



**CENTRO DE INVESTIGACIONES  
EN OPTICA, A.C.**

# **Diagnóstico mediante técnicas interferométricas de fotones no atenuados**

Tesis que para obtener el grado de  
*Maestro en Ciencias (Óptica)*

Presenta el

Ing. Paulino Vacas Jacques

Asesores:

Dra. Marija Strojnik Pogacar

Dr. Gonzalo Páez Padilla

León, Guanajuato

Agosto 2005

## RESUMEN

El control y diagnóstico de enfermedades es una fuente continua de gasto para cualquier país. En los Estados Unidos de Norteamérica se gastaron 400,000,000 dólares [Lakowicz, 1990], en la prevención y control de pacientes diabéticos, durante el año de 1994. Esto incita a la promoción de investigación aplicada con fines médicos. Además, cabe mencionar que una gran parte de las técnicas de control y diagnóstico médico son invasivas. Esto representa un inconveniente primordial en cuanto al paciente se refiere. La interferometría de fotones no atenuados, representa una opción novedosa para realizar diagnóstico médico no invasivo. La técnica es, potencialmente, de bajo costo para su implementación.

El principio de operación de la técnica se basa en la interacción de fotones no atenuados [Blanchard, 2000]. Es decir, aquéllos que atraviesan el tejido analizado sin ser absorbidos o esparcidos por el mismo. Las características ópticas de los tejidos dependen de la composición de éstos [Tuchin, 2000]. Por ejemplo, un tejido cerebral sano puede contener una cierta cantidad de lípidos, proteínas, sangre, etc., que determinan las propiedades de esparcimiento y absorción del mismo. Ahora pensemos que este tejido contiene un tumor. Las propiedades ópticas del tejido serán diferentes debido a la presencia del tumor. Por lo tanto, la cantidad de fotones no atenuados representará una métrica de la composición del tejido analizado. Es decir, a través del monitoreo de estos fotones podemos determinar, léase diagnosticar, el estado y calidad del tejido analizado.

Los dos procesos ópticos principales, que ocurren en la propagación de luz en tejido, son la absorción y el esparcimiento (procesos como la fluorescencia emergen, pero para nuestro análisis no son significativos) [Hollis, 2002]. De éstos, el primero impide que la totalidad de la luz llegue al plano de detección. Es decir, la absorción no genera perturbaciones adicionales al sistema. Por el contrario, el segundo de los procesos es más difícil de tratar.

El esparcimiento que se presenta en los tejidos es marcadamente frontal [Flock *et al*, 1987]. Esto quiere decir que los fotones esparcidos por la interacción (con lípidos por ejemplo), se

propagan casi en la misma dirección que los fotones que no sufrieron ninguna atenuación. Esto hace que las técnicas directas de medición, de las características de los tejidos, sean muy complicadas [van Staveren *et al*, 1991]. Nosotros proponemos una técnica indirecta para poder discernir entre fotones no atenuados y esparcidos.

El sistema que proponemos no es invasivo. Lo cual implica una mejor calidad de atención en el diagnóstico médico. Además, nos provee con una técnica alternativa y novedosa para la detección, tratamiento y diagnóstico de enfermedades.

El énfasis principal del trabajo es la implementación del dispositivo para aplicaciones biomédicas. Sin embargo, el análisis no es restringido para este ámbito de acción. La técnica representa una opción adicional para el control de calidad en la industria alimenticia, farmacéutica y petroquímica.

## RECONOCIMIENTOS

La elaboración de cada página de esta tesis implicó el apoyo de mucha gente. A todos ustedes les manifiesto mi agradecimiento sincero. En especial extendiendo mi gratitud a los doctores Marija Strojnik, Gonzalo Páez y Manuel Servín por la oportunidad y confianza que me han brindado. De igual manera quisiera agradecer a todos los compañeros del centro de investigaciones en óptica por su apoyo.

Más aún, quisiera hacer mención del personal que facilitó mi estancia en la institución. En primer plano me gustaría agradecer al personal de la biblioteca, quienes siempre me atendieron muy cordialmente. De igual manera quisiera agradecer al personal de formación académica por su apoyo durante la maestría. En la misma línea me gustaría agradecer al personal de servicios generales por facilitar el proceso de aprendizaje. Si he omitido a alguien en esta mención les pido una disculpa. A todos usted mil gracias.

En lo personal quisiera agradecer al Dr. Moisés Cywiak por instar en mí una actitud de crítica constructiva. De igual manera me gustaría agradecer a todos los investigadores que, terca-mente, molesté para discutir temas relacionados (y no relacionados) con mi tesis. Sin la aportación de cada uno de ustedes, este trabajo no hubiera sido posible.

Por último quisiera agradecer al consejo nacional de ciencia y tecnología (CONACyT) por el apoyo económico conferido.

# CONTENIDO

<b>RESUMEN .....</b>	<b>1</b>
<b>RECONOCIMIENTOS .....</b>	<b>3</b>
<b>CONTENIDO.....</b>	<b>4</b>
<b>TABLA DE FIGURAS .....</b>	<b>9</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Objetivo y Motivación .....</b>	<b>13</b>
Fig. 1.1 Diagrama esquemático de la interacción luz-tejido .....	14
<b>1.2 Estado del arte en el diagnóstico médico .....</b>	<b>15</b>
<b>1.2.1 Radiología mediante la utilización de rayos X.....</b>	<b>15</b>
Fig. 1.2 Figura esquemática de un sistema de rayos X [http Science].....	16
Fig. 1.3 Imagen de rayos X de un cráneo humano [http Teachnet] .....	17
<b>1.2.2 Tomografía computarizada por medio del uso de rayos X.....</b>	<b>17</b>
Fig. 1.4 Diagrama esquemático de un sistema de barrido mediante CT [Ketcham <i>et al.</i> , 2001].....	18
Fig. 1.5 Diagnóstico médico del cerebro utilizando CT [http Brighamrad] .....	19
<b>1.2.3 Técnicas ultrasónicas.....</b>	<b>19</b>
Fig. 1.6 Ultrasonido de revisión a un feto nonato [http Cam].....	20
<b>1.2.4 Resonancia magnética .....</b>	<b>21</b>
Fig. 1.7 Barrido transversal mediante la utilización de la MRI [Plotkin <i>et al.</i> , 2005] .....	21
<b>1.2.5 Métodos que utilizan radioisótopos.....</b>	<b>22</b>
<b>1.2.5.1 Tomografía computarizada por emisión única de fotón .....</b>	<b>23</b>
Fig. 1.8 Distribución obtenida mediante la técnica de SPECT [Owens <i>et al.</i> , 2001] .....	23
<b>1.2.5.2 Tomografía por emisión de positrones .....</b>	<b>23</b>
Fig. 1.9 Barrido transversal mediante la utilización de la PET [http Somersetmedical].....	24
<b>1.3 Estructura de la tesis.....</b>	<b>25</b>
<b>2 PROPAGACIÓN DE LUZ EN TEJIDOS.....</b>	<b>27</b>
<b>2.1 Absorción de luz.....</b>	<b>28</b>
Fig. 2.1 Atenuación de la luz en un medio absorbente .....	28
<b>2.1.1 Onda plana en un medio conductivo .....</b>	<b>28</b>
<b>2.1.2 Onda homogénea e inhomogénea.....</b>	<b>33</b>
<b>2.1.3 La ley de Lambert-Bouguer y su interpretación electromagnética .....</b>	<b>35</b>
<b>2.1.4 Características de absorción en los tejidos.....</b>	<b>37</b>
<b>2.1.4.1 Agua.....</b>	<b>38</b>
Fig. 2.2 Espectro de absorción del agua [Hollis, 2002] .....	38
<b>2.1.4.2 Lípidos .....</b>	<b>39</b>
Fig. 2.3 Espectro de absorción de algunos lípidos (grasa de puerco) [Hollis, 2002].....	39
<b>2.1.4.3 Hemoglobina.....</b>	<b>40</b>
Fig. 2.4 Espectro de absorción para la oxi- y deoxi-hemoglobina [Cope, 1991].....	40
<b>2.1.4.4 Melanina .....</b>	<b>41</b>
Fig. 2.5 Espectro de absorción para la melanina [Cope, 1991].....	41
<b>2.1.4.5 Otros compuestos.....</b>	<b>42</b>

	Fig. 2.6 Absorción espectral de algunos compuestos en la piel humana [Sinichkin <i>et al</i> , 2002].....	42
<b>2.2</b>	<b>Esparcimiento de luz.....</b>	<b>43</b>
	Fig. 2.7 Atenuación de la luz en un medio esparcidor .....	43
2.2.1	<i>Solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas.....</i>	44
2.2.2	<i>Interpretación del medio esparcidor como índice de refracción complejo.....</i>	50
	Fig. 2.8 Esquema del problema de esparcimiento .....	54
<b>2.3</b>	<b>Pérdidas de polarización y coherencia por esparcimiento.....</b>	<b>58</b>
2.3.1	<i>Cambios de polarización en el frente de onda esparcido.....</i>	59
	Fig. 2.9 Interacción luz-partícula y definición del ángulo de esparcimiento .....	59
2.3.2	<i>Pérdidas de coherencia en el frente de onda esparcido.....</i>	61
	Fig. 2.10 Diagrama del esparcimiento generado por un volumen .....	67
<b>3</b>	<b>TÉCNICAS INTERFEROMÉTRICAS .....</b>	<b>72</b>
<b>3.1</b>	<b>Introducción.....</b>	<b>73</b>
	Fig. 3.1 Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder .....	73
<b>3.2</b>	<b>Propagación de Fresnel .....</b>	<b>74</b>
	Fig. 3.2 Diagrama esquemático para la obtención de la relación de Fresnel .....	76
3.2.1	<i>Transformada de Fourier de una función Gaussiana compleja.....</i>	79
	Fig. 3.3 Contorno propuesto para resolver la integral 3.2.14.....	80
3.2.2	<i>Propagación de un frente de onda Gaussiano.....</i>	83
	Fig. 3.4 Configuración para la propagación de un haz Gaussiano .....	83
<b>3.3</b>	<b>Interferómetro Mach-Zehnder .....</b>	<b>85</b>
	Fig. 3.5 Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados .....	85
3.3.1	<i>Localización de la cintura del láser.....</i>	86
	Fig. 3.6 Arreglo utilizado para determinar la localización de la cintura del haz.....	87
	Fig. 3.7 Perfilómetro para determinar el diámetro del haz Gaussiano [Thorlabs A, 2003] .....	88
	Fig. 3.8 Distribución experimental del frente de onda propagado.....	89
3.3.2	<i>Propagación del frente de onda en el interferómetro.....</i>	90
	Fig. 3.9 Diagrama esquemático del interferómetro Mach-Zehnder .....	91
	Fig. 3.10 Transmitancia introducida a un frente de onda por un componente desalineado .....	92
3.3.2.1	<i>Propagación generalizada del haz.....</i>	94
3.3.3	<i>Resumen de distribuciones en los planos de propagación .....</i>	96
	Fig. 3.11 Planos de propagación en el interferómetro .....	96
<b>3.4</b>	<b>Patrones de interferencia, alineación y filtraje .....</b>	<b>100</b>
	Fig. 3.12 Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder .....	100
	Fig. 3.13 Sistema desalineado en una y dos direcciones respectivamente.....	102
	Fig. 3.14 Gran diferencia de camino óptico y sistema bien alineado.....	102
3.4.1	<i>Análisis del sistema óptico para la alineación óptima .....</i>	103
	Fig. 3.15 Importancia de la alineación en el sistema óptico .....	103
	Fig. 3.16 Datos prácticos del arreglo experimental .....	104
	Fig. 3.17 Arreglo experimental implementado en el laboratorio .....	105
	Fig. 3.18 Interferogramas para una desalineación en la dirección <i>y</i> .....	105
	Fig. 3.19 Interferogramas para una desalineación en ambas direcciones .....	106
	Fig. 3.20 Interferograma para una diferencia de camino óptico grande .....	107
	Fig. 3.21 Interferogramas para la condición ideal de alineación .....	107
3.4.2	<i>Filtraje del sistema óptico .....</i>	108
	Fig. 3.22 Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano .....	108
	Fig. 3.23 Diagrama esquemático del arreglo experimental con filtro espacial .....	109
3.4.2.1	<i>Filtro espacial con transmitancia Gaussiana .....</i>	110
	Fig. 3.24 Interacción del haz con el filtro espacial .....	110
3.4.2.2	<i>Apertura de aguja circular como filtro espacial.....</i>	111

Fig. 3.25	Configuración de un filtro de aguja convencional.....	111
Fig. 3.26	Arreglo experimental con apertura de aguja circular.....	114
Fig. 3.27	Solución numérica de la relación integral involucrada en 3.4.13 .....	114
Fig. 3.28	Comportamiento de la integral 3.4.14 para $a \rightarrow \infty$ y $\vartheta \rightarrow 0$ .....	115
Fig. 3.29	Solución analítica de la relación integral involucrada en 3.4.13 .....	117
Fig. 3.30	Comparación entre la solución numérica y analítica para la integral 3.4.14 .....	117
Fig. 3.31	Diagrama esquemático del arreglo experimental con apertura de aguja circular .....	118
Fig. 3.32	Distribución de intensidad para el arreglo con filtro de aguja circular.....	119
Fig. 3.33	Aproximación del orden central de difracción a una Gaussiana.....	119
Fig. 3.34	Patrones de difracción para determinar los parámetros del nuevo frente de onda.....	120
Fig. 3.35	Función para determinar el radio en la cintura del haz.....	121
Fig. 3.36	Patrón de difracción para comparar el método exacto con la aproximación .....	122
3.4.3	<i>Alineación del interferómetro utilizando el filtro de aguja circular</i> .....	123
Fig. 3.37	Arreglo experimental con el filtro espacial implementado.....	123
Fig. 3.38	Comportamiento del interferómetro desalineado en la dirección x .....	124
Fig. 3.39	Comportamiento del interferómetro desalineado en ambas direcciones .....	124
Fig. 3.40	Comportamiento teórico y experimental del interferómetro alineado .....	125
Fig. 3.41	Comportamiento del interferómetro alineado sin filtro de aguja circular.....	125
<b>3.5</b>	<b>Conclusiones del capítulo 3 .....</b>	<b>127</b>
<b>4</b>	<b>INTERFEROMETRÍA HETERODINA.....</b>	<b>128</b>
<b>4.1</b>	<b>Configuración dinámica del interferómetro.....</b>	<b>129</b>
Fig. 4.1	Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta espacial .....	129
Fig. 4.2	Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta dinámica .....	131
Fig. 4.3	Arreglo experimental del interferómetro con el modulador temporal .....	132
Fig. 4.4	Efecto generado mediante la inclusión del modulador temporal.....	132
<b>4.2</b>	<b>Interferómetro Mach-Zehnder heterodino .....</b>	<b>133</b>
Fig. 4.5	Configuración Mach-Zehnder heterodina.....	134
4.2.1	<i>Comportamiento teórico del interferómetro heterodino.....</i>	<i>137</i>
Fig. 4.6	Función temporal triangular .....	137
Fig. 4.7	Desempeño ideal del interferómetro heterodino.....	139
Fig. 4.8	Desalineación generada por el dispositivo modulador temporal .....	140
<b>4.3</b>	<b>Desempeño y optimización del modulador temporal .....</b>	<b>141</b>
4.3.1	<i>El modulador temporal.....</i>	<i>142</i>
Fig. 4.9	Modulador temporal del interferómetro [Thorlabs, 2001].....	142
Fig. 4.10	Descripción de código para actuadores piezoeléctricos [NEC, 2004].....	143
Fig. 4.11	Características de histéresis para el actuador, modelo AE0505D16 [NEC, 2004].....	144
Fig. 4.12	Respuesta temporal para piezoeléctricos modelo AE0505D16 [NEC, 2004].....	145
Fig. 4.13	Controlador electrónico para el modulador temporal [Thorlabs B, 2003].....	146
4.3.2	<i>Desempeño del arreglo heterodino.....</i>	<i>147</i>
Fig. 4.14	Configuración del modulador temporal para el arreglo experimental .....	148
Fig. 4.15	Comportamiento experimental del arreglo dinámico descompensado .....	150
Fig. 4.16	Comportamiento analítico del arreglo dinámico descompensado .....	151
Fig. 4.17	Comportamiento experimental del arreglo dinámico compensado .....	152
Fig. 4.18	Comportamiento analítico del arreglo dinámico compensado.....	153
<b>4.4</b>	<b>Respuesta temporal del arreglo interferométrico.....</b>	<b>154</b>
4.4.1	<i>Esquema de detección generalizado.....</i>	<i>155</i>
Fig. 4.19	Interferómetro heterodino con sistema de detección .....	155
Fig. 4.20	Configuración generalizada para el detector .....	156
4.4.2	<i>Arreglo dinámico con detector infinito.....</i>	<i>158</i>
Fig. 4.21	Diagrama esquemático para un detector infinito .....	158
4.4.3	<i>Desempeño temporal del arreglo interferométrico .....</i>	<i>162</i>
Fig. 4.22	Arreglo experimental con acercamiento al sistema de detección .....	163

Fig. 4.23	Responsividad del detector de silicio implementado en el arreglo.....	163
Fig. 4.24	Diagrama del radiómetro implementado en el arreglo [Newport, 1992 A].....	164
Fig. 4.25	Comportamiento teórico con señal triangular de referencia.....	166
Fig. 4.26	Comportamiento teórico con señal cuadrada de referencia.....	166
Fig. 4.27	Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (voltaje nominal).....	167
Fig. 4.28	Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (incremento en voltaje).....	168
4.4.4	<i>La visibilidad y sus consecuencias en el modelo matemático</i> .....	168
Fig. 4.29	Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático.....	169
<b>4.5</b>	<b>Conclusiones del capítulo 4</b> .....	<b>172</b>
<b>5</b>	<b>INTERFEROMETRÍA DE FOTONES NO ATENUADOS</b>	<b>174</b>
<b>5.1</b>	<b>Los fundamentos del diagnóstico interferométrico</b> .....	<b>175</b>
Fig. 5.1	Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder heterodina.....	175
Fig. 5.2	Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático.....	178
Fig. 5.3	Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados.....	179
<b>5.2</b>	<b>Interferometría de fotones no atenuados</b> .....	<b>180</b>
Fig. 5.4	Efecto generalizado de la muestra en el haz lumínico.....	180
Fig. 5.5	Celda de cuarzo utilizada para las pruebas experimentales [Starna, 2005].....	182
5.2.1	<i>Respuesta espacial del interferómetro de fotones no atenuados</i> .....	183
Fig. 5.6	Nomenclatura utilizada para el análisis del interferómetro.....	184
Fig. 5.7	Sección del interferómetro con la muestra.....	185
5.2.2	<i>Respuesta espacio-temporal del interferómetro de fotones no atenuados</i> .....	189
Fig. 5.8	Interferómetro Mach-Zehnder con el modulador temporal.....	189
Fig. 5.9	Sección del interferómetro heterodino con la muestra.....	190
5.2.3	<i>Respuesta temporal del interferómetro de fotones no atenuados</i> .....	192
5.2.3.1	Visibilidad como métrica principal de diagnóstico.....	193
<b>5.3</b>	<b>Desempeño del interferómetro de fotones no atenuados</b> .....	<b>196</b>
5.3.1	<i>Respuesta teórica del interferómetro de fotones no atenuados</i> .....	197
Fig. 5.10	Diagrama esquemático experimental del interferómetro.....	198
Fig. 5.11	Respuesta óptima para el arreglo mostrado en la figura 5.10.....	199
Fig. 5.12	Visibilidad como función del coeficiente de atenuación.....	200
Fig. 5.13	Diagrama del interferómetro con la implementación del polarizador.....	202
Fig. 5.14	Comportamiento del sistema con un polarizador en el brazo de la muestra.....	203
5.3.1.1	Condiciones que deterioran la visibilidad del interferómetro.....	204
Fig. 5.15	Deterioro en visibilidad por diferencias en diámetros de los haces.....	205
Fig. 5.16	Comportamiento del sistema debido al deterioro por diferencias en diámetros.....	206
Fig. 5.17	Deterioro en visibilidad por desalineaciones en el sistema óptico.....	207
Fig. 5.18	Comportamiento experimental debido al deterioro por desalineaciones.....	208
Fig. 5.19	Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano.....	209
5.3.2	<i>Arreglo y resultados para el interferómetro de fotones no atenuados</i> .....	210
5.3.2.1	Arreglo experimental y preparación de muestras.....	210
Fig. 5.20	Arreglo experimental para el interferómetro de fotones no atenuados.....	211
Fig. 5.21	Homogenización del simil de tejido.....	212
5.3.2.2	Relación entre concentración y coeficiente de atenuación.....	213
Fig. 5.22	Relación experimental entre el coeficiente de atenuación y la concentración.....	215
5.3.2.3	Desempeño experimental del interferómetro de fotones no atenuados.....	216
Fig. 5.23	Comportamiento experimental para incrementos en la atenuación de la muestra.....	217
Fig. 5.24	Comprobación del diagnóstico mediante interferometría de fotones no atenuados.....	219
<b>5.4</b>	<b>Análisis de incertidumbres en el sistema de detección</b> .....	<b>219</b>
Fig. 5.25	Obtención del mismo coeficiente de atenuación para dos visibilidades distintas.....	220
<b>5.5</b>	<b>Conclusiones del capítulo 5</b> .....	<b>231</b>



<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>233</b>
<b>TRABAJO A FUTURO .....</b>	<b>237</b>
<b>A RELACIÓN DE FRESNEL: SIMETRÍA RADIAL.....</b>	<b>238</b>
Fig. A.1 Relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas .....	238
Fig. A.2 Evaluación gráfica de la expresión A.10 .....	242
Fig. A.3 Evaluación gráfica de la expresión A.15 .....	243
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>246</b>

## Tabla de Figuras

Fig. 1.1 Diagrama esquemático de la interacción luz-tejido.....	14
Fig. 1.2 Figura esquemática de un sistema de rayos X [http Science].....	16
Fig. 1.3 Imagen de rayos X de un cráneo humano [http Teachnet].....	17
Fig. 1.4 Diagrama esquemático de un sistema de barrido mediante CT [Ketcham <i>et al.</i> , 2001].....	18
Fig. 1.5 Diagnóstico médico del cerebro utilizando CT [http Brighamrad].....	19
Fig. 1.6 Ultrasonido de revisión a un feto nonato [http Cam].....	20
Fig. 1.7 Barrido transversal mediante la utilización de la MRI [Plotkin <i>et al.</i> , 2005].....	21
Fig. 1.8 Distribución obtenida mediante la técnica de SPECT [Owens <i>et al.</i> , 2001].....	23
Fig. 1.9 Barrido transversal mediante la utilización de la PET [http Somersetmedical].....	24
Fig. 2.1 Atenuación de la luz en un medio absorbente.....	28
Fig. 2.2 Espectro de absorción del agua [Hollis, 2002].....	38
Fig. 2.3 Espectro de absorción de algunos lípidos (grasa de puerco) [Hollis, 2002].....	39
Fig. 2.4 Espectro de absorción para la oxi- y deoxi-hemoglobina [Cope, 1991].....	40
Fig. 2.5 Espectro de absorción para la melanina [Cope, 1991].....	41
Fig. 2.6 Absorción espectral de algunos compuestos en la piel humana [Sinichkin <i>et al.</i> , 2002].....	42
Fig. 2.7 Atenuación de la luz en un medio esparcidor.....	43
Fig. 2.8 Esquema del problema de esparcimiento.....	54
Fig. 2.9 Interacción luz-partícula y definición del ángulo de esparcimiento.....	59
Fig. 2.10 Diagrama del esparcimiento generado por un volumen.....	67
Fig. 3.1 Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder.....	73
Fig. 3.2 Diagrama esquemático para la obtención de la relación de Fresnel.....	76
Fig. 3.3 Contorno propuesto para resolver la integral 3.2.14.....	80
Fig. 3.4 Configuración para la propagación de un haz Gaussiano.....	83
Fig. 3.5 Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados.....	85
Fig. 3.6 Arreglo utilizado para determinar la localización de la cintura del haz.....	87
Fig. 3.7 Perfilómetro para determinar el diámetro del haz Gaussiano [Thorlabs A, 2003].....	88
Fig. 3.8 Distribución experimental del frente de onda propagado.....	89
Fig. 3.9 Diagrama esquemático del interferómetro Mach-Zehnder.....	91
Fig. 3.10 Transmitancia introducida a un frente de onda por un componente desalineado.....	92
Fig. 3.11 Planos de propagación en el interferómetro.....	96
Fig. 3.12 Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder.....	100
Fig. 3.13 Sistema desalineado en una y dos direcciones respectivamente.....	102
Fig. 3.14 Gran diferencia de camino óptico y sistema bien alineado.....	102
Fig. 3.15 Importancia de la alineación en el sistema óptico.....	103
Fig. 3.16 Datos prácticos del arreglo experimental.....	104
Fig. 3.17 Arreglo experimental implementado en el laboratorio.....	105
Fig. 3.18 Interferogramas para una desalineación en la dirección $y$ .....	105
Fig. 3.19 Interferogramas para una desalineación en ambas direcciones.....	106
Fig. 3.20 Interferograma para una diferencia de camino óptico grande.....	107
Fig. 3.21 Interferogramas para la condición ideal de alineación.....	107
Fig. 3.22 Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano.....	108
Fig. 3.23 Diagrama esquemático del arreglo experimental con filtro espacial.....	109
Fig. 3.24 Interacción del haz con el filtro espacial.....	110
Fig. 3.25 Configuración de un filtro de aguja convencional.....	111
Fig. 3.26 Arreglo experimental con apertura de aguja circular.....	114
Fig. 3.27 Solución numérica de la relación integral involucrada en 3.4.13.....	114

Fig. 3.28	Comportamiento de la integral 3.4.14 para $a \rightarrow \infty$ y $\vartheta \rightarrow 0$ .....	115
Fig. 3.29	Solución analítica de la relación integral involucrada en 3.4.13 .....	117
Fig. 3.30	Comparación entre la solución numérica y analítica para la integral 3.4.14 .....	117
Fig. 3.31	Diagrama esquemático del arreglo experimental con apertura de aguja circular .....	118
Fig. 3.32	Distribución de intensidad para el arreglo con filtro de aguja circular .....	119
Fig. 3.33	Aproximación del orden central de difracción a una Gaussiana .....	119
Fig. 3.34	Patrones de difracción para determinar los parámetros del nuevo frente de onda.....	120
Fig. 3.35	Función para determinar el radio en la cintura del haz.....	121
Fig. 3.36	Patrón de difracción para comparar el método exacto con la aproximación .....	122
Fig. 3.37	Arreglo experimental con el filtro espacial implementado.....	123
Fig. 3.38	Comportamiento del interferómetro desalineado en la dirección x .....	124
Fig. 3.39	Comportamiento del interferómetro desalineado en ambas direcciones .....	124
Fig. 3.40	Comportamiento teórico y experimental del interferómetro alineado .....	125
Fig. 3.41	Comportamiento del interferómetro alineado sin filtro de aguja circular .....	125
Fig. 4.1	Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta espacial .....	129
Fig. 4.2	Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta dinámica .....	131
Fig. 4.3	Arreglo experimental del interferómetro con el modulador temporal .....	132
Fig. 4.4	Efecto generado mediante la inclusión del modulador temporal.....	132
Fig. 4.5	Configuración Mach-Zehnder heterodina .....	134
Fig. 4.6	Función temporal triangular .....	137
Fig. 4.7	Desempeño ideal del interferómetro heterodino.....	139
Fig. 4.8	Desalineación generada por el dispositivo modulador temporal .....	140
Fig. 4.9	Modulador temporal del interferómetro [Thorlabs, 2001] .....	142
Fig. 4.10	Descripción de código para actuadores piezoeléctricos [NEC, 2004].....	143
Fig. 4.11	Características de histéresis para el actuador, modelo AE0505D16 [NEC, 2004].....	144
Fig. 4.12	Respuesta temporal para piezoeléctricos modelo AE0505D16 [NEC, 2004] .....	145
Fig. 4.13	Controlador electrónico para el modulador temporal [Thorlabs B, 2003] .....	146
Fig. 4.14	Configuración del modulador temporal para el arreglo experimental .....	148
Fig. 4.15	Comportamiento experimental del arreglo dinámico descompensado .....	150
Fig. 4.16	Comportamiento analítico del arreglo dinámico descompensado .....	151
Fig. 4.17	Comportamiento experimental del arreglo dinámico compensado .....	152
Fig. 4.18	Comportamiento analítico del arreglo dinámico compensado .....	153
Fig. 4.19	Interferómetro heterodino con sistema de detección .....	155
Fig. 4.20	Configuración generalizada para el detector .....	156
Fig. 4.21	Diagrama esquemático para un detector infinito .....	158
Fig. 4.22	Arreglo experimental con acercamiento al sistema de detección .....	163
Fig. 4.23	Responsividad del detector de silicio implementado en el arreglo.....	163
Fig. 4.24	Diagrama del radiómetro implementado en el arreglo [Newport, 1992 A].....	164
Fig. 4.25	Comportamiento teórico con señal triangular de referencia .....	166
Fig. 4.26	Comportamiento teórico con señal cuadrada de referencia .....	166
Fig. 4.27	Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (voltaje nominal).....	167
Fig. 4.28	Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (incremento en voltaje).....	168
Fig. 4.29	Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático .....	169
Fig. 5.1	Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder heterodina .....	175
Fig. 5.2	Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático .....	178
Fig. 5.3	Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados .....	179
Fig. 5.4	Efecto generalizado de la muestra en el haz lumínico.....	180
Fig. 5.5	Celda de cuarzo utilizada para las pruebas experimentales [Starna, 2005].....	182
Fig. 5.6	Nomenclatura utilizada para el análisis del interferómetro .....	184
Fig. 5.7	Sección del interferómetro con la muestra .....	185
Fig. 5.8	Interferómetro Mach-Zehnder con el modulador temporal .....	189

Fig. 5.9	Sección del interferómetro heterodino con la muestra .....	190
Fig. 5.10	Diagrama esquemático experimental del interferómetro.....	198
Fig. 5.11	Respuesta óptima para el arreglo mostrado en la figura 5.10.....	199
Fig. 5.12	Visibilidad como función del coeficiente de atenuación.....	200
Fig. 5.13	Diagrama del interferómetro con la implementación del polarizador .....	202
Fig. 5.14	Comportamiento del sistema con un polarizador en el brazo de la muestra.....	203
Fig. 5.15	Deterioro en visibilidad por diferencias en diámetros de los haces.....	205
Fig. 5.16	Comportamiento del sistema debido al deterioro por diferencias en diámetros.....	206
Fig. 5.17	Deterioro en visibilidad por desalineaciones en el sistema óptico .....	207
Fig. 5.18	Comportamiento experimental debido al deterioro por desalineaciones.....	208
Fig. 5.19	Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano .....	209
Fig. 5.20	Arreglo experimental para el interferómetro de fotones no atenuados.....	211
Fig. 5.21	Homogenización del símil de tejido .....	212
Fig. 5.22	Relación experimental entre el coeficiente de atenuación y la concentración.....	215
Fig. 5.23	Comportamiento experimental para incrementos en la atenuación de la muestra.....	217
Fig. 5.24	Comprobación del diagnóstico mediante interferometría de fotones no atenuados .....	219
Fig. 5.25	Obtención del mismo coeficiente de atenuación para dos visibilidades distintas .....	220
Fig. A.1	Relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas .....	238
Fig. A.2	Evaluación gráfica de la expresión A.10 .....	242
Fig. A.3	Evaluación gráfica de la expresión A.15 .....	243

# 1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo pone de manifiesto los objetivos de la tesis. El primer objetivo de la tesis es demostrar la interferometría de fotones no atenuados como técnica de diagnóstico y control. El segundo objetivo de la tesis consiste en el desarrollo de un modelo matemático. Dicho modelo abarcará tres escenarios distintos. Más aún, éste sustentará el principio de la interferometría de fotones no atenuados. El último objetivo de esta tesis será la comprobación experimental del comportamiento previsto por el modelo.

En la sección 1.1 presentamos un breve resumen del trabajo en cuestión. Esta sección enfatiza las ventajas del arreglo interferométrico, para discernir los fotones no atenuados que atraviesan un tejido. En la sección 1.2 indicamos el estado del arte en las aplicaciones ópticas para el diagnóstico médico. Además establecemos la necesidad del desarrollo de un método alternativo para diagnóstico médico. Por último, en la sección 1.3 presentamos los detalles importantes de capítulos subsecuentes. Esto asegurará que se cumplan los objetivos de la tesis.

## 1.1 Objetivo y Motivación

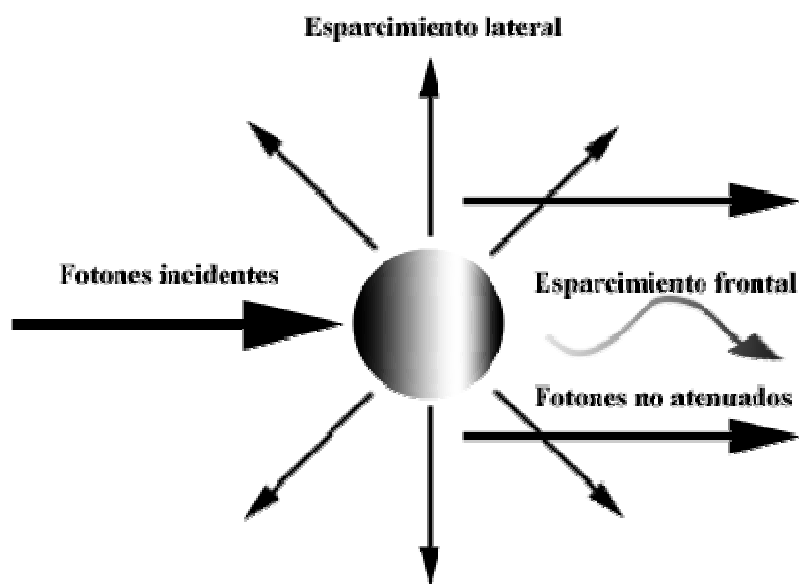
El objetivo de este proyecto es la demostración de la interferometría de fotones no atenuados como técnica para diagnóstico. Un modelo matemático sustentará el principio de funcionamiento de la técnica. Mientras que el arreglo experimental comprobará el comportamiento previsto por la teoría.

La motivación principal de esta tesis es ampliar las técnicas de diagnóstico (haciendo énfasis especial en aplicaciones médicas). Un inconveniente primordial, en el diagnóstico y control médico convencionales, es que los métodos utilizados son invasivos. Por ejemplo, los pacientes diabéticos no monitorean su estado de glucosa, tan frecuentemente como se desearía, debido a las incomodidades del proceso [Lakowicz, 1990]. Estas razones (y otras no mencionadas) han formado la motivación primordial para desarrollar métodos de diagnóstico no invasivos.

La interferometría de fotones no atenuados es una técnica no invasiva. Por tanto, esta técnica representa un medio óptimo para el control y diagnóstico médico. Además, los costos de implementación de la técnica prometen ser bajos. Sin embargo, esta afirmación solamente se puede comprobar mediante la construcción de prototipos. Estas dos características del método propuesto conforman las cualidades o ventajas principales.

La interacción luz-tejido genera el fenómeno de fotones no atenuados [Blanchard, 2000]. La absorción de radiación infrarroja cercana, en tejidos biológicos, es relativamente pequeña [Fantini *et al.*, 2002]. Lo anterior permite a la luz penetrar hasta la región de interés. Sin embargo, la presencia marcada del esparcimiento en los tejidos dificulta su diagnóstico [Cheong *et al.*, 1990]. Además el esparcimiento que generan la mayoría de los tejidos es predominantemente frontal [Jacques, 1987]. Esta condición dificulta la determinación de las características del tejido. A través de la técnica propuesta, eliminamos la información generada por los procesos de esparcimiento en el tejido. En la figura 1.1 mostramos, esquemáticamente, la in-

interacción luz-tejido. Obsérvese que en esta figura se muestran la dirección de los fotones no atenuados, esparcidos lateralmente y esparcidos frontalmente.



**Fig. 1.1** Diagrama esquemático de la interacción luz-tejido

La ventaja principal del método propuesto es su habilidad para discernir entre fotones esparcidos frontalmente y no atenuados. El diagnóstico del tejido se basará en la cantidad de fotones no atenuados por el mismo. Por ejemplo, entre menor sea la cantidad de lípidos en un tejido, la cantidad de fotones no atenuados será mayor. A su vez, esto generará un incremento en la visibilidad del dispositivo propuesto. Mediante esta variación determinaremos las características del tejido analizado. Es decir, de esta manera lograremos el objetivo principal de la tesis.

