbitando a 40 AU (una unidad astronómica AU es la distancia media que hay entre la Tierra y el Sol) alrededor del pulsar.^[1997 ASPC] La sincronización del pulsar ha demostrado ser un detector de objetos planetarios muy sensible, pero sólo funciona para planetas orbitando un pulsar (un remanente estelar poco común).

2.2.2. Medición de la velocidad radial

Hasta el momento el método más exitoso para detectar planetas alrededor de estrellas de secuencia principal ha sido el de *velocidad radial* o *Espectroscopía Doppler*. A partir del corrimiento Doppler del espectro estelar se puede medir la velocidad con que la estrella se acerca o aleja del observador. Después de quitar el movimiento del observador respecto al centro de masa del Sistema Solar y otros movimientos conocidos, el movimiento radial resultante se deberá a la presencia de planetas orbitando la estrella.

El movimiento de la estrella alrededor del centro de masa del sistema estrella-planeta, ocasiona un corrimiento al azul y un corrimiento al rojo según se acerque o se aleje de nuestro detector. Las estrellas tipo Sol tienen un espectro electromagnético con abundantes líneas de absorción de las cuales se pueden obtener longitudes de onda distintivas para las mediciones por Doppler. Tales líneas contienen información acerca de la composición química, la temperatura, la presión, la actividad magnética y la razón de giro de la estrella.

La amplitud de la velocidad radial, K , de la estrella de masa M_* que es inducida por un planeta, de masa M_p , orbitando es^[1]

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P_{orb}} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_* + M_p)^{2/3} \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.1)$$

donde P_{orb} es el periodo orbital, i es el ángulo entre la normal del plano de la órbita y la dirección de observación y e es la excentricidad de la órbita. Como en el caso de la sincronización de un pulsar, la medida de la velocidad radial es producida por el producto

de la masa del planeta y el seno del ángulo i , así como por el periodo y la excentricidad de la órbita. Esta técnica es más sensible a planetas masivos y con periodos orbitales cortos. El grupo de Geoff Marcy ha alcanzado precisiones del orden de 1 ms^{-1} (que corresponden a corrimientos Doppler de una parte en 10^8) sobre estrellas espectralmente estables. ^[1,7,11] Con esta precisión, planetas Jovianos orbitando alrededor de estrellas tipo Sol son detectables, aunque estas detecciones requieren de tiempos de observación prolongados (comparable con el tiempo del periodo orbital del planeta). Planetas con masas menores a la de Urano orbitando muy cerca de la estrella también pueden ser detectados; sin embargo, planetas tipo Tierra orbitando a 1 AU de la estrella están mucho más allá de las capacidades previstas actualmente para esta técnica.^[1]

Para medir la velocidad radial con alta precisión se requieren un gran número de líneas espectrales, por lo que el método no puede ser aplicado a estrellas calientes (tipo espectral A, B y O);* las cuales tienen mucho menos características espectrales que las estrellas más frías, como el Sol. La rotación estelar y la variabilidad intrínseca (incluyendo manchas solares) representan las principales fuentes de ruido para la medición de la velocidad radial.

Durante décadas, el límite en la resolución de la velocidad de la estrella medida mediante la técnica de velocidad radial era de 500 ms^{-1} .^[2] La dificultad estriba en que el mínimo cambio en las condiciones del espectrógrafo (temperatura, presión e iluminación de la óptica) ocasiona desplazamientos pronunciados en los espectros estudiados. De tal manera que la señal del movimiento de la estrella se pierde en el ruido del instrumento.

Para resolver el problema se utilizan dos técnicas. La primera consiste en mantener un estricto control sobre la estabilidad del espectrógrafo, y la segunda utiliza un espectro de referencia con la luz de la estrella. Una computadora usa la información de la fuente conocida para monitorear cualquier variación del espectro y corregir el espectro de la estrella.

* El esquema de clasificación de Harvard clasifica las estrellas de acuerdo a con su temperatura en O, B, A, F, G, K, y M. Donde las estrellas más calientes son del tipo O y las más frías del tipo M. Las estrellas del tipo O, B y A carecen de líneas espectrales debido a la ausencia de moléculas en la heliósfera de las estrellas.

El primer planeta conocido que órbita una estrella de la secuencia principal, diferente al Sol, fue descubierto por Michel Mayor y Didier Queloz en 1995 orbitando la estrella 51 Pegasi. Cuyos parámetros principales son $M \sin i = 0.47 M_J$ (M_J es la masa de Júpiter), $P_{\text{orb}} = 4.23$ días.^[12] En los 90's, las pruebas por velocidad radial identificaron 30 compañeros con $M \sin i < 13$ orbitando estrellas de la secuencia principal.* Hasta el momento, todos los planetas identificados mediante pruebas de velocidad radial, comparten por lo menos dos de las siguientes tres características: su masa excede la de Saturno, su semieje mayor orbital es aproximadamente menor que 3 AU y dominan la variación de la velocidad radial de su estrella madre en un rango muy amplio de escala de tiempo (así, el planeta más masivo cercano a la estrella sobrepasa al segundo planeta más masivo por un factor mayor que el cociente entre la masa de Júpiter y Saturno).

2.2.3. Astrometría

La técnica se sustenta en el hecho de que el movimiento de un sistema planetario produce variaciones distintivas en la trayectoria de la estrella central. Ya que cada característica de la órbita del planeta es reflejada en el movimiento de la estrella, su trayectoria contiene información acerca de la masa, el radio y la excentricidad de la órbita de cada planeta del sistema. La astrometría es más sensible a los planetas masivos orbitando alrededor de estrellas que se encuentran cercanas a nuestro Sistema Solar. La amplitud de la oscilación, $\Delta\theta$, está dada por la fórmula^[1]

$$\Delta\theta = \frac{M_P}{M_*} \frac{a_{AU}}{r} (\text{parsec}), \quad (2.2)$$

donde r es la distancia a la estrella desde nuestro Sistema Solar. Por ejemplo, un planeta igual a Júpiter orbitando a 10 AU de una estrella igual al Sol, localizada a 10 pársec (1 pársec = 3.26 años luz = 2.06×10^5 AU = 3.0857×10^{16} m) de la Tierra, produciría una amplitud de oscilación de 1 milisegundos de arco (mas). Ya que el movimiento de la estrella es detectable en dos dimensiones, se puede obtener una mejor estimación de la

* En la actualidad se han encontrado 144 planetas extra-solares por el método de velocidad radial.

masa del planeta usando astrometría que usando técnicas de velocidad radial. Sin embargo, es más difícil estimar la excentricidad de la órbita.

Es más fácil detectar planetas con mayor distancia orbital usando astrometría, porque la amplitud del movimiento de la estrella es grande. Pero encontrar estos planetas requiere de tiempos de observación prolongados debido a sus mayores periodos orbitales. Los sistemas astrométricos requieren alta estabilidad durante tiempos prolongados para reducir el ruido que puede conducir a una detección falsa. La mejor precisión a largo plazo alcanzada por un telescopio en Tierra es de ~ 1 mas. Se espera que la interferometría desde Tierra permita alcanzar una precisión de ~ 20 microsegundos de arco (μas) en los próximos años. Además, con interferómetros en el espacio se podrán alcanzar ~ 3 μas en un futuro cercano. Ninguna detección nueva ha sido aún confirmada por medio de astrometría; pero los datos obtenidos por el satélite Hipparcos a finales de los 90's muestran que varias estrellas enanas café observadas con pruebas de velocidad radial tienen en realidad compañeras estelares de baja masa, cuyas órbitas son vistas casi de frente.^[1]

2.2.4. Detección por tránsito

El método de búsqueda de planetas por tránsito depende de la observación del decrecimiento en el flujo de luz de la estrella producido por el tránsito de un planeta a través del disco de la estrella. La magnitud de esta reducción es proporcional a la razón entre el área del planeta y el de la estrella. Con fotometría de alta precisión son posibles de observar tales tránsitos, los cuales se distinguen de la modulación de las manchas solares y de la variabilidad estelar intrínseca por su periodicidad, por tener forma de pozo cuadrado y por mantener neutralidad espectral relativa. La observación por tránsito proporciona el tamaño y el periodo orbital del planeta detectado.

Para que un tránsito sea observado, los planetas deben de tener el plano orbital cercano a nuestra línea de visión,^[1]

$$\cos i < \frac{R_* + R_p}{a}, \quad (2.3)$$

donde R_* y R_p son los radios de la estrella y del planeta, respectivamente. Ignorando los tránsitos generados por el ruido electrónico de los instrumentos (ésos con una duración menor que la mitad del tránsito central), la probabilidad de detectar un planeta orbitando a 1 AU de la estrella con un radio igual al del Sol, es de 0.4%; mientras que la probabilidad de detectar un planeta a 0.05 AU de la misma estrella es de 8%.^[1] Aunque las consideraciones geométricas limitan la fracción de planetas detectables por esta técnica, se pueden examinar miles de estrellas dentro del campo de visión de un telescopio, por lo que el tránsito con fotometría es altamente eficiente.

La precisión fotométrica está limitada por la variación de centelleos en la atmósfera terrestre a un milésimo de magnitud, pudiendo así detectar por tránsito planetas del tamaño de Júpiter (pero no del tamaño de la Tierra) vistos desde Tierra. Es posible alcanzar precisiones mayores por encima de la atmósfera, que permitan detectar planetas tan pequeños como la Tierra. Una ventaja importante de la técnica de tránsito es que los planetas más grandes detectados de esta forma también pueden ser observados mediante velocidad radial, obteniendo la masa del planeta (ya que la inclinación es conocida por el tránsito). Tal combinación de detecciones complementarias proporciona la densidad del planeta, un dato especialmente valioso para el estudio de formación de planetas.

Un telescopio espacial podría también detectar la modulación de la fase sinusoidal de la luz reflejada por el propio planeta gigante que órbita la estrella. El albedo (razón entre la energía luminosa que difunde por reflexión y la energía incidente) del planeta detectado por fotometría de tránsito y por fotometría de la luz reflejada podría así ser registrado.

En los últimos años se han detectado planetas, en número creciente, con el Hubble y telescopios de gran apertura en Tierra.^[13,14,15,16,17,18,19] Además ha servido para confirmar y analizar varios de los planetas ya descubiertos. Por ejemplo, en 1999 se observó el tránsito

del planeta “51 Peg-Like” (descubierto mediante el método de velocidad radial), ayudando a establecer el ángulo de inclinación i y fijando así la masa del planeta.^[20]

2.2.5. Microlensing

De acuerdo con la teoría de la relatividad, la luz de una estrella lejana debe de desviarse al pasar junto a un objeto estelar masivo (lente). La técnica por Microlensing consiste en detectar la desviación de la luz de las estrellas que en su viaje hasta el telescopio se encuentran con algún lente. La técnica se está utilizando actualmente para investigar la distribución de fuentes estelares débiles y cuerpos con masas subestelares dentro de nuestra galaxia. Los lentes amplifican la luz de la fuente una fracción importante cuando la línea de visión cruza dentro del anillo de Einstein, R_E , el cual está dado por^[1]

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM_L r_{TL}}{c^2} \left(1 - \frac{r_{TL}}{r_{TS}}\right)}, \quad (2.4)$$

donde M_L es la masa del lente, c es la velocidad de la luz, y r_{TL} y r_{TS} son las distancias desde la Tierra hasta el lente y la fuente, respectivamente. El brillo de la fuente puede incrementarse varias veces para un periodo de algunas semanas durante el evento, y el patrón de iluminación puede ser utilizado para determinar (de manera probabilística) propiedades del lente. Si la estrella tiene compañeros planetarios, entonces los lentes pueden producir cambios característicos sobre las curvas de luz observadas, que se dan cuando la línea de visión pasa dentro del anillo de Einstein (muy pequeño) del planeta.

Bajo circunstancias muy favorables, se pueden detectar planetas tan pequeños como la Tierra. Microlensing proporciona información sobre las masas de los planetas detectados y las distancias (proyectadas) a sus estrellas, pero no la excentricidad de la órbita ni la inclinación. Un cuidadoso monitoreo de muchos eventos microlensing podría proporcionar un conjunto de datos muy útiles sobre la distribución de planetas dentro de nuestra galaxia. Sin embargo, las propiedades de planetas individuales, y las estrellas que orbitan, sólo se podrían estimar en un sentido estadístico debido a la gran cantidad parámetros que influyen en las curvas de luz por microlensing.

Esta técnica está rindiendo ya sus primeros frutos; en el año 2003 se obtuvo la primera detección y este año se confirmó el segundo planeta extra-solar por microlensing.^[21] Éste último tiene una masa de 0.0071 ± 0.0003 veces la masa de la estrella huésped. Además la técnica se ha fortalecido por las observaciones de un sistema binario de enanas café mediante la técnica de microlensing.^[22]

2.3. Detección de planetas extra-solares por métodos directos

Los planetas distantes son objetos muy débiles localizados cerca de un objeto muy brillante (la estrella o estrellas que orbitan), siendo extremadamente difíciles de captar. La luz de la estrella reflejada por los planetas con órbitas y tamaños como los planetas de nuestro Sistema Solar, es un millonésimo más débil que la de la estrella, aunque el contraste decrece tres órdenes de magnitud en el infrarrojo térmico. La luz dispersada por el telescopio óptico y las variaciones atmosféricas, se suman a las dificultades de la detección directa de planetas extra-solares.

Para poder caracterizar (medir temperatura, detectar y analizar la composición de la atmósfera y los océanos, detectar elementos biogénicos, etc.) los planetas extra-solares, la luz de los planetas debe ser examinada sin la contaminación de la luz de la estrella. Se espera que los avances tecnológicos en coronografía, interferometría y otros métodos de anulación permitan que alcancemos a proyectar la imagen y a realizar estudios espectroscópicos, que nos proporcionen las características del planeta. Hasta el momento sólo se ha podido analizar y observar directamente la estrella enana café Gl229, pero los alcances de la técnica son cada vez mayores.

Las técnicas directas de detección se enfocan en cancelar la luz de la estrella brillante, de tal manera que la tenue luz del planeta pueda ser detectada. Hasta el momento se han sugerido varios arreglos en los que intervienen coronógrafos, interferómetros o ambos. Las principales agencias espaciales (la NASA y la ESA) tienen varias misiones encaminadas a detectar planetas extra-solares por medios directos. Por ejemplo, los programas Origins de

la NASA y Darwin de la ESA consisten de una serie de misiones, cada una de las cuales cimentada sobre el legado tecnológico y científico de las misiones anteriores.

A continuación presentamos una breve descripción del funcionamiento e implementación de coronógrafos, y en el capítulo IV se discute extensamente un arreglo interferométrico.

2.3.1. Coronógrafos estelares

Varios telescopios en Tierra y en el espacio cuentan con coronógrafos estelares, diseñados para observar regiones cercanas a las estrellas. El elemento esencial es una máscara que obstruye la zona central de la imagen. El coronógrafo debe permitir formar imágenes de las vecindades de la estrella brillante sin los problemas usuales de saturación, halation (ensanchamiento de la luz alrededor de áreas brillantes), blooming (ruido que se genera cuando los electrones de un píxel del CCD brincan a uno vecino) o daños permanentes del detector.

La figura 2.1 muestra una vista esquemática del sistema óptico de un coronógrafo estelar. La luz procedente de una estrella lejana llega desde la izquierda y entra a una apertura, localizada en el plano 1, con potencia óptica Φ_1 . Se forma una imagen del objeto en la apertura de campo localizada en el plano 2. El eje del telescopio se encuentra sobre la línea de observación de la estrella. Se centra en la estrella una máscara de amplitud y fase. Las características del punto obstructor, esto es, su tamaño, amplitud, fase de la transmitancia y perfil de la reflectancia, se optimizan para controlar la cantidad de radiación indeseada en el sistema.

A la derecha de esta máscara del plano imagen, se coloca en el plano 3 una lente de campo de potencia óptica Φ_3 . La lente de campo desplaza la imagen de la apertura de entrada sobre el diafragma en el plano 4. En el plano 1, la difracción sobre los bordes de la apertura de entrada crea un anillo brillante de radiación indeseable alrededor de la pupila de entrada. El diafragma en el plano 4 está diseñado para controlar la amplitud, fase de la

transmitancia y reflectividad de la radiación indeseada, que se difracta alrededor de los bordes de la imagen de amplitud compleja de la apertura de entrada en el plano 1. La óptica en el plano 5 desplaza la imagen del plano 2 sobre la imagen final del plano 6, donde se coloca el arreglo de detectores.

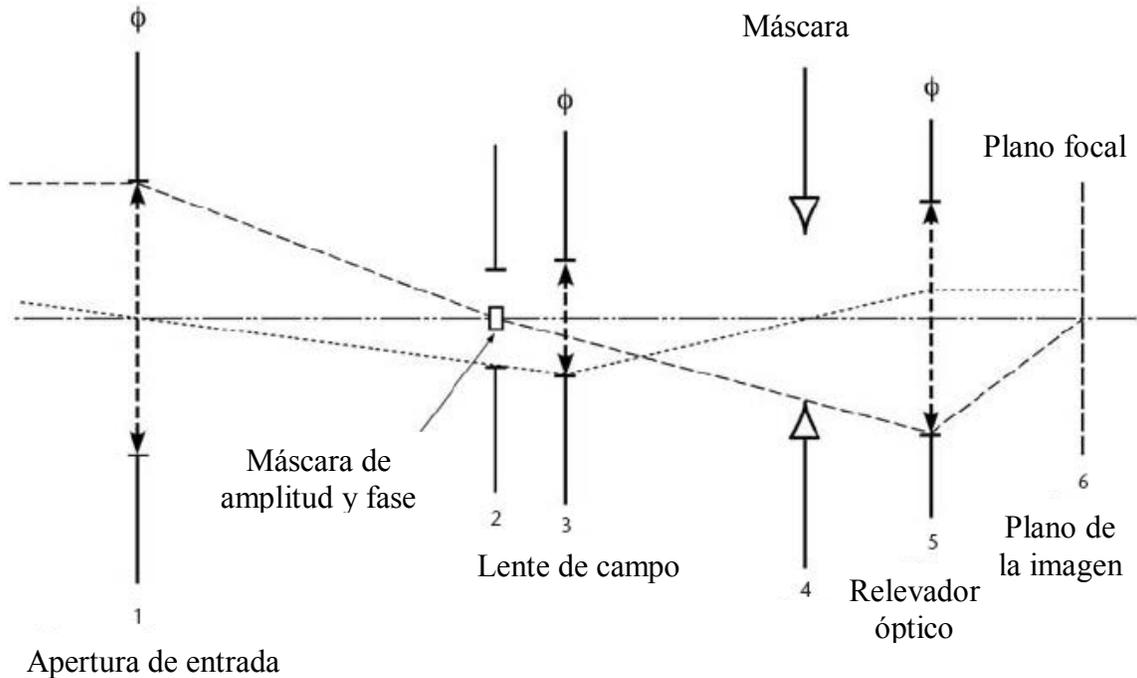


Figura 2.1. Esquema básico de un coronógrafo.

Los telescopios en Tierra que utilizan un coronógrafo estelar incorporan óptica adaptativa para poder corregir las degradaciones en la imagen debidas al centelleo de la atmósfera, y así, obtener imágenes en el límite de difracción del telescopio. Las degradaciones de la imagen debidas al seeing (distorsiones generadas en la atmósfera) pueden separarse en dos contribuciones principales: la inclinación del frente de onda total y la curvatura del frente de onda localizado en una celda con escala espacial del orden del tamaño del seeing.

La longitud de escala de distorsión se puede caracterizar con el parámetro de Fried r_0 , el cual da la distancia sobre la cual las variaciones del frente de onda generadas por turbulencias atmosféricas son menores a $\lambda/17$.^[7] El parámetro de Fried depende de la longitud de onda con valores típicos que van desde de ~ 10 cm para $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ hasta ~ 60

cm para $\lambda = 2.2 \mu\text{m}$. Esta cantidad de distorsión corresponde a un seeing de alrededor de $1''$, el cual es típico para un sitio astronómico bueno. La escala de tiempo sobre la cual este patrón de distorsión permanece espacialmente coherente es de alrededor de 6 ms a 35 ms.

Algunos telescopios con coronógrafo y óptica adaptativa aprovechan la luz reflejada por el disco obstructor, para realizar el sensado de la distorsión presente en el frente de onda. Así, la luz obstruida es utilizada para manejar el servomecanismo que se encarga de corregir la imagen. El servomecanismo tiene dos componentes: un plano pequeño articulado que corrige la inclinación total del frente de onda; y un espejo de membrana delgada con un arreglo de actuadores electrostáticos, que corrige la curvatura del frente de onda en la escala de r_0 . La imagen de emisiones débiles cercanas a la estrella brillante, la cual pasa a través del disco obstructor, es así corregida cerca del límite de difracción del telescopio.

La magnitud mínima de la estrella central está determinada por la necesidad de recolectar suficientes fotones en la subapertura r_0 durante del tiempo de coherencia. Para este sistema es $m_v = 8$ para $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ a $m_v = 14$ para $\lambda = 2.2 \mu\text{m}$. Se espera que la razón de contraste sea del orden de 10^6 en una separación radial de $2''$ desde centro de la estrella. En principio, mediante este dispositivo se tendrá la capacidad de resolver un gran número de planetas cercanos, proto-planetas o sistemas subestelares.

Se pueden alcanzar mejores resoluciones desde el espacio; limitadas por la calidad de los componentes ópticos. Por ejemplo, para el proyecto TPF (Terrestrial Planet Finder), el sistema del coronógrafo será capaz de bloquear la luz de la estrella hasta hacer 10 millones de veces más brillante la luz del planeta; por tal motivo el sistema que controla la luz difractada debe de ser mejorado para prevenir que residuos de luz dispersada lleguen hasta los detectores, y enmascaren (o peor aún, mimetizado) la luz del planeta. Para el TPF, el reto está en controlar la luz dispersa por el espejo primario de alta calidad (varias veces más liso que el del telescopio espacial Hubble), y en obtener un sistema de control capaz de corregir los errores del frente de onda introducidos por otros elementos en el sistema óptico.

2.4. Conclusiones

Como hemos visto, la búsqueda y detección de planetas extra-solares ha sido impulsada por el avance en las técnicas de detección, y en las tecnologías que han proveído de componentes ópticas de mayor calidad. Gracias a estos avances, en 1992 se pudo detectar por primera vez un planeta extra-solar, y hoy en día el número hacienda a 150. Sin embargo, debido a que la ingente intensidad de la estrella borra por completo la tenue señal del planeta, la inmensa mayoría han sido detectados por medios indirectos, es decir, a partir del efecto que genera cada planeta sobre su estrella huésped. Entre las principales técnicas de detección se encuentran: velocidad radial, astrometría, tránsito y microlensing. Cada una tiene sus ventajas y desventajas, pero todas tienen una limitante común, no permiten observar la luz del planeta y poder de esta manera hacer un análisis espectroscópico del mismo.

Para hacer emerger la luz del planeta, se han propuesto varios arreglos ópticos que centran sus esfuerzos en cancelar la luz de la estrella. Las técnicas propuestas incluyen coronógrafos e interferómetros. El principal inconveniente de los coronógrafos es que la luz de la estrella, obstruida por el coronógrafo, genera un patrón de difracción que desvanece la señal del planeta.

Aunque aún no se han podido observar planetas extra-solares por medios directos, las técnicas han ido avanzando y las principales agencias espaciales (NASA y ESA), en sus programas a mediano y largo plazo, contemplan misiones para detectar planetas de manera directa. Las agencias están adoptando una visión evolutiva; cada nueva misión está cimentada en las tecnologías precedentes e incluye lo aprendido en las misiones previas.

III

Principios básicos de interferometría e interferómetros

3.1. Introducción

Describimos brevemente los principios básicos de la interferometría. A partir de la superposición de dos ondas obtenemos la relación de la intensidad, primeramente para el caso en que tales ondas son generadas por una fuente monocromática y posteriormente para el caso general en que consideramos una fuente finita. También describimos un interferómetro Mach-Zehnder y su implementación como interferómetro de desplazamiento rotacional. Por último mencionamos el teorema de van Cittert-Zernike el cual establece el factor de coherencia que hay entre dos puntos generados por una fuente finita no coherente.

Cuando dos o más rayos de luz se superponen, en general tenemos que la distribución de la intensidad resultante no se puede describir de una manera sencilla. Así, si mediante un dispositivo conveniente la luz de una fuente es dividida en dos haces luminosos, los cuales son posteriormente superpuestos, se encuentra que la intensidad en la región de superposición varía de punto a punto entre un máximo que excede la suma de las intensidades de los dos haces, y un mínimo que puede ser cero. Este fenómeno es conocido como interferencia. La superposición de haces de luz estrictamente monocromática siempre ocasiona picos de interferencia. Sin embargo, la luz producida por fuentes físicas reales nunca es estrictamente monocromática; esto se debe a las fluctuaciones internas de la fuente. Si los dos haces son originados en la misma fuente, las fluctuaciones de los dos están en general correlacionadas, y los haces son nombrados completamente o parcialmente coherentes, dependiendo de si la correlación es completa o parcial. Para haces provenientes de fuentes diferentes las fluctuaciones son completamente independientes y los haces son nombrados mutuamente incoherentes. Cuando dos haces provenientes de fuentes diferentes

se superponen, bajo condiciones experimentales comunes, no se observa interferencia alguna.

