



**CENTRO DE INVESTIGACIONES  
EN ÓPTICA, A.C.**

**“ANÁLISIS DE POLARIZACIÓN DE LA INTERACCIÓN  
LUZ-MATERIA EN MEDIOS ANISOTRÓPICOS”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (ÓPTICA)**

**P R E S E N T A**

**ING. JUAN CARLOS GUTIÉRREZ GARCÍA**

**ASESOR DE TESIS: DR. JUAN FRANCISCO MOSIÑO.**

León, Guanajuato.

Diciembre de 2008.

## Resumen:

Existen varios modelos para representar la luz y para representar el cómo ésta interactúa con la materia. En muchos aspectos, estos modelos han sido la pieza clave para la realización de programas de simulación dirigidos a la fabricación de materiales con los cuales los elementos ópticos sean mejores y de mayor calidad. La polarización se viene utilizando desde hace mucho para las comunicaciones, prueba reciente de ello es que actualmente ha tomado fuerza este tema debido a la gran cantidad de aplicaciones en la que está incursionando, como por ejemplo en las televisiones de alta definición que manejan una mayor información por imagen mostrada, además de aumentar el contraste de las imágenes. Es también una importante herramienta de diagnóstico en muchas aplicaciones, incluyendo el sensado remoto, la astronomía solar, la espectroscopia atómica y molecular, la caracterización de materiales, aplicaciones en cristales líquidos, fotoelasticidad integrada, fibras ópticas, etc.

Con la premisa de que la modelación matemática y computacional es una herramienta científica que permite un mayor acercamiento a la predicción del comportamiento de la naturaleza y como base de una ingeniería avanzada, el propósito primordial de este trabajo de tesis es el de predecir, analizar, y estudiar el estado de la polarización de la luz cuando ésta se propaga a través de un medio anisotrópico homogéneo, lineal y no depolarizante\*, obteniendo su matriz de Mueller (M) correspondiente. Además, para el mejor entendimiento del modelo matemático y como primer paso en su implementación real, se proveniente de las ecuaciones y optimizarla en caso necesario, esto en vista de que cualquier usuario tenga facilidad para manejarlo y obtener resultados. Casos experimentales ampliamente documentados en la literatura son comparados con las predicciones del modelo, demostrando que este último puede ser usado para predecir los efectos de la polarización en distintos medios.

**Palabras Clave:** Polarización, propagación, medio anisotrópico, matrices de Mueller, vector de Stokes, matriz diferencial de Mueller, esfera de Poincaré, simulación matemática.

\* Actualmente investigadores reconocidos en el área de polarización como el Dr. Espinosa-Luna *et-al* han propuesto y publicado el término *despolarizante* para referirse correctamente medios con estas características en lugar del término *depolarizante*. Este trabajo de investigación se basará por el momento en el término más comúnmente mencionado en la literatura consultada.

# Índice:

<b>1. Introducción</b> .....	1
1.1 Motivación.....	1
1.2 Alcance.....	2
1.3 Objetivos.....	3
1.4 Estructura del trabajo.....	3
<b>2. Formalismos de polarización</b> .....	5
2.1 Aspectos históricos.....	5
2.2 Estados de polarización de la luz.....	7
2.2.1 Polarización lineal.....	7
2.2.2 Polarización elíptica.....	8
2.2.3 Polarización circular.....	9
<b>3. Modelos para la luz</b> .....	11
3.1 Vector de Jones.....	11
3.2 Vector de Stokes.....	14
3.3 Esfera de Poincaré.....	17
3.4 Elipse de polarización.....	18
<b>4. Interacción luz-materia</b> .....	23
4.1 Polarización por transmisión.....	24
4.1.1 Birrefringencia.....	24
4.1.2 Dicroísmo.....	27
4.2 Polarización por reflexión.....	28
4.3 Polarización por esparcimiento.....	29
4.4 Matrices de Jones.....	30
4.5 Matrices de Mueller.....	32
4.6 Propiedades y relación entre formalismos.....	35

<b>5. Solución del modelo de propagación.</b> .....	37
5.1 Ecuación diferencial de Stokes. ....	37
5.2 Método analítico y exacto. ....	41
5.3 Software desarrollado para el modelo matemático. ....	47
5.3.1 Descripción. ....	48
<b>6. Análisis y discusión de los resultados.</b> .....	53
6.1 Caso general 1. ....	53
6.2 Caso general 2. ....	56
6.3 Caso general 3. ....	60
6.4 Filtro de densidad neutra. ....	63
6.5 Dicroísmo puro. ....	65
6.6 Birrefringencia pura. ....	68
6.7 Placa retardadora $\lambda/4$ . ....	71
6.8 Polarizadores cruzados. ....	75
<b>7. Conclusiones y aplicaciones a futuro.</b> .....	78
<b>8. Referencias.</b> .....	79

# " Análisis de polarización de la interacción luz materia en medios anisotrópicos "

## Capítulo 1: Introducción

### 1.1 Motivación

En la actualidad hay muchos modelos para representar la luz y para representar el cómo ésta interactúa con la materia. En muchos aspectos, estos modelos han sido la pieza clave para la realización de programas de simulación para la fabricación de materiales con los cuales los elementos ópticos sean mejores y de mayor calidad.

La polarización se viene utilizando desde hace mucho para las comunicaciones, prueba reciente de ello es que actualmente ha tomado fuerza este tema debido a la gran cantidad de aplicaciones en la que está incursionando, como por ejemplo en las televisiones de alta definición que manejan una mayor información por imagen mostrada, esto lo logran con unos pocos cambios en la infraestructura actual, haciendo que cada repetidora de señal maneje dos polarizaciones circulares opuestas, con lo cual mientras una información es transmitida a los receptores otro tanto de información también es transmitida por el mismo canal, pero con diferente polarización. También en el campo de la computación, ya que en la actualidad no se puede conectar a más de una red inalámbrica a la vez debido a que una vez que se conecta a un punto de acceso, el protocolo de comunicaciones no permite que se conecte a otro punto de acceso y la comunicación es privada entre ambos, pudiendo mostrar todo el ancho de banda que tienen ambos dispositivos, en este aspecto se han propuesto programas (software) muy avanzados, pero en este tema la polarización está dando nuevas ideas a los desarrolladores para que con un solo transmisor/receptor se manejen infinidad de polarizaciones correspondientes a cada punto de acceso, lo que haría que virtualmente se pudiese conectar a más de uno al mismo tiempo y poder intercambiar información con ellos de una manera rápida, fácil, y de gran utilidad para dispositivos portátiles que están limitados en sus tiempos de uso de batería. El análisis de la luz polarizada es además una importante herramienta de diagnóstico en muchas aplicaciones, incluyendo sensado remoto, astronomía solar, espectroscopía atómica y molecular <sup>[15]</sup>, caracterización de materiales <sup>[27,35]</sup>, etc. Por ejemplo, las mediciones de campo magnético del sol se pueden obtener por

el análisis de su polarización en determinadas componentes del espectro de su luz, como se ha realizado en el Instituto de Astrofísica de las Canarias. Otro caso sería cuando se desea determinar lo rugoso de una superficie o bien la anisotropía de algún material, lo cual se logra investigando la depolarización de la luz incidente en ellos por medio de reflexión. Adicional a esto se ha desarrollado un método para el reconocimiento de objetos (formas) sobre todo de objetos transparentes, con el trabajo realizado por Koshikawa y aplicado por Miyazaki en el caso particular de orientación de las superficies <sup>[26]</sup>. Existen varios elementos para el estudio de la polarización, uno de ellos es el uso de las LCVR (Liquid-Crystal Variable Retarders) o retardadores variables de cristal líquido, que son placas de onda sintonizables que en conjunto con polarizadores lineales, forman polarizadores lineales orientados y circulares que se requieren para caracterizar la polarización de un haz de luz desconocido en un polarímetro de Stokes.

En el estudio de estos fenómenos entra lo que es la modelación matemática y computacional, la cual es una herramienta científica que permite un mayor acercamiento a la predicción del comportamiento de la naturaleza. La base de estos pronósticos son las ideas físicas basadas en las matemáticas y se implementan por medio del cómputo (disponer de modelos matemáticos es la columna vertebral de la ingeniería avanzada). El conocimiento científico, por sí sólo, no es capaz de predecir el curso de un fenómeno; para hacerlo, es necesario integrar ese saber en un modelo. Otra de sus ventajas es su carácter multidisciplinario y sus sistemas de interés incluyen áreas de conocimiento en geociencias, astronomía, océanos, biología, en biomedicina <sup>[33]</sup> como la tomografía <sup>[52]</sup> y sus aplicaciones en el ojo humano <sup>[40,57]</sup>, física, química, diseño de periféricos (pantallas para disminuir el brillo en monitores <sup>[63]</sup>), petróleo, hidrología, y ecología. Aplicaciones desde la caracterización <sup>[14]</sup> y control de calidad en cristales líquidos (como en los trabajos de Claire Gu y Pochi Yeh), fotoelasticidad integrada, fibras ópticas <sup>[72]</sup> (exhiben una birrefringencia lineal intrínseca, y una birrefringencia circular que puede ser inducida por una torsión) <sup>[18]</sup>, birrefringencia corneal <sup>[39]</sup> e instrumentos de medición <sup>[20]</sup> son también algunas aplicaciones comerciales actuales.

## 1.2 Alcance

Esta tesis se limitará a predecir, analizar y estudiar los casos de los estados de polarización de la luz a través de un medio anisotrópico homogéneo, lineal y no depolarizante con un software creado específicamente para tal fin, siendo este el principal actor en lo que rige a este trabajo de investigación.

## 1.3 Objetivos

El principal objetivo de esta investigación para el Centro de Investigaciones en Óptica es el de desarrollar un software que tenga la capacidad de predecir el estado de polarización de la luz cuando atraviesa un medio anisotrópico homogéneo, lineal y no depolarizante. Para ello se utilizará el modelo exacto y explícito para resolver la matriz diferencial de Mueller ( $m$ ) y con ello obtener la matriz de Mueller ( $M$ ) del medio analizado. Dos métodos son propuestos para la elaboración de este programa de simulaciones, uno relacionado con los modelos previamente utilizados que involucra resolver numéricamente la exponencial de una matriz y otro método exacto y analítico, con lo cual se verificará cuál cumple con las especificaciones para ser rápido, práctico y confiable en lo que a procesamiento digital se refiere.

## 1.4 Estructura del Trabajo

En el capítulo 1 se hace una introducción y justificación de por qué el modelo para la propagación de la luz que caracteriza el estado de polarización con dependencia espacial es importante para investigaciones de tipo científico y tecnológico. En el capítulo 2 se estudian los formalismos de polarización, una leve descripción de la historia de la polarización y que fue la que contribuyó en la elaboración de estos modelos, así como los estados de polarización en general. El vector de Jones, el vector de Stokes, la esfera de Poincaré y la elipse de polarización son algunos de los temas a tratar en el capítulo 3 que se refiere a los formalismos para representar la luz. Para el capítulo 4 se detallará lo que es la interacción luz-materia, como la polarización por reflexión, transmisión y esparcimiento, dicroísmo y birrefringencia, matrices de Jones y de Mueller, esto para representar a los medios de propagación. En el capítulo 5 se estudia la solución a los modelos de propagación, con énfasis en el modelo de Mueller-Stokes y se presenta el software realizado para tales fines, con una descripción detallada del mismo, que es el que utiliza el algoritmo exacto y explícito para predecir el estado de polarización de la luz cuando se propaga a través de medios anisotrópicos; datos de entrada, datos de salida e interpretación de los resultados que se muestran son además temas de interés discutidos en este capítulo. En la sección 6 se presentan algunas demostraciones de soluciones ya reportadas en la literatura, su discusión y los resultados de las simulaciones de propagación y el estado de polarización, cotejándolas con los

resultados ya publicados. Las conclusiones de esta tesis así como el trabajo a futuro que abre esta investigación se tratan en el capítulo 7 de este trabajo. Finalmente, en capítulo 8 se presentan las referencias bibliográficas y las publicaciones científicas consultadas para este trabajo de investigación.



# Capítulo 2: Formalismos de polarización

## 2.1 Aspectos históricos

La palabra polarización no es exclusiva de la óptica, esta palabra se utiliza en una gran variedad de campos y de aplicaciones, ya que por sí misma se refiere a la tendencia (o dirección) de, por ejemplo, un grupo social en la sociedad, o las vibraciones sísmicas de un evento topográfico, etc. En el campo electromagnético, es la propiedad que pueden poseer las ondas transversales, consistentes en que todas las vibraciones de la onda se producen sobre una sola dirección perpendicular a la de propagación. La mayoría de la luz no está polarizada en el sentido de estar compuesta por campos eléctricos con una distribución aleatoria de direcciones. La luz se polariza cuando se refleja o es dispersada por cargas eléctricas y por ende, la mayoría de intensidad de ésta termina concentrada en un plano a lo largo de la línea propagación.

El descubrimiento de la polarización se atribuye usualmente a Erasmus Bartholinus, matemático danés que en 1669 observó la doble refracción usando un cristal de calcita. Después en 1672 Huygens interpretó la doble refracción usando el concepto de ondas esféricas secundarias <sup>[9]</sup>. Thomas Young relacionó la interferencia constructiva y la naturaleza transversal de la luz al fenómeno de la polarización. Desde ese punto la polarización tuvo avances significativos en lo conceptual y en lo experimental. A continuación se presenta una tabla con la historia del fenómeno de la polarización:

**Tabla 1: Cronología del fenómeno de la polarización de la luz.**

<b>AÑO</b>	<b>EVENTO RELACIONADO CON LA POLARIZACIÓN</b>
<b>1669</b>	Erasmus Bartholinus, científico danés, descubre la doble refracción.
<b>1690</b>	Christian Huyghens, científico holandés, descubre la polarización de la luz. Demuestra la polarización con la ayuda de dos cristales de calcita en un arreglo en serie.
<b>1757</b>	Robert Hooke, físico inglés, sugiere tentativamente que las vibraciones de la luz son transversales (a la dirección de propagación).
<b>1808</b>	Etienne-Louise Malus, científico francés, descubre la polarización por reflexión.
<b>1811</b>	D. F. J. Arago, científico francés, descubre la rotación óptica.
<b>1812</b>	Jean B. Biot, físico francés, es el primero en apreciar que los cristales refracto-uniaxiales se pueden clasificar de acuerdo a como el índice extraordinario es mayor o menor al índice ordinario.
<b>1812</b>	Arago inventa el polarizador con una pila de placas.
<b>1812</b>	David Brewster, científico escocés, enuncia la “Ley de Brewster” que predice el fenómeno de la polarización por reflexión.

<b>1815</b>	Biot descubre una propiedad peculiar de la tourmalina: el dicroísmo.
<b>1816</b>	August Fresnel, físico francés, relaciona a la polarización con la interferencia de ondas.
<b>1817</b>	Thomas Young, físico inglés, es el primero en probar que las vibraciones de la luz efectivamente son transversales, como sugirió Hooke.
<b>1828</b>	William Nicol, físico escocés, inventa el “prisma de Nicol”.
<b>1844</b>	Wilhem Haidinger, minerólogo austríaco, descubre el fenómeno de “cepillo de Haidinger”, el cual refiere a qué personas pueden percibir directamente de un haz lo suficientemente ancho y uniforme de luz linealmente polarizada cuánta es de hecho polarizada.
<b>1845</b>	Michael Faraday, físico inglés, descubre el “efecto Faraday”.
<b>1847</b>	Haidinger descubre el dicroísmo circular.
<b>1852</b>	William B. Herapath, físico inglés, descubre un material cristalino sintético que polariza la luz en todas las longitudes del campo visual.
<b>1852</b>	George G. Stokes, físico inglés, inventa los “cuatro parámetros de Stokes” para describir un haz de luz parcialmente polarizado.
<b>1875</b>	John Kerr, físico escocés, descubre el “efecto Kerr”.
<b>1887</b>	Heinrich Hertz, físico alemán, produce las “ondas Hertzianas”.
<b>1892</b>	Henri Poincaré, matemático francés, inventa el método de la “esfera de Poincaré” para representar un haz de luz con cierta polarización.
<b>1928</b>	Edwin H. Land, científico estadounidense, inventa con éxito la primera hoja dicroica polarizadora.
<b>1933</b>	Bernard F. Lyot, científico francés, inventa el “filtro Lyot”.
<b>1938</b>	Land inventa la hoja “H”, hoja polarizadora dicroica.
<b>1940</b>	Robert Clark Jones, físico estadounidense, inventa el “cálculo de Jones” para analizar los cambios que se producen en un haz de luz debido a polarizadores y retardadores.
<b>1942</b>	Francis Perrin, científico francés, encuentra como poner los cuatro parámetros de Stokes y las dieciséis constantes de transformación de Soleillet en una forma compatible, mediante el uso de álgebra matricial.
<b>1943</b>	Hans Mueller, profesor de física, inventa una aproximación fenomenológica a problemas de polarización y luz parcialmente polarizada. Esta aproximación involucra matrices de 4x4.
<b>1943</b>	Robert P. Blake, científico americano, inventa el polarizador HR, la primera hoja polarizadora de uso en el infrarrojo.
<b>1977</b>	Azzam, científico estadounidense, extiende el cálculo de Mueller y de Jones. Notación Actual.

Para entender la importancia y el comportamiento de las dos componentes electromagnéticas ortogonales y la propagación de dicho campo eléctrico es necesario introducir la ecuación de onda. La ecuación de onda apareció por primera vez como una hipótesis en la óptica en 1800. En 1865 James Clerk Maxwell demostró que su teoría del campo electromagnético llevaba al mismo resultado que la ecuación de las ondas en la óptica, de ahí que la ecuación de onda es una consecuencia de la teoría de Maxwell <sup>[3]</sup>.

No fue sino hasta que se observó y se comprobó la naturaleza ondulatoria transversal de las ondas electromagnéticas, en este caso las de la luz, que se dio un gran avance en las investigaciones de este fenómeno y sus consecuentes líneas de investigación, una de las cuales es la que se refiere a la

interacción de la luz con la materia, como lo puede ser un medio anisotrópico. Los problemas de la polarización solo se comenzaron a tratar con éxito en la mitad del siglo 20 con el desarrollo del cálculo de matrices de Jones y con el cálculo matricial de Mueller.

Una razón poderosa para el correcto entendimiento y éxito de los tratamientos de la polarización en la comunicación se debe, en gran parte, a la gran cantidad de trabajo realizado en el tema de la polarización de la luz clásicamente para el desarrollo de las fibras ópticas<sup>[72]</sup>. En la óptica clásica los cálculos requeridos para tratar la luz polarizada son notoriamente difíciles de realizar. Esto llevó como resultado a la introducción de un método de cálculo visual entrado el siglo 19 en la forma de la esfera de Poincaré. Mientras que la esfera de Poincaré es un método muy satisfactorio para visualizar la información de las polarizaciones, con el tiempo uno descubre que no todo es así de fácil para resolver problemas de polarización complejos. En estos métodos gráficos entran la elipse de polarización y la esfera de Poincaré.

## 2.2 Estados de polarización de la luz

Los estados de polarización son obtenidos por superposición de ondas electromagnéticas luminosas de la misma frecuencia cuyos vectores eléctricos vibran en direcciones perpendiculares. Existen esencialmente 3 estados de polarización puros, de los cuales se derivan las polarizaciones posibles para la luz: luz elípticamente polarizada, luz linealmente polarizada y luz circularmente polarizada, siendo estas 2 últimas casos especiales de la primera.

### 2.2.1 Luz linealmente polarizada:

El vector de campo eléctrico se encuentra vibrando según una única dirección, equivalente a superposición de ondas luminosas de la misma frecuencia con vectores perpendiculares, desfasadas 0 o  $\pi$  radianes. Se adopta el convenio de cargar la fase sobre la componente  $y$  ( $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ ). La figura 1 muestra una vista frontal de una luz linealmente polarizada cuya dirección de vibración forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  (izquierda) y una vista completa de una luz linealmente polarizada vibrando según el eje  $y$  (derecha). Desfase 0 (vibración en 1º y 3º cuadrantes).

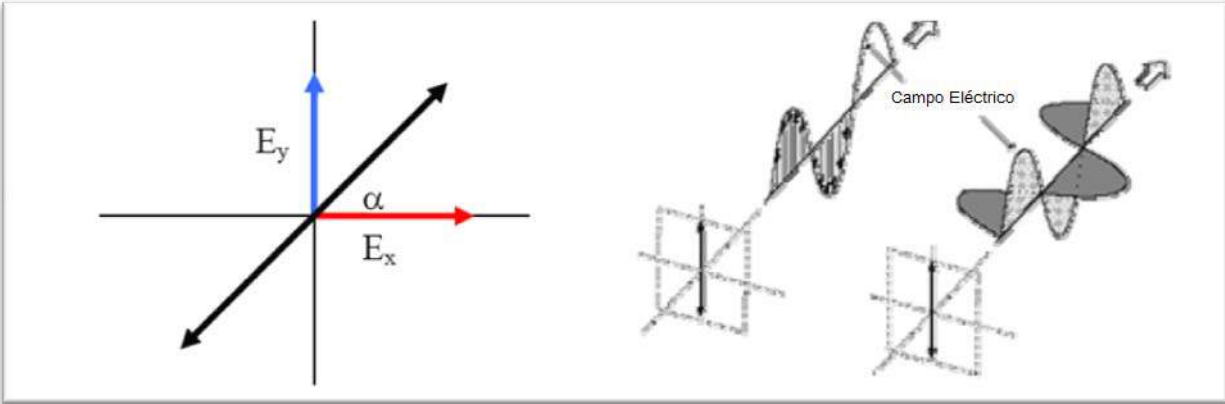


Figura 1: Polarización Lineal del vector eléctrico.

### 2.2.2 Luz elípticamente polarizada:

El vector eléctrico cuyo extremo describe una trayectoria elíptica, equivalente a superposición de ondas luminosas de la misma frecuencia con vectores eléctricos perpendiculares desfasados un ángulo entre 0 y  $\pi$  (sentido horario o *dextrógiro* de giro sobre la elipse) o entre  $\pi$  y  $2\pi$  (sentido anti-horario o *levógiro* de giro sobre la elipse). En la figura 2 se observan tres fases consecutivas de movimiento en vista frontal para un desfase de  $\pi/2$  (izquierda), y una vista completa de una luz polarizada elíptica con desfase de  $3\pi/2$  (derecha).

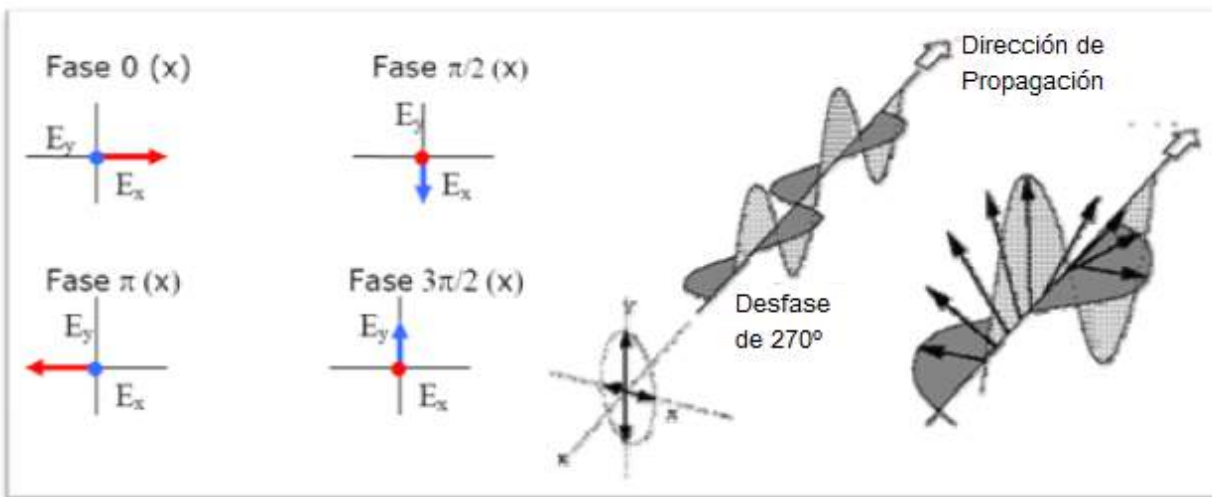
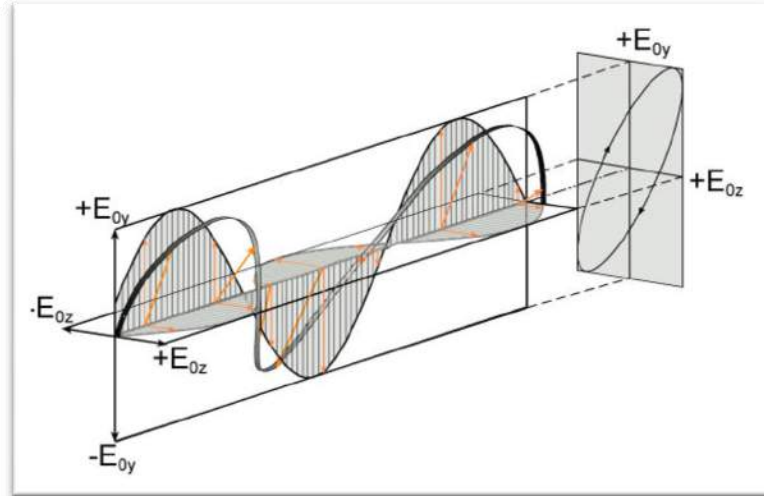


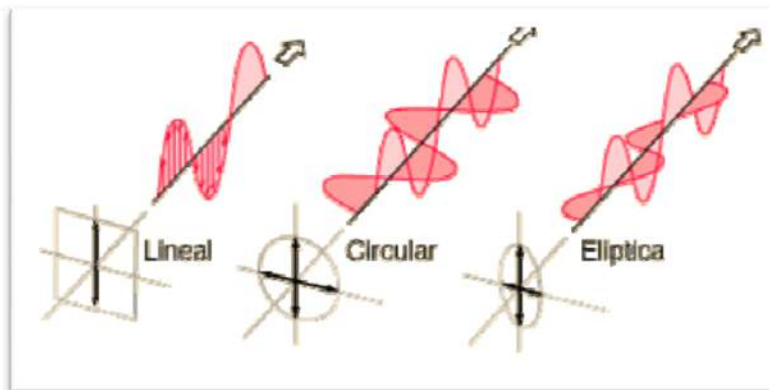
Figura 2: Polarización Elíptica del campo eléctrico.