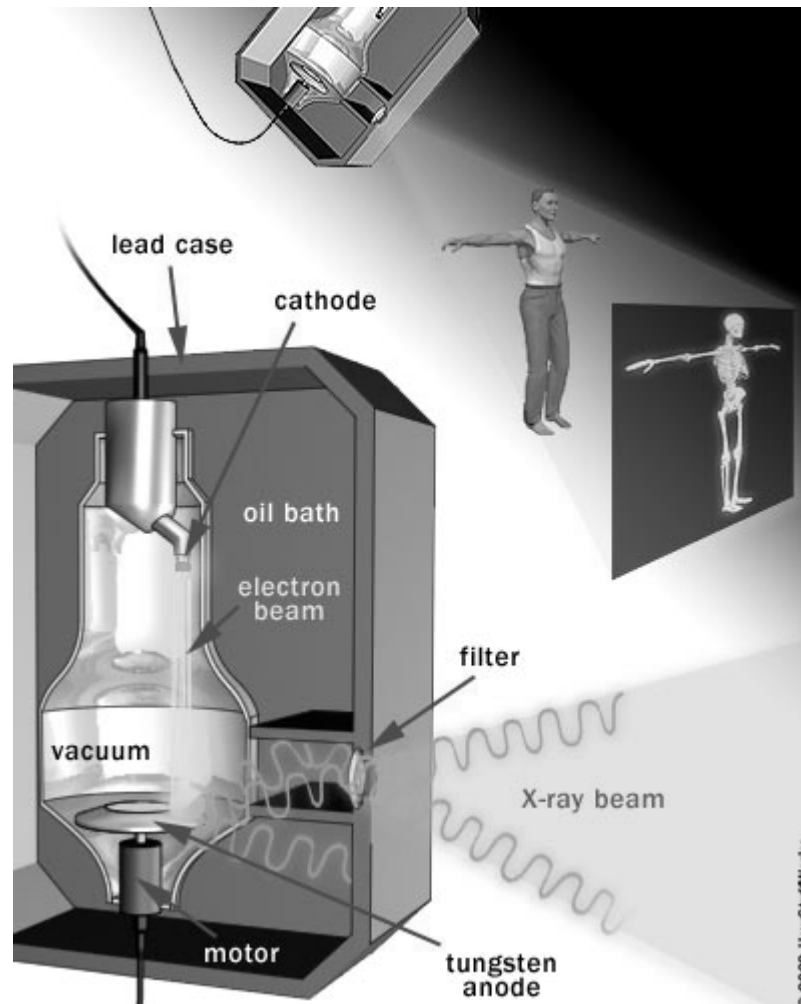
## 1.2 Estado del arte en el diagnóstico médico

Existen técnicas de diagnóstico médico que se encuentran bien establecidas. En esta sección presentaremos, de modo conciso, los métodos clínicamente más importantes. Otros textos presentan a mayor detalle los temas que aquí tratamos [Webb, 1990] o [Curry, 1990].

### *1.2.1 Radiología mediante la utilización de rayos X*

Los rayos X fueron descubiertos en 1895 por W. C. Röntgen. Su aplicación potencial, en el ámbito del diagnóstico médico, fue reconocida inmediatamente [Glasser, 1934]. Los rayos X penetran en la mayoría de los tejidos biológicos. La atenuación que sufren en esta interacción es pequeña. Por lo tanto, éstos nos proveen con un medio sencillo para generar proyecciones, imágenes y sombras del cuerpo humano. Una radiografía representa la distribución de fotones (de rayos X) que han sido transmitidos a través del paciente. Los rayos X presentan una proyección bidimensional de las propiedades atenuantes del tejido (a lo largo de la dirección de propagación de los rayos). Las interacciones principales que causan la atenuación de los fotones son la absorción y el esparcimiento. Este escenario, en los procesos de atenuación, es recurrente en las diferentes técnicas de diagnóstico médico. En la figura 1.2 se muestra un sistema simplificado de rayos X.





**Fig. 1.2** Figura esquemática de un sistema de rayos X [http Science]

Los fotones son absorbidos, esparcidos o transmitidos sin interacción. La mayoría de los fotones esparcidos se eliminan mediante un dispositivo anti-esparcimiento (por ejemplo una rejilla de plomo). Además existen diversos sistemas detectores. Uno de estos sistemas es el de película-pantalla. Otro, bien conocido, es la placa fotográfica de rayos X. Un tercer esquema de detección, es el intensificador de imagen.

Por ejemplo, los huesos producen atenuación más marcada que los tejidos suaves. Una sección transversal fotoeléctrica y densidad más grandes producen este efecto. Gracias a este incremento en la atenuación, el contraste resultante permite que los huesos (estén dañados o no) sean visualizados mediante esta técnica. En la figura 1.3 mostramos una imagen de rayos X que pone de manifiesto este fenómeno.



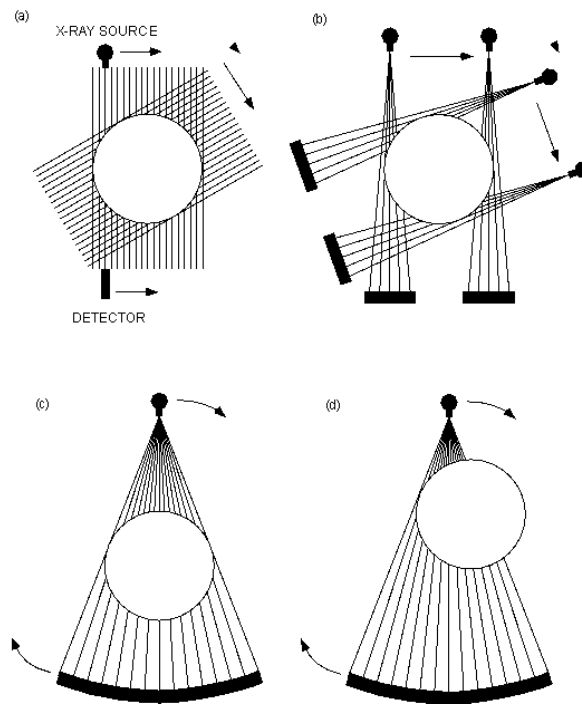
**Fig. 1.3** Imagen de rayos X de un cráneo humano [[http Teachnet](http://Teachnet)]

Existe una desventaja en cuanto a la energía que conlleva la radiación X. El rango energético, para los fotones de rayos X, oscila entre 17-150 keV. La interacción continua, con este tipo de radiación, causa trastornos fisiológicos importantes. El compromiso, entre dosis de radiación y contraste en la imagen obtenida, tiene que ver con el riesgo fisiológico mencionado.

### *1.2.2 Tomografía computarizada por medio del uso de rayos X*

La técnica convencional de radiografía, no proporciona información en cuanto a profundidad se refiere. Lo anterior debido a que el cuerpo (tridimensional por su estructura) es proyectado a un dispositivo bidimensional. Otra limitante es el bajo contraste de los tejidos suaves. Esta restricción es particularmente notoria en aplicaciones que involucran al cerebro. Esto debido a que los tejidos del cerebro están *enmascarados* por el cráneo (el cual es altamente atenuante). Otra aproximación, la tomografía computarizada (CT), produce secciones bidimensionales finas (alrededor de 1mm en espesor) del cuerpo. Una resolución espacial micrométrica se puede obtener con aceptable discriminación entre tejidos.

En 1972 G. Hounsfield presentó, por primera vez, un sistema de barrido para aplicaciones médicas mediante CT [Hounsfield, 1973]. La introducción de CT de rayos X revolucionó las técnicas de diagnóstico médico. La implementación de este dispositivo se describe como el avance más significativo, desde el descubrimiento de los rayos X. La primera generación de sistemas basados en CT utilizaba un haz pequeño de una fuente colimada. Este sistema se desplazaba linealmente a lo largo del paciente para obtener proyecciones paralelas. Posteriormente, el sistema se rotaba para obtener varias proyecciones de este estilo. En la figura 1.4 se muestra un diagrama esquemático de la técnica.



**Fig. 1.4** Diagrama esquemático de un sistema de barrido mediante CT [Ketcham *et al.*, 2001]

La primera generación de dispositivos para CT tomaba aproximadamente cuatro minutos para adquirir los datos necesarios. Actualmente, el avance tecnológico permite que el tiempo de barrido sea de solamente 4 – 5 segundos (dispositivos generación 4), o incluso milisegundos (dispositivos generación 5). Las imágenes seccionadas, que representan los valores de atenuación del tejido, se reconstruyen al invertir los datos medidos proyectados. Los principios matemáticos que fundamentan esta técnica fueron desarrollados, mucho tiempo antes de su in-

vención, por [Radon, 1917]. En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de diagnóstico médico utilizando CT.



**Fig. 1.5** Diagnóstico médico del cerebro utilizando CT [http Brighamrad]

El inconveniente, en cuanto a la energía que conlleva la radiación X, no se ha eliminado mediante la aplicación de CT. Más aún, el costo de la técnica representa otro impedimento. Sin embargo una mejora, en términos de resolución de tejidos suaves, es fácilmente observable.

### *1.2.3 Técnicas ultrasónicas*

Mediante la utilización de métodos ultrasónicos de diagnóstico, pulsos de alta frecuencia (de energía acústica) son emitidos al interior del cuerpo del paciente. Ahí, éstos sufren reflexión en las fronteras entre tejidos con diferentes impedancias acústicas. El retardo en tiempo así como la intensidad de los pulsos reflejados, son utilizados para formar una imagen con información de las fronteras entre tejidos.

El diagnóstico ultrasónico es considerado altamente seguro. Es decir, no presenta riesgos potenciales para el paciente. Esta afirmación es verdadera solamente cuando la intensidad incidente es lo suficientemente pequeña. La técnica utilizada es relativamente sencilla. Esto permite que el diagnóstico sea barato, en comparación con otros métodos de diagnóstico. La resolución espacial, para esta técnica, oscila entre 1 – 3 milímetros. Cabe mencionar que dicha resolución se ve influenciada por múltiples factores. En la figura 1.6 se muestra un ultrasonido de revisión a un feto nonato.



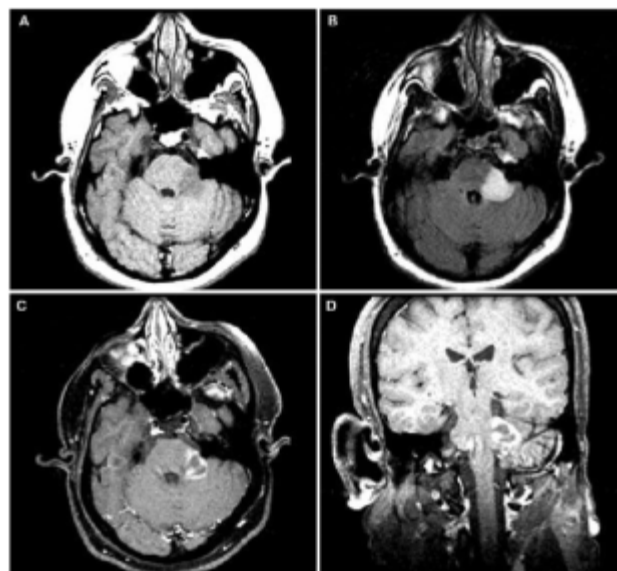
**Fig. 1.6** Ultrasonido de revisión a un feto nonato [http Cam]

El componente central de un dispositivo ultrasónico es el transductor. Éste convierte las señales eléctricas en señales acústicas, y viceversa. Los transductores ultrasónicos consisten en uno o más cristales piezoeléctricos. Estos cristales se acoplan al tejido mediante una crema que iguala las impedancias. La generación de una imagen bidimensional se obtiene mediante desplazamientos opto-mecánicos y electromecánicos. En breve, podemos afirmar que esta técnica es efectiva, pero con resolución mejorable.

#### 1.2.4 Resonancia magnética

En la resonancia magnética (MRI), también nombrada resonancia magnética nuclear (NMR), el paciente es colocado en un campo magnético muy fuerte. El campo es generado mediante un imán superconductor grande. La resonancia magnética nuclear se utiliza para obtener imágenes en función de la densidad de spin de los protones y del tiempo de relajación. También se pueden obtener los datos en función del espectro generado por  $^1\text{H}$  y  $^{31}\text{P}$ . Aquí  $^1\text{H}$  y  $^{31}\text{P}$  representan los núcleos biológicos principales para la resonancia magnética. Éstos generan razones giro-magnéticas altas (42.6 y 17.2 MHz/T respectivamente) [Bushong, 1996]. Esta técnica comúnmente se llama espectroscopia NMR. Los principios de la técnica han sido estudiados ampliamente por [Mansfield *et al.*, 1982].

Los grupos de datos anatómicos se obtienen aplicando gradientes del campo magnético a través del paciente. Esto resulta en un gradiente medible en un plano. Además, en el plano ortogonal se encuentra codificado un gradiente de fase. La utilización de técnicas bidimensionales de Fourier, entrega la imagen de una sección en el plano de interés. En la figura 1.7 se muestra un ejemplo de un barrido mediante MRI.



**Fig. 1.7** Barrido transversal mediante la utilización de la MRI [Plotkin *et al.*, 2005]

La MRI es una técnica de diagnóstico relativamente nueva. Por ejemplo, recientemente se ha obtenido información funcional al utilizar a la hemoglobina como guía paramagnética. Este método, llamado resonancia magnética funcional (fMRI), es capaz de medir, directamente, la activación cerebral. Es posible que esta técnica, en conjunto con barridos anatómicos, llegue a reemplazar, por lo menos parcialmente, los barridos PET (tomografía mediante emisión de positrones) analizados posteriormente.

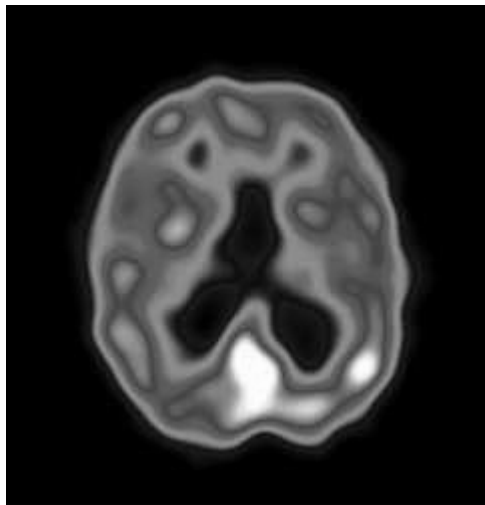
Las razones principales para el éxito de la MRI son tres. Primero, la técnica cuenta con muy buena resolución espacial (por debajo de los milímetros). Segundo, es un método completamente no invasivo. Tercero, su utilización no es riesgosa para el paciente. Sin embargo, la técnica cuenta también con desventajas. Entre ellas mencionaremos los altos costos implicados, el equipo ocupa demasiado espacio, el paciente debe permanecer quieto en el imán durante una hora aproximadamente y los problemas, en instalaciones y mantenimiento, asociados con la presencia de campos magnéticos fuertes.

### *1.2.5 Métodos que utilizan radioisótopos*

La utilización de radioisótopos es completamente diferente a las técnicas que se han presentado. La diferencia radica en que la radiación se genera dentro del cuerpo. Compuestos con radioisótopos, en cantidades bien establecidas, se inyectan al cuerpo del paciente. En el cuerpo del paciente decaen, ahí generan fotones gama que posteriormente son detectados. A través de una elección adecuada del agente isotópico, la distribución de éste puede representar funciones fisiológicas. Éstas abarcan el flujo de sangre, volumen de sangre, así como diversos procesos metabólicos. La utilización de elementos radioactivos, restringe la aplicación continua de estas técnicas para el diagnóstico médico. Una discusión más completa de estos métodos se encuentra en [Sorenson *et al.*, 1987]. Brevemente presentaremos dos métodos de diagnóstico que se desprenden de esta técnica.

### 1.2.5.1 Tomografía computarizada por emisión única de fotón

En la tomografía computarizada por emisión única de fotón (SPECT) solamente un rayo gama es emitido por cada decaimiento nuclear. Una cámara para detectar rayos gama gira alrededor del paciente. La cámara graba proyecciones unidimensionales de la radioactividad generada. Un número grande de dichos datos permite reconstruir la imagen bidimensional de la distribución de radiación. La técnica de SPECT entrega imágenes funcionales con buen contraste, pero la resolución que este método proporciona no es muy buena. En la figura 1.8 se muestra una distribución obtenida mediante esta técnica.



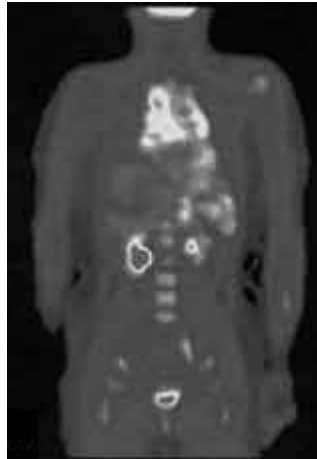
**Fig. 1.8** Distribución obtenida mediante la técnica de SPECT [Owens *et al.*, 2001]

### 1.2.5.2 Tomografía por emisión de positrones

La tomografía por emisión de positrones (PET) se basa en la detección de aniquilación por coincidencia (ACD). El decaimiento del material radioactivo produce un positrón. Este positrón viaja una distancia pequeña, se colisiona con un electrón y se aniquila. Este proceso genera dos rayos gamas anti-paralelos con una energía (cada uno) aproximadamente igual a 510 keV. El paciente es rodeado por un arreglo de detectores, y la detección *por coincidencia* de los dos fotones gama define una línea a través de la cual la aniquilación se presentó. La utili-



zación de esta técnica para el diagnóstico médico, brinda resultados más precisos en comparación con la técnica precedente. En la figura 1.9 se muestra un barrido utilizando la técnica PET.



**Fig. 1.9** Barrido transversal mediante la utilización de la PET [[http Somersetmedical](http://Somersetmedical)]

La tomografía por emisión de positrones es utilizada en aplicaciones que tienen que ver con el cerebro. Algunos usos típicos incluyen el diagnóstico y localización de tumores e infartos en el cerebro, así como el monitoreo funcional de la actividad cerebral. Los altos costos del dispositivo, así como el requerimiento de un ciclotrón para generar los radioisótopos, hacen que los PET solamente se puedan implementar en grandes hospitales o centros de investigación.

Una comparación entre las técnicas presentadas previamente hace constar que muchos métodos convencionales de diagnóstico son invasivos. Por lo tanto, la utilización de un dispositivo no invasivo presenta amplias posibilidades para complementar los estudios que hasta ahora se llevan a cabo. Cabe mencionar que, en su gran mayoría, el costo de implementación de los dispositivos convencionales es alto. Esto representa otra área de oportunidad que la interferometría de fotones no atenuados podría explotar.

### 1.3 Estructura de la tesis

La aplicación de técnicas interferométricas para diagnóstico, ha sido el tema primordial de esta tesis. La escritura de la misma ha sido pensada para facilitar futuras investigaciones en este ramo. Los resultados más importantes, para el desarrollo de la técnica, son demostrados sistemáticamente en este trabajo. La justificación matemática de las diversas secciones se ha efectuado lo más general posible. Nuestra motivación es poder beneficiar a personas interesadas en diferentes ámbitos de la ciencia. Los objetivos de la tesis se cumplirán mediante el desarrollo de los diferentes capítulos de la misma.

En el capítulo 2 abordaremos la propagación de luz en tejidos. En forma detallada examinaremos los dos procesos principales en la interacción luz-tejido; *absorción* y *esparcimiento*. La pérdida de polarización y coherencia, en la interacción luz-tejido, también será abordada en este capítulo.

El capítulo 3 presentará el arreglo interferométrico propuesto para nuestro trabajo. El interferómetro Mach-Zehnder será analizado a detalle. El filtraje espacial de los modos no deseados del láser también será tratado. La alineación del sistema, para el eje óptico definido por la fuente láser, será explicada en esta sección. Por último una comparación, entre el comportamiento esperado y experimental, será presentada al final del capítulo.

La interferometría heterodina será estudiada en el capítulo 4. El desempeño del arreglo con el dispositivo temporal (montura mecánica con piezoeléctricos) se analizará minuciosamente. La respuesta del foto-detector será modelada y verificada experimentalmente. Más aún, el comportamiento, en tiempo real del sistema, será sustentado.

En el capítulo 5 explicaremos los efectos de la inclusión de la muestra en el dispositivo. Con base en nuestros análisis previos, justificaremos el uso de la visibilidad como métrica principal de diagnóstico. La dependencia del coeficiente de atenuación, en términos de la visibilidad del interferómetro, es obtenida en esta sección.

Además este capítulo abarca los resultados experimentales obtenidos en nuestro trabajo. El desempeño, teórico y experimental, también será comparado en este capítulo. Más aún, mediante un análisis de incertidumbres detectamos mejorías potenciales en el sistema.

La última sección del trabajo resume los puntos más importantes de la tesis. Además, las aportaciones de nuestro análisis son demarcadas. Por último, en esta sección proponemos diferentes vertientes a seguir en el futuro.

## 2 PROPAGACIÓN DE LUZ EN TEJIDOS

La discusión de la interferometría de fotones no atenuados, para aplicaciones biomédicas, requiere del análisis de la interacción luz-tejido. En esta sección presentaremos los mecanismos preponderantes en la propagación de luz en tejidos. Estos procesos, absorción y esparcimiento de luz, son analizados desde la perspectiva electromagnética. Por lo tanto, el énfasis de esta sección a tejidos biológicos no restringe el desarrollo matemático a los mismos. La implementación de los cálculos, llevados a cabo en esta sección, es directa para otras aplicaciones que no sean biomédicas.

En la sección 2.1 se estudia el fenómeno de la absorción desde la perspectiva electromagnética. Además, la ley de Lambert-Bouguer es interpretada y justificada mediante el análisis mencionado. Las características de absorción de algunos tejidos son presentadas, como ejemplo del análisis llevado a cabo. La sección 2.2 presenta los efectos de esparcimiento en la propagación de luz en tejidos. El énfasis de esta presentación, no es obtener soluciones analíticas a la distribución de luz esparcida. Más bien se recalca el efecto que tiene este fenómeno en los fotones que no son atenuados. La ley generalizada de atenuación se deduce del análisis electromagnético de las secciones 2.1 y 2.2. La transmitancia óptica generada por un tejido es presentada como conclusión de este análisis. En la sección 2.3 analizamos la pérdida de polarización y coherencia en la interacción luz-tejido. Esta característica fundamenta la inhabilidad de los fotones atenuados para generar interferencia.

## 2.1 Absorción de luz

La absorción de luz implica la transferencia de energía incidente a un medio contiguo (como por ejemplo un tejido). Si iluminamos un medio no esparcidor con un haz colimado de luz, cuya intensidad es  $I_0$  (véase la figura 2.1), la intensidad que emerge de este medio decrece exponencialmente. Esta relación se obtendrá utilizando las bases electromagnéticas como método de análisis.

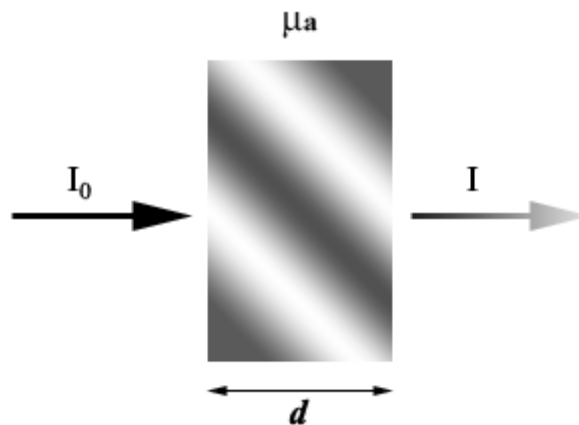


Fig. 2.1 Atenuación de la luz en un medio absorbente

### 2.1.1 Onda plana en un medio conductivo

Las ecuaciones de Maxwell forman el punto de partida para nuestro análisis [Wangsness, 1979]. Estas ecuaciones se muestran a continuación.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

Aquí  $\mathbf{E}$  es el campo de intensidad eléctrica,  $\mathbf{D}$  representa al campo de desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{B}$  identifica al campo de flujo magnético,  $\mathbf{H}$  conforma el campo de intensidad magnética,  $\rho_f$  y  $\mathbf{J}_f$  tienen que ver con las cargas y corrientes libres en la región de interés.

Además de las ecuaciones de Maxwell es necesario tomar en cuenta las propiedades electromagnéticas de los materiales. Dichas propiedades constitutivas para un material lineal, sin cargas ni corrientes libres (no tomando en cuenta aquellas que emergen de la conductividad) en la región de interés, isotrópico y homogéneo están bien establecidas [Reitz *et al*, 1993]. Las ecuaciones de Maxwell, así como las relaciones para los materiales mencionados, se presentan enseguida.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_f, \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \mathbf{J}_f + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1.11)$$

Aquí  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del medio,  $\mu$  representa la permeabilidad magnética del medio,  $\sigma$  identifica a la conductividad del medio,  $\mathbf{H}$  conforma el campo de intensidad magnética,  $\rho_f$  y  $\mathbf{J}_f$  tienen que ver con las cargas y corrientes (que no son generadas por la conductividad del medio) libres en la región de interés. Estos dos últimos parámetros son cero para nuestro análisis.

Si obtenemos el rotacional de la relación 2.1.9, y aplicamos identidades vectoriales convencionales [Spiegel, 1998], llegamos a la ecuación de onda para un medio conductivo.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.1.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.13)$$

La ausencia de cargas libres, en la región de interés, nos llevó a la última expresión. La solución a la ecuación 2.1.13 determina el comportamiento de una onda electromagnética en un medio conductivo. La presencia de la conductividad será el parámetro que induzca la absorción en dicho medio. Para obtener dicha expresión, en el caso de la absorción, es necesario resolver la ecuación vectorial encontrada previamente (expresión 2.1.13).

La solución de la ecuación vectorial 2.1.13 será propuesta para una onda plana monocromática. Este esquema es coherente con nuestra aplicación, ya que nosotros estaremos trabajando con una fuente láser. La relación 2.1.13 pone de manifiesto la dependencia, tanto temporal como espacial, del vector eléctrico. Cada una de las componentes del vector  $\mathbf{E}$ , para coordenadas cartesianas, satisface la relación 2.1.13. Por lo tanto propondremos una solución de esta ecuación, para una componente, por separación de variables [Butkov, 1968]. La solución propuesta se muestra en la siguiente relación.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t) \quad (2.1.14)$$

Si sustituimos esta relación en 2.1.13 y dividimos la ecuación entre  $\mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t)$  obtenemos dos relaciones. La primera es independiente de “ $\mathbf{r}$ ”, mientras que la segunda es independiente de “ $t$ ”. Por lo tanto, ambas deben ser igual a una constante dada ( $A$  para nuestro caso).

$$\frac{1}{\mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t)} \left\{ \nabla^2 [\mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t)] - \mu\sigma \frac{\partial [\mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t)]}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 [\mathbf{R}(\mathbf{r})\Gamma(t)]}{\partial t^2} = 0 \right\} \quad (2.1.15)$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}(\mathbf{r})} \nabla^2 [\mathbf{R}(\mathbf{r})] = \frac{1}{\Gamma(t)} \mu\sigma \frac{d[\Gamma(t)]}{dt} + \frac{1}{\Gamma(t)} \mu\epsilon \frac{d^2[\Gamma(t)]}{dt^2} = -A \quad (2.1.16)$$

$$\mu\epsilon \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \mu\sigma \frac{dT(t)}{dt} + AT(t) = 0 \quad (2.1.17)$$

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) + AR(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.1.18)$$

La técnica de separación de variables redujo el problema considerablemente. Ahora solamente tenemos que resolver dos ecuaciones diferenciales convencionales. La ecuación diferencial 2.1.17 es ordinaria [Boas, 1983]. La solución es bien conocida, y se muestra en la siguiente relación.

$$T(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t}; \quad \omega_{1,2} \Rightarrow \epsilon\mu\omega^2 + \sigma\mu\omega + A = 0 \quad (2.1.19)$$

La determinación de los coeficientes  $\omega_{1,2}$ , en la relación 2.1.19, depende de la solución de la ecuación espacial (2.1.18). La ecuación cuadrática en 2.1.19 es conocida como relación de dispersión. Además, la ecuación que describe a una onda plana está bien caracterizada [Wangsness, 1979]. Nosotros buscamos este comportamiento para la solución del problema. Si suponemos esta solución, y analizamos el caso para la dirección  $x$ , obtenemos la relación para la constante  $A$  (refiérase a la ecuación 2.1.16).

$$R_x(x) = e^{\pm ik_x x} \quad (2.1.20)$$

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) + AR(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 R_x(x)}{dx^2} + A_x R_x(x) = 0 \quad (2.1.21)$$

$$R_x(x) = e^{\pm ik_x x}; \quad \frac{dR_x(x)}{dx} = \pm ik_x R_x(x); \quad \frac{d^2 R_x(x)}{dx^2} = -k_x^2 R_x(x); \quad \nabla R = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \quad (2.1.22)$$

$$A_x R_x(x) - k_x^2 R_x(x) = 0 \Rightarrow A_x = k_x^2 \quad \therefore A_y = k_y^2; \quad A_z = k_z^2 \quad (2.1.23)$$

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) + AR(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 R_x}{dx^2} + \frac{d^2 R_y}{dy^2} + \frac{d^2 R_z}{dz^2} + A_x R_x + A_y R_y + A_z R_z = 0 \quad (2.1.24)$$

$$A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k_x \hat{\mathbf{a}}_x + k_y \hat{\mathbf{a}}_y + k_z \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (k_x \hat{\mathbf{a}}_x + k_y \hat{\mathbf{a}}_y + k_z \hat{\mathbf{a}}_z) = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.1.25)$$

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) + AR(\mathbf{r}) = 0; \quad A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}; \quad R(\mathbf{r}) = e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.1.26)$$



En la ecuación 2.1.25 el símbolo  $\hat{\mathbf{a}}_i$  representa un vector unitario en la dirección “i”. La solución que determina el comportamiento de la onda electromagnética, está dada por la multiplicación de las relaciones 2.1.19 y 2.1.26.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} [C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t}] \quad (2.1.27)$$

$$\omega = -i\omega \quad \therefore \quad T(t) = C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (2.1.28)$$

$$\omega = -i\omega \quad \therefore \quad \omega^2 = -\omega^2 \quad \therefore \quad -\epsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega + A = 0 \quad \therefore \quad \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = 0 \quad (2.1.29)$$

El cambio de variable presentado en la ecuación (2.1.28) se justifica debido a la restricción en el comportamiento esperado de la solución (es decir, que el campo descrito sea una onda plana). Mediante este análisis, las constantes de la ecuación 2.1.19,  $\omega_{1,2}$ , toman un significado físico específico. Éstas representan la frecuencia de la onda.

La relación de dispersión, ecuación 2.1.29, pone de manifiesto que  $\omega$  o  $\mathbf{k}$  deben ser cantidades complejas. Lo anterior para poder justificar la presencia de la conductividad en esta relación. Nuestro caso de análisis involucra una onda monocromática. Esta restricción implica que alguna de las constantes,  $C_1$  o  $C_2$  en la ecuación 2.1.28, sea igual a cero. Una onda monocromática se escribe en términos de la delta de Dirac como se muestra a continuación.

$$\omega \rightarrow \omega_0 \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.1.30)$$

Esto implica que la frecuencia no puede ser imaginaria. Entonces el vector de propagación de onda debe ser complejo [Reitz *et al*, 1993]. Más aún, sus componentes real e imaginaria no pueden ser ortogonales. Esta aseveración se demuestra enseguida.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i \quad \Rightarrow \quad A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (|\mathbf{k}_r|^2 - |\mathbf{k}_i|^2) + i2(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i) \quad \therefore \quad \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i \neq 0 \quad (2.1.31)$$

La utilización de la relación de dispersión, ecuación 2.1.29, delimita efectivamente a que las componentes del vector de onda no sean ortogonales. La solución completa del campo eléc-

trico, en presencia de un medio conductor (para una onda monocromática plana), se presenta en la siguiente relación.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]} = \mathbf{E}_0 e^{i[(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} = \mathbf{E}_0 e^{-(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.1.32)$$

Una solución completamente análoga es obtenida para el campo flujo magnético. El análisis es idéntico al presentado previamente. La expresión para el campo flujo magnético se presenta en la siguiente ecuación.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]} = \mathbf{B}_0 e^{i[(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} = \mathbf{B}_0 e^{-(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.1.33)$$

Una conclusión importante es que las soluciones pueden presentar planos de amplitud constante cuando  $\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = 0$  y planos de fase constante cuando  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = 0$ .

### 2.1.2 Onda homogénea e inhomogénea

El concepto de onda homogénea tiene un valor importante para la descripción de la absorción en un medio conductor. Para obtener una relación, entre el vector de onda y el índice de refracción del medio, necesitamos partir de las ecuaciones 2.1.32 – 2.1.33. Estas soluciones deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 2.1.8 – 2.1.11).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} = 0 = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow i\mathbf{k} \cdot \epsilon \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0 \quad \therefore \epsilon_R (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0; \quad \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (2.1.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow i\mathbf{k} \cdot \epsilon \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0 \quad \therefore (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (2.1.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad \therefore (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mathbf{B} \quad (2.1.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow -i(i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mu\epsilon\omega \mathbf{E} + \mu\sigma \mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \epsilon'_R \mathbf{E} \quad (2.1.37)$$

En estas relaciones hemos utilizado la expresión demostrada en 2.1.22. Además introdujimos la constante dieléctrica ( $\epsilon_R$ ) y la permitividad en el vacío  $\epsilon_0$ . En la última expresión asumimos que el medio no era magnético  $\mu = \mu_0$ , y definimos la constante dieléctrica compleja como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\epsilon'_R = \epsilon_R + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.1.38)$$

$$\epsilon'_R \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon_R + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) = \epsilon \mu_0 \omega^2 + i \sigma \mu_0 \omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \quad \therefore \quad A = \epsilon'_R \frac{\omega^2}{c^2} = n'^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.1.39)$$

En este análisis supusimos que el medio no era magnético ( $\mu = \mu_0$ ). La constante dieléctrica nos brinda información del índice de refracción del medio. Para nuestro caso, tenemos una constante dieléctrica compleja que será acompañada por un índice de refracción complejo ( $n'$  en la ecuación 2.1.39). La relación entre ambas es bien conocida [Stratton, 1941].

$$n'^2 = \epsilon'_R \quad (2.1.40)$$

Aquí nuevamente asumimos que el medio no era magnético. El índice de refracción complejo puede ser expresado en términos del vector de onda complejo (ecuaciones 2.1.31 y 2.1.39).

$$n' = \frac{c}{\omega} \sqrt{|\mathbf{k}_r|^2 - |\mathbf{k}_i|^2 + i2(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i)} \quad (2.1.41)$$

Como se mencionó al final de la sección precedente, la presencia de dos vectores de onda tiene un significado físico muy importante. La amplitud y fase de la onda se desplazan en direcciones dadas. Éstas dependen, respectivamente, de las componentes real e imaginaria del vector de propagación. Una onda homogénea es aquella en la que su amplitud y fase se desplazan en la misma dirección. Por el contrario, una onda inhomogénea cuenta con direcciones diferentes de propagación. Para nuestro análisis, la onda plana se considera un caso de onda homogénea.

Las ecuaciones de Maxwell (2.1.34 – 2.1.37), para una onda homogénea, tienen implicaciones importantes.

$$\epsilon_R (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = \epsilon_R (k_r + ik_i)(\hat{\mathbf{a}}_u \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad \therefore \quad (\hat{\mathbf{a}}_u \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (2.1.42)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = (k_r + ik_i)(\hat{\mathbf{a}}_u \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad \therefore \quad (\hat{\mathbf{a}}_u \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (2.1.43)$$

Estas expresiones ponen de manifiesto el carácter transversal, de los vectores eléctrico y magnético, con respecto a la dirección de propagación. La ecuación 2.1.36, para una onda homogénea, nos lleva a una relación vectorial en términos del índice de refracción.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{a}}_u \times \mathbf{E}) = \frac{n'\omega}{c\omega} (\hat{\mathbf{a}}_u \times \mathbf{E}) = \frac{n'}{c} (\hat{\mathbf{a}}_u \times \mathbf{E}) \quad (2.1.44)$$

Con estos resultados podemos obtener la relación de potencia. La potencia, luego de interactuar con el medio conductor, sufre una disminución (llámese absorción) en su amplitud. En esta sección encontraremos la forma electromagnética de la ley de Lambert-Bouguer ([Lambert, 1760], [Bouguer, 1729]).

### 2.1.3 La ley de Lambert-Bouguer y su interpretación electromagnética

El vector de Poynting contiene la información de densidad de potencia que transmite la onda [Wangsness, 1979]. El estudio del comportamiento de la densidad de potencia es muy importante en la interacción con un medio que absorbe. La utilización de la definición del vector de Poynting, así como la ecuación 2.1.36, nos permite obtener una relación importante.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*); \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad \therefore \quad \mathbf{S} = \text{Re} \left[ \frac{\mathbf{E} \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*)}{2\mu^* \omega^*} \right] \quad (2.1.45)$$

La relación vectorial entre el campo eléctrico y el vector de onda *complejo* es muy importante.

$$\mathbf{E} \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*) = \mathbf{k}^* (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^* (\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}); \quad \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{E} \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*) = |\mathbf{E}|^2 \mathbf{k}^* \quad (2.1.46)$$

En esta última expresión hemos utilizado la ortogonalidad de la onda homogénea respecto a la dirección de propagación. La obtención de la relación del vector de Poynting se efectúa utilizando las ecuaciones 2.1.32, 2.1.45 y 2.1.46.

$$\mathbf{S} = \text{Re} \left\{ \frac{[(k_r + ik_i) \hat{\mathbf{a}}_u] [|\mathbf{E}_0|^2 e^{-2(k_i r)}]}{2\mu\omega} \right\} \quad (2.1.47)$$

Esta relación se puede expresar en términos del índice de refracción del medio. Para una onda homogénea, el índice de refracción se relaciona como se muestra a continuación (refiérase a la ecuación 2.1.39).