3.2. Principios básicos de interferometría

A partir de las ecuaciones de Maxwell es posible demostrar que cada componente del campo electromagnético (E_x , E_y , E_z , B_x , B_y , B_z) obedece la ecuación diferencial escalar de onda^[23]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Donde v es la velocidad de la luz en el medio en que se propaga la onda y cumple con la siguiente relación:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.2)$$

ϵ y μ son respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del medio. Una onda plana propagándose en la dirección \hat{k} se puede representar como

$$\Psi = A \exp[ik(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt + \epsilon)], \quad (3.3)$$

donde k es el número de onda y ϵ es el factor de fase de la onda. Es fácil comprobar que la ecuación 3.3 es solución de la ecuación 3.1. Otra solución de la ecuación 3.1 es

$$\Psi = \frac{A}{r} \exp[ik(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt + \epsilon)]. \quad (3.4)$$

Esta última solución representa una onda electromagnética esférica que se aleja del origen de coordenadas. De hecho, una fuente real pequeña puede ser representada con la ecuación 3.7. Cuando la onda se encuentra muy retirada de la fuente que la origina, y considerando

una pequeña área de observación (cuyas dimensiones lineales sean mucho menores que la distancia a la fuente), la ecuación 3.3 modela correctamente la situación.

Además tenemos que la irradiancia, generada por una onda electromagnética, es proporcional al cuadrado del campo eléctrico o al cuadrado del campo magnético.^[24]

$$I = v\epsilon\langle E^2 \rangle = \frac{v}{\mu}\langle B^2 \rangle = \langle \Psi^2 \rangle = \langle \Psi \cdot \Psi^* \rangle . \quad (3.5)$$

Donde Ψ (al cual denominamos simplemente *campo*) cumple con las siguientes relaciones:

$$\Psi = \sqrt{v\epsilon}E , \quad (3.6)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{v}{\mu}}B . \quad (3.7)$$

Notemos que la ecuación 3.1 es una ecuación diferencial parcial homogénea de segundo orden, la cual cumple con el principio de superposición: la suma de dos soluciones independientes es a su vez solución de la ecuación. Por lo tanto el campo eléctrico (o magnético) resultante, en un punto del espacio donde dos o más ondas electromagnéticas se superponen, es igual a la suma vectorial de los campos individuales. Como consecuencia, la irradiancia (o intensidad) en las regiones donde se superponen dos ondas existen puntos donde la intensidad es mayor que la suma de las intensidades individuales. Se puede decir que la interferencia óptica es la interacción de dos o más ondas electromagnéticas que producen una distribución de la intensidad que se desvía de la suma de las irradiancias individuales.

La irradiancia debida a la superposición de dos campos está dada por

$$I = \langle (\Psi_1 + \Psi_2)^2 \rangle = \langle \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + 2\Psi_1\Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1^2 \rangle + \langle \Psi_2^2 \rangle + \langle 2\Psi_1\Psi_2 \rangle = I_1 + I_2 + I_{12} . \quad (3.8)$$

Tenemos que la irradiancia total es igual a la suma de las intensidades de cada fuente más un término de interferencia. Promediando obtenemos que el término de interferencia es

$$I_{12} = \Psi_1 \Psi_2 \cos \delta = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (3.9)$$

donde δ , igual a $(k_1 \hat{k}_1 \cdot \vec{r} - k_2 \hat{k}_2 \cdot \vec{r})$, es la diferencia de fase que hay entre los dos campos que interfieren. La intensidad en una región, donde dos ondas interfieren, es modulada por las variaciones en la diferencia de fase. Hemos supuesto que k y ε son iguales para las dos ondas.

Con el propósito de esclarecer las ideas anteriores, consideremos el arreglo que se muestra en la figura 3.1. La abertura que hay en la primera pantalla hace las veces de una fuente puntual. Esta fuente ilumina la segunda pantalla, donde cada una de las dos aberturas es a su vez, fuente de una onda esférica. Este arreglo es conocido como el experimento de Young en honor de Thomas Young quien estableció por primera vez el principio de interferencia de la luz.

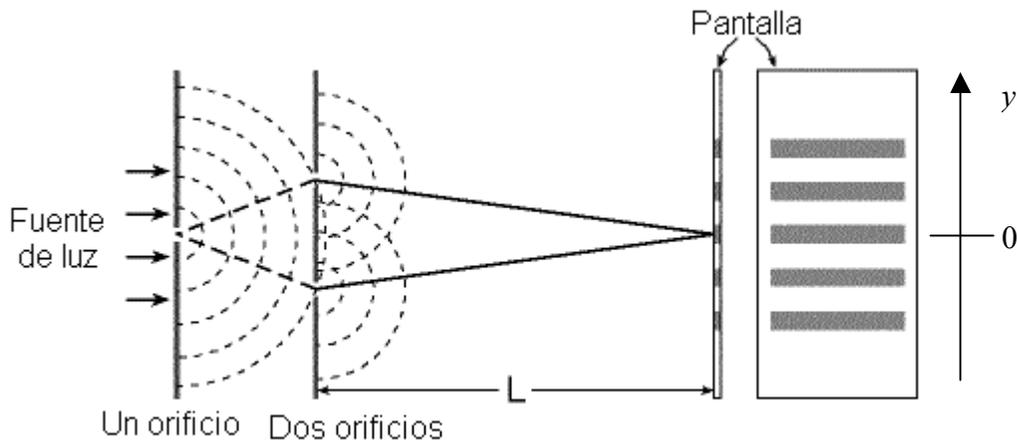


Figura 3.1. Experimento de Young.

A partir de la figura 3.1, obtenemos que para el experimento de Young la diferencia de fase es igual a

$$\delta = k \left(\frac{ya}{L} \right), \quad (3.10)$$

donde a es la distancia de separación entre las aberturas secundarias, L es la distancia de la segunda pantalla a la pantalla de observación, y y es la altura del punto.

3.3. Interferómetros

Los arreglos ópticos que separan la luz de un haz en dos o más haces, y luego los dirigen a una misma región, son conocidos como interferómetros. Existen dos tipos generales de interferómetro: los que dividen el frente de onda y los que dividen la amplitud del haz.

El experimento de Young es considerado un interferómetro de división de frente de onda. Otros interferómetros conocidos, de división de frente de onda, son: espejo doble de Fresnel, prisma doble de Fresnel y el espejo de Lloyd.

Los interferómetros que se usan con mayor frecuencia, para realizar pruebas ópticas y una infinidad de aplicaciones científicas y tecnológicas, son los de división de amplitud. Entre los más conocidos se encuentran los interferómetros: Michelson, Fabry-Perot, Fizeau, Mach-Zehnder y Twyman-Green.

3.3.1. Interferómetro Mach-Zehnder

En la figura 3.2 se muestra un interferómetro Mach-Zehnder. El primer divisor divide el haz de entrada en dos haces idénticos, los cuales se unen nuevamente por medio del segundo divisor, después de recorrer caminos similares. Este arreglo es utilizado para comparar un elemento óptico desconocido respecto de referencia. Debido a la semejanza entre los caminos ópticos recorridos, por el haz que atraviesa el elemento de prueba y por el que atraviesa el elemento de referencia, diferencias mínimas generarán un patrón de interferencia como el que se muestra en la figura 3.2.

A partir de un patrón de franjas, como el de la figura 3.2, es posible determinar la diferencia de fase de la onda. Y con la diferencia de fase determinada podemos obtener una imagen de las aberraciones (deformaciones) del elemento óptica medido.

Es necesario que las componentes ópticas que componen el interferómetro tengan mayor calidad que la que se quiere medir. En caso contrario las franjas que aparecen en el interferómetros pueden ser debidas al mismo interferómetro y no al elemento analizado.

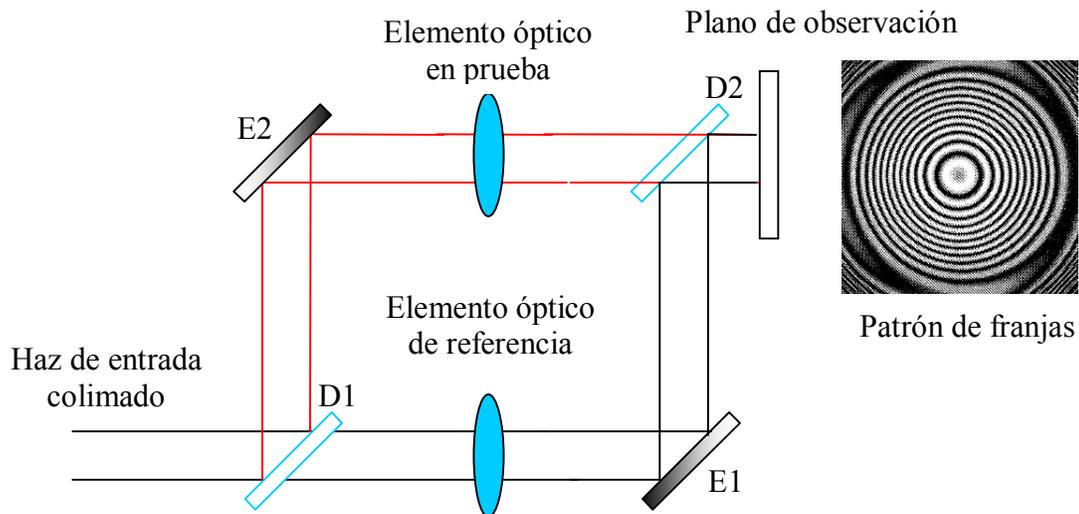


Figura 3.2. Interferómetro Mach-Zehnder.

3.3.2. Interferómetro de desplazamiento rotacional

Existen una clase de interferómetros, conocidos como interferómetros de desplazamiento, los cuales se pueden clasificar, de acuerdo con el tipo de desplazamiento que realizan, en vectoriales, radiales y rotacionales. La operación fundamental de los interferómetros de desplazamiento consiste en comparar el frente de onda original consigo mismo después de haber sufrido algún cambio conocido. En el interferómetro de desplazamiento vectorial el frente de onda original es desplazado en su totalidad, sin sufrir cambio alguno. El interferómetro de desplazamiento radial reduce o aumenta el tamaño del frente de onda original sin cambiar la forma del mismo. Por último, el interferómetro de desplazamiento rotacional gira la imagen. En la figura 3.4 mostramos la manera en que se realiza cada uno de los desplazamientos del frente de onda original.

Los interferómetros de desplazamiento son utilizados para evaluar elementos ópticos esféricos, es decir, elementos con ausencia de simetría esférica.^[23] Tales interferómetro no requieren de un elemento óptico de referencia; a diferencia de los arreglos clásicos (como el mostrado en la figura 3.2) que si lo requieren.

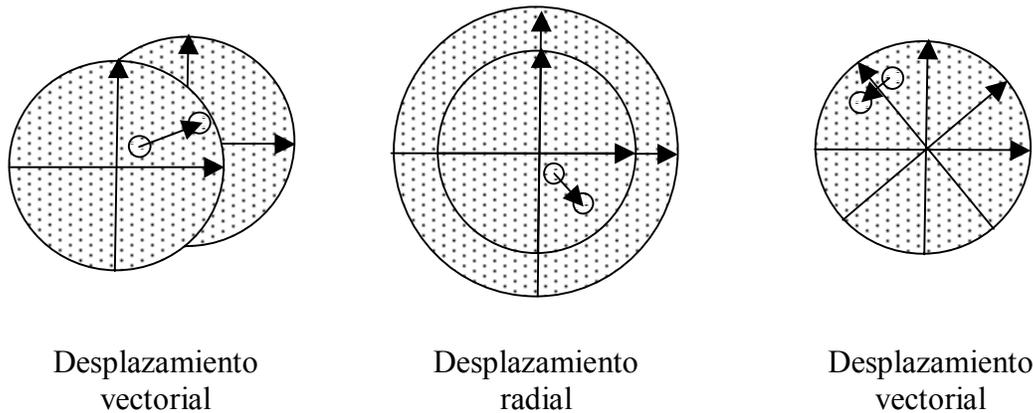


Figura 3.3 Frentes de onda desplazados.

En la zona donde se superponen los frentes de onda se genera un patrón de franjas. Para tener una región de interferencia considerable, los desplazamientos de este tipo de interferómetros suelen ser infinitesimales. En tal caso la diferencia de camino óptico entre los elementos del frente de onda original y los desplazados son aproximadamente iguales. Las pequeñas diferencias de fase las podemos expresar matemáticamente como:

$$\delta = \Phi(\rho, \varphi) - \Phi(\rho + \Delta\rho, \varphi + \Delta\varphi) , \quad (3.11)$$

donde Φ representa los puntos del frente de onda original. Para el caso del interferómetro de desplazamiento rotacional la ecuación 3.11 se transforma en

$$\delta = \rho \left[\frac{\delta\Phi(\rho, \varphi)}{\delta(\rho\varphi)} \right] \delta\varphi . \quad (3.12)$$

Si el frente de onda analizado tiene simetría axial (como las lentes convencionales), su derivada respecto de φ es cero y no se producen franjas de interferencia. Por lo tanto, el

interferómetro de desplazamiento rotacional es especialmente sensible a los elementos ópticos que no tienen simetría axial.

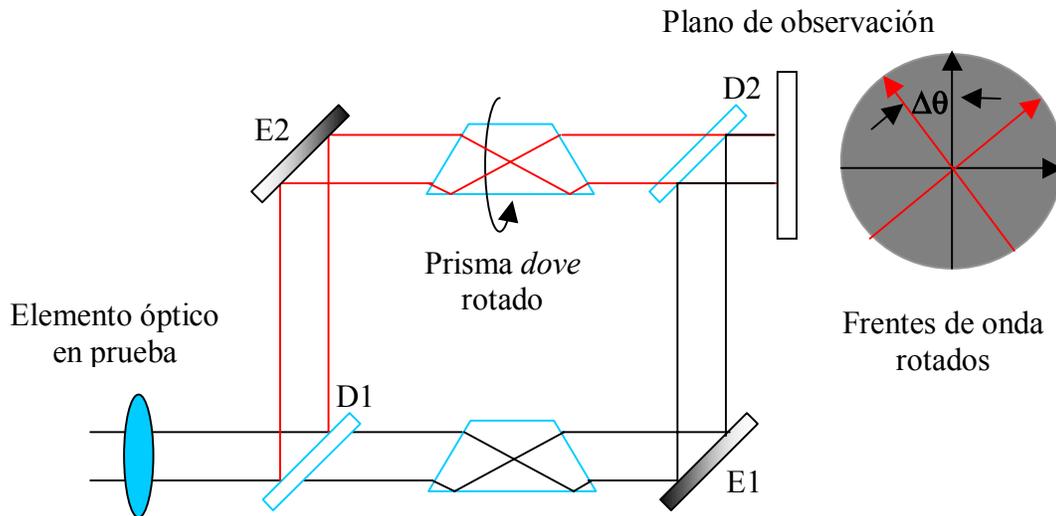


Figura 3.4. IDR implementado modificando un Mach-Zehnder.

El interferómetro de desplazamiento rotacional puede ser implementado colocando un prisma *dove* en cada uno de los brazos de un interferómetro *Mach-Zehnder*, como se muestra en la figura 3.4. Un prisma está rotado respecto al otro; cuando la rotación es muy pequeña tenemos un interferómetro de desplazamiento rotacional infinitesimal, y la ecuación 3.12 es válida.^[25,26,27]

3.4. Luz parcialmente coherente

Ahora consideramos el campo electromagnético en dos puntos P_1 y P_2 sobre el frente de onda producido por una fuente extendida cuasi-monocromática. Por simplicidad asumimos que la onda se propaga en el vacío y los puntos P_1 y P_2 se encuentran retirados a muchas longitudes de onda de la fuente. Podemos esperar que, cuando los puntos P_1 y P_2 se encuentren suficientemente cerca entre sí, las fluctuaciones de la amplitud en estos puntos, y también las fluctuaciones de la fase, no serán independientes. Esto es razonable de suponer si P_1 y P_2 se encuentran muy cerca el uno del otro. Cuando la diferencia $\Delta S = SP_1 - SP_2$, entre los caminos ópticos de cada uno de los puntos respecto a la fuente, es pequeña comparada con la longitud de onda media, entonces los campos en los puntos P_1 y

P_2 son efectivamente los mismos. Para separaciones mayores (entre P_1 y P_2) seguirá existiendo alguna correlación entre los campos, siempre y cuando, la diferencia de camino óptico ΔS de todos los puntos de la superficie no exceda la longitud de coherencia $c\Delta t \sim c/\Delta\nu = \bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$ (donde $\Delta\nu$ y $\Delta\lambda$ representan el ancho del espectro). Hemos conducido así al concepto de una región de coherencia alrededor de cualquier punto P en la superficie de un frente de onda.

Para describir adecuadamente un frente de onda producido por una fuente finita monocromática es deseable introducir alguna medida de la correlación que existe entre los campos en los puntos P_1 y P_2 de la onda. Tal medida está estrechamente relacionada con la nitidez de las franjas de interferencia las cuales resultarían de combinar las vibraciones de los dos puntos. Debemos esperar franjas nítidas cuando la correlación sea alta (e. g. cuando la luz en los puntos P_1 y P_2 venga de una fuente muy pequeña de un rango espectral estrecho), y no franjas en ausencia de correlación (e. g. cuando cada uno de los puntos P_1 y P_2 reciba luz procedente de diferentes fuentes). Describimos esta situación por el término de ‘coherencia e incoherencia’ respectivamente.

En la sección 3.2 suponemos que las ondas que interfieren son absolutamente coherentes. Como acabamos de comentar ésta no es una situación real, pero para los arreglos que utilizan un láser como fuente es aproximadamente correcto (siempre y cuando, la diferencia de camino óptico sea menor que la longitud de coherencia del láser). Ahora consideraremos una variación del experimento de Young. Supongamos que en lugar del primer orificio, de la figura 3.1, tenemos una fuente extendida de rango espectral estrecho, como se muestra en la figura 3.5. Analizamos con detalle el campo Ψ (en su forma compleja) producido por la fuente y propagado en forma de onda. El campo en las aberturas lo representamos mediante $\tilde{\Psi}_1(t)$ y $\tilde{\Psi}_2(t)$. De acuerdo con el principio de superposición el campo eléctrico en el punto P está dado por

$$\tilde{\Psi}_p(t) = \tilde{K}_1\tilde{\Psi}_1(t-t_1) + \tilde{K}_2\tilde{\Psi}_2(t-t_2), \quad (3.13)$$

donde $t_1 = r_1/c$ y $t_2 = r_2/c$. Esto quiere decir que el campo al tiempo t en el punto P está determinado por los campos que existieron en S_1 y S_2 en los tiempos $(t-t_1)$ y $(t-t_2)$, donde t_1

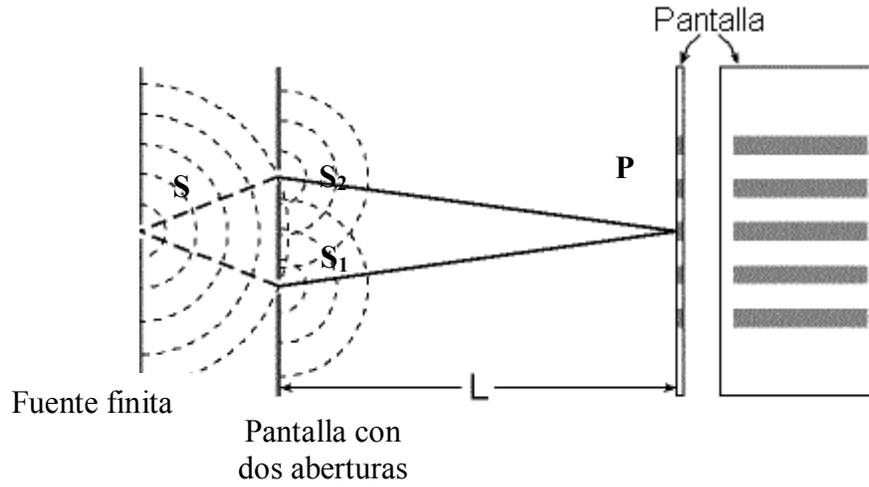


Figura 3.5 Experimento de Young modificado.

y t_2 son los tiempos que tarda en llegar la luz desde los puntos S hasta el punto P . Las cantidades \tilde{K}_1 y \tilde{K}_2 son conocidas como propagadores, los cuales dependen del tamaño y posición de las aberturas. Los propagadores están relacionados con la variación que sufre la fase de la onda hasta llegar a la pantalla, y por lo tanto son número imaginarios puros.

La intensidad en el punto P la obtenemos sustituyendo la ecuación 3.13 en la definición de irradiancia (ecuación 3.5):

$$I_P(t) = \tilde{K}_1 \tilde{K}_1^* \langle \tilde{\Psi}_1(t-t_1) \tilde{\Psi}_1^*(t-t_1) \rangle + \tilde{K}_2 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{\Psi}_2(t-t_2) \tilde{\Psi}_2^*(t-t_2) \rangle + \tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{\Psi}_1(t-t_1) \tilde{\Psi}_2^*(t-t_2) \rangle + \tilde{K}_2 \tilde{K}_1^* \langle \tilde{\Psi}_2(t-t_2) \tilde{\Psi}_1^*(t-t_1) \rangle. \quad (3.14)$$

Ya que la mayoría de los campos electromagnéticos son campos estacionarios, los promedios temporales de la ecuación 3.14 son independientes del tiempo. Por lo tanto, podemos describir los dos primeros tiempos como

$$I_{S_1}(t) = \langle \tilde{\Psi}_1(t) \tilde{\Psi}_1^*(t) \rangle \quad \text{y} \quad I_{S_2}(t) = \langle \tilde{\Psi}_2(t) \tilde{\Psi}_2^*(t) \rangle. \quad (3.15)$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = t_2 - t_1$ y desplazando el tiempo de inicio a $t+t_2$, los dos últimos términos de la ecuación 3.14 se describen

$$\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{\Psi}_1(t+\tau) \tilde{\Psi}_2^*(t) \rangle + \tilde{K}_2 \tilde{K}_1^* \langle \tilde{\Psi}_1^*(t+\tau) \tilde{\Psi}_2(t) \rangle = \text{Re} \left[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{\Psi}_1(t+\tau) \tilde{\Psi}_2^*(t) \rangle \right]. \quad (3.16)$$

El promedio temporal es una función de correlación cruzada que designamos por

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \langle \tilde{\Psi}_1(t+\tau) \tilde{\Psi}_2^*(t) \rangle, \quad (3.17)$$

la cual es conocida como función de coherencia mutua de los campos luminosos S_1 y S_2 . Considerando 3.17, 3.16 y 3.15 la ecuación 3.14 resulta

$$I_P(t, \tau) = \left[|\tilde{K}_1|^2 I_{s_1}(t) + |\tilde{K}_2|^2 I_{s_2}(t) + 2|\tilde{K}_1||\tilde{K}_2| \text{Re} \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \right]. \quad (3.18)$$

Donde hemos considerado que los propagadores \tilde{K} son puramente imaginarios, y por lo tanto $\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* = \tilde{K}_1^* \tilde{K}_2 = |\tilde{K}_1||\tilde{K}_2|$. Además, es claro que $|\tilde{K}_1|^2 I_{s_1}(t)$ y $|\tilde{K}_2|^2 I_{s_2}(t)$ son las irradiancias en el punto de observación P debidas a cada una de las aberturas, y las denotamos por I_1 e I_2 respectivamente.

La función de coherencia mutua para cada uno de los campos está dada por

$$\tilde{\Gamma}_{11}(\tau) = \langle \tilde{\Psi}_1(t+\tau) \tilde{\Psi}_1^*(t) \rangle \text{ y } \tilde{\Gamma}_{22}(\tau) = \langle \tilde{\Psi}_2(t+\tau) \tilde{\Psi}_2^*(t) \rangle. \quad (3.19)$$

Para τ igual a cero tenemos que

$$\tilde{\Gamma}_{11}(0) = I_{s_1} \text{ y } \tilde{\Gamma}_{22}(0) = I_{s_2}, \quad (3.20)$$

las cuales son conocidas como funciones de auto coherencia.

Entonces podemos expresar a I_1 e I_2 como:

$$I_1(\tau) = |\tilde{K}_1|^2 \tilde{\Gamma}_{11}(0) \quad \text{y} \quad I_2(\tau) = |\tilde{K}_2|^2 \tilde{\Gamma}_{22}(0). \quad (3.21)$$

A partir de estas relaciones obtenemos la siguiente igualdad

$$|\tilde{K}_1| |\tilde{K}_2| = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\sqrt{\tilde{\Gamma}_{11}(0) \tilde{\Gamma}_{22}(0)}}. \quad (3.22)$$

La forma normalizada de la función de coherencia mutua se define como

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{\tilde{\Gamma}_{11}(0) \tilde{\Gamma}_{22}(0)}}, \quad (3.23)$$

y recibe el nombre de grado de coherencia complejo. En función de lo anterior, rescribimos la expresión de irradiancia (ecuación 3.18) como

$$I_p(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \tilde{\gamma}_{12}(\tau), \quad (3.24)$$

la cual es conocida como la ley general de interferencia para luz parcialmente coherente. El grado de coherencia complejo es una cantidad compleja y la podemos expresar por

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| e^{i(\alpha_{12}(\tau) - \delta)}. \quad (3.25)$$

Hemos expresado la fase del grado de coherencia en función de dos parámetros, $\alpha_{12}(\tau)$ que representa la correlación entre las fases iniciales en S_1 y S_2 , y δ que es la diferencia de fase dada por la diferencia de camino óptico entre las dos trayectorias. Al sustituir 3.25 en 3.24 obtenemos finalmente

$$I_p(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) - \delta]. \quad (3.26)$$

De la ecuación 3.23 y de la desigualdad de Schwarz se puede demostrar que $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$, ya que éste es la forma normalizada de la función de coherencia mutua. Al comparar 3.9 con 3.26 resulta claro que si $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ I_p sería la misma que la generada por ondas coherentes. Por otra parte, si $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ entonces $I_p = I_1 + I_2$ y no hay interferencia. En los casos intermedios, en que $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$, tenemos luz parcialmente coherente.