**Figura 2a:** Variación de las componentes del campo eléctrico en la polarización elíptica con propagación a lo largo del eje  $x$ .

### 2.2.3 Luz circularmente polarizada:

En este caso el vector eléctrico cuyo extremo describe una trayectoria circular, equivalente a superposición de ondas luminosas de la misma frecuencia con vectores eléctricos perpendiculares de igual amplitud desfasados un ángulo  $\pi/2$  (sentido horario o *dextrógiro* de giro) o  $3\pi/2$  (sentido anti-horario o *levógiro* de giro). Así, si el desfase es  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ , la luz será polarizada elíptica si las dos componentes no tienen igual amplitud, y circular si tienen igual amplitud. La luz puede encontrarse en estados puros o mezcla de estados de polarización.



**Figura 3:** Estados de polarización (en general) conforme el campo eléctrico  $E$  se propaga.

### Obtención de luz polarizada, polarizadores lineales:

Los polarizadores son dispositivos que seleccionan una particular dirección de vibración de la luz, de forma que tras atravesarlos luz natural emerge linealmente polarizada en la dirección seleccionada mediante la orientación del “*eje de transmisión*” del polarizador. El eje perpendicular al de transmisión se denomina “*eje de extinción*”. Hay una variedad de métodos para conseguir esta selección, entre los que destacan la absorción selectiva por dicroísmo (más común), reflexión con ángulo de Brewster, polarización por dispersión, entre otros.

Si sobre un polarizador lineal incide luz linealmente polarizada con intensidad  $I_0$ , la intensidad transmitida  $I_t$  resulta:

$$I_t = I_0 \cos^2 \alpha \quad (2.1)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado entre la dirección de vibración de la luz incidente y el eje de transmisión del polarizador. De aquí se deduce que si colocamos dos polarizadores con sus ejes de transmisión formando  $90^\circ$ , no habrá luz transmitida por el segundo polarizador (caso que se demostrará más adelante de este trabajo).

# Capítulo 3: Modelos para la Luz

## 3.1 Vector de Jones

Dada la naturaleza electromagnética de la luz, es posible representar la polarización de forma que los vectores de los planos de una onda plana uniforme puedan ser representados de una manera más conveniente para su estudio. El representar una onda de la forma:

$$E(\vec{r}, t) = \left[ \vec{E} \cos(\omega t - k \cdot r + \theta) \right] u + \left[ \vec{E}' \cos(\omega t - k \cdot r + \theta') \right] u' \quad (3.1)$$

y que esta se propague en la dirección  $z$ , donde los vectores unitarios  $u$  y  $u'$  se extienden a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$ , se puede expresar esto de la siguiente manera <sup>[4]</sup>:

$$E(z, t) = \left[ E_x \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \theta_x\right) \right] e_x + \left[ E_y \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \theta_y\right) \right] e_y \quad (3.2)$$

En estos casos y para una mejor representación de la amplitud y la fase de la onda, se utilizará la expresión que se acomoda en una matriz de 2x1 de forma que queden implícitos los vectores de propagación temporal. Para nuestra conveniencia, es preferible cambiar a notación fasorial, de manera que la parte espacial puede ser escrita fuera de la matriz:

$$E(z) = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z} \begin{bmatrix} E_x e^{j\theta_x} \\ E_y e^{j\theta_y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Considerando un solo punto en el espacio, podemos evaluar en  $z=0$  para eliminar la parte espacial:

$$E(0) = \begin{bmatrix} E_x e^{j\theta_x} \\ E_y e^{j\theta_y} \end{bmatrix} \rightarrow E \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

El resultado obtenido es el desarrollo de Jones, por lo que a esta expresión se le conoce como el nombre de “*vector de Jones*”; dicho vector contiene la información de amplitud y fase de la onda, razón por la cual se puede decir que está representada su polarización. Este formalismo utiliza cantidades que no son directamente medibles <sup>[51]</sup>. Aún así, por su dependencia con la teoría electromagnética se utiliza ampliamente para representar la evolución del estado de polarización. De modo tal que para los estados de polarización vertical y horizontal sus correspondientes vectores de Jones son:

$$E_x = \begin{bmatrix} E_0 e^{j\theta_x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_y = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 e^{j\theta_y} \end{bmatrix} \text{ (con dependencia del tiempo implícita dentro de las fases). Cabe}$$

mencionar que ambas polarizaciones, tal como en el álgebra lineal, pueden ser polarizaciones ortogonales, esto significa que:  $E_x \perp E_y = E_1^T E_2^* = 0$

Para la polarización circular derecha, se tiene un desfase entre componentes de  $\pi/2$ , por lo que:

$$E_{CD} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{j\theta_x} \\ E_{0y} e^{j(\theta_y - \frac{\pi}{2})} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Y de forma similar para la circular izquierda:

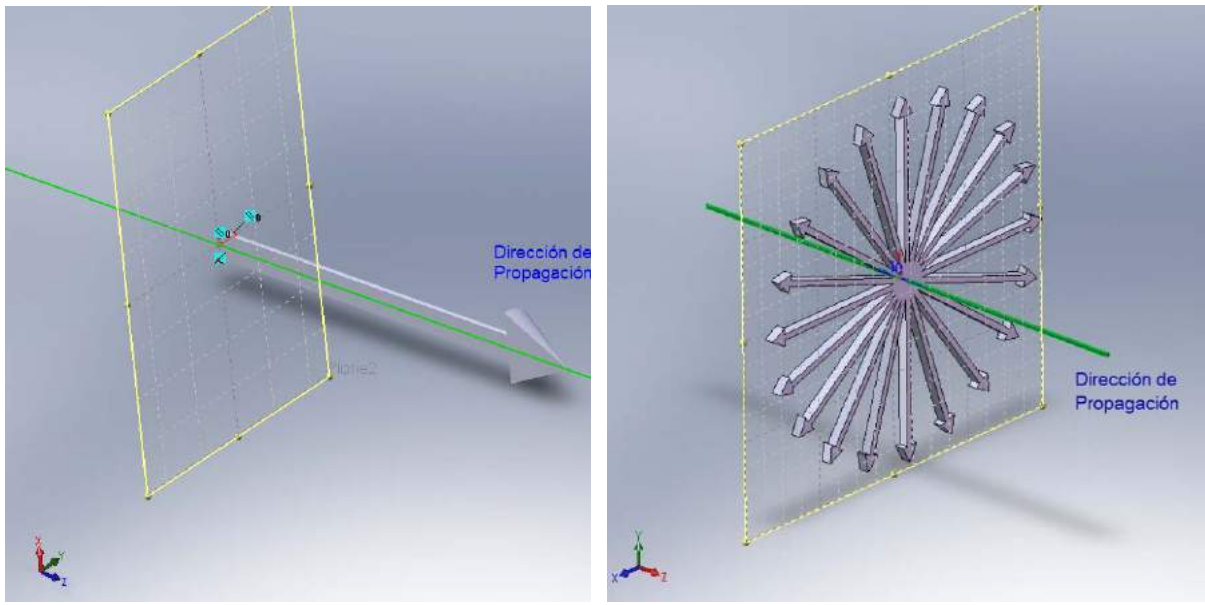
$$E_{CI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Debido a que esta notación requiere de luz coherente, múltiples haces de luz se analizan bajo el principio de superposición, esto es:

$$E = \sum E_i = \sum_i \begin{bmatrix} E_{i,x}(t) \\ E_{i,y}(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La luz natural, como tal, no está polarizada, esto debido a que su vector de campo eléctrico  $E$  está oscilando aleatoriamente en el tiempo mientras se propaga, cumpliendo la característica de las ondas transversales de que oscila perpendicularmente a este último plano. En la figura 4 se bosquejan la forma dirección de  $E$  de la luz polarizada y de la luz no polarizada.



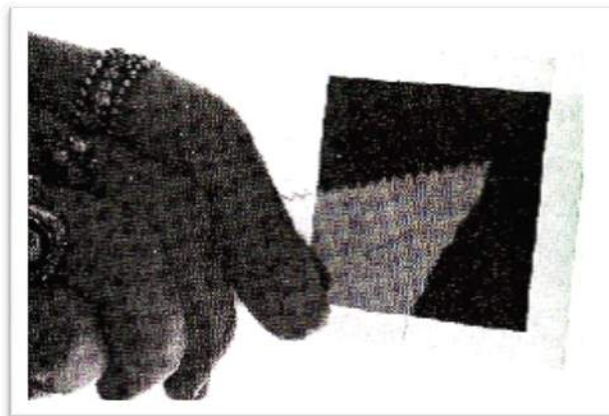


(a)

(b)

**Figura 4: Representación de la dirección del vector eléctrico de una (a) luz polarizada y una (b) luz natural o no polarizada.**

En este aspecto se toca un punto muy importante. Si la polarización contra la posición no se puede resolver, se obtiene luz no polarizada (como la luz natural al pasar por un elemento sucio). De otra manera se referirá a este punto como luz localmente polarizada.



**Figura 5: Luz natural a través de un elemento que actúa como polarizador.**

Una de las causas de este fenómeno es que las polarizaciones  $x$  y  $y$  fluctúen con respecto a su fase relativa. En este caso el estado de polarización es:

$$\begin{aligned}
E_x(z, t) &= \text{Re} \left\{ E_{0x} e^{j(kz - \omega t + \theta_x(t))} \right\} \\
E_y(z, t) &= \text{Re} \left\{ E_{0y} e^{j(kz - \omega t + \theta_y(t))} \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

De manera que el vector resultante de Jones para la polarización será:

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ E_{0x} e^{j(kz - \omega t + \theta_x(t))} \right\} \\ \text{Re} \left\{ E_{0y} e^{j(kz - \omega t + \theta_y(t))} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E_{0y}}{E_{0x}} e^{(\theta_y(t) - \theta_x(t))} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Como se puede observar, la fase relativa es dependiente del tiempo, y esa fluctuación es la responsable de que la luz resultante sea no polarizada.

Hay que mencionar que debido a las propiedades físicas de la materia, diferentes materiales tienen diferentes maneras de interactuar con la energía. En el caso de los dieléctricos, el campo eléctrico es varios órdenes de magnitud mayor que el campo magnético, lo que es al contrario cuando hablamos de metales. Es por esta razón que por conveniencia se puede utilizar un campo u otro, y como ambos son ortogonales entre sí, es fácil asimilar la idea de que polarizando uno de ellos, el otro también se polariza, esto último siempre que las propiedades del medio así lo permitan.

## 3.2 Vector de Stokes

Consiste en cuatro cantidades, llamadas parámetros de Stokes, que describen la intensidad y la polarización de un haz de luz (aunque no necesariamente debe ser un haz de luz <sup>[3,4,8]</sup>). Este haz puede estar polarizado total o parcialmente, incluso sin polarizar, y éste a su vez puede ser monocromático o tener un ancho de banda en frecuencias (policromático). Estos parámetros tienen dimensiones de intensidad y cada uno corresponde a la intensidad promediada en el tiempo, donde este último es el factor indispensable para que las mediciones experimentales sean exactas. Además, los parámetros de éste vector columna son reales, esto matemáticamente se representa con un vector, y existe en un espacio de 4 dimensiones, no en el espacio físico de 3 dimensiones.

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A continuación una tabla con los Vectores de Stokes y de Jones para varios estados de polarización <sup>[10]</sup>:

**Tabla 2: Representación de la luz en los vectores de Jones y de Stokes**

Estado de polarización	Vector de Jones	Vector de Stokes
Horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Vertical	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
A 45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
A -45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Circular Derecho	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Circular Izquierdo	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Estos parámetros de Stokes son especialmente útiles para tratar luz totalmente polarizada, parcialmente polarizada o luz natural (no polarizada). Si se interpretan los parámetros en términos de los tipos de polarizadores, se observa que  $S_0$  es la manifestación de la irradiancia incidente,  $S_1$  corresponde a la cantidad en la que la polarización tiende a observarse de manera horizontal ( $S_1 > 0$ ) o de tipo vertical ( $S_1 < 0$ ),  $S_2$  nos dice cuanta luz tiene una polarización de  $+45^\circ$  ( $S_2 > 0$ ) o en dirección a  $-45^\circ$  ( $S_2 < 0$ ) y finalmente  $S_3$  que es la cantidad de cuánto de la luz que pasa a través del medio es circular derecha ( $S_3 > 0$ ) ó circular izquierda ( $S_3 < 0$ ). Debido a la forma del vector de Stokes cada una de las componentes se puede acomodar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_0 &= 2I_0 \\ S_1 &= 2I_1 - 2I_0 \\ S_2 &= 2I_2 - 2I_0 \\ S_3 &= 2I_3 - 2I_0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este vector contiene la información acerca de la luz, tanto su parte polarizada como su parte no polarizada.

$$S = S_{polarizada} + S_{no\ polarizada} \quad (3.12)$$

donde:  $S_{polarizada} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$  y  $S_{no\ polarizada} = \begin{bmatrix} S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (3.13 y 3.14)

Con estas definiciones, queda claro que la luz puede encontrarse o no totalmente polarizada tanto al incidir en un medio como después de que se ha propagado a través de él, por lo que resulta útil definir qué tan polarizada se encuentra la luz en un momento específico dados sus parámetros de Stokes que contienen la información acerca de su polarización, por lo que surge el concepto de “grado de polarización” [30]:

$$\text{Grado de polarización: } DoP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (3.14)$$

donde  $DoP = 1$  para luz totalmente polarizada y  $DoP = 0$  para luz natural (luz sin una prevalencia en ninguna de sus componentes sobre otra del mismo tipo). Cualquier resultado entre 0 y 1 corresponderá a luz parcialmente polarizada. Cabe mencionar el hecho de que con este formalismo del vector de Stokes se es capaz de describir la luz con combinaciones de luz polarizada, luz no polarizada y luz parcialmente polarizada, ya que si se trata de fuentes incoherentes, los vectores de Stokes que forman un vector de Stokes final se tratan como una suma de vectores, elemento a elemento.

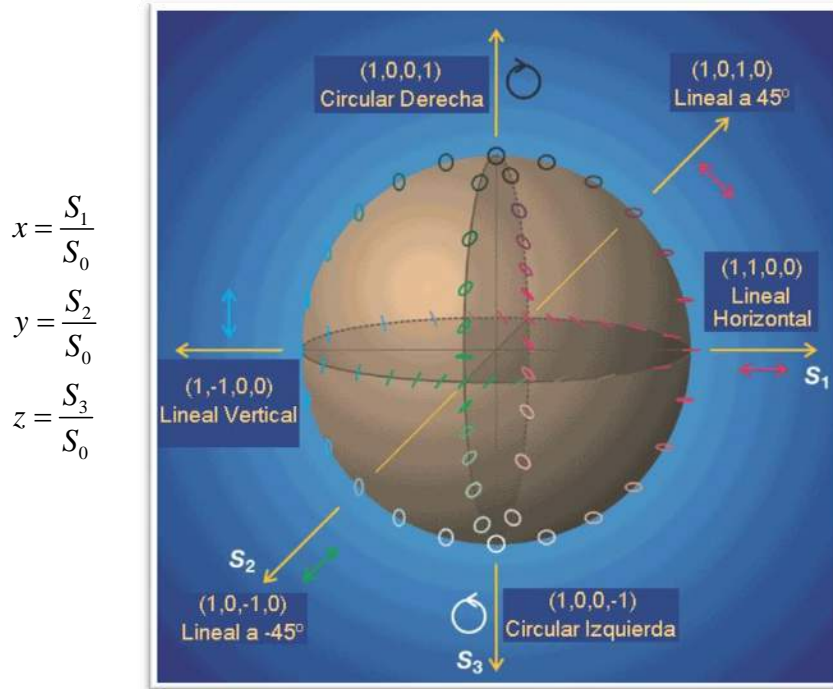
$$S = \sum_i S_i = \sum_i \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

El formalismo del vector de Stokes puede representar cualquier estado de la luz a diferencia del vector de Jones:

$$\text{Vector de Jones} \subset \text{Vector de Stokes} \quad (3.16)$$

### 3.3 Esfera de Poincaré

Es una manera conveniente de representar la polarización de la luz y de predecir como un cierto retardador modificará su estado de polarización. Éste método es esencialmente un mapeo, esto es, cada punto en una esfera representa una forma de polarización distinta. Proporciona además una solución rápida a problemas donde se ven involucrados retardadores y/o combinaciones de éstos. Los valores graficados corresponden a los elementos del vector de Stokes  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  de manera normalizada, de modo que cada punto único en el espacio representa un estado de polarización de la luz en el vector de Stokes.



**Figura 6: Representación normalizada de los parámetros de Stokes: la esfera de Poincaré.**

En el centro de la esfera se representa el punto cuyas coordenadas cartesianas son  $(0,0,0)$ , correspondiente al vector de luz natural en Stokes  $(1,0,0,0)$ . Los puntos ubicados en el ecuador manifiestan un tipo de polarización lineal. Los puntos en los polos son polarizaciones circulares. Cualquier punto en la superficie de la esfera refiere a un estado de polarización total, es decir, que la luz se encuentra totalmente polarizada. De la misma manera, cualquier punto representado en el interior de la esfera, a excepción del origen, es la representación de un tipo de luz parcialmente polarizada, que cumple con lo establecido en la ecuación <sup>[41]</sup>:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (3.17)$$

### 3.4 Elipse de polarización

El patrón general de un haz monocromático, con polarización elíptica, se puede describir con la herramienta que se llama “elipse de polarización”. Para describirla, se parte de la ecuación de onda tridimensional que describe el campo óptico en el espacio libre en coordenadas cartesianas, a saber:

$$\nabla^2 E_i(r,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i(r,t)}{\partial t^2} \quad i = x, y \quad (3.18)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $\partial^2/\partial t^2$  es la derivada parcial segunda con respecto del tiempo y  $r$  es la parte espacial  $r(x, y, z)$ . Esta ecuación representa a dos ecuaciones de onda independientes,  $E_x$  y  $E_y$ , ortogonales entre si y ubicadas en el mismo plano perpendicular a la dirección de propagación  $z$ . La solución a esta ecuación en términos de funciones periódicas es:

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_y(z,t) &= E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Estas ecuaciones son instantáneas en el sentido de que el tiempo de propagación de una onda en un ciclo completo es de  $10^{-15}$  seg. La duración de estas magnitudes no puede ser observada o medida con certidumbre absoluta de manera convencional, de modo que se desarrollaron ecuaciones para poder medirla y observarla experimentalmente. En la práctica se encontró que era observable y medible el tomar promedios en el tiempo de la intensidad al cuadrado de estas componentes [3].

La elipse de polarización es una representación de las características de un campo eléctrico en un momento determinado y se puede degenerar en casos muy particulares dependiendo de las condiciones de valores que pueden tomar  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  y el ángulo de desfase  $\delta$ . Cabe mencionar que este desfase se refiere a la diferencia de fase entre los valores máximos de las componentes del vector eléctrico. Para deducir los casos generales, se parte de las ecuaciones del campo eléctrico para obtener finalmente la expresión:

$$\frac{E_x^2(z,t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(z,t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(z,t)E_y(z,t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (3.20)$$

A continuación se presenta un programa en MATLAB para visualizar los estados degenerados de la elipse de polarización en función del ángulo de desfase entre sus componentes:

```
Delta=1:1:360;
E0x=1;
```

```

E0y=1;
for ciclo=0:1:length(Delta);
    Ex1=E0x*cos(deg2rad(Delta+.001));
    Ey1=E0y*cos(deg2rad(Delta+ciclo));
    plot(Ex1,Ey1, '-');
    hold on
    plot(Ex1(1),Ey1(1), 'og');
    plot(Ex1(90),Ey1(90), 'or');
    axis([-1,1,-1,1])
    axis square
    title('Evolucion de la elipse de polarizacion');
    xlabel('E_0_x');ylabel('E_0_y')
    str(1)={'Grados de retraso:'};
    str(2)={' \delta=' ,num2str(ciclo), '°'};
    text(-.5,.6,str,'FontSize',8);
    pause(.001)
    clf('reset')
end

```

Los casos extremos de esta degeneración son en los cuales la elipticidad adquiere el valor de cero (polarización lineal) y cuando tiene una orientación igual a cero (polarización circular). Considerando  $E_x = 0$ , es decir, considerando la onda en un instante dado, y con la componente horizontal en 0 vista desde el eje de propagación  $z$ . En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:

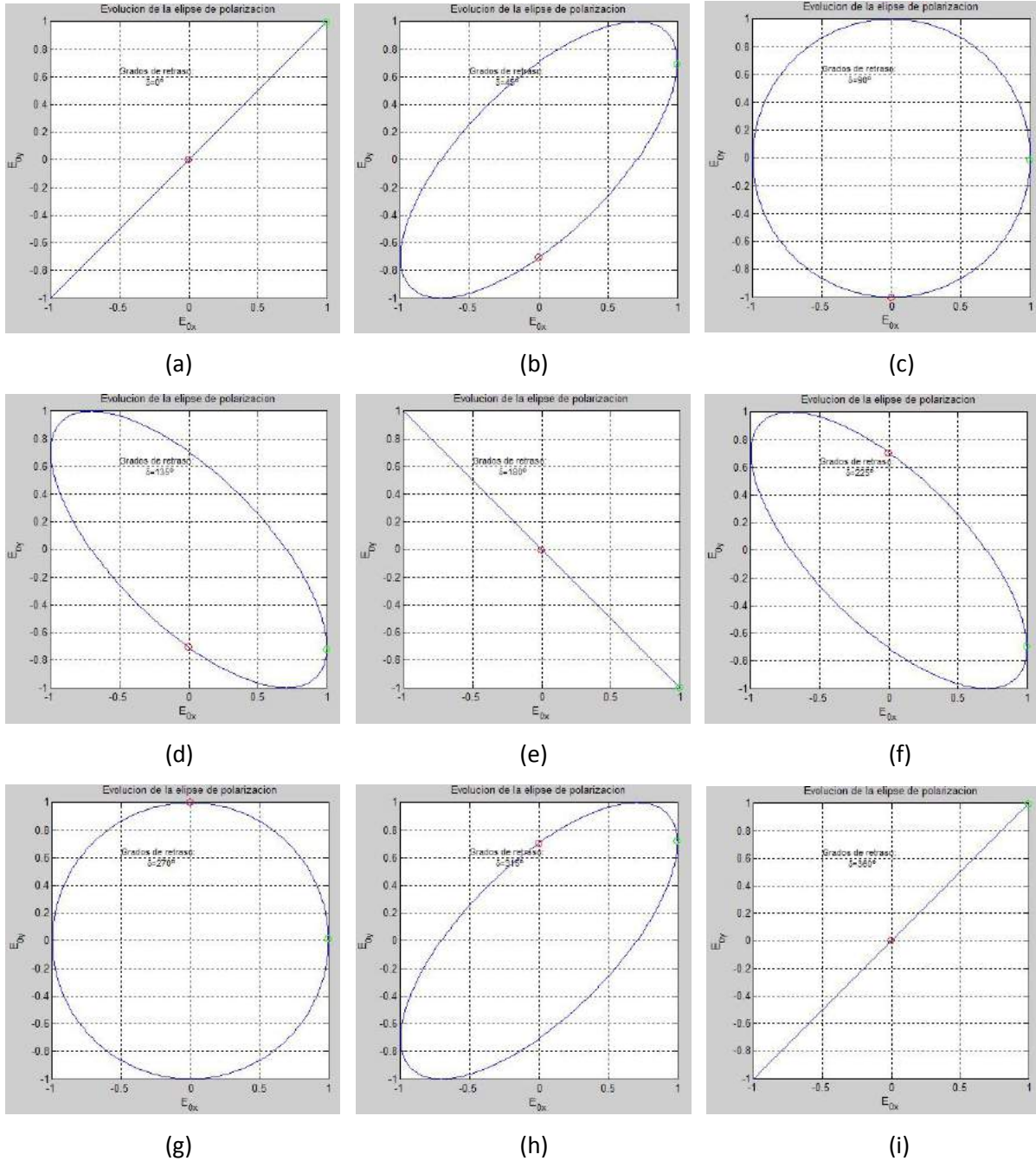
$$\begin{aligned}
 E_x(z,t) &= 0 \\
 E_y(z,t) &= E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Como resultado de la ecuación de onda, lo que significa que toda la propagación se realiza con una oscilación en el eje  $y$ , por lo que se dice que la luz está linealmente polarizada en el eje vertical. De manera similar si ahora se considera la onda en un instante dado, sin la componente vertical, observada desde el eje de propagación  $z$ , es decir,  $E_y = 0$ . En este caso tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 E_x(z,t) &= E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\
 E_y(z,t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

El resultado de la ecuación de onda significa que la propagación se realiza con una oscilación sobre el eje  $x$ , por lo que se dice que la luz está linealmente polarizada en el eje horizontal. Con esto se observa la variación en la propagación suprimiendo una de las componentes del campo eléctrico totalmente.