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{n'^2 \omega^2}{c^2} = [(k_r + ik_i) \hat{\mathbf{a}}_u \cdot (k_r + ik_i) \hat{\mathbf{a}}_u] \quad \therefore \quad (k_r + ik_i)^2 = \frac{n'^2 \omega^2}{c^2}; \quad n' = n_r + in_i \quad (2.1.48)$$

La sustitución de esta ecuación en la relación 2.1.47 nos lleva al resultado final.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) |\mathbf{E}_0|^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n_i z} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.1.49)$$

Para llegar a esta expresión, hemos supuesto que la onda se propaga en la dirección “z”. Solamente hemos analizado la contribución de la parte real del vector de propagación (debido a que  $\text{Re}(k_r + ik_i) = k_r$ ). Además aplicamos las siguientes relaciones:  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  y  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ .

La relación 2.1.49 conduce de manera directa a la ley de Lambert-Bouguer. La magnitud del vector de Poynting representa la irradiancia de la onda. La ecuación 2.1.49 pone de manifiesto

que la irradiancia decrece exponencialmente en el medio. Esta expresión se utilizará, durante el resto del trabajo, en la forma propuesta por Lambert-Bouguer.

$$I = I_0 e^{-\mu_a d}; \quad I_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right\} |\mathbf{E}_0|^2; \quad \mu_a = \frac{4\pi}{\lambda} n_i \quad (2.1.50)$$

El coeficiente mostrado en la ecuación 2.1.50 se llama coeficiente de absorción ( $\mu_a$ ). Éste depende de las características del medio con el que la luz interactúe.

#### 2.1.4 Características de absorción en los tejidos

El coeficiente de absorción de un compuesto es linealmente proporcional a su concentración en un medio que no absorbe. Esta expresión fue obtenida por Beer en 1852 [Beer, 1852].

$$\mu_a = \beta c \quad (2.1.51)$$

Aquí  $\beta$  es el coeficiente de proporcionalidad y  $c$  representa la concentración del compuesto. En una solución que contiene una mezcla de  $n$  compuestos absorbentes, el coeficiente total de absorción es igual a la suma de los  $n$  componentes.

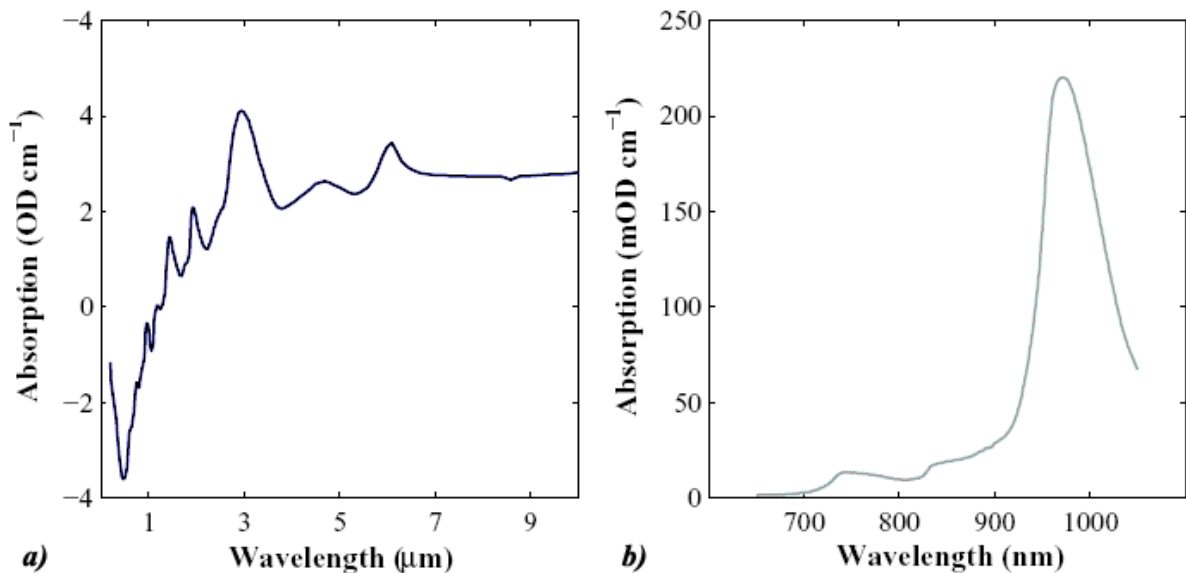
$$\mu_a = \sum_{i=1}^n \beta_i c_i \quad (2.1.52)$$

Los compuestos que absorben luz en los tejidos biológicos se conocen como tejidos cromóforos. Cada uno de estos tejidos tiene su propio espectro de absorción. Al igual que en la ecuación 2.1.52, el coeficiente total de una mezcla de compuestos equivale a la sumatoria de los coeficientes individuales. Si aproximamos a los tejidos como una mezcla homogénea de compuestos, la absorción total de luz en el tejido depende del tipo y concentración de cromóforos

presentes. Enseguida presentamos algunos tejidos representativos, así como sus características de absorción.

#### 2.1.4.1 Agua

En la figura 2.2, se muestra el espectro de absorción del agua. Los coeficientes mostrados están en unidades de densidad óptica. La conversión a densidad óptica se efectúa expresando la ecuación 2.1.50 en términos de logaritmos base 10.



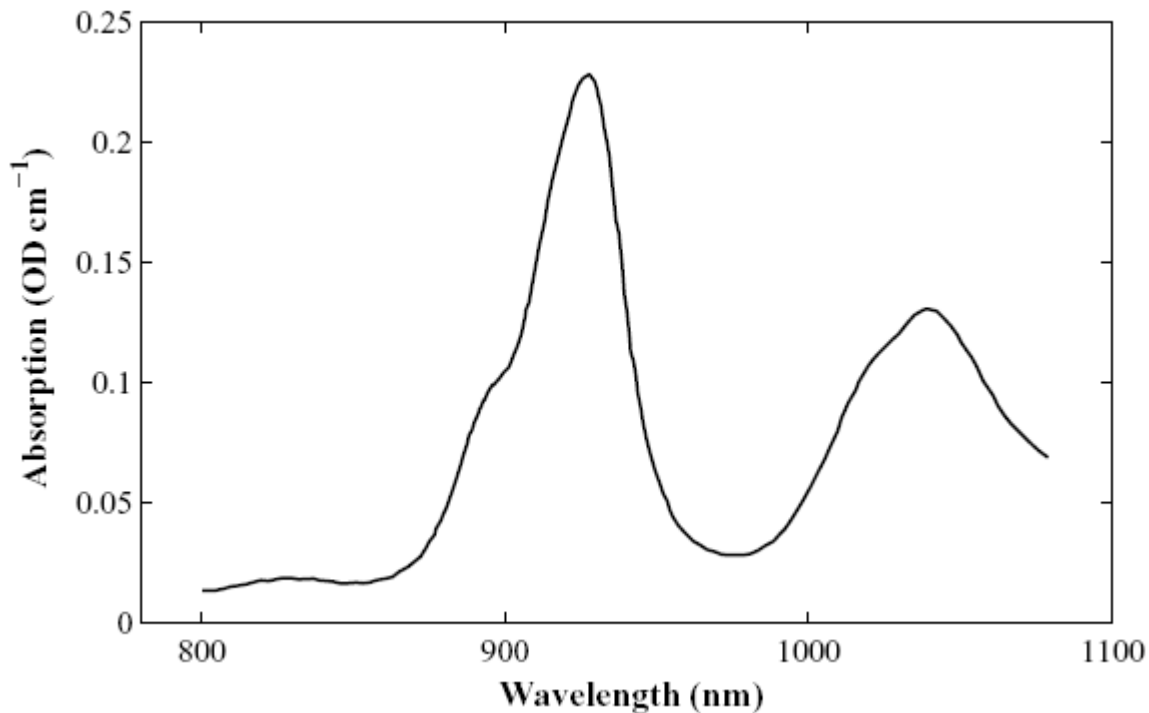
**Fig. 2.2** Espectro de absorción del agua [Hollis, 2002]

En la mayoría de los tejidos, el agua es el compuesto preponderante (60 – 80% de la masa corporal). Por ejemplo, en el pecho se cuenta con una concentración que varía entre 30 – 60% dependiendo del periodo de menstruación [Grosenick *et al*, 2003]; [Srinivasan *et al*, 2003]. De aquí la importancia del espectro de absorción del agua. Es decir, cada vez que se quiera interactuar con algún tejido, la influencia del agua puede ser muy marcada (por ejemplo a 3 μm). En la parte *b* de la figura 2.2 observamos una región de baja absorción del agua. A esta región se le denomina la ventana del infrarrojo cercano (700 – 900 nm). La afectación de

la absorción del agua, en esta región del espectro, es mínima. Las aplicaciones de diagnóstico tratan de hacer uso de dicha ventana para maximizar su respuesta.

#### 2.1.4.2 Lípidos

El espectro de absorción de los lípidos se muestra en la figura 2.3. El espectro mostrado en la figura 2.3 fue reportado como similar al que presentan los tejidos de los músculos [Conway *et al*, 1984]. El tejido adiposo (tejido graso) constituye un elemento esencial en algunas partes del cuerpo (por ejemplo, en el pecho).



**Fig. 2.3** Espectro de absorción de algunos lípidos (grasa de puerco) [Hollis, 2002]

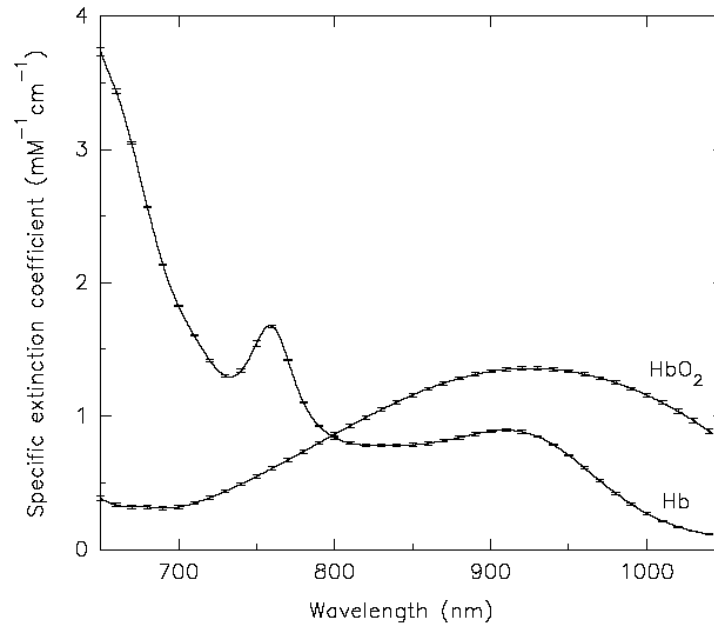
El espectro de absorción de los lípidos es similar al del agua. Además es relativamente plano en el rango entre 780 – 815 nm. El efecto en la absorción generado por los lípidos dependerá, en gran medida, del tejido en cuestión. Por ejemplo, en el cerebro se puede despreciar su efec-



to (debido a las altas concentraciones de agua). Mientras que en el antebrazo su aportación es muy variable, debido al compromiso entre músculo y grasa [Hollis, 2002].

### 2.1.4.3 Hemoglobina

La hemoglobina es un compuesto que se encuentra presente en las células rojas. La hemoglobina está compuesta de cuatro grupos *heme* (los cuales contienen hierro). Estos grupos *heme* son los responsables de transportar el oxígeno de los pulmones a los tejidos. En los pulmones, el oxígeno se adhiere al hierro presente en los grupos *heme*. Esta unión genera la variante llamada oxihemoglobina. Mientras la sangre circula por el cuerpo, el oxígeno se libera en los tejidos (el compuesto que transporta el oxígeno en los tejidos es la mioglobina). Los tejidos intercambian algunos desechos con la hemoglobina. Pero primordialmente, ésta regresa en su variante de deoxihemoglobina a los pulmones. Los espectros de absorción para oxi- y deoxi-hemoglobina se muestran en la figura 2.4.

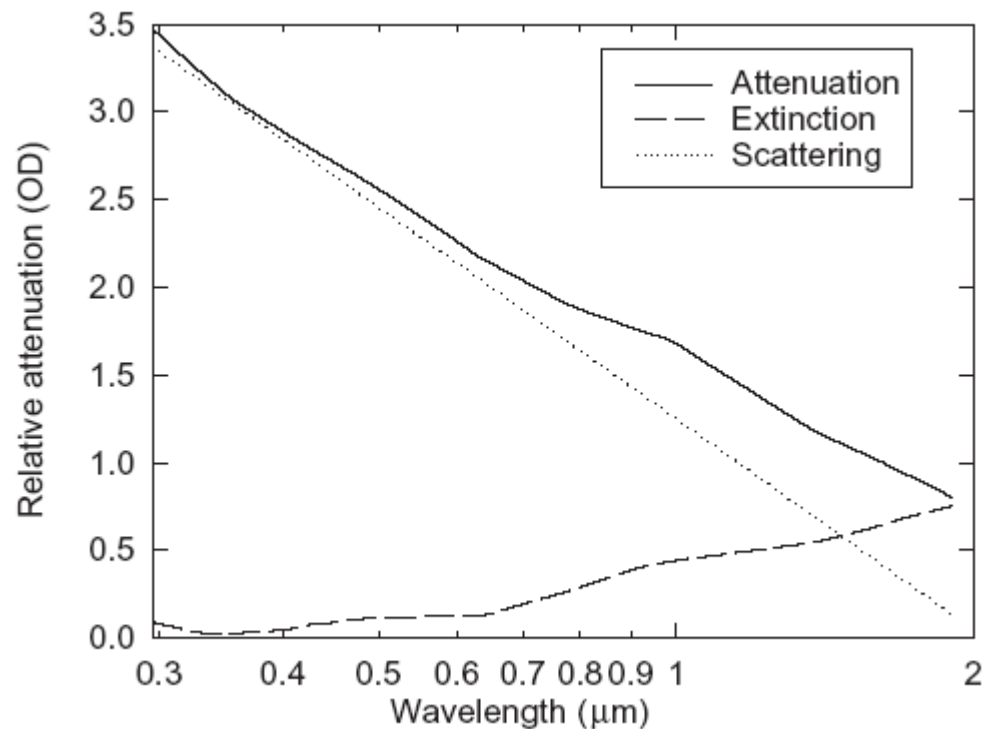


**Fig. 2.4** Espectro de absorción para la oxi- y deoxi-hemoglobina [Cope, 1991]

La absorción de la oxihemoglobina, así como la correspondiente a la deoxi-hemoglobina, en el infrarrojo cercano vuelve a ser pequeña. Esto permite que la luz atraviese porciones grandes de tejido. Nuevamente, la ventana del infrarrojo cercano es óptima para tejidos que contienen grandes cantidades de sangre.

#### 2.1.4.4 Melanina

La melanina se encuentra en la capa de la epidermis, en la piel, contenida en células llamadas melanocitos. En la figura 2.5 presentamos el comportamiento óptico de la melanina.



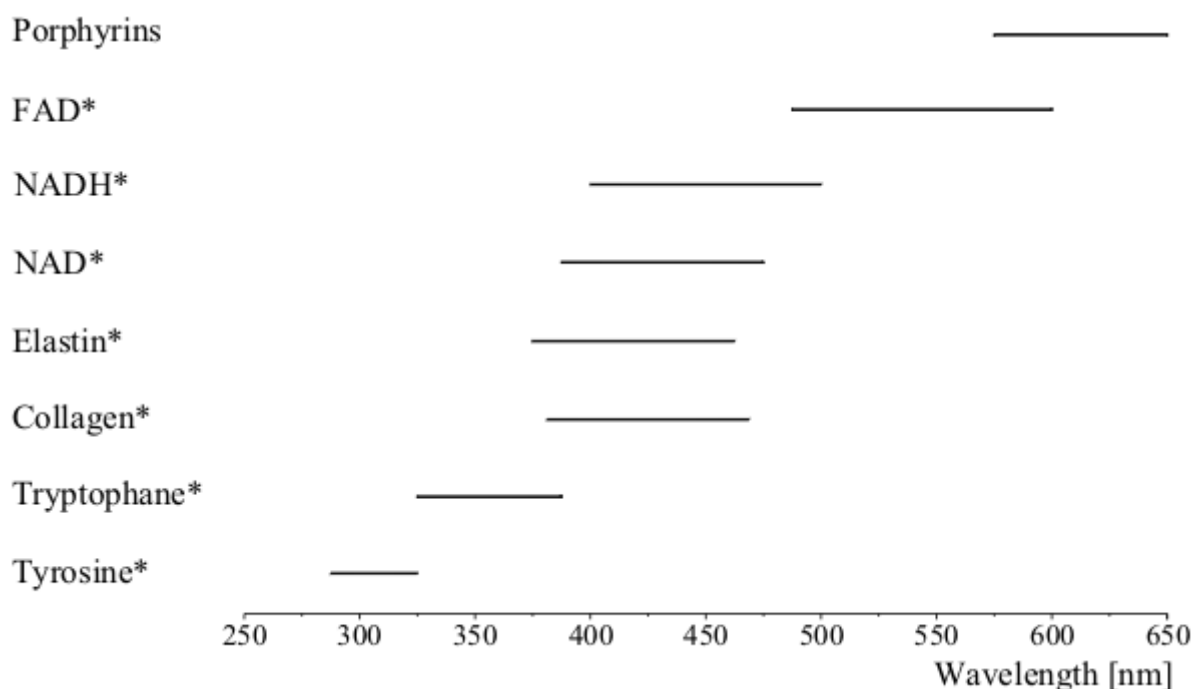
**Fig. 2.5** Espectro de absorción para la melanina [Cope, 1991]

En el ultravioleta, la melanina genera esparcimiento de Rayleigh en la luz incidente. Mientras que en el infrarrojo cercano, el proceso predominante es la absorción [Wolbarsh *et al*, 1981]. Cabe mencionar que la melanina se arregla en una estructura periódica. Esto genera procesos

significativos de esparcimiento. El efecto fisiológico de estos arreglos es la distribución de luz en todo el tejido. Esto elimina las concentraciones altas de luz en el tejido y, por ende, el daño potencial a las células. En cuanto al diagnóstico se refiere, esto implica que parte de la luz que incide en la piel se refleja, sin ser transmitida hacia dentro del tejido.

#### 2.1.4.5 Otros compuestos

Existe una gran variedad de compuestos que no han sido presentados en este estudio. Una referencia amplia en cuanto a este tema se refiere es presentada por [Tuchin, 2002]. Para finalizar esta sección se presenta, de manera esquemática en la figura 2.6, la absorción espectral de los compuestos principales en la piel humana.



**Fig. 2.6** Absorción espectral de algunos compuestos en la piel humana [Sinichkin *et al*, 2002]

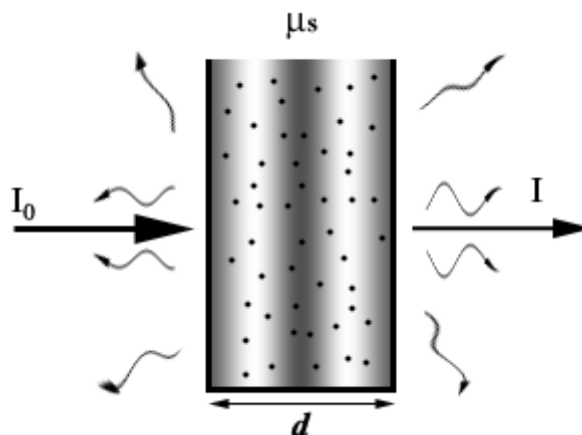
## 2.2 Esparcimiento de luz

Las diferencias en índices de refracción en una escala macroscópica (por ejemplo entre la piel y los huesos), generan cambios en la dirección de la onda electromagnética. Sin embargo, estos cambios son tan pequeños que generalmente son despreciados. El esparcimiento de luz en tejidos es causado por diferencias en el índice de refracción a nivel microscópico (por ejemplo en las fronteras de membranas de las células, organelos, etc.). Más aún, los efectos del esparcimiento, en tejidos biológicos, son más importantes que los correspondientes a la absorción [Ramakrishna *et al*, 2000].

Al igual que en el caso de la absorción, se define un coeficiente de esparcimiento,  $\mu_s$ . Para una fuente de luz colimada tenemos una relación análoga a la ley de Lambert-Bouguer.

$$I = I_0 e^{-\mu_s d} \quad (2.2.1)$$

Aquí  $I$  representa la componente no esparcida de la luz, luego de atravesar un medio no absorbente de espesor  $d$ . En la figura 2.7 se muestra esquemáticamente un medio esparcidor.



**Fig. 2.7** Atenuación de la luz en un medio esparcidor

A continuación obtendremos el comportamiento de una onda plana cuando interactúa con una partícula esférica cualesquiera. La motivación de este análisis es justificar la relación exponencial decreciente (ecuación 2.2.1). A través de este análisis se pondrán de manifiesto las dificultades en el estudio del esparcimiento de luz. Más aún, esta aproximación clarificará la aplicabilidad de la relación exponencial para partículas que no son esféricas. Nuestro análisis sigue de cerca el planteado en textos clásicos [van de Hulst, 1981], [Bohren *et al*, 1983].

### 2.2.1 Solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas

El análisis del esparcimiento no es trivial. En esta sección analizamos el efecto producido por una partícula esférica, sobre la que incide un frente de onda plano. Si la partícula no existiera, la distribución, a una distancia dada, estaría dada por la relación del frente de onda plano. Sin embargo, la inclusión de la partícula esférica genera un campo adicional. A este campo lo denominamos el campo esparcido. Enseguida obtendremos la expresión analítica para dicho campo. El punto de partida natural, para este problema, es la ecuación de onda presentada en la sección anterior (ecuación 2.1.12).

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \therefore \quad \nabla^2 \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.2)$$

Cabe mencionar que ahora el medio se considera no conductivo (no absorbente), y por lo tanto  $\sigma = 0$ . Al igual que en la sección anterior, la dependencia temporal se propone como exponencial compleja. Esto simplifica la relación 2.2.2 a la ecuación de Helmholtz.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \therefore \quad \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2.3)$$

Debido a que la partícula es considerada esférica, el sistema de coordenadas esférico facilita el análisis. La relación de Helmholtz es una de carácter vectorial. Esto implica que nosotros no podemos, separar en componentes la relación 2.2.3 (como en el caso de la absorción), y resolver cada una de sus componentes. Esto se debe a que los vectores unitarios, para el sistema de

coordenadas esférico, no son constantes. Sin embargo, podemos proponer que la relación escalar de la ecuación de Helmholtz se cumpla y, en términos de la solución escalar, encontrar una solución a la relación vectorial. Enseguida presentamos la relación escalar implicada.

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\psi(\mathbf{r})=0 \quad (2.2.4)$$

La solución que proponemos para resolver la ecuación vectorial se muestra a continuación.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{r}\times(\nabla\psi)=-\nabla\times(\mathbf{r}\psi) \quad (2.2.5)$$

Para demostrar que esta relación satisface la ecuación vectorial de Helmholtz aplicamos identidades vectoriales [Spiegel, 1998].

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E}=0 \\ -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E} &= -\nabla\times[\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi)]+\nabla[\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\nabla\psi)]+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(\mathbf{r}\times\nabla\psi)=0 \\ -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E} &= \nabla\times\{\nabla\times[\nabla\times(\mathbf{r}\psi)]\}-\nabla\{\nabla\cdot[\nabla\times(\mathbf{r}\psi)]\}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2[\nabla\times(\mathbf{r}\psi)]=0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

En esta expresión hemos utilizado la segunda relación en 2.2.5. El segundo término de la última relación es nulo. Lo anterior debido a que la divergencia del rotacional es cero. Esto simplifica la ecuación a evaluar.

$$\begin{aligned} \nabla\times\{\nabla\times[-\mathbf{r}\times(\nabla\psi)]\}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2[\mathbf{r}\times(\nabla\psi)] &= 0 \\ -\nabla\times\{\mathbf{r}\nabla^2\psi-\nabla\psi(\nabla\cdot\mathbf{r})+(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla\psi\}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2[\mathbf{r}\times(\nabla\psi)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Aquí hemos utilizado identidades vectoriales para expandir el primer término. La divergencia del vector de posición es igual a tres. Mientras que el rotacional de dicho vector es nulo [Wangsness, 1979]. Además mediante 2.2.4 podemos conocer el primer término de la última expresión. Nos restan por conocer los últimos dos términos de la expresión expandida. El primero se encuentra como sigue.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= \left[ (A_R \hat{\mathbf{a}}_R + A_\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + A_\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi) \cdot \left( \hat{\mathbf{a}}_R \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\mathbf{a}}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] (R \hat{\mathbf{a}}_R) \\
 (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= A_R \frac{d(R)}{dR} \hat{\mathbf{a}}_R + A_\theta \frac{1}{R} R \frac{\partial(\hat{\mathbf{a}}_R)}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{R \sin \theta} R \frac{\partial(\hat{\mathbf{a}}_R)}{\partial \phi} = A_R \hat{\mathbf{a}}_R + A_\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + A_\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi = \mathbf{A} \\
 \text{si } \quad \mathbf{A} = \nabla \psi \quad \therefore \quad (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} &= \nabla \psi \tag{2.2.8}
 \end{aligned}$$

Aquí los vectores unitarios, para coordenadas esféricas, se representaron con la misma nomenclatura que en la sección precedente. La última relación es más elaborada. Ésta se puede encontrar como se muestra a continuación.

$$\nabla[\mathbf{r} \cdot (\nabla \psi)] = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times [\nabla \times (\nabla \psi)] + (\nabla \psi) \times (\nabla \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi + \nabla \psi \tag{2.2.9}$$

Aquí hemos vuelto a aplicar identidades vectoriales. El primer término, del lado derecho de la igualdad, representa la expresión que estamos buscando. El segundo término fue obtenido previamente (relación 2.2.8). El tercer término es nulo debido a que el rotacional de un gradiente siempre es cero. Por último, el rotacional del vector de posición también es nulo. Con estos resultados, la expresión 2.2.7 se puede expresar de manera alternativa.

$$\begin{aligned}
 -\nabla \times \left\{ -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{r} \psi - 3\nabla \psi + \nabla \psi + \nabla \psi - \nabla[\mathbf{r} \cdot (\nabla \psi)] \right\} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] &= 0 \\
 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\nabla \times (\mathbf{r} \psi)] + \nabla \times (\nabla \psi) + \nabla \times \{ \nabla[\mathbf{r} \cdot (\nabla \psi)] \} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] &= 0 \\
 -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] &= 0 \tag{2.2.10}
 \end{aligned}$$

Para llegar a la comprobación requerida, hemos utilizado la propiedad del rotacional de un gradiente dos veces. Con este resultado demostramos que nuestra solución, relación 2.2.5, en efecto resuelve la ecuación vectorial de Helmholtz. Las relaciones de Maxwell, en específico la ley de Faraday (expresión 2.1.2), relacionan al campo eléctrico con el magnético.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.2.11)$$

Aquí hemos supuesto que la dependencia temporal es exponencial compleja. Con esta relación encontramos, para la solución propuesta, las expresiones para los dos campos electromagnéticos.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{r} \times (\nabla \psi) \\ \mathbf{B}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{\omega} \{ \nabla \times [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] \} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Sin embargo la solución encontrada, para el campo eléctrico, no cuenta con componente en la dirección radial. A estas relaciones se les designa como transversales eléctricas (TE). Por lo tanto, nuestra solución no puede ser general. Un análisis de la ecuación de Helmholtz, como lo hicimos anteriormente, para el campo magnético entrega las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TM}}(\mathbf{r}) &= \frac{ic^2}{\omega} \{ \nabla \times [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] \} \\ \mathbf{B}_{\text{TM}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} [\mathbf{r} \times (\nabla \psi)] \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

El campo magnético, en esta expresión, no cuenta con componente en la dirección radial. Por lo tanto, a estas relaciones se les nombra transversales magnéticas (TM). Una superposición de ambas relaciones representa la solución general del problema.



La contribución del campo eléctrico es la de interés en nuestra aplicación. Más aún, la partícula esférica “genera” un campo después de que el frente de onda plano interactúa con ésta. Este campo debe contar con una componente radial. La analogía, utilizando la propagación de Fresnel (refiérase al siguiente capítulo), es que la partícula se comporta como una delta de Dirac. La propagación, debida a una delta de Dirac, se comporta como un frente de onda esférico [Goodman, 1993]. Por lo tanto, nosotros esperamos que, a grandes distancias, este comportamiento sea el que prevalezca. Esto implica que el campo eléctrico tenga componente radial. La solución que tiene este comportamiento es la presentada en la relación 2.2.13 (campo TM).

Los campos eléctricos y magnéticos aún dependen de la función escalar  $\psi(r)$ . Esta función es la solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas. La ecuación de Helmholtz, en coordenadas esféricas, se presenta a continuación.

$$\nabla^2\psi(r) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi(r) = \nabla^2\psi(r) + k^2\psi(r) = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi^2} + k^2 \psi(r, \theta, \phi) = 0$$

(2.2.14)

Esta expresión se presenta en muchas ramas de la física [Lebedev, 1972]. La fase en la solución de esta ecuación se encuentra en términos de los esféricos armónicos [Panofsky *et al*, 1962]. Un libro que trata a detalle la resolución de la expresión 2.2.14 es el debido a [Butkov, 1968]. La expresión para la función escalar se presenta enseguida.

$$\psi(r, \theta, \phi) = z_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

(2.2.15)

Aquí hemos optado por utilizar la nomenclatura que propone [Panofsky *et al*, 1962]. La dependencia radial de la función escalar está descrita en términos de funciones esféricas de Bessel [Wang *et al*, 1979]. Los polinomios asociados de Legendre también aparecen en esta rela-

ción [Butkov, 1968]. La constante de normalización,  $\sqrt{\frac{2\ell+1(\ell+m)!}{4\pi(\ell-m)!}}$ , se omitirá en el desarrollo que sigue.

Con la expresión 2.2.15 podemos encontrar el comportamiento, de los campos eléctrico y magnético, para los dos escenarios (TE y TM). Simplemente se aplican las expresiones encontradas previamente (relaciones 2.2.12 y 2.2.13). El resultado de la aplicación de estas relaciones se muestra a continuación.

$$\mathbf{E}_{\text{TM}} = \begin{cases} \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_r \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_\ell^m(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{a}}_\theta \\ i \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{cases} \quad \mathbf{H}_{\text{TM}} = \begin{cases} 0 \hat{\mathbf{a}}_r \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{mk}{\sin \theta} z_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta \\ ik \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} z_\ell(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_\ell^m(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\mathbf{E}_{\text{TE}} = \begin{cases} 0 \hat{\mathbf{a}}_r \\ -\frac{mk}{\sin \theta} z_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta \\ -ik z_\ell(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_\ell^m(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{cases} \quad \mathbf{H}_{\text{TE}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_r \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_\ell^m(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{a}}_\theta \\ i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] Y_\ell^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Aquí hemos acomodado las componentes del vector en diferentes niveles. Por ejemplo, la componente radial para el campo  $\mathbf{H}_{\text{TM}}$  es cero. Mientras tanto el nivel inferior, en la expresión 2.2.16, representa la componente en  $\theta$  del campo  $\mathbf{H}_{\text{TM}}$ . El último nivel en esta expresión es la componente en  $\phi$ .

Los esféricos armónicos pueden ser separados en dos componentes; una par y otra impar. Esto se efectúa utilizando la identidad de Euler para funciones exponenciales complejas [Boas, 1983]. Enseguida mostramos dichas componentes para la distribución transversal magnética.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{TM}}(\ell, m; \text{par}) = & \begin{cases} \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_\ell(kr) P_\ell^m(\cos\theta) \cos(m\phi) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos\theta)] \cos(m\phi) \\ i \frac{m}{r \sin\theta} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] P_\ell^m(\cos\theta) \cos(m\phi) \end{cases} \\
\mathbf{H}_{\text{TM}}(\ell, m; \text{par}) = & \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{mk}{\sin\theta} z_\ell(kr) P_\ell^m(\cos\theta) \cos(m\phi) \\ ik \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} z_\ell(kr) \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos\theta)] \cos(m\phi) \end{cases} \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{TM}}(\ell, m; \text{impar}) = & \begin{cases} \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_\ell(kr) P_\ell^m(\cos\theta) \sin(m\phi) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos\theta)] \sin(m\phi) \\ i \frac{m}{r \sin\theta} \frac{d}{dr} [r z_\ell(kr)] P_\ell^m(\cos\theta) \sin(m\phi) \end{cases} \\
\mathbf{H}_{\text{TM}}(\ell, m; \text{impar}) = & \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{mk}{\sin\theta} z_\ell(kr) P_\ell^m(\cos\theta) \sin(m\phi) \\ ik \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} z_\ell(kr) \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos\theta)] \sin(m\phi) \end{cases} \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Los resultados para los campos TE son análogos. Éstos se pueden obtener mediante comparaciones entre las expresiones previas (ecuaciones 2.2.16 – 2.2.19). En la notación hemos incluido si la función es par o impar. Esto se determina en dependencia de la función en  $\phi$ . Esta aproximación será útil para el análisis siguiente.

### 2.2.2 Interpretación del medio esparcidor como índice de refracción complejo

La solución de la ecuación vectorial de Helmholtz, para coordenadas esféricas, se obtiene mediante la superposición de las expresiones 2.2.16 y 2.2.17. Debido a que la partícula analizada se propuso esférica, el comportamiento de la onda esparcida debe ser semejante al presentado aquí.

El frente de onda incidente es plano. Además suponemos que su polarización es lineal (a lo largo del eje  $x$ ). Nosotros queremos expresar la distribución del frente de onda incidente, en términos de las expresiones anteriores (ecuaciones 2.2.16 – 2.2.19). A continuación mostramos la distribución del frente de onda plano, para coordenadas cartesianas y esféricas.

$$\mathbf{E}_x(x, y, z) = E_0 e^{ik \cdot z} \hat{\mathbf{a}}_x \Rightarrow \mathbf{E}_x(r, \theta, \phi) = E_0 e^{ik \cdot r \cos \theta} (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{a}}_\phi) \quad (2.2.20)$$

Aquí hemos expresado el vector unitario  $\hat{\mathbf{a}}_x$ , en términos de los vectores unitarios para coordenadas esféricas.

La expresión 2.2.20 todavía no se parece a las encontradas mediante la solución de la ecuación de Helmholtz (expresiones 2.2.18 – 2.2.19). La relación de Bauer nos permite expresar la función exponencial en términos de funciones esféricas de Bessel [Butkov, 1968], [Born *et al*, 1980]. Esta aproximación nos acerca a la expresión buscada. Enseguida mostramos la relación de Bauer, así como la expresión para el frente de onda plano (normalizado).

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{E}_x(r, \theta, \phi) = \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \right] (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{a}}_\phi) \quad (2.2.22)$$

La componente radial de esta expresión será comparada con la obtenida mediante la ecuación de Helmholtz (relaciones 2.2.18 – 2.2.19). Esta comparación nos ayudará a encontrar la expansión requerida para la onda plana. Enseguida mostramos la componente radial de las expresiones 2.2.20 y/o 2.2.22.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^r(r, \theta, \phi) &= e^{ik \cdot r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_r \\ -\frac{1}{ikr} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^{ik \cdot r \cos \theta}) &= \sin \theta e^{ik \cdot r \cos \theta} \\ \mathbf{E}_x^r(r, \theta, \phi) &= \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell-1} \frac{(2\ell+1)}{r} j_\ell(kr) \frac{d}{d\theta} [P_\ell(\cos \theta)] \cos \phi = \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{k} \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \frac{(2\ell+1)}{r} j_\ell(kr) P_\ell'(\cos \theta) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

El superíndice,  $\mathbf{E}_x^r$ , hace énfasis en que se trata de la componente radial del campo. Más aún, la sumatoria cambia su índice ya que  $\ell \geq m$ , y claramente  $m = 1$ . La comparación, entre esta expresión y la correspondiente a la ecuación de Helmholtz, es fácil de llevar a cabo. Enseguida mostramos ambas relaciones, así como su expansión.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x^r(r, \theta, \phi) &= \hat{\mathbf{a}}_r \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \frac{(2\ell+1)}{r} j_{\ell}(kr) P_{\ell}^1(\cos \theta) \cos \phi \\ \mathbf{E}_{\text{TM}}^r(\ell, m; \text{par}) &= \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_{\ell}(kr) P_{\ell}^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \\ \mathbf{E}_{\text{TM}}^r(\ell, m; \text{impar}) &= \frac{\ell(\ell+1)}{r} z_{\ell}(kr) P_{\ell}^m(\cos \theta) \sin(m\phi) \\ \mathbf{E}_x^r(r, \theta, \phi) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^{\ell-1}}{k} \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \mathbf{E}_{\text{TM}}^r(\ell, 1; \text{par}); \quad z_{\ell}(kr) = j_{\ell}(kr)\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

Aquí hemos determinado tanto la función Bessel esférica que necesitamos, como el parámetro  $m$  de la función par involucrada. Más aún, esta solución es solamente para el campo eléctrico. Sin embargo, no debemos olvidar al campo magnético. La distribución para el campo magnético, en coordenadas cartesianas y esféricas, se muestra a continuación.

$$\mathbf{H}_y(x, y, z) = H_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{a}}_y \Rightarrow \mathbf{H}_y(r, \theta, \phi) = H_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{a}}_{\theta} + \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi})\tag{2.2.25}$$

Una comparación, análoga a la llevada a cabo para el campo eléctrico, entrega la solución para la componente radial del campo. En lugar de verse involucrada la función par, TM, (como en el caso del campo eléctrico), ahora la expresión queda en términos de la función impar, TE.

$$\mathbf{H}_y^r(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^{\ell-1}}{k} \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \mathbf{H}_{\text{TE}}^r(\ell, 1; \text{impar}); \quad z_{\ell}(kr) = j_{\ell}(kr)\tag{2.2.26}$$

La solución general se obtiene sumando las contribuciones de las relaciones 2.2.24 y 2.2.26.