3.4.1. Teorema de van Cittert-Zernike

De acuerdo con lo analizado en la sección anterior, es lógico esperar que exista correlación entre dos puntos del frente de onda emitido por una fuente extendida. De hecho, puede demostrarse que en el espacio libre es imposible que exista una onda electromagnética para la cual $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$, para todos los valores de τ y cualesquiera dos puntos del espacio.^[28]

Más aún, la coherencia espacial $\Gamma_{12}(0)$ en el plano de observación es la transformada de Fourier en dos dimensiones de la distribución de intensidad óptica de la fuente no coherente. Dicho resultado es conocido como el teorema de van Cittert-Zernike.^[28]

Otra manera de formular el teorema es la siguiente: el grado de coherencia complejo $\Gamma_{12}(0)$, el cuál describe la correlación de las perturbaciones en un punto fijo P_2 y en un punto variable P_1 en un plano iluminado por una fuente incoherente monocromática extendida, es igual a la amplitud compleja normalizada en el punto correspondiente P_1 en un patrón de difracción, centrado sobre P_2 . Este patrón sería obtenido remplazando la fuente por una apertura de difracción con el mismo tamaño y forma que la fuente, iluminándolo con una onda esférica que converge en P_2 , la amplitud de la distribución sobre el frente de onda en la apertura es proporcional a la distribución de la intensidad que cruza la fuente. Este resultado fue establecido por primera vez por van Cittert y después generalizado por Zernike.^[24]

3.5. Conclusiones

Hemos descrito de forma breve algunos de los principios básicos de la interferometría que se utilizaremos en la siguiente sección. En especial hay que recalcar que el hecho de que la luz generada por una fuente extendida tenga algún grado de coherencia permite que podamos realizar interferometría con la luz de las estrellas. Este resultado matemático está comprobado y es el pilar sobre el que se sustenta la interferometría estelar. Además, hemos comprobado que un interferómetro de desplazamiento rotacional es sensible a frentes de onda esféricos. En el siguiente capítulo analizamos la pertinencia de utilizar un interferómetro de desplazamiento rotacional para detectar planetas extra-solares.

IV

Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un interferómetro de desplazamiento rotacional

4.1. Introducción

En el presente capítulo demostramos analíticamente que un interferómetro de desplazamiento rotacional infinitesimal (IDRI) permite detectar planetas extra-solares. También mostramos que la visibilidad de la señal del planeta es función de un par de parámetros del IDRI. Tales parámetros son la diferencia de camino óptico (DCO) entre los brazos del IDRI y el ángulo subtendido entre la dirección de la estrella y la dirección del IDRI.

El IDRI se acopla a un telescopio para captar la mayor cantidad de luz. El telescopio concentra la radiación emitida por el objeto observado en la entrada del IDRI. Consideramos que el eje del IDRI está alineado con el telescopio, por lo tanto la dirección de observación del IDRI y la dirección del telescopio son iguales.

La operación básica del interferómetro de desplazamiento rotacional (IDR) consiste en interferir el frente de onda original con este mismo frente rotado. Anteriormente hemos demostrado que el IDR puede ser implementado modificando un interferómetro *Mach-Zehnder* al colocar un prisma *dove* en cada uno de los brazos del interferómetro,^[23,24,25] como se muestra en la figura 4.1. Un prisma está rotado respecto al otro; cuando la rotación es muy pequeña tenemos un IDRI.

En este trabajo nos enfocamos únicamente al principio básico de operación del IDRI sin entrar en los detalles de la implementación. Los desafíos técnicos serán abordados en trabajos futuros.

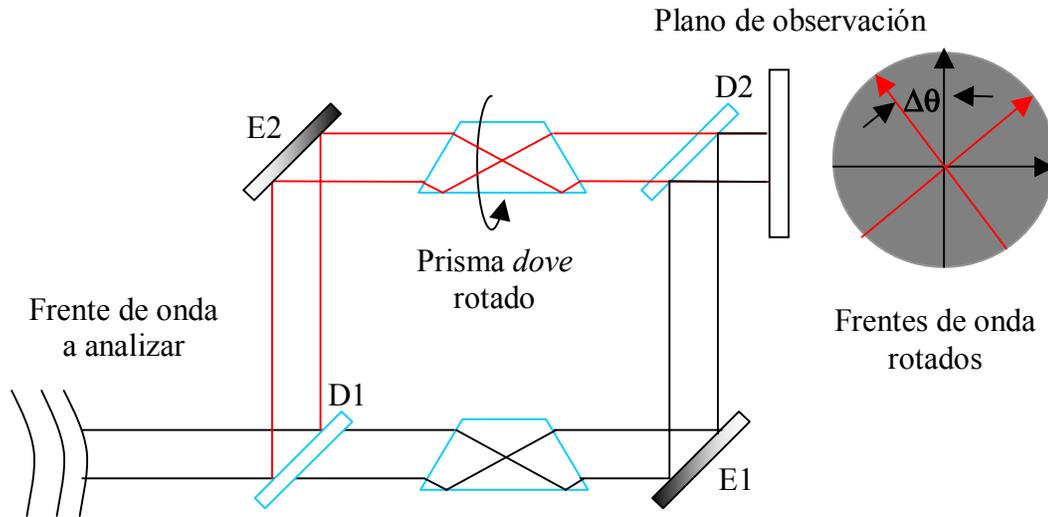


Figura 4.1. IDR implementado modificando un Mach-Zehnder con un prisma *dove* en cada uno de sus brazos.

De manera general tenemos que la irradiancia es proporcional al cuadrado del campo eléctrico o al cuadrado del campo magnético:^[24]

$$I = v\epsilon \langle E^2 \rangle = \frac{v}{\mu} \langle B^2 \rangle = \langle \Psi^2 \rangle = \langle \Psi \cdot \Psi^* \rangle . \quad (4.1)$$

Donde Ψ (al cual denominamos simplemente *campo*) cumple con las siguientes relaciones:

$$\Psi = \sqrt{v\epsilon} E , \quad (4.2)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{v}{\mu}} B . \quad (4.3)$$

La constante v es la velocidad de la luz en el medio que se propaga; ϵ y μ son respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del medio.

4.2. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDRI considerando que hay diferencia de camino óptico entre los brazos del interferómetro

4.2.1. Introducción

Obtenemos la expresión analítica de la irradiancia de un sistema estrella-planeta observado por medio de un IDRI, considerando que existe una DCO arbitraria entre los brazos del interferómetro. Suponemos que el telescopio apunta exactamente a la estrella y por lo tanto ésta está localizada en el eje del IDRI.

Después de obtener la expresión general demostramos que la luz de la estrella es cancelada cuando la DCO es igual a π . Para este caso especial, mostramos algunas simulaciones de los interferogramas variando para el planeta la orientación y la inclinación, y para el IDRI el ángulo de desplazamiento rotacional.

Además mostramos varias simulaciones de los interferogramas para distintas DCO. Examinamos el concepto de visibilidad y definimos la visibilidad del planeta en términos de los patrones de interferencia de la estrella con y sin planeta. Mostramos la gráfica de la visibilidad del planeta en función de la DCO. Finalmente analizamos el significado de los resultados obtenidos.

4.2.2. Obtención de la expresión analítica

Primero obtenemos la distribución del campo de la estrella y del planeta sobre el plano de entrada del interferómetro. Este campo se divide cuando atraviesa el primer divisor de haz. Suponemos que el retraso de uno de los frentes de onda, generado por el primer divisor, es compensado cuando el otro frente atraviesa el segundo divisor. Cada frente de onda pasa por un prisma *dove*. Giramos un prisma imperceptiblemente, ocasionando la rotación infinitesimal de uno de los frentes respecto del otro. Sumando ambos campos obtenemos la distribución del campo sobre el plano de incidencia del IDRI. Finalmente calculamos la distribución de la irradiancia en el plano de observación.

En la figura 4.2 representamos el sistema estrella-planeta. Para que la figura sea clara, colocamos el plano de giro del planeta paralelo al plano de entrada del interferómetro. No obstante, es importante notar que los resultados que se obtienen a continuación pueden ser aplicados a planetas con su eje de rotación orientado en cualquier dirección*. α es el ángulo que el planeta subtende respecto de la dirección de la estrella, vistos desde tierra. Por cuestión de sencillez consideramos que el ángulo de giro del planeta es $\varphi - \pi$. De tal forma que la proyección del vector de propagación sobre el plano de observación (\hat{k}_{x-y}) queda en función del ángulo φ . El plano de entrada del interferómetro es paralelo al plano de observación, que se muestra en la figura 4.1.

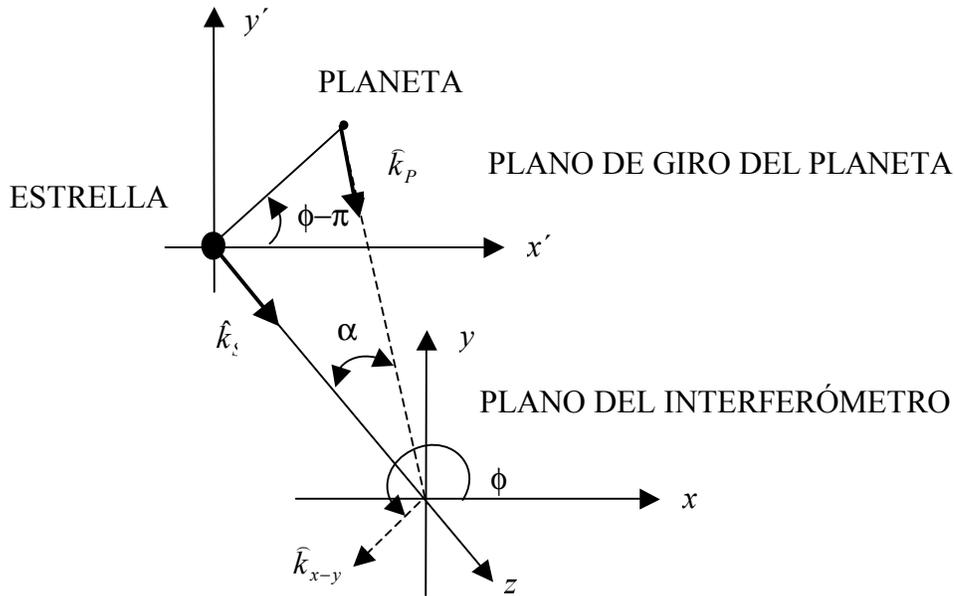


Figura 4.2. Sistema estrella-planeta

Debido a la enorme distancia que nos separa de la estrella, consideramos a modo de primera aproximación, que la estrella y el planeta son fuentes puntuales. Entonces el campo sobre el plano de entrada del interferómetro producido por la estrella es:

$$\Psi_s = A \exp[ik(\hat{k}_s \cdot \vec{r})]. \quad (4.4)$$

* En tal caso tanto α como φ serían función del tiempo, y el planeta 'visto' desde la tierra describiría una elipse. El hecho de que el planeta no se encuentre sobre el mismo plano de la estrella no requiere ninguna aproximación adicional.

Donde k (igual a $2\pi/\lambda$) es el número de onda, \hat{k}_s es la dirección del vector de propagación de la onda y \vec{r} representa los puntos sobre el plano de entrada del interferómetro. El plano de observación es perpendicular al eje del interferómetro.

Ya que el eje del telescopio está orientado exactamente en la dirección de la estrella tenemos que el vector de propagación es perpendicular al plano del interferómetro:

$$\hat{k}_s \cdot \vec{r} = \hat{k}_s \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = 0. \quad (4.5)$$

Esto implica que el campo sobre el plano de incidencia del interferómetro es uniforme:

$$\Psi_s = A. \quad (4.6)$$

Por otra parte, el campo producido por el planeta sobre el plano del interferómetro está dado por:

$$\Psi_p = a \exp[ik(\hat{k}_p \cdot \vec{r})]. \quad (4.7)$$

En esta ocasión el producto $\hat{k}_p \cdot \vec{r}$ es igual a

$$\hat{k}_p \cdot \vec{r} = (\cos \alpha \hat{k} + \cos \varphi \sin \alpha \hat{i} + \sin \varphi \sin \alpha \hat{j}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = x \cos \varphi \sin \alpha + y \sin \varphi \sin \alpha. \quad (4.8)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación 4.7 obtenemos:

$$\Psi_p = a \exp[ik_p (x \cos \varphi \sin \alpha + y \sin \varphi \sin \alpha)]. \quad (4.9)$$

En la figura 4.2 mostramos los ángulos φ y α . Para hacer más sucintos los cálculos, nos conviene abreviar las expresiones donde aparecen estos ángulos utilizando las relaciones

$$\mathfrak{S} = \cos \varphi \sin \alpha \quad \text{y} \quad \mathfrak{N} = \sin \varphi \sin \alpha . \quad (4.10)$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación 4.9 obtenemos

$$\Psi_p = a \exp[ik(\mathfrak{S}x + \mathfrak{N}y)]. \quad (4.11)$$

De acuerdo con el teorema de van Cittert-Zernike* los campos generados por la estrella y el planeta cumplen con el principio de superposición. Sumando las ecuaciones 4.6 y 4.11 obtenemos el campo del sistema estrella-planeta sobre el plano del interferómetro:

$$\Psi_{SP} = A + a \exp[ik(\mathfrak{S}x + \mathfrak{N}y)]. \quad (4.12)$$

El primer divisor (elemento D1 de la figura 4.1) separa el campo en dos frentes de onda. La mitad de la amplitud se refleja y la otra atraviesa el divisor. Uno de estos frentes mantiene la forma del campo hasta llegar al plano de observación. El otro frente es rotado infinitesimalmente. Antes de que rotar el frente de onda, resulta conveniente cambiar de coordenadas cartesianas a polares. De la ecuación 4.12, el campo en coordenadas polares es

$$\Psi_{SP} = A + a \exp[ik(\mathfrak{S}\rho \cos \theta + \mathfrak{N}\rho \sin \theta)]. \quad (4.13)$$

Rotando el frente de onda un ángulo $\Delta\theta$ obtenemos:

$$\Psi_{SP\Delta} = A + a \exp\{ik\rho[\mathfrak{S} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)]\}. \quad (4.14)$$

Debido a que ambos frentes se dividen un par de veces al atravesar los dos divisores del interferómetro (elementos D1 y D2 de la figura 4.1), es necesario incluir un factor de 1/4 en la ecuación 4.14. Al finalizar el desarrollo (ecuación 4.18) incluiremos dicho factor para obtener la ecuación correcta (ecuación 4.19).

* Como vimos en el capítulo III, el teorema de van Cittert Zernike establece que el campo producido por una fuente extendida incoherente es igual al campo producido por una fuente coherente de acuerdo en el régimen de Fraunhofer.

En la ecuación 4.14 hemos supuesto que el haz rotado está en fase respecto del haz sin rotar. En general podemos considerar que el frente de onda rotado tiene una fase arbitraria δ respecto del frente original:

$$\Psi_{SP\Delta} = A \exp(i\delta) + a \exp\{i(\delta + k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)])\}. \quad (4.15)$$

La fase relativa se debe a que hay una DCO entre el camino recorrido por ambos frentes de onda. Recordemos que la fase relativa está relacionada con la DCO por medio de:

$$\delta = \frac{DCO \cdot 2\pi}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Sumando las irradiancias de los haces rotado y sin rotar (ecuación 4.15 y 4.13) obtenemos el campo en la pantalla del interferómetro:

$$\begin{aligned} \Psi_{INT} = & A[1 + \exp(i\delta)] + a \exp\{i(\delta + k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)])\} \\ & + a \exp[ik\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)] . \end{aligned} \quad (4.17)$$

La irradiancia en la pantalla del interferómetro la obtenemos al sustituir el campo (ecuación 4.17) en la definición de irradiancia (ecuación 4.1):

$$\begin{aligned} I_{INT} = & \{A[1 + \exp(i\delta)] + a \exp\{i(\delta + k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)])\} + a \exp[ik\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)]\} \\ & \times \{A[1 + \exp(-i\delta)] + a \exp\{-i(\delta + k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)])\} + a \exp[-ik\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)]\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desarrollando los productos de la ecuación 4.18, aproximando para $\Delta\theta$ pequeño, utilizando identidades trigonométricas y simplificando^{*}, encontramos que la irradiancia es

$$\begin{aligned} I_{INT} = & 2a^2 \{1 + \cos[k\rho(\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta) - \delta]\} + 2A^2 (1 + \cos \delta) \\ & + 2Aa \{ \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)] + \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta) - \delta] \} \\ & + 2Aa \cos \{k\rho[\Im(\cos \theta - \sin \theta \cdot \Delta\theta) + \Re(\sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta)] + \delta\} \end{aligned}$$

^{*} En el apéndice I presentamos el desarrollo completo.

$$+ 2Aa \cos \{k\rho[\Im(\cos \theta - \sin \theta \cdot \Delta\theta) + \Re(\sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.19)$$

Incluyendo el factor debido a la división de los frentes de onda y cambiando de coordenadas polares a cartesianas, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)a^2 \{1 + \cos[k \cdot \Delta\theta(\Im \cdot y - \Re \cdot x) - \delta]\} + (1/2)A^2(1 + \cos \delta) \\ & + (1/2)Aa \{\cos[k(\Im x + \Re y)] + \cos[k(\Im x + \Re y) - \delta]\} \\ & + (1/2)Aa \cos \{k[\Im(x - y \cdot \Delta\theta) + \Re(y + x \cdot \Delta\theta)]\} \\ & + (1/2)Aa \cos \{k[\Im(x - y \cdot \Delta\theta) + \Re(y + x \cdot \Delta\theta)] + \delta\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.2.3. Cancelación de la luz de la estrella

Para poder observar la señal del planeta de la manera más nítida posible, es necesario anular la luz de la estrella (segundo término de la ecuación 4.19). Esto se alcanza cuando

$$1 + \cos \delta = 0 \therefore \delta = (2n+1)\pi, \quad \forall n \in N. \quad (4.21)$$

La intensidad para dicha fase está dada por

$$I_{INT} = (1/2)a^2 \{1 - \cos[k \cdot \Delta\theta(\Im \cdot y - \Re \cdot x)]\}. \quad (4.22)$$

Hemos demostrado que cuando la estrella se encuentra sobre el eje de observación y la diferencia de fase es igual a π , el IDRI cancela la luz de la estrella. Este resultado está de acuerdo con lo obtenido en trabajos anteriores: en 1996 sugerimos que un IDRI puede cancelar la luz de la estrella^[4] y en 1999 lo demostramos por primera vez.^[25]

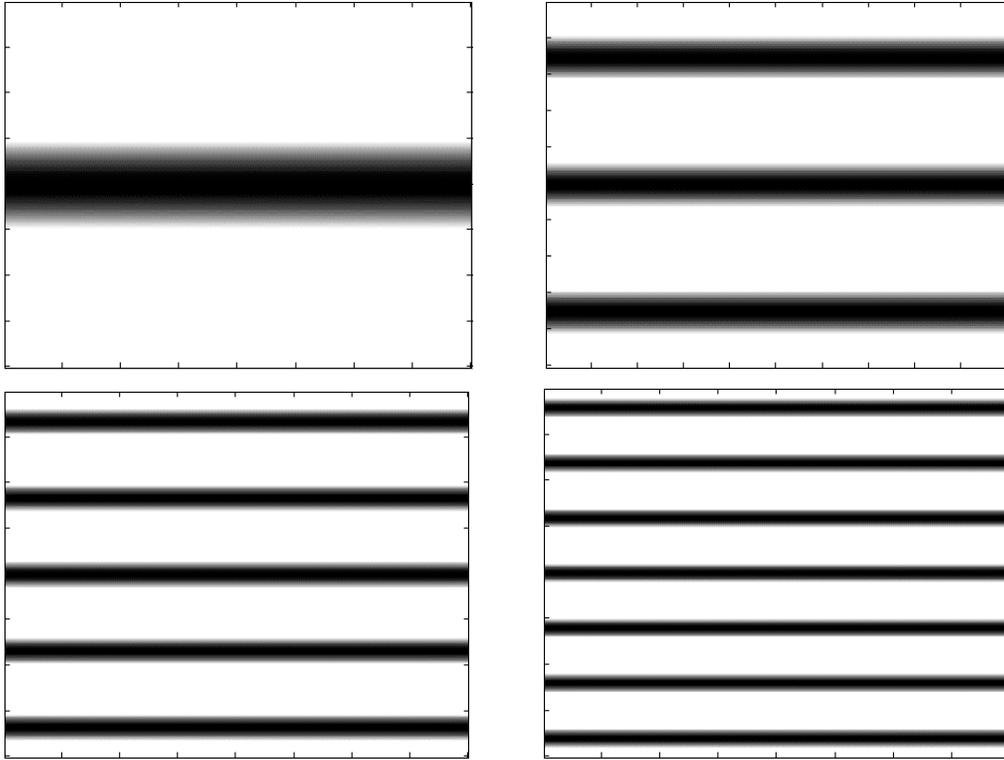


Figura 4.3. Interferogramas para diferentes desplazamientos de rotación $\Delta\theta$: 0.0015rad, 0.003rad, 0.005rad y 0.007rad.

A partir de la ecuación 4.22 simulamos los interferogramas que se muestran en la figura 4.3. Los interferogramas corresponden a diferentes valores del desplazamiento rotacional mientras mantenemos constantes los demás parámetros: ángulo de inclinación ($\alpha=0.0001\text{rad}$), número de onda ($k=300,000\text{m}^{-1}$) y orientación del planeta ($\varphi=0$).

Los interferogramas de la figura 4.3 también pueden ser obtenidos al simular la ecuación 4.22 cuando mantenemos constantes el desplazamiento rotacional ($\Delta\theta=0.003\text{rad}$), el número de onda ($k=300,000\text{m}^{-1}$) y la orientación del planeta ($\varphi=0$); mientras variamos el ángulo de inclinación: 0.00005, 0.0001, 0.000167 y 0.000233rad.

Podemos concluir que los interferogramas iguales corresponden al mismo producto del desplazamiento rotacional por el ángulo de inclinación. Esto es consecuencia de que las constantes \mathfrak{S} y \mathfrak{K} dependen linealmente del ángulo de inclinación de la estrella.

De acuerdo con la ecuación 4.10, las constantes \mathfrak{S} y \mathfrak{K} son función del ángulo de orientación del planeta. Por simple inspección de la ecuación 4.22, podemos concluir que los interferogramas rotan conforme el planeta gira alrededor de la estrella. En la figura 4.4 se muestran las simulaciones de los interferogramas generados por un planeta rotando alrededor de la estrella.

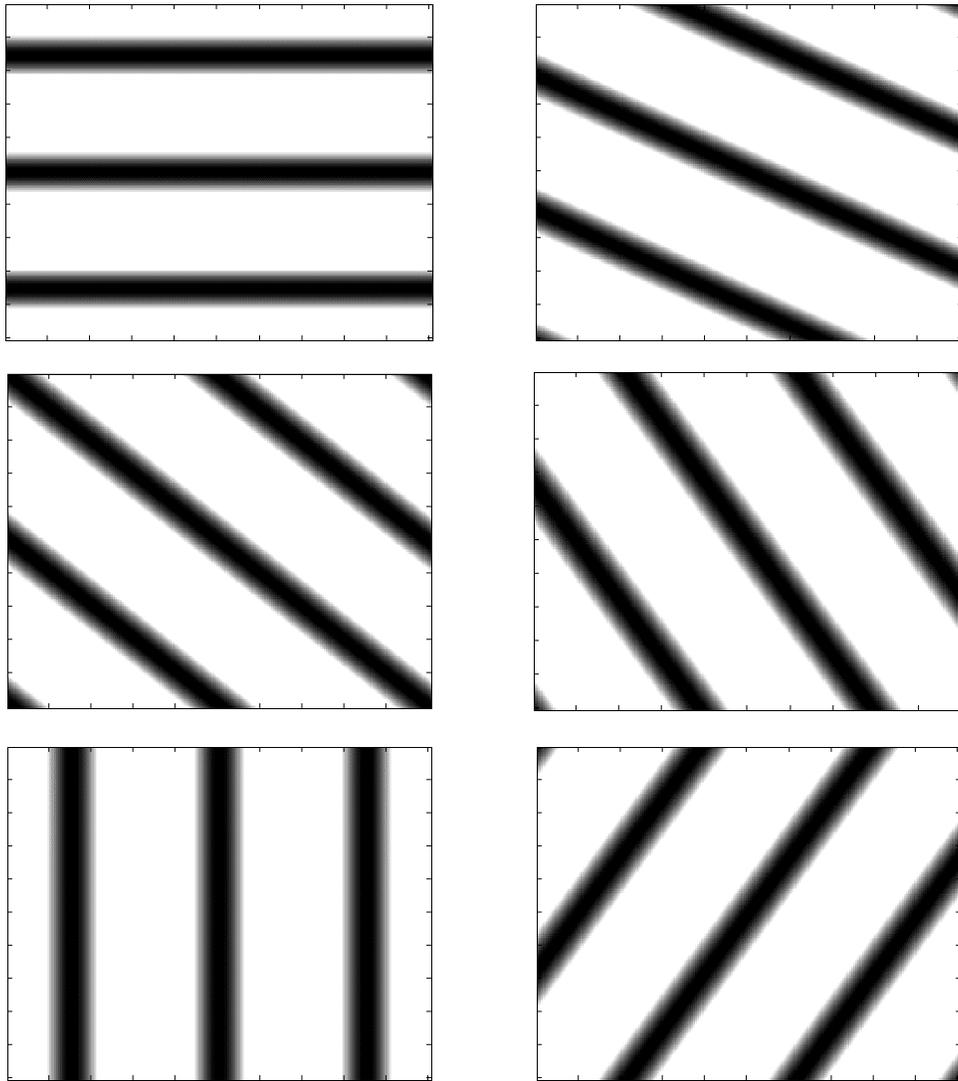


Figura 4.4. Interferogramas para $\delta=0$. Con φ igual a 0° , 30° , 45° , 60° , 90° y 120° .