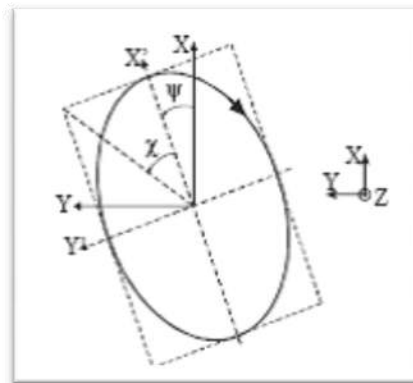


**Figura 7: Evolución de la elipse de polarización a un desfase de: (a) 0, (b)  $\pi/4$ , (c)  $\pi/2$ , (d)  $3\pi/4$ , (e)  $\pi$ , (f)  $5\pi/4$ , (g)  $3\pi/2$ , (h)  $7\pi/4$ , (i)  $2\pi$ .**

Como es de esperarse, la polarización elíptica incluye a las polarizaciones lineales y circulares como casos degenerados especiales, es decir, cuando la elipticidad vale 0 y 1 respectivamente. Las polarizaciones lineales vertical y horizontal son ortogonales entre sí, al igual que lo son las polarizaciones circular derecha y circular izquierda. En el caso de las polarizaciones elípticas, se dice que dos de ellas

son ortogonales si sus acimuts tienen una diferencia entre ellas de  $90^\circ$ , las rotaciones son opuestas y las elipticidades son idénticas. Puede que tengan el mismo plano de polarización, pero diferente dirección. Por esto es necesario que cumplan con ambos puntos a la vez.

Esta elipse de polarización es bastante útil para visualizar el progreso de una determinada polarización del vector eléctrico, y además de que puede parecer un método gráfico, está íntimamente relacionado con los vectores de Jones. La luz polarizada por si misma, sirve como una herramienta, o prueba, para evaluar las propiedades de la materia. Tiene la ventaja de que es convertible, esto es que puede ser manipulada a voluntad, sin pérdida significativa de energía y sin incrementar el flujo de entropía. La elipse de polarización está libre de ambigüedades debido a que vista desde el frente o desde atrás se ve la misma rotación del camino descrito. El ángulo  $\alpha$ , que es el comprendido entre el semieje mayor de la elipse y el eje  $x$  del plano contra el cuál se está analizando, se denomina "acimut" del patrón de polarización. Por su orientación, éste comprende un rango de  $-90^\circ \leq \Psi \leq 90^\circ$ . Otro símbolo  $\beta$  se usa para representar al término  $Tan^{-1}(b/a)$ , que también varía de  $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ , y a la cual se le conoce como excentricidad <sup>[5]</sup>.



**Figura 8: Elipse de polarización.**

## Capítulo 4: Interacción Luz-Materia

Como punto importante y para el mejor entendimiento de este tema, de aquí en adelante se referirá el término luz a la parte del espectro electromagnético correspondiente a las longitudes de onda que son plenamente visibles para el ojo humano; es decir, de los aproximadamente 400nm a los 700nm<sup>[11]</sup>. Y bien, para el caso de la luz, los átomos son dipolos microscópicos que esparcen el campo electromagnético, pero como su tamaño es muy pequeño y el espaciamiento entre ellos es muy corto comparado con la longitud de onda, éstos últimos lo hacen de manera simultánea. Se puede ahora decir que los campos eléctricos esparcidos tienen todas las características (como frecuencia, vector de propagación, etc.) de la onda incidente, excepto por la velocidad  $c$  que es menor, comparada con la velocidad de la luz en el vacío  $c_0$ . Esta interacción se describe por el índice de refracción con la fórmula  $n = c_0/c$  y considerando que el medio en el que se propaga la luz es homogéneo. En el otro caso, cuando el medio de propagación es no homogéneo, se presentan otras dificultades, si es que las propiedades de esparcimiento en el medio no son uniformes en distancias del orden de la longitud de onda.

El término elemento polarizador se utiliza para designar cualquier sistema óptico que, independientemente de su conformación, es capaz de modificar el estado de polarización de la luz<sup>[15]</sup>. La diatenuación es una medida de la dependencia de la transmitancia de los elementos de polarización en el estado de polarización incidente<sup>[63]</sup>. Existen diatenuadores lineales y circulares; los primeros caracterizados por la absorción relativa de dos componentes lineales del vector eléctrico ortogonales, mientras que los circulares son caracterizados por la absorción relativa de dos componentes ortogonales circulares del vector eléctrico<sup>[46]</sup>.

Para producir luz polarizada, existen herramientas para cuantificar y predecir este comportamiento de manera analítica como las ecuaciones de Fresnel, el ángulo de Brewster o la ley de Malus, y fenómenos que son capaces de polarizar dada la naturaleza tanto de la luz como de los materiales sobre los que ésta interactúa.

## 4.1 Polarización por Transmisión

La polarización por transmisión refiere a los fenómenos y elementos polarizadores cuyo funcionamiento se basa en hacer incidir un haz de luz, y conforme éste se va propagando a través del medio o elemento, va adquiriendo propiedades relativas a la polarización, y a la salida de éste el grado de polarización es igual o mayor que el que incidió (medio no depolarizante). Los métodos más conocidos para este tipo de polarización son por dichroísmo y por birrefringencia, cada uno de ellos con sus condiciones específicas en el medio donde se propaga la luz <sup>[65]</sup>.

### 4.1.1 Polarización por doble refracción: Birrefringencia

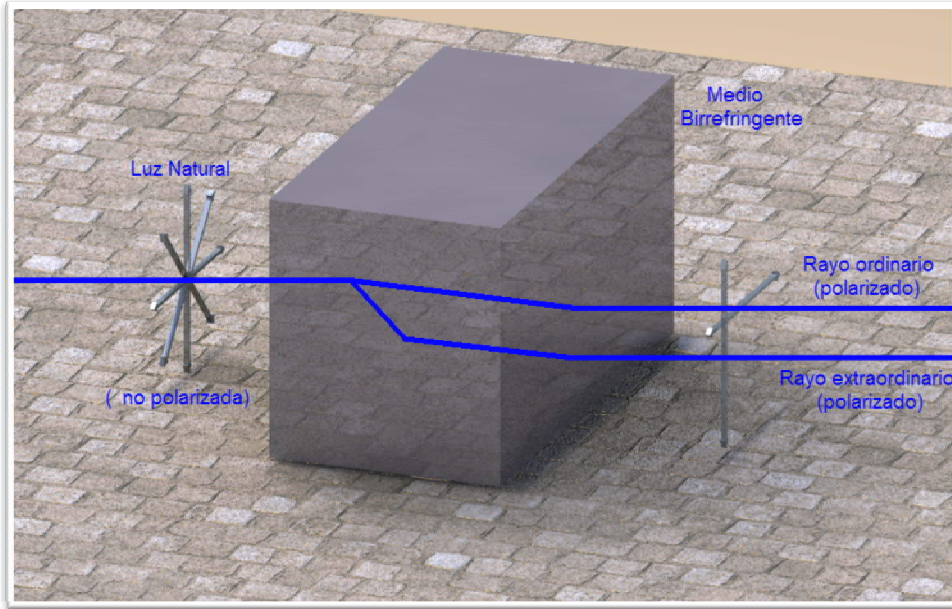
Este fenómeno describe la diferencia de índices de refracción en los ejes bien  $x$  y  $y$  de un medio. Está asociado con la retardancia, que es una medida de la dependencia de los elementos de polarización a la longitud de camino óptico del estado de polarización incidente. Esto viene de:

$$\nabla^2 E_{x,y}(r,t) = \frac{1}{v_{x,y}^2} \frac{\partial^2 E_{x,y}(r,t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

donde  $E$  es el campo eléctrico,  $v$  es la velocidad de la luz en el elemento (medio de propagación),  $\partial^2/\partial t^2$  es la derivada parcial segunda con respecto del tiempo y  $r$  es la parte espacial  $r(x,y)$ .  
Asumiendo como resultado a esta ecuación una onda plana y sustituyendo la relación de velocidades con el índice de refracción  $n$  :

$$\beta_{x,y} = \frac{n_{x,y}\omega}{c} \quad (4.2)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación de cada componente. Para un medio anisotrópico, a las componentes horizontal  $x$  y vertical  $y$  se les llaman eje rápido y eje lento respectivamente. Los retardadores se fabrican con el eje óptico perpendicular al plano de incidencia, para no producir doble imagen bajo incidencia normal.



**Figura 9: Polarización por doble refracción.**

En estas condiciones, ambas componentes (ordinaria, que vibra perpendicularmente al eje óptico, y extraordinaria, que vibra según el eje óptico) obedecen la ley de la refracción al propagarse por el interior de la lámina, por lo que ésta sólo introduce desfase entre ellas y no las separa. Ya que en el espacio libre la constante de propagación es  $\beta = 2\pi/\lambda$ , la birrefringencia B de un medio está dada <sup>[3]</sup> por:

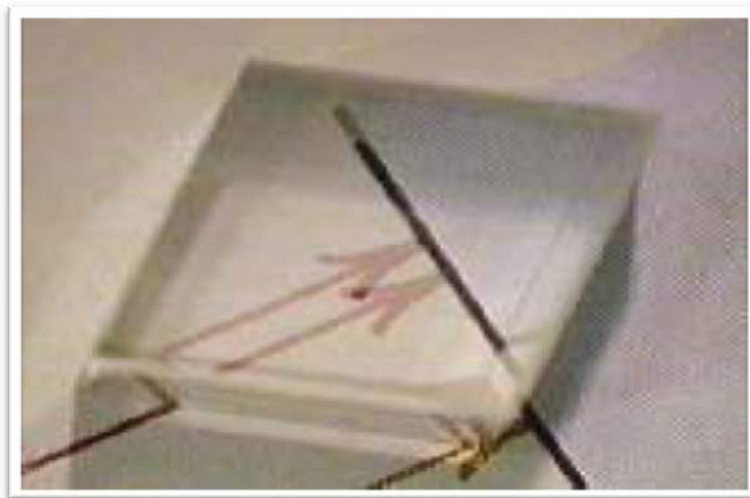
$$B = \frac{\omega}{c}(n_f - n_s) \quad (4.3)$$

donde  $n_f$  es el índice de refracción del eje rápido,  $n_s$  es el índice de refracción del eje lento,  $\omega$  es la frecuencia del frente de onda incidente y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

Las láminas retardadoras están formadas por materiales birrefringentes (generalmente medios cristalinos anisótropos) que se tallan de forma que al incidir normalmente un haz de luz a su paso por el medio las componentes que vibran según las líneas neutras de la lámina emergen con un cierto desfase entre ellas <sup>[4,51]</sup>, que se calcula como:

$$\text{Desfase} = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d \quad (4.4)$$

donde  $\Delta$  es la diferencia de camino óptico en el interior de la lámina entre la componente que presenta índice de refracción  $n_e$  y la componente que presenta índice  $n_o$ . El desfase depende de la longitud de onda de la luz incidente. Los retardadores más habituales son las láminas de  $\lambda/4$ , que introducen un desfase de  $\pi/2$  para una determinada longitud de onda. En los medios anisótropos, en determinadas condiciones de incidencia de la luz (por ejemplo si el eje óptico está en el plano de incidencia y se incide formando un cierto ángulo con el mismo) se produce separación de las direcciones de vibración paralela y perpendicular al plano de incidencia en el interior del medio, lo que ocasiona el fenómeno de la doble imagen o birrefringencia que se observa en la figura 10 para un cristal de calcita.

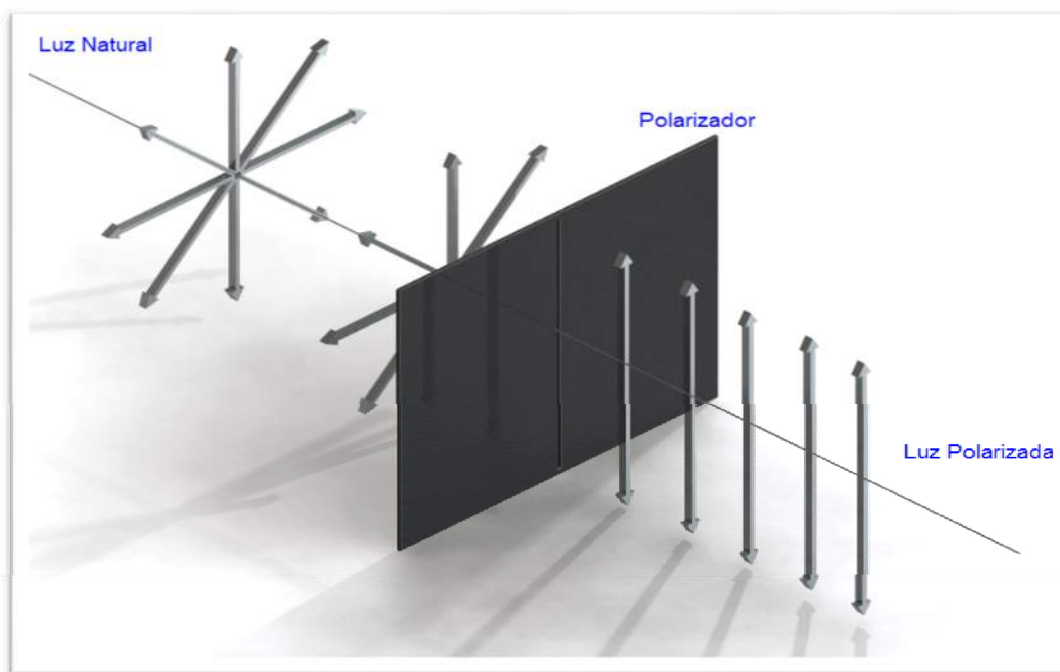


**Figura 10: Cristal de calcita en el que se pueden apreciar la imagen proveniente del eje rápido y del eje lento debido a la doble refracción.**

Este distinto índice de refracción según la dirección dentro del material anisótropo, en sistemas cristalinos reales (como en cuarzo, la calcita, zafiro, mica, etc.), el grado de no ortogonalidad es pequeño, esto debido a que el dicroísmo es generalmente no mayor a  $10^{-2}$  de los valores típicos de la birrefringencia <sup>[46]</sup>. Más aún, en estos sistemas de coexistencia imprevisible de parámetros lineales y circulares aumenta la probabilidad de un comportamiento elíptico en lugar de eigenestados de polarización lineales no ortogonales con todo y que este efecto es muy pequeño. Otro tipo de sistemas en los que los eigenestados de polarización pueden no ser ortogonales es en los sistemas de almacenamiento de datos magneto-ópticos. Aquí la presencia de birrefringencias indeseadas en el sustrato del disco determina la degradación del desempeño del sistema de lectura <sup>[46]</sup>. Ejemplos de elementos birrefringentes: calcita,  $\text{CaCO}_3$ , Niobato de Litio,  $\text{LiNbO}_3$ , y en general cualquier elemento que maneje efectos como el Pockels y el Kerr actuará sobre la polarización de la misma manera <sup>[64]</sup>.

### 4.1.2 Polarización por absorción selectiva: Dicroísmo

Este comportamiento de la materia tiene su base en que ciertos materiales interactúan de manera diferente con la luz que le incide dependiendo de cómo vibra y se propaga por el medio. El ejemplo más común sería el de un filtro polaroid, el cuál absorbe una componente del vector eléctrico, mientras deja que la otra componente se propague a través de él. La regla general es que las vibraciones del campo eléctrico que están en dirección paralela al alineamiento de las moléculas son absorbidas. Esto es a lo que se le llama “eje de polarización” o “eje de transmisión” de un elemento polarizador.



**Figura 11: Representación del comportamiento de un medio dicroico.**

De manera similar a la Birrefringencia, la cuantificación del dicroísmo viene dada por la ecuación:

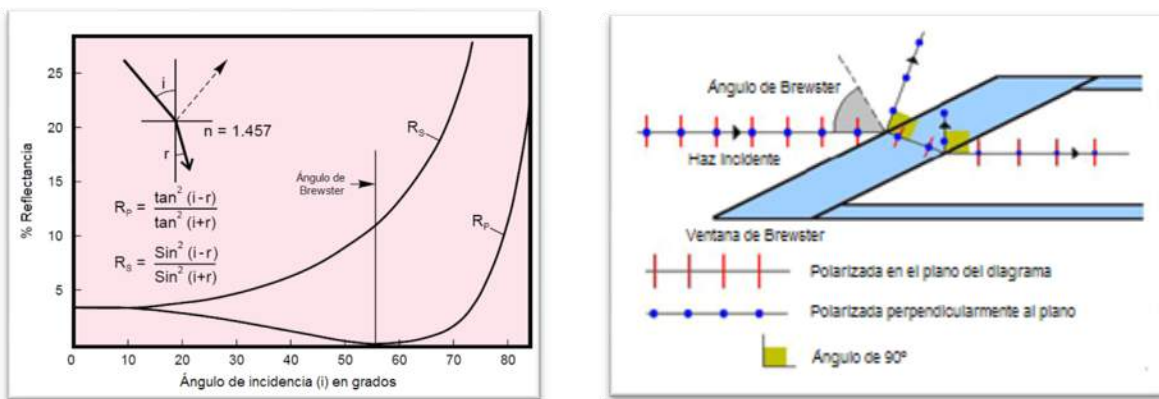
$$D = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} (e^{\alpha_1 z} - e^{\alpha_2 z}) \quad (4.5)$$

## 4.2 Polarización por Reflexión

Si un haz no polarizado incide sobre una superficie óptica fuera de la normal, los haces reflejado y transmitido adquieren cierto grado de polarización (la reflectancia es distinta para polarizaciones *S* y *P*) que se caracteriza por la dirección de polarización con respecto al plano de incidencia:

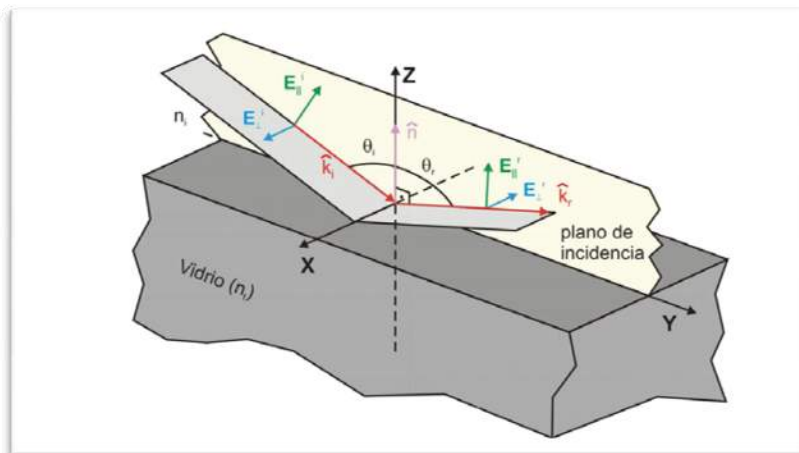
*Polarización S*: Dirección de polarización perpendicular al plano de incidencia.

*Polarización P*: Dirección de la polarización paralela al plano de incidencia.



**Figura 12: Ecuaciones de Fresnel y ángulo de Brewster.**

En las figuras anteriores se pueden observar en primera instancia a la reflectancia para las polarizaciones *S* y *P*, y en la otra figura el grado de polarización bajo incidencia en una ventana de Brewster, y aplicando la ley de Snell podemos expresarlo en función de los índices de los medios que separa la interfase, como:



**Figura 13: Polarización por reflexión.**



$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (4.6)$$

Para el aire ( $n \sim 1$ ) y vidrio ( $n \sim 2$ ), el ángulo de Brewster es  $\theta_B \sim 56^\circ$ .

Si incidimos con luz natural y al ángulo de Brewster, se obtiene que la luz reflejada es linealmente polarizada, dado que se anulan todas las componentes paralelas al plano de incidencia. Para una luz que incide sobre la interfase o superficie de separación de dos medios dieléctricos homogéneos e isotrópicos, generalmente se considera por separado el comportamiento de la componente del vector eléctrico paralela y perpendicular al *plano de incidencia* (plano que contiene a la normal, el rayo incidente y el refractado o reflejado). En la figura 13 se observa una onda incidente y la descomposición correspondiente en componentes paralelas  $E_{\parallel}$  (en verde) y perpendiculares  $E_{\perp}$  (en azul) al plano de incidencia. Tras reflejarse en una interfase de este tipo, la luz puede sufrir cambios de fase y modificar su amplitud de acuerdo a los coeficientes que obtuvo Fresnel para ambas componentes por separado (fórmulas de Fresnel):

$$r_{\parallel} = \frac{A_{\parallel}^r}{A_{0\parallel}} = \frac{\tan(\theta' - \theta)}{\tan(\theta' + \theta)}$$

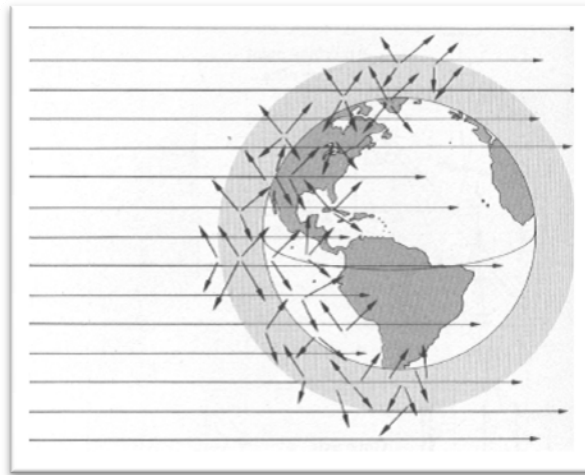
$$r_{\perp} = \frac{A_{\perp}^r}{A_{0\perp}} = \frac{\text{sen}(\theta' - \theta)}{\text{sen}(\theta' + \theta)} \quad (4.7)$$

donde  $A_{\parallel}^r$  es la amplitud de la componente paralela al plano de incidencia de la luz reflejada,  $A_{0\parallel}$  es la componente paralela al plano de incidencia de la luz incidente, y análogamente para las componentes perpendiculares al plano de incidencia.

### 4.3 Polarización por Esparcimiento

La polarización también ocurre cuando la luz es esparcida mientras viaja en un medio <sup>[50]</sup>. Cuando la luz incide en los átomos de un material, los pone a vibrar. La vibración de estos electrones en ese estado puede producir su propia onda electromagnética que es irradiada en todas direcciones. Esta nueva onda es amplificada conforme se va propagando en la red de átomos excitados oscilando en la misma frecuencia. Este fenómeno de absorber energía y emitirla causa el esparcimiento de la luz en un

medio. Además, este esparcimiento es parcialmente polarizado <sup>[39]</sup>, ya que todos los átomos que fueron excitados y su correspondiente emisión conservan las características de la energía inicial que comenzó las vibraciones atómicas. La luz solar se dispersa en la atmósfera por las partículas y moléculas cargadas. La intensidad de la dispersión aumenta con la frecuencia de la luz (decrece con la longitud de onda, por tal motivo el cielo se ve azul). Sin dispersión, no habría color en la atmósfera (como en el espacio).



**Figura 14: Dispersión de la luz en la atmósfera.**

#### 4.4 Matrices de Jones

Cuando la luz se propaga a través de un medio lineal, sus propiedades de polarización se describen usualmente con el formalismo del vector de Stokes o por la matriz de coherencia (también conocida como la matriz de polarización) <sup>[8]</sup>. El efecto de muchos dispositivos ópticos en la luz es estudiado por estos dos formalismos, con lo que puede ser representado por lo que se le llama su matriz de transformación. Esta transformación es conocida como “matriz de Mueller” cuando actúa sobre el vector de 4 dimensiones de Stokes <sup>[44]</sup>. Partiendo del hecho de que podemos representar el estado de polarización de la luz como un vector (vector de Jones), se utilizarán matrices para cambiar el estado de polarización de entrada  $E_0$ , a un segundo estado de polarización  $E_1$ . Considerando una matriz A que representa el medio de propagación (medio óptico), la luz con polarización  $E_1$  que pasa a través del elemento emergerá con una polarización:

$$E_1 = AE_0 \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Por lo que <sup>[42]</sup>:

$$E_1 = \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}E_{0x} + a_{12}E_{0y} \\ a_{21}E_{0x} + a_{22}E_{0y} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

El estado de polarización se puede describir con la matriz de polarización (matriz de coherencia), es decir, la matriz de covarianza 2x2 de las dos variables.