El comportamiento, para el campo de nuestro interés, se muestra enseguida.

$$\mathbf{E}_x^r(\mathbf{r}, \theta, \phi) = E_0 \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^{\ell-1} (2\ell+1)}{k \ell(\ell+1)} [\mathbf{E}_{\text{TM}}^r(\ell, 1; \text{par}) + \mathbf{E}_{\text{TE}}^r(\ell, 1; \text{impar})] \right\} \quad (2.2.27)$$

Aquí hemos eliminado la normalización en amplitud del frente de onda incidente. Con esta expresión hemos encontrado el comportamiento, de la componente radial, para una onda plana. Esta onda plana incide en la partícula esférica. El efecto de la interacción se determina mediante las condiciones a la frontera del problema. Este efecto redundará en la inserción de coeficientes multiplicativos a cada uno de los campos (TM y TE) [Panofsky *et al*, 1962], [Born *et al*, 1980]. La componente radial para la onda esparcida se muestra a continuación.

$$\mathbf{E}_s^r(\mathbf{r}, \theta, \phi) = E_0 \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^{\ell-1} (2\ell+1)}{k \ell(\ell+1)} [\alpha_{\ell} \mathbf{E}_{\text{TM}}^r(\ell, 1; \text{par}) + \beta_{\ell} \mathbf{E}_{\text{TE}}^r(\ell, 1; \text{impar})] \right\} \quad (2.2.28)$$

Esta expresión debe contar con un comportamiento esférico a campo lejano. Lo anterior debido a que, a largas distancias, la partícula “emite” como una fuente puntual. En este caso la función esférica de Bessel, encontrada para la onda incidente, debe modificarse. La relación asintótica de esta función, cuando  $kr \rightarrow \infty$ , se muestra a continuación [Andrews, 1998].

$$j_{\ell}(kr) \sim \frac{\text{sen}\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{kr} \quad (2.2.29)$$

Este comportamiento dista de corresponder a un frente de onda esférico. Sin embargo, la segunda solución a la ecuación diferencial de Bessel tiene un comportamiento complementario [Andrews, 1998]. Éste se muestra a continuación.

$$n_{\ell}(kr) \sim -\frac{\cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{kr} \quad (2.2.30)$$

Con estas dos expresiones podemos conformar el comportamiento esperado. Las funciones de Hankel entregan el resultado esperado. Éstas, además de su comportamiento asintótico, se muestran a continuación.

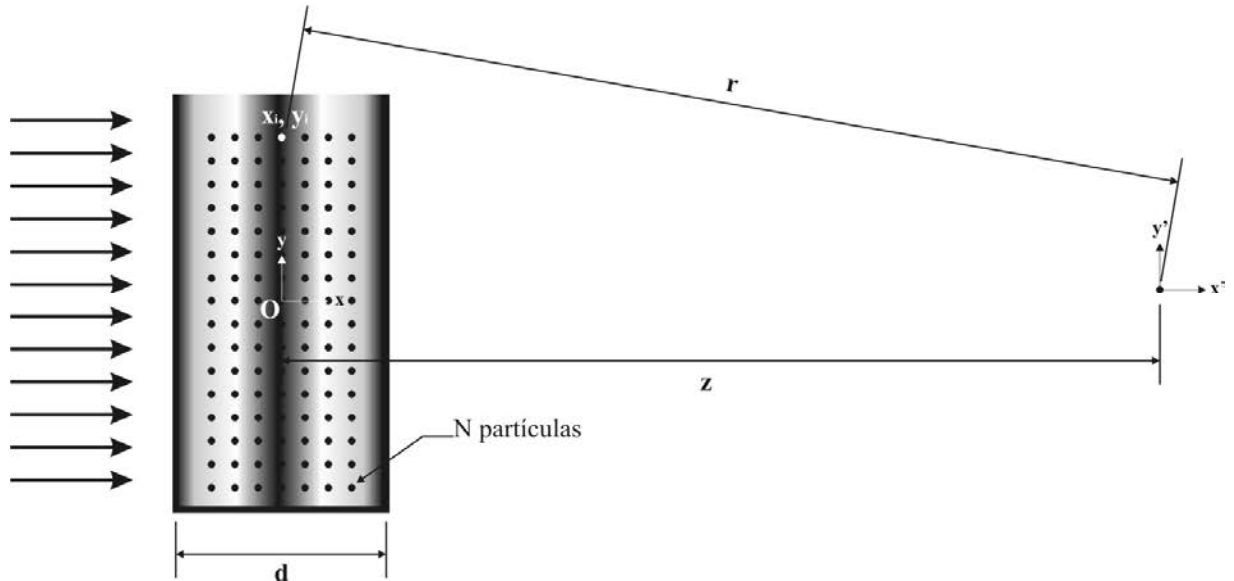
$$h_\ell^1(kr) = j_\ell(kr) + i n_\ell(kr); \quad h_\ell^2(kr) = j_\ell(kr) - i n_\ell(kr) \quad (2.2.31)$$

$$h_\ell^1(kr) \sim \frac{e^{ikr}}{ikr}; \quad h_\ell^2(kr) \sim \frac{e^{-ikr}}{ikr} \quad (2.2.32)$$

La primera función de Hankel representa un frente de onda esférico divergente (sección 3.2). Mientras tanto, la segunda describe un frente de onda convergente. Nuestro caso necesita la primera relación. El comportamiento del frente de onda esparcido se repite a continuación.

$$\mathbf{E}_S^r(\mathbf{r}, \theta, \phi) = E_0 \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^{\ell-1} (2\ell+1)}{k \ell(\ell+1)} [\alpha_\ell \mathbf{E}_{TM}^r(\ell, 1; \text{par}) + \beta_\ell \mathbf{E}_{TE}^r(\ell, 1; \text{impar})] \right\}; \quad z_\ell(kr) = h_\ell^1(kr) \quad (2.2.33)$$

Aquí hemos omitido el superíndice en la función de Hankel. Para terminar con este desarrollo regresemos a nuestro problema original. En la siguiente figura mostramos un esquema del problema analizado.



**Fig. 2.8** Esquema del problema de esparcimiento

La figura muestra un recipiente infinito (en las direcciones  $x, y$ ), con placas plano paralelas. El recipiente cuenta con una gran cantidad de partículas esparcidas. Para facilitar el análisis, suponemos que las partículas son idénticas y que están orientadas en la misma dirección. El plano de observación ( $x', y'$ ) se encuentra a una distancia muy grande,  $z \gg x, y$ . La aportación de una partícula, en este plano lejano, se obtiene mediante el análisis previo. Esta aportación se presenta a continuación.

$$\psi_s(r, \theta, \phi, t) = F(\theta, \phi) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{ikr} \quad (2.2.34)$$

Aquí  $F(\theta, \phi)$  representa la función de fase. En el análisis precedente ésta no fue obtenida analíticamente. El comportamiento de esta función se puede intuir mediante el estudio previo. Más aún, el esparcimiento generado por los tejidos es marcadamente frontal [Jacques, 1987]. Esto quiere decir que la función anterior se puede simplificar más.

$$\psi_s(r, t) = F(0) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{ikr} \quad (2.2.35)$$

Aquí  $F(0)$  representa la aportación de la fase para el esparcimiento frontal. Esta expresión se puede poner en términos de la distribución incidente. La distribución incidente, es decir una onda plana viajando en dirección “ $z$ ”, se muestra enseguida.

$$\psi_I(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \quad \therefore \quad e^{-i\omega t} = \psi_I e^{-ikz} \quad (2.2.36)$$

Esta relación nos permite expresar el campo esparcido en términos del incidente.

$$\psi_s = F(0) \frac{e^{i(kr - kz)}}{ikr} \psi_I \quad (2.2.37)$$



En el plano de observación contamos con dos aportaciones. La primera aportación corresponde a la onda incidente. La segunda tiene que ver con el frente de onda esparcido. Esto lo expresamos matemáticamente de la siguiente manera.

$$\psi_T = \psi_I + \psi_S = \psi_I + F(0) \sum_{j=1}^N \frac{e^{i(kr-kz)}}{ikr} \psi_I \quad (2.2.38)$$

Aquí estamos tomando en cuenta las aportaciones de las “N” partículas. La observación se efectúa a una distancia grande. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente aproximación (refiérase a la figura 2.8) [Boas, 1983].

$$r = \sqrt{z^2 + (x^2 + y^2)} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (2.2.39)$$

La ecuación 2.2.38 se simplifica al utilizar esta aproximación.

$$\psi_T \approx \psi_I \left\{ 1 + F(0) \sum_{j=1}^N \frac{e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{ikr} \right\} \quad (2.2.40)$$

Al inicio de este análisis enfatizamos que el recipiente cuenta con muchas partículas. Por lo tanto, podemos intercambiar la sumatoria por una integral de volumen (dicha integral debe multiplicarse por el número de partículas).

$$\psi_T \approx \psi_I \left\{ 1 + F(0) \frac{N}{k\Gamma} \int_0^d \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left[ \frac{k}{2r}(x^2+y^2) - \frac{\pi}{2} \right]} dx dy dz \right\} \quad (2.2.41)$$

Aquí hemos aproximado  $z = r$ . Estas integrales son sencillas de resolver (refiérase a la sección 3.2.1). Este resultado se muestra a continuación.

$$\Psi_T \approx \Psi_I \left\{ 1 + -\frac{2\pi Nd}{k^2} F(0) \right\} \quad (2.2.42)$$

La inclusión del medio esparcidor implica un decremento en la amplitud incidente. Es decir, la aportación del medio se puede interpretar como un índice de refracción complejo. Esta afirmación se pone en evidencia a continuación.

$$\Psi_T = \Psi_I e^{ik(1-n')d} \approx [1 - ik(1-n')d] \Psi_I = \left[ 1 + -\frac{2\pi N}{k^2} F(0) \right] \Psi_I \quad \therefore \begin{cases} n_r = 1 + \frac{2\pi N}{k^3} \text{Im}[F(0)] \\ n_i = \frac{2\pi N}{k^3} \text{Re}[F(0)] \end{cases} \quad (2.2.43)$$

Aquí hemos asumido que  $k(1-n')d$  es pequeño, además  $n' = n_r - in_i$ . Con esto concluimos que, el medio esparcidor, se comporta como un índice de refracción complejo. Este resultado es análogo al obtenido en la sección de absorción. La aportación en intensidad entrega la relación presentada al inicio de este análisis.

$$I = \Psi_T \Psi_T^* = (\Psi_I e^{-kn_i d} e^{ikn_r d}) (\Psi_I^* e^{-kn_i d} e^{-ikn_r d}) = I_0 e^{-\mu_s d} \quad (2.2.44)$$

La aportación de un medio absorbente y esparcidor se comporta también exponencialmente. Esta expresión se muestra enseguida.

$$I = I_a e^{-\mu_a d} I_s e^{-\mu_s d} = I_0 e^{-(\mu_a + \mu_s)d} = I_0 e^{-\mu_t d} \quad (2.2.45)$$

Esta expresión contiene el coeficiente de atenuación (o extinción) de la muestra. Más aún, la transmitancia del medio atenuante se obtiene dividiendo la intensidad de salida entre la de entrada.

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\mu_t d}; \quad \mu_t = \mu_a + \mu_s \quad (2.2.46)$$

Esta relación será muy importante para la interferometría de fotones no atenuados. Además, este análisis se extiende fácilmente a partículas no esféricas. Éstas, debido a su tamaño, pueden ser vistas como fuentes puntuales. Por lo tanto, su comportamiento será análogo al presentado. Cabe mencionar que, para concentraciones bajas el coeficiente de atenuación (al igual que el de absorción, refiérase a la sección 2.1.4) de una muestra es linealmente proporcional a su concentración [Schmidt, 1999] En la siguiente sección abordaremos dos fenómenos que ocurren en la interacción de luz con un medio esparcidor. El primero de ellos es los cambios de polarización que sufre la luz. El segundo de ellos tiene que ver con las pérdidas de coherencia del haz lumínico.

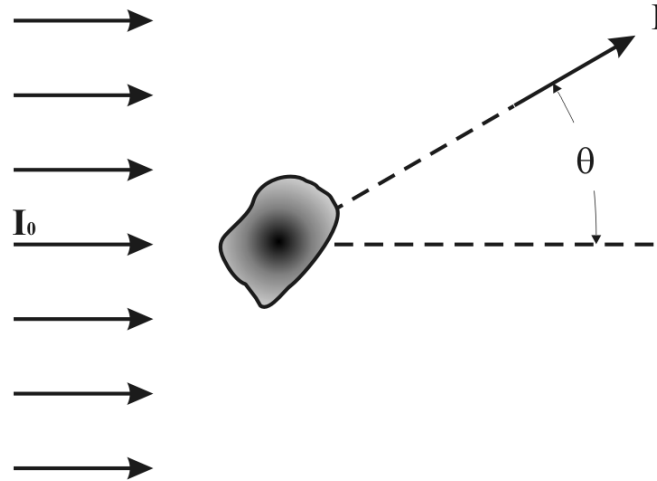
### **2.3 Pérdidas de polarización y coherencia por esparcimiento**

En el fenómeno de absorción, la radiación involucrada se disipa dentro del medio absorbente. Es decir, estos fotones nunca salen de la muestra. Sin embargo, el mecanismo más predominante en la interacción luz-tejido es el esparcimiento [Fantini *et al*, 2002]. Éste, además, es predominantemente frontal [Flock *et al.*, 1987]. Lo cual implica que los fotones esparcidos se propagarán de la mano de los fotones no atenuados. Sin embargo los fotones esparcidos han sufrido cambios de polarización y pérdidas de coherencia en su interacción con el medio. Estas pérdidas son muy importantes para poder discernir entre los fotones esparcidos y aquellos no atenuados.

Las pérdidas de polarización y coherencia, en medios esparcidores, son temas muy amplios. En esta sección presentamos un ejemplo de ambos casos. Mayores referencias sobre estos temas pueden ser encontradas en la literatura [Beran *et al*, 1974], [van de Hulst, 1981], [Bohren *et al*, 1983], [Goodman, 1985], [Zimnyakov, 2002]. Como primer punto analizaremos los cambios de polarización.

### 2.3.1 Cambios de polarización en el frente de onda esparcido

En el interferómetro de fotones no atenuados utilizamos un láser polarizado linealmente. Esto nos insta a investigar si los fotones esparcidos cambiarán sus propiedades de polarización. En la siguiente figura mostramos esquemáticamente la interacción entre la luz y una partícula.



**Fig. 2.9** Interacción luz-partícula y definición del ángulo de esparcimiento

Aquí  $I_0$  representa la intensidad de la luz incidente,  $I$  describe la intensidad de la luz esparcida y el ángulo  $\theta$  representa la dirección de la luz esparcida. En la sección previa obtuvimos el comportamiento (en un plano lejano) de la amplitud de la onda esparcida (refiérase a la relación 2.2.37). Con esta expresión obtenemos la intensidad de la luz que sufre esparcimiento.

$$I_s = F(\theta, \phi) \frac{I_0}{k^2 r^2} \quad (2.3.1)$$

La sección anterior dejó en claro que la función de fase,  $F(\theta, \phi)$  es difícil de caracterizar. De hecho, ésta depende de la forma y tamaño de la partícula esparcidora. Existen muchas referencias sobre el estudio de este parámetro [Born *et al*, 1980], [van de Hulst, 1981], [Bohren *et al*, 1983]. La manera en que depende de la polarización de la luz incidente se tratará enseguida. La intensidad y polarización de la luz esparcida se relacionan con los parámetros corres-

pendientes a la luz incidente. Esta dependencia tiene un carácter matricial y se muestra enseñada [van de Hulst, 1981].

$$\{I, Q, U, V\} = \frac{1}{k^2 r^2} \mathbf{M} \{I_0, Q_0, U_0, V_0\} \quad (2.3.2)$$

Aquí  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  y  $V$  representan los parámetros de Stokes para la luz esparcida [Born *et al*, 1980], [Bohren *et al*, 1983]. Mientras tanto  $I_0$ ,  $Q_0$ ,  $U_0$  y  $V_0$  contienen la información de los parámetros de Stokes para la luz incidente. El término  $\mathbf{M}$  representa una matriz de 16 elementos. Cada uno de estos elementos contiene información sobre las direcciones de incidencia y esparcimiento de la luz. Todas estas funciones son reales. Como un ejemplo presentamos la primera de las cuatro ecuaciones implícitas en 2.3.2.

$$I = \frac{1}{k^2 r^2} \{M_{11} I_0 + M_{12} Q_0 + M_{13} U_0 + M_{14} V_0\} = I_s \quad (2.3.3)$$

Si comparamos esta relación con la obtenida previamente (ecuación 2.3.1), podemos determinar la dependencia, en polarización, de la función de fase.

$$F(\theta, \phi) = M_{11} + M_{12} \frac{Q_0}{I_0} + M_{13} \frac{U_0}{I_0} + M_{14} \frac{V_0}{I_0} \quad (2.3.4)$$

Por lo tanto, la luz esparcida depende de la polarización que presente la luz incidente. El grado de polarización se define en términos de los cocientes  $Q_0/I_0$ ,  $U_0/I_0$  y  $V_0/I_0$ . Si la luz fuese completamente incoherente (por ejemplo, la luz natural) estos tres cocientes serían nulos.

El caso más general, para el estudio de polarización, implica que la matriz  $\mathbf{M}$  sea asimétrica. En el caso de contar solamente con una partícula esparcidora, el análisis se simplifica mucho. Si esta partícula es homogéneamente esférica, solamente tres cantidades son necesarias para encontrar la polarización de la onda esparcida [van de Hulst, 1981].

Hasta aquí abordamos el tema de polarización. Debe quedar claro que en nuestra aplicación la polarización sí se verá afectada. Como se mencionó al inicio de la sección, en el arreglo experimental un láser polarizado fue empleado. Por lo tanto, los parámetros de Stokes en nuestro caso no serán nulos. Lo cual traerá consigo cambios en la polarización del haz esparcido. A continuación analizaremos las pérdidas de coherencia por la interacción luz-partícula.

### *2.3.2 Pérdidas de coherencia en el frente de onda esparcido*

La coherencia de la luz permite que ésta genere interferencia. Las múltiples interacciones, en el medio esparcidor, hacen que el haz lumínico pierda su coherencia [Zimnyakov, 2002]. El estudio de este fenómeno es complejo. En el presente trabajo presentaremos un caso específico de pérdidas de coherencia en un medio esparcidor. El objetivo principal de este análisis es comprender la suposición de ausencia de coherencia en los fotones esparcidos. Esto redundará en su inhabilidad para generar el fenómeno de interferencia. La aproximación seguida, para este análisis, se toma de referencias clásicas [Beran *et al*, 1974], [Goodman, 1985].

La coherencia de luz presenta dos facetas. La primera es de carácter temporal, mientras que la segunda concierne el aspecto espacial. Existen diferentes métricas para determinar el grado de coherencia de un haz. Enseguida mostramos un resumen de dichas métricas [Goodman, 1985].

Nombre	Definición	Tipo de coherencia	Ecuación
Función de auto-coherencia	$\Gamma_{11}(\tau) = \langle u(P_1, t + \tau)u^*(P_1, t) \rangle$ $\Gamma_{11}(0) = I(P_1)$	Temporal	(2.3.5)
Grado complejo de auto-coherencia	$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)}$	Temporal	(2.3.6)
Función de coherencia mutua	$\Gamma_{12}(\tau) = \langle u(P_1, t + \tau)u^*(P_2, t) \rangle$	Espacial y temporal	(2.3.7)
Grado complejo de coherencia	$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}$	Espacial y temporal	(2.3.8)
Intensidad mutua	$J_{12} = \langle u(P_1, t)u^*(P_2, t) \rangle$ $J_{12} = \Gamma_{12}(0)$	Espacial casi monocromática	(2.3.9)
Factor complejo de coherencia	$\mu_{12} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} = \gamma_{12}(0)$	Espacial casi monocromática	(2.3.10)

Tabla 2.1 Métricas para determinar el grado de coherencia en un haz

Aquí  $P_i$  hace referencia a un punto en el espacio,  $\tau$  es un intervalo de tiempo dado, los paréntesis triangulares denotan valores promedios temporales y  $u$  representa la amplitud de la función evaluada. Más aún, la intensidad se calcula mediante la multiplicación de la amplitud por su complejo conjugado (la intensidad se representa mediante la letra  $I$ ).

La métrica utilizada para el análisis que sigue es la *función de coherencia mutua*,  $\Gamma_{12}(\tau)$ . Dicha métrica contiene tanto la información espacial como temporal de coherencia. Por lo tanto, representa un escenario global del comportamiento. El análisis que sigue toma como base la aproximación de [Beran *et al*, 1974].

Un tejido se comporta como un medio en el cual el índice de refracción es variable. Para determinar la función de coherencia mutua consideraremos tres escenarios. El primero tendrá que ver con un medio en el cual el índice de refracción es una función no aleatoria de la posición. La segunda aproximación involucrará un índice de refracción que depende tanto de la posición como del tiempo. Por último, asumiremos que el índice de refracción se define en términos de un conjunto. Es decir éste es una función solamente de la posición de cada miembro en el conjunto.

Existen ecuaciones que gobiernan la propagación de la función de coherencia mutua en el espacio. Éstas asumen que la función de coherencia mutua está caracterizada por una función real  $V^r(t)$ . Dicha función satisface la ecuación de onda escalar. Esta condición se muestra a continuación.

$$\nabla^2 V^r(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V^r(t)}{\partial t^2} \quad (2.3.11)$$

Aquí hemos omitido la dependencia espacial de la función  $V^r(t)$ . Las funciones, escalar y de coherencia mutua, deben satisfacer la relación presentada en la tabla 5.1. Enseguida mostramos esta ecuación.

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t+\tau)V_2^*(t) \rangle; \quad \langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) dt \quad (2.3.12)$$

Si la primera relación en 2.3.12 se deriva con respecto a uno de los escenarios (ya sea  $\nabla_1^2$  o  $\nabla_2^2$ , que corresponden a  $\Gamma_{12}$ ), podemos encontrar el comportamiento de la función de coherencia mutua. Esta relación, para la propagación en el vacío, se muestra a continuación.

$$\nabla_i^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^2}; \quad (i = 1, 2) \quad (2.3.13)$$

La función  $\Gamma_{12}(\tau)$  depende de siete variables;  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t$ . Por lo tanto, dos ecuaciones de onda (cada una con cuatro variables) son necesarias para determinar las incógnitas. Las dos ecuaciones anteriores se pueden combinar en una sola, de orden superior.

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^4} \frac{\partial^4 \Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^4} \quad (2.3.14)$$



Para tomar en cuenta un medio, con índice de refracción dependiente de la posición, partimos de las expresiones 2.3.13 y 2.3.14. La velocidad de la luz en el medio disminuye en función del índice de refracción [Wangsness, 1979]. Por lo tanto, la extensión de estas expresiones es directa. Esta relación la presentamos enseguida.

$$\nabla_i^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^2} n_i^2(\mathbf{x}_i) \frac{\partial^2 \Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^2}; \quad (i = 1, 2) \quad (2.3.15)$$

Nótese que los términos en negritas representan cantidades vectoriales. Cuando el índice de refracción varía con respecto al tiempo, la simple formulación anterior no es válida. Las relaciones, que describen el comportamiento, se pueden escribir como se muestra enseguida.

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [n_i^2(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t)] \quad (2.3.16)$$

$$\nabla_i^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [n_i^2(\mathbf{x}_i, t + \tau) V_1(t + \tau) V_2^*(t)] \quad (2.3.17)$$

Las funciones  $V_1$  y  $V_2$  por lo general no son independientes del índice de refracción. Por lo tanto, no tenemos una ecuación que gobierne solamente el comportamiento de la función de coherencia mutua. En general una solución analítica para esta ecuación diferencial no puede ser encontrada. Sin embargo, cuando  $n(\mathbf{x}, t)$  es una variable estadística (como en el caso de los medios esparcidos) una formulación que utiliza conjuntos puede ser llevada a cabo.

El problema analizado se simplifica si dos condiciones se presentan. Primero, las variaciones del índice de refracción deben contar con un carácter aleatorio. Segundo, éstas deben variar lentamente con respecto a las debidas a la radiación y su propagación. Con estas condiciones podemos efectuar un análisis por medio de conjuntos.

Los sistemas en el conjunto se determinan de dos maneras. Primero, el medio se considera fijo en tiempos largos comparados a los tiempos característicos de la radiación, pero cortos comparados con los tiempos de variación del medio. Segundo, diversos escenarios del medio

se estudian en tiempos consecutivos;  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . El tiempo entre el escenario  $t_{k+1}$  y  $t_k$  es largo en comparación a los tiempos característicos de la radiación. Entonces, cada tiempo  $t_j$  denota un sistema del conjunto. Cada miembro del conjunto produce una función mutua de coherencia diferente, la cual designamos  ${}^i\Gamma_{12}(\tau)$ . Esta función corresponde al índice de refracción espacial de ese miembro del conjunto. El promedio de las aportaciones en el conjunto,  $\overline{{}^i\Gamma_{12}(\tau)}$ , es importante para describir el comportamiento del medio.

El desarrollo matemático previo, en específico la relación 2.3.15, puede ser aplicado para el conjunto  $i$ . Este resultado se muestra a continuación.

$$\nabla_1^2 {}^i\Gamma_{12}(\tau) = \frac{{}^i n_1^2(\mathbf{x}_1)}{c^2} \frac{\partial^2 {}^i\Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^2} \quad (2.3.18)$$

Ahora, si diferenciamos con respecto al segundo escenario, obtenemos la relación de orden superior análoga a la expresión 2.3.14.

$$\nabla_2^2 \nabla_1^2 {}^i\Gamma_{12}(\tau) = \frac{{}^i n_1^2(\mathbf{x}_1) {}^i n_2^2(\mathbf{x}_2)}{c^2} \frac{\partial^4 {}^i\Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^4} \quad (2.3.19)$$

Sin embargo, esta relación representa un solo elemento. El promedio del conjunto de elementos, brindaría mucha más información. No obstante, este promedio no se puede obtener analíticamente porque los índices, y la función de coherencia mutua, no son independientes. Esto quiere decir que una sola ecuación diferencial, que gobierne la propagación, no puede ser obtenida. Sin embargo, una solución en términos de teoría de perturbaciones es posible. Enseguida mostramos los supuestos para llevar a cabo el análisis por teoría de perturbaciones.

$${}^i n_j^2(\mathbf{x}_j) = n_0^2 + \epsilon {}^i n_{j1}^2(\mathbf{x}_j) \quad (2.3.20)$$

$${}^i\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}^{(0)}(\tau) + \epsilon {}^i\Gamma_{12}^{(1)}(\tau) + \epsilon^2 {}^i\Gamma_{12}^{(2)}(\tau) + \dots \quad (2.3.21)$$

$$\overline{{}^i\Gamma_{12}(\tau)} = \overline{\Gamma_{12}^{(0)}(\tau)} + \epsilon \overline{{}^i\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)} + \epsilon^2 \overline{{}^i\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)} + \dots \quad (2.3.22)$$

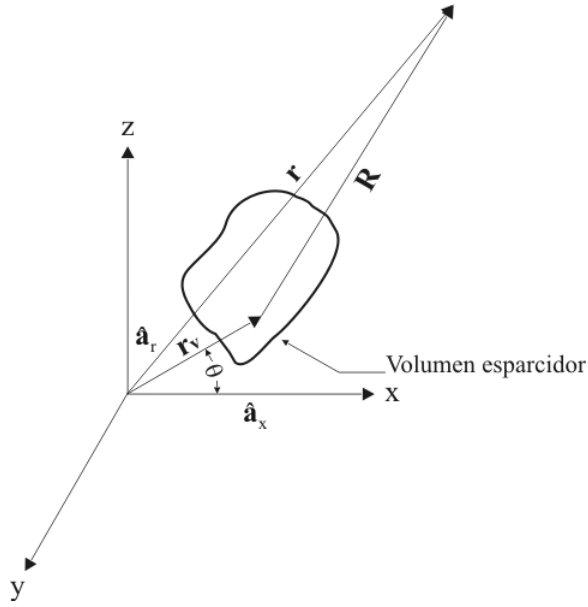
En la primera relación  $\overline{n_j^2(\mathbf{x}_j)}$  es aproximadamente igual al valor promedio ( $n_0^2$ ). Más aún  $\epsilon$  representa la perturbación. Las definiciones son análogas para las ecuaciones restantes. Es decir,  $\overline{\Gamma_{12}^{(j)}(\tau)}$  es aproximadamente igual al valor promedio,  $\Gamma_{12}^0(\tau)$ . El análisis, por teoría de perturbaciones, entrega una solución para el término  $\overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)}$  [Parrent *et al*, 1962]. Este resultado lo mostramos a continuación.

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)} + \frac{n_0^4}{c^4} \frac{\partial^4 \overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)}}{\partial \tau^4} - \frac{n_0^2}{c^2} \nabla_1^2 \frac{\partial^2 \overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)}}{\partial \tau^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \nabla_2^2 \frac{\partial^2 \overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)}}{\partial \tau^2} = \frac{\overline{n_{11}^2(\mathbf{x}_1)} \overline{n_{21}^2(\mathbf{x}_2)}}{c^4} \frac{\partial^4 \Gamma_{12}^{(0)}(\tau)}{\partial \tau^4} \quad (2.3.23)$$

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \alpha_{12}(\tau) + \frac{n_0^4}{c^4} \frac{\partial^4 \alpha_{12}(\tau)}{\partial \tau^4} - \frac{n_0^2}{c^2} \nabla_1^2 \frac{\partial^2 \alpha_{12}(\tau)}{\partial \tau^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \nabla_2^2 \frac{\partial^2 \alpha_{12}(\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{c^4} \frac{\partial^4 \Gamma_{12}^{(0)}(\tau)}{\partial \tau^4} \quad (2.3.24)$$

En la última expresión hemos simplificado la notación. Ahora, la función de coherencia mutua se representa mediante la letra  $\alpha$ . Con esta función podemos evaluar la pérdida de coherencia debida a una partícula esparcidora.

El análisis de este fenómeno se restringe a partículas (o medios) con un índice de refracción real. Además, la distribución de la radiación será encontrada en un plano lejano (refiérase a la sección 2.2). La cantidad de nuestro interés es  $\alpha_{12}(\tau) = \overline{\Gamma_{12}^{(2)}(\tau)}$ . Para este análisis suponemos que la distribución espacial de los índices de refracción es conocida. Más aún, el valor promedio, de la función de coherencia mutua, también se toma como dado. En la figura siguiente se muestra un diagrama esquemático del problema.



**Fig. 2.10** Diagrama del esparcimiento generado por un volumen

Aquí  $\mathbf{r}_v$  representa el vector de posición del origen al campo, además  $\mathbf{R}$  es el vector del campo al plano de observación, por último  $\mathbf{r}$  denota el vector del origen al plano de observación. En esta figura también están incluidos los vectores unitarios (tanto en la dirección  $x$  como en la dirección radial). Otro punto importante es que, la observación se efectúa en un plano alejado (al igual que en las secciones anteriores). La solución, para la ecuación diferencial 2.3.24, se encuentra en el espacio de Fourier. En el espacio de Fourier nuestra incógnita no está sometida a ninguna frontera. Esto implica que la ecuación diferencial, en este espacio, se pueda transformar en una de carácter integral. La utilización de la función de Green, para llevar a cabo esto, es indispensable. Enseguida mostramos la expresión diferencial en frecuencia.

$$(\nabla_1^2 + k_n^2)(\nabla_2^2 + k_n^2)_{\text{F}} \alpha_{12}(\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) k_{\text{F}}^2 \Gamma_{12}^{(0)}(\mathbf{v}) \quad (2.3.25)$$

$$k_n^4 = \frac{n_0^2}{c^4} (2\pi\nu)^4; \quad k^4 = \frac{(2\pi\nu)^4}{c^4}$$

$$_{\text{F}} \alpha_{12}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{12}(\boldsymbol{\tau}) e^{i2\pi\mathbf{v}\boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau}$$

$${}_F\Gamma_{12}^0(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}^0(\tau) e^{i2\pi\mathbf{v}\tau} d\tau$$

La representación integral, de la expresión 2.3.25, se obtiene mediante la función de Green. Las integrales volumétricas tendrán que contener las regiones de las cuales estamos evaluando la coherencia.

$${}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k^4 e^{ik[\Gamma_1(\mathbf{x}_1) - \Gamma_2(\mathbf{x}_2)]}}{r^2} \iint_{V'' V'} e^{-ik(\hat{\mathbf{a}}_{r_1} \cdot \mathbf{r}_{V'} - \hat{\mathbf{a}}_{r_2} \cdot \mathbf{r}_{V''})} \sigma(\mathbf{x}_{V'}, \mathbf{x}_{V''}) {}_F\Gamma^{(0)}(\mathbf{x}_{V'}, \mathbf{x}_{V''}, \mathbf{v}) dV' dV'' \quad (2.3.26)$$

Esta relación contiene información sobre la coherencia del haz. Sin embargo esta información está todavía muy oscurecida. El análisis de esta relación se simplifica si nuestra fuente es una onda plana monocromática. Más aún, una onda plana monocromática representa el escenario que hemos venido estudiando.

La relación en frecuencia, para una onda monocromática, fue presentada previamente (refiérase a la relación 2.1.30). Dicha relación en frecuencia implica una función delta de Dirac. La función de coherencia mutua para el caso de una onda plana monocromática tiene un comportamiento similar. Éste se presenta a continuación.

$${}_F\Gamma^{(0)}(\mathbf{x}_{V'}, \mathbf{x}_{V''}, \mathbf{v}) = {}_F I(\mathbf{v}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) e^{ik_0(\mathbf{x}_{V'} - \mathbf{x}_{V''})} \quad (2.3.27)$$

Debido a las propiedades de la delta de Dirac, la relación 2.3.26 se simplifica [Gaskill, 1978]. Esta expresión se muestra a continuación.

$${}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}) = \frac{{}_F I(\mathbf{v}_0) k_0^4}{(4\pi)^2 r^2} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) e^{ik_0[\Gamma_1(\mathbf{x}_1) - \Gamma_2(\mathbf{x}_2)]} \iint_{V'' V'} \sigma(\mathbf{x}_{V'}, \mathbf{x}_{V''}) e^{-ik_0(\hat{\mathbf{a}}_{r_1} \cdot \mathbf{r}_{V'} - \hat{\mathbf{a}}_{r_2} \cdot \mathbf{r}_{V''})} e^{ik_0(\mathbf{x}_{V'} - \mathbf{x}_{V''})} dV' dV'' \quad (2.3.28)$$

Aquí hemos sustituido la variable  $k$  por la correspondiente a  $k_0$ . Esto se ha efectuado con base en las propiedades de la delta de Dirac. Una simplificación adicional ayudaría a esclarecer la relación integral 2.3.28. La finalidad de efectuar este análisis es observar que, en efecto, la coherencia del haz esparcido se deteriora.