4.2.4. Simetría de rotación axial

Como consecuencia de la simetría que presenta el IDR podemos esperar que las franjas del patrón de interferencia roten conforme el planeta gire alrededor de la estrella; aún cuando la fase sea diferente de π .

De acuerdo con la ecuación 4.10, cuando el planeta se encuentra sobre el eje x las constantes se reducen a

$$\mathfrak{S} = \sin \alpha \quad y \quad \mathfrak{K} = 0. \quad (4.23)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4.20 obtenemos que

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)a^2 \{1 + \cos[k \cdot \Delta\theta(\sin \alpha \cdot y) - \delta]\} + (1/2)A^2(1 + \cos \delta) \\ & + (1/2)Aa \{\cos[k \sin \alpha x] + \cos[k \sin \alpha x - \delta]\} + (1/2)Aa \cos\{k \sin \alpha(x - y \cdot \Delta\theta)\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k \sin \alpha(x - y \cdot \Delta\theta) + \delta\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Es posible recuperar la ecuación 4.20 a partir de una rotación de las coordenadas de la ecuación 4.24 haciendo el siguiente cambio de variables:

$$x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \quad y \quad y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad (4.25)$$

Sustituyendo en la ecuación 4.24 obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)a^2 \{1 + \cos[k \cdot \Delta\theta \sin \alpha(-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) - \delta]\} + (1/2)A^2(1 + \cos \delta) \\ & + (1/2)Aa \{\cos[k \sin \alpha x] + \cos[k \sin \alpha x - \delta]\} + (1/2)Aa \cos\{k \sin \alpha(x - y \cdot \Delta\theta)\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k \sin \alpha(x - y \cdot \Delta\theta) + \delta\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Reacomodando términos y sustituyendo \mathfrak{S} y \mathfrak{K} , la ecuación 4.26 se transforma nuevamente en la ecuación 4.20.

Para simplificar los desarrollos posteriores supondremos que el planeta se encuentra sobre el eje x , lo cual, como hemos visto, no conlleva pérdida de generalidad.

4.2.5. Visibilidad del planeta

En la figura 4.5 mostramos la simulación de varios interferogramas para distintos valores de la fase relativa. Es claro que las franjas desaparecen rápidamente conforme la fase se aleja de π . Por lo tanto, para poder detectar el planeta es fundamental mantener la DCO próxima a $\lambda/2$.

Una forma de establecer la brillantez de las franjas consiste en calcular la visibilidad de la señal. La visibilidad se define como la razón de la diferencia de las intensidades máxima y mínima entre la suma de ambas ^[23]:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (4.27)$$

Esta definición es adecuada cuando las franjas son generadas únicamente por la irradiancia del planeta. A partir de la ecuación 4.20 es fácil notar que cuando la fase relativa es diferente de π las franjas dependen tanto de la irradiancia del planeta como de la irradiancia de la estrella. Esto significa que la visibilidad, tal como la hemos definido, aunque determina el grado de nitidez de las franjas del interferograma, no nos permite obtener la ‘visibilidad’ de la señal del planeta. Por lo tanto necesitamos una relación alternativa, que nos permita establecer el grado de nitidez de la señal del planeta.

Una manera alternativa de definir la visibilidad es la siguiente:

$$V = \frac{(I_P)_{\max} - (I_P)_{\min}}{(I_{INT})_{\max}} = \frac{(I_{INT} - I_S)_{\max} - (I_{INT} - I_S)_{\min}}{(I_{INT})_{\max}}. \quad (4.28)$$

Donde I_P se refiere a la irradiancia que aparece por la presencia del planeta. Se calcula restando la irradiancia generada por la estrella sin planeta a la irradiancia del sistema estrella-planeta. El término I_{INT} denota la irradiancia debida al sistema estrella-planeta (ecuación 4.20). Para calcular la irradiancia producida por la estrella en ausencia de

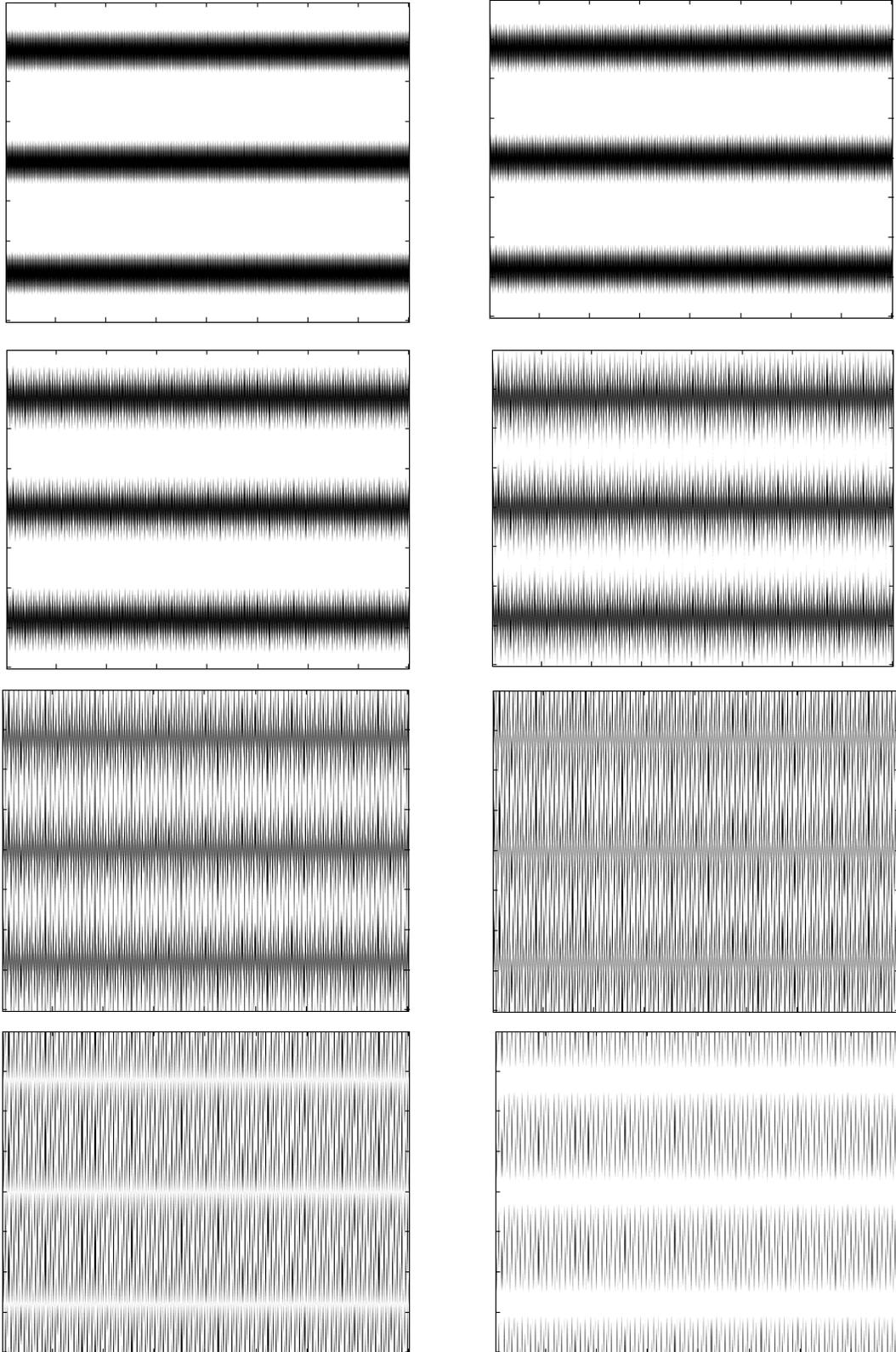


Figura 4.5. Interferogramas con DCO igual a: $\lambda/2+\lambda/10000$, $\lambda/2+\lambda/5000$, $\lambda/2+\lambda/2500$, $\lambda/2+\lambda/1500$, $\lambda/2+\lambda/1000$, $\lambda/2+\lambda/700$, $\lambda/2+\lambda/500$ y $\lambda/2+\lambda/300$.

planeta I_s , basta con evaluar la irradiancia del sistema estrella-planeta considerando que la amplitud del campo del planeta es igual a cero.

Evaluando la ecuación 4.20, mientras consideramos que el campo del planeta es igual a cero, obtenemos que la irradiancia de la estrella esta dada por

$$I_s = (1/2)A^2(1 + \cos \delta). \quad (4.29)$$

Esto significa que en ausencia del planeta la estrella no genera franjas. Sin embargo, la interferencia entre la estrella y el planeta sí genera franjas y origina parte de la señal del planeta I_p . Es precisamente esta interferencia la que distorsiona las franjas horizontales de la figura 4.5 y ocasiona que la visibilidad disminuya.

En la figura 4.6 mostramos una gráfica de la visibilidad como función de la DCO. Obtenemos la curva por métodos numéricos* a partir de las simulaciones de los interferogramas de la estrella con y sin planeta.

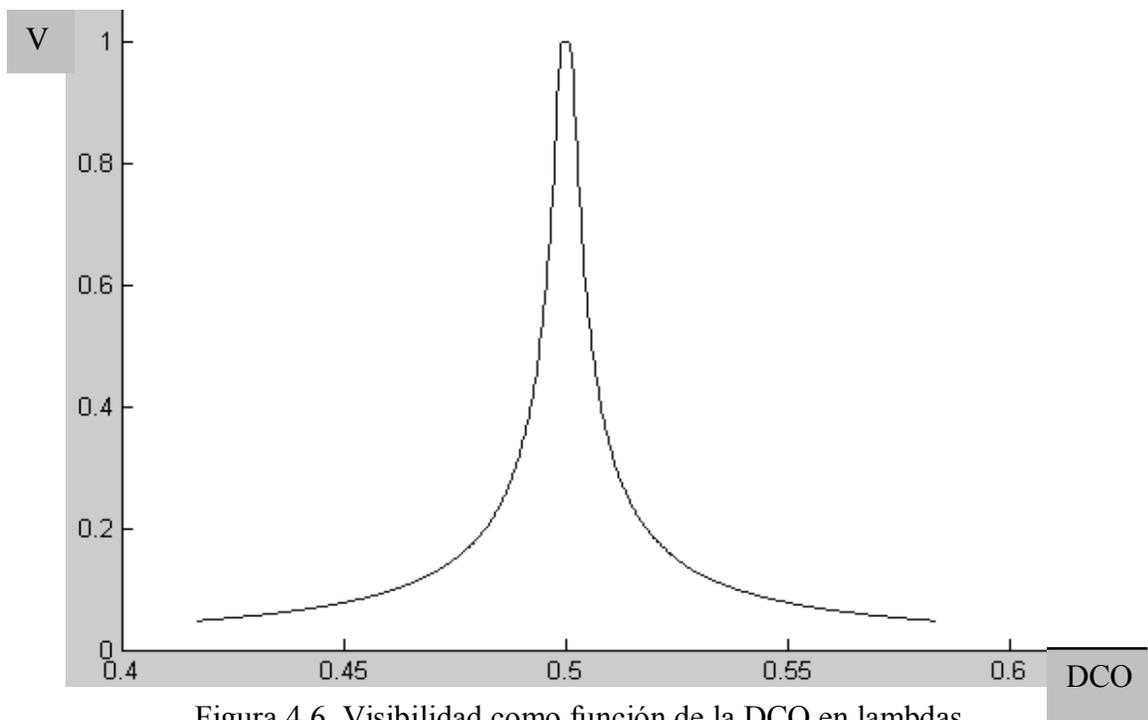


Figura 4.6. Visibilidad como función de la DCO en lambdas.

* La obtención de la expresión analítica queda como trabajo futuro.

Se ve claramente que cuando la DCO es igual a λ la visibilidad está en su máximo. Conforme nos alejamos de λ la visibilidad decrece abruptamente hasta alcanzar el mínimo de 0.0126 cuando la DCO es cero (o un múltiplo entero de λ).

4.2.6. Conclusiones

Considerando que la estrella se encuentra sobre el eje de rotación del interferómetro y que existe una DCO entre los brazos del interferómetro, obtuvimos la expresión analítica de la irradiancia debida a un sistema estrella-planeta. Demostramos que la luz de la estrella se cancela cuando la diferencia de fase es igual a π . Simulamos algunos interferogramas para diferentes valores del ángulo de inclinación, y obtuvimos la gráfica de la visibilidad del planeta en función de la DCO.

Encontramos que cuando la fase se aleja de π la visibilidad disminuye rápidamente; alcanzando la cota inferior de 0.0126 cuando la fase es igual a 2π . Si bien es pequeña, esta visibilidad es tres órdenes de magnitud mayor que la visibilidad del planeta cuando es observado directamente*.

* La visibilidad del planeta observado directamente es simplemente la razón entre las irradiancias del planeta y de la estrella.

4.3. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDR considerando que la estrella tiene un pequeño ángulo de inclinación

4.3.1. Introducción

Las limitaciones técnicas actuales no nos permiten dirigir el telescopio en la dirección de la estrella con total precisión. Siempre existe un pequeño ángulo subtendido entre la dirección en que observa el telescopio y la dirección exacta de la estrella. Por tal motivo, resulta conveniente conocer los patrones de interferencia generados por el sistema estrella-planeta cuando la estrella no está sobre el eje del telescopio.

Obtenemos la expresión analítica de la irradiancia de un sistema estrella-planeta observado con un IDRI, considerando que la estrella mantiene un ángulo de inclinación respecto al eje del interferómetro. Suponemos que la DCO es igual a π . Mostramos algunas simulaciones de los interferogramas para distintos valores del ángulo de inclinación y obtenemos la gráfica de la visibilidad del planeta en función del ángulo de inclinación.

4.3.2. Obtención de la expresión analítica

En la figura 4.7 mostramos un esquema del sistema estrella-planeta. La dirección de observación del telescopio y el eje del interferómetro se encuentran sobre el eje z . La letra β representa el ángulo de inclinación de la estrella respecto del eje z y ϕ establece la orientación de la estrella sobre el plano $x'-y'$ alrededor del eje z . El planeta gira sobre el plano $x''-y''$. Denotamos con α al ángulo que subtende el planeta con la estrella (vistos desde la tierra) y φ indica el ángulo de orientación del planeta. Tanto el plano $x'-y'$ como el plano $x''-y''$ son paralelos al plano del interferómetro, $x-y$.*

* Hacemos esta consideración para que el esquema sea claro. Sin embargo, el desarrollo siguiente es válido en caso de que el planeta gire alrededor de otro eje. El hecho de que el planeta no se encuentren en un plano paralelo al plano del interferómetro no añade ninguna suposición adicional, debido a la enorme distancia que nos separa de la estrella.

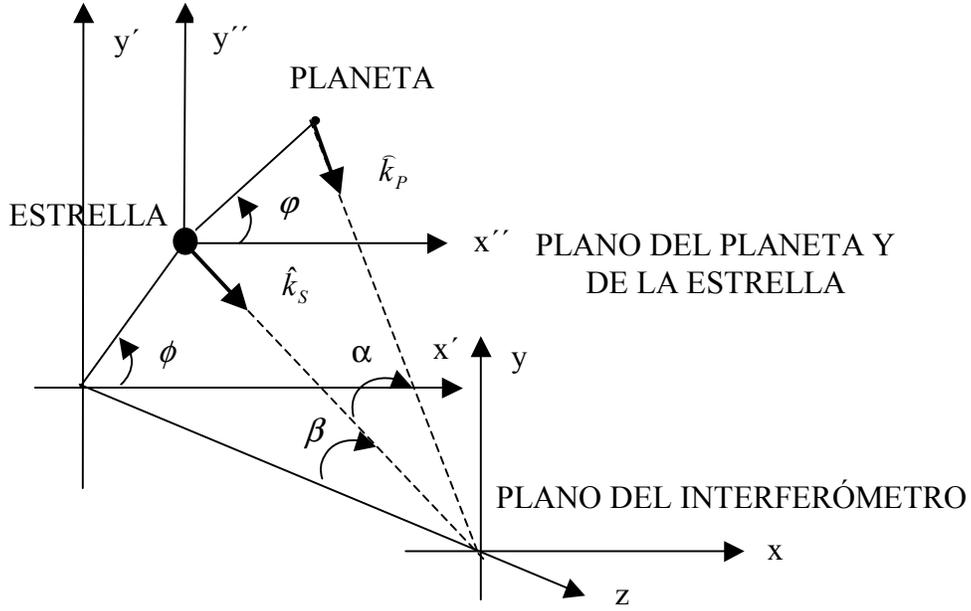


Figura 4.7. Planeta girando alrededor de una estrella. La estrella está inclinada.

Como consecuencia de la inclinación de la estrella el campo deja de ser constante sobre el plano del interferómetro. El campo de la estrella está dado por

$$\Psi_s = A \exp[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)]. \quad (4.30)$$

Donde las constantes cumplen con las siguientes relaciones

$$\diamond = \cos \phi \sin \beta \quad \text{y} \quad \wp = \sin \phi \sin \beta. \quad (4.31)$$

Volvemos a expresar el campo del planeta por la ecuación 4.11:

$$\Psi_p = a \exp[ik\rho(\mathfrak{S} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta)]. \quad (4.32)$$

En esta ocasión las constantes están dadas por*

* Para $\beta=0$ recuperamos las constantes de la sección anterior, cuando consideramos que la estrella no estaba inclinada (ecuación 4.10):

$$\mathfrak{S} = \frac{\tan \alpha \cos \phi}{\sqrt{(\tan \alpha \cos \phi)^2 + (\tan \alpha \sin \phi)^2 + 1}} = \frac{\tan \alpha \cos \phi}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{\tan \alpha \cos \phi}{\sec \alpha} = \sin \alpha \cos \phi$$

$$\mathfrak{S} = \frac{\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi}{\sqrt{(\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi)^2 + (\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi)^2 + 1}}$$

y

$$\mathfrak{K} = \frac{\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{(\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi)^2 + (\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi)^2 + 1}}.$$

El campo producido por el sistema estrella-planeta sobre el plano de entrada del interferómetro es*

$$\Psi_{SP} = A \exp[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + a \exp[ik\rho(\mathfrak{S} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta)]. \quad (4.34)$$

Rotando el campo un ángulo $\Delta\theta$ y considerando una fase relativa igual a π , llegamos a que

$$\begin{aligned} \Psi_{SP\Delta} &= A \exp\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \exp(i\pi) \\ &\quad + a \exp\{ik\rho[\mathfrak{S} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \exp(i\pi) \\ &= -A \exp\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\ &\quad - a \exp\{ik\rho[\mathfrak{S} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

El campo resultante en el plano de interferencia está dado por

$$\begin{aligned} \Psi_{INT} &= Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] - Ae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\ &\quad + ae[ik\rho(\mathfrak{S} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta)] - ae\{ik\rho[\mathfrak{S} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Es necesario incluir un factor de '1/4' en la ecuación anterior, ocasionado por la división de los haces al atravesar un par de veces los divisores del interferómetro. Al finalizar el

$$y \quad \mathfrak{K} = \frac{\tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{(\tan \alpha \cos \varphi)^2 + (\tan \alpha \sin \varphi)^2 + 1}} = \frac{\tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{\tan \alpha \sin \varphi}{\sec \alpha} = \sin \alpha \sin \varphi.$$

* El teorema de van Cittert-Zernike permite trabajar con fuentes incoherentes como si fueran coherentes. Además suponemos que el factor de coherencia entre la estrella y el planeta es igual a uno. En el capítulo III se deduce el teorema y se analiza el caso de dos fuentes lejanas.

desarrollo (ecuación 4.38) incluiremos dicho factor para obtener la ecuación correcta (ecuación 4.39).

La irradiancia en el plano de observación la obtenemos al sustituir la ecuación 4.36 en la ecuación 4.1:

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & (Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] - Ae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
& + ae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] - ae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
& \times (Ae[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] - Ae\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
& + ae[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] - ae\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}). \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Desarrollando los productos de la ecuación 4.37, aproximando para $\Delta\theta$ pequeño, utilizando identidades trigonométricas y simplificando*, llegamos a que la irradiancia es

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & 2A^2 + 2a^2 - 2A^2 \cos\{k\rho[\diamond \sin \theta \cdot \Delta\theta - \wp \cos \theta \cdot \Delta\theta]\} \\
& - 2a^2 \cos\{k\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\} + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph)]\} \\
& - 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - \aleph \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph + \Im \cdot \Delta\theta)]\} \\
& - 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph - \diamond \cdot \Delta\theta)]\} \\
& + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - (\aleph - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph + (\Im - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Incluyendo el factor debido a la división del frente de onda, y cambiando de coordenadas polares a cartesianas obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & (1/2)A^2 + (1/2)a^2 - (1/2)A^2 \cos\{k[y \cdot \diamond \cdot \Delta\theta - x \cdot \wp \cdot \Delta\theta]\} \\
& - (1/2)a^2 \cos\{k[y \cdot \Im \cdot \Delta\theta - x \cdot \aleph \cdot \Delta\theta]\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im) + y \cdot (\wp - \aleph)]\} \\
& - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im - \aleph \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \aleph + \Im \cdot \Delta\theta)]\} \\
& - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \aleph - \diamond \cdot \Delta\theta)]\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im - (\aleph - \wp) \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \aleph + (\Im - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

* En el apéndice II se muestra el desarrollo completo.

Es fácil comprobar que cuando la inclinación de la estrella es igual a cero la ecuación 4.39 se reduce a la ecuación 4.22*. Lo cual demuestra que el desarrollo matemático de la presente sección es consistente con el desarrollo de la sección 4.2.2.

El patrón de interferencia depende de las irradiancias de la estrella y del planeta, así como de otros parámetros. En especial, nos interesa conocer cómo cambian los interferogramas conforme varía el ángulo de inclinación de la estrella.

4.3.3. Dependencia de la visibilidad respecto del ángulo de inclinación

Utilizando la ecuación 4.39 simulamos los interferogramas que se muestran en la figura 4.8. Estos corresponden a distintas posiciones del planeta que orbita la estrella (ver figura 4.7). Consideramos que la irradiancia de la estrella es 100,000 veces mayor que la del planeta. Convenimos que la estrella está sobre el eje de las 'x' y que tiene un ángulo de inclinación de $\beta=0.0000005\text{rad}$ ($\sim 0.1''$). El número de onda es $k=300,000\text{m}^{-1}$, el desplazamiento rotacional $\Delta\theta=0.003\text{rad}$ y el ángulo subtendido por el planeta respecto a la estrella es $\alpha=0.00005\text{rad}$ ($\sim 10''$).

Basados en los interferogramas de la figura 4.8 podemos concluir que la estrella genera una franja oscura, y que el planeta la distorsiona de distinta manera de acuerdo con su orientación. La distorsión de las franjas es precisamente lo que nos interesa detectar para poder concluir que hay algún planeta circundando la estrella.