**Tabla 3: Matrices de Jones para algunas de las componentes más utilizadas**

Polarizador Lineal Horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Polarizador Lineal Vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador Lineal a 45°	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Polarizador Lineal a -45°	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Placa retardadora de ¼ de onda con su eje rápido en vertical	$e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$	Placa retardadora de ¼ de onda con su eje rápido en horizontal	$e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$
Polarizador homogéneo circular a la derecha	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$	Polarizador homogéneo circular izquierdo	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$

El mayor beneficio de esta notación es que fue pensada para expresar el estado de polarización con matrices, y por propiedad de las mismas para obtener el estado de polarización final de un sistema por medio de la conveniente multiplicación de matrices. El vector y las matrices de Jones se complementan mutuamente. Sin embargo, los vectores y las matrices de Jones solo son aplicables a luz total o parcialmente polarizada, cumpliendo con el requisito de la coherencia. En contraste, el vector de Stokes y las matrices de Mueller se emplean para el tratamiento de luz tanto coherente como incoherente. En este último tratamiento los cálculos son más versátiles ya que proporcionan mayor información sobre el grado de polarización y las características polarizantes o depolarizantes de un medio (un medio exhibe depolarización cuando al menos para un estado incidente,

$DoP_{entrada} > DoP_{salida}$  <sup>[62]</sup>, y para medios con este tipo de comportamiento, recientemente Kostinski presentó la descomposición de matrices físicamente realizables de Mueller en una componente no depolarizante y una entrada independiente que se le adiciona de componentes depolarizantes), además de que dichos estados de polarización, representados en el vector de Stokes, son irradiancias medibles, promediadas en el tiempo (característica de la luz incoherente), por lo cual para fuentes coherentes no es muy útil, ya que sin la información de la fase implícita en esta notación, la manipulación de conceptos como la suma de las irradiancias no es posible (debido a que no es una fuente coherente).

## 4.5 Matrices de Mueller

Como ya ha sido demostrado en la literatura <sup>[7]</sup> algunos dispositivos ópticos se pueden describir con matrices de Mueller pero no con matrices de Jones (como lo demostraron Simon y Barakat). Encontraron 9 relaciones que debe cumplir una matriz de Mueller para que pueda ser transformada a una matriz de Jones, y más recientemente <sup>[16]</sup> encontraron una simple condición en la traza de la matriz de Mueller. Todo esto en medios determinísticos. En este sentido la transformación con las matrices de Mueller parece ser de aplicación más general que la de matrices de Jones. La condición  $Tr(MM^T) = 4M_{00}^2$  es la que muchos autores consideran necesaria <sup>[13,24]</sup> y suficiente para que una matriz de Mueller represente a un sistema o elemento óptico no depolarizante <sup>[44]</sup>, aunque también existen consideraciones con otros formalismos relacionados por ejemplo, con el grado de polarización <sup>[56]</sup>. La matriz de Mueller  $M$  para un elemento óptico es la matriz que es capaz de representar a un medio y que transforma un vector de Stokes incidente  $S_{Incidente}$  en un vector de salida  $S_{Salida}$  modificado, ya sea por transmisión, reflectancia o esparcimiento <sup>[34,39]</sup>.

$$MS_{Incidente} = S_{Salida} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Esta matriz  $M$  es una matriz de 4x4 elementos, todos de ellos valores reales y por ende, medibles <sup>[55]</sup>. Esta es una de las cualidades que lo hacen ideal para caracterizar elementos

manipuladores de la polarización; además, es capaz de representar diatenuación, retardancia, depolarización <sup>[45]</sup>, cualquiera de ellas en su correspondiente estado del vector de Stokes, es decir, lineal, circular o elíptico. Entre algunas diferencias que existen entre el formalismo de las matrices de Jones se pueden mencionar que el cálculo de Mueller es capaz de manejar problemas con efectos de depolarización <sup>[30]</sup>; además está basado en fundamentos fenomenológicos, de manera que no depende de validez en la teoría electromagnética. Otro punto importante es que el cálculo de Jones permite preservar la información de la fase absoluta, el cálculo de Mueller no; de hecho, estrictamente hablando, no lo requiere. También, el cálculo de Jones es apropiado para manejar problemas donde exista una combinación de dos haces que son coherentes, el cálculo de Mueller en este aspecto es pobre, excepto tal vez con una gran complejidad. Otra diferencia es que el cálculo de Mueller emplea un vector (vector de Stokes) el cual indica en primer término la intensidad directamente; el vector empleado en el cálculo de Jones no tiene este parámetro, y para lograr obtenerlo es necesario sumar el cuadrado de sus elementos. Las matrices de Jones emplean elementos asociados con la amplitud de la transmitancia, mientras que los elementos de la matriz de Mueller están asociados con la intensidad de la transmitancia. Además, el cálculo de Jones es mejor para problemas en los que se tiene una gran cantidad de dispositivos similares puestos en serie de manera regular, y permite conocer el resultado directamente en términos de “n” cantidad, en contraste al cálculo de Mueller que no es conveniente para este propósito. La matriz de Jones de un tren de polarizadores y retardadores bien sean absorbentes o no absorbentes, no contiene información redundante: la matriz contiene 4 elementos con 8 constantes independientes entre sí. La matriz de Mueller para ese mismo tren contiene más redundancia: dieciséis constantes, con solo 7 de ellas independientes. Y por último, la matriz de Jones de un elemento birrefringente y dicróico puede ser diferenciada fácilmente para mostrar información de sus propiedades.

**Tabla 4: Representación en Matrices de Jones y de Mueller para elementos polarizadores comunes.**

Elemento óptico	Matriz de Jones	Matriz de Mueller
Polarizador Lineal Horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Polarizador Lineal Vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador Lineal a 45°	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador Lineal a -45°	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Placa retardadora de ¼ de onda con su eje rápido en vertical	$e^{j\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Placa retardadora de ¼ de onda con su eje rápido en horizontal	$e^{j\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador homogéneo circular a la derecha	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador homogéneo circular izquierdo	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 4.6 Propiedades y relación entre formalismos

Para describir la propagación de un haz quasi-monocromático totalmente polarizado a través de un medio no depolarizante se utiliza el método de matrices de Jones. Sin embargo, es conveniente aplicar otro método que es robusto preferentemente para predecir el comportamiento de luz incidente parcialmente polarizada, que es con el uso de el vector de Stokes y las matrices de Mueller. Para tal efecto, existe una relación reportada para unificar ambos formalismos matriciales que involucra al producto de Kronecker. La matriz de Mueller “pura” <sup>[42]</sup> correspondiente (también llamada matriz de Mueller-Jones) relativo a un sistema es <sup>[24,52]</sup>:

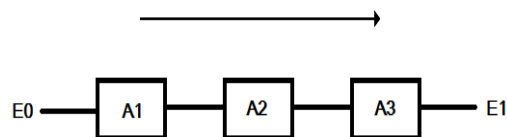
$$M = A(J \otimes J^*)A^{-1} \quad (4.10)$$

Donde <sup>[30]</sup>:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)A^T$$

Y a su vez,  $\otimes$  denota al producto de Kronecker,  $J^*$  es la matriz compuesta conjugada de  $J$  (matriz de Jones) y  $A^T$  es la transpuesta de la matriz  $A$  <sup>[59]</sup>.

Al manejar tanto la notación de Stokes, Jones y Mueller como vectores y matrices, se pueden aplicar formalismos del álgebra lineal para el tratamiento de fenómenos en los que intervienen por ejemplo, más de un elemento manipulador de la polarización:



**Esquema 1: Diagrama a bloques de un sistema óptico.**

El efecto de agregar múltiples componentes u objetos se puede describir por el producto de la matriz de Mueller o Jones de cada uno de ellos. Si la luz pasa a través de elementos ópticos correspondientes a  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , la luz emerge de ellos con una polarización:

$$E_1 = A_3 A_2 A_1 E_0 \quad (4.11)$$

O bien para el caso general:  $E_n = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 E_0$ . Tal como la regla del álgebra lineal, en la multiplicación tanto de vectores como de matrices el orden en el que se hacen los productos si importa, lo anterior por la propiedad no conmutativa en el producto de las misma. Este comportamiento es el utilizado para el caso en el que cada elemento actúa como una anisotropía aislada, y con arreglo en serie.



## Capítulo 5: Solución de los modelos de propagación

Conforme la luz se va propagando en los medios anisotrópicos su estado de polarización se va modificando, esto se observa en la tabla 4 donde las matrices de Jones correspondientes a transformaciones “non-stretching” son unitarias. Esto es  $A^\dagger A = I$ . Esto toma sentido considerando que las transformaciones unitarias corresponden a un rotacional preservando la longitud. Para estos operadores unitarios se cumple que  $A = PDP^{-1}$  para una matriz diagonal D y su matriz inversa P, de manera que se tiene que  $A^n = PDP^{-1}$ . Además, las placas de  $\frac{1}{4}$  de onda con eje rápido (como la birrefringencia) no tienen una matriz unitaria que las represente, debido a que existe un estrechamiento asimétrico de la polarización en una dirección. Para las matrices de Mueller, hasta este momento no se habían podido identificar significados físicos para los eigenvalores y los eigenvectores, esto debido a que operan en vectores cuyas componentes son irradiancias, que es una cantidad no direccional (por ejemplo, no vectores reales, desde que no poseen una propiedades de transformación bajo coordenadas de rotación). Sin embargo, en trabajos recientes <sup>[48,49]</sup> se ha podido demostrar este significado. Por ello, nuevos estudios se han llevado a cabo para entender la evolución del estado de polarización de la luz a través de diferentes medios.

### 5.1 Ecuación diferencial de Stokes

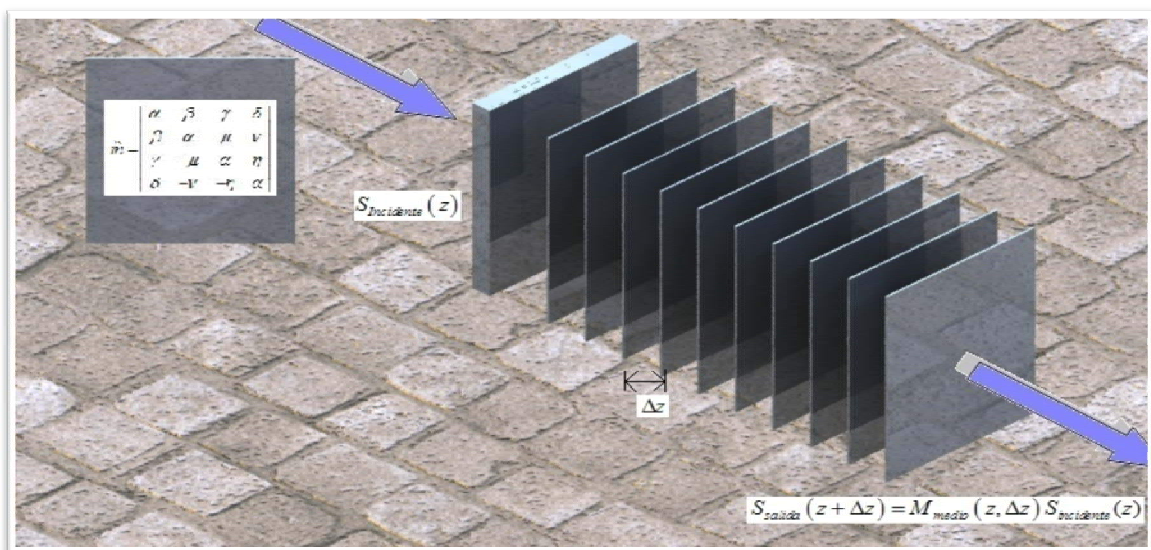


Figura 15: Modelo para la propagación de la luz en un medio.

Por lo que para resolver este sistema se tiene que plantear la ecuación diferencial <sup>[23]</sup>:

$$\begin{aligned}
 S(z + \Delta z) &= M_{z, \Delta z} S(z) \\
 S(z + \Delta z) - S(z) &= (M_{z, \Delta z} - I) S(z) \\
 \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} &= \frac{(M_{z, \Delta z} - I)}{\Delta z} S(z) \\
 \frac{dS(z)}{dz} &= m S(z)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La solución numérica ya es ampliamente conocida:

$$S(z) = e^{mz} S(0)$$

donde  $m$  es la matriz diferencial de Mueller que contiene las propiedades ópticas del medio,  $z$  es la distancia recorrida en el mismo,  $S(z)$  es el vector de Stokes de la luz dependiente de la distancia y  $S(0)$  es el vector de Stokes incidente. Esta matriz de Mueller contiene 7 valores independientes para medios no depolarizantes y 16 valores independientes para medios depolarizantes <sup>[48]</sup>. Algunos modelos se han propuestos para describir la propagación de la luz polarizada <sup>[43]</sup>, sobre todo en medios birrefringentes <sup>[25]</sup>. El utilizado en este trabajo de tesis, cabe mencionar, es la aproximación más general que puede predecir la evolución del estado de polarización para haces total o parcialmente polarizados y medios polarizantes. Adicionalmente, este método <sup>[51]</sup> es robusto y con todas las consideraciones anteriores en cuanto a notación de polarización.

La matriz que describe las birrefringencias <sup>[51]</sup> exhibe la simetría tratada por el grupo de Lorentz <sup>[32]</sup>, la cuál puede ser manipulada expandiendo la matriz para obtener los siguientes generadores del grupo de Lorentz <sup>[18]</sup>:

$$\text{Matriz I: } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Para el tratamiento de la información, podemos hacer un cambio en los elementos de la matriz de manera que se considere el fenómeno en particular <sup>[19]</sup>:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Se utilizan varias aproximaciones para describir la propagación de un campo electromagnético y la evolución de la polarización en un medio anisotrópico <sup>[71]</sup>, como puede ser la aproximación quasi-isotrópica en un medio (QIA) y la aproximación del formalismo del vector de Stokes (SVF). De este último método además se ha demostrado que la ecuación de la evolución de las componentes del vector de Stokes pueden ser obtenidas para el caso general de un medio inhomogéneo directamente de las ecuaciones de Maxwell con la aproximación de la mecánica cuántica <sup>[71]</sup>. La ecuación que rige la evolución del vector de Stokes representada con la QIA en forma de matriz, debido a los parámetros determinísticos tienen relevancia para un arbitrario dicroísmo y birrefringencia, la matriz es descrita como:

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \mu & \nu \\ \gamma & -\mu & \alpha & \eta \\ \delta & -\nu & -\eta & \alpha \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde  $\alpha$  es la absorción isotrópica,  $\beta$  es el dicroísmo lineal a lo largo de los ejes  $x-y$ , donde  $x-y-z$  forman un sistema fijo de coordenadas ortogonales en el medio,  $\gamma$  es el dicroísmo lineal a lo largo de los bisectores de las coordenadas  $x-y$ ,  $\delta$  es el dicroísmo lineal,  $\eta$  es la birrefringencia lineal a lo largo de las coordenadas  $x-y$ ,  $\nu$  es la birrefringencia lineal en los bisectores de los ejes  $x-y$  y  $\mu$  es la birrefringencia circular. Esta matriz a su vez puede ser representada como la suma de 3 matrices:

$$\hat{m} = m_\alpha + m_d + m_b \quad (5.5)$$

La primer componente  $m_\alpha$  es la componente que describe la atenuación común para todas las componentes del vector de Stokes.

$$\hat{m}_\alpha = \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

La segunda componente  $m_d$  es el término del dicroísmo:

$$\hat{m}_d = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Que corresponde a la atenuación causante del dicroísmo, que es la atenuación selectiva de las componentes de un frente de onda. Por último, tenemos la matriz:

$$\hat{m}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \nu \\ 0 & -\mu & 0 & \eta \\ 0 & -\nu & -\eta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

que describe la birrefringencia. Debido a esto la fase total de la onda se pierde en este método de Stokes. Así, la solución para la propagación de la ecuación 5.1 del vector de Stokes  $S(z)$  con condiciones iniciales  $S(0)$  en  $z=0$  está dada por:

$$S_{\text{incidente}}(z) \quad \Delta z \quad S_{\text{salida}}(z + \Delta z) = M_{\text{medio}}(z, \Delta z) S_{\text{incidente}}(z) \quad (5.9)$$

$$S(z) = \exp(mz) S(0) = MS(0) \quad (5.10)$$

## 5.2 Método analítico y exacto para resolver S(z)

En este sentido, Brown y Bak desarrollaron otro formalismo basado en las teorías del grupo de Lorentz para obtener una expresión analítica para la matriz de Mueller para los mismos casos reportados por Azzam. Desafortunadamente con estas soluciones ya reportadas, un medio con valores de red de estos fenómenos diferentes de cero tienen que ser modelados como sistemas puramente dicroicos o puramente birrefringentes. Este tipo de aproximaciones son ampliamente utilizadas debido a que no existían soluciones analíticas y explícitas reportadas para el caso de estos dos fenómenos simultáneamente <sup>[49]</sup>. Por mencionar alguno de los métodos utilizados para resolver estas aproximaciones, el método de Runge-Kutta <sup>[23]</sup> es uno de los más utilizados debido a que es un método ya dominado por quienes manejan métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales por integración numérica. Aún así, el resolverla de manera numérica conlleva que la matriz caiga en singularidades y donde se tendría un involucramiento en fase. Volviendo al punto previamente mencionado, para calcular la solución exacta y explícita de la matriz de Mueller M, el primer paso es calcular los eigenvalores <sup>[10]</sup> de la matriz de Mueller diferencial (m). Los conceptos de eigenvectores y de eigenvalores tienen un significado en el contexto de las matrices de Mueller y de Jones, si  $AE = \lambda E$  entonces el elemento óptico correspondiente a la matriz A mantiene el mismo estado de polarización, pero lo modifica por un factor de  $\lambda$ . Estos eigenvalores se obtienen de las raíces de la ecuación característica  $\det |m - \lambda I| = 0$ , donde I es la matriz identidad 4x4. Es bien conocido que los elementos de polarización están caracterizados por los tipos de eigenpolarizaciones que poseen. Elementos de polarización homogéneos son aquellos que poseen eigenpolarizaciones ortogonales, mientras que los inhomogéneos poseen eigenpolarizaciones no ortogonales <sup>[61]</sup>. Además, existe otra clase de elementos de polarización que son llamados "elementos degenerados", que poseen solo una eigenpolarización linealmente independiente <sup>[61]</sup>. Resolviendo su determinante, la ecuación característica que se obtiene es:

$$(\alpha - \lambda)^4 - (\alpha - \gamma)^2 \left[ (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2) \right] + (\beta\eta - \gamma\nu + \delta\mu)^2 = 0 \quad (5.11)$$

Resolviendo las raíces de esta ecuación:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha - \tau \\
\lambda_2 &= \alpha + \tau \\
\lambda_3 &= \alpha - i\Omega \\
\lambda_4 &= \alpha + i\Omega
\end{aligned}$$

donde  $\tau \geq 0, \Omega \geq 0$  y están definidas como:

$$\tau = \left\{ \left[ \left( \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2)}{2} \right)^2 + (\beta\eta - \gamma\nu + \delta\mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2)}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$\Omega = \left\{ \left[ \left( \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2)}{2} \right)^2 + (\beta\eta - \gamma\nu + \delta\mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (\eta^2 + \nu^2 + \mu^2)}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

Estas magnitudes escalares son las que corresponden a las propiedades físicas del medio y son denominadas en la literatura <sup>[47-49,59]</sup> como diámetro efectivo y birrefringencia efectiva respectivamente. Después se introducen dos vectores tridimensionales para conveniencia matemática:  $x = (\beta, \gamma, \delta)$  y  $y = (\eta, \nu, \mu)$ , cuya representación coincide con los vectores de diámetro de red y birrefringencia de red reportados previamente en la literatura <sup>[18,58]</sup>. Hay que hacer notar que para cualquier matriz diferencial de Mueller  $m$ , en la ecuación 2 existen sus dos vectores reales  $x$  y  $y$ . El producto de  $\tau$  y  $\Omega$  se manifiesta como el producto punto entre estos dos vectores, esto es:

$$\tau \Omega = |x \cdot y| = |\beta\eta - \gamma\nu + \delta\mu| \quad (5.14)$$

De aquí que el producto punto entre los vectores  $x$  y  $y$  define lo que llamaremos “acoplamiento” entre los vectores de diámetro y birrefringencia. Entonces el acoplamiento entre  $x$  y  $y$  viene dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y^T}{|x||y|} \quad (5.15)$$

donde  $\theta$  corresponde al ángulo de acoplamiento de manera que ahora las ecuaciones se pueden expresar como:

$$\tau^2 = \left[ \left( \frac{|x|^2 - |y|^2}{2} \right)^2 + (x \cdot y^T)^2 \right]^{1/2} + \left( \frac{|x|^2 - |y|^2}{2} \right) \quad (5.16)$$

$$\Omega^2 = \left[ \left( \frac{|x|^2 - |y|^2}{2} \right)^2 + (x \cdot y^T)^2 \right]^{1/2} - \left( \frac{|x|^2 - |y|^2}{2} \right) \quad (5.17)$$

Cuando los eigenvalores dados por la ecuación 5.11 se expresan en estas últimas ecuaciones claramente muestran la dependencia en  $|x \cdot y^T|$  y  $|x|^2 - |y|^2$ . Con la introducción de los vectores  $x$  y  $y$  y de la ecuación del ángulo de acoplamiento, se pueden deducir los 6 comportamientos generales que predicen todos los casos reportados para el comportamiento del vector de Stokes. Ahora bien, para resolver la ecuación con la exponencial se utiliza el método de interpolación de Sylvester<sup>[10]</sup> que es un procedimiento para obtener una forma analítica y explícita la matriz diferencial de Mueller ( $m$ ). El determinante de Sylvester para resolver la matriz de Mueller  $M = e^{mz}$  es de la forma:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & e^{(\lambda_1 z)} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & e^{(\lambda_2 z)} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & e^{(\lambda_3 z)} \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & e^{(\lambda_4 z)} \\ I & m & m^2 & m^3 & e^{(mz)} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.18)$$

Además, introduciendo la matriz de anisotropías definida como  $C = m - \alpha I$ ,  $M$  se convierte en:

$$M = \frac{(C - \Omega i I)(C + \Omega i I)(C - \tau I)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 z} - \frac{(C - \Omega i I)(C + \Omega i I)(C + \tau I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} e^{\lambda_2 z} + \frac{(C - \Omega i I)(C + \tau I)(C - \tau I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} e^{\lambda_3 z} + \frac{(C + \Omega i I)(C + \tau I)(C - \tau I)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{\lambda_4 z} \quad (5.19)$$

Usando el teorema de Cayley-Hamilton utilizado para sistemas <sup>[10]</sup> y la expresión de la matriz de anisotropías  $C$  <sup>[49]</sup>, obtenemos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & 0 & \mu & \nu \\ \gamma & -\mu & 0 & \eta \\ \delta & -\nu & -\eta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{x \cdot y^T} \begin{bmatrix} 0 & \eta & -\nu & \mu \\ \eta & 0 & -\delta & \gamma \\ -\nu & \delta & 0 & -\beta \\ \mu & -\gamma & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$C^3 = (\tau^2 - \Omega^2)C + \tau^2 \Omega^2 C^{-1} \quad (5.22)$$

Sustituyendo estas matrices en la ecuación de M se obtiene:

$$M = \frac{e^{\alpha z}}{\tau^2 + \Omega^2} \left\{ \left[ \Omega^2 \cosh(\tau z) + \tau^2 \cos(\Omega z) \right] I + \left[ \cosh(\tau z) - \cos(\Omega z) \right] C^2 + \left[ \tau \sinh(\tau z) + \Omega \sin(\Omega z) \right] C + (\tau \Omega) \left[ \Omega \sinh(\tau z) - \tau \sin(\Omega z) \right] C^{-1} \right\} \quad (5.23)$$

Esta última ecuación es la solución analítica y explícita a la ecuación diferencial de Mueller de un medio dado <sup>[48,49,59]</sup>. Además, el vector de Stokes puede ser evaluado para cualquier distancia  $z$  cuando se propaga por un medio anisotrópico, incluyendo los previamente reportados cuando alguna de las anisotropías es cero (dicroísmo y/o birrefringencia).

$$M = \frac{e^{\alpha z}}{\tau^2 + \Omega^2} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Los elementos de la matriz de Mueller  $M$  de esta última expresión se definen entonces de la siguiente manera:



$$\begin{aligned}
M_{11} &= \left\{ \left[ \Omega^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \right] \cosh(\tau z) + \left[ \tau^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 \right] \cos(\Omega z) \right\} \\
M_{12} &= \left\{ (\Omega\beta - h\eta\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\beta + h\eta\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) + (-\gamma\mu - \delta\nu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{13} &= \left\{ (\Omega\gamma + hv\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\gamma - hv\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\mu - \delta\eta) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{14} &= \left\{ (\Omega\delta - h\mu\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\delta + h\mu\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\nu + \gamma\eta) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{21} &= \left\{ (\Omega\beta - h\eta\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\beta + h\eta\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) + (\gamma\mu + \delta\nu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{22} &= \left\{ \left[ \Omega^2 + \beta^2 - \mu^2 - \nu^2 \right] \cosh(\tau z) + \left[ \tau^2 - \beta^2 + \mu^2 + \nu^2 \right] \cos(\Omega z) \right\} \\
M_{23} &= \left\{ (h\tau\delta + \mu\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) - (h\Omega\delta - \mu\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\gamma - \nu\eta) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{24} &= \left\{ -(h\tau\gamma - \nu\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) + (h\Omega\gamma + \nu\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\delta + \eta\mu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{31} &= \left\{ (\Omega\gamma + hv\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\gamma - hv\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) + (\delta\eta - \beta\mu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{32} &= \left\{ -(h\tau\delta + \mu\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) + (h\Omega\delta - \mu\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\gamma - \nu\eta) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{33} &= \left\{ \left[ \Omega^2 + \gamma^2 - \mu^2 - \eta^2 \right] \cosh(\tau z) + \left[ \tau^2 - \gamma^2 + \mu^2 + \eta^2 \right] \cos(\Omega z) \right\} \\
M_{34} &= \left\{ (h\tau\beta + \eta\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) - (h\Omega\beta - \eta\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\gamma\delta - \nu\mu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{41} &= \left\{ (\Omega\delta - h\mu\tau) \operatorname{sen}(\Omega z) + (\tau\delta + h\mu\Omega) \operatorname{senh}(\tau z) - (\beta\nu + \gamma\eta) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{42} &= \left\{ (h\tau\gamma - \nu\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) - (h\Omega\gamma + \nu\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\beta\delta + \eta\mu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{43} &= \left\{ -(h\tau\beta + \eta\Omega) \operatorname{sen}(\Omega z) + (h\Omega\beta - \eta\tau) \operatorname{senh}(\tau z) + (\gamma\delta - \nu\mu) [\cosh(\tau z) - \cos(\Omega z)] \right\} \\
M_{44} &= \left\{ \left[ \Omega^2 + \delta^2 - \nu^2 - \eta^2 \right] \cosh(\tau z) + \left[ \tau^2 - \delta^2 + \nu^2 + \eta^2 \right] \cos(\Omega z) \right\}
\end{aligned}$$

donde  $h$  es la función signo del producto punto del vector de dichroísmo y del vector de birrefringencias, es decir:

$$h = \operatorname{signo}(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} > 0 \\ 0 & \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0 \\ -1 & \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Con estas ecuaciones, el programa matemático que se desarrolló es capaz de predecir el estado de polarización de la luz a través de un medio anisotrópico, el estado transitorio de los elementos del vector de Stokes, y el valor final cuando termina de recorrer el medio del estado de polarización. Los 6 casos que se han venido manejando los reproduce fielmente, a saber<sup>[49]</sup>:

**Tabla 5: Casos generales en el método analítico**

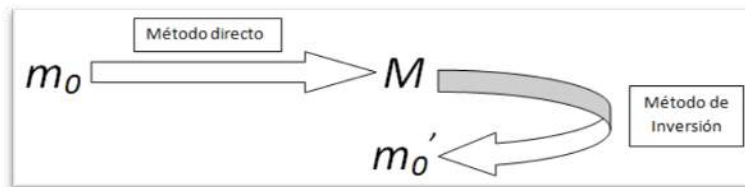
<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$x = y$	$x < y$	$x > y$
$\tau = 0$	$\tau = 0$	$\tau = \sqrt{x^2 - y^2}$
$\Omega = 0$	$\Omega = \sqrt{y^2 - x^2}$	$\Omega = 0$
Comportamiento polinomial	Comportamiento senoidal	Comportamiento hiperbólico
<b>Acoplamiento 0: <math>x \cdot y^T = 0</math></b>		
<b>Caso 4</b>	<b>Caso 5</b>	<b>Caso 6</b>
$x = y$	$x < y$	$x > y$
$\tau = \Omega$	$\tau < \Omega$	$\tau > \Omega$
$\tau = \Omega = x \cdot y^T$		
Comportamiento hiperbólico y senoidal	Comportamiento hiperbólico y senoidal	Comportamiento hiperbólico
<b>Acoplamiento no 0: <math>x \cdot y^T \neq 0</math></b>		

Y cuyo parámetro normalizado de acoplamiento está dado por la relación entre los vectores de diroísmo y birrefringencia y los valores de diroísmo y birrefringencia efectivos:

$$\Phi = \frac{y^2 - \Omega^2}{x^2 + \Omega^2} \quad (5.26)$$

El grado de polarización será entonces igual a:  $DoP = \sqrt{1 - \left[ \frac{1 - \Phi}{\cosh(\tau z) - \Phi \cos(\Omega z)} \right]^2}$  (5.27)

Estas últimas ecuaciones son esenciales para el método exacto que se pretende utilizar y que están reportadas <sup>[49]</sup>. El uso de esta notación junto con los casos mencionados, hacen posible que se pueda llegar a una solución analítica al problema inverso; es decir, de pasar de la M a la matriz diferencial m sin caer en la ambigüedad de  $2\pi$  resultante de un comportamiento puramente birrefringente (caso 2).