Por lo tanto, supongamos que solamente la intensidad turbulenta es no homogénea. Matemáticamente esto implica que la función  $\sigma$  se exprese en términos de dos funciones nuevas. Esta relación la mostramos enseguida.

$$\sigma(\mathbf{x}_{V'}, \mathbf{x}_{V''}) = \eta(\mathbf{x}_{V'}) \phi(|\mathbf{x}_{V'} - \mathbf{x}_{V''}|) \quad (2.3.29)$$

Aquí la primera función,  $\eta$ , tiene una característica específica. Ésta varía lentamente en distancias para las que la segunda función,  $\phi$ , cuenta con valores grandes. La separación de las dos integrales, en 2.3.28, implica que efectuemos una transformación de coordenadas. Dicha transformación de coordenadas involucra a las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{r}_{V'} - \mathbf{r}_{V''} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{r}_{V'} \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Además podemos expresar la relación, entre la onda incidente y la esparcida, mediante otra nueva variable.

$$\mathbf{K} = k_0(\hat{\mathbf{a}}_{r_2} - \hat{\mathbf{a}}_x); \quad |\mathbf{K}| = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.3.31)$$

El ángulo involucrado en esta expresión se muestra en la figura 2.10. Estas tres relaciones afectan y simplifican a la función de coherencia mutua.

$${}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \nu) = \frac{I(\nu_0)k_0^4}{(4\pi)^2 r^2} \delta(\nu - \nu_0) e^{ik_0[r_1(x_1) - r_2(x_2)]} \int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) e^{-ik_0 \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_{r_1} - \hat{\mathbf{a}}_{r_2})} dV_p \int_{V_s} \phi(|\mathbf{s}|) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}} dV_s \quad (2.3.32)$$

Esta expresión cuenta con información importante para nuestro análisis. Primeramente ésta es mucho más sencilla para evaluar. Esta relación solamente implica dos integrales de volumen. Más aún, de ésta podemos determinar la intensidad en un punto. Para llevar acabo esto, evaluamos la función en  $x_1 = x_1, x_2 = x_1$ . Esta expresión se muestra enseguida.

$${}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \nu) = \frac{I(\nu_0)k_0^4}{(4\pi)^2 r^2} \delta(\nu - \nu_0) \int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) dV_p \int_{V_s} \phi(|\mathbf{s}|) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{s}} dV_s \quad (2.3.33)$$

La coherencia espacial para este escenario es claramente unitaria. Lo anterior debido a que se trata de exactamente el mismo punto. Además esta relación nos deja ver que, los efectos de las variaciones estadísticas en el índice de refracción de un medio, se reflejan en la intensidad. Esta aseveración se obtiene tras una comparación entre las relaciones 2.3.29 y 2.3.33.

Por último analicemos los efectos en la pérdida de coherencia. Para esto supongamos que la intensidad disminuye lentamente en distancias para las que la coherencia cae hasta cero.

$${}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \nu) = {}_F\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \nu) e^{ik_0[r_1(x_1) - r_2(x_2)]} \frac{1}{\int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) dV_p} \int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) e^{-ik_0\mathbf{p}\cdot(\hat{\mathbf{a}}_{r_1} - \hat{\mathbf{a}}_{r_2})} dV_p \quad (2.3.34)$$

Mediante esta ecuación observamos que dos parámetros tienen una influencia directa en la coherencia del haz.

Primeramente, el tamaño del volumen esparcidor (léase, del tejido), éste se representa mediante la aportación de la integral  $\int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) e^{-ik_0\mathbf{p}\cdot(\hat{\mathbf{a}}_{r_1} - \hat{\mathbf{a}}_{r_2})} dV_p$ .

Como segundo punto los efectos, a gran escala, de las no homogeneidades del medio afectan la coherencia. Estas aportaciones tienen que ver con la integral  $\int_{V_p} \eta(\mathbf{p}) dV_p$ .

Este análisis fue llevado a cabo utilizando una teoría completamente escalar. Por lo tanto, la validez de los resultados es restringida. Sin embargo, este análisis abarca los escenarios en los que el esparcimiento sea predominantemente frontal. En los tejidos, como fue mencionado previamente, este es el esparcimiento que predomina. Por ende, las pérdidas de coherencia tendrán que ver con dos aspectos del medio: el tamaño del volumen esparcidor y las no homogeneidades del medio.

Como conclusión de este análisis enfatizamos que, la interacción luz-tejido induce la pérdida de coherencia en el haz esparcido. Esta característica fundamenta la inhabilidad de los fotones atenuados para generar interferencia. Por lo tanto, constituye un aspecto fundamental en la interferometría de fotones no atenuados.



### 3 TÉCNICAS INTERFEROMÉTRICAS

La interferencia de luz se presenta cuando dos haces coherentes, tanto espacialmente como temporalmente, se superponen [Steel, 1986], [Hariharan, 1985]. En esta sección, así como en las dos subsecuentes, desarrollamos el modelo matemático que sustenta la interferometría de fotones no atenuados. El énfasis de este capítulo es en el análisis del dispositivo sin muestra. Además, solamente se presenta el comportamiento espacial del sistema óptico. El análisis dinámico del sistema (léase temporal) se pospone hasta el siguiente capítulo.

En la primera sección presentamos el arreglo propuesto para la interferometría de fotones no atenuados. La sección 3.2 se enfoca en la propagación de Fresnel. Ésta constituye la herramienta fundamental para el análisis del dispositivo. Además se demuestra la propagación de un frente de onda Gaussiano (debido a su importancia en el desarrollo de la tesis). En la sección 3.3 estudiamos la propagación del haz Gaussiano en el interferómetro. Aquí obtenemos una relación general para la distribución transversal del frente de onda, antes y después de ser propagado. La sección 3.4 estudia los patrones de interferencia, generados mediante la configuración propuesta. Ejemplos de patrones de interferencia teóricos y prácticos son analizados. Además se hace énfasis en la importancia de una correcta alineación del sistema. En esta sección se pone de manifiesto la metodología para alinear el interferómetro. Una técnica para generar un haz Gaussiano más divergente, y para filtrar dicho haz espacialmente, es presentada. Más aún, esta sección muestra resultados teóricos y experimentales del comportamiento del sistema. Los escenarios de un interferómetro alineado y desalineado son analizados. Por último, en la sección 3.5, las conclusiones del capítulo son presentadas.



temáticas para nuestro análisis. Es decir, estudiemos cómo se propaga un frente de onda cualesquiera.

### 3.2 Propagación de Fresnel

Las referencias bibliográficas son extensas en el tema de propagación de radiación electromagnética [Goodman, 1993], [Gaskill, 1978], [Born *et al*, 1980]. En esta sección adoptaremos una aproximación intuitiva, aunque matemáticamente coherente, para obtener la relación de Fresnel. El concepto fundamental, detrás de nuestra explicación, es la creación de ondas secundarias de Huygens. Born enfatiza que, según el principio de Huygens, “*Cada punto correspondiente a un frente de onda puede considerarse como el centro de una perturbación secundaria. Esta perturbación secundaria da origen a ondas esféricas. La envolvente de dichas ondas secundarias, en un instante posterior, puede ser interpretada como el frente de onda en cuestión*” [Born *et al*, 1980]. La descripción del comportamiento de una onda esférica es crucial para nuestro análisis. Por lo tanto, el punto de partida para el análisis es la ecuación de onda (2.2.2).

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r}, t) + \mu\epsilon\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0; \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2.1)$$

En la ecuación 3.2.1 hemos supuesto que la dependencia temporal de la función  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  es exponencial compleja. La ecuación diferencial de Helmholtz, se obtiene sustituyendo la segunda expresión de 3.2.1 en la ecuación de onda [Panofsky *et al*, 1962]. El resultado se muestra a continuación.

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = 0; \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (3.2.2)$$

Aquí  $k$  representa la magnitud del vector de onda para la radiación analizada. La relación de Helmholtz será expresada en coordenadas esféricas. El objetivo es obtener el comportamiento

de un frente de onda esférico (es decir, de las ondas secundarias de Huygens). El Laplaciano se puede expresar en coordenadas esféricas [Cheng, 1997]. Esta relación se muestra enseguida.

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi^2} \quad (3.2.3)$$

La solución, que representa un frente de onda esférico, solamente cuenta con componente radial (debido a la simetría esférica del frente de onda). Esta característica simplifica la expresión del Laplaciano notablemente. Por ende, la ecuación a resolver se expresa de la siguiente manera.

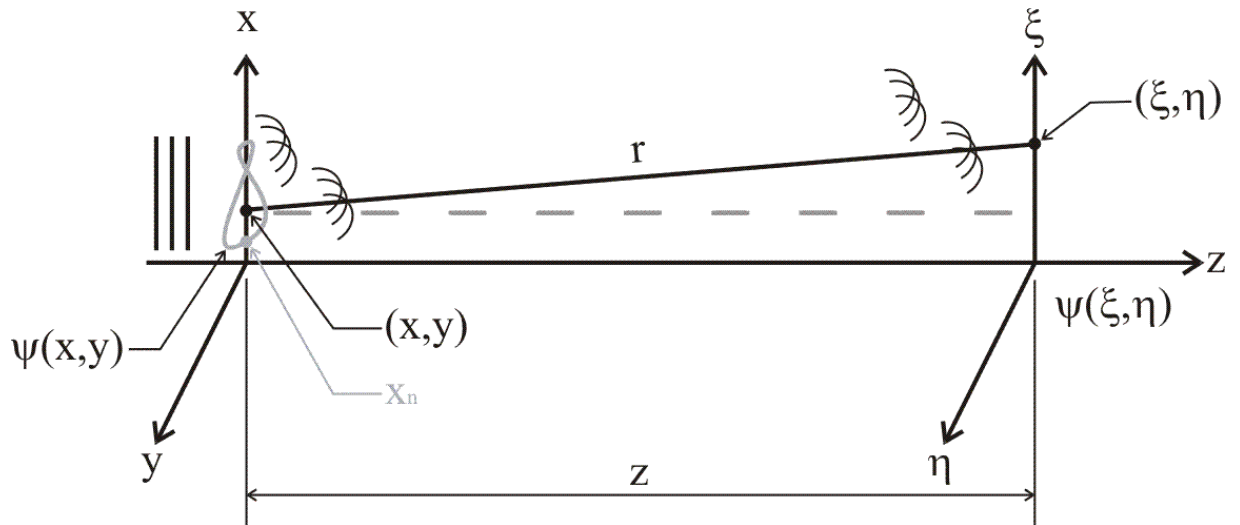
$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + k^2 \psi(r) = 0 \quad (3.2.4)$$

Aquí hemos aplicado la regla de la cadena para expandir la componente radial en 3.2.3 [Butkov, 1968]. Además este resultado lo sustituimos en la ecuación de Helmholtz (véase la expresión 3.2.2). La solución de la ecuación diferencial 3.2.4, que representa un frente de onda esférico, es fácil de encontrar [Wangsness, 1979].

$$\psi(r) = A \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.2.5)$$

La convención utilizada, en cuanto al signo de la función exponencial compleja se refiere, es que un signo positivo caracteriza a una onda divergente. En esta expresión  $A$  representa una constante. La superposición de las ondas esféricas secundarias (al igual que en el caso de una onda plana [Reitz *et al*, 1993]) determina una función arbitraria cualesquiera. Lo anterior está justificado por el principio de Huygens. Esta es la razón por la cual nos interesa la expresión previa.

Enseguida encontraremos la manera en que se propaga un frente de onda cualesquiera,  $\psi(x, y)$ . A través de este análisis, llegaremos a la generalización propuesta por Fresnel [Goodman, 1993]. El diagrama mostrado en la figura 3.2 presenta la configuración analizada.



**Fig. 3.2** Diagrama esquemático para la obtención de la relación de Fresnel

La función que estamos analizando está descrita por  $\psi(x, y)$ . En la figura 3.2 colocamos una apertura en forma de “8” para simular esta función. Es decir, para simular una distribución cualesquiera. En cuanto se impacta la luz en esta apertura (o para el caso cuando contamos con una distribución  $\psi(x, y)$  dada, en ese plano) se generan las ondas secundarias de Huygens. Dichas ondas se propagan hasta el plano  $(\xi, \eta)$ . En este plano obtendremos la nueva distribución (luego de la propagación). Naturalmente, la nueva distribución estará dada por la superposición de todas las ondas secundarias generadas en el plano  $(x, y)$ .

La dirección de propagación es a lo largo de  $r$ . La distancia de propagación se considera grande con respecto a las coordenadas transversales. Por lo tanto podemos encontrar una relación entre  $r$  y la distancia  $z$  en el eje óptico (refiérase la figura 3.2).

$$r^2 = (\xi - x)^2 + z^2 \quad \therefore \quad r = z \sqrt{1 + \left(\frac{\xi - x}{z}\right)^2} \approx z \left[ 1 + \frac{(\xi - x)^2}{2z^2} \right] = z + \frac{(\xi - x)^2}{2z} \quad (3.2.6)$$

Aquí hemos aproximado mediante una expansión en series [Boas, 1983], ya que  $z \gg (\xi - x)$ . Además hemos optado por analizar solamente la dirección  $x$  para facilitar la explicación. La extensión a dos dimensiones es inmediata.

Las ondas secundarias de Huygens contendrán información de la función que buscamos (es decir, la función  $\psi(x, y)$  es muestreada por las ondas de Huygens). Por ejemplo, para una cierta posición “n” en el eje  $x$  (refiérase la figura 3.2), tenemos la distribución de la onda secundaria como se muestra en la siguiente expresión.

$$\psi(x_n) \frac{e^{ikr}}{r} \approx \psi(x_n) \frac{e^{ik \left[ z + \frac{(\xi - x_n)^2}{2z} \right]}}{z} \quad (3.2.7)$$

Aquí hemos aproximado  $r \rightarrow z$  en el denominador. Además de haber sustituido la aproximación 3.2.6. Ahora queremos obtener todas las contribuciones de las ondas secundarias que se generaron en el plano  $(x, y)$ . Esto se representa matemáticamente mediante una sumatoria (o para incrementos infinitesimales mediante una integral). Esta operación abarca todas las ondas secundarias en cuestión. A nosotros nos interesa saber cómo se propaga todo el frente de onda. Por lo tanto, la superposición debe efectuarse a lo largo de todo el plano  $(x, y)$ . Este análisis nos entrega la expresión buscada.

$$\psi(\xi) = C \sum_n \frac{\psi(x_n)}{z} e^{ik \left[ z + \frac{(\xi - x_n)^2}{2z} \right]} \Rightarrow \psi(\xi) = C \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi - x)^2} dx \quad (3.2.8)$$

La constante que ha sido agregada a la integral será calculada a continuación. La determinación de dicha constante, servirá para demostrar que la ecuación anterior determina la propagación de un frente de onda cualesquiera.

Para encontrar la constante mencionada propagaremos un frente de onda plano. Un frente plano es solución a la ecuación de onda [Stratton, 1941]. Esto implica que el frente de onda

plano debe continuar así, a menos que algún factor externo modifique su comportamiento. Por lo tanto, proponemos una distribución plana  $\psi(x)$ , con fase inicial nula y con dirección de propagación en  $z$ .

$$\psi(x) = Ae^{ik \cdot r} = Ae^{ikz} = A \quad (3.2.9)$$

La sustitución de este frente de onda en la ecuación 3.2.8 nos lleva a una relación muy importante para nuestro trabajo.

$$\psi(\xi) = AC \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} x^2} e^{-i2\pi\frac{\xi}{\lambda z} x} dx = AC \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \left. F \left\{ e^{i\frac{\pi}{\lambda z} x^2} \right\} \right|_{u=\frac{\xi}{\lambda z}} \quad (3.2.10)$$

La obtención de la distribución propagada se simplifica. Ahora solamente tenemos que encontrar la transformada de Fourier de una función Gaussiana compleja. A continuación se presenta el resultado de la transformada mencionada (refiérase a la sección 3.2.1). Con este resultado podemos determinar la constante  $C$  propuesta. Más aún, encontraremos que la distribución obtenida es, efectivamente, una onda plana.

$$\psi(\xi) = AC \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \left. F \left\{ e^{i\frac{\pi}{\lambda z} x^2} \right\} \right|_{u=\frac{\xi}{\lambda z}} = AC \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \sqrt{i\lambda z} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} = AC \frac{\sqrt{i\lambda z}}{z} e^{ikz} \quad (3.2.11)$$

Esta relación solamente está tomando en cuenta una dirección,  $x$ . Es decir, estamos solucionando el caso cilíndrico. Para la onda plana necesitamos la contribución en  $y$ . Ésta es idéntica a la presentada en 3.2.10 y 3.2.11. Con esto en mente llegamos a la relación esperada.

$$\psi(\xi, \eta) = AC \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} (\xi^2 + \eta^2)} \left. F \left\{ e^{i\frac{\pi}{\lambda z} x^2} \right\} \right|_{u=\frac{\xi}{\lambda z}} \left. F \left\{ e^{i\frac{\pi}{\lambda z} y^2} \right\} \right|_{u=\frac{\eta}{\lambda z}} = AC \frac{i\lambda z}{z} e^{ikz} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{i\lambda} \quad (3.2.12)$$

La relación bidimensional completa (incluyendo la constante recién encontrada) se obtiene fácilmente de nuestro análisis previo. Esta relación es crucial para el desarrollo sistemático de la tesis.

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} dx dy \quad (3.2.13)$$

Así podemos concluir que, la aproximación de ondas secundarias de Huygens nos permite obtener la integral de Fresnel. Este acercamiento, al concepto de la propagación de ondas electromagnéticas, es tanto comprensible como coherente matemáticamente.

Antes de finalizar esta sección, quisiéramos remarcar la importancia de la transformada de Fourier de una función Gaussiana. La última parte de esta sección, se ocupará de la resolución de esta transformada (ecuación 3.2.10).

### 3.2.1 Transformada de Fourier de una función Gaussiana compleja

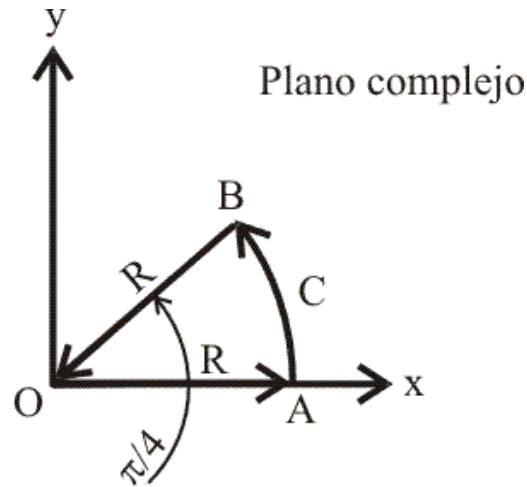
Esta sección es puramente matemática. Las implicaciones de este análisis son de gran envergadura para nuestro trabajo. Cabe mencionar que la operación de transformada de Fourier se utiliza, a lo largo de esta tesis, en su forma simétrica. Más aún, las variables en el dominio de las frecuencias (espaciales) son “u” y “v”. Éstas corresponden a “x” y “y” en el espacio. La transformada que deseamos obtener se muestra enseguida (compárese con la ecuación 3.2.10).

$$f(u) = F\{e^{ix^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} e^{-i2\pi ux} dx = e^{-iu^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\pi u)^2} dx = e^{-i(\pi u)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is^2} ds = 2e^{-i(\pi u)^2} \int_0^{\infty} e^{is^2} ds \quad (3.2.14)$$

Aquí hemos completado el cuadrado perfecto y aplicado el cambio de variable,  $s = x - \pi u$ . Este cambio de variable no modifica los límites de integración. Los límites de integración fueron modificados debido a que la función analizada es par. La última relación integral pue-



de resolverse utilizando cálculo de variable compleja [Churchill, 1948]. El contorno propuesto, para resolver la integral mediante el teorema de Cauchy, se presenta en la figura 3.3.



**Fig. 3.3** Contorno propuesto para resolver la integral 3.2.14

El teorema de Cauchy enfatiza que una integral en un contorno cerrado, que no contenga puntos singulares, es igual a cero. La función que estamos analizando es analítica en todo el espacio [Churchill, 1948]. Por lo tanto, su integral en el contorno OAB debe ser nula. El contorno está formado por el segmento de arco de círculo AB, con centro en O y radio R (como se muestra en la figura 3.3). En el segmento “OA” la variable compleja es  $z = r e^{i\theta} = x$  (se encuentra en el eje real) y la integral corre desde  $r = 0$  hasta  $r = R$ . En el segmento “AB”,  $z = R e^{i\theta}$ . La integral va desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi/4$ . Por último en el segmento “BO”,  $z = r e^{i\pi/4}$ . Esta integral abarca desde  $r = R$  hasta  $r = 0$ . El teorema de Cauchy entrega el siguiente resultado.

$$\int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0 \quad \therefore \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{i2\theta}} (iR e^{i\theta} d\theta) + \int_R^0 e^{ir^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dr = 0 \quad (3.2.15)$$

Esta última expresión contiene tres términos. La primera integral es la relación que estamos buscando (cuando  $R \rightarrow \infty$ ). Las dos integrales restantes pueden ser expresadas de manera distinta, utilizando la identidad de Euler [Boas, 1983].

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} (iR e^{i\theta} d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \text{Sen} 2\theta} (iR e^{i\theta} d\theta) \quad (3.2.16)$$

$$\int_R^0 e^{ir^2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 e^{ir^2 (i \text{sen} \frac{\pi}{2})} dr = -e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R e^{-r^2} dr \quad (3.2.17)$$

Estos resultados son sustituidos en 3.2.15 y obtenemos otra expresión para la integral que estamos analizando.

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R e^{-r^2} dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \text{sen} 2\theta} (iR e^{i\theta} d\theta) \quad (3.2.18)$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad es sencilla de evaluar (cuando  $R \rightarrow \infty$ ).

$$I^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = e^{i\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = -\frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} (-1) \quad \therefore \quad I = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{i\pi}}{2} \quad (3.2.19)$$

La segunda relación en 3.2.18 tiende a cero, conforme  $R \rightarrow \infty$ . Esto se deduce enseguida.

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \text{sen} 2\theta} (iR e^{i\theta} d\theta) \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \text{sen} 2\theta} R d\theta \quad (3.2.20)$$

Esta desigualdad obviamente se cumple ya que, el primer término exponencial es siempre menor o igual a uno (por la relación de Euler). Además sabemos que, tanto el término  $i$  como  $e^{i\theta}$ , representan desfases. El cambio de variable,  $\phi = 2\theta$ , resulta en una relación más sencilla.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \text{sen} 2\theta} R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \text{sen} \phi} d\phi; \quad \text{sen} \phi \geq \frac{2\phi}{\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \therefore \quad \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \text{sen} \phi} d\phi \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2 \phi}{\pi}} d\phi \quad (3.2.21)$$

Esta última integral es muy sencilla de evaluar y llegamos a la conclusión deseada.

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} (iR e^{i\theta} d\theta) \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2 \phi}{\pi}} d\phi = -\frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1) \quad (3.2.22)$$

Esta relación es claramente cero cuando el radio del contorno tiende a infinito. Por lo tanto, la segunda expresión, del lado derecho de la igualdad, en 3.2.18 es nula. Esta implicación nos entrega el valor de la integral estudiada.

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{i\pi}}{2} \quad \therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{i\pi} \quad (3.2.23)$$

El resultado mostrado en esta ecuación, nos permite conocer la transformada de Fourier planteada en la relación 3.2.14.

$$f(u) = F\{e^{ix^2}\} = e^{-iu^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is^2} ds = \sqrt{i\pi} e^{-i(\pi u)^2} \quad (3.2.24)$$

Esta expresión es fundamental para el resto del desarrollo. Más aún, con esta expresión, y propiedades bien establecidas de la transformada de Fourier, una gran cantidad de problemas serán resueltos. Una propiedad esencial de la transformada de Fourier se presenta a continuación [Gray *et al*, 1995]. Además presentamos una forma más simétrica (de la relación 3.2.24), la cual será utilizada ampliamente en la tesis.

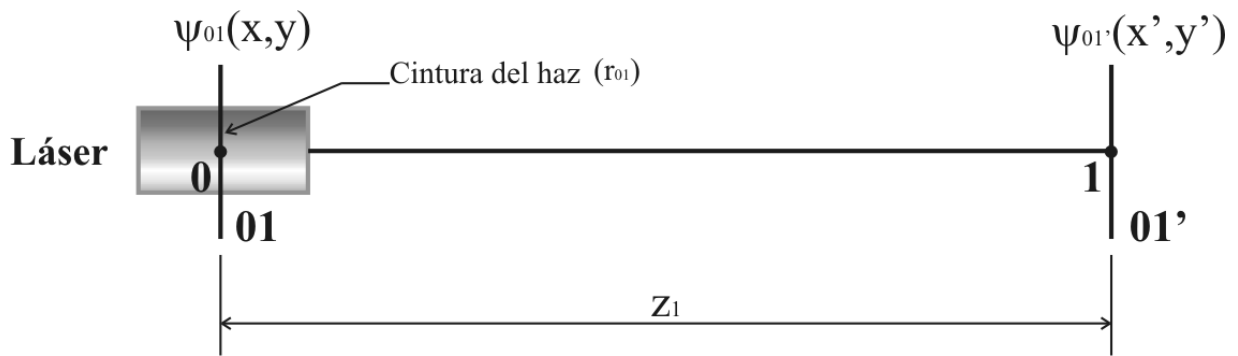
$$F\{f(ax)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right) \quad (3.2.25)$$

$$f(u) = F\{e^{-\pi(ax)^2}\} = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{\pi u}{a}\right)^2}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{i\pi}} \quad (3.2.26)$$

### 3.2.2 Propagación de un frente de onda Gaussiano

En la teoría de física de láseres se demuestra que, la distribución transversal del haz láser depende de múltiples factores. Entre ellos podemos citar la forma del resonador, medio activo y otras características del láser [Thyagarajan *et al*, 1981]. En la mayoría de las fuentes láseres, se intenta obtener una distribución transversal Gaussiana a la salida del resonador [Siegman, 1986]. Por lo tanto, la propagación de un haz Gaussiano es crucial para cualquier análisis sólido en óptica de láseres.

La propagación de un frente de onda Gaussiano es muy sencilla de analizar. Las bases necesarias para este estudio se obtienen de la sección precedente. Enseguida mostramos la propagación de un frente de onda Gaussiano desde el plano  $(x, y)$  hasta el plano  $(x', y')$ , separados una distancia  $z_1$ . La figura 3.4 muestra dicha configuración.



**Fig. 3.4** Configuración para la propagación de un haz Gaussiano

Este análisis es un preámbulo ideal para la sección siguiente, y por ende para la interferometría de fotones no atenuados. La nomenclatura adoptada, presenta la ventaja de ser fácilmente extendida a múltiples propagaciones del haz. Las variables que contengan una prima, se refieren a características cuando el frente de onda ya fue propagado. Mientras que la ausencia de primas representa dichas propiedades en su estado inicial.

La distribución del frente de onda (sin curvatura alguna), así como su implementación en la integral de Fresnel (ecuación 3.2.13) se presentan a continuación.

$$\Psi_{01}(x, y) = A e^{-\frac{x^2+y^2}{r_{01}^2}}; \quad A = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \quad (3.2.27)$$

$$\Psi_{01'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{r_{01}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} dx dy \quad (3.2.28)$$

La constante,  $A$ , mostrada en la ecuación 3.2.27 emerge de la relación de conservación de potencia [Gaskill, 1978]. La potencia total del haz Gaussiano se representa por la variable  $P$ . Además, el término  $r_{01}$  representa el radio en la cintura del haz (véase figura 3.4). La resolución de la relación de Fresnel, se obtiene mediante la aplicación de la ecuación 3.2.26. Del análisis algebraico obtenemos una relación con información importante y concisa.

$$\Psi_{01'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \frac{e^{ikz_1}}{i\lambda z_1} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1}[x'^2+y'^2]} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{r_{01}^2}-i\frac{\pi}{\lambda z_1}\right)(x^2+y^2)} e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x'}{\lambda z_1}\right)x+\left(\frac{y'}{\lambda z_1}\right)y\right]} dx dy; \quad a = \sqrt{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{r_{01}^2}-i\frac{\pi}{\lambda z_1}\right)}$$

$$\Psi_{01'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{01'} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z_1} e^{-\frac{x'^2+y'^2}{r_{01'}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1} \beta_{01'}(x'^2+y'^2)} \quad (3.2.29)$$

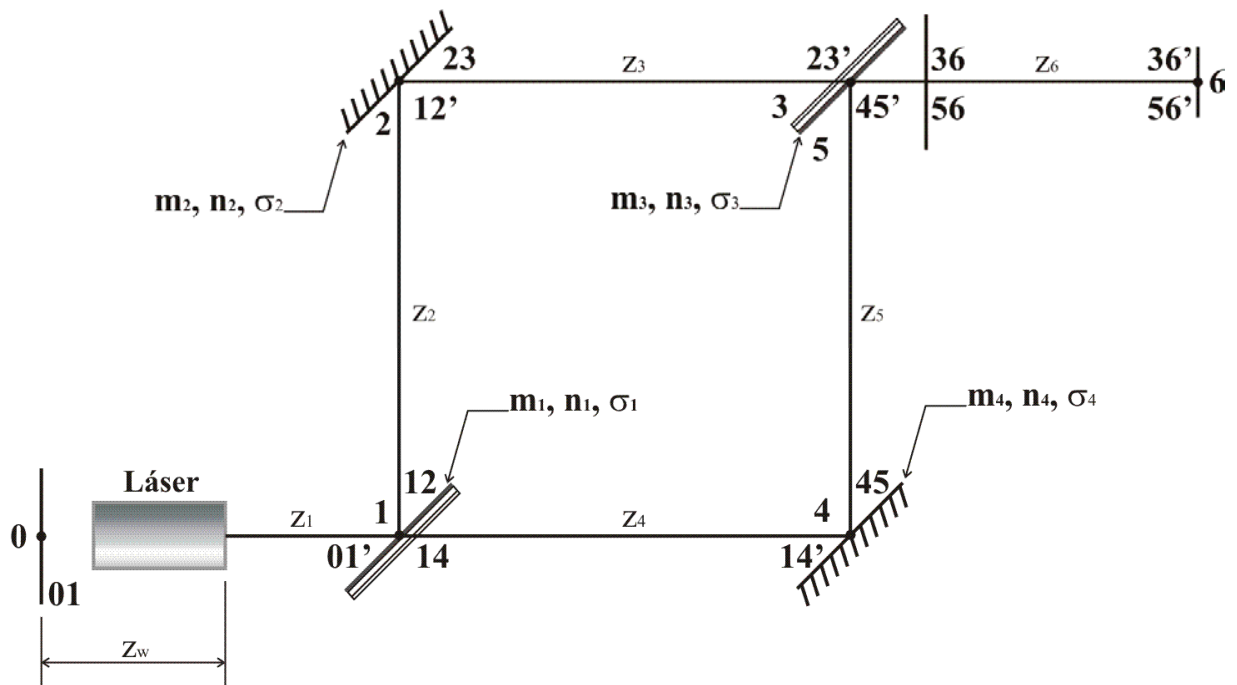
$$\alpha_{01'} = \frac{(\pi r_{01}^2)^2 - i(\lambda z_1)(\pi r_{01}^2)}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2}; \quad r_{01'}^2 = \left(\frac{\lambda z_1}{\pi r_{01}^2}\right)^2 + r_{01}^2; \quad \beta_{01'} = 1 - \frac{(\pi r_{01}^2)^2}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2} \quad (3.2.30)$$

El resultado obtenido, ecuación 3.2.29, es muy importante. Éste pone de manifiesto que el frente de onda, conserva su carácter Gaussiano. Las expresiones mostradas en la relación 3.2.30 determinan: la modulación en amplitud ( $\alpha_{01'}$ ), el radio de la Gaussiana en el plano de propagación ( $r_{01'}$ ) y el radio de curvatura de dicha Gaussiana (dado por  $z_1 / \beta_{01'}$ ). Un aspecto esencial de la expresión 3.2.29 es la información de divergencia del haz. La componente exponencial cuadrática compleja, representa la fase del frente de onda. Según nuestra convención (refiérase a la ecuación 3.2.5), este frente de onda se encuentra divergiendo. Este comportamiento matemático concuerda con la descripción física del fenómeno de propagación.

Por último es interesante notar que  $\beta_{01'} = 1 - \text{Re}(\alpha_{01'})$ . Estas relaciones, 3.2.30, son de vital importancia para nuestro desarrollo. Con base en este análisis, vamos a estudiar la propagación de la luz láser en el interferómetro.

### 3.3 Interferómetro Mach-Zehnder

El diagrama esquemático, del dispositivo utilizado para la interferometría de fotones no atenuados, se muestra en la figura 3.5.



**Fig. 3.5** Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados

Aquí encontramos demarcados los puntos importantes, para la propagación de luz, en el interferómetro. Los parámetros con primas representan al frente de onda propagado (refiérase a la sección anterior). Mientras que aquellos que no cuentan con primas se refieren al frente de onda sin propagar.

Las variables  $m_i$  y  $n_i$  especifican desviaciones probables en los componentes ópticos. Estos parámetros se refieren a la dirección ( $m_i \rightarrow x_i$ ,  $n_i \rightarrow y_i$  respectivamente) específica del frente de onda, luego de la interacción con un componente óptico desalineado. Concisamente, estos parámetros simulan las desviaciones que se pueden presentar en el sistema óptico. Estas desalineaciones son acumulativas (refiérase a las secciones 3.3.2.1 y 3.3.3).

Los coeficientes  $\sigma$  describen el porcentaje de reflexión, ya sea de los divisores de haz ( $\sigma_{1,3}$ ) o de los espejos ( $\sigma_{2,4}$ ), según sea el caso. Los parámetros  $z_{1,2,3,4,5,6}$  representan las distancias, entre componentes ópticas, en el interferómetro. Por último, la distancia  $z_w$  describe la localización de la cintura del haz.

Todos los parámetros involucrados en la propagación del haz son conocidos. Una excepción es la localización de la cintura del haz Gaussiano. Enseguida mostraremos que, para nuestro láser, la cintura está ligeramente afuera de la cavidad resonante (véase la figura 3.5).

### 3.3.1 Localización de la cintura del láser

El concepto de cintura del haz [Thyagarajan *et al*, 1981], es muy importante en la propagación de frentes de onda Gaussianos (refiérase a las figuras 3.4 y 3.5). En esta posición, el frente de onda no presenta ninguna vergencia [Meyer-Arendt, 1972]. Es decir, el frente de onda no diverge ni converge. Por lo tanto, como se muestra en la ecuación 3.2.27 y 3.2.29,  $\beta = 0$  (el frente de onda es plano).

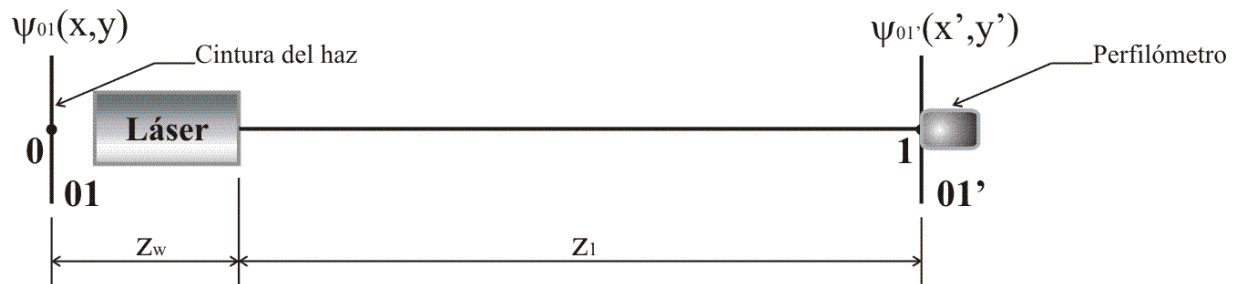
Los láseres convencionales son diseñados para trabajar en el orden TM00 [JDS Uniphase]. Este orden tiene un comportamiento Gaussiano [Siegman, 1986]. Las fábricas de láseres proveen información específica sobre sus fuentes. Entre la información que proporcionan se encuentra: la potencia mínima de salida, longitud de onda, pureza de modos (TM00, > 95% para nuestro caso), diámetro en la cintura, divergencia del haz, entre otros [JDS Uniphase].

La localización de la cintura, por lo general, no es proporcionada. En nuestro arreglo experimental utilizamos un láser JDS Uniphase 1145/P. La potencia mínima de salida, reportada por el fabricante, son 21 mW. Además, este láser cuenta con una razón de polarización (lineal) de 500:1. El diámetro del haz en la cintura lo especifican como  $r_{0l} = 0.7 \text{ mm} \pm 3\%$ , a una potencia equivalente a  $e^{-2}$  del máximo posible [JDS Uniphase] (refiérase a la ecuación 3.3.1). Lo que esto quiere decir es que, si nosotros determinamos la intensidad, el 86.5% de la misma estará contenida dentro de este diámetro.

La intensidad, para luz coherente, se obtiene multiplicando la amplitud por su complejo conjugado [Goodman, 1993]. Esta operación se muestra a continuación (aquí utilizamos la ecuación 3.2.27 como punto de partida).

$$I(x, y) = \psi(x, y)\psi^*(x, y) = \frac{2P}{\pi r_0^2} e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{r_0^2}}; \quad r_0^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore \quad I(x, y) = \frac{2P}{\pi r_0^2} e^{-2} \quad (3.3.1)$$

El conocimiento del radio de la Gaussiana, en la cintura del haz, es necesario para determinar la localización de la misma. La localización de la cintura fue determinada experimentalmente. Para llevar a cabo esto propagamos el haz hasta un plano  $(x', y')$ . Éste se encontraba a una distancia  $z_1$  de la salida del láser. La cintura del haz se propuso a una distancia  $z_w$  hacia atrás de la salida del láser, tal como se muestra en la figura siguiente.