En la primera columna de la figura 4.9 mostramos la simulación de los interferogramas para distintos valores del ángulo de inclinación mientras la estrella y el planeta se

* Si $\beta=0$ entonces $\diamond = \varnothing = 0$. En este caso la irradiancia está dada por

$$I_{INT} = (1/2)A^2 + (1/2)a^2 - (1/2)A^2 - (1/2)a^2 \cos\{k[y \cdot \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta - x \cdot \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta]\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S}) + y \cdot (-\mathfrak{N})]\} - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S} - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (-\mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)]\} - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S}) + y \cdot (-\mathfrak{N})]\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S} - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (-\mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)]\} .$$

Cancelando términos obtenemos nuevamente la ecuación 4.22:

$$I_{INT} = (1/2)a^2(1 - \cos\{k(y \cdot \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta - x \cdot \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta)\}) .$$

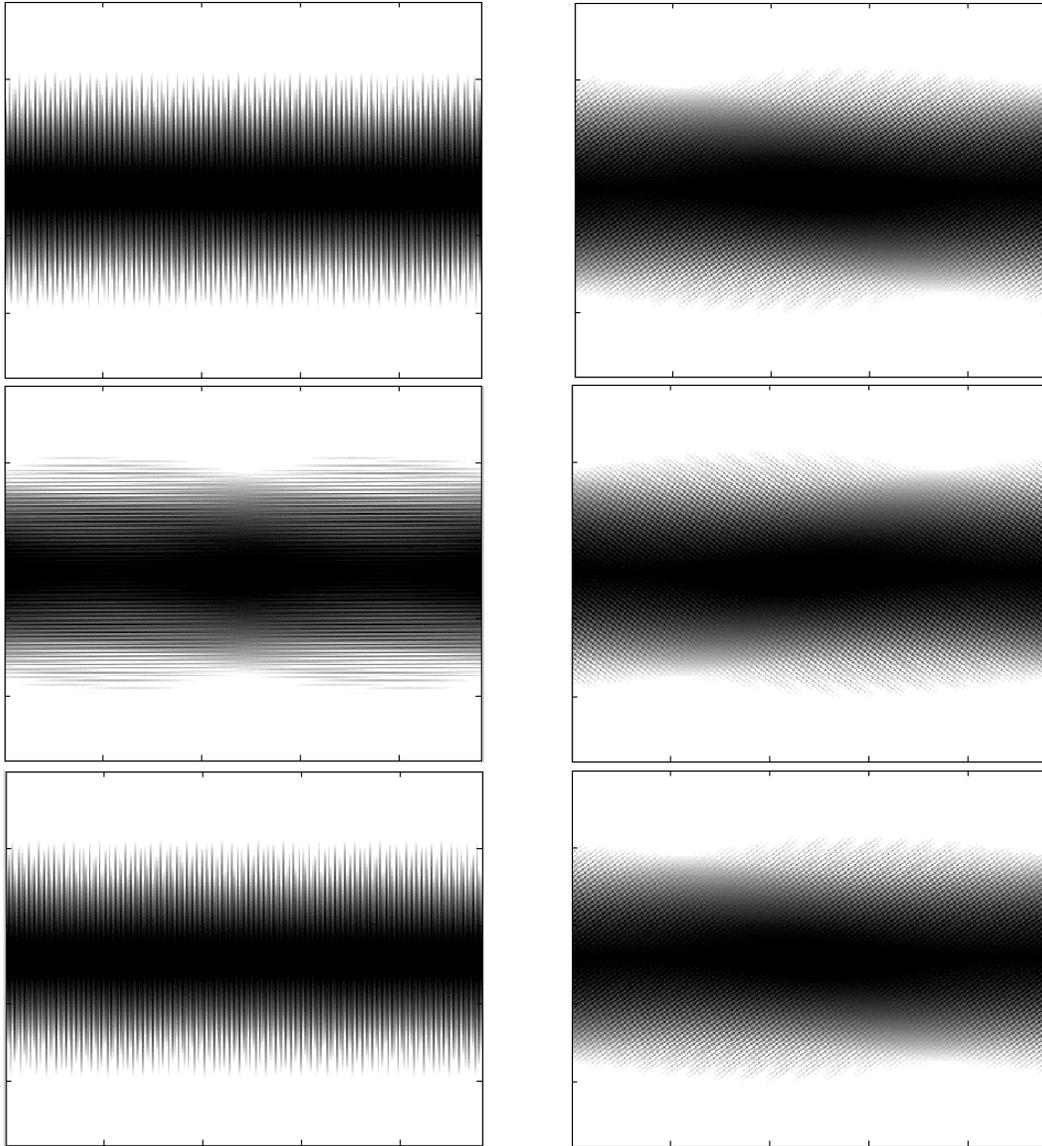


Figura 4.8. Interferogramas para diferentes orientaciones del planeta: 0° , 45° , 90° , 135° , 180° y 225° . Suponemos que la estrella se encuentra sobre el eje x .

mantienen en la dirección de las x . La segunda columna corresponde a la señal del planeta^{*}. Los valores del desplazamiento rotacional, del número de onda y de la inclinación del planeta respecto de la estrella son: $\Delta\theta=0.003\text{rad}$, $k=300,000\text{m}^{-1}$ y $\alpha=10''$.

^{*} Según fue definida en la ecuación 4.28, la señal del planeta es igual a la señal del sistema estrella-planeta menos la señal de la estrella en ausencia del planeta.

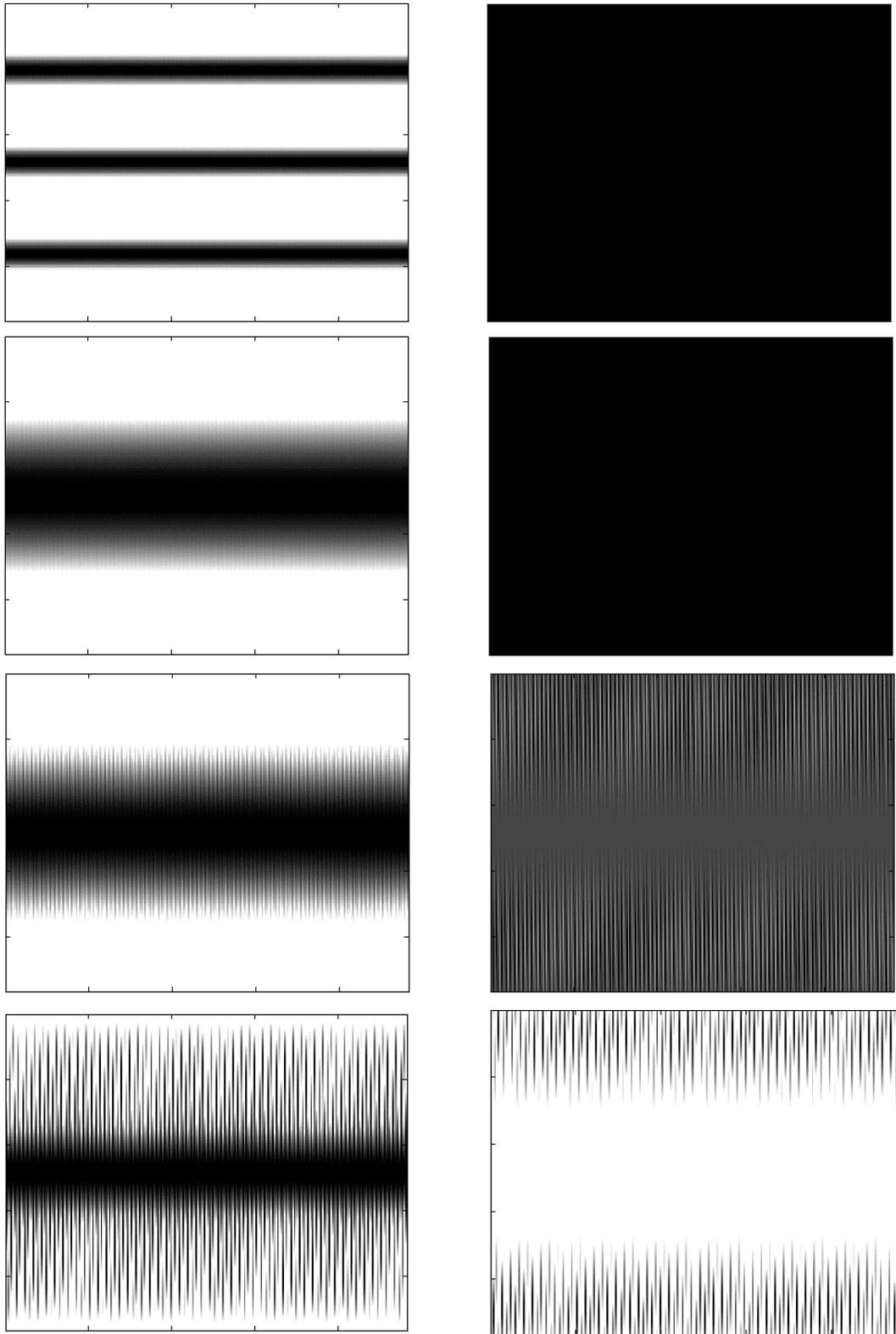


Figura 4.9. Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes inclinaciones de la estrella: 0.0001, 0.00001, 0.000001 y 0.0000001rad. La estrella y el planeta están sobre el eje x

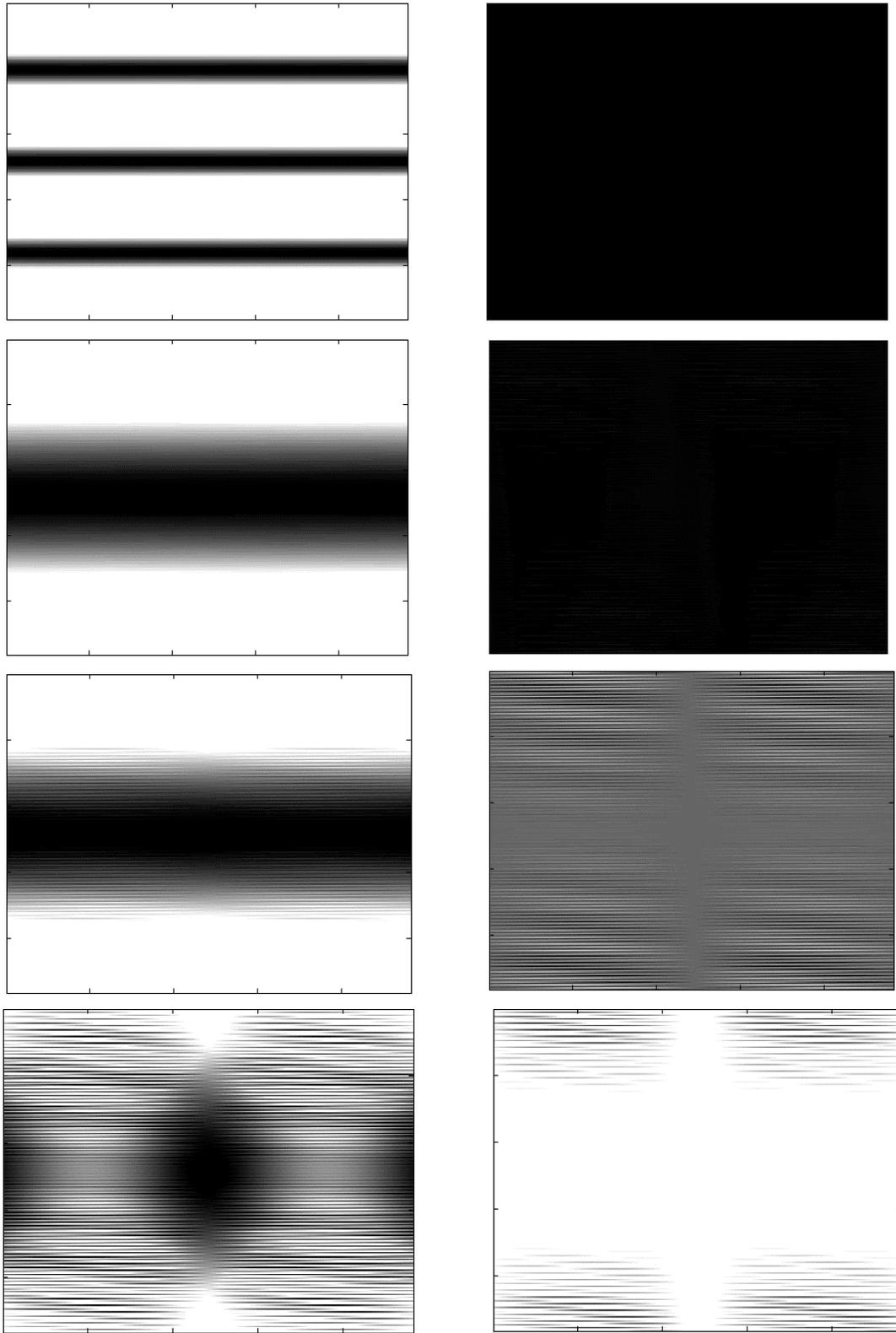


Figura 4.10. Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes inclinaciones de la estrella: 0.0001, 0.00001, 0.000001 y 0.0000001rad. La estrella está sobre el eje x y el planeta sobre el eje y

En la figura 4.10 se muestran los interferogramas para distintas inclinaciones de la estrella. La diferencia con la figura 4.9 es únicamente la orientación del planeta, que en esta ocasión tiene un ángulo de inclinación 90° respecto del eje de las x'' . Las figuras 4.9 y 4.10 nos dan una idea clara de cómo varían los interferogramas de un sistema estrella-planeta cuando la dirección del telescopio no corresponde exactamente con la dirección de la estrella.

Cuando el ángulo de inclinación es grande, las franjas son generadas únicamente por la estrella. Estos interferogramas pueden servir para alinear el eje del interferómetro con la dirección de la estrella.

A partir de los interferogramas de las figuras 4.9 y 4.10 podemos concluir que conforme la dirección del telescopio corresponde con la dirección de la estrella, la señal del planeta se vuelve más nítida. Para medir la brillantez de la señal del planeta utilizamos nuevamente la definición de visibilidad de la sección 4.2.5:

$$V = \frac{(I_{INT} - I_S)_{\max} - (I_{INT} - I_S)_{\min}}{(I_{INT})_{\max}}. \quad (4.40)$$

En la figura 4.11 mostramos la dependencia de la visibilidad como función del ángulo de inclinación de la estrella. Cada curva corresponde a una orientación distinta del planeta respecto de la estrella. Trazamos las curvas para los siguientes valores del ángulo ϕ : 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90° . Las visibilidades fueron obtenidas numéricamente a partir de las simulaciones de los interferogramas y de la señal del planeta (figuras 9 y 10). Mantuvimos constantes las demás variables: $\phi=0$, $k=300,000\text{m}^{-1}$, $\Delta\theta=0.003\text{rad}$ y $\alpha=0.00005\text{rad}$ ($\sim 10''$).

En la figura 4.11, podemos observar que existe poca diferencia entre las visibilidades para las distintas orientaciones del planeta. Además es muy notorio que una pequeña inclinación del ángulo de la estrella ocasiona una caída abrupta en la visibilidad.

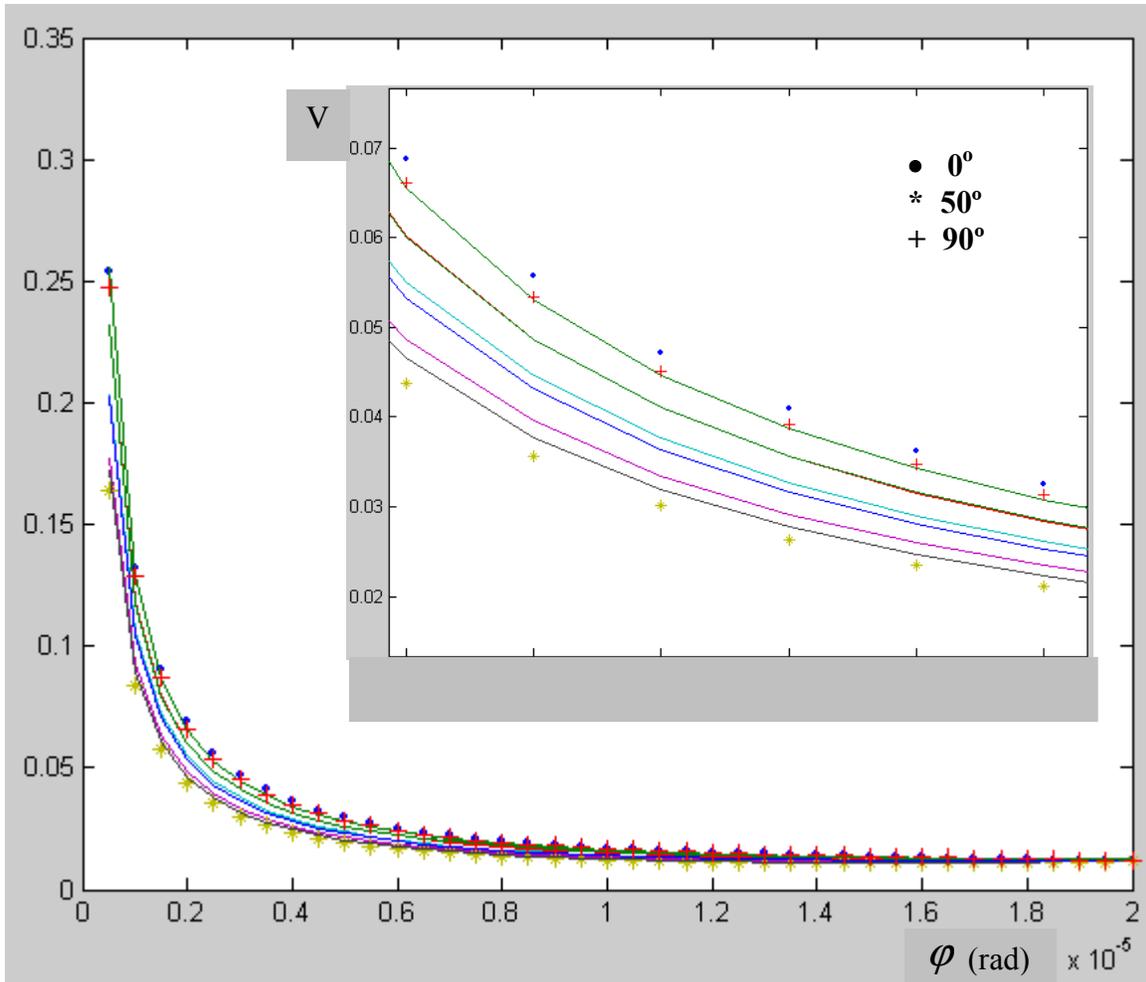


Figura 4.11 Gráfica de la visibilidad en función del ángulo de inclinación de la estrella. La estrella se encuentra sobre el eje de las x . Las líneas continuas corresponden a valores de 10, 20, 30, 40, 60, 70 y 80° de φ . Los puntos son los valores para 0° , los asteriscos para 50° y las cruces para 90° .

4.3.4. Conclusiones

Consideramos que la estrella se encuentra fuera del eje de rotación del interferómetro y que la DCO entre los brazos del interferómetro es igual a π . Obtuvimos la expresión analítica para la irradiancia debida al sistema estrella-planeta. Simulamos algunos interferogramas para distintos valores del ángulo de inclinación de la estrella y obtuvimos la gráfica de la visibilidad del planeta en función del ángulo de inclinación. Sugerimos que el patrón de interferencia producido por la estrella puede servir para dirigir el interferómetro en dirección de la estrella. Esto es muy importante ya que la visibilidad disminuye abruptamente conforme el ángulo de inclinación aumenta.

4.4. Patrón de interferencia de un sistema estrella-planeta obtenido con un IDR considerando que la estrella tiene un pequeño ángulo de inclinación y que hay DCO

4.4.1. Introducción

En las secciones previas establecimos la dependencia de la irradiancia respecto de la DCO y de la inclinación de la estrella. Encontramos que la visibilidad del planeta disminuye rápidamente cuando la DCO se separa de $\lambda/2$, mientras la estrella está sobre el eje del interferómetro. Por otra parte advertimos que la visibilidad disminuye drásticamente conforme aumenta la inclinación de la estrella, al tiempo que mantenemos en π la DCO.

Se podría pensar que cuando la estrella se encuentra inclinada y la DCO es diferente de π , la suma de ambos efectos contribuirá a que la señal del planeta se desvanezca. Sin embargo, a continuación demostramos que la visibilidad depende preponderantemente de la inclinación de la estrella. Habiendo un efecto apreciable de la DCO sobre la visibilidad sólo para ángulos pequeños de inclinación (del orden de μrad).

4.4.2. Obtención de la expresión general

Consideramos que la estrella subtende un ángulo de inclinación β respecto del eje del interferómetro. El esquema del sistema estrella-planeta es el mismo que se muestra en la figura 4.7 de la sección 4.3.2. La dirección de observación del telescopio y el eje del interferómetro están sobre el eje z . ϕ es el ángulo de giro de la estrella alrededor del eje z , sobre el plano $x'-y'$. Denotamos con α el ángulo que subtende el planeta con la estrella (vistos desde Tierra) y con φ indicamos el ángulo de giro del planeta sobre el plano $x''-y''$. Tanto el plano $x'-y'$ como el plano $x''-y''$ son paralelos al plano del interferómetro, $x-y$.*

El campo producido por el sistema estrella-planeta sobre el plano de incidencia del interferómetro está dado por la ecuación 4.34:

* Hacemos esta consideración para que el esquema sea claro. Sin embargo, el desarrollo siguiente es válido en caso de que el planeta gire alrededor de otro eje. El hecho de que el planeta no se encuentren en un plano paralelo al plano del interferómetro no añade ninguna suposición adicional.

$$\Psi_{SP} = A \exp[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + a \exp[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)]. \quad (4.41)$$

Donde los constantes cumplen con las ecuaciones 4.31 y 4.33:

$$\diamond = \cos \phi \sin \beta \quad \text{y} \quad \wp = \sin \phi \sin \beta; \quad (4.42a)$$

$$\Im = \frac{\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi}{\sqrt{(\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi)^2 + (\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi)^2 + 1}}$$

y

$$\aleph = \frac{\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{(\tan \beta \cos \phi + \tan \alpha \cos \varphi)^2 + (\tan \beta \sin \phi + \tan \alpha \sin \varphi)^2 + 1}}. \quad (4.42b)$$

Después de que la onda atraviesa el divisor de haz obtenemos dos frentes de onda iguales. Uno de los cuales llega sin sufrir cambio alguno hasta el plano de observación y el otro es rotado respecto del primero. Rotando el frente un ángulo $\Delta\theta$ obtenemos que

$$\Psi_{SP\Delta} = A \exp\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\ + a \exp\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}. \quad (4.43)$$

El campo resultante en el plano de observación, cuando llegan en fase ambos frentes de onda, está dado por la suma de los campos (ecuaciones 4.41 y 4.43). Además incluimos un factor de fase arbitraria δ , entre los dos frentes de onda, para obtener la expresión general:

$$\Psi_{INT} = Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + Ae\{i(k\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\} \\ + ae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] + ae\{i(k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}. \quad (4.44)$$

Ya que cada uno de los haces se divide un par de veces al atravesar los divisores del interferómetro, es necesario incluir un factor de 1/4 en la ecuación anterior. Al finalizar el

desarrollo (ecuación 4.46) incluiremos dicho factor para obtener la expresión correcta (ecuación 4.47).

La irradiancia en el plano de observación la obtenemos al sustituir la ecuación 4.44 en la definición de irradiancia (ecuación 4.1):

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & (Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + Ae\{i(k\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
& + ae[ik\rho(\Im \cos \theta + \mathfrak{N} \sin \theta)] + ae\{i(k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
& \times (Ae[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + Ae\{-i(k\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
& + ae[-ik\rho(\Im \cos \theta + \mathfrak{N} \sin \theta)] + ae\{-i(k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}). \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Desarrollando los productos de la ecuación 4.45, aproximando para $\Delta\theta$ pequeño, utilizando identidades trigonométricas y simplificando*, llegamos a que la irradiancia es

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & 2A^2 + 2a^2 + 2A^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\diamond \sin \theta - \wp \cos \theta] - \delta\} \\
& + 2a^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\Im \sin \theta - \mathfrak{N} \cos \theta] - \delta\} + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im) + \sin \theta \cdot (\wp - \mathfrak{N})]\} \\
& + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \mathfrak{N} + \Im \cdot \Delta\theta)] - \delta\} \\
& + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \mathfrak{N} - \diamond \cdot \Delta\theta)] + \delta\} \\
& + 2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - (\mathfrak{N} - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \mathfrak{N} + (\Im - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Incluyendo el factor debido a la división del frente de onda, y cambiando de coordenadas polares a cartesianas obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & (1/2)A^2 + (1/2)a^2 + (1/2)A^2 \cos\{k \cdot \Delta\theta[y \cdot \diamond - x \cdot \wp] - \delta\} \\
& + (1/2)a^2 \cos\{k \cdot \Delta\theta[y \cdot \Im - x \cdot \mathfrak{N}] - \delta\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N})]\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + \Im \cdot \Delta\theta)] - \delta\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} - \diamond \cdot \Delta\theta)] + \delta\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \Im - (\mathfrak{N} - \wp) \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + (\Im - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

* En el apéndice III mostramos el desarrollo completo.