**Figura 16: Problema inverso de las matrices de Mueller**

### 5.3 Software desarrollado para el modelo matemático

Ya se ha demostrado el método de resolver la ecuación de onda para predecir el caso de un haz de luz natural propagándose a través de un medio anisotrópico lineal y no depolarizante, de modo que se procedió a realizar un software que englobara la teoría de los modelos matemáticos de esta investigación y que fuese capaz de predecir con certeza absoluta el estado de polarización final, así como otras tantas variables de interés. Debido a la gran cantidad de datos, variables e interpretaciones necesarias para analizar cada uno de estos casos y en general para cualquier caso, el software que se desarrolló permite organizar la información de la matriz diferencial de Mueller para simular la propagación de la luz en el medio anisotrópico y que finalmente calculara el estado de polarización (vector de Stokes). Fue desarrollado en el lenguaje técnico-computacional MATLAB (versión 7.4.0.287) ya que su enfoque en vectores y matrices lo hace ideal para trabajar de manera eficiente con el método Mueller-Stokes, además de que tiene la capacidad de ser compilado para sistemas operativos basados en Windows o en Unix.

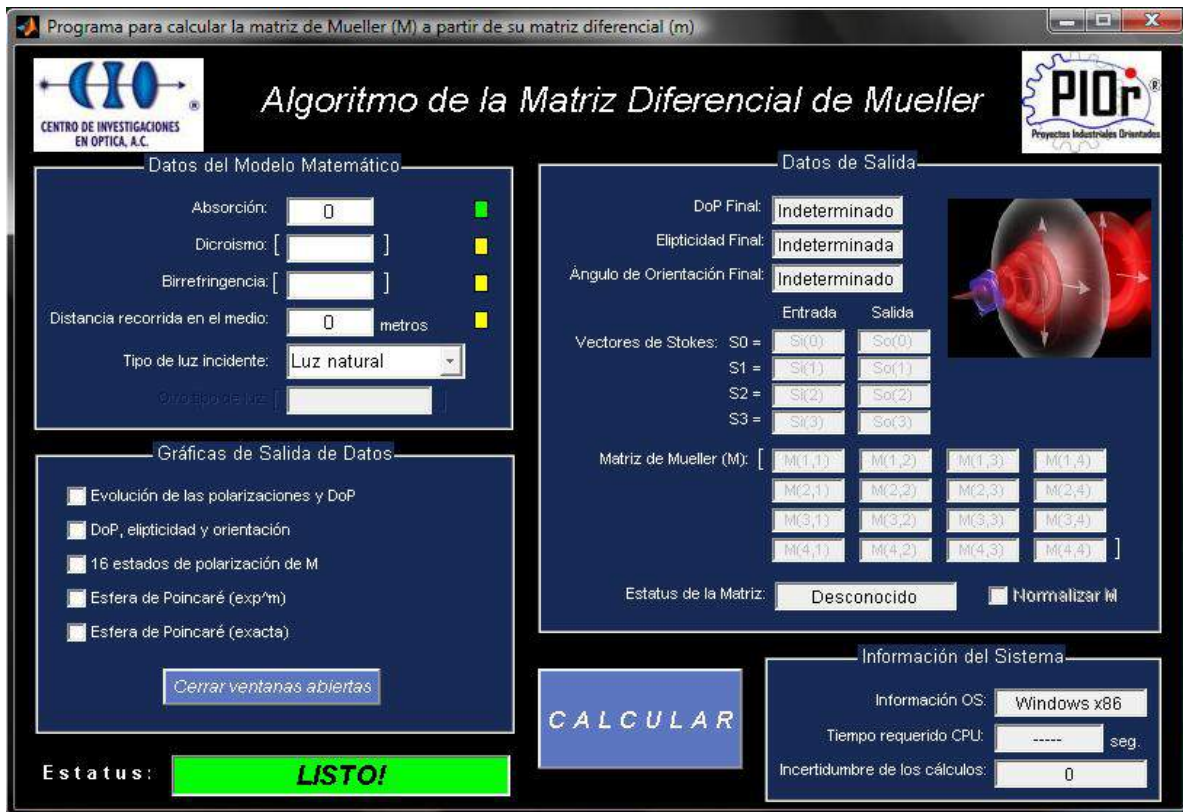


Figura 17: Software desarrollado para la manipulación de los modelos matemáticos de luz polarizada en propagación.

### 5.3.1 Descripción:

El software consta de 5 secciones las cuales muestran información tanto de entrada y salida de datos como del equipo en el cuál se están realizando las simulaciones y/o predicciones, mismas que se describen a continuación.

- I. **Datos del modelo matemático:** La primer sección que aparece en la interfaz gráfica, la ubicada en la parte superior izquierda de la figura 17, corresponde a los datos de entrada de los modelos matemáticos. El primer dato que se introduce es un valor escalar, positivo o negativo, correspondiente a la absorción isotrópica del medio en el cual se va a propagar la luz. Cada valor introducido es verificado para asegurar que sea un elemento numérico, cuyo cuadro de indicación de estado de validez del dato cambia a color verde. Inicialmente, este valor es 0 por defecto, lo que ocasiona que aunque no se modifique esta casilla el software interprete como valor válido una simulación con absorción isotrópica nula. El segundo campo hacia abajo es el correspondiente al dicroísmo o absorción selectiva del medio, que en este caso es representado por un vector de 3 dimensiones, cada elemento de él correspondiente a cada una de las anisotropías que se manejaron en la teoría y que llevan la colocación del grupo de Lorentz:  $(\beta, \gamma, \delta)$ ; las magnitudes de cada uno de los elementos de este vector pueden ser introducidas con una separación entre ellas de una coma o bien de un espacio. El siguiente elemento a introducir en la sucesión hacia abajo es el vector de birrefringencias, al igual que el de dicroísmo, este es de 3 elementos,  $(\eta, \nu, \mu)$ , de las birrefringencias horizontal-vertical, a  $\pm 45^\circ$  y circular derecha e izquierda respectivamente (notación del grupo de Lorentz). Al introducir tanto el vector de dicroísmo como el de birrefringencias, el software verifica que el vector de entrada sea válido para manejarse con el algoritmo, esto es que verifica que el vector sea de 3 elementos numéricos, y en caso de que sea un dato válido modifica el indicador en colores de estado del dato (casilla cuadrada al lado derecha del campo) a dato válido, (color verde). En caso de que sea un vector no válido, el indicador de estado del dato se pone en color rojo y aparece en pantalla un cuadro de advertencia con una descripción del error que fue detectado, a saber, si el vector no fue de 3 dimensiones o si contenía elementos no numéricos, con una sugerencia para su corrección. El siguiente dato a introducir es el de la distancia de propagación en el medio; en este caso cualquier valor escalar comprendido de entre  $1 \times 10^{-15}$  y  $1 \times 10^2$  será

aceptado como dato válido, esto debido a que está optimizado para simular materiales comprendidos entre ese rango de espesores para su propagación, cualquier valor superior o inferior será causa de un mensaje de advertencia de que el programa no está diseñado para tales distancias, y al igual si por error se introduce una variable o carácter en este campo, el programa mostrará al usuario el error y su posible solución correspondiente; para su manipulación, internamente la propagación desde su inicio hasta el grosor final es subdividida en 1000 partes linealmente espaciadas, esto con la finalidad de analizar el vector de Stokes y la matriz  $M$  (al graficar) en cada uno de esos puntos además de verificar la convergencia del método de resolución con la exponencial de una matriz y con el método exacto y analítico de la matriz  $m$ . Al igual que con la entrada de los datos anteriores, verifica límites de valor introducido, verifica dirección en la propagación (en el remoto caso que se pretendan introducir distancias de propagación negativas) y que sea un valor numérico, en cuyo caso si aprueba todas esas consideraciones el indicador de estado del dato se vuelve de color amarillo (color para identificar una advertencia en un dato, inicialmente todos se encuentran en amarillo debido a la ausencia de éste) a un color verde (dato de entrada válido). Finalmente el último valor de entrada para que el software pueda predecir el estado de polarización a la salida de la matriz de Mueller  $M$  es precisamente el tipo de luz incidente en cuanto a su polarización se refiere. Existen 7 opciones en el menú desplegable: luz polarizada linealmente horizontal, vertical, a  $+45^\circ$ , a  $-45^\circ$ , circular derecha, circular izquierda y la opción "Otro tipo de luz", la cual habilita un apartado donde el usuario puede introducir el tipo de luz que desee en forma de vector de Stokes. Esta última opción se utiliza principalmente para luz parcialmente polarizada, en todo caso el programa verifica lo establecido en la ecuación 3.17 para verificar que el vector de luz sea válido, además de las consideraciones básicas descritas anteriormente, como que sea un vector numérico, de dimensiones válidas (4 elementos en este caso), etc., para en caso válido cambiar su indicador a verde. Con estos datos ya es posible utilizar el programa para predecir el estado de polarización de la luz en un medio y ver su evolución en cada uno de los 1000 puntos en los que se subdivide la distancia de propagación.

- II. Gráficas de salida de datos:** En este apartado, ubicado en la parte central izquierda de la interfaz de usuario, proporciona herramientas gráficas para el análisis del estado de polarización. Se puede elegir entre 5 opciones para presentar la evolución de la luz en la distancia, la primera es la opción que muestra los cambios que va sufriendo cada tipo de

polarización ( $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  del vector de Stokes), muestra también el grado de polarización en cada punto calculado con el método de exponencial de la matriz (2 líneas) y con el método exacto. La segunda gráfica es para mostrar la evolución del grado de polarización con la elipticidad y el ángulo de orientación de la elipse de polarización. La tercer gráfica es la que muestra la variación en el espacio de cada uno de los 16 elementos de la matriz de Mueller M que representa a toda la propagación en el medio; en cada uno de los 16 elementos se muestra comparativamente la M calculada con el método analítico (azul) y la calculada por el método numérico (verde) para verificar visualmente su exactitud y convergencia en cada punto. La cuarta gráfica de salida es la esfera de Poincaré con el método numérico, en la cual se grafica cada uno de los 1000 puntos en el espacio tridimensional de la esfera, observándose una trayectoria continua resultante de la evolución del estado de polarización a lo largo de su recorrido por el medio. Además se grafican 2 señalizaciones, una para identificar donde inició la trayectoria (círculo rojo) y otra donde termina (diamante rojo), equivalente a el estado final de polarización de la luz. Esta esfera puede ser manipulada a voluntad en las 3 dimensiones con ayuda del mouse o del teclado debido a que el estudio de este recorrido es de vital importancia para el diseño de dispositivos ópticos, a lo que adicionalmente se trazan las proyecciones de la esfera en los 3 planos para ayudar a cuantificar los valores del vector de Stokes. La quinta gráfica corresponde igualmente a la esfera de Poincaré, con la diferencia de que esta vez la evolución de los parámetros de Stokes es exclusivamente con el método analítico y se incluye una animación de estos parámetros para su proyección y mejor entendimiento. Todas estas gráficas se hacen presentes después de que los datos de entrada han sido introducidos correctamente y que se ha presionado el botón "Calcular" en el programa. Adicionalmente y como se pudo observar a lo largo del proceso de depuración del programa, se agregó un botón que se encarga de cerrar todas las ventanas abiertas derivadas de las simulaciones, correspondientes a esta instancia del programa, con lo que se ahorra tiempo y se evitan confusiones al tener muchas ventanas mostrando simulaciones graficadas al mismo tiempo. Finalmente, estas gráficas se pueden exportar para su documentación o posterior manipulación.

- III. **Estado del programa:** Este elemento, ubicado en la parte inferior izquierda de la ventana del programa, muestra con un letrero y con colores el estado exacto en el que se encuentra el programa. Cuando se encuentra listo y en espera de que el usuario alimente datos de entrada, aparece la leyenda "Listo!" en fondo color verde; cuando se están tecleando cualquiera de los

valores de los campos de entrada del modelo, la leyenda “Introduciendo datos” se hace presente en fondo verde. Al momento de que se introducen todos los datos necesarios para el algoritmo de manera correcta, aparece la leyenda “Datos de entrada OK!”, el cual permite que al presionar el botón de calcular para iniciar la simulación, el programa pueda ser ejecutado. Si no aparece significa que algún dato de entrada no es válido, por lo que se hace presente una ventana de error advirtiéndole al usuario que aún existen errores en los datos de entrada del modelo por parte del usuario. Al presionar el botón para iniciar los cálculos, este recuadro se pone con fondo amarillo indicando que el programa está ejecutando el algoritmo para polarización y mostrando la leyenda “Calculando”. En caso de que se hayan seleccionado gráficas para mostrar, en cuanto termina los cálculos y grafica el recuadro muestra la leyenda “Graficando”, igualmente con fondo amarillo, hasta que este proceso termina. Al haber concluido, vuelve al estado inicial, fondo color verde y con la leyenda “Listo!”, indicando en ese momento que otra simulación puede llevarse a cabo. Fuera de los posibles errores en el quipo en particular donde se está corriendo el software y por factores ajenos a la impecable depuración del código para evitar errores en cualquiera de sus funciones, el fondo rojo para los mensajes de error no ha sido implementado.

- IV. **Datos de salida:** Esta sección es la que informa al usuario, después de haber corrido la simulación y haber mostrado las gráficas de salida en caso de haberlas seleccionado para visualización, la información de salida del algoritmo. El primer dato de salida, en orden descendente, es el grado de polarización final del haz de luz que atravesó el medio. El siguiente dato es el de la elipticidad de la elipse de polarización representativa de la luz que salió del medio; relacionado con este parámetro es el siguiente, el ángulo de orientación final, en grados, de dicha elipse. En seguida aparecen los vectores de Stokes, tanto el de la luz incidente en el medio como el de la luz que emergió de él, donde se puede apreciar de manera clara como el medio influyó sobre dichos parámetros. Inmediatamente después se muestra el estado final de los 16 elementos de la matriz  $M$ , los cuales contienen la información de todas las anisotropías en todo el medio, considerado como bulto. Bajo esta matriz se encuentra un letrero el cual muestra el resultado de la comprobación que el programa internamente hace para conocer si esta matriz con esas anisotropías de entrada es una matriz Mueller-Jones, es decir, que puede transformarse a matrices de Jones. Por último está una casilla para seleccionar que permite visualizar la matriz final  $M$  de Mueller de manera normalizada, esto debido a que en la literatura

las matrices de Mueller para los medios suelen aparecer de esta manera. Esta ventaja del software es ideal para el diseño, si se desea conocer directamente como resulta la matriz de los cálculos y su forma ya normalizada. Cabe mencionar que el programa permite que cualquier valor de esta sección de salida de datos se pueda copiar o arrastrar para su documentación o posterior manipulación con ayuda del ratón de la computadora. Estos datos de salida son evaluados tanto con el método de la matriz exponencial como con el método exacto y analítico, manifestando a la salida de los datos con notación itálica si el método óptimo para el problema es el de la matriz exponencial o con notación normal si fuese el método exacto y analítico.

- V. **Información del Sistema:** En este apartado del programa, ubicado en la parte inferior derecha del mismo, se muestran una serie de especificaciones referentes al desempeño del software en la máquina y el sistema operativo utilizado. Muestra inicialmente el sistema operativo en el cuál se está llevando a cabo la ejecución del software, incluye sistemas GNU Linux y Windows, en versiones little-endian a 32 y 64 bits, a lo que también muestra si se detectó o no alguno de estos sistemas.



## Capítulo 6: Análisis y discusión de los resultados

Ilustramos nuestro análisis examinando algunas matrices de Mueller realizables reportadas en la literatura. El software desarrollado se puso a prueba para verificar la confiabilidad del algoritmo y la estabilidad que lo hacen tan comfortable para el estudio de la polarización. De entre todas las pruebas que se realizaron, a continuación se presentan las más significativas y documentadas para su discusión.

### 6.1 Caso general 1:

Para este caso se evaluarán los vectores de diroísmo y de birrefringencias de la siguiente manera:  $x = (4, 5, 3)$  y  $y = (4, -5, 3)$ . Estos valores nos proporcionan las condiciones que presenta el caso 1, ya que la magnitud del vector  $x$  es idéntico al del valor  $y$  y además su producto punto es igual a cero:  $x \cdot y = 0$ . Por razones de simulación se evaluará a una distancia unitaria de 1m y el tipo de luz incidente será luz natural. Con esto se observará directamente el comportamiento de esta matriz sobre un tipo de luz que no trae alguna preferencia de oscilación del campo eléctrico. Se puede notar desde este punto que debido a 5.16 y 5.17 los parámetros efectivos serán cero <sup>[49]</sup>. Entonces, los datos de entrada en el software serán:

*Absorción=0*

*Dicroísmo=(4,5,3)*

*Birrefringencia=(4,-5,3)*

*Distancia=1*

*Luz incidente=Luz Natural*

Y los datos que arroja la simulación son:

*DoP Final= 0.99926*

*Elipticidad Final= -20.4344*

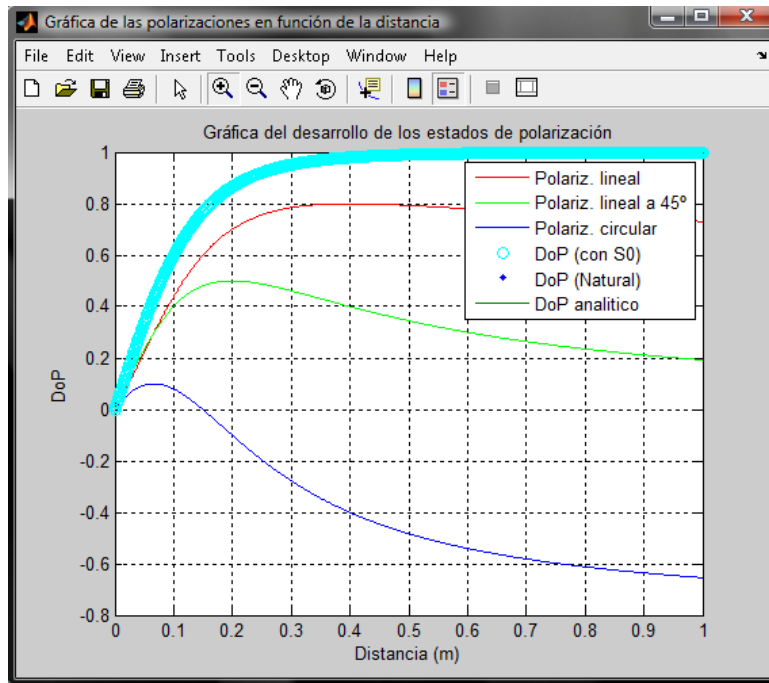
*Ángulo de Orientación Final= 7.3718°*

$$S_{entrada} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_{salida} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.73077 \\ 0.19231 \\ -0.65385 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -0.42308 & 0.19231 & 0.88462 \\ 0.73077 & -0.30769 & 0.11538 & 0.65385 \\ 0.19231 & -0.11538 & 0.038462 & 0.15385 \\ -0.65385 & 0.26923 & -0.15385 & -0.57692 \end{bmatrix}$$

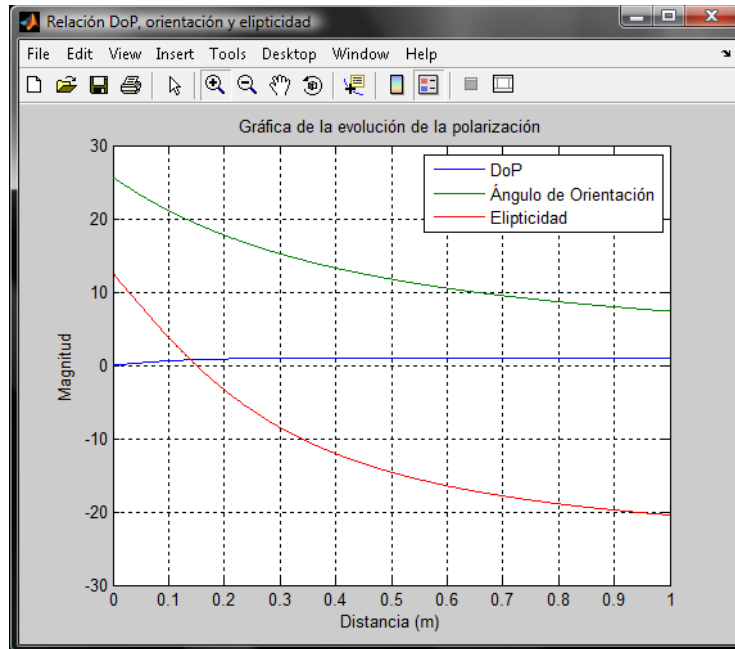
*Estatus de la matriz= Mueller-Stokes*

A continuación se muestran las gráficas con la evolución de los parámetros de polarización para este caso:



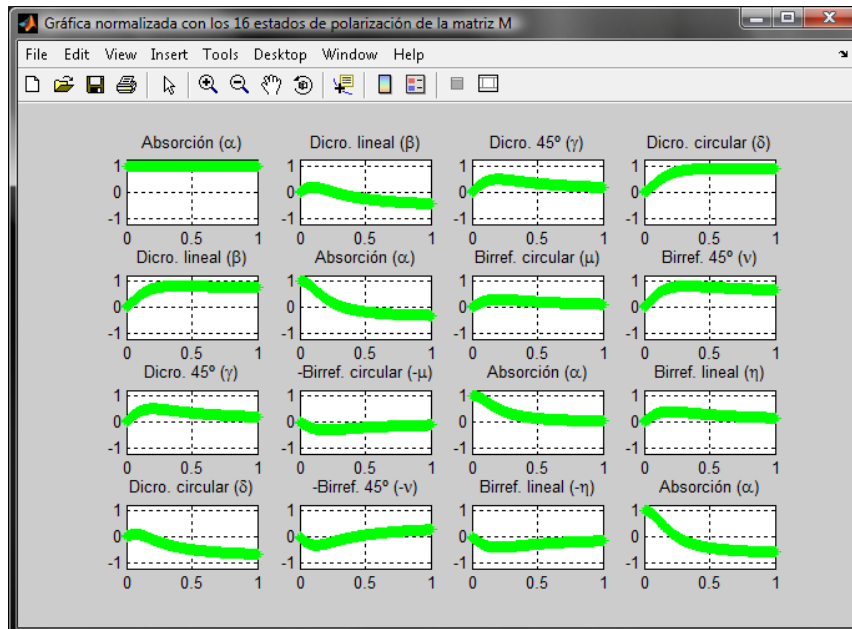
**Figura 18: Estado de las polarizaciones y el grado de polarización.**