**Fig. 3.6** Arreglo utilizado para determinar la localización de la cintura del haz

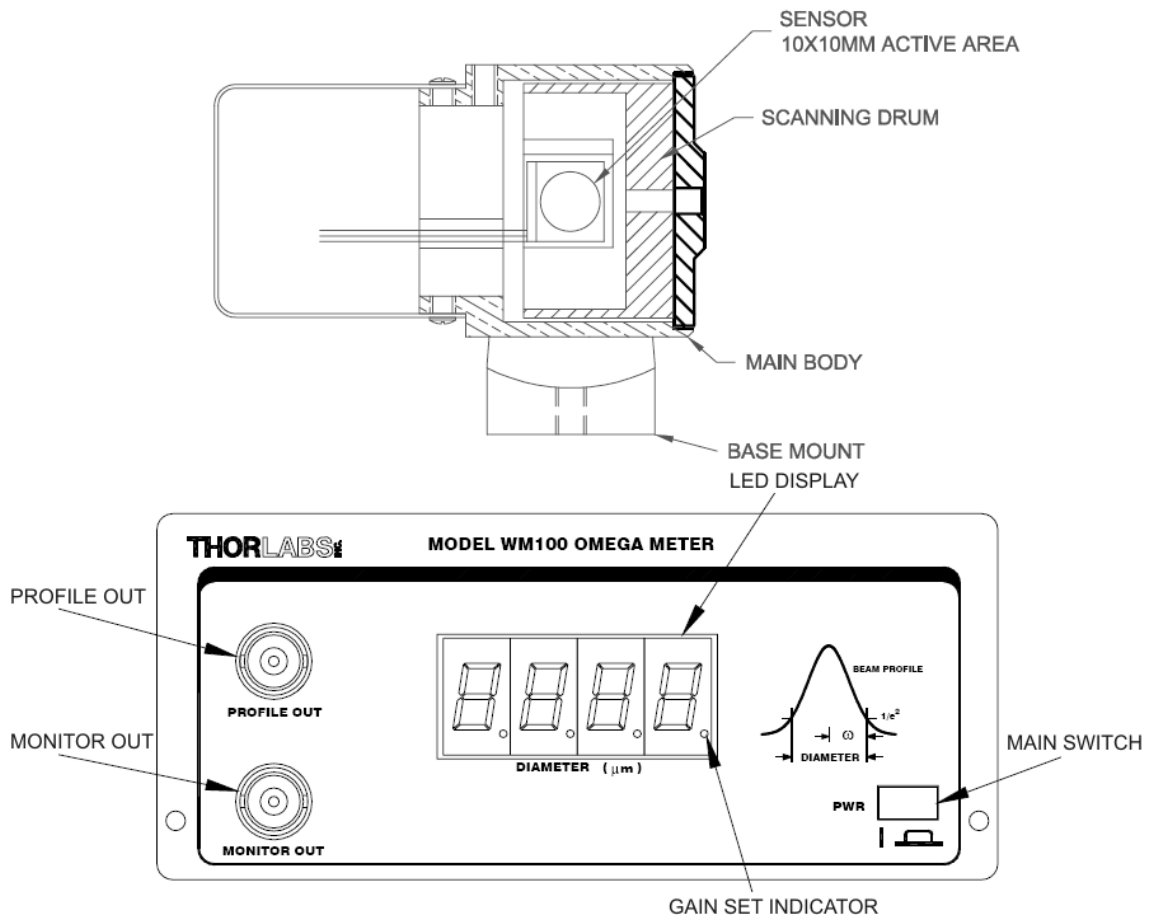
En el plano  $(x', y')$ , la intensidad está dada por la relación que presentamos enseguida.



$$I_{01'}(x', y') = A e^{-\frac{2x'^2 + y'^2}{r_{01'}^2}}; \quad r_{01'}^2 = \left[ \frac{\lambda(z_1 + z_w)}{\pi r_{01}} \right]^2 + r_{01}^2; \quad z_w = \frac{\pi r_{01}}{\lambda} \sqrt{r_{01'}^2 - r_{01}^2} - z_1 \quad (3.3.2)$$

La distribución de amplitud, así como el radio de la Gaussiana en el plano de propagación, se obtuvieron de 3.2.29 y 3.2.30. Además en 3.3.2 hemos agrupado las constantes (A). La relación de intensidad es idéntica, funcionalmente hablando, a la mostrada previamente (ecuación 3.3.1). Entonces, si nosotros podemos encontrar el radio que contenga el 86.5% de energía en este plano ( $r_{01'}$ ), la tercera relación en 3.3.2 entregará la posición de la cintura del haz.

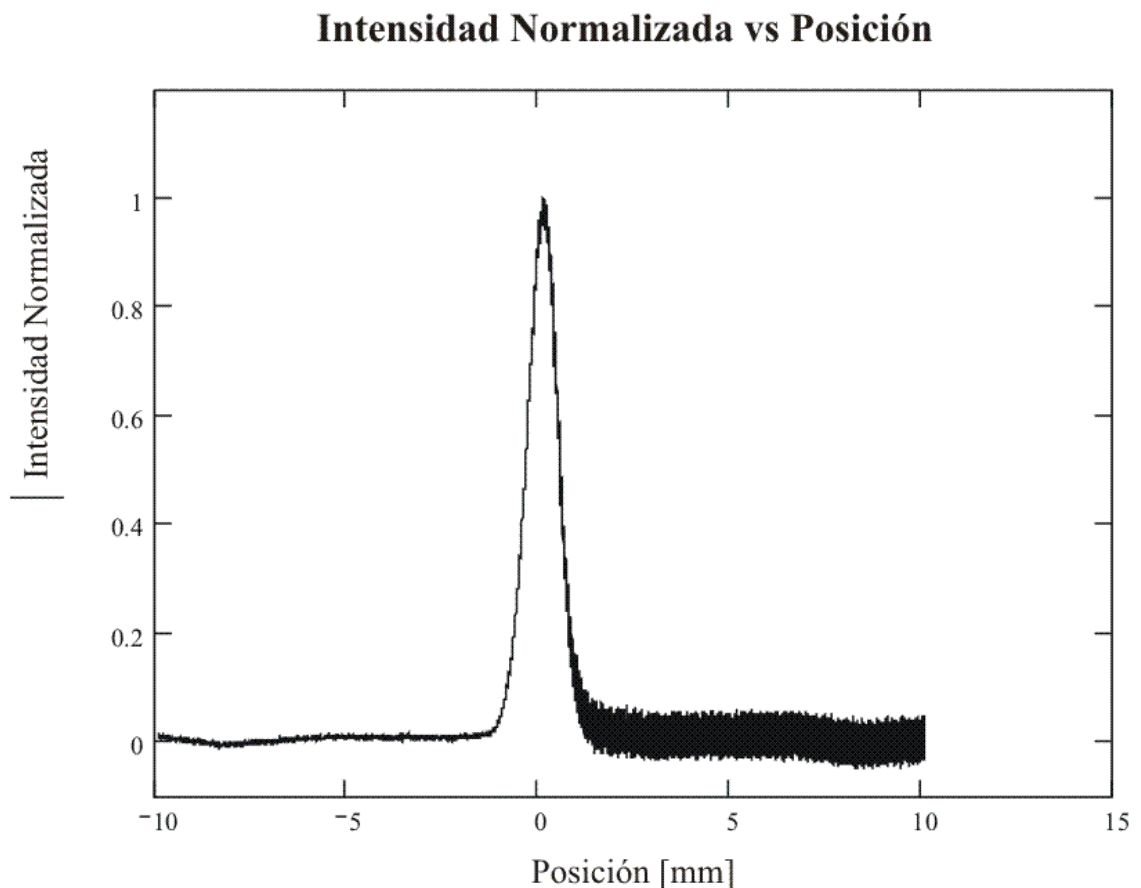
En la práctica utilizamos un perfilómetro [Thorlabs A, 2003] para determinar el radio, de la Gaussiana, en el plano de propagación ( $x', y'$ ). Este instrumento se muestra en la figura 3.7.



**Fig. 3.7** Perfilómetro para determinar el diámetro del haz Gaussiano [Thorlabs A, 2003]

La información que provee este perfilómetro es el diámetro, en donde el 86.5% de la energía está contenida [Thorlabs A, 2003]. La técnica del demodulador de navaja es utilizada para obtener esta información [Mueller *et al*, 1979]. La precisión del instrumento es  $\pm 5\%$  del valor en el display o  $\pm 1\mu\text{m}$ . El proveedor enfatiza que se debe tomar la incertidumbre más grande. Cabe notar que el instrumento está diseñado para medir distribuciones Gaussianas. Esto es, si nuestro láser contiene información de modos, que no sea el TM00 (lo cual es un hecho [JDS Uniphase]), entonces la medición es más imprecisa.

La distribución experimental del frente de onda, obtenida mediante la implementación del perfilómetro, se muestra en la figura 3.8.



**Fig. 3.8** Distribución experimental del frente de onda propagado

El diámetro del haz fue calculado en diferentes posiciones. Para cada una de estas posiciones, la relación 3.3.2 fue aplicada. Los valores experimentales de la distancia de propagación ( $z_1$ ), diámetro del haz ( $r_{01}$ ), y localización de la cintura ( $z_w$ ), se muestran en la siguiente tabla.

$z_1$ [mm]	$r_{01}$ [mm]	$z_w$ [mm]
1639.0	1.649	1162.0
1430.0	1.500	1104.0
1073.0	1.268	1045.0
1039.0	1.250	1047.0
979.5	1.208	1029.0
623.5	1.081	1154.0

**Tabla 3.1** Datos experimentales del frente de onda propagado (refiérase a la figura 3.6)

Los valores encontrados pueden ser más precisos si optimizamos dos condiciones. Primero, los órdenes mayores del haz láser deberían ser filtrados (sección 3.4 de este capítulo). Segundo, un instrumento más preciso podría ser utilizado.

El promedio de los valores de  $z_w$  (véase a la tabla 3.1) representa la localización de la cintura del haz. La cintura se localiza a  $1090 \text{ mm} \pm 5\%$  de la salida del láser (véase la figura 3.6). Este valor nos indica que la cintura del haz se encuentra afuera de la cavidad resonante (el láser mide  $635 \text{ mm}$  [JDS Uniphase]). Con este parámetro tenemos toda la información necesaria para llevar a cabo el análisis del interferómetro. Dicho análisis se presenta en la siguiente sección.

### 3.3.2 Propagación del frente de onda en el interferómetro

Para facilitar la referencia a la nomenclatura propuesta, el diagrama esquemático del interferómetro se presenta nuevamente en la figura 3.9.

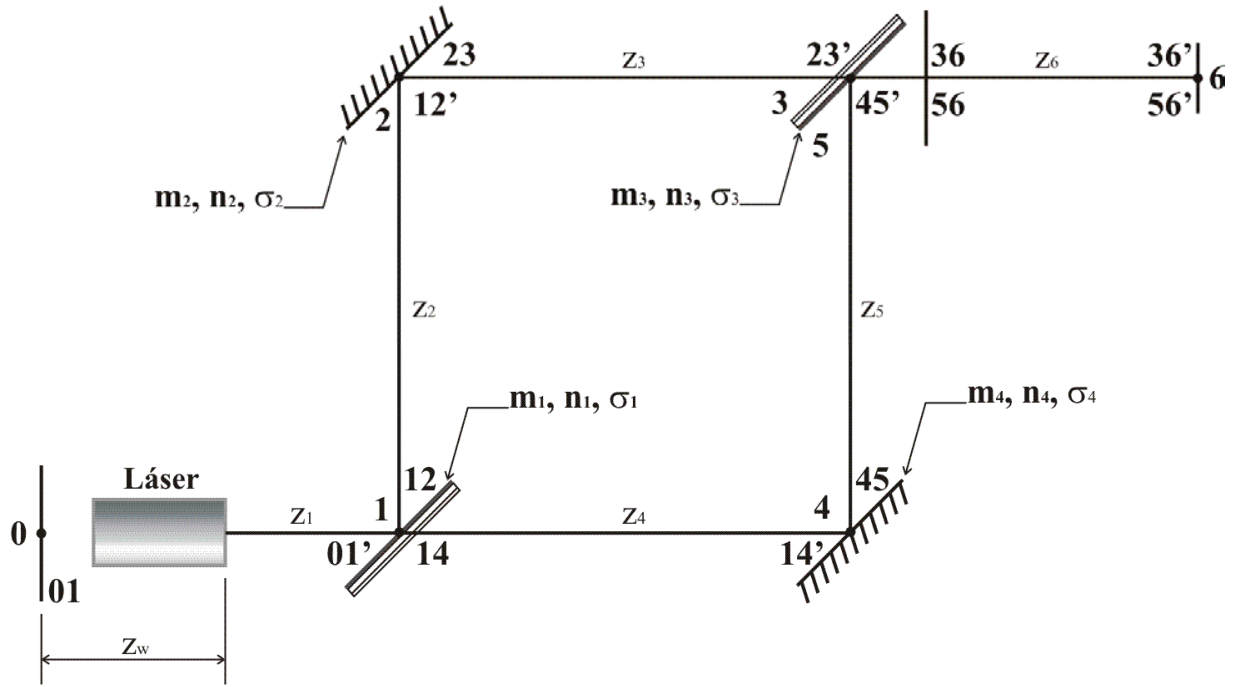


Fig. 3.9 Diagrama esquemático del interferómetro Mach-Zehnder

La primera propagación, es decir el trayecto 0 – 1, ya se obtuvo en la sección 3.2.2. La implementación de la nomenclatura desde el inicio, facilita el análisis en estas instancias del trabajo. La distribución en 01', es decir después de la propagación, se recapitula enseguida.

$$\Psi_{01'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{01'} e^{i \frac{2\pi}{\lambda}(z_w + z_1)} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{r_{01}^2}} e^{i \frac{\pi}{\lambda(z_w + z_1)} \beta_{01'}(x'^2 + y'^2)}; \quad r_{01'}^2 = \left[ \frac{\lambda(z_w + z_1)}{\pi r_{01}} \right]^2 + r_{01}^2 \quad (3.3.3)$$

$$\alpha_{01'} = \frac{(\pi r_{01}^2)^2 - i[\lambda(z_w + z_1)](\pi r_{01}^2)}{[\lambda(z_w + z_1)]^2 + (\pi r_{01}^2)^2}; \quad \beta_{01'} = 1 - \frac{(\pi r_{01}^2)^2}{[\lambda(z_w + z_1)]^2 + (\pi r_{01}^2)^2} \quad (3.3.4)$$

La interacción entre el haz y los componentes ópticos se efectúa muy cerca al eje óptico. Es decir, el haz incide en la parte central de los componentes. Por lo tanto, el efecto que éstas tienen en el haz lo tomamos como instantáneo. Como ejemplo, veamos qué le sucede al haz en el primer divisor. El primer divisor en nuestro arreglo (una placa plano paralela) transmite aproximadamente el 94% de la energía, y refleja el resto. Después del divisor tenemos dos

frentes de onda “nuevos”. Las expresiones matemáticas de estas distribuciones se muestran enseguida.

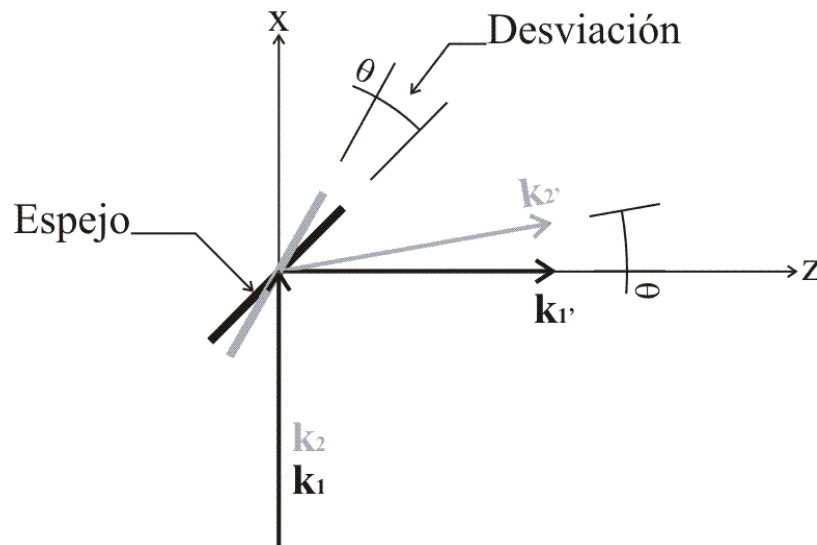
$$\Psi_{12}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{12} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_1)} e^{-\frac{x^2+y^2}{r_{12}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda(z_w+z_1)}\beta_{12}(x^2+y^2)} e^{i2\pi\left(\frac{2m_1}{\lambda}x + \frac{2n_1}{\lambda}y\right)} \quad (3.3.5)$$

$$\alpha_{12} = \sigma_1 \alpha_{01'}; \quad \beta_{12} = \beta_{01'}; \quad r_{12} = r_{01'} \quad (3.3.6)$$

$$\Psi_{14}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{14} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_1)} e^{-\frac{x^2+y^2}{r_{14}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda(z_w+z_1)}\beta_{14}(x^2+y^2)} \quad (3.3.7)$$

$$\alpha_{14} = (1-\sigma_1)\alpha_{01'}; \quad \beta_{14} = \beta_{01'}; \quad r_{14} = r_{01'} \quad (3.3.8)$$

La notación pone en evidencia que los frentes de onda aún no han sido propagados. Lo cual es lógico ya que éstos, se encuentran justo después del componente óptico (véase la figura 3.9). La relación 3.3.5 representa al frente de onda reflejado. El último factor (la exponencial compleja) de esta expresión, representa la desalineación probable del componente. El haz que se transmite no introduce desalineaciones al sistema. Por lo tanto, la relación 3.3.7 (así como todas las que impliquen transmisión) no cuenta con este factor. La desalineación, en el componente óptico, se modela como una transmitancia que se le adiciona al frente de onda. En la figura 3.10 se ilustra gráficamente esta condición para una desalineación en  $x$ .



**Fig. 3.10** Transmitancia introducida a un frente de onda por un componente desalineado

El análisis de la figura 3.10 se facilita suponiendo un frente de onda plano,  $\psi = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  (expresión 2.1.20). Los vectores de onda y posición, para sistemas alineados y desalineados son diferentes. Estas relaciones se muestran en las expresiones 3.3.9 y 3.3.10 respectivamente.

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\hat{\mathbf{a}}_z; \quad \mathbf{r} = z\hat{\mathbf{a}}_z; \quad \rightarrow \quad \text{Sistema alineado} \quad (3.3.9)$$

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(\cos\theta\hat{\mathbf{a}}_z + \text{sen}\theta\hat{\mathbf{a}}_x); \quad \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + z\hat{\mathbf{a}}_z; \quad \rightarrow \quad \text{Sistema desalineado} \quad (3.3.10)$$

La diferencia, entre el frente de onda alineado y el desalineado, se encuentra introduciendo estas relaciones en la ecuación de la onda plana (relación 2.1.26).

$$\Psi_{\text{ND}} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ae^{i|\mathbf{k}|z}; \quad \Psi_{\text{D}} = Ae^{i|\mathbf{k}|z}e^{i|\mathbf{k}|\text{sen}\theta x}; \quad \therefore \quad \Psi_{\text{D}} = e^{i|\mathbf{k}|\text{sen}\theta x}\Psi_{\text{ND}} = e^{i2\pi\frac{2m}{\lambda}x}\Psi_{\text{ND}} \quad (3.3.11)$$

El efecto, sobre el frente de onda, que tiene un componente desalineado se percibe directamente mediante la expresión 3.3.11. Es decir, podemos tratar la desalineación como una transmitancia agregada al frente de onda alineado. Esta aproximación es la que se utiliza en el estudio generalizado del interferómetro. Por ende, la expresión 3.3.5 toma en cuenta un escenario más real. Es decir, nuestro análisis incluye los efectos inducidos por componentes desalineados.

Si el componente estuviera perfectamente alineado ( $m_1 = 0, n_1 = 0$ ), la única diferencia entre las relaciones 3.3.5 y 3.3.7 sería el factor de reflexión ( $\sigma_1$ , ecuación 3.3.6) y/o transmisión ( $1 - \sigma_1$ , ecuación 3.3.8) del componente. La distribución en los planos 12' y 14', luego de la propagación, se obtiene aplicando la integral de Fresnel (ecuación 3.2.13). Las distribuciones que se deben propagar son las obtenidas en 3.3.5 y 3.3.7. En lugar de analizar cada propagación individualmente, en la siguiente sección se analiza el ejemplo más completo. A partir de este análisis, se pueden obtener todas las expresiones mostradas en la sección 3.3.3.

### 3.3.2.1 Propagación generalizada del haz

La propagación del plano 56 al plano 56' (refiérase a la figura 3.9) cuenta con todas las complicaciones que esperamos en el interferómetro. La distribución en el plano 56 se muestra en la siguiente relación.

$$\Psi_{56}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{56} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{56}} e^{-\left[ \frac{(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2}{r_{56}^2} \right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} [(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2]} e^{i2\pi \left( \frac{2m_{56}}{\lambda} x + \frac{2n_{56}}{\lambda} y \right)} \quad (3.3.12)$$

$$\delta_{56} = z_1 + z_4 + z_5 - 2(m_4^2 + n_4^2)z_5; \quad x_{56} = 2m_4 z_5; \quad y_{56} = 2n_4 z_5; \quad m_{56} = m_4 + m_3; \quad n_{56} = n_4 + n_3$$

Esta expresión se obtuvo aplicando la relación de Fresnel hasta llegar al plano 56 (figura 3.9). La relación 3.3.12 muestra, claramente, que el frente de onda está desplazado del origen (términos  $x_{56}$ ,  $y_{56}$ ). Más aún, también pone de manifiesto que las desalineaciones en el sistema son acumulativas (términos  $m_{56}$ ,  $n_{56}$ ). Otro factor nuevo es el camino óptico recorrido por el haz (término  $\delta_{56}$ ). En el análisis hemos supuesto que el frente de onda se propaga en el vacío (o aire). Si este no es el caso, la longitud de onda se tiene que dividir entre el índice de refracción del medio [Wangsness, 1979].

Para obtener la distribución en el plano 56', propagaremos la expresión 3.3.12. Es decir, debemos introducir esta expresión en la integral de Fresnel (ecuación 3.2.13), y resolver la ecuación resultante.

$$\Psi_{56'}(x', y') = \frac{e^{ikz_6}}{i\lambda z_6} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{56}(x, y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx dy; \quad \text{si } A = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{56} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{56}} \frac{e^{ikz_6}}{i\lambda z_6} \quad \therefore$$

$$\Psi_{56'}(x', y') = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2}{r_{56}^2} \right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} [(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2]} e^{i2\pi \left( \frac{2m_{56}}{\lambda} x + \frac{2n_{56}}{\lambda} y \right)} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx dy$$

La doble integral se puede expresar en términos de dos transformadas de Fourier de funciones Gaussianas complejas (refiérase a la sección 3.2.1).

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots &= e^{i2\pi \left( \frac{2m_{56}}{\lambda} x_{56} + \frac{2n_{56}}{\lambda} y_{56} \right)} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} [(x' - x_{56})^2 + (y' - y_{56})^2]} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{1}{r_{56}^2} - i \left( \frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} + \frac{\pi}{\lambda z_6} \right) \right] x^2} e^{-i2\pi \left[ \frac{(x' - x_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2m_{56}}{\lambda} \right] x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{1}{r_{56}^2} - i \left( \frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} + \frac{\pi}{\lambda z_6} \right) \right] y^2} e^{-i2\pi \left[ \frac{(y' - y_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2n_{56}}{\lambda} \right] y} dy \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{1}{r_{56}^2} - i \left( \frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} + \frac{\pi}{\lambda z_6} \right) \right] x^2} e^{-i2\pi \left[ \frac{(x' - x_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2m_{56}}{\lambda} \right] x} dx = F \left\{ e^{-\pi(a x)^2} \right\} \Big|_{u = \frac{(x' - x_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2m_{56}}{\lambda}}; a = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{r_{56}^2} - i \left( \frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} + \frac{\pi}{\lambda z_6} \right) \right]} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots &= e^{i2\pi \left( \frac{2m_{56}}{\lambda} x_{56} + \frac{2n_{56}}{\lambda} y_{56} \right)} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} [(x' - x_{56})^2 + (y' - y_{56})^2]} F \left\{ e^{-\pi(a x)^2} \right\} \Big|_{u = \frac{(x' - x_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2m_{56}}{\lambda}} F \left\{ e^{-\pi(a y)^2} \right\} \Big|_{v = \frac{(y' - y_{56})}{\lambda z_6} - \frac{2n_{56}}{\lambda}}
\end{aligned}$$

Nuestro análisis se ha simplificado notablemente. Ahora solamente necesitamos aplicar la transformada de Fourier de una Gaussiana compleja (ecuación 3.2.26), para resolver nuestro problema. El álgebra involucrada es elaborada. La resolución de las dos transformadas de Fourier, además de un amplio manipuleo algebraico, entrega la forma simétrica de la distribución propagada.

$$\Psi_{56'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{56'} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{56'}} e^{-\left[ \frac{(x' - x'_{56'})^2 + (y' - y'_{56'})^2}{r_{56'}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_{56'} [(x' - x'_{56'})^2 + (y' - y'_{56'})^2]} e^{i2\pi \left( \frac{2m_{56'}}{\lambda} x' + \frac{2n_{56'}}{\lambda} y' \right)} \quad (3.3.13)$$

$$\phi_{56'} = 2 \left\{ (m_4 + m_3)^2 + (n_4 + n_3)^2 \right\}; \quad x_{56'} = x_{56} + 2(m_4 + m_3)z_6; \quad y_{56'} = y_{56} + 2(n_4 + n_3)z_6$$

$$\alpha_{56'} = \alpha_{56} \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56}) - i z_5^2 (\lambda z_6) (\pi r_{56}^2)}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2) (z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}; \quad r_{56'}^2 = \left( \frac{\lambda z_6}{\pi r_{56}} \right)^2 + \left[ r_{56} \left( 1 + \frac{z_6 \beta_{56}}{z_5} \right) \right]^2$$

$$\beta_{56'} = 1 - \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56})}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2) (z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}; \quad \delta_{56'} = z_1 + z_4 + z_5 + z_6 - \phi_{45} z_5 - \phi_{56} z_6$$

Esta distribución describe el comportamiento del frente de onda en el plano 56'. Éste es, justamente, el plano de interferencia para la radiación involucrada. En la siguiente sección se presentan, en forma condensada, las distribuciones en cada uno de los planos de propagación.



### 3.3.3 Resumen de distribuciones en los planos de propagación

Los planos de propagación en el interferómetro, se presentan de nueva vez en la figura 3.11.

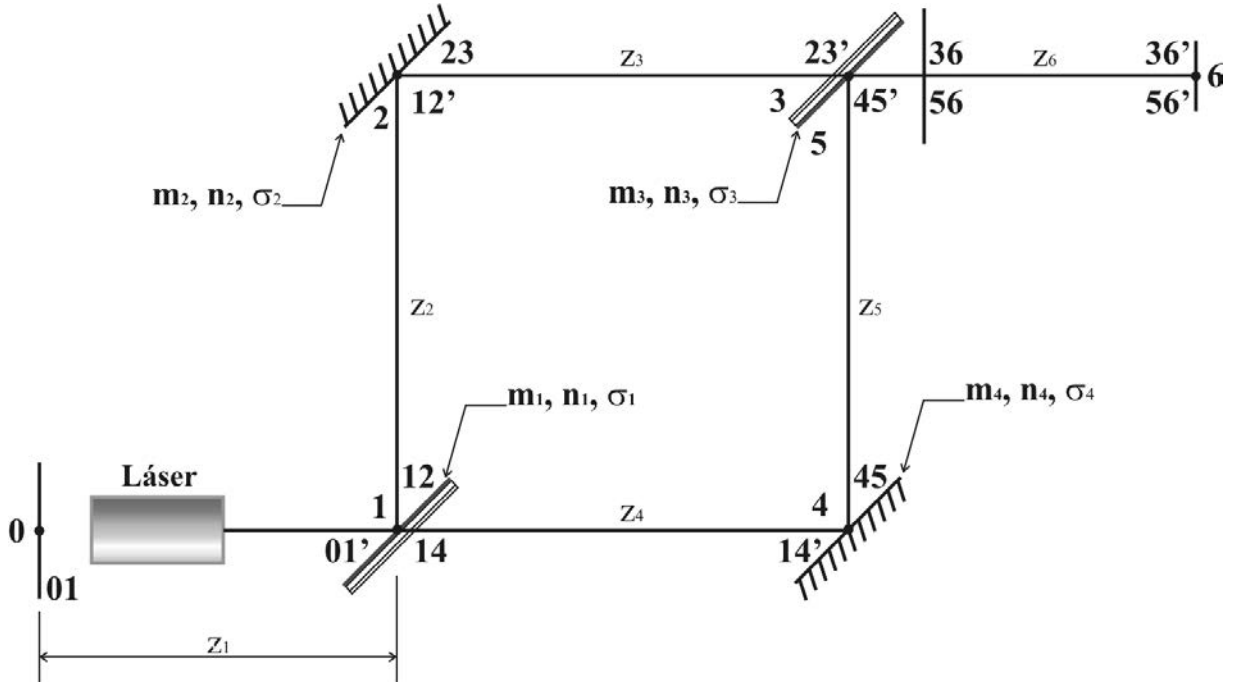


Fig. 3.11 Planos de propagación en el interferómetro

Las distribuciones para cada uno de los planos, así como los parámetros asociados con ellas, son mostradas enseguida. La relación de partida es un frente de onda Gaussiano (plano 01).

$$\Psi_{01}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} e^{-\left[\frac{x^2+y^2}{r_{01}^2}\right]} \quad (3.3.14)$$

Enseguida presentamos las relaciones para el brazo de referencia (brazo 0-1-2-3-6, también lo nombramos *brazo 3*), en específico las expresiones para el plano 12.

$$\Psi_{12}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{12} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{12}} e^{-\left[\frac{x^2+y^2}{r_{12}^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_{12}} \beta_{12} (x^2+y^2)} e^{i2\pi \left(\frac{2m_1}{\lambda} x + \frac{2n_1}{\lambda} y\right)} \quad (3.3.15)$$

$$\alpha_{12} = \sigma_1 \left[ \frac{(\pi r_{01}^2)^2 - i(\lambda z_1)(\pi r_{01}^2)}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2} \right]; \quad \beta_{12} = 1 - \frac{(\pi r_{01}^2)^2}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2}; \quad r_{12}^2 = \left( \frac{\lambda z_1}{\pi r_{01}} \right)^2 + r_{01}^2; \quad \delta_{12} = z_1$$

La distribución en el plano 23 implica las siguientes expresiones.

$$\Psi_{23}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{23} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{23}} e^{-\left[ \frac{(x-x_{23})^2 + (y-y_{23})^2}{r_{23}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_2} \beta_{23} [(x-x_{23})^2 + (y-y_{23})^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.16)$$

$$\phi_{12} = 2(m_1^2 + n_1^2); \quad x_{12} = 2m_1 z_2; \quad y_{12} = 2n_1 z_2$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{12} \sigma_2 \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{12}^2)^2 (z_1 + z_2 \beta_{12}) - i z_1^2 (\lambda z_2) (\pi r_{12}^2)}{(\lambda z_1 z_2)^2 + [(\pi r_{12}^2)(z_1 + z_2 \beta_{12})]^2} \right\}; \quad r_{23}^2 = \left( \frac{\lambda z_2}{\pi r_{12}} \right)^2 + \left[ r_{12} \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \beta_{12} \right) \right]^2$$

$$\beta_{12} = 1 - \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{12}^2)^2 (z_1 + z_2 \beta_{12})}{(\lambda z_1 z_2)^2 + [(\pi r_{12}^2)(z_1 + z_2 \beta_{12})]^2} \right\}; \quad \delta_{23} = z_1 + z_2 - \phi_{12} z_2$$

En el plano 36, la distribución y sus parámetros son como se muestra a continuación.

$$\Psi_{36}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{36} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{36}} e^{-\left[ \frac{(x-x_{36})^2 + (y-y_{36})^2}{r_{36}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_3} \beta_{36} [(x-x_{36})^2 + (y-y_{36})^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.17)$$

$$\phi_{23} = 2\{(m_1 + m_2)^2 + (n_1 + n_2)^2\}; \quad x_{36} = x_{23} + 2(m_1 + m_2)z_3; \quad y_{36} = y_{23} + 2(n_1 + n_2)z_3$$

$$\alpha_{36} = \alpha_{23} (1 - \sigma_3) \left\{ \frac{z_2 (\pi r_{23}^2)^2 (z_2 + z_3 \beta_{23}) - i z_2^2 (\lambda z_3) (\pi r_{23}^2)}{(\lambda z_2 z_3)^2 + [(\pi r_{23}^2)(z_2 + z_3 \beta_{23})]^2} \right\}; \quad r_{36}^2 = \left( \frac{\lambda z_3}{\pi r_{23}} \right)^2 + \left[ r_{23} \left( 1 + \frac{z_3}{z_2} \beta_{23} \right) \right]^2$$

$$\beta_{23} = 1 - \left\{ \frac{z_2 (\pi r_{23}^2)^2 (z_2 + z_3 \beta_{23})}{(\lambda z_2 z_3)^2 + [(\pi r_{23}^2)(z_2 + z_3 \beta_{23})]^2} \right\}; \quad \delta_{36} = z_1 + z_2 + z_3 - \phi_{12} z_2 - \phi_{23} z_3$$

En el plano de interferencia, la distribución debida al brazo 3 tiene la forma siguiente.

$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.18)$$

$$\begin{aligned}\phi_{36} &= 2\{(m_1 + m_2)^2 + (n_1 + n_2)^2\}; \quad x_3 = x_{36} + 2(m_1 + m_2)z_6; \quad y_3 = y_{36} + 2(n_1 + n_2)z_6 \\ \alpha_3 &= \alpha_{36} \left\{ \frac{z_3 (\pi r_{36}^2)^2 (z_3 + z_6 \beta_{36}) - i z_3^2 (\lambda z_6) (\pi r_{36}^2)}{(\lambda z_3 z_6)^2 + [(\pi r_{36}^2)(z_3 + z_6 \beta_{36})]^2} \right\}; \quad r_3^2 = \left( \frac{\lambda z_6}{\pi r_{36}} \right)^2 + \left[ r_{36} \left( 1 + \frac{z_6}{z_3} \beta_{36} \right) \right]^2 \\ \beta_3 &= 1 - \left\{ \frac{z_3 (\pi r_{36}^2)^2 (z_3 + z_6 \beta_{36})}{(\lambda z_3 z_6)^2 + [(\pi r_{36}^2)(z_3 + z_6 \beta_{36})]^2} \right\}; \quad \delta_3 = z_1 + z_2 + z_3 + z_6 - \phi_{12} z_2 - \phi_{23} z_3 - \phi_{36} z_6\end{aligned}$$

Ahora presentemos las relaciones para el brazo con muestra (brazo 0-1-4-5-6, también nombrado *brazo 5*). Primeramente veamos las expresiones para el plano 14.

$$\begin{aligned}\Psi_{14}(x, y) &= \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{14} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{14}} e^{-\left[ \frac{x^2 + y^2}{r_{14}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_1} \beta_{14} (x^2 + y^2)} \quad (3.3.19) \\ \alpha_{14} &= (1 - \sigma_1) \left[ \frac{(\pi r_{01}^2)^2 - i (\lambda z_1) (\pi r_{01}^2)}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2} \right]; \quad \beta_{14} = 1 - \frac{(\pi r_{01}^2)^2}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2}; \quad r_{14}^2 = \left( \frac{\lambda z_1}{\pi r_{01}} \right)^2 + r_{01}^2; \quad \delta_{14} = z_1\end{aligned}$$

La distribución en el plano 45 tiene como resultado las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}\Psi_{45}(x, y) &= \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{45} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{45}} e^{-\left[ \frac{x^2 + y^2}{r_{45}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_4} \beta_{45} [x^2 + y^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2m_4}{\lambda} x + \frac{2n_4}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.20) \\ \alpha_{45} &= \alpha_{14} \sigma_4 \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14}) - i z_1^2 (\lambda z_4) (\pi r_{14}^2)}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2)(z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad r_{45}^2 = \left( \frac{\lambda z_4}{\pi r_{14}} \right)^2 + \left[ r_{14} \left( 1 + \frac{z_4}{z_1} \beta_{14} \right) \right]^2 \\ \beta_{45} &= 1 - \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14})}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2)(z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad \delta_{45} = z_1 + z_4\end{aligned}$$

Enseguida presentamos la distribución, y sus parámetros, en el plano 56.

$$\Psi_{56}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{56} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{56}} e^{-\left[ \frac{(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2}{r_{56}^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_5} \beta_{56} [(x-x_{56})^2 + (y-y_{56})^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.21)$$

$$\phi_{45} = 2(m_4^2 + n_4^2); \quad x_{56} = 2m_4 z_5; \quad y_{56} = 2n_4 z_5$$

$$\alpha_{56} = \alpha_{45} \sigma_3 \left\{ \frac{z_4 (\pi r_{45}^2)^2 (z_4 + z_5 \beta_{45}) - i z_4^2 (\lambda z_5) (\pi r_{45}^2)}{(\lambda z_4 z_5)^2 + [(\pi r_{45}^2) (z_4 + z_5 \beta_{45})]^2} \right\}; \quad r_{56}^2 = \left( \frac{\lambda z_5}{\pi r_{45}} \right)^2 + \left[ r_{45} \left( 1 + \frac{z_5}{z_4} \beta_{45} \right) \right]^2$$

$$\beta_{56} = 1 - \left\{ \frac{z_4 (\pi r_{45}^2)^2 (z_4 + z_5 \beta_{45})}{(\lambda z_4 z_5)^2 + [(\pi r_{45}^2) (z_4 + z_5 \beta_{45})]^2} \right\}; \quad \delta_{56} = z_1 + z_4 + z_5 - \phi_{45} z_5$$

En el plano de interferencia, la distribución debida al brazo 5 tiene la forma obtenida previamente (relaciones 3.3.13).

$$\psi_5(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y \right]} \quad (3.3.22)$$

$$\phi_{56} = 2\{(m_4 + m_3)^2 + (n_4 + n_3)^2\}; \quad x_5 = x_{56} + 2(m_4 + m_3)z_6; \quad y_5 = y_{56} + 2(n_4 + n_3)z_6$$

$$\alpha_5 = \alpha_{56} \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56}) - i z_5^2 (\lambda z_6) (\pi r_{56}^2)}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2) (z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}; \quad r_5^2 = \left( \frac{\lambda z_6}{\pi r_{56}} \right)^2 + \left[ r_{56} \left( 1 + \frac{z_6}{z_5} \beta_{56} \right) \right]^2$$

$$\beta_5 = 1 - \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56})}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2) (z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}; \quad \delta_5 = z_1 + z_4 + z_5 + z_6 - \phi_{45} z_5 - \phi_{56} z_6$$

Las ecuaciones 3.3.18 y 3.3.22 describen las distribuciones, para los dos brazos del instrumento, en el plano de interferencia. Estas relaciones determinarán los patrones de interferencia. Este aspecto del modelo, así como su contraparte experimental, será analizado a continuación.