A partir de esta ecuación podemos obtener las expresiones generales de las secciones previas (ecuaciones 4.20 y 4.39). Suponiendo que la estrella se encuentra sobre el eje del interferómetro tenemos que

$$\diamond = \cos \phi \sin \beta = 0 \quad \text{y} \quad \wp = \sin \phi \sin \beta = 0. \quad (4.48)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4.47 obtenemos que la irradiancia es

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)A^2 + (1/2)a^2 + (1/2)A^2 \cos\{-\delta\} \\ & + (1/2)a^2 \cos\{k \cdot \Delta\theta[y \cdot \mathfrak{S} - x \cdot \mathfrak{N}] - \delta\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S}) + y \cdot (-\mathfrak{N})]\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k \cdot \Delta\theta[x \cdot (-\mathfrak{S} - \mathfrak{N}) + y \cdot (-\mathfrak{N} + \mathfrak{S})] - \delta\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S}) + y \cdot (-\mathfrak{N})] + \delta\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (-\mathfrak{S} - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (-\mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)]\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Reacomodando términos obtenemos que*

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)a^2 \{1 + \cos[k \cdot \Delta\theta(\mathfrak{S} \cdot y - \mathfrak{N} \cdot x) - \delta]\} + (1/2)A^2(1 + \cos \delta) \\ & + (1/2)Aa \{\cos[k(\mathfrak{S}x + \mathfrak{N}y)] + \cos[k(\mathfrak{S}x + \mathfrak{N}y) - \delta]\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k[\mathfrak{S}(x - y \cdot \Delta\theta) + \mathfrak{N}(y + x \cdot \Delta\theta)]\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k[\mathfrak{S}(x - y \cdot \Delta\theta) + \mathfrak{N}(y + x \cdot \Delta\theta)] + \delta\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por otra parte, podemos considerar que la fase relativa es igual a π en la ecuación 4.47, obteniendo que la irradiancia es

$$\begin{aligned} I_{INT} = & (1/2)A^2 + (1/2)a^2 + (1/2)A^2 \cos\{k \cdot \Delta\theta[y \cdot \diamond - x \cdot \wp] - \pi\} \\ & + (1/2)a^2 \cos\{k \cdot \Delta\theta[y \cdot \mathfrak{S} - x \cdot \mathfrak{N}] - \pi\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S}) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N})]\} \\ & + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)] - \pi\} \end{aligned}$$

* Recordemos que la función coseno es par.

$$\begin{aligned}
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} + \wp \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} - \diamond \cdot \Delta\theta)] + \pi\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{N} - \wp) \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

La función coseno cumple con la siguiente relación:

$$\cos(\gamma \pm \pi) = \cos \gamma \cdot \cos \pi \mp \sin \gamma \cdot \sin \pi = -\cos \gamma. \quad (4.52)$$

Utilizando esta propiedad, la expresión 4.47 se reduce a la ecuación 4.39:

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & (1/2)A^2 + (1/2)a^2 - (1/2)A^2 \cos\{k[y \cdot \diamond \cdot \Delta\theta - x \cdot \wp \cdot \Delta\theta]\} \\
& - (1/2)a^2 \cos\{k[y \cdot \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta - x \cdot \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta]\} + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S}) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N})]\} \\
& - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - \mathfrak{N} \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)]\} \\
& - (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} + \wp \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} - \diamond \cdot \Delta\theta)]\} \\
& + (1/2)Aa \cos\{k[x \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{N} - \wp) \cdot \Delta\theta) + y \cdot (\wp - \mathfrak{N} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Hemos obtenido las ecuaciones 4.20 y la 4.39 a partir de la ecuación 4.47. Lo cual muestra que hay consistencia en nuestros desarrollos matemáticos.

4.4.3. Dependencia de la visibilidad respecto del ángulo de inclinación y de la DCO

Utilizando la ecuación 4.53 hacemos las simulaciones que se muestran en las figuras 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15. En la primera columna mostramos los interferogramas y en la segunda la señal del planeta*. En orden descendente las simulaciones corresponden a los valores $\lambda/2$, $\lambda/2+\lambda/500$, $\lambda/2+\lambda/100$ y $\lambda/2+\lambda/50$ de la DCO. Establecemos que la irradiancia de la estrella es 100,000 veces mayor que la del planeta. Convenimos que la estrella está sobre el eje 'x'. El número de onda es $k=300,000\text{m}^{-1}$, el desplazamiento rotacional $\Delta\theta=0.003\text{rad}$ y el ángulo subtendido por el planeta respecto a la estrella es $\alpha=0.00005\text{rad}$ ($\sim 10''$).

* Según fue definida en la ecuación 4.28, la señal del planeta es igual a la señal del sistema estrella-planeta menos la señal de la estrella en ausencia del planeta.

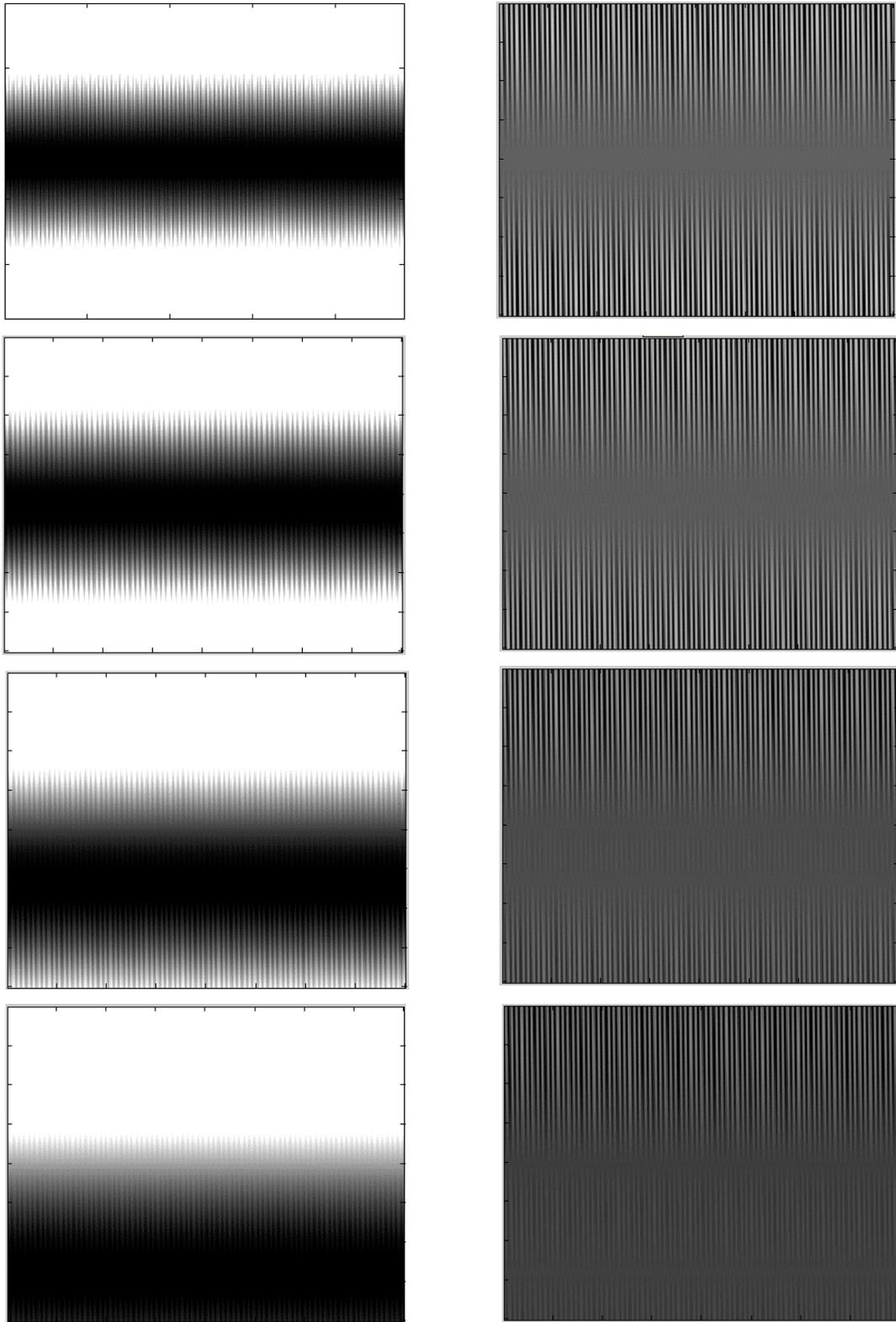


Figura 4.12 Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes DCO: $\lambda/2$, $\lambda/2+\lambda/500$, $\lambda/2+\lambda/100$ y $\lambda/2+\lambda/50$. La estrella está inclinada 0.000001 rad sobre el eje x . El planeta también está sobre el eje x .

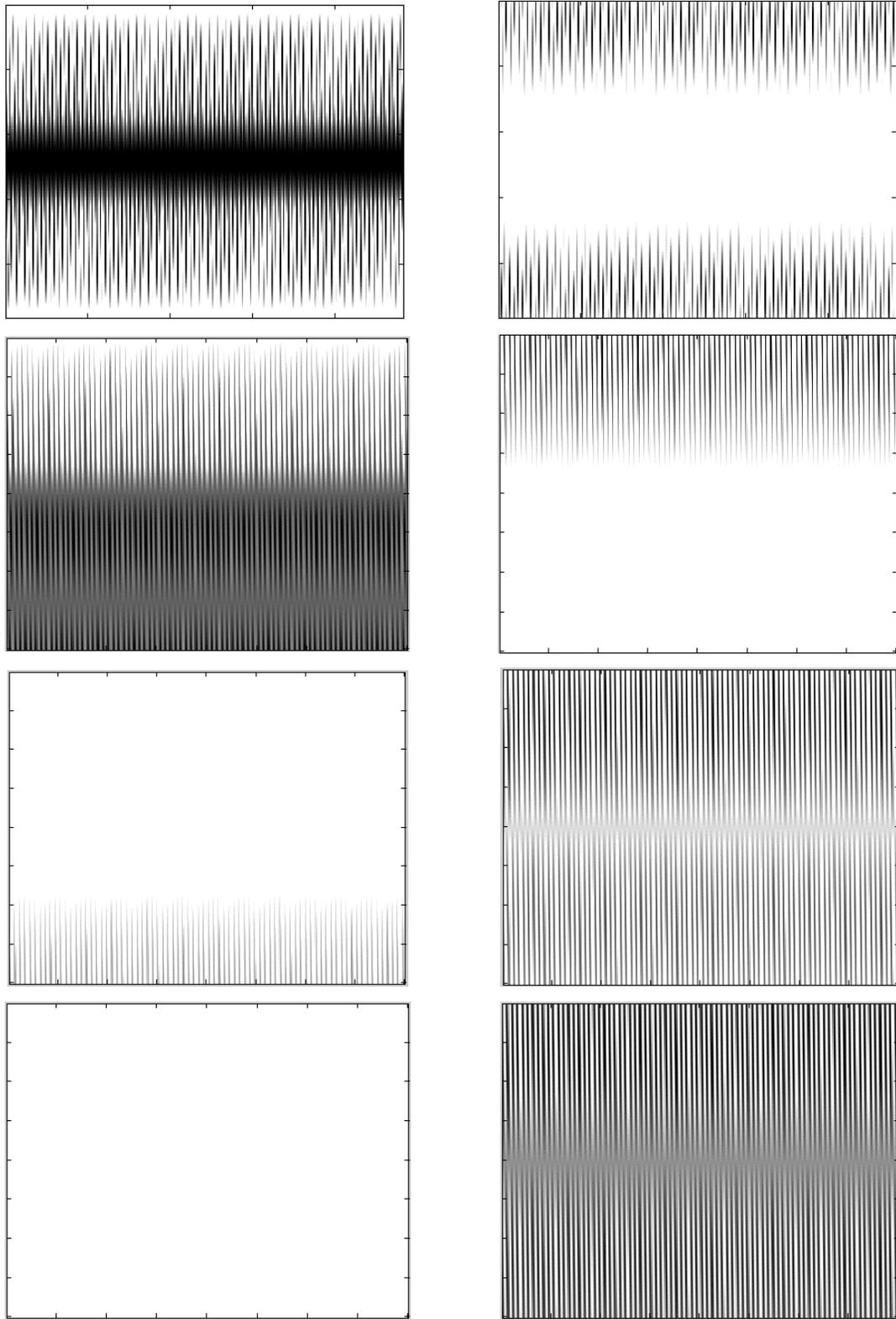


Figura 4.13 Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes DCO: $\lambda/2$, $\lambda/2+\lambda/500$, $\lambda/2+\lambda/100$ y $\lambda/2+\lambda/50$. La estrella está inclinada 0.0000001 rad sobre el eje x . El planeta está sobre el eje x .

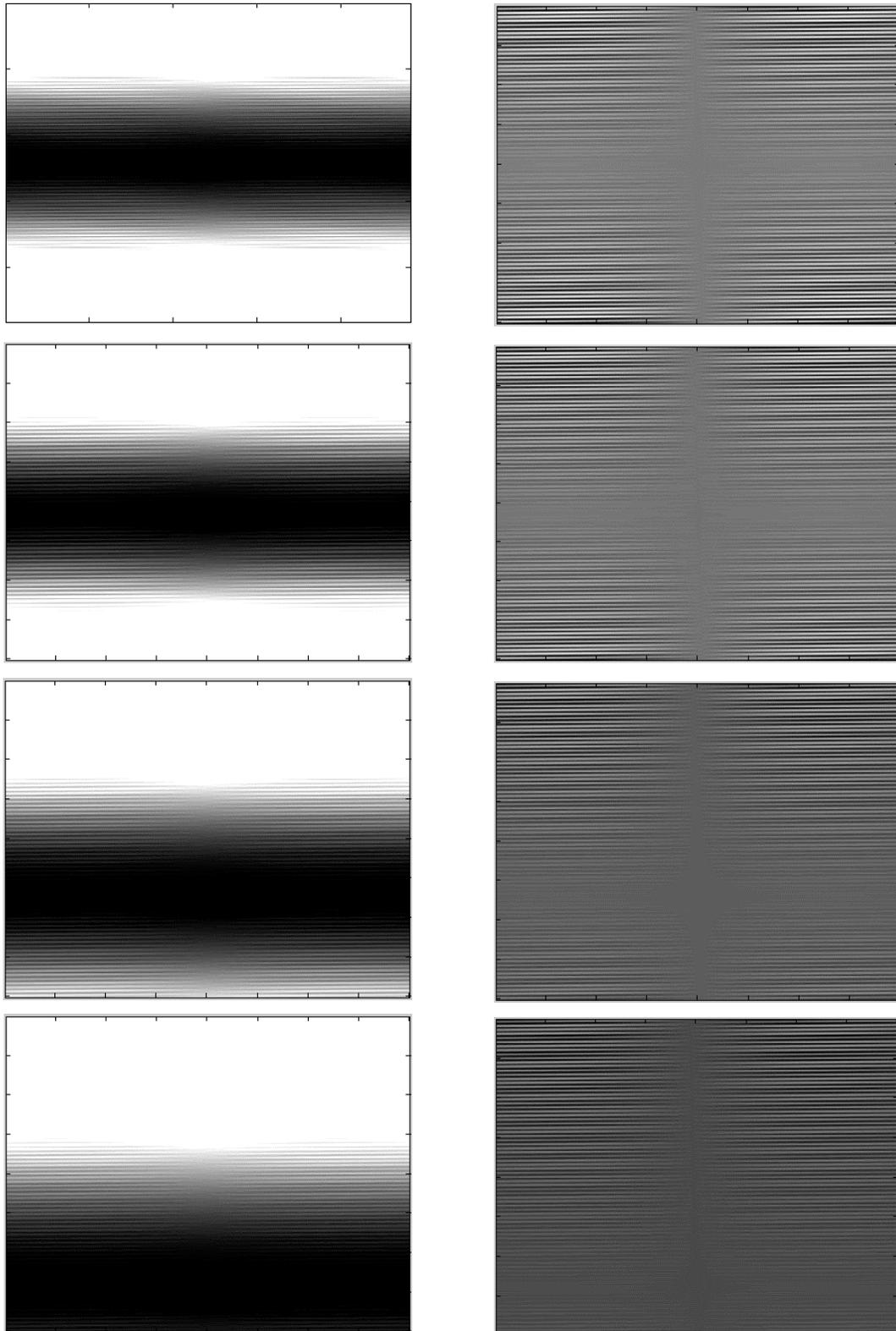


Figura 4.14 Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes DCO: $\lambda/2$, $\lambda/2+\lambda/500$, $\lambda/2+\lambda/100$ y $\lambda/2+\lambda/50$. La estrella está inclinada 0.000001rad sobre el eje x . El planeta está sobre el eje y .

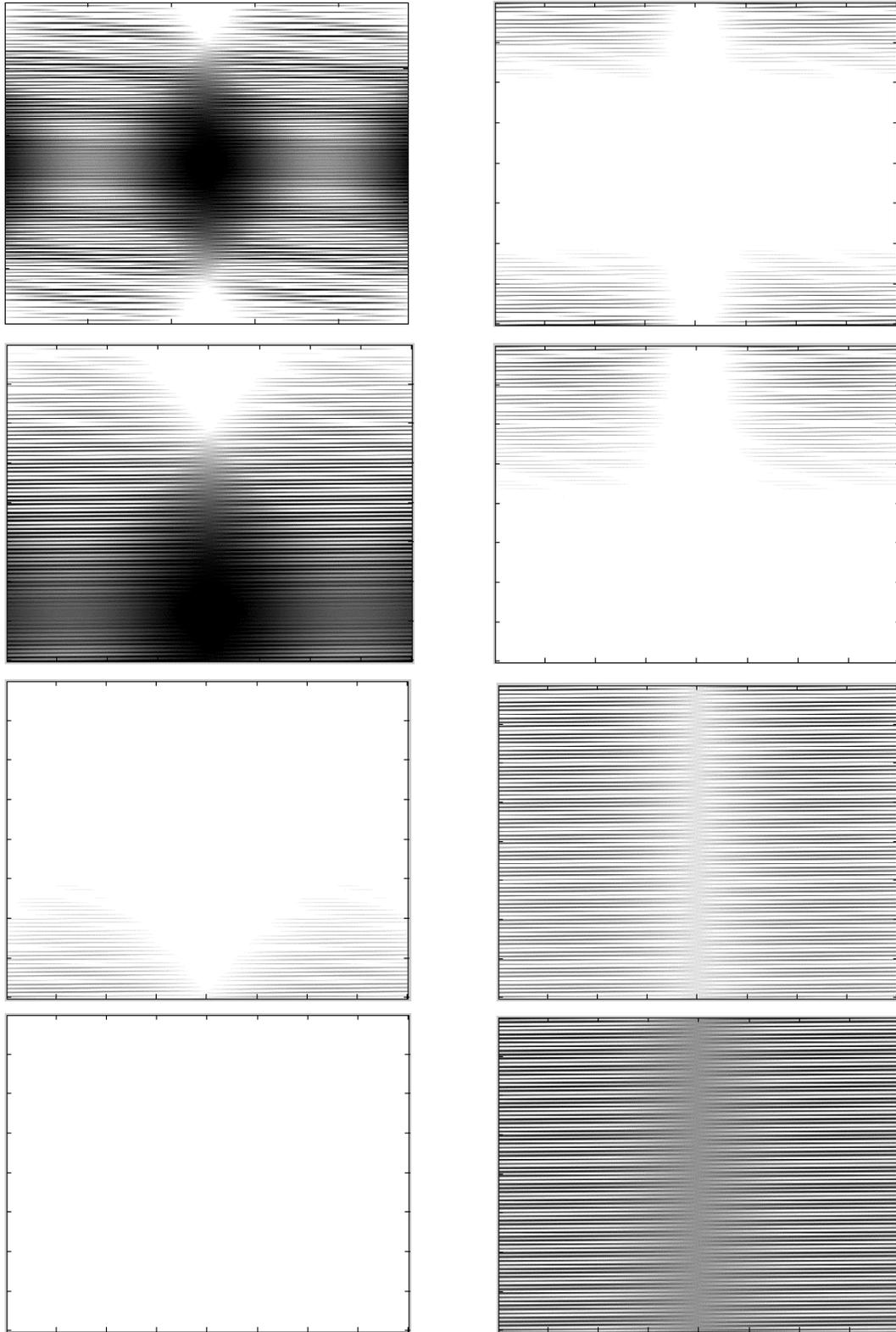


Figura 4.15 Interferogramas (primera columna) y señal del planeta (segunda columna) para las siguientes DCO: $\lambda/2$, $\lambda/2 + \lambda/500$, $\lambda/2 + \lambda/100$ y $\lambda/2 + \lambda/50$. La estrella está inclinada 0.0000001 rad sobre el eje x . El planeta está sobre el eje y .

En las simulaciones mostradas en las figuras 4.12 y 4.13 el planeta se encuentra orientado sobre eje x , y en las figuras 4.14 y 4.15 el planeta forma un ángulo de 90° respecto al eje x^* . La estrella subtende un ángulo de inclinación de 0.000001rad ($\sim 0.2''$) en las simulaciones de las figuras 4.12 y 4.14, y 0.0000001rad ($\sim 0.02''$) para las figuras 4.13 y 4.15.

Al observar las figuras 4.12 y 4.15 notamos que al aumentar la DCO el patrón de interferencia se desplaza hacia la parte inferior del plano de observación; sobre el eje y . En cambio la señal del planeta no cambia apreciablemente.

Los efectos debidos al cambio en la DCO se notan más cuando el ángulo de inclinación es 0.0000001rad ($\sim 0.02''$, ver figuras 4.13 y 4.15). En este caso, mientras que la señal de la imagen disminuye, la señal del planeta aumenta ligeramente.

Para medir la brillantez de la señal del planeta utilizamos nuevamente la definición de visibilidad de la sección 4.2.5:

$$V = \frac{(I_{INT} - I_S)_{\max} - (I_{INT} - I_S)_{\min}}{(I_{INT})_{\max}}. \quad (4.54)$$

En las figuras 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 mostramos la dependencia de la visibilidad[†] en función del ángulo de inclinación de la estrella. Cada una de las figuras corresponde al ángulo φ igual a 0 , 50 , 90 y 180° , respectivamente. Además, las cinco curvas que se muestran en cada una de las figuras se relacionan con las siguientes DCO: $\lambda/2 + \lambda/30$, $\lambda/2 + \lambda/60$, $\lambda/2 + \lambda/90$, $\lambda/2 + \lambda/120$ y $\lambda/2 + \lambda/150$.

En la figura 4.19 la visibilidad de la estrella tiende a cero cuando la inclinación de la estrella tiende a 0.00005rad . Esto es consecuencia de que para dicho ángulo el planeta se

* En la figura 4.7 se muestra el ángulo de orientación del planeta φ .

† La visibilidad la obtenemos numéricamente a partir de la simulación de los interferogramas y de la señal del planeta.

encuentra sobre el eje del interferómetro, de tal forma que su señal es cancelada por el IDRI.

Resulta claro que conforme aumenta el ángulo de inclinación, la visibilidad alcanza un valor constante cercano a 0.012. Este valor depende de la orientación del planeta, pero es independiente de la DCO, al menos para los valores considerados. Para apreciar con mayor claridad la dependencia de la visibilidad en función de la DCO mostramos las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23.

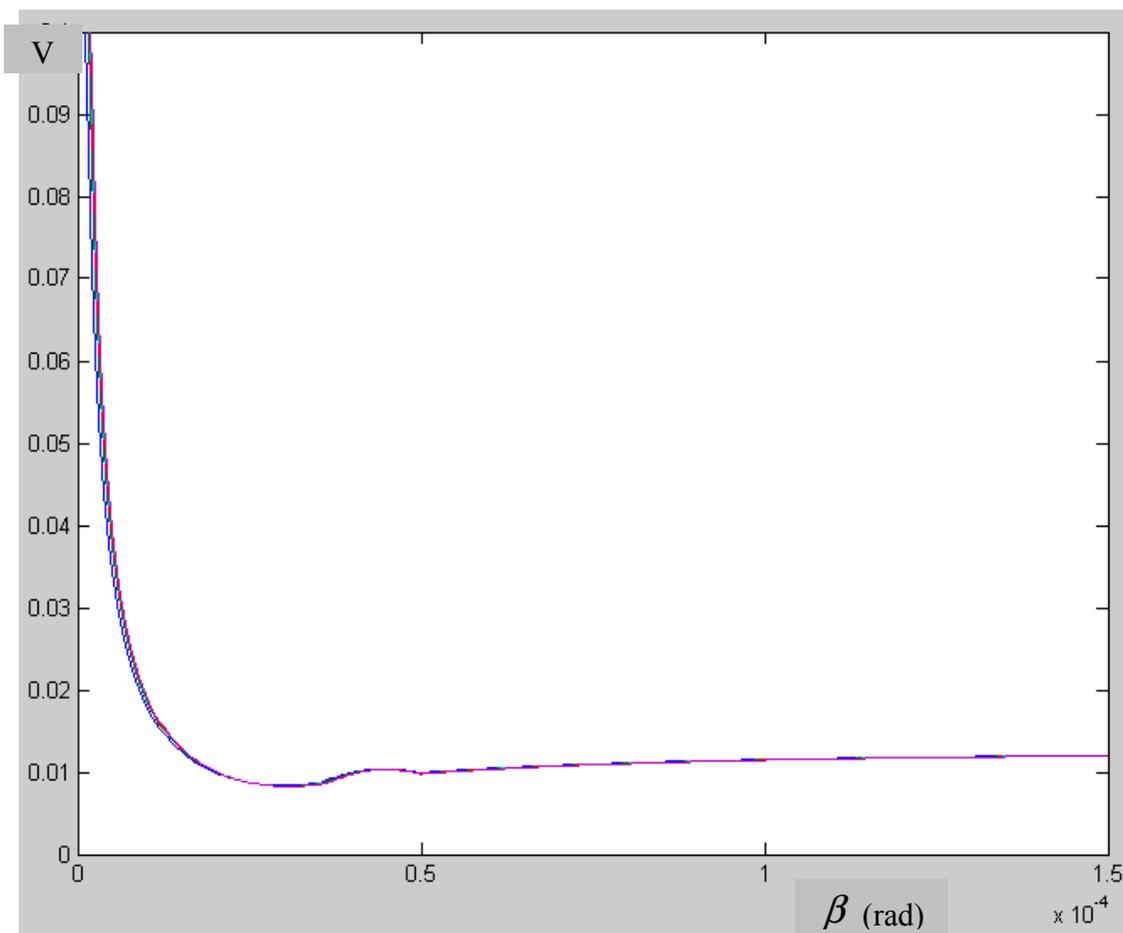


Figura 4.16 Gráfica de la visibilidad en función del ángulo de inclinación de la estrella. Las curvas corresponden a $\lambda/2+\lambda/30$, $\lambda/2+\lambda/60$, $\lambda/2+\lambda/90$, $\lambda/2+\lambda/120$ y $\lambda/2+\lambda/150$ de DCO. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta forma un ángulo φ de 0° respecto del eje x .