En esta figura se puede observar como el grado de polarización parte de 0 (luz natural) y va aumentando, primero rápidamente y después con más amortiguación, hasta polarizarse por completo a la distancia unitaria. Las polarizaciones inicialmente tienden a irse a un cuadrante positivo, sin embargo, conforme se van propagando, los efectos de dicroísmo y de birrefringencia hacen que su polarización pase de circular derecha a circular izquierda, mientras que las polarizaciones lineales solo sufren una disminución por este fenómeno que ocurre en la circular. El comportamiento es de tipo polinomial como se había dicho anteriormente. El vector final de Stokes indica que a la salida se cuenta con una polarización mayormente lineal horizontal, una pequeña componente a 45° y otra componente circular izquierda de consideración. En la siguiente figura correspondiente a la elipticidad y la orientación:



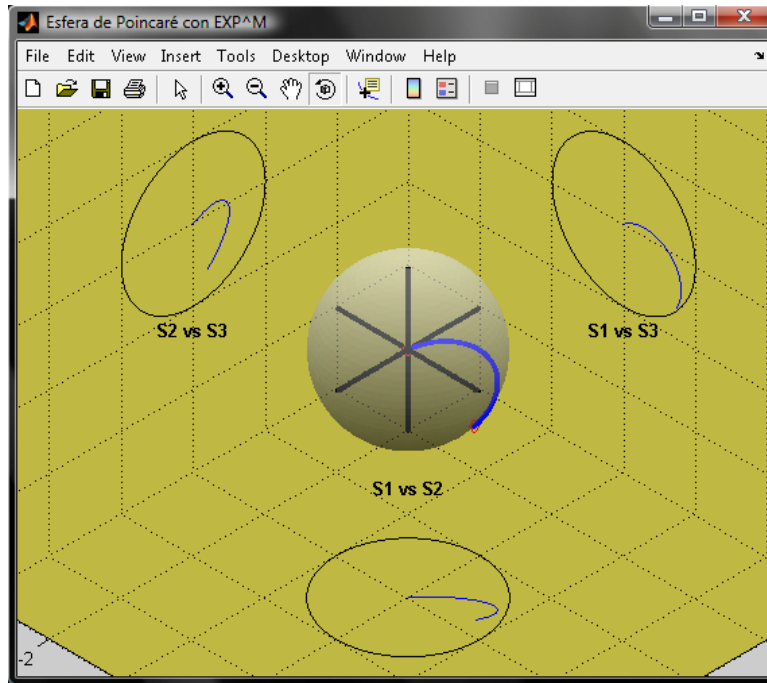
**Figura 19: Elipticidad, Orientación y DoP.**

Observamos que el grado de polarización de igual manera que en la figura anterior parte de cero y llega hasta una polarización total. La elipticidad varía en función de la relación de las componentes del vector de Stokes  $S_1, S_2$  y  $S_3$  mientras que el ángulo de orientación lo hace con respecto a  $S_1$  y  $S_2$  para la elipse de polarización. La matriz de Mueller que representa al medio:



**Figura 20: 16 elementos de la matriz de Mueller M cambiando conforme la distancia recorrida en el medio anisotrópico.**

proporciona la información de la variación de cada uno de los 16 elementos, en los cuales se puede apreciar principalmente que  $M_{11}$  permanece constante durante todo el recorrido mientras los demás varían hasta valores diferentes a cero, lo que indica que no existen principalmente efectos de depolarización en la matriz. La esfera de Poincaré:



**Figura 21: Esfera de Poincaré para la evolución de los parámetros de Stokes.**

Nos proporciona la información de cómo se fue modificando el estado de polarización de la luz en este medio con esas anisotropías, partiendo desde el centro de la esfera, que representa luz no polarizada, y terminando en un punto en la superficie de la esfera (luz completamente polarizada), mostrando la variedad de polarizaciones que fue tomando la luz hasta llegar a ese punto.

## 6.2 Caso general 2:

Para este caso se evaluarán los vectores de dicroísmo y de birrefringencias de la siguiente manera:  $x = (0.4, 0.5, 0.3)$  y  $y = (4, -5, 3)$ . Estos valores nos proporcionan las condiciones que presenta el caso 2, esto es,  $x < y$  y que  $x \cdot y = 0$  (acoplamiento igual a cero). De nuevo se evaluará a una distancia unitaria de 1m y el tipo de luz incidente será luz natural. Aplicando las ecuaciones 5.16 y

5.17 se tiene que el parámetro efectivo  $\tau$  será cero <sup>[49]</sup> y el omega será  $\Omega = \sqrt{y^2 - x^2}$ . Entonces, los datos de entrada en el software serán:

*Absorción*=0  
*Dicroísmo*=(0.4,0.5,0.3)  
*Birrefringencia*=(4,-5,3)  
*Distancia*=1  
*Luz incidente*=Luz Natural

Y los datos que arroja la simulación son:

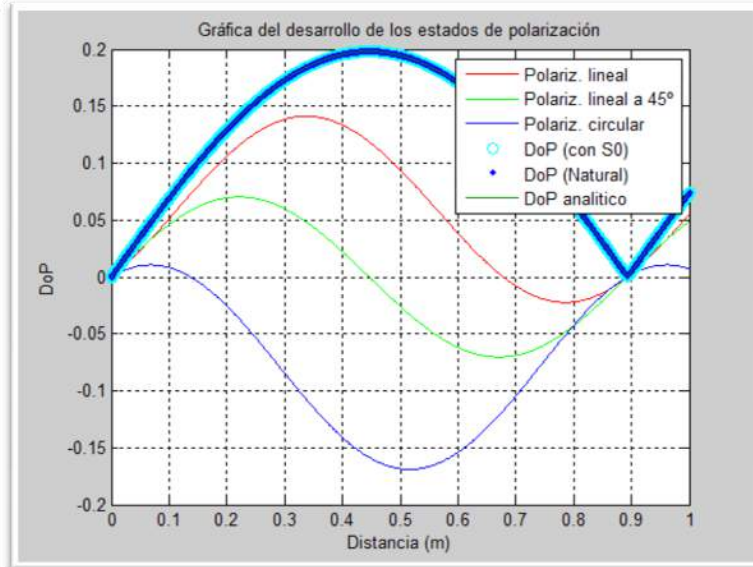
*DoP Final*= 0.073701  
*Elipticidad Final*= 2.8442  
*Ángulo de Orientación Final*= 20.6673°

$$S_{entrada} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_{salida} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.055067 \\ 0.048437 \\ 0.007305 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.022432 & 0.048437 & 0.050819 \\ 0.055067 & 0.81322 & 0.18292 & 0.55029 \\ 0.048437 & -0.39832 & 0.86266 & 0.30672 \\ 0.007305 & -0.41844 & -0.46826 & 0.77476 \end{bmatrix}$$

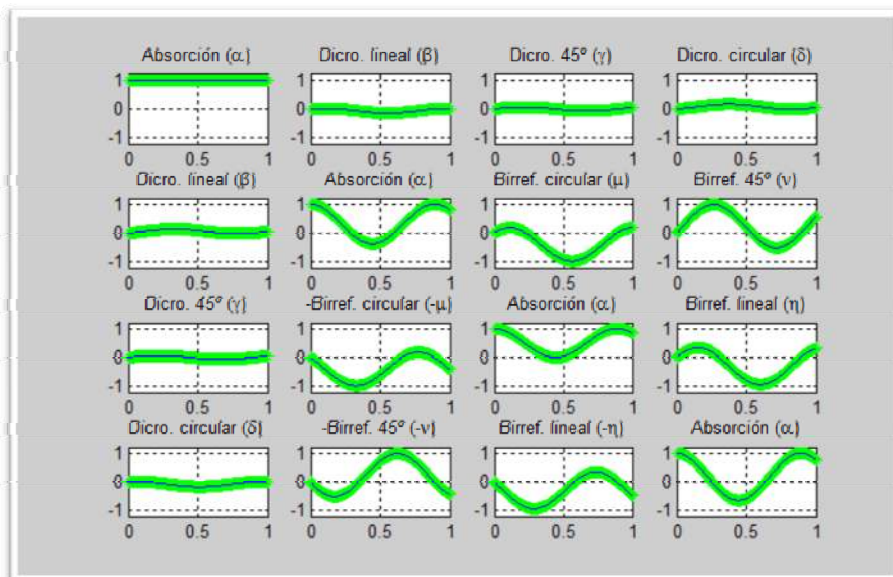
*Estatus de la matriz*= Mueller-Stokes

Claramente se observa que a la salida el vector de Stokes es modificado por el vector de dicroísmo, pero en una escala muy pequeña, dado que los valores correspondientes a las componentes  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son relativamente pequeñas. En este caso el efecto preponderante es el de birrefringencia, por lo que se puede observar en las siguientes gráficas que es de mayor magnitud que cualquiera de las absorciones anteriores.



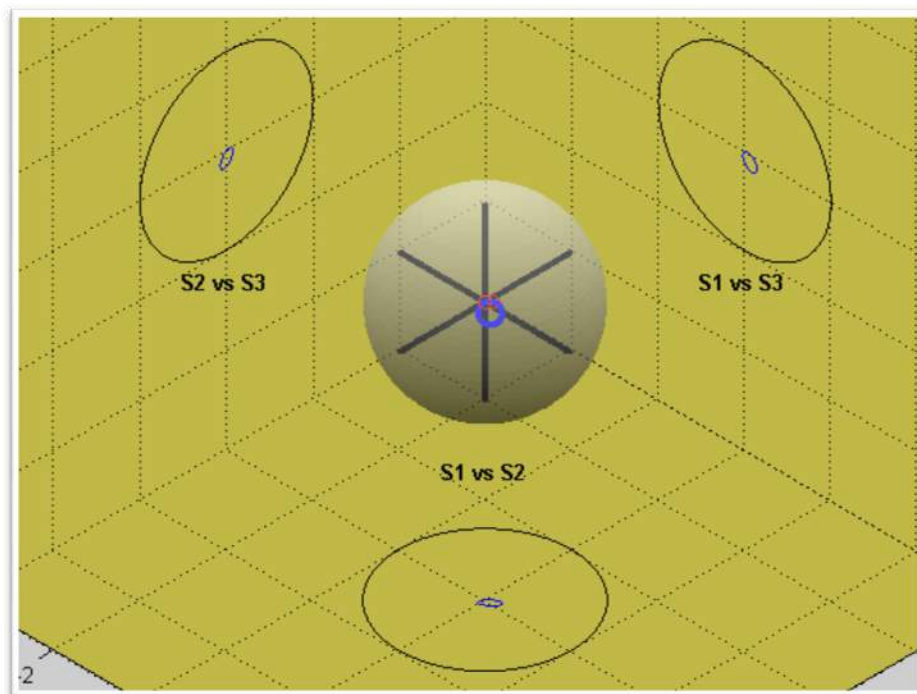
**Figura 22: Evolución de las polarizaciones y el grado de polarización de un caso 2.**

En la gráfica correspondiente a la evolución de las polarizaciones, figura 22, se observa que las polarizaciones inicialmente son cero (luz natural) y que evolucionan con una pendiente positiva, seguido llegan a un máximo y por el efecto de la birrefringencia sufren de diatenuación, la que les hace pasar a su polarización representada por su valor negativo en notación de Stokes. Este comportamiento se repite indefinidamente, ya que como se había descrito antes, este caso tiene un comportamiento de tipo senoidal,



**Figura 23: Elementos de la matriz M.**

En la figura 23 donde se muestran los 16 elementos de la matriz  $M$  evolucionando conforme la distancia recorrida en el medio, se observa que el comportamiento de los elementos es periódico, y que además tienen simetrías entre el mismo elemento y su contraparte del otro lado de la diagonal. En la esfera de Poincaré se observa que la evolución en el espacio es mayoritariamente birrefringente, ya que las oscilaciones de los estados de polarización giran en un punto muy cercano, lo que también indica que tiene un nivel muy bajo de dicroísmo, ya que si fuera más dominante este último efecto la polarización tendería a dirigirse hacia un punto en la esfera. También cabe señalar que para este caso, la figura 24 indica que la luz que se propaga y que va modificándose en el medio, no es totalmente polarizada.



**Figura 24: Esfera de Poincaré.**

Como se puede observar, el comportamiento de las polarizaciones es un comportamiento senoidal, esto debido a que se entra en un régimen singular que hace que la polarización oscile en la distancia mientras se propague en el medio.

### 6.3 Caso general 3:

Para este caso los vectores  $x$  y  $y$  de diroísmo y birrefringencia respectivamente se evaluarán como sigue:  $x = (4, 5, 3)$  y  $y = (0.4, -0.5, 0.3)$ , que a diferencia del caso anterior, en esta ocasión el vector de birrefringencias es 10 veces menor que el de diroísmos, lo que satisface la condición para el caso 3 donde  $x > y$  y además que  $x \cdot y = 0$  (acoplamiento igual a cero). Igualmente se evaluará a una distancia unitaria de 1m y el tipo de luz incidente será luz natural, de esta manera tanto caso 1 como caso 2 y 3 solo tienen como variable la relación entre estos 2 vectores de anisotropías. Aplicando las ecuaciones 5.16 y 5.17 se tiene que el parámetro efectivo  $\tau$  será  $\tau = \sqrt{x^2 - y^2}$  [49] y el omega será cero. Entonces, los datos de entrada en el software serán:

*Absorción=0*  
*Dicroísmo=(4,5,3)*  
*Birrefringencia=(0.4,-0.5,0.3)*  
*Distancia=1*  
*Luz incidente=Luz Natural*

Y los datos resultantes de la simulación son:

*DoP Final= 1*  
*Elipticidad Final= 10.008*  
*Ángulo de Orientación Final= 24.2435°*

$$S_{\text{entrada}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_{\text{salida}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.62275 \\ 0.70357 \\ 0.34228 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.50296 & 0.70357 & 0.502 \\ 0.62275 & 0.3144 & 0.43752 & 0.31234 \\ 0.70357 & 0.3531 & 0.49588 & 0.35277 \\ 0.34228 & 0.17162 & 0.2402 & 0.17324 \end{bmatrix}$$

*Estatus de la matriz= Mueller-Stokes*



Se puede observar que a la salida de la evolución del vector de Stokes éste es principalmente modificado por el vector de diicroísmos que lo hace alcanzar un grado de polarización mucho mayor en un tiempo relativamente más pequeño que en los caso anteriores.

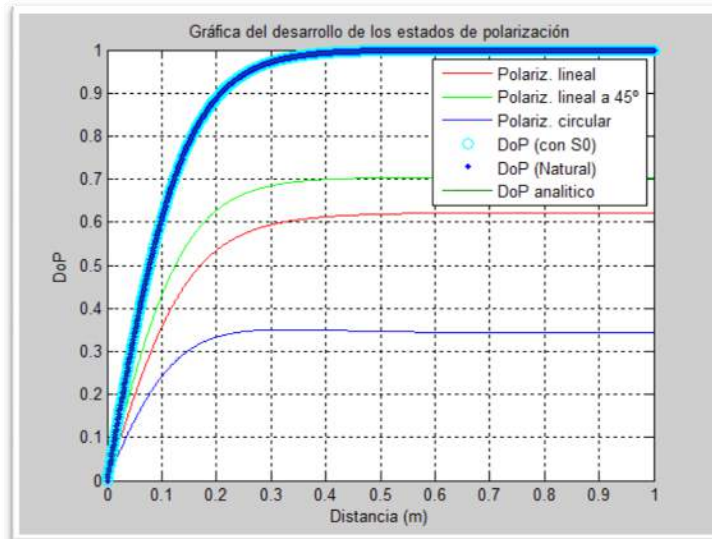


Figura 25: Evolución del caso 3 de los estados de polarización y de su grado de polarización.

Al ser la birrefringencia mucho menor, el efecto que produce es el de mantener el estado de las polarizaciones más estable hacia una polarización que las oscilaciones que se observaron en caso 1 por ejemplo, ya que su comportamiento es hiperbólico <sup>[49]</sup>. En la siguiente figura:

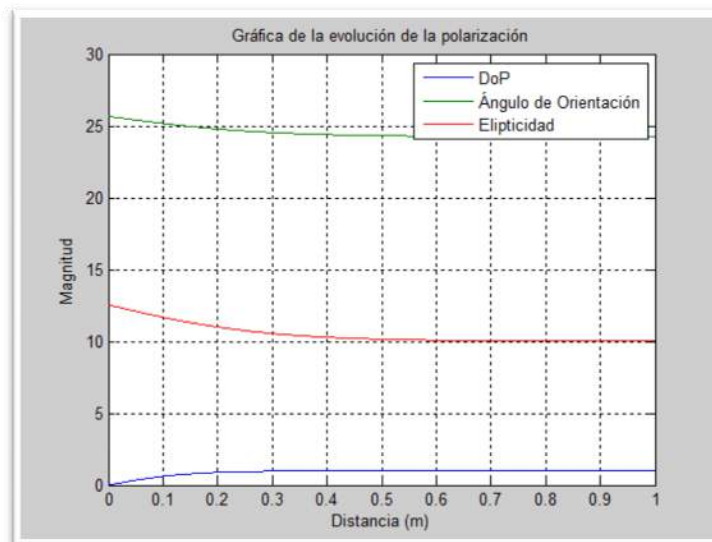
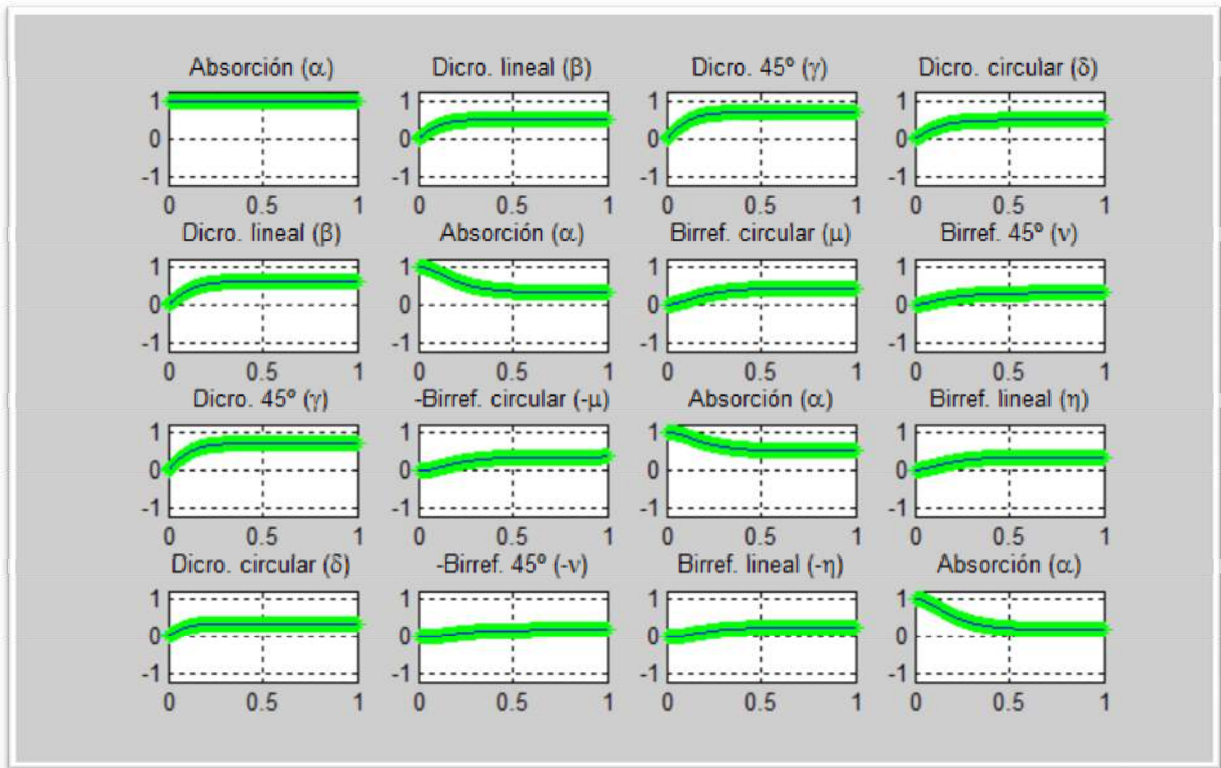


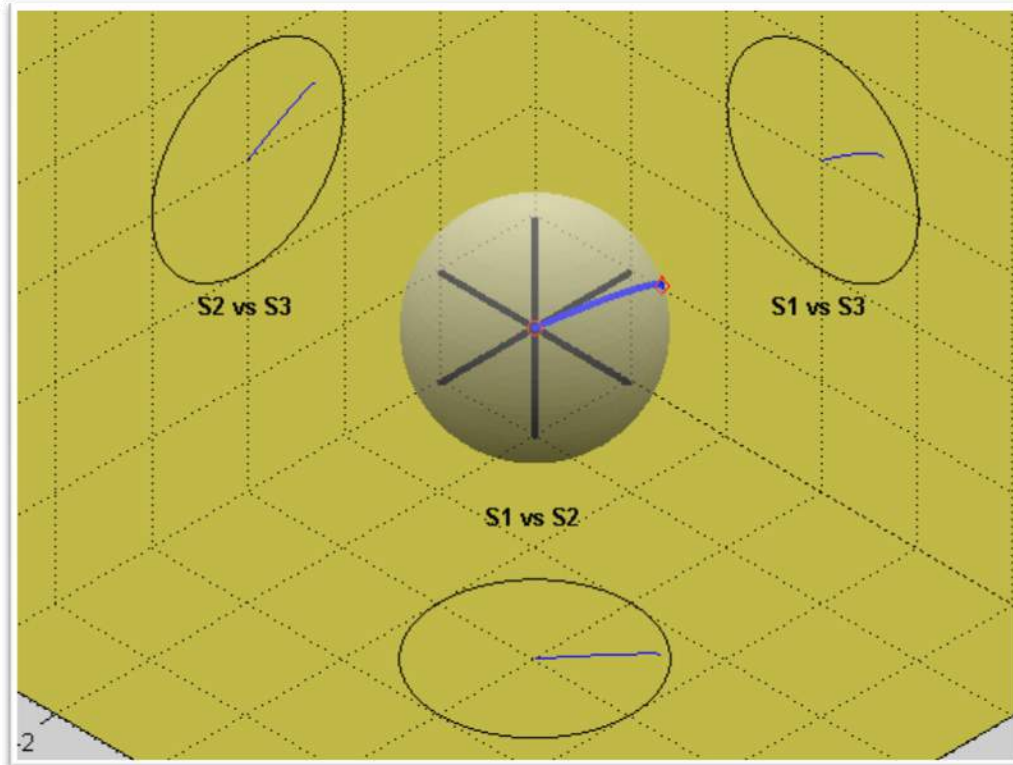
Figura 26: Elipticidad y orientación de la elipse de polarización además del grado de polarización.

Se puede observar que el grado de polarización se estabiliza muy rápidamente debido al alto dicroísmo que posee la matriz  $m$ , y que además aunque ya esta considerablemente polarizado ( $DoP \approx 1$ ) las componentes de elipticidad y de orientación de la elipse de polarización siguen evolucionando en la distancia. Efecto atribuible en parte a la existencia de birrefringencia en el medio.



**Figura 27: Componentes de la matriz de Mueller M.**

En la figura 28 se pueden observar los 16 elementos de la matriz de Mueller  $M$ . Igual que en los casos anteriores, el elemento  $M_{11}$  permanece invariante en el medio, mientras que todos los demás evolucionan durante la propagación. En estas gráficas se pueden observar las simetrías entre los mismos elementos de la matriz dependiendo de su ubicación en ella. En la gráfica de la esfera de Poincaré:



**Figura 28: Esfera de Poincaré para un caso 3.**

Se observa como muy rápidamente y sin oscilar dentro de la esfera el estado de polarización tiende a irse hacia un área en específico en la superficie de la esfera, indicando una rápida polarización y un grado de polarización cercano a 1 en muy poca distancia recorrida en el medio. La falta de un comportamiento elíptico de este trazo es señal de una baja birrefringencia.

#### **6.4 Filtro de densidad neutra:**

Para esta prueba, se introduce a la entrada del sistema luz natural (no polarizada), además de dejar en ceros los valores de las anisotropías e isotropías del medio. La distancia recorrida en este caso es independiente, ya que como se mencionó, no existe ningún efecto actuando en la luz incidente.

Datos del Modelo Matemático

Absorción:

Dicroísmo: [    ]

Birrefringencia: [    ]

Distancia recorrida en el medio:  metros

Tipo de luz incidente:

Otro tipo de luz:

Figura 29: Datos de entrada del caso de filtro de densidad neutra.