### 3.4 Patrones de interferencia, alineación y filtraje

La interferencia de luz se presenta cuando dos haces coherentes, tanto espacialmente como temporalmente, se superponen [Steel, 1986], [Hariharan, 1985]. Ambos brazos del interferómetro proveen de una distribución de radiación. En el plano 6, véase la siguiente figura, estas dos distribuciones se superponen.

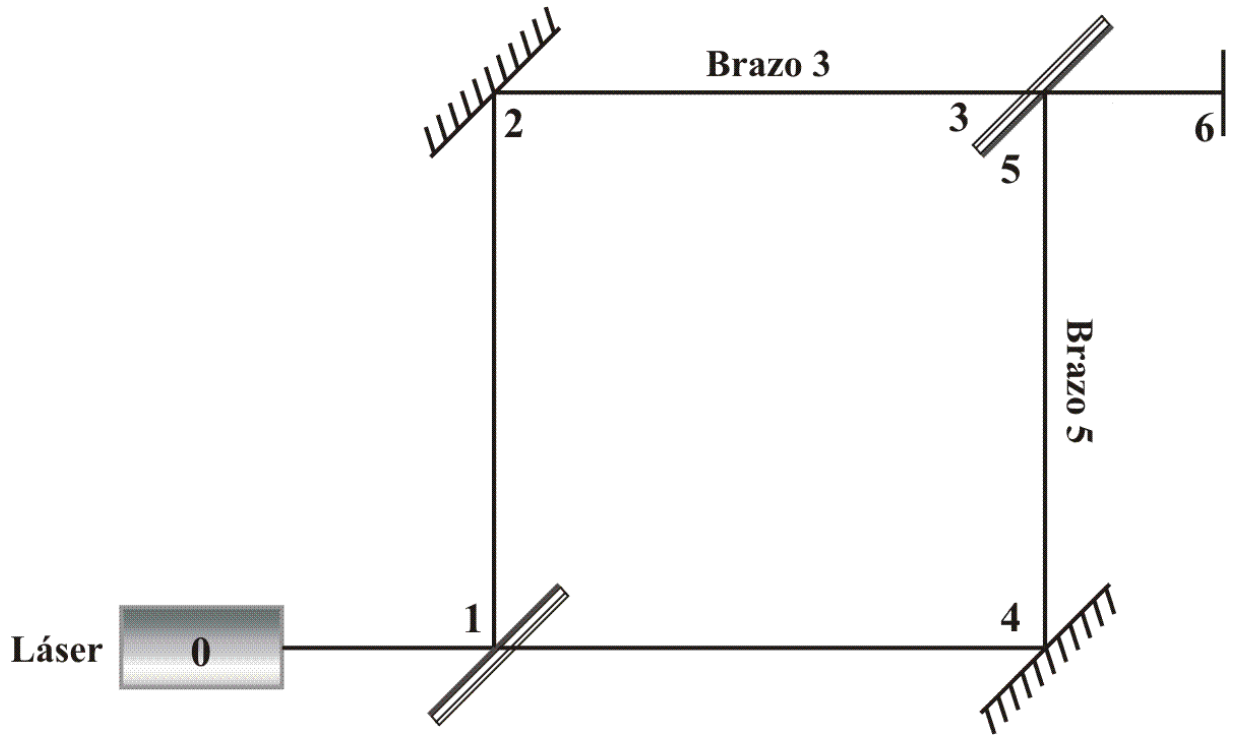


Fig. 3.12 Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder

En el plano de interferencia tenemos una distribución resultante ( $\psi_6$ ). Ésta es igual a la suma de las contribuciones de cada brazo.

$$\psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_0^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y\right]} \quad (3.4.1)$$

$$\Psi_5(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i2\pi \left[ \frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y \right]} \quad (3.4.2)$$

$$\Psi_6(x, y) = \Psi_3(x, y) + \Psi_5(x, y) \quad (3.4.3)$$

La rápida fluctuación de las amplitudes imposibilita el rastreo de las mismas [Wangness, 1979]. Debido a esto, los detectores de luz (incluyendo nuestros ojos) perciben intensidad [Born *et al*, 1980]. Por lo tanto, nosotros no percibiremos la relación de amplitudes como se muestra en la expresión 3.4.3. En cambio, podremos observar las variaciones en intensidad. La intensidad, para luz coherente, se obtiene multiplicando la amplitud por su complejo conjugado [Goodman, 1993]. Esta operación se muestra a continuación.

$$I_6(x, y) = |\Psi_3(x, y)|^2 + |\Psi_5(x, y)|^2 + \Psi_3^*(x, y)\Psi_5(x, y) + \Psi_3(x, y)\Psi_5^*(x, y) \quad (3.4.4)$$

Para nuestro interferómetro, las expresiones 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.4 son suficientes para determinar los patrones de intensidad.

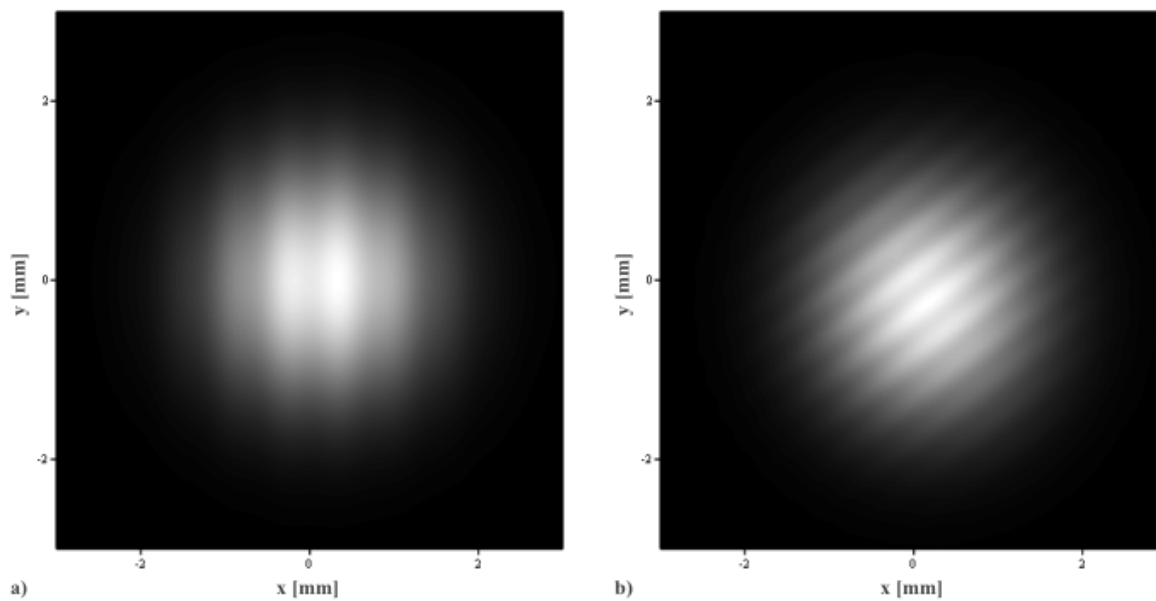
$$I_6(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma \right\} \quad (3.4.5)$$

Aquí  $\Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma_5$ , representa el desfase adicional inducido por las variables complejas,

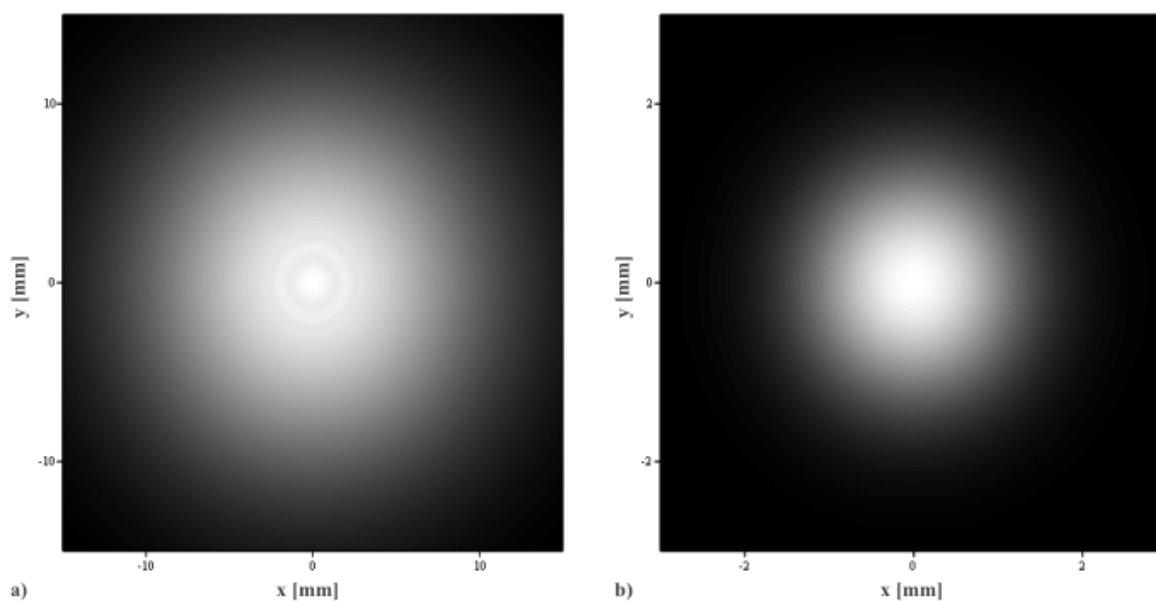
$\alpha_3 = |\alpha_3| e^{i\gamma_3}$  y  $\alpha_5 = |\alpha_5| e^{i\gamma_5}$ . Además  $m_6$  y  $n_6$  representan la desalineación del sistema,

$m_6 = m_4 + m_3 - m_1 - m_2$  y  $n_6 = n_4 + n_3 - n_1 - n_2$ . La relación 3.4.5 predice el comportamiento del instrumento en diferentes escenarios. Por ejemplo, podemos simular el comportamiento cuando el sistema está desalineado, cuando los frentes de onda tienen radios de curvatura diferentes (debido a diferencias en los caminos ópticos) o cuando el sistema se encuentra en con-

diciones óptimas. En las siguientes figuras presentamos las simulaciones previamente mencionadas.



**Fig. 3.13** Sistema desalineado en una y dos direcciones respectivamente

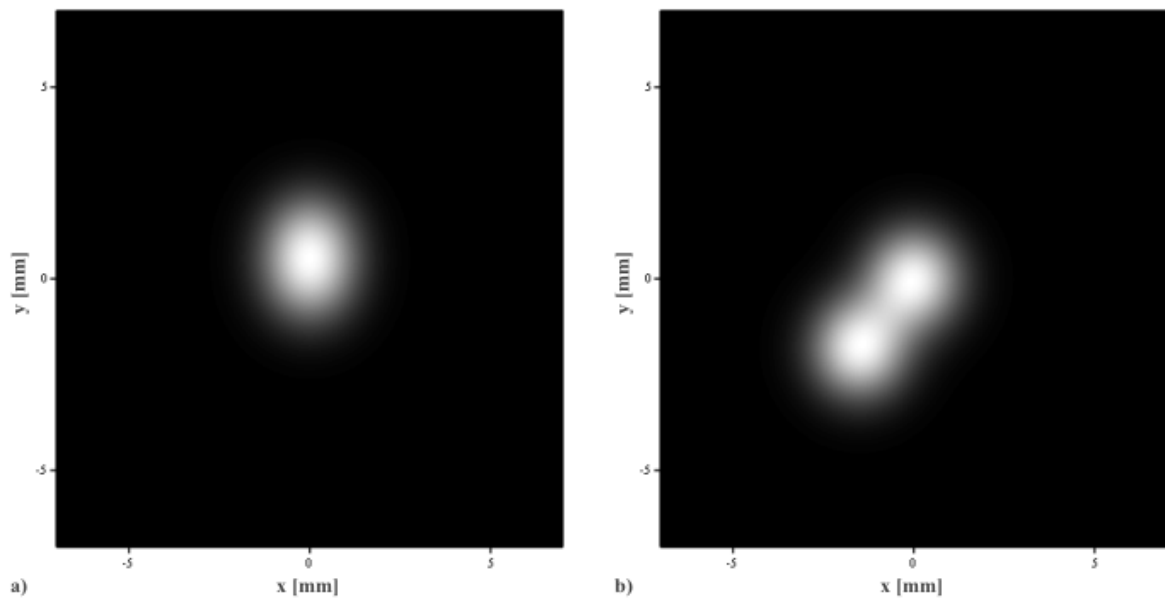


**Fig. 3.14** Gran diferencia de camino óptico y sistema bien alineado

El análisis de las condiciones necesarias, para determinar la alineación del sistema, se presenta enseguida.

### 3.4.1 *Análisis del sistema óptico para la alineación óptima*

El arreglo experimental debe contar con una alineación lo más precisa posible. Esta aseveración tiene su justificación en la aplicación pretendida. La optimización del área de interferencia, incrementará la relación entre señal y ruido de nuestro sistema. En la figura siguiente presentamos un ejemplo, para clarificar la importancia de la alineación del interferómetro.



**Fig. 3.15** Importancia de la alineación en el sistema óptico

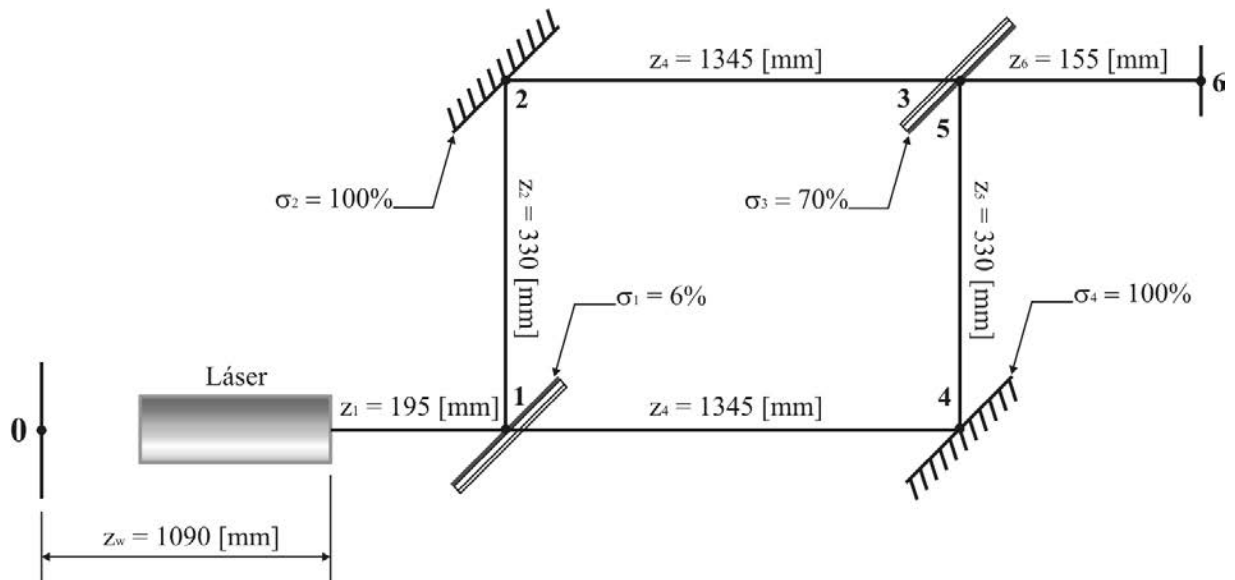
En la simulación a) la alineación del sistema es mucho mejor que en la b). El área de interferencia incrementa notoriamente. Por lo tanto, la señal obtenida es mayor en el primer escenario que en el segundo.

En el caso de nuestra aplicación, bien podríamos tener todos los fotones no atenuados en una sola parte de la distribución. Si esta parte de la distribución coincide con aquella que no está



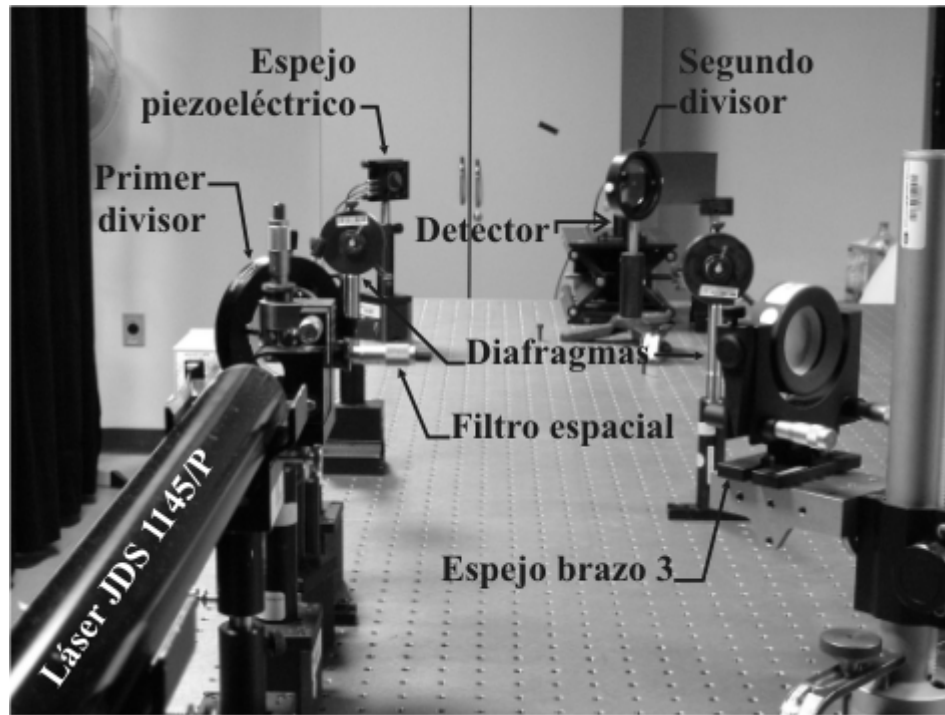
alineada, con el brazo de referencia, nuestro sistema no detectaría información alguna. Por esta razón, es muy importante asegurar que nuestro sistema se encuentra debidamente alineado. Ahora abordemos el tópico de la alineación del interferómetro.

Un diagrama esquemático se muestra enseguida. Este diagrama contiene los datos prácticos del arreglo experimental.



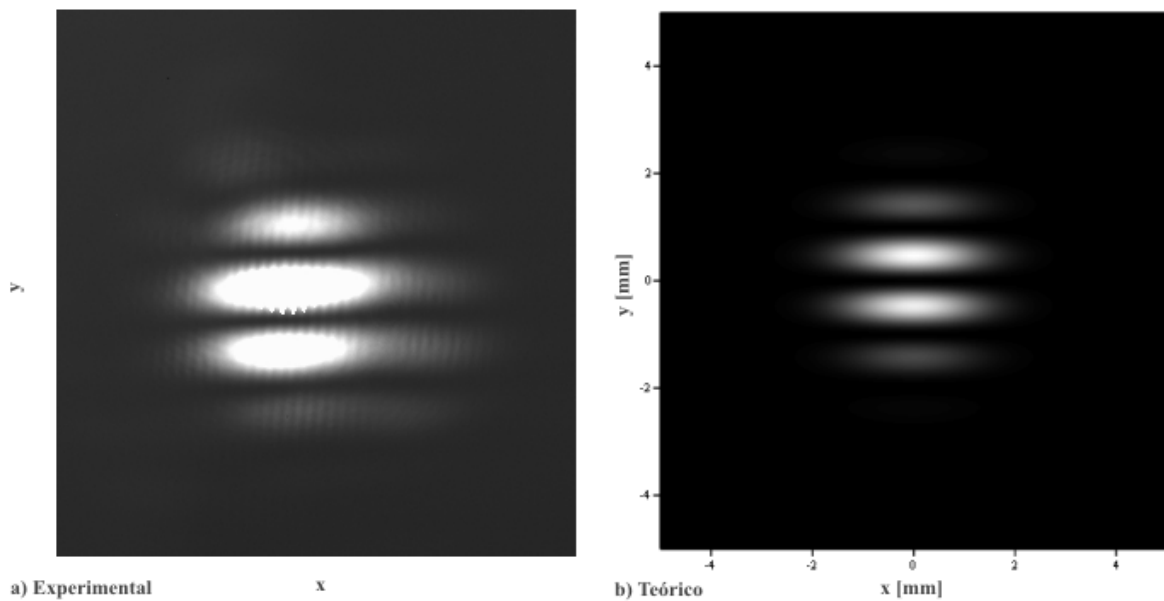
**Fig. 3.16** Datos prácticos del arreglo experimental

Con esta información y la relación 3.4.5, generamos los interferogramas teóricos. Los interferogramas experimentales se obtuvieron mediante el arreglo mostrado previamente. En la siguiente figura mostramos una foto del arreglo experimental implementado en el laboratorio.



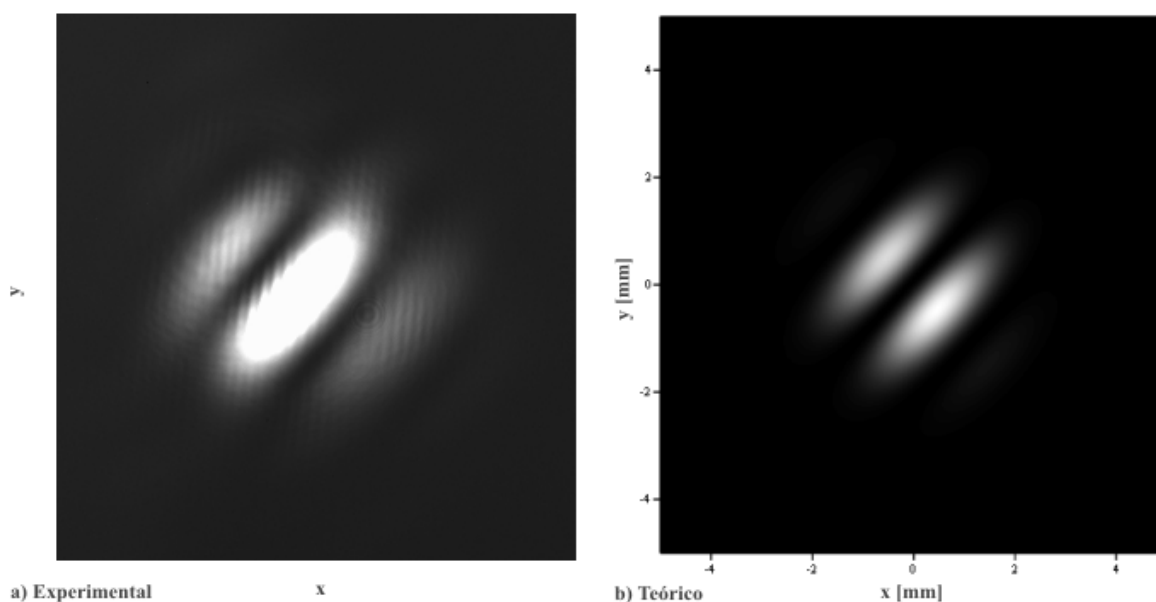
**Fig. 3.17** Arreglo experimental implementado en el laboratorio

Los interferogramas teóricos, para una desalineación en la dirección  $y$ , son contrastados con los reales en la siguiente figura.



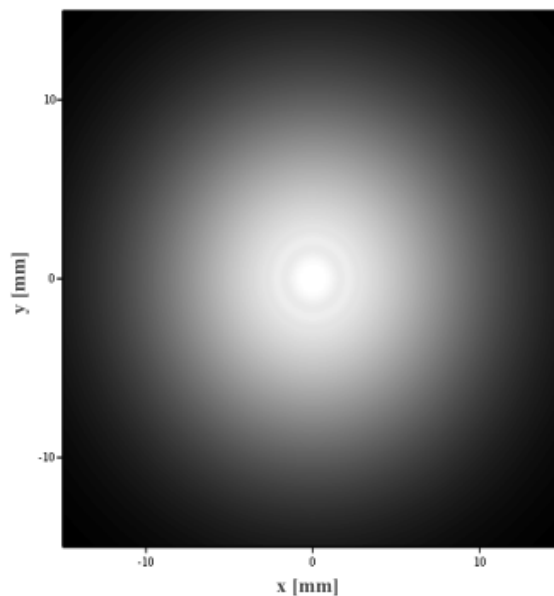
**Fig. 3.18** Interferogramas para una desalineación en la dirección  $y$

El comportamiento teórico toma como premisa que el haz es puramente Gaussiano. Nuestra fuente láser no presenta este comportamiento ideal ([JDS Uniphase]). Una mejora importante al sistema sería la implementación de un filtro Gaussiano. Esta implementación aseguraría que la distribución es realmente Gaussiana. En la figura que sigue, se presentan los interferogramas (real y simulado) para una desalineación en ambas direcciones.



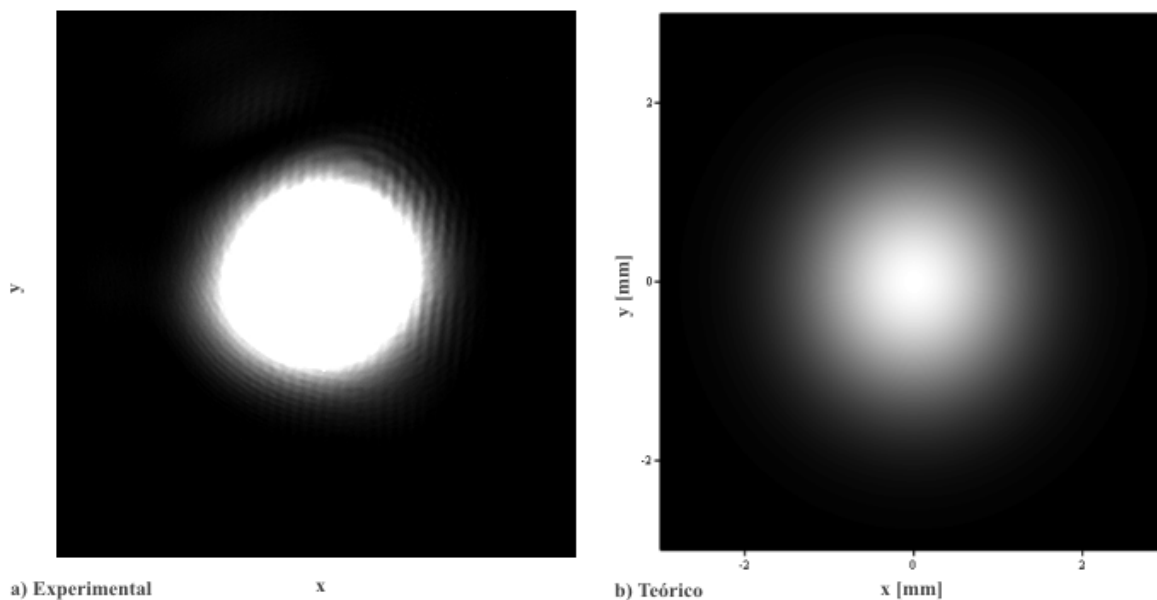
**Fig. 3.19** Interferogramas para una desalineación en ambas direcciones

La concordancia entre el modelo matemático y los resultados experimentales es fácilmente perceptible. El incremento en contraste de las franjas se debió a la implementación de un filtro neutro en el brazo de la muestra (maximizando así la visibilidad [Born *et al*, 1980] en el interferómetro). En la figura siguiente mostramos el interferograma teórico correspondiente a una diferencia de camino óptico grande.



**Fig. 3.20** Interferograma para una diferencia de camino óptico grande

Los interferogramas para la condición ideal de alineación se presentan a continuación.



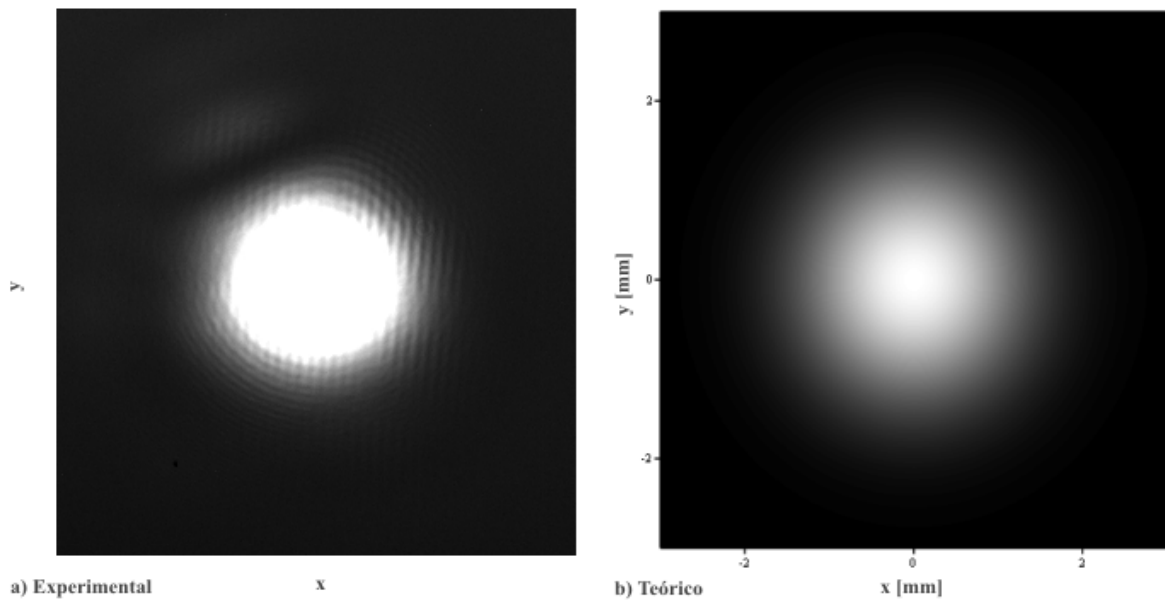
**Fig. 3.21** Interferogramas para la condición ideal de alineación

La alineación del dispositivo es muy importante, ya que maximiza la señal del sistema (refiérase al inicio de esta sección). En las figuras 3.18 – 3.21, los patrones de interferencia son

bastante pequeños (de 3 – 5 mm). Por lo tanto, la alineación del sistema se torna difícil. Para facilitar la alineación del sistema, decidimos generar una Gaussiana que divergiera más marcadamente. Además, es claro que un buen filtraje mejoraría la concordancia entre el modelo matemático y los resultados experimentales (ya que aseguraríamos que estamos trabajando con un frente de onda Gaussiano). Por estas razones se implementó, durante el proceso de alineación del dispositivo, un sistema de filtraje (que no desplazara la posición del eje óptico). El sistema así como su sustentación matemática, serán presentados en la siguiente sección.

### 3.4.2 Filtraje del sistema óptico

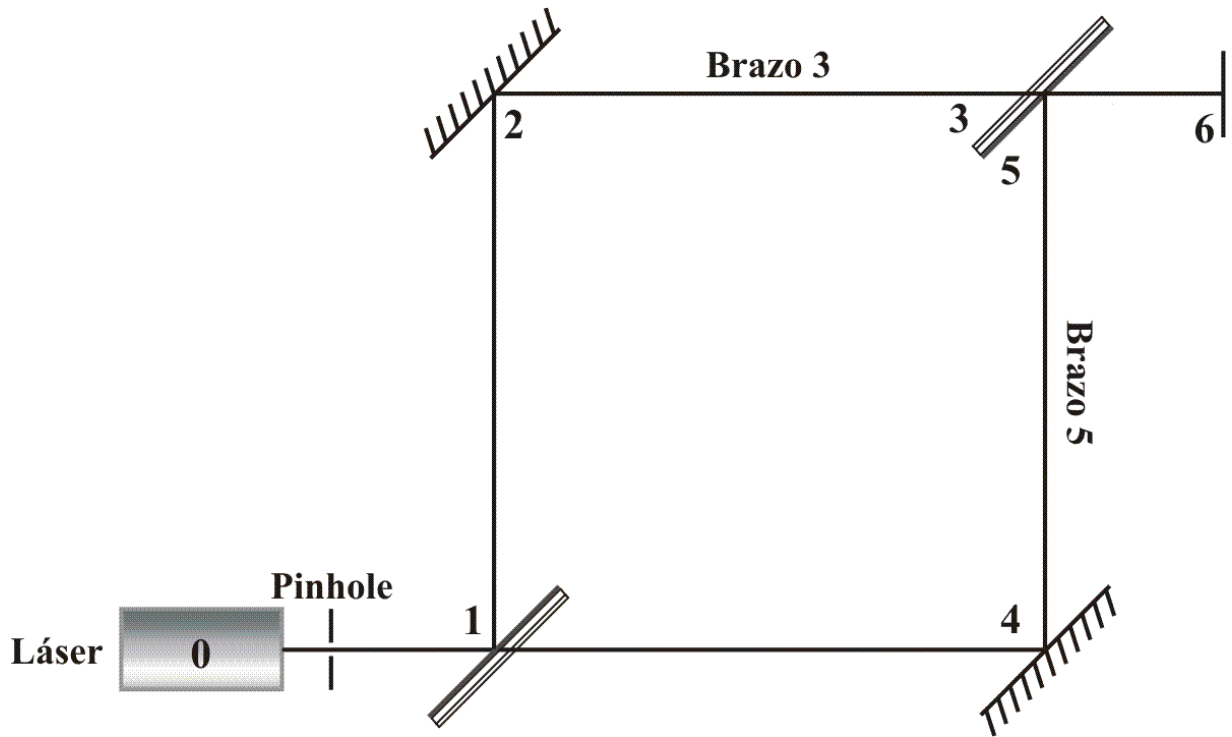
En la figura siguiente mostramos una comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano.



**Fig. 3.22** Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano

La distribución experimental dista de ser perfectamente Gaussiana. Esto implica que habrá desviaciones en el comportamiento del sistema respecto al modelo matemático. Para mejorar la concordancia entre estos dos escenarios, se propone eliminar la información innecesaria del

haz experimental. En la figura siguiente se muestra un diagrama esquemático del arreglo, con la implementación del filtro espacial (pinhole).