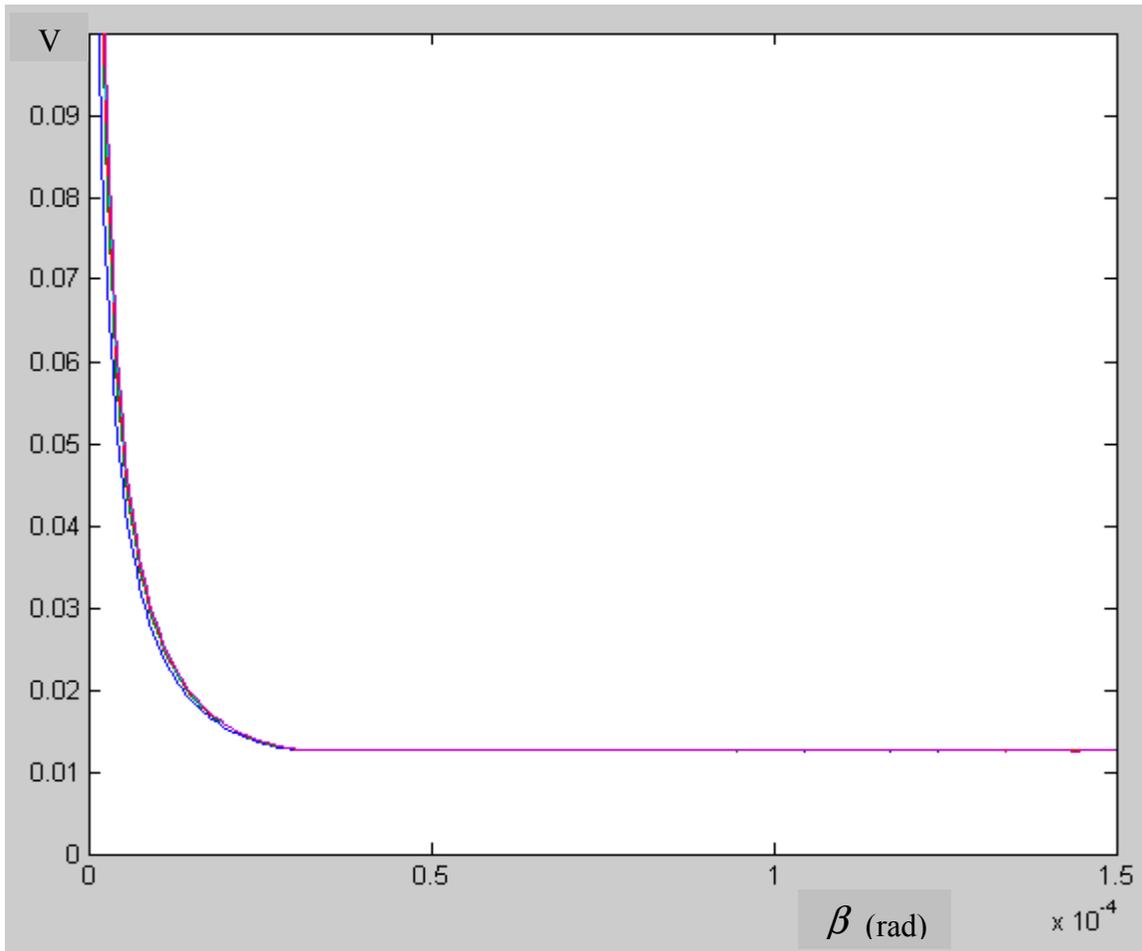


Figura 4.17 Gráfica de la visibilidad en función del ángulo de inclinación de la estrella. Las curvas corresponden a $\lambda/2+\lambda/30$, $\lambda/2+\lambda/60$, $\lambda/2+\lambda/90$, $\lambda/2+\lambda/120$ y $\lambda/2+\lambda/150$ de DCO. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta forma un ángulo φ de 50° respecto del eje x .

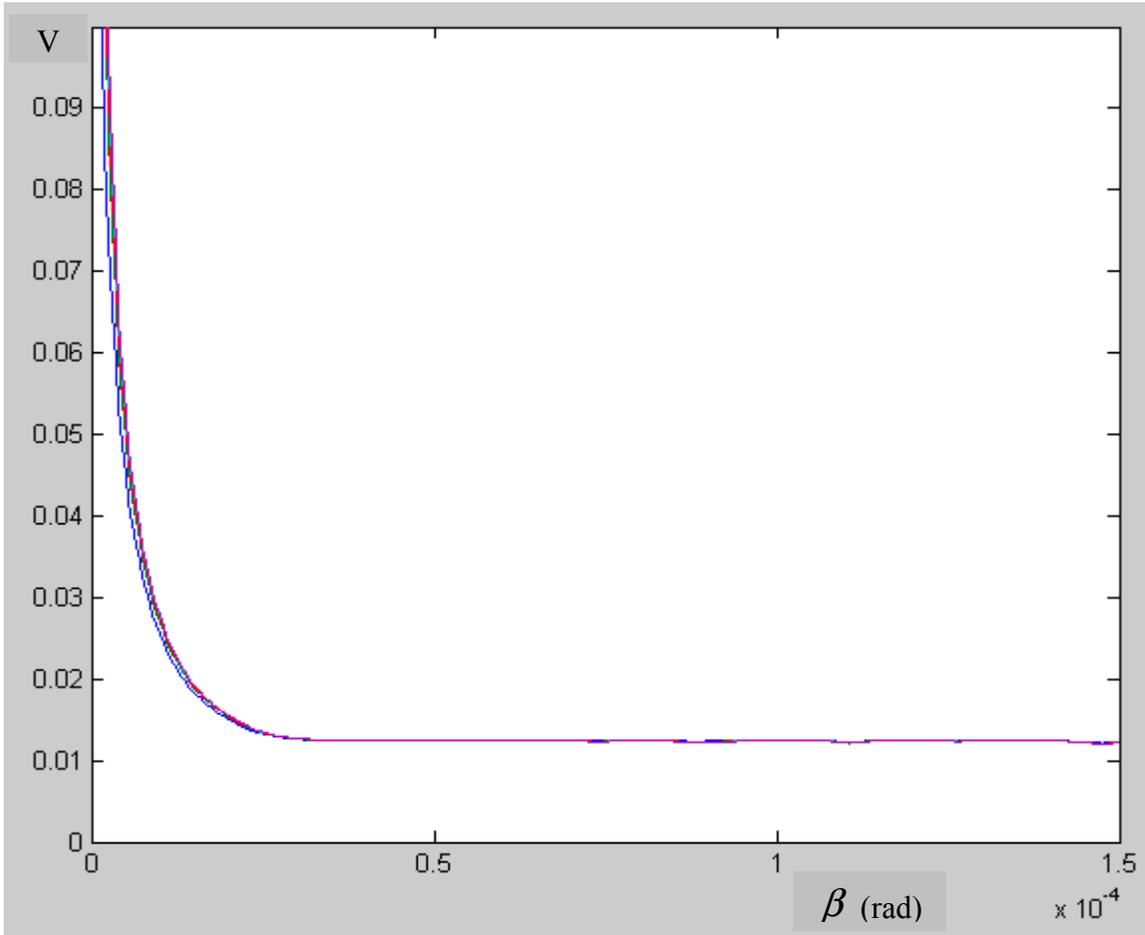


Figura 4.18 Gráfica de la visibilidad en función del ángulo de inclinación de la estrella. Las curvas corresponden a $\lambda/2+\lambda/30$, $\lambda/2+\lambda/60$, $\lambda/2+\lambda/90$, $\lambda/2+\lambda/120$ y $\lambda/2+\lambda/150$ de DCO. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta forma un ángulo φ de 90° respecto del eje x .

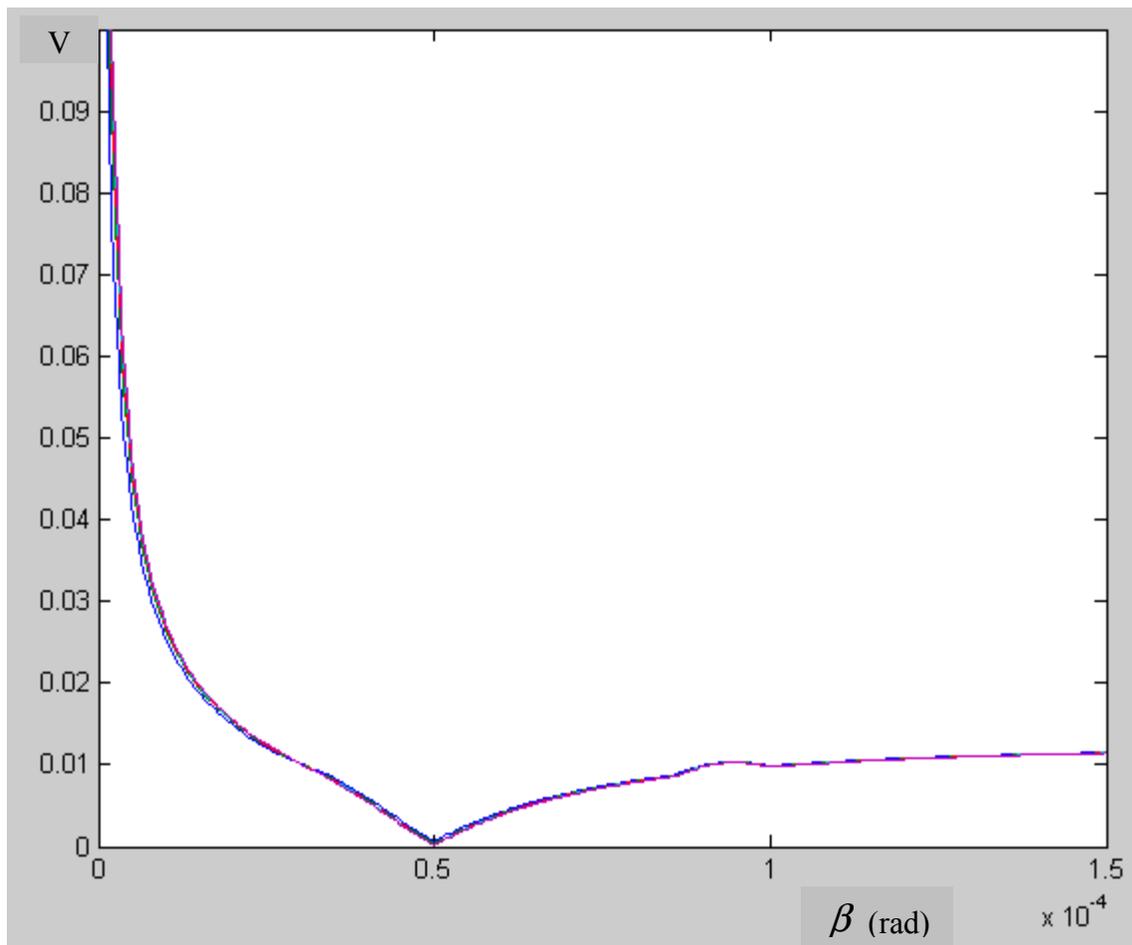


Figura 4.19 Gráfica de la visibilidad en función del ángulo de inclinación de la estrella. Las curvas corresponden a $\lambda/2+\lambda/30$, $\lambda/2+\lambda/60$, $\lambda/2+\lambda/90$, $\lambda/2+\lambda/120$ y $\lambda/2+\lambda/150$ de DCO. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta forma un ángulo φ de 180° respecto del eje x .

Las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23 corresponden al ángulo φ igual a 0° , 50° , 90° y 180° respectivamente. Éstas muestran la dependencia de la visibilidad en función de la DCO. En todas las figuras aparecen seis curvas, relacionadas cada una con 0.00005, 0.0001, 0.00015, 0.0002, 0.00025 y 0.0003rad del ángulo de inclinación de la estrella. En todas las curvas se aprecia que cuando la DCO se aproxima a λ la visibilidad tiende a un valor constante independientemente de la orientación y del ángulo de inclinación.

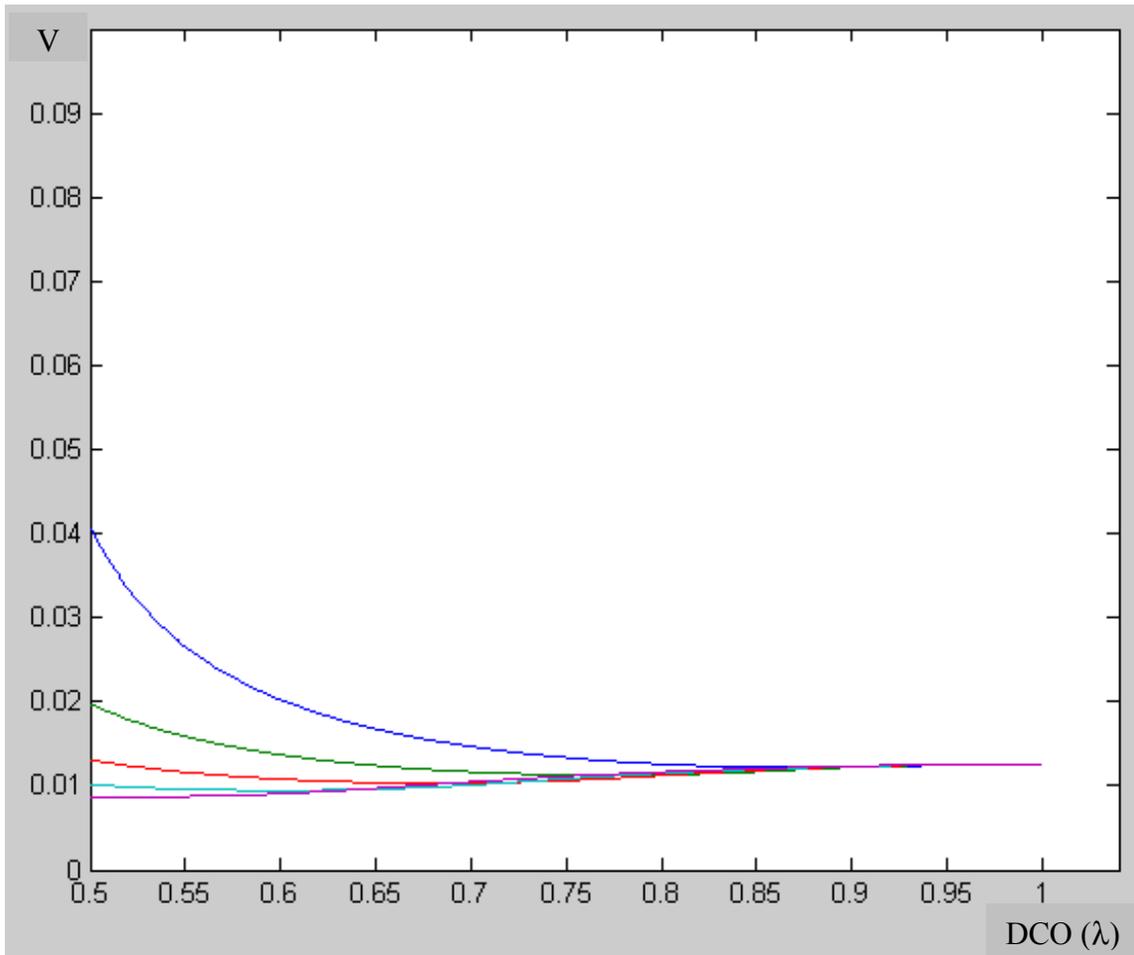


Figura 4.20 Gráfica de la visibilidad en función de la DCO. Curvas para diferentes ángulos de inclinación de la estrella. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta subtende un ángulo φ 0° respecto de la horizontal.

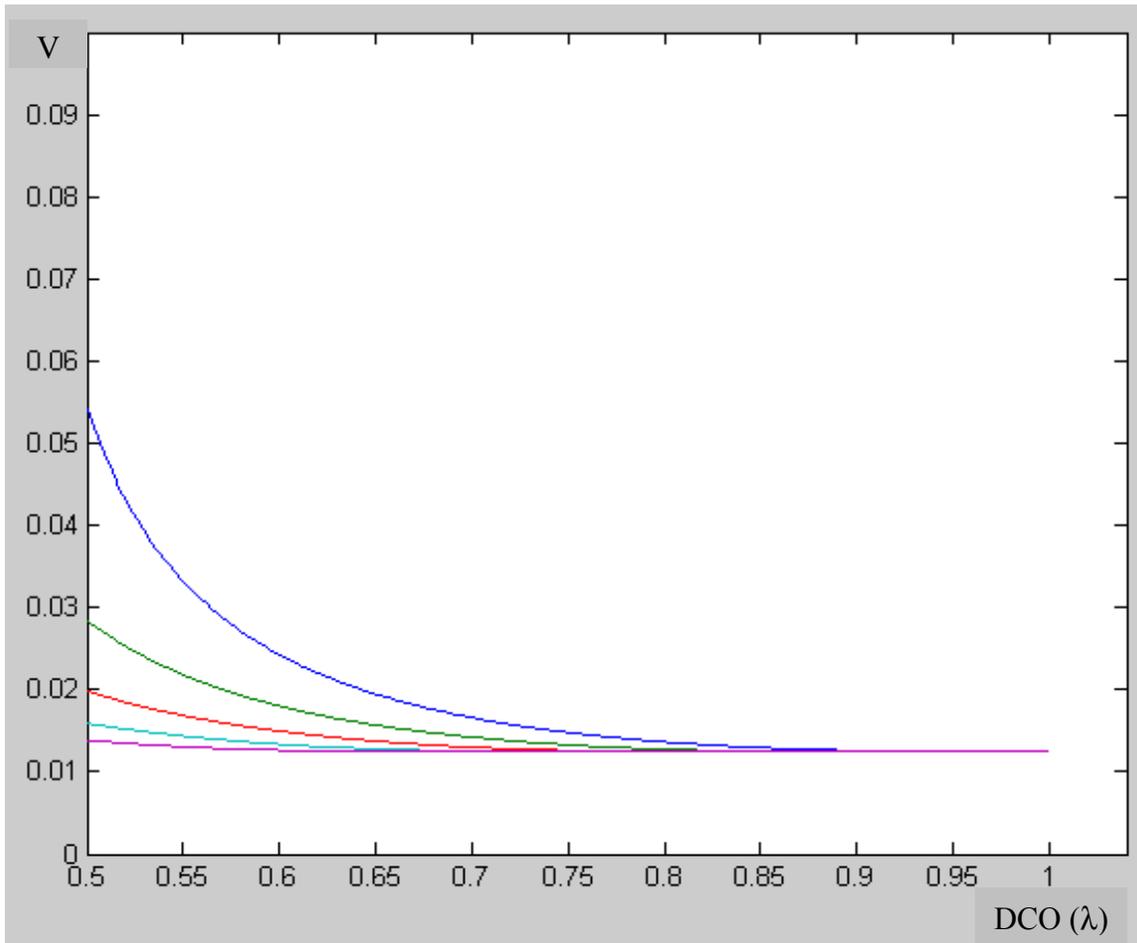


Figura 4.21 Gráfica de la visibilidad en función de la DCO. Curvas para diferentes ángulos de inclinación de la estrella. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta subtendiendo un ángulo $\varphi = 50^\circ$ respecto de la horizontal.

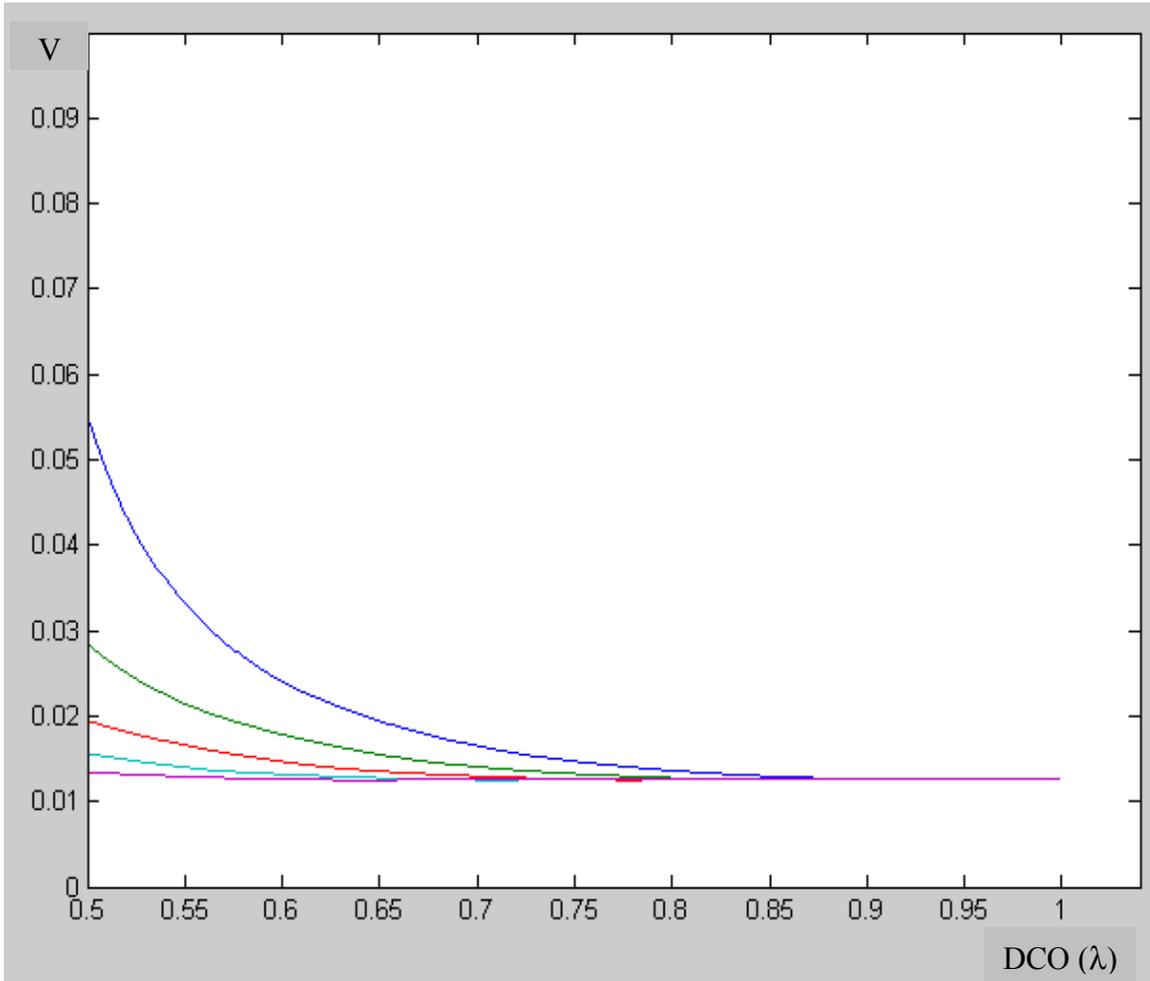


Figura 4.22 Gráfica de la visibilidad en función de la DCO. Curvas para diferentes ángulos de inclinación de la estrella. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta subtende un ángulo φ 90° respecto de la horizontal.