Con lo estos datos de entrada del programa, los datos de salida son los siguientes:

Datos de Salida

DoP Final:

Elipticidad Final:

Ángulo de Orientación Final:

	Entrada	Salida
Vectores de Stokes: S0 =	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>
S1 =	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
S2 =	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
S3 =	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>

Matriz de Mueller (M):

<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>

Estatus de la Matriz:   Normalizar M

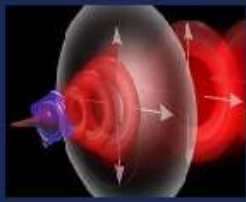


Figura 30: Datos de salida del caso del filtro de densidad neutra.

En este caso, la cantidad de polarización lineal horizontal y vertical, lineal a  $\pm 45^\circ$  y circular derecha e izquierda son iguales, condiciones de luz sin preferencia de vibración, por lo tanto se habla de luz natural. La matriz M resultante es una matriz diagonal unitaria que muestra que el estado de polarización no se altera por un filtro de este tipo. Cabe mencionar que por ser un filtro su intensidad si se ve afectada en magnitud <sup>[44]</sup>:

$$M = p^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $p$  es el coeficiente de atenuación a lo largo de la transmisión en el medio. En otras palabras, el programa reprodujo este filtro y el estado de polarización con solo introducir las condiciones físicas que lo caracterizan. En este caso no tiene relevancia el graficar los elementos graficados anteriormente, ya que en todas ellas no se observa cambio alguno en el estado de polarización o inclusive algún estado diferente de cero, consistente con luz natural que no es modificada por el medio en el que se propaga.

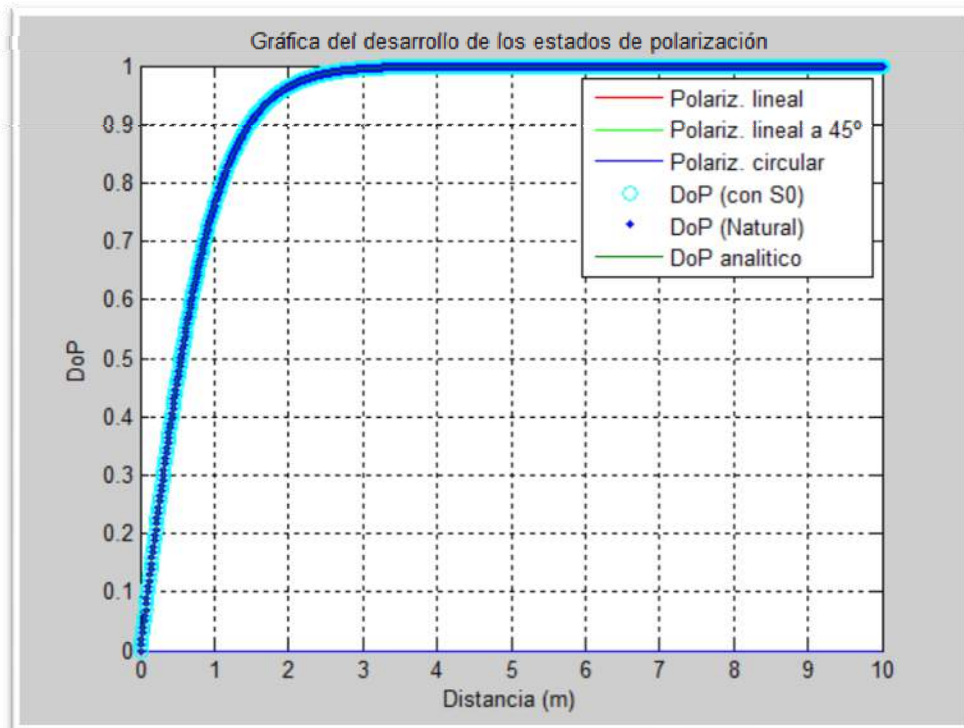
## 6.5 Dicroísmo puro:

Para comprobar este caso, en los datos de entrada del modelo solo consideraremos una de las componentes del vector de dicroísmo, a saber, solo haremos la prueba con dicroísmo horizontal. El vector de birrefringencias no influirá en la luz incidente en el medio, por lo que su vector se deja nulo. La distancia de propagación igualmente es arbitraria, sin embargo, para darle la distancia suficiente a la luz de que se polarice completamente, se elige un valor de distancia de 10m.



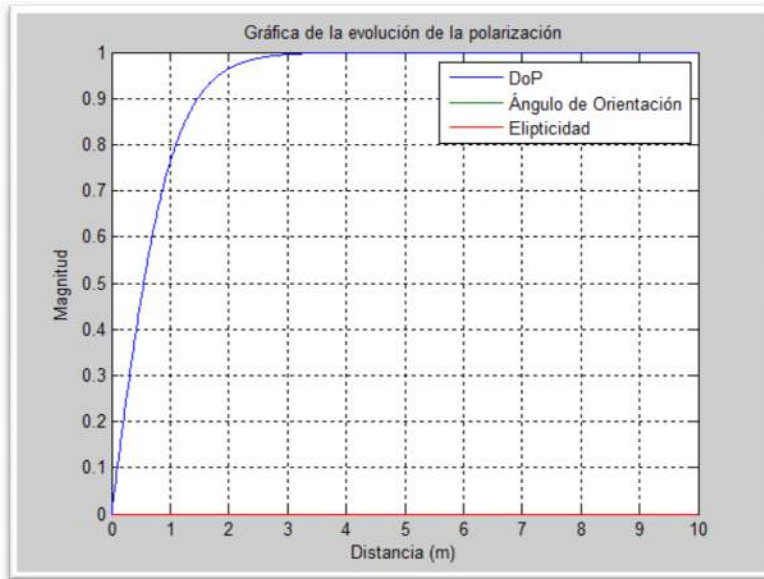
Figura 31: Imagen de la interfaz de usuario para el caso de un polarizador dicroico.

Como se puede apreciar, al introducir luz natural en un polarizador dicroico lineal a la salida se obtendrá luz polarizada en esa orientación. La matriz M resultante en el software es la misma matriz reportada en la literatura para un polarizador ideal de este tipo <sup>[4]</sup>. En cuanto a las polarizaciones, la siguiente figura muestra que el grado de polarización aumenta al igual que la polarización lineal horizontal (sentido positivo), mientras que las otras polarizaciones permanecen en cero durante toda la propagación.



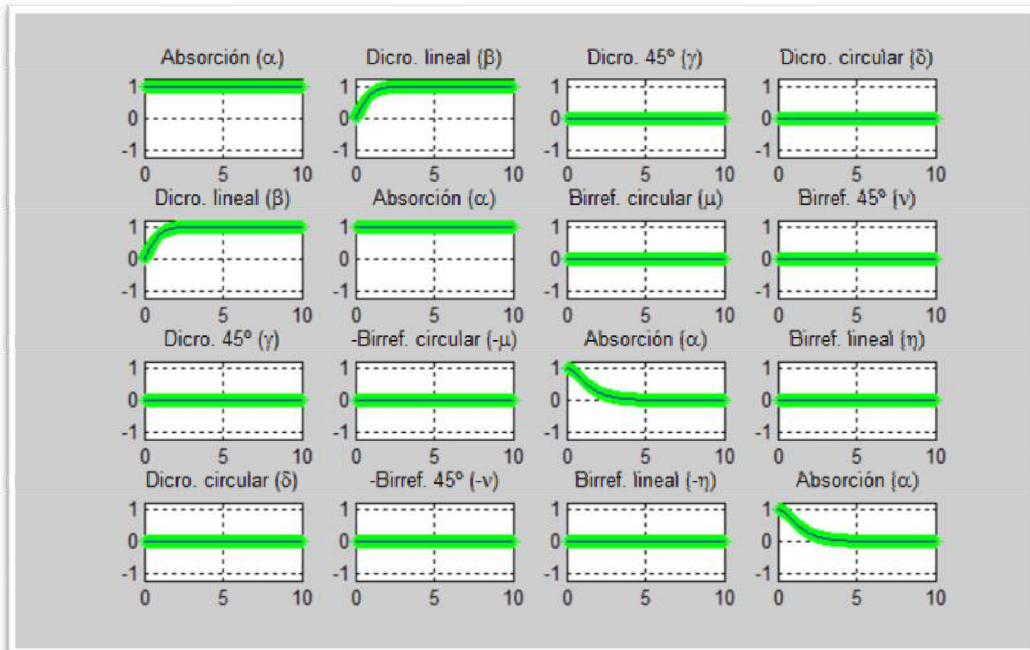
**Figura 32: Polarizaciones en la propagación de la luz por un material dicroico.**

Al tratarse de un polarizador por absorción isotrópica y no contener birrefringencia, solo las componentes de la luz que interactúan con su contraparte de anisotropías tendrán un efecto en la luz resultante, por lo que la tanto la elipticidad como la orientación de la elipse de polarización no evolucionan en la distancia, mientras que si lo hace el grado de polarización (DoP) como se muestra en la siguiente figura:



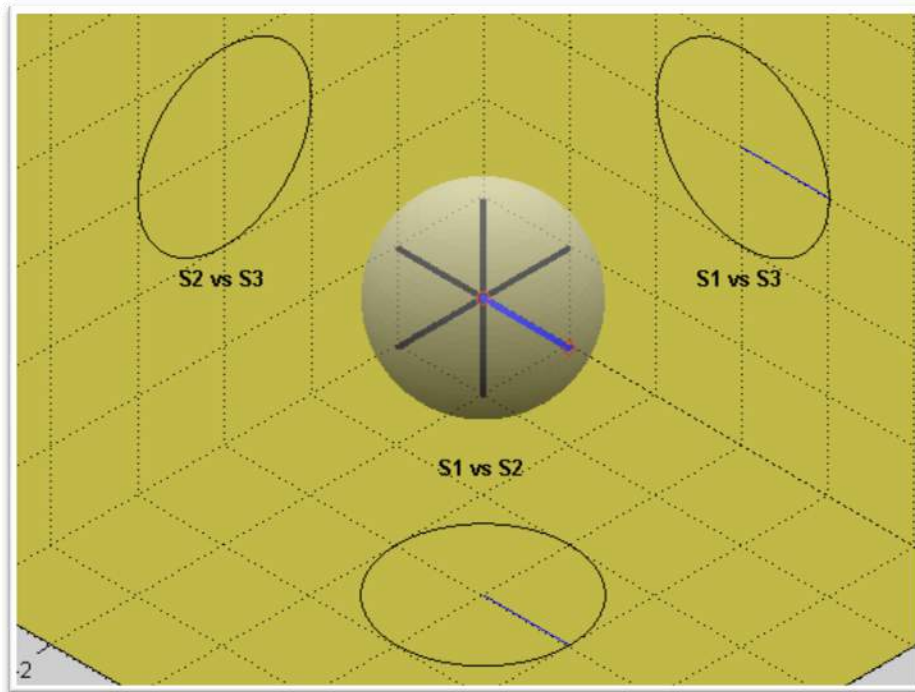
**Figura 33: Evolución de las componentes en la elipse de polarización y el grado de polarización.**

Algo similar ocurre con las componentes que influyen en la birrefringencia, ya que en la matriz de Mueller M dichas componentes son nulas, al igual que las componentes que no intervienen del tipo dicroicas; mientras que las relacionadas con el dicroísmo lineal muestra un ascenso hasta llegar a su valor máximo (unitario, al ser normalizada la gráfica).



**Figura 34: 16 elementos de la matriz M para un polarizador dicroico lineal horizontal.**

En relación a la esfera de Poincaré, claramente se observa que la polarización comienza en el centro (luz natural) y se dirige hacia la superficie de la esfera por la parte positiva de  $S_1$ , consistente con una polarización linealmente horizontal.



**Figura 35: Representación de la esfera de Poincaré para un polarizador dicróico horizontal.**

Se observa que la evolución del estado de polarización se realiza sobre el eje  $+x$ , correspondiente a  $+S_1$ , es decir, polarización horizontal, y en ningún momento se traslada en dirección a los ejes  $S_2$  y  $S_3$ . En efecto la proyección sobre la intersección en estos ejes parece nula, esto a causa de que por la misma proyección, solo un punto infinitesimalmente pequeño es el que se distinguiría en el centro del círculo en ese plano.

## 6.6 Birrefringencia pura:

Para demostrar un caso de birrefringencia pura, los valores con los cuales se va a simular la luz y el medio son los siguientes:





Figura 36: Valores de entrada y salida para el caso de un medio puramente birrefringente.

En este tipo de medio, al tratarse únicamente de la birrefringencia, no existe un efecto de absorción que colabore con la polarización de la luz incidente, por tal motivo ésta solo sufre una rotación, mas no una polarización en si, como puede apreciarse en la figura 37:

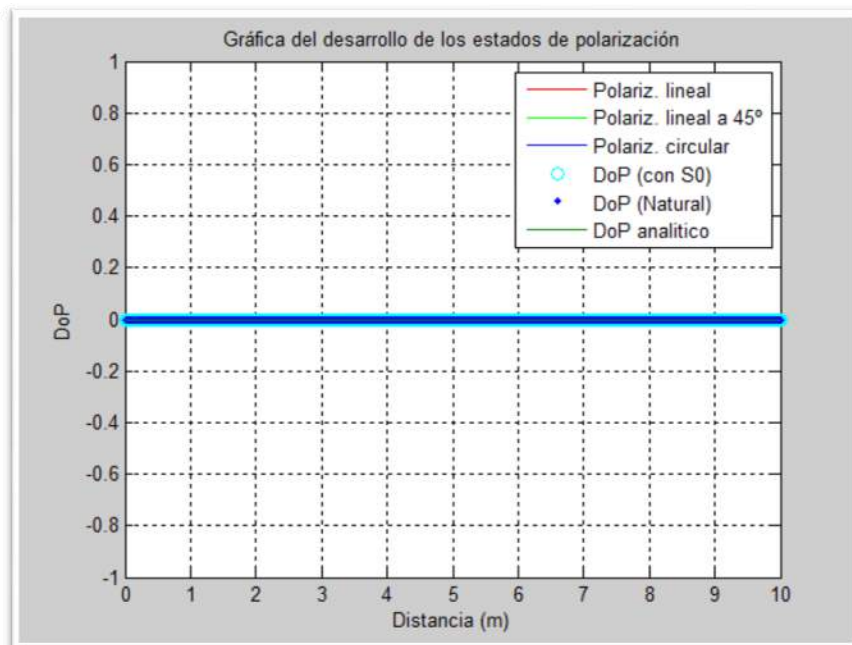
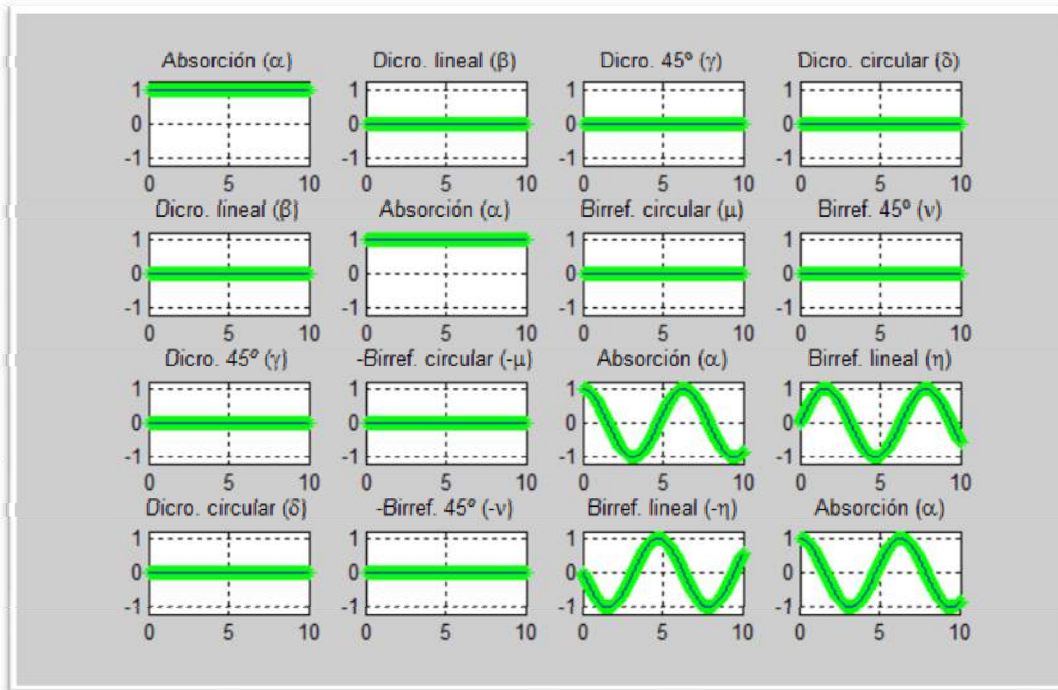


Figura 37: Polarizaciones y grado de polarización de la luz natural en un medio birrefringente puro.

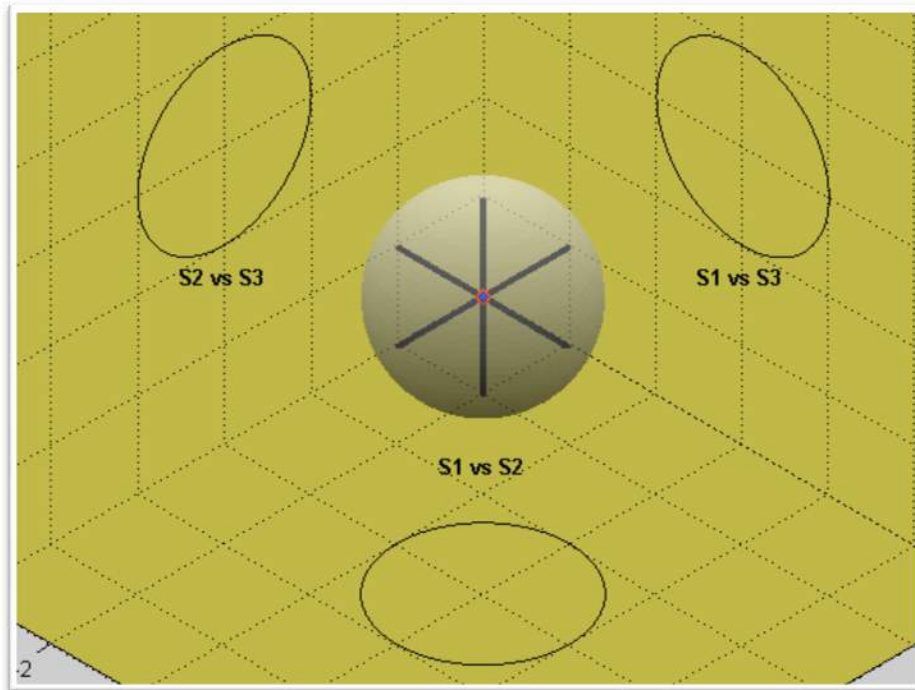
Al incidir luz natural en este medio las polarizaciones son prácticamente nulas, y por ende, el grado de polarización, ya que la birrefringencia solo influye un desfase entre componentes del campo eléctrico, y al este no tener una preferencia, no se ve polarizado por el medio. En la gráfica con los 16 elementos de la matriz de Mueller  $M$  se observa que al igual que en los casos anteriores el primer elemento de la matriz permanece constante, y que los únicos que varían en la propagación son los que en la literatura están reportados como una rotación óptica <sup>[1,2,4]</sup>:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.1)$$



**Figura 38: Matriz de Mueller  $M$  para un medio dicroico.**

En esta figura se observa que corresponden los valores unitarios en los primeros 2 elementos de la diagonal y que los últimos 4 elementos de la parte inferior derecha de la matriz corresponden a los cosenos y senos reportados en la literatura. Por su parte, la esfera de Poincaré en este caso no presenta mucha información relevante, más que el hecho de que la luz inicial es natural, y la luz que sale es natural, esto es, las coordenadas (0,0,0):



**Figura 39: Esfera de Poincaré para un medio de propagación puramente birrefringente.**

Aún en este caso las proyecciones existen, sólo que al ser un punto en el origen, su proyección en los tres planos es igualmente un punto infinitesimalmente pequeño. Como prueba de esto, se puede hacer notar que ambas señalizaciones, tanto la de inicio como la de fin del estado de polarización después de recorrer el medio, están ubicadas en el mismo punto (0,0,0).

### **6.7 Placa retardadora $\lambda/4$ :**

La placa retardadora o placa de un cuarto de onda es una de las que más se utilizan en experimentos y en aplicaciones dentro del área de la polarización, esto debido a que bajo ciertas condiciones de incidencia de la luz, este elemento tiene la capacidad de convertir luz de lineal a circular y viceversa. Se trata en esencia de un rotador óptico <sup>[2]</sup> o elemento puramente birrefringente <sup>[2]</sup> con un camino óptico para la luz que va de acuerdo con la longitud de onda con la que se pretende que interactúe. Para su simulación con el algoritmo implementado en el software, se eligieron los siguientes valores para los datos de entrada:

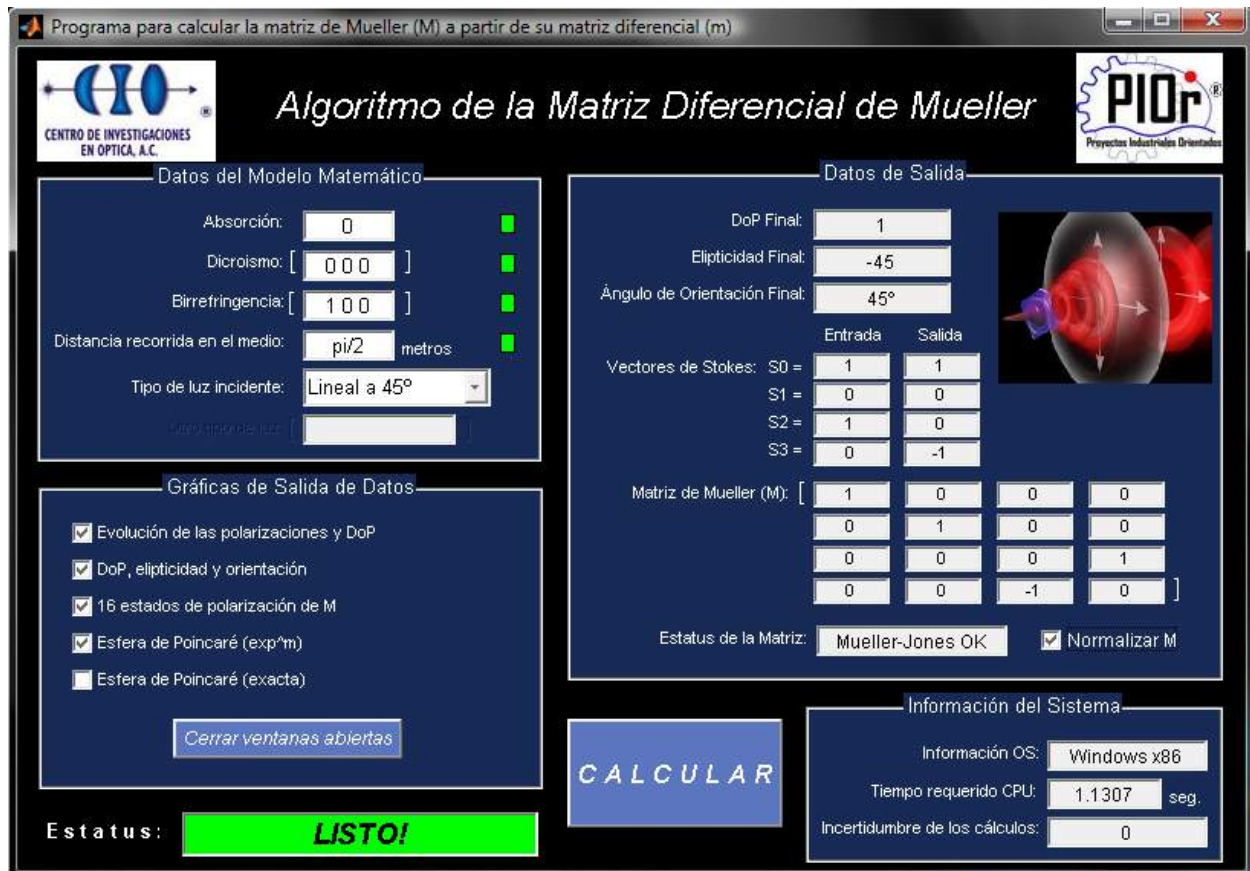
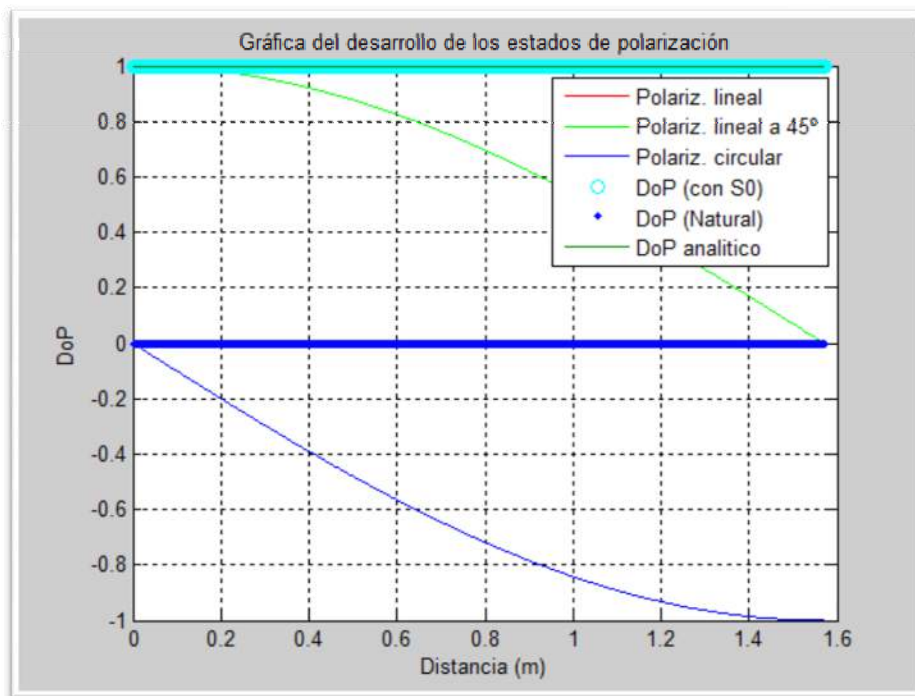


Figura 40: Datos de entrada para simular una placa retardadora  $\lambda/4$  y su descripción analítica final.