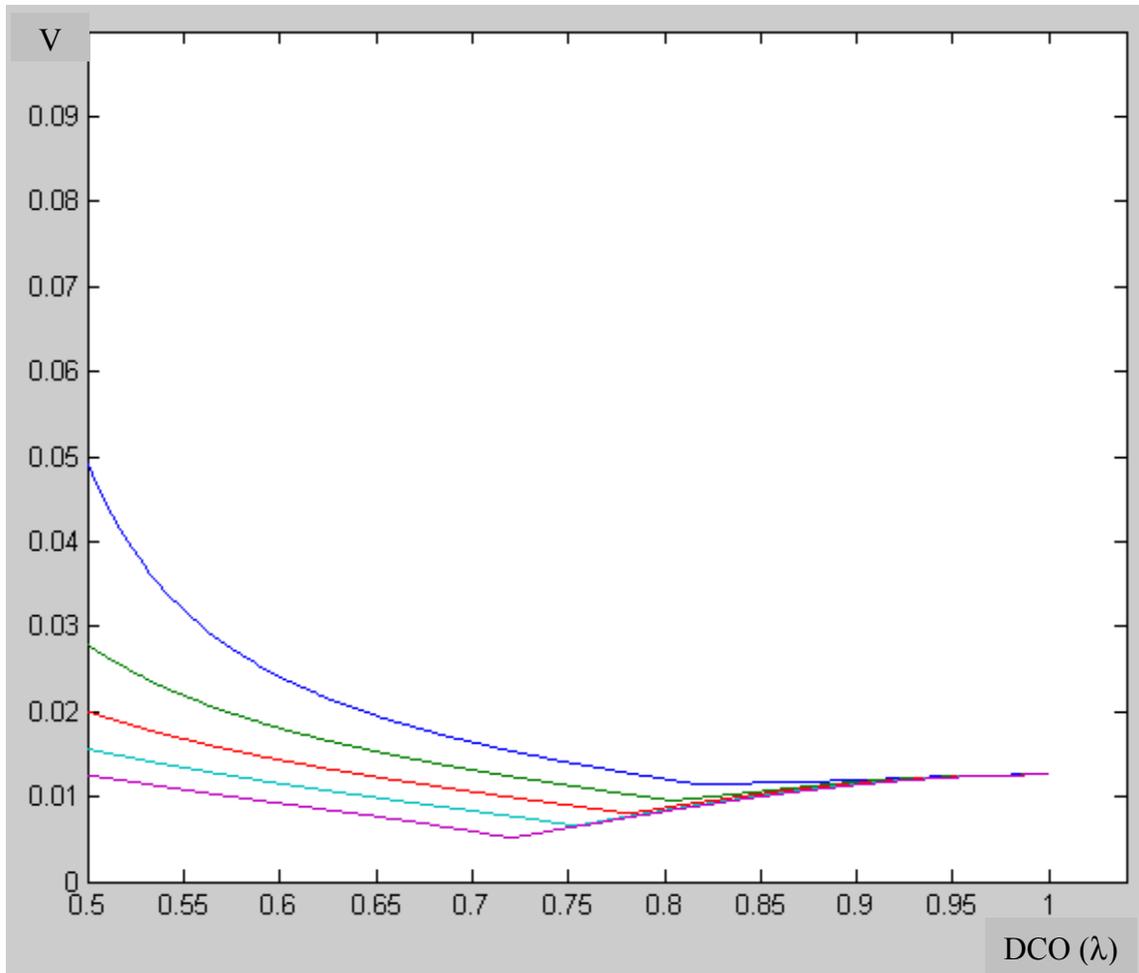


Figura 4.23 Gráfica de la visibilidad en función de la DCO. Curvas para diferentes ángulos de inclinación de la estrella. La estrella se encuentra sobre el eje x y el planeta subtendiendo un ángulo φ 180° respecto de la horizontal.

4.4.4. Conclusiones

Obtuvimos la expresión analítica de la irradiancia debida al sistema estrella-planeta en función del ángulo de inclinación de la estrella y de la DCO. Simulamos varios interferogramas para distintos valores del ángulo de inclinación de la estrella y de la DCO. Mostramos la gráfica de la visibilidad del planeta en función de la DCO y del ángulo de inclinación. Cuando el ángulo de inclinación de la estrella crece la visibilidad tiende a un valor constante (~ 0.012), dependiente de la orientación del planeta. Además este valor de la visibilidad es independiente de la DCO.

Apéndice I. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función de la DCO

En el presente apéndice obtenemos la ecuación 4.19 a partir de la ecuación 4.18. Inicialmente tenemos la ecuación 4.18:

$$I_{INT} = \{A[1 + \exp(\delta)] + a \exp\{i(\delta + k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)])\} + a \exp[ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)]\} \\ \times \{A[1 + \exp(-i\delta)] + a \exp\{-i(\delta + k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)])\} + a \exp[-ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)]\}. \quad (I.1)$$

Desarrollando los productos obtenemos:

$$I_{INT} = a^2 \exp[ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)] \exp\{-i(\delta + k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)])\} \\ + a^2 \exp[-ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)] \exp\{i(\delta + k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)])\} + 2a^2 \\ + Aa \exp\{-i(k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\} + Aa \exp[-ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)] \\ + Aa \exp\{i(k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\} + Aa \exp[ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)] \\ + Aa \exp[-i\{k\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta) - \delta\}] + Aa \exp[i\{k\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta) - \delta\}] \\ + Aa \exp\{-ik\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)]\} + Aa \exp\{ik\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\ + A^2 \exp(i\delta) + A^2 \exp(-i\delta) + 2A^2. \quad (I.2)$$

Para reducir la ecuación I.2 simplificamos separadamente cada término. Comenzamos con el primer término:

$$\exp[ik\rho(\mathfrak{I} \cos\theta + \mathfrak{N} \sin\theta)] \exp\{-i(\delta + k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{N} \sin(\theta + \Delta\theta)])\} \\ = \exp\{i(k\rho\{\mathfrak{I}[\cos\theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \mathfrak{N}[\sin\theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\} - \delta)\}. \quad (I.3)$$

Desarrollando en series de Taylor y aproximando para $\Delta\theta$ pequeño obtenemos:

$$\exp\{i(k\rho\{\mathfrak{I}[\cos\theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \mathfrak{N}[\sin\theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\} - \delta)\} \\ = \exp\{i(k\rho[\mathfrak{I} \sin\theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{N} \cos\theta \cdot \Delta\theta] - \delta)\}. \quad (I.4)$$

Siguiendo los mismos pasos llegamos a que el segundo término de I.2 se reduce a:

$$\exp\{-i(k\rho[\mathfrak{I} \sin \theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{K} \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta)\}. \quad (\text{I.5})$$

Sumando los términos anteriores (I.4 y I.5) y utilizando la relación ‘ $\exp\{ix\} + \exp\{-ix\} = 2 \cos\{x\}$ ’ obtenemos:

$$\begin{aligned} & \exp\{i(k\rho[\mathfrak{I} \sin \theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{K} \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta)\} + \exp\{-i(k\rho[\mathfrak{I} \sin \theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{K} \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta)\} \\ & = 2 \cos\{k\rho[\mathfrak{I} \sin \theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{K} \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta\}. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Recurriendo nuevamente a la relación ‘ $\exp\{ix\} + \exp\{-ix\} = 2 \cos\{x\}$ ’ simplificamos los términos 12° y 13°, 8° y 9°, 5° y 7°, 10° y 11°, y 4° y 6°:

$$\exp(i\delta) + \exp(-i\delta) = 2 \cos(\delta); \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{aligned} & \exp\{-i[k\rho(\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta) - \delta]\} + \exp\{i[k\rho(\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta) - \delta]\} \\ & = 2 \cos\{k\rho[\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta] - \delta\}; \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

$$\exp\{-ik\rho(\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta)\} + \exp\{ik\rho(\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta)\} = 2 \cos\{k\rho[\mathfrak{I} \cos \theta + \mathfrak{K} \sin \theta]\}; \quad (\text{I.9})$$

$$\begin{aligned} & \exp\{-ik\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\} + \exp\{ik\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\ & = 2 \cos\{k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)]\}; \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

$$\begin{aligned} & \exp\{-i(k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\} + \exp\{i(k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\} \\ & = 2 \cos\{k\rho[\mathfrak{I} \cos(\theta + \Delta\theta) + \mathfrak{K} \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\}. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Sustituyendo los términos reducidos (relaciones I.11, I.10, I.9, I.8, I.7 y I.6) en I.2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & 2a^2 \{1 + \cos[k\rho(\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta) - \delta]\} + 2A^2(1 + \cos \delta) \\
& + 2Aa \{ \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)] + \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta) - \delta] \} \\
& + 2Aa \cos \{ k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta \} \\
& + 2Aa \cos \{ k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)] \} .
\end{aligned} \tag{I11}$$

Desarrollando en series de Taylor y aproximando para $\Delta\theta$ pequeño, obtenemos finalmente la ecuación 4.19:

$$\begin{aligned}
I_{INT} = & 2a^2 \{1 + \cos[k\rho(\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta) - \delta]\} + 2A^2(1 + \cos \delta) \\
& + 2Aa \{ \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)] + \cos[k\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta) - \delta] \} \\
& + 2Aa \cos \{ k\rho[\Im(\cos \theta - \sin \theta \cdot \Delta\theta) + \Re(\sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta)] + \delta \} \\
& + 2Aa \cos \{ k\rho[\Im(\cos \theta - \sin \theta \cdot \Delta\theta) + \Re(\sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta)] \} .
\end{aligned} \tag{I12}$$

Apéndice II. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función del ángulo de inclinación de la estrella

Obtenemos la ecuación 4.38 a partir de la ecuación 4.37. Iniciamos con la ecuación 4.37:

$$\begin{aligned}
 I_{INT} = & (Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] - Ae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
 & + ae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] - ae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
 & \times (Ae[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] - Ae\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
 & + ae[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] - ae\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}). \quad (II.1)
 \end{aligned}$$

Al desarrollar los productos obtenemos los siguientes dieciséis términos:

$$\begin{aligned}
 I_{INT} = & A^2 + A^2 + a^2 + a^2 \\
 & - A^2 e[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & - a^2 e[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & - A^2 e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & - a^2 e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & + (Aae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \\
 & - Aae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & - Aae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \cdot e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \\
 & + Aae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\}) \\
 & + Aae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \\
 & - Aae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & + Aae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
 & - Aae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \cdot e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)]. \quad (II.2)
 \end{aligned}$$

A continuación reducimos cada uno de los términos por separado. Primero simplificamos el sexto término:

$$\begin{aligned}
& a^2 \exp[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \exp\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)]\} \\
& = a^2 \exp\{ik\rho\{\Im[\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \aleph[\sin \theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\}\}
\end{aligned} \tag{II.3}$$

Desarrollando en series de Taylor y aproximando para $\Delta\theta$ pequeño

$$\begin{aligned}
& \exp\{ik\rho\{\Im[\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \aleph[\sin \theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\}\} \\
& = e\{ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\}.
\end{aligned} \tag{II.4}$$

Siguiendo los mismos pasos reducimos el octavo término a:

$$a^2 \exp\{-ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\}. \tag{II.5}$$

Sumando los términos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
& -a^2 \exp\{ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\} - a^2 \exp\{-ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\} \\
& = -2a^2 \cos\{k\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \aleph \cos \theta \cdot \Delta\theta]\}.
\end{aligned} \tag{II.6}$$

De la misma forma simplificamos los términos quinto y séptimo, noveno y décimo tercero, décimo y décimo quinto, décimo primero y décimo cuarto, y décimo segundo y décimo sexto. Obteniendo respectivamente:

$$-2A^2 \cos\{k\rho[\diamond \sin \theta \cdot \Delta\theta - \wp \cos \theta \cdot \Delta\theta]\}. \tag{II.7}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph)]\}, \tag{II.8}$$

$$-2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - \aleph \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph + \Im \cdot \Delta\theta)]\}, \tag{II.9}$$

$$-2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \aleph - \diamond \cdot \Delta\theta)]\}, \tag{II.10}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{K} - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (\text{II.11})$$

Sustituyendo los términos reducidos (II.6, II.7, II.8, II.9, II.10 y II.11) en la ecuación II.2 obtenemos finalmente la ecuación 4.37:

$$\begin{aligned} I_{INT} = & 2A^2 + 2a^2 - 2A^2 \cos\{k\rho[\diamond \sin\theta \cdot \Delta\theta - \wp \cos\theta \cdot \Delta\theta]\} \\ & - 2a^2 \cos\{k\rho[\mathfrak{S} \sin\theta \cdot \Delta\theta - \mathfrak{K} \cos\theta \cdot \Delta\theta]\} + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S}) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K})]\} \\ & - 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - \mathfrak{K} \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)]\} \\ & - 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} - \diamond \cdot \Delta\theta)]\} \\ & + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{K} - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (\text{II.12}) \end{aligned}$$

Apéndice III. Desarrollo de la expresión analítica de la irradiancia en función del ángulo de inclinación de la estrella y de la DCO

En este apéndice obtenemos la ecuación 4.46 a partir de la ecuación 4.45. Iniciamos con la ecuación 4.45:

$$\begin{aligned}
 I_{INT} = & (Ae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + Ae\{i(k\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
 & + ae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] + ae\{i(k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
 & \times (Ae[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] + Ae\{-i(k\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}) \\
 & + ae[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] + ae\{-i(k\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta)\}). \quad (III.1)
 \end{aligned}$$

Al desarrollar los productos obtenemos los siguientes 16 términos:

$$\begin{aligned}
 I_{INT} = & A^2 + A^2 + a^2 + a^2 \\
 & + A^2 e[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + a^2 e[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + A^2 e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \\
 & + a^2 e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \\
 & + Aae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \\
 & + Aae[ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + Aae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \cdot e[-ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \\
 & + Aae\{ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \cdot e\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + (Aae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)]) \\
 & + Aae[ik\rho(\Im \cos \theta + \aleph \sin \theta)] \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + Aae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \cdot e\{-ik\rho[\diamond \cos(\theta + \Delta\theta) + \wp \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
 & + Aae\{ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \aleph \sin(\theta + \Delta\theta)] + \delta\} \cdot e[-ik\rho(\diamond \cos \theta + \wp \sin \theta)]. \quad (III.2)
 \end{aligned}$$

A continuación reducimos cada término por separado. Iniciamos simplificando el sexto término:

$$\begin{aligned}
& a^2 \exp[ik\rho(\Im \cos \theta + \Re \sin \theta)] \exp\{-ik\rho[\Im \cos(\theta + \Delta\theta) + \Re \sin(\theta + \Delta\theta)] - \delta\} \\
& = a^2 \exp\{ik\rho\{\Im[\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \Re[\sin \theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\} - \delta\}
\end{aligned} \tag{III.3}$$

Desarrollando en series de Taylor y aproximando para $\Delta\theta$ pequeño:

$$\begin{aligned}
& \exp\{ik\rho\{\Im[\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)] + \Re[\sin \theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]\} - \delta\} \\
& = e\{ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta\}.
\end{aligned} \tag{III.4}$$

Siguiendo los mismos pasos el octavo término se reduce a

$$a^2 \exp\{-ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta] + \delta\}. \tag{III.5}$$

Sumando los términos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
& a^2 \exp\{ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta] - \delta\} + a^2 \exp\{-ik\rho[\Im \sin \theta \cdot \Delta\theta - \Re \cos \theta \cdot \Delta\theta] + \delta\} \\
& = 2a^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\Im \sin \theta - \Re \cos \theta] - \delta\}.
\end{aligned} \tag{III.6}$$

De la misma forma simplificamos los términos quinto y séptimo, noveno y décimo tercero, décimo y décimo sexto, décimo primero y décimo cuarto, y décimo segundo y décimo quinto. Obteniendo respectivamente:

$$2A^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\diamond \sin \theta - \wp \cos \theta] - \delta\}. \tag{III.7}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im) + \sin \theta \cdot (\wp - \Re)]\}, \tag{III.8}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im - \Re \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \Re + \Im \cdot \Delta\theta)] - \delta\}, \tag{III.9}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos \theta \cdot (\diamond - \Im + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin \theta \cdot (\wp - \Re - \diamond \cdot \Delta\theta)] + \delta\}, \tag{III.10}$$

$$2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{K} - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (\text{III.11})$$

Sustituyendo los términos reducidos (III.6, III.7, III.8, III.9, III.10 y III.11) en la ecuación III.2 obtenemos finalmente la ecuación 4.46:

$$\begin{aligned} I_{INT} = & 2A^2 + 2a^2 + 2A^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\diamond \sin\theta - \wp \cos\theta] - \delta\} \\ & + 2a^2 \cos\{k\rho \cdot \Delta\theta[\mathfrak{S} \sin\theta - \mathfrak{K} \cos\theta] - \delta\} + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S}) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K})]\} \\ & + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - \mathfrak{K} \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + \mathfrak{S} \cdot \Delta\theta)] - \delta\} \\ & + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} + \wp \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} - \diamond \cdot \Delta\theta)] + \delta\} \\ & + 2Aa \cos\{k\rho[\cos\theta \cdot (\diamond - \mathfrak{S} - (\mathfrak{K} - \wp) \cdot \Delta\theta) + \sin\theta \cdot (\wp - \mathfrak{K} + (\mathfrak{S} - \diamond) \cdot \Delta\theta)]\}. \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

Apéndice IV. Glosario

A continuación mostramos una lista de símbolos y abreviaturas que aparecen con frecuencia en el capítulo. Están acomodados en el orden con que fueron apareciendo.

IDRI	Interferómetro de desplazamiento rotacional infinitesimal
DCO	Diferencia de camino óptico
IDR	Interferómetro de desplazamiento rotacional
Ψ	Magnitud del campo electromagnético o simplemente campo
I	Irradiancia o intensidad
α	Ángulo de inclinación del planeta
φ	Ángulo de orientación del planeta en el plano de la estrella
A	Amplitud del campo de la estrella
k	Número de onda
\hat{k}	Dirección del vector de propagación de onda
a	Amplitud del campo del planeta
λ	Longitud de onda
\mathfrak{T}	(Tau estilizada) Constante relacionada por las ecuaciones 4.10 y 4.33
\aleph	(Aleph) Constante relacionada por las ecuaciones 4.10 y 4.33
ρ	Posición radial en coordenadas cilíndricas
θ	Ángulo de axial en coordenadas cilíndricas
δ	Diferencia de fase
$\Delta\theta$	Ángulo de rotación de uno de los frentes de onda
V	Visibilidad de la señal del planeta
β	Ángulo de inclinación de la estrella
f	Ángulo de orientación de la estrella
\diamond	(Rombo) Constante relacionada por las ecuaciones 4.31
\wp	(P estilizada) Constante relacionada por las ecuaciones 4.31
e	Abreviación de exp (exponencial)

V

Conclusiones

Hemos obtenido la expresión analítica de la distribución de intensidades, debida a un sistema estrella-planeta mediante un interferómetro de desplazamiento rotacional, en función del ángulo de inclinación del telescopio (respecto de la estrella) y en función de la diferencia de camino óptico que hay entre los brazos del interferómetro. A partir de la ecuación hemos simulado los interferogramas para diferentes valores del ángulo de inclinación y de la diferencia de camino óptico.

Utilizando los interferogramas, calculamos la visibilidad de la señal del planeta como función de la diferencia de camino óptico y del ángulo de inclinación de la estrella. Encontramos que la visibilidad es igual a uno, para el caso idealizado en que la diferencia de caminos ópticos es $\lambda/2$ y el ángulo de inclinación es cero. Sin embargo, conforme nos alejamos de estas condiciones ideales la visibilidad decae abruptamente. Para ángulos de inclinación de la estrella del orden del ángulo de inclinación del planeta, la señal que predomina es la señal de la estrella. En este caso, las franjas del patrón de interferencia nos pueden servir para alinear el telescopio con la estrella.

Aunque en primera instancia la visibilidad decae abruptamente es indudable que el interferómetro de desplazamiento rotacional mejora la visibilidad de la señal del planeta. Observando las gráficas de visibilidad podemos notar que aún para pésimos valores de la diferencia de caminos ópticos y para ángulos de inclinación del orden de inclinación del planeta la visibilidad se mantiene cerca de 0.012, lo cual significa una mejora, en la señal del planeta, de tres órdenes de magnitud.

En el capítulo de II se mencionan varias técnicas de detección, por métodos indirectos, que están teniendo bastante éxito. Tales técnicas tienen la desventaja de que no detectan la luz de estrella y por lo tanto, está limitada la información que nos proporciona. La enorme

ventaja del interferómetro de desplazamiento rotacional es que detecta de manera directa la luz del planeta. Además puede servir para decidir si algunos de los planetas detectados son en realidad un compañero planetario de la estrella. Aunque debido a la disminución abrupta de la visibilidad están limitados a observar estrellas cercanas al Sol.

Los siguientes son los tres ejes centrales del trabajo que queda por realizar: introducir aberraciones y desviaciones en el frente de onda ocasionadas por el interferómetro; dejar de considerar a la estrella como si fuera una fuente puntual; realizar experimentos para comprobar los resultados.

Referencias

- 1.- Imke de Pater y Jack J. Lissauer, Planetary Sciences “*Extrasolar Planets*”, Cambridge University Press 2001.
- 2.- R. Paul Butler, “*Other Planetary System*”, The New Solar System, Edited by J. Kelly Beatty, Carolyn Collins Petersen & Andrew Chaikin, Cambridge University Press, 377-386. 1999.
- 3.- <http://planetquest.jpl.nasa.gov/>.
- 4.- Marija S. Scholl, “*Signal generated by an extra-solar-system planet detected by a rotating rotationally shearing interferometer*”, J. Opt. Soc. Am A. / Vol. 13, No. 7/July 1996.
- 5.- Jim Breckinridge y Chris Lindensmith, “*The Astronomical Search for Origins*”, Optics & Photonics News, February 2005 Vol. 16 No. 2.
- 6.- R. Neuhauser et. al., “*Evidence for a co-moving sub-stellar companion of GQ Lup*”, Astronomy & Astrophysics manuscript no. GJ061, March 31, 2005.
- 7.- A. Weaver and L. Danly, Proceedings of the Formation and Evolution of Planetary Systems Meeting, Edited by H., 1988 May 9-11, Space Telescope Science Institute, Cambridge University Press.
- 8.- Wolszczan A. and Frail D. A., Nature, 355, 145 (1992).
- 9.- Maciej Konacki et. al., The Astrophysical Journal, 513:471-476, 1999 March 1.

- 10.- Alexander Wolszczan, “*Confirmation of Earth-Mass Planets Orbiting the Millisecond Pulsar PSR B1257+12*”, *Science, New Series*, Vol. 264, No. 5158 (Apr. 22, 1994), 538-542.
- 11.- R. Paul Butler et. al., “*ULTRA-HIGH-PRECISION VELOCITY MEASUREMENTS OF OSCILLATIONS IN A CENTAURIA*”, *The Astrophysical Journal*, 600:L75-L78, 2004 January 1.
- 12.- Michel Mayor and Didier Queloz, “*A Jupiter-mass companion to a solar star*”, *Nature* Volume 378(6555), pp 355-359, 23 November 1995.
- 13.- R. Paul Butler et. al., “*SEVEN NEW KECK PLANETS ORBITING G AND K DWARFS*”, *The Astrophysical Journal*, 582:455-466, 2003 January 1.
- 14.- Roi Alonso et. al., “*TrES-1: THE TRANSITING PLANET OF A BRIGHT K0 V STAR*”, *The Astrophysical Journal*, 613:L153-L156, 2004 October 1.
- 15.- Debra A. Fischer, et al., *THE N2K CONSORTIUM I. A HOT SATURN PLANET ORBITING HD 88133*, *The Astrophysical Journal*, 620:481-486, 2005 February 10.
- 16.- D. Queloz, et al., Detection of a spectroscopic transit by the planet orbiting the star HD209458, *Astronomy & Astrophysics* 359, L13-L17 (2000).
- 17.- Maciej Konacki et. al., “*A TRANSITING EXTRASOLAR GIANT PLANET AROUND THE STAR OGLE-TR-10*”, *The Astrophysical Journal*, 624:372-377, 2005 May 1.
- 18.- David Charbonneau et. al, “*DETECTION OF PLANETARY TRANSIT ACROSS A SUN-LIKE STAR*”, *The Astrophysical Journal*, 529:L45-L48, 2000 January 20.

- 19.- Timothy M. Brown et. al, "*HUBBLE SPACE TELESCOPE TIME-SERIES PHOTOMETRY OF THE TRANSITING PLANET OF HD 209458*", The Astrophysical Journal, 552:699-709, 2001 May 10.
- 20.- Gregory W. Henry et. al., "*A TRANSITING '51 PEG-LIKE' PLANET*", The Astrophysical Journal, 529:L41-L44, 2000 January 20.
- 21.- A. Udalski et. al., "*A JOVIAN MASS PLANET IN MICROLENSING EVENT OGLE-2005-BLG-071*", The Astrophysical Journal, 628:L109-L112, 2005 August 1.
- 22.- D. Kubas et. al., "*Full characterization of binary-lens event OGLE-2002-BLG-069 from PLANET observations*", Astronomy & Astrophysics 435, 941-948 (2005).
- 23.- Eugene Hecht y Alfred Zajac, *Óptica*, Addison Wesley, 1986.
- 24.- Max Born & Emil Wolf, *Principles of Optical*, seventh (expanded) edition Cambridge, 2002.
- 25.- Marija Strojnik and Gonzalo Paez, "*Simulated interferometric patterns generated by a nearby star-planet system and detected by a rotational shearing interferometer*", J. Opt. Soc. Am. A, August 1999, Vol. 16, No. 8.
- 26.- G. Páez y M. Strojnik, "*Differential Rotationally-shearing Interferometer: Implementation Concept*", Infrared Technology and Applications XXIII, Proc. SPIE 3061, pp. 417-424 (1997).
- 27.- Gonzalo Páez-Padilla, Marija Strojnik Scholl, "*Differential Rotationally Shearing Interferometer: Implementation Concept*", SPIE Vol. 3061, 0277-786X/97.
- 28.- Arvind S. Marathay, *Elements Of Optical Coherence Theory*, John Wiley & Sons, 1982.