Para hacer de este caso independiente de la longitud de onda, el vector de birrefringencias (que depende de la longitud de onda) se elige unitario y la distancia se considera  $\pi/2$ , esto con la finalidad de hacer independiente de la frecuencia de la luz el estudio. Como el elemento completo que se pretende simular consta de un polarizador lineal y un polarizador circular, el primero se simulará haciendo incidir sobre el segundo luz linealmente polarizada a  $45^\circ$  directamente, mientras que el segundo se representará como un medio puramente con birrefringencia lineal. Al calcular el elemento, se puede observar en la figura 40 del lado derecho que la luz que incide es totalmente polarizada a  $45^\circ$  y la luz que se presenta en el vector de salida de Stokes es luz totalmente polarizada circularmente a izquierdas. La matriz de Mueller M resultante es la que en la literatura se presenta como la matriz ideal para un retardador de cuarto de onda con la ese tipo de luz incidente <sup>[4]</sup>:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \rightarrow M_{\lambda/4 \text{ ideal}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

En lo que respecta a las evoluciones de las polarizaciones, se puede observar que el grado de polarización desde que entra al dispositivo hasta que sale permanece en 1, señal indicativa de un medio no depolarizante, además de inferir que no existe dicróismo presente en él. Se introduce luz polarizada a 45° y como se aprecia, en la propagación sufre un cambio en el modo y al terminar de propagarse termina extinta esta polarización. Sin embargo, esta energía se transfiere a la polarización circular, la cuál de comenzar nula evoluciona de modo tal que al propagarse totalmente en este medio llega a polarizarse totalmente a izquierdas:



**Figura 41: Evolución de los estados de polarización de la placa retardadora  $\lambda/4$ .**

Con referencia a la segunda gráfica de salida, se observa de igual manera que el grado de polarización de la luz permanece invariable durante todo el recorrido en el medio, mientras la elipticidad va incrementándose, señal de que la polarización va degenerándose, adquiriendo una forma elíptica.

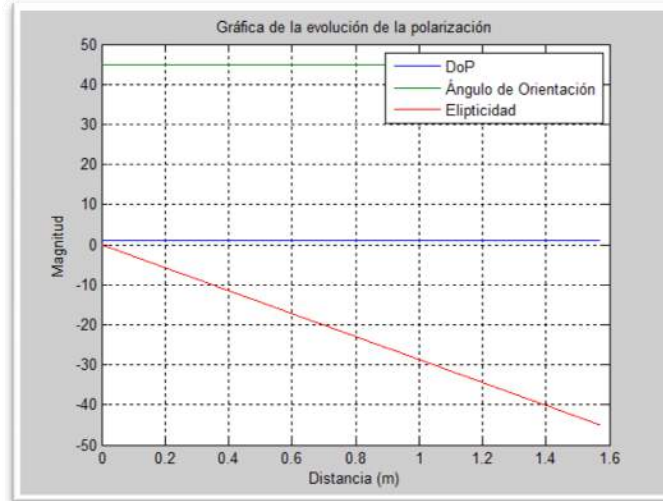


Figura 42: Elipticidad y orientación de la elipse de polarización para una placa retardadora  $\lambda/4$ .

En la siguiente figura, la que tiene que ver con los elementos de la matriz M de Mueller, se observa que igualmente los elementos  $M_{11}$  y  $M_{22}$  permanecen constantes en 1 (valor normalizado), mientras que los elementos pertenecientes a  $M_{33}, M_{34}, M_{43}$  y  $M_{44}$  varían conforme lo establecido para un elemento birrefringente puro, y se observa que la relación de senos y cosenos arroja como resultado lo predicho en la ecuación 6.2. Los restantes elementos no contribuyen a modificar el vector de Stokes, por lo cual su evolución es nula.

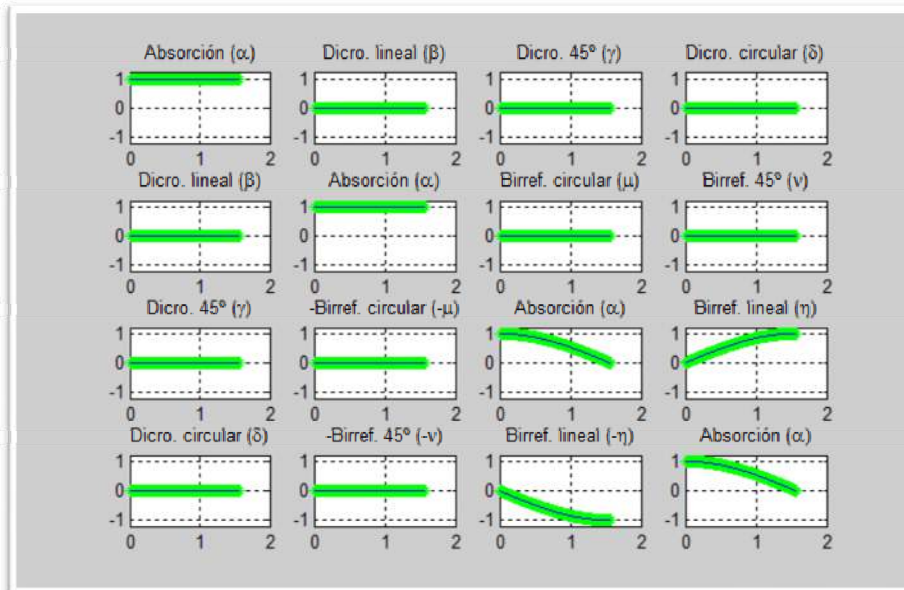
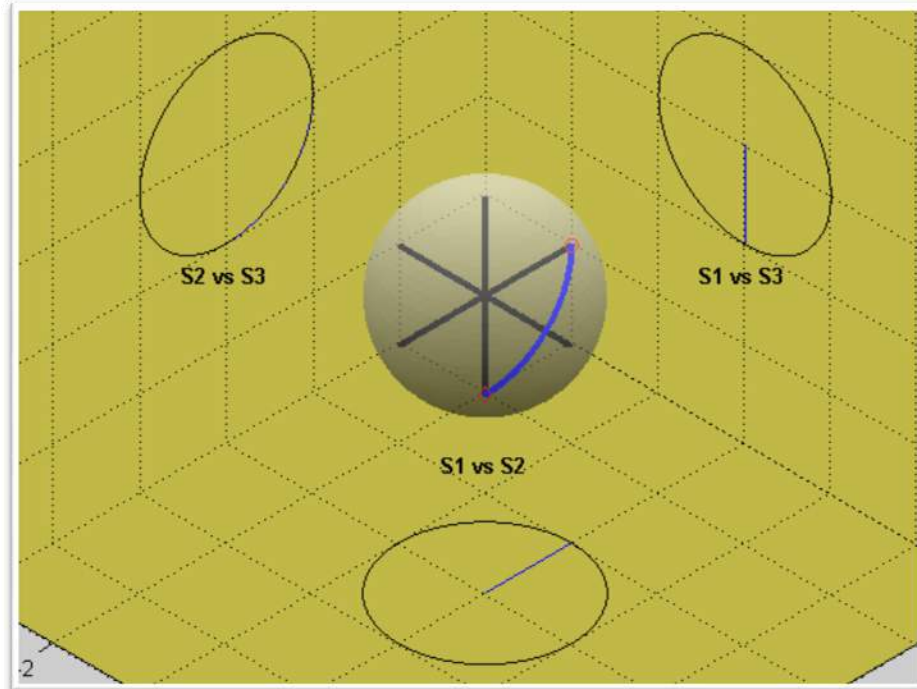


Figura 43: Matriz M de un retardador  $\lambda/4$ .



**Figura 44: Representación en Poincaré del funcionamiento de un retardador  $\lambda/4$ .**

Finalmente, en la esfera de Poincaré se observa como la polarización inicial, marcada con un círculo rojo en el punto  $(0,1,0)$  correspondiente a la polarización total a  $45^\circ$ , se traslada por la superficie de la esfera hasta el punto marcado con un diamante rojo en  $(0,0,-1)$ , correspondiente a luz circular totalmente polarizada a izquierdas. También se muestra que no evoluciona en el eje  $S_1$ , por lo que la sucesión de puntos en ese sentido solo se manifiestan como una línea en 0. Esta ha sido magnificada para que se pueda apreciar que en efecto, está ahí, y que solo existe por el desplazamiento en las otras componentes. Al final, este es el comportamiento que uno se esperaría de una placa retardadora de un cuarto de onda, y el cuál ha sido correctamente simulado.

## 6.8 Polarizadores cruzados:

Para este ejemplo, primero calcularemos el estado de polarización resultante de un medio con una anisotropía  $\beta = 1$  que corresponde a un polarizador ideal que polariza a lo largo de su eje horizontal; el tipo de luz incidente será nuevamente luz natural, que es en la que mejor se nota el efecto de la polarización.



(a)

(b)

Figura 45: (a) Datos de entrada y (b) datos de salida de este ejemplo simulador por el software

Como se puede observar, el resultado de introducir luz natural en el modelo con un medio de anisotropía dicroica lineal únicamente se obtiene a la salida luz polarizada linealmente en el eje  $x$ . Aplicando el mismo procedimiento pero ahora para una anisotropía  $\beta = -1$  que corresponde a un polarizador ideal en el eje  $y$  tenemos:



(a)

(b)

Figura 46: (a) Datos de entrada y (b) datos de salida de la simulación de un polarizador lineal vertical

Ahora bien, aplicando la ecuación 4.11 para el vector final de Stokes:



$$S_{salida} = M_2 M_1 S_{entrada} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

De esta manera obtenemos el resultado reportado que manifiesta que con un par de polarizadores lineales cruzados colocados en serie dentro del trayecto de la luz la extinguen a la salida de ambos polarizadores.

## Capítulo 7: Resultados y aplicaciones a futuro

### Conclusiones:

Un modelo teórico y un software fueron desarrollados para describir el efecto de la polarización en la luz transmitida en un medio anisotrópico. Como se esperaba, el software con el modelo utilizado reproduce los resultados reportados en la literatura. Las siguientes características fueron obtenidas para el software desarrollado:

- Verifica convergencia de métodos hasta ahora reportados.
- No requiere de análisis numérico para su resolución.
- Independencia de sistema operativo.
- Aplicaciones en tiempo real.
- Interfaz intuitiva para usuarios.
- Ideal para el aprendizaje de la evolución de la polarización en medios.
- Ideal para resolver el problema inverso: Síntesis de los elementos de polarización

Es importante mencionar la posibilidad de mejorar la predicción de los efectos usando una red del material con multicapas <sup>[69]</sup> y con materiales no transparentes.

### Aplicaciones a Futuro

- Caracterizar materiales.
- Análisis de tejidos orgánicos.
- Diseño de sistemas de comunicación.
- Diseño de sensores polarimétricos (en azúcares, cadenas moleculares, etc.).
- Calidad del aire.
- Software para polarímetros y elipsómetros.
- Consideración de errores para matrices de Mueller experimentales.

# Referencias

## Bibliografía:

1. David S. Kliger, James W. Lewis, Cora Einterz Randall. Polarized light in optics and spectroscopy. San Diego : Academic Press, Inc., 1990.
2. Swindell, William. Benchmark Papers in Optics, Volume 1. Polarized Light. s.l. : Dowden, Hutchinson & Ross, Inc., 1975.
3. Collett, Edward. Polarized Light, Fundamentals and Applications. s.l. : Marcel Dekker, Inc., 1993.
4. Goldstein, Dennis. Polarized Light, second edition, revised and expanded. s.l. : Marcel Dekker, Inc., 2003.
5. Shurcliff, William A. Polarized Light. s.l. : Harvard University Press, 1962.
6. Brosseau, Christian. Fundamentals of Polarized Light, a statistical optics approach. s.l. : John Wiley & Sons, Inc., 1998.
7. Bashara, R.M.A. Azzam and N.M. Ellipsometry and polarized light. s.l. : North-Holland, 1987.
8. Wolf, M. Born and E. Principles of Optics. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
9. Iniesta, Jose Carlos del Toro. Introduction to Spectropolarimetry. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
10. Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering. s.l. : Prentice Hall, 1996.
11. Hecht, Eugene. Óptica. 3ra. Edición. Pearson Educación, S.A. Addison Wesley. España, 2000.
12. Grossman, Stanley I. Álgebra Lineal. 5ta. Edición. México. McGraw-Hill, 1996.

## Publicaciones científicas:

13. A. B. Kostinski, C. R. Givens, and J. M. Kwiatkowski, "Constraints on Mueller matrices of polarization optics," Appl. Opt. 32, 1646-1651 (1993).

14. A. Márquez, I. Moreno, C. Lemmi, A. Lizana, J. Campos, and M. J. Yzuel, "Mueller-Stokes characterization and optimization of a liquid crystal on silicon display showing depolarization," *Opt. Express* 16, 1669-1685 (2008).
15. A. Röseler, "Problem of polarization degree in spectroscopic photometric ellipsometry (polarimetry)," *J. Opt. Soc. Am. A* 9, 1124-1131 (1992).
16. Bernabeu, E and Gil, J. J., "Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a nondepolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix," *Optik* 76, 67-71 (1987).
17. B. I. Gramatikov, O. H. Y. Zalloum, Y. K. Wu, D. G. Hunter, and D. L. Guyton, "Directional eye fixation sensor using birefringence-based foveal detection," *Appl. Opt.* 46, 1809-1818 (2007).
18. C. S. Brown and A. E. Bak, "Unified Formalism for polarization optics with application to polarimetry of a twisted optical fiber," *Opt. Eng.* 34, 1625-1634 (1995).
19. C. S. Brown and F. Muhammad, "The unified formalism for polarization optics: further developments," in *Polarization Analysis and Measurement II*, D. H. Goldstein and D. B. Chenault, eds., *Proc. SPIE* 2265, 327-336 (1994).
20. C. S. Brown; Shute, Marcus W.; Williams, Diedre D.; Bak, Aakhut E., "Development and calibration of an optical fiber polarimeter". *Proc. SPIE Vol. 2265*, p. 62-69 (1994).
21. C. S. Brown, "A unified formalism for treating polarization effects using Stokes parameters and the Lorentz group," in *Polarization Analysis and Measurement*, D. H. Goldstein and R. A. Chipman, eds., *Proc. SPIE* 1746, 174-182 (1992).
22. C. Brosseau, "Mueller matrix analysis of light depolarization by a linear optical medium". *Optics communications*, vol. 131, no4-6, pp. 229-235 (1996).
23. C. Brosseau, "Evolution of the Stokes parameters in optically anisotropic media," *Opt. Lett.* 20, 1221-1223 (1995).
24. C. Brosseau, C. R. Givens, and A. B. Kostinski, "Generalized trace condition on the Mueller-Jones polarization matrix," *J. Opt. Soc. Am. A* 10, 2248- 2251 (1993).
25. C. -J. Chen, A. Lien, and M. I. Nathan, "4x4 and 2x2 matrix formulations for the optics in stratified and biaxial media," *J. Opt. Soc. Am. A* 14, 3125-3134 (1997).
26. D. Miyazaki, M. Saito, Y. Sato, and K. Ikeuchi, "Determining surface orientations of transparent objects based on polarization degrees in visible and infrared wavelengths," *J. Opt. Soc. Am. A* 19, 687-694 (2002).
27. Eric Compain, Bernard Drevillon, Jean Huc, Jean Yves Parey and Jean Eric Bouree, "Complete Mueller matrix measurement with a single high frequency modulation". *Thin Solid Films*, volumes 313-314, pages 47-52 (1998).

28. E. S. Fry and G. W. Kattawar, "Relationships between elements of the Stokes matrix," *Appl. Opt.* 20, 2811-2814 (1981).
29. Farrell, Richard A.; Rouseff, Daniel; McCally, Russell L. "Propagation of polarized light through two- and three-layer anisotropic stacks". *Optical Society of America Journal*, Volume 22, Issue 9, pp. 1981-1992 (2005).
30. F Le Roy-Brehonnet et al. "Analysis of depolarizing optical targets by Mueller matrix formalism". *Pure Appl. Opt.* 6 385 (1997).
31. F. H. Yu and H. S. Kwok, "Comparison of extended Jones matrices for twisted nematic liquid-crystal displays at oblique angles of incidence," *J. Opt. Soc. Am. A* 16, 2772-2780 (1999).
32. F. Muhammad and C. S. Brown, "Lorentz Group Underpinnings for the Jones and Mueller Calculi", *Proc. SPIE* 2265 337 (1994).
33. H. B. Klein Brink and G. J. van Blokland, "Birefringence of the human foveal area assessed in vivo with Mueller-matrix ellipsometry", *J. Opt. Soc. Am. A*. vol. 5, No. 1 (1988).
34. H. Dong, P. Shum, M. Yan, J. Q. Zhou, G. X. Ning, Y. D. Gong, and C. Q. Wu, "Generalized Mueller matrix method for polarization mode dispersion measurement in a system with polarization-dependent loss or gain," *Opt. Express* 14, 5067-5072 (2006).
35. J. E. Hayden and S. D. Jacobs, "Automated spatially scanning ellipsometer for retardation measurements of transparent materials," *Appl. Opt.* 32, 6256-6263 (1993).
36. J. J. Gil, "Polarimetric characterization of light and media. Physical quantities involved in polarimetric phenomena". *The European Physical Journal Applied Physics*, Volume 40, Issue 1, pp.1-47 (2007).
37. J. J. Gil, "Characteristic properties of Mueller matrices," *J. Opt. Soc. Am. A* 17, 328-334 (2000).
38. J. M. Bueno, J. J. Hunter, C. J. Cookson, M. L. Kisilak, and M. C. W. Campbell, "Improved scanning laser fundus imaging using polarimetry," *J. Opt. Soc. Am. A* 24, 1337-1348 (2007).
39. J. M. Bueno, E. Berrio, M. Ozolinsh, and P. Artal, "Degree of polarization as an objective method of estimating scattering," *J. Opt. Soc. Am. A* 21, 1316-1321 (2004).
40. J. M. Bueno, "Reversibilidad óptica en polarización. Aplicación al ojo humano". *Revista Ver y Oír*, 2001 ENE-FEB; 18 (152), 9-16 (2001).
41. Juan Antonio Morales and Emilio Navarro. "Minkowskian description of polarized light and polarizers". *PACS: 42.25.Ja 42.79.Ci 03.30.+p. Phys. Rev. E* 67, 26605 (2003).
42. J. W. Hovenier, "Structure of a general pure Mueller matrix," *Appl. Opt.* 33, 8318-8324 (1994).
43. Khashayar Mehrany and Sina Khorasani. "Analytical solution of non-homogeneous anisotropic wave equations based on differential transfer matrices". *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 4 624 (2002).

44. K. Kim, L. Mandel, and E. Wolf, "Relationship between Jones and Mueller matrices for random media," *J. Opt. Soc. Am. A* 4, 433–437 (1987).
45. Krása, J.; Jiříčka, J.; Lokajíček, M. "Depolarization of light by an imperfect polarizer". *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, Volume 48, Issue 4, pp.3184-3186 (1993).
46. L. C. Meira-Belo and U. A. Leião, "Singular Polarization Eigenstates in Anisotropic Stratified Structures," *Appl. Opt.* 39, 2695-2704 (2000).
47. Mosiño J.F.; Barbosa-García O.; Meneses-Nava M.A.; Díaz-Torres L.A.; Rosa-Cruz E.D.I.; Vega-Durán J.T. "Anisotropic media with orthogonal eigenpolarizations". *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, Volume 4, Number 4 , pp. 419-423(5) (2002).
48. Mosiño J.F., A. Starodumov, O. Barbosa-García and V. N. Filippov, "Propagation of partially polarized light in dichroic and birefringent media". *Journal of optics. B, Quantum and semiclassical optics*, vol. 3, no 2, pp. S93-S258 (23 ref.), pp. S159-S165 (2001).
49. Mosiño J.F.; Barbosa-García O.; Starodumov A.; Díaz-Torres L.A.; Meneses-Nava M.A.; Vega-Durán J.T., "Evolution of partially polarized light through non-depolarizing anisotropic media". *Optics Communications*, Volume 173, Number 1, pp. 57-71(15) (2000).
50. M. R. Dennis, "A three-dimensional degree of polarization based on Rayleigh scattering," *J. Opt. Soc. Am. A* 24, 2065-2069 (2007).
51. M. W. Shute, C. S. Brown, and J. Jarzynski, "Polarization model for a helically wound optical fiber," *J. Opt. Soc. Am. A* 14, 3251-3261 (1997).
52. Puentes, Graciana; Voigt, Dirk; Aiello, Andrea; Woerdman, J. P. "Depolarizing power and polarization entropy of light scattering media: experiment and theory". eprint [arXiv:physics/0412096](https://arxiv.org/abs/physics/0412096) (2004).
53. R. A. Chipman, "Depolarization index and the average degree of polarization," *Appl. Opt.* 44, 2490-2495 (2005).
54. R. A. Farrell, D. Rouseff, and R. L. McCally, "Propagation of polarized light through two- and three-layer anisotropic stacks," *J. Opt. Soc. Am. A* 22, 1981-1992 (2005).
55. R. C. Jones, "A new calculus for the treatment of optical systems VI. Experimental determination of the matrix," *J. Opt. Soc. Am.* 37, 110- (1947).
56. R. Espinosa-Luna, "Degree of polarization as a criterion to obtain the nine bilinear constraints between the Mueller-Jones matrix elements," *Appl. Opt.* 46, 6047-6054 (2007).
57. R. Knighton and X. Huang, "Analytical methods for scanning laser polarimetry," *Opt. Express* 10, 1179-1189 (2002).

58. R. M. A. Azzam, "Propagation of partially polarized light through anisotropic media with or without depolarization: A differential  $4 \times 4$  matrix calculus," J. Opt. Soc. Am. 68, 1756-1767 (1978).
59. Sebahaddin ALPTEKİN, Haluk ŞAFAK. "Farklı Ortamlar için Jones-Mueller Matris Hesaplaması". CİLT 9/SAYI 2/2005/ISSN:1301-4048.
60. S. E. Segre, "Evolution of the polarization state for radiation propagating in a nonuniform, birefringent, optically active, and dichroic medium:the case of a magnetized plasma," J. Opt. Soc. Am. A 17, 95-100 (2000).
61. S. and A. V. Gopala Rao, "Polarization elements: a group-theoretical study," J. Opt. Soc. Am. A 18, 3130-3134 (2001).
62. S. Lu and R. A. Chipman, "Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition," J. Opt. Soc. Am. A 13, 1106-1113 (1996).
63. S. Lu and R. A. Chipman, "Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices," J. Opt. Soc. Am. A 11, 766-773 (1994).
64. S. N. Savenkov, O. I. Sydoruk, and R. S. Muttiah, "Eigenanalysis of dichroic, birefringent, and degenerate polarization elements: a Jones-calculus study," Appl. Opt. 46, 6700-6709 (2007).
65. S. N. Savenkov, O. I. Sydoruk, and R. S. Muttiah, "Conditions for polarization elements to be dichroic and birefringent," J. Opt. Soc. Am. A 22, 1447-1452 (2005).
66. Sun, Chia-Wei; Lu, Long-Sheng; Yang, C. C.; Kiang, Yean-Woei; Su, Ming-Jai, "Myocardial tissue characterization based on the time-resolved Stokes-Mueller formalism". Optics Express, vol. 10, Issue 23, p.1347 (2002).
67. T. Brixner, N. H. Damrauer, G. Krampert, P. Niklaus, and G. Gerber, "Adaptive shaping of femtosecond polarization profiles," J. Opt. Soc. Am. B 20, 878-881 (2003).
68. T. Tudor, "Dirac-algebraic approach to the theory of device operators in polarization optics," J. Opt. Soc. Am. A 20, 728-732 (2003).
69. T. Tudor, "Generalized observables in polarization optics," J. Phys. A 36, 9577-9590 (2003).
70. V. Sankaran, M. J. Everett, D. J. Maitland, and J. T. Walsh, Jr., "Comparison of polarized-light propagation in biological tissue and phantoms," Opt. Lett. 24, 1044-1046 (1999).
71. Y. A. Kravtsov, B. Bieg, and K. Y. Bliokh, "Stokes-vector evolution in a weakly anisotropic inhomogeneous medium," J. Opt. Soc. Am. A 24, 3388-3396 (2007).
72. Zwigelaar R. Wilson M. G. F. "Single Mueller matrix description of the propagation of degree of polarisation in a uniformly anisotropic single-mode optical fibre". IEE proceedings. Optoelectronics. vol. 141, no6, pp. 367-372 (1994).