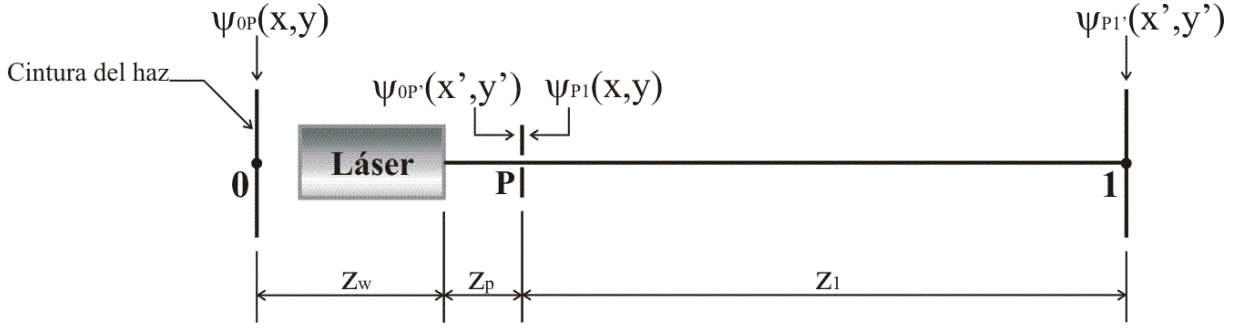


**Fig. 3.23** Diagrama esquemático del arreglo experimental con filtro espacial

La implementación del filtro tiene como objetivo eliminar todos los órdenes no deseados del haz láser. Además permite generar una Gaussiana más divergente, lo que redundará en una mayor área de interferencia. Por lo tanto facilitando la alineación del instrumento. Enseguida mostraremos dos configuraciones para el filtro espacial del arreglo. Primero presentaremos el filtro óptimo, éste debería de contar con una transmitancia Gaussiana. Estos filtros no están disponibles en catálogos de componentes ópticos. El segundo filtro que analizaremos es una apertura de aguja circular (pinhole convencional). Estos filtros son sencillos de conseguir. El orden central del patrón de difracción que generan tiene un comportamiento básicamente Gaussiano.

### 3.4.2.1 Filtro espacial con transmitancia Gaussiana

La interacción entre la luz y el filtro espacial se toma como instantánea. Es decir el haz se propaga hasta el plano del filtro, y ahí, se ve modificado por la transmitancia del filtro en cuestión. Un diagrama esquemático, para facilitar esta explicación, se presenta enseguida.



**Fig. 3.24** Interacción del haz con el filtro espacial

La propagación desde 0 hasta P ya ha sido analizada previamente (sección 3.2.2).

$$\Psi_{0P'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{0P'} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_p)} e^{-\frac{x'^2+y'^2}{r_{0P'}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda(z_w+z_p)}\beta_{0P'}(x'^2+y'^2)}; \quad r_{0P'}^2 = \left[ \frac{\lambda(z_w+z_p)}{\pi r_{0P}} \right]^2 + r_{0P}^2 \quad (3.4.6)$$

$$\alpha_{0P'} = \frac{(\pi r_{0P}^2)^2 - i[\lambda(z_w+z_p)](\pi r_{0P}^2)}{[\lambda(z_w+z_p)]^2 + (\pi r_{0P}^2)^2}; \quad \beta_{0P'} = 1 - \frac{(\pi r_{0P}^2)^2}{[\lambda(z_w+z_p)]^2 + (\pi r_{0P}^2)^2} \quad (3.4.7)$$

La transmitancia, que proponemos como ideal, es Gaussiana. En la ecuación 3.4.8 mostramos la distribución del haz después de haber interactuado con el filtro espacial (Gaussiano).

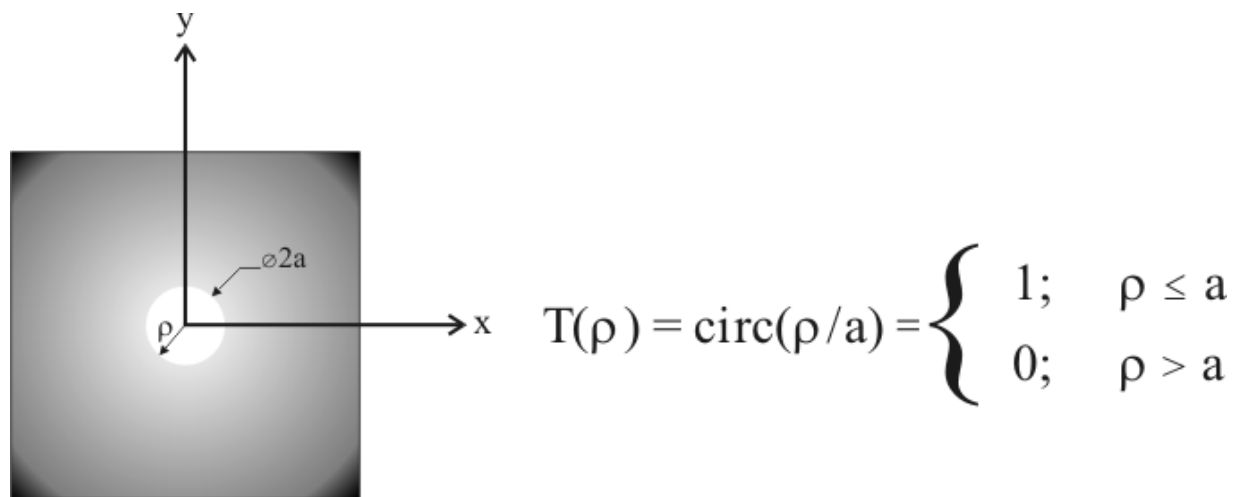
$$\Psi_{P1}(x, y) = T_F(x, y)\Psi_{0P'}(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{r_F^2}} \Psi_{0P'}(x, y) \quad \therefore \quad \alpha_{P1} = \alpha_{0P'}; \quad \beta_{P1} = \beta_{0P'}; \quad r_{P1} = r_{0P'}$$

$$\Psi_{P1}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{P1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_p)} e^{-\frac{x^2+y^2}{r_{P1}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda(z_w+z_p)}\beta_{P1}(x^2+y^2)} e^{-\frac{x^2+y^2}{r_F^2}} \quad (3.4.8)$$

Mediante la última expresión comprendemos que, la implementación del filtro Gaussiano ideal, no modifica en nada nuestro análisis. Por esto enfatizamos, al final de la sección precedente, que un filtro de esta naturaleza sería la opción óptima. Desafortunadamente, estos filtros no están disponibles en los catálogos de componentes ópticos. Debido a esto, optamos por implementar un filtro de aguja convencional (es decir circular). Este análisis se muestra a continuación.

### 3.4.2.2 Apertura de aguja circular como filtro espacial

El diagrama mostrado en la figura 3.24 forma la base para la implementación del filtro espacial. La figura siguiente muestra la configuración de un filtro de aguja convencional (además presenta su transmitancia).



**Fig. 3.25** Configuración de un filtro de aguja convencional

En cuanto a la matemática del problema, las relaciones 3.4.6 y 3.4.7 son idénticas para este caso. Por otro lado, la transmitancia difiere notablemente. La transmitancia de un filtro de aguja circular (refiérase a la figura anterior) está dada por una función  $\text{circ}(\rho/a)$  [Goodman, 1993], [Gaskill, 1978]. La distribución del haz, después de haber interactuado con el filtro, se presenta en la siguiente ecuación.



$$\Psi_{P1}(x, y) = T_F(x, y)\Psi_{0P'}(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)\Psi_{0P'}(x, y) \quad \therefore$$

$$\Psi_{P1}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{P1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w + z_p)} e^{-\frac{x^2 + y^2}{r_{P1}^2}} e^{i\frac{\pi}{\lambda(z_w + z_p)}\beta_{P1}(x^2 + y^2)} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \quad (3.4.9)$$

La distribución del frente de onda filtrado después de haber sido propagado el trayecto P-1, nos permitirá decidir si el frente de onda conserva su carácter Gaussiano. Esto es muy importante, ya que todo nuestro análisis ha sido desarrollado en torno a esta suposición.

Una característica importante de la transmitancia del filtro de aguja es su simetría radial. Por lo tanto, intuitivamente esperamos que la resolución del problema se facilite si lo analizamos en coordenadas con simetría radial. Las coordenadas cilíndricas presentan este tipo de simetría [Cheng, 1997]. La distribución después del filtro (ecuación 3.4.9), se simplifica utilizando este sistema de coordenadas.

$$\Psi_{P1}(\rho, \theta) = \Psi_{P1}(\rho) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{P1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w + z_p)} e^{-\left[\frac{1}{r_{P1}^2} - i\frac{\pi}{\lambda(z_w + z_p)}\beta_{P1}\right]\rho^2} \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (3.4.10)$$

Esta expresión presenta simetría radial. Esto debido a que el frente de onda Gaussiano cuenta también con esta propiedad. La propagación de esta distribución se efectúa aplicando la relación de Fresnel (ecuación 3.2.13). La relación de Fresnel está expresada en coordenadas cartesianas. En el apéndice A demostramos que la relación de Fresnel, para una función con simetría radial, se puede expresar como sigue.

$$\Psi(\rho') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} \left[ 2\pi \int_0^\infty \Psi(\rho) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} J_0\left(2\pi\frac{\rho'}{\lambda z}\rho\right) \rho d\rho \right] = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} H_0 \left[ \Psi(\rho) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} \right]_{u=\frac{\rho'}{\lambda z}} \quad (3.4.11)$$

La ecuación 3.4.11 pone de manifiesto el carácter de la distribución después de haber sido propagada. Para encontrar la distribución propagada presentamos dos alternativas. La prime-

ra alternativa es simplemente resolver la expresión integral. Como segunda aproximación, podemos encontrar la transformada Hankel de orden cero de las dos funciones involucradas [Bracewell, 2000], [Goodman, 1993], [Gaskill, 1978].

La sustitución de la ecuación 3.4.10 en 3.4.11 determina la distribución, después de la propagación. Esta expresión se muestra enseguida.

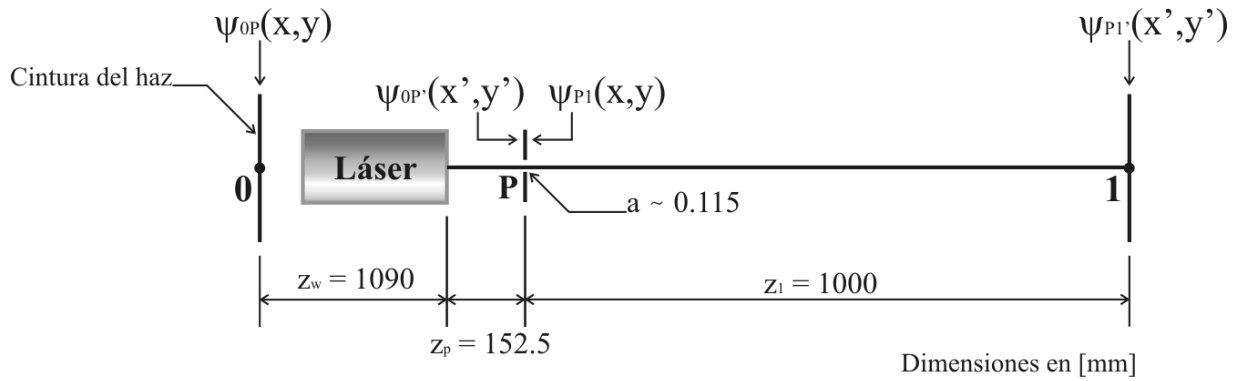
$$\Psi_{P1'}(\rho') = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_1}}{i\lambda z_1} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1}\rho'^2} \left\{ 2\pi \int_0^\infty A e^{-\left[\frac{1}{r_{P1}^2} - i\frac{\pi}{\lambda(z_w+z_p)}\beta_{P1}\right]\rho^2} \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1}\rho^2} J_0\left(2\pi\frac{\rho'}{\lambda z_1}\rho\right) \rho d\rho \right\} \quad (3.4.12)$$

$$A = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{P1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_p)}$$

La reducción de la ecuación integral 3.4.12, además de la evaluación de la función *circ* (la cual simplemente modifica los límites de integración), simplifica la expresión a resolver.

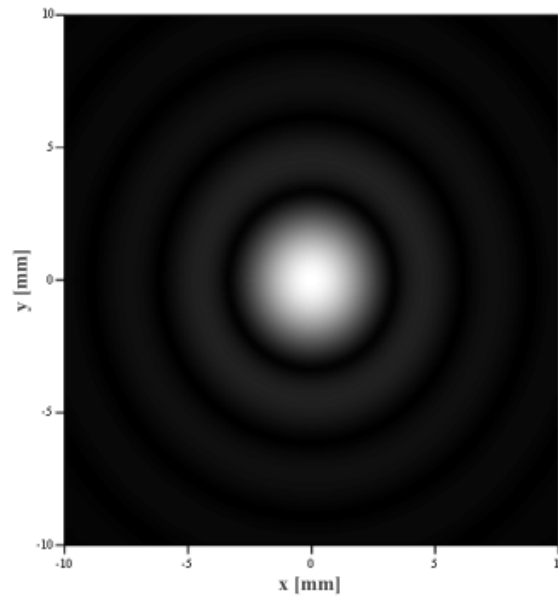
$$\Psi_{P1'}(\rho') = \frac{2\pi A}{i\lambda z_1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_1} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1}\rho'^2} \left\{ \int_0^a e^{-\vartheta\rho^2} J_0\left(2\pi\frac{\rho'}{\lambda z_1}\rho\right) \rho d\rho \right\}; \quad \vartheta = \frac{1}{r_{P1}^2} - i\frac{\pi}{\lambda z_1} \left[ \frac{z_w+z_p+z_1}{\beta_{P1}} \right] \quad (3.4.13)$$

La distribución del frente de onda propagado depende de la relación integral mostrada en 3.4.13. Esta integral ha sido descrita como compleja para ser resuelta analíticamente [Gaskill, 1978]. Para nuestro análisis resolvimos esta relación tanto numéricamente como analíticamente. En la siguiente figura se muestra un diagrama esquemático con posibles valores prácticos del arreglo.



**Fig. 3.26** Arreglo experimental con apertura de aguja circular

Con esta información se resolvió numéricamente la integral 3.4.13. El modulo de esta solución se presenta, en forma gráfica, en la figura siguiente.

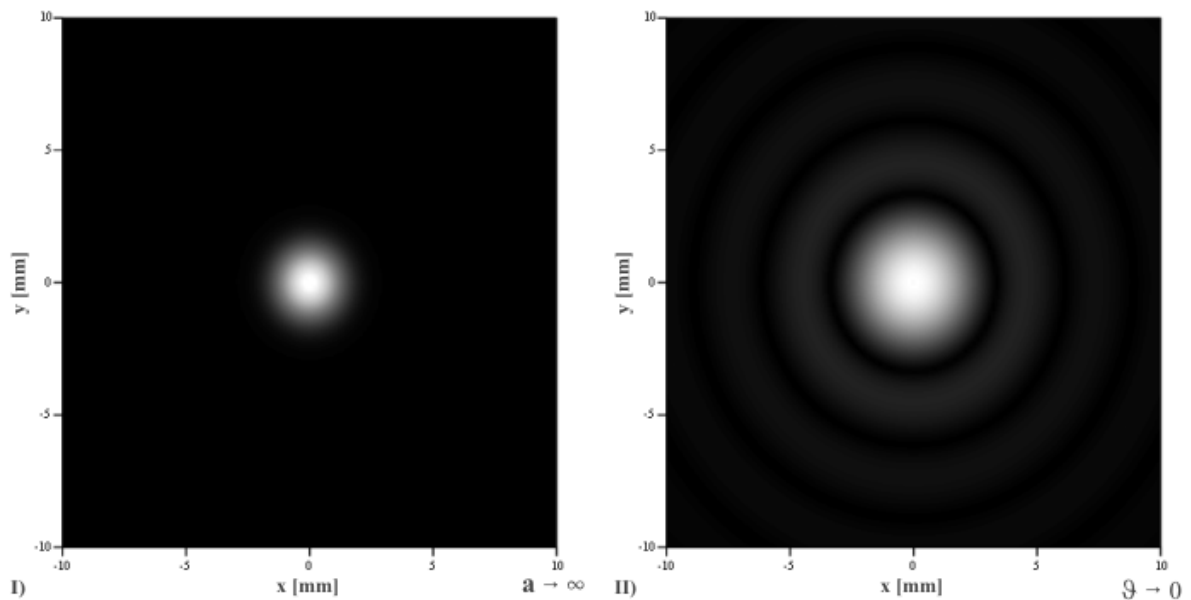


**Fig. 3.27** Solución numérica de la relación integral involucrada en 3.4.13

La resolución analítica de la integral no es tan directa. En la siguiente ecuación se describe la integral que queremos resolver.

$$\Omega = \int_0^a e^{-\vartheta \rho^2} J_0 \left( 2\pi \frac{\rho'}{\lambda z_1} \rho \right) \rho d\rho; \quad \vartheta = \frac{1}{r_{p1}^2} - i \frac{\pi}{\lambda z_1} \left[ \frac{z_w + z_p + z_1}{\beta_{p1}} \right] \quad (3.4.14)$$

El comportamiento de la integral puede ser inferido mediante variaciones en los parámetros de la misma. Por ejemplo, si el radio de la apertura se hace muy grande ( $a \rightarrow \infty$ ), entonces el resultado debe ser una función Gaussiana (es decir no tenemos filtro espacial). Por otro lado, si el parámetro complejo  $\vartheta$  tiende a cero entonces tenemos la función Bessel Sinc [Goodman, 1993]. Estos dos extremos se muestran en la figura siguiente.



**Fig. 3.28** Comportamiento de la integral 3.4.14 para  $a \rightarrow \infty$  y  $\vartheta \rightarrow 0$ .

El comportamiento de la solución, a la integral 3.4.14, debe abarcar estos límites (véase la figura 3.27). Más aún, intuitivamente esperamos que dicha solución tenga relación con las funciones de Bessel (debido al caso límite  $\vartheta \rightarrow 0$ ). Para resolver analíticamente la ecuación 3.4.14, primero tenemos que introducir las funciones de Lommel de dos variables [Watson, 1995].

$$U_v(\omega, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\omega}{z}\right)^{v+2i} J_{v+2i}(z) \quad (3.4.15)$$

$$V_v(\omega, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\omega}{z}\right)^{-v-2i} J_{-v-2i}(z)$$

Aquí  $v$  puede ser cualquier número real. Además  $\omega$  y  $z$  son números complejos cualesquiera. Lommel empleó estas expresiones, por primera vez, en su gran trabajo sobre difracción en una apertura circular [Lommel, 1886]. En su tratado, Watson describe las relaciones integrales que cumplen las funciones de Lommel [Watson, 1995]. Una de éstas es muy parecida a la integral que estamos tratando de resolver.

$$U_v(\omega, z) \pm iU_{v+1}(\omega, z) = \frac{\omega^v}{z^{v-1}} \int_0^1 J_{v-1}(zt) e^{\left[\pm \frac{1}{2}i\omega(1-t^2)\right]} t^v dt \quad (3.4.16)$$

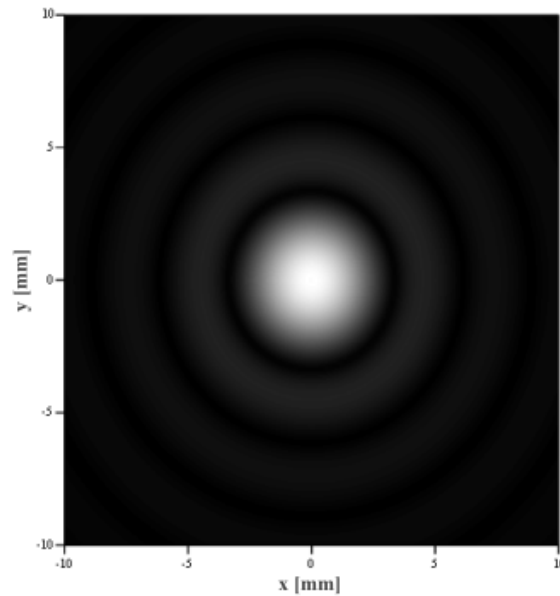
Sin embargo esta relación implica la normalización del radio de la apertura. Por otra parte, en una excelente obra matemática, Prudnikov, presenta relaciones para una gran variedad de funciones especiales [Prudnikov *et al*, 1986]. En esta obra encontramos una forma generalizada de la relación integral que estamos evaluando. Esta expresión se muestra enseguida.

$$\int_0^y x^{v+1} e^{px^2} J_v(qx) dx = \frac{q^v e^{py^2}}{(i2p)^{v+1}} \left[ U_{v+1}(i2py^2, qy) + iU_{v+2}(i2py^2, qy) \right] \quad (3.4.17)$$

Esta expresión nos permite resolver la integral 3.4.14, en términos de funciones de Lommel de dos variables. Además es muy parecida a la expresión 3.4.16. Los parámetros de 3.4.17 para nuestra integral son:  $x = \rho$ ,  $y = a$ ,  $v = 0$ ,  $p = -\vartheta$  y  $q = 2\pi \frac{\rho'}{\lambda z_1}$ . La aplicación de esta relación, con los parámetros mencionados, entrega el resultado buscado.

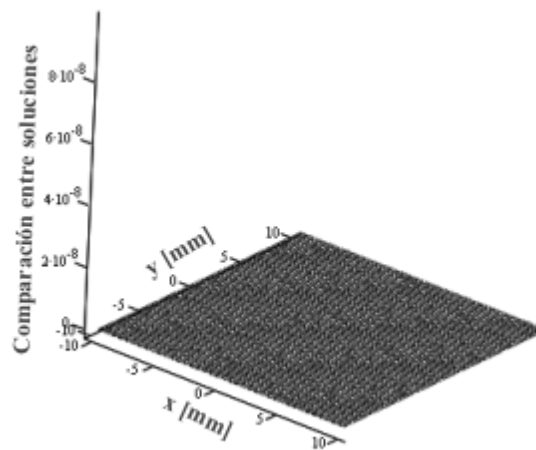
$$\int_0^a e^{-\vartheta \rho^2} J_0\left(2\pi \frac{\rho'}{\lambda z_1} \rho\right) \rho d\rho = \frac{e^{-\vartheta a^2}}{(-i2\vartheta)} \left[ U_1\left(-i2\vartheta a^2, 2\pi \frac{a}{\lambda z_1} \rho'\right) + iU_2\left(-i2\vartheta a^2, 2\pi \frac{a}{\lambda z_1} \rho'\right) \right] \quad (3.4.18)$$

El modulo de la solución analítica se presenta en forma gráfica, para los parámetros mostrados (figura 3.26), en la figura siguiente.



**Fig. 3.29** Solución analítica de la relación integral involucrada en 3.4.13

Por último veamos una comparación entre la solución numérica y la analítica. Esta comparación se muestra enseguida.



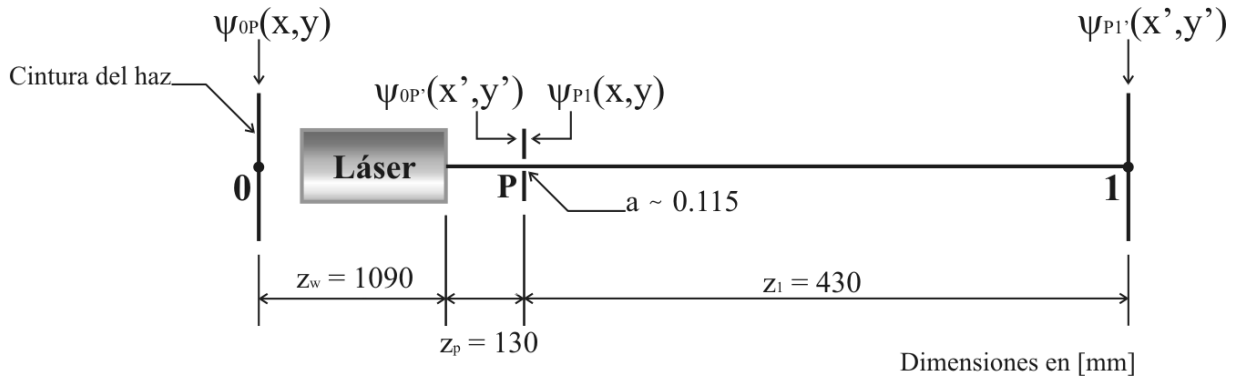
**Fig. 3.30** Comparación entre la solución numérica y analítica para la integral 3.4.14

La concordancia entre resultados, nos asegura que hemos encontrado una solución analítica a nuestro problema. Con esta relación obtendremos la distribución del frente de onda propagado. Para esto, simplemente sustituimos la relación 3.4.18 en la expresión 3.4.13.

$$\Psi_{P1'}(\rho') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{0P}^2}} \alpha_{P1} \frac{\pi e^{-\vartheta a^2}}{\lambda \vartheta z_1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z_w+z_p+z_1)} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1}\rho'^2} \left[ U_1\left(-i2\vartheta a^2, 2\pi \frac{a}{\lambda z_1}\rho'\right) + iU_2\left(-i2\vartheta a^2, 2\pi \frac{a}{\lambda z_1}\rho'\right) \right]$$

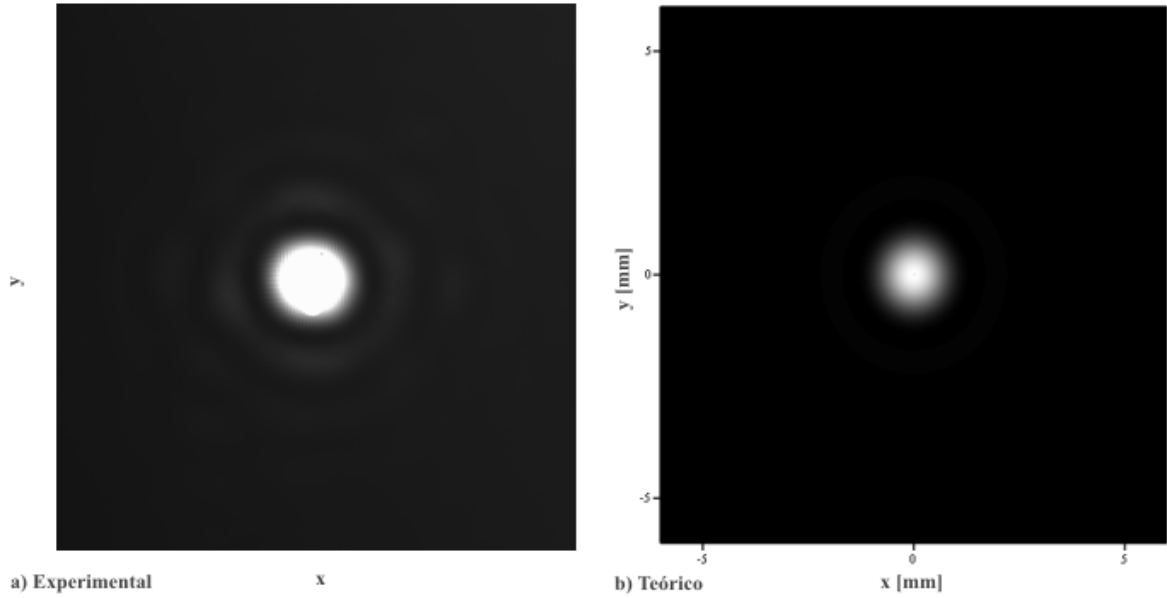
$$\alpha_{P1} = \alpha_{0P'}; \quad \beta_{P1} = \beta_{0P'}; \quad r_{P1} = r_{0P'} \quad (3.4.19)$$

Los parámetros  $\alpha_{P1}$ ,  $\beta_{P1}$  y  $r_{P1}$  se toman directamente de la ecuación 3.4.8. El arreglo experimental, para obtener el patrón de difracción generado por una apertura de aguja, se muestra enseguida.



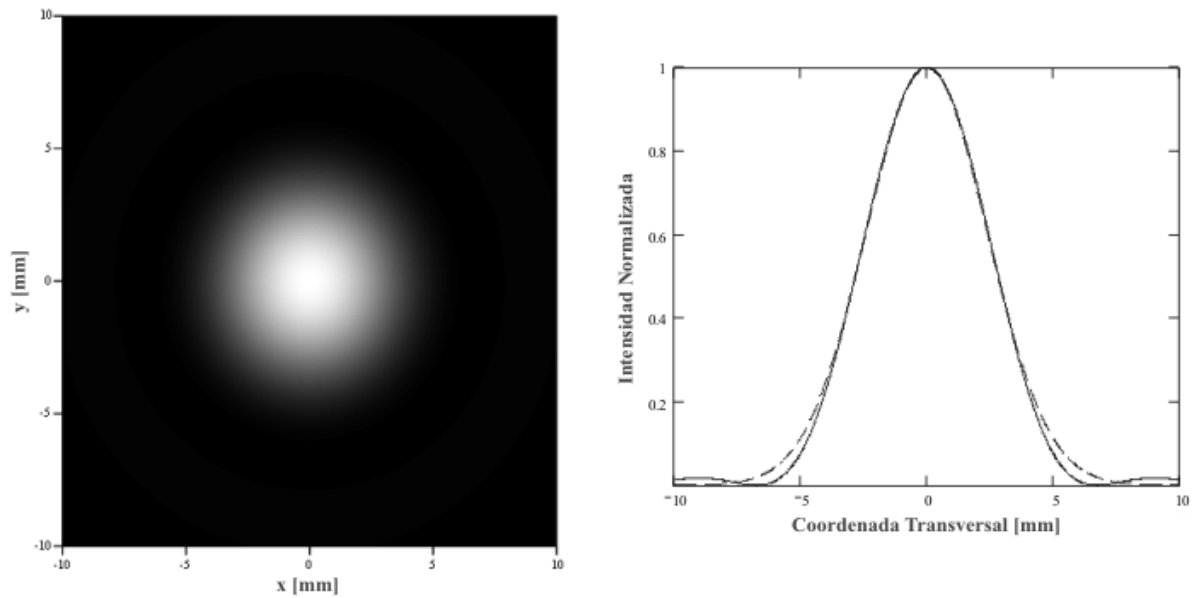
**Fig. 3.31** Diagrama esquemático del arreglo experimental con apertura de aguja circular

La expresión 3.4.19 describe la distribución de amplitudes en el plano P1' (refiérase a la figura anterior). La relación de intensidad es la que nos interesa a nosotros. En la figura siguiente se muestra dicha distribución, tanto teórica como práctica, en el plano P1'.



**Fig. 3.32** Distribución de intensidad para el arreglo con filtro de aguja circular

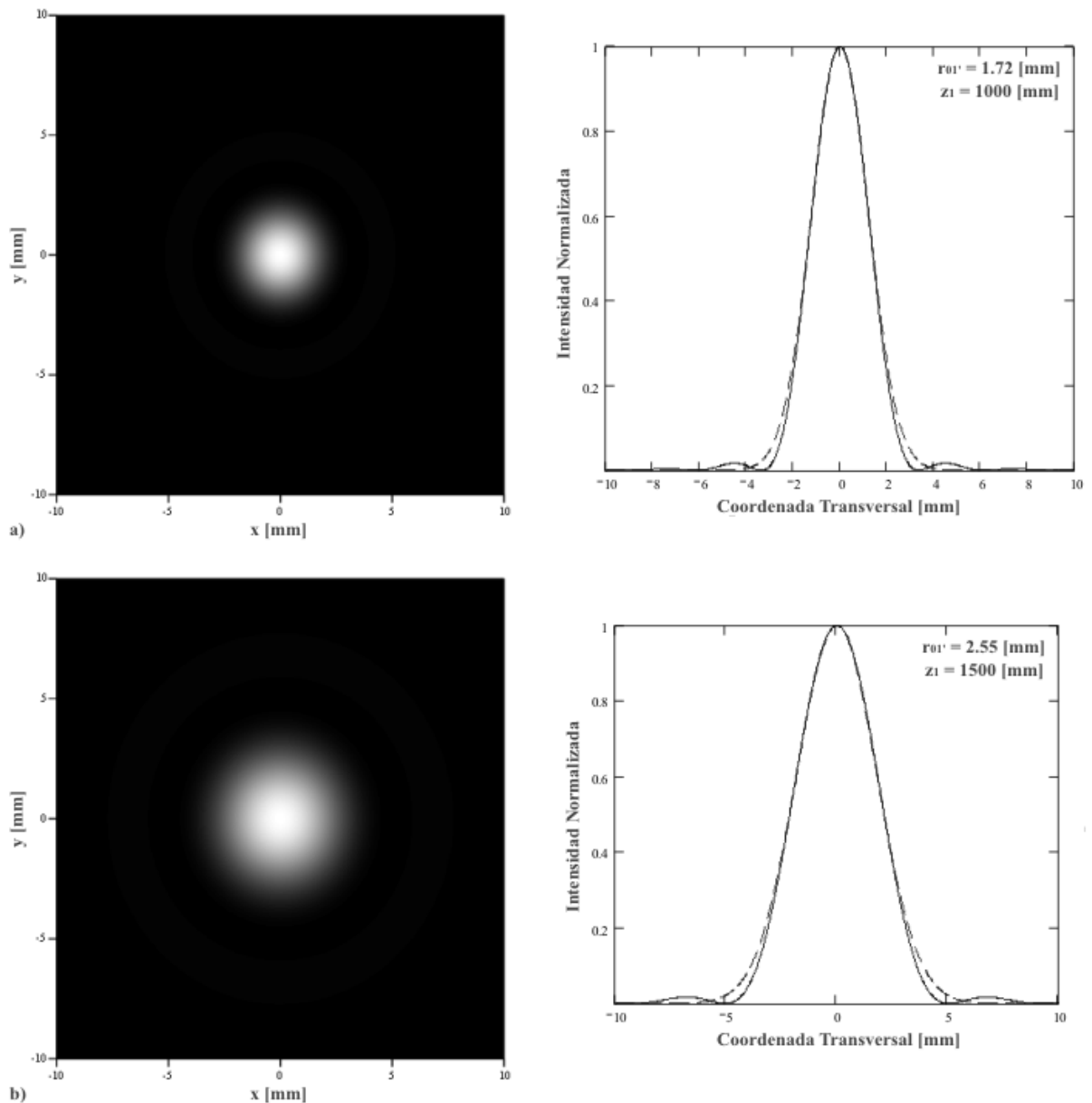
Las funciones de Lommel introdujeron órdenes mayores al patrón inicial (a este proceso lo podríamos llamar des-apodización [Bracewell, 2000], [Goodman, 1993]). En la siguiente figura mostramos cómo el orden central puede ser considerado Gaussiano.



**Fig. 3.33** Aproximación del orden central de difracción a una Gaussiana



La relación 3.2.30 sienta las bases para obtener las propiedades del nuevo frente de onda Gaussiano. Es decir, suponemos que el orden central es Gaussiano. Por lo tanto, necesitamos propagar dos veces el frente de onda para determinar las características de éste (su radio en la cintura del haz y la localización de la cintura). En la figura siguiente mostramos los dos patrones de difracción, así como cortes transversales de éstos.



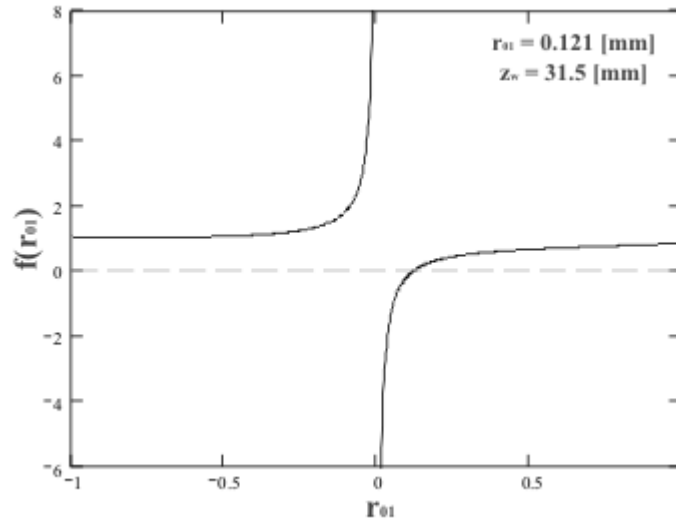
**Fig. 3.34** Patrones de difracción para determinar los parámetros del nuevo frente de onda

Estos resultados fueron obtenidos teóricamente. Con esta información, numéricamente determinamos el radio del haz que contiene el 86.5% de la energía. Dichos parámetros se muestran en los cortes transversales de los patrones de difracción (refiérase a la figura anterior). Nuestra suposición es que, una función Gaussiana con este radio, es equivalente al patrón difractado. Por lo tanto, utilizaremos la relación 3.2.30 dos veces para formar un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. La primera de las incógnitas es el radio del frente de onda en la cintura ( $r_{01}$ ). Mientras que la segunda es la localización de la cintura ( $z_w$ ). Este sistema de ecuaciones se muestra a continuación.

$$(1.72)^2 = \left( \frac{\lambda(z_w + 1000)}{\pi r_{01}} \right)^2 + r_{01}^2; \quad (2.55)^2 = \left( \frac{\lambda(z_w + 1500)}{\pi r_{01}} \right)^2 + r_{01}^2 \quad (3.4.20)$$

$$f(r_{01}) = \sqrt{2.55^2 - r_{01}^2} - \sqrt{1.72^2 - r_{01}^2} - \left( 500 \frac{\lambda}{\pi r_{01}} \right) \quad (3.4.21)$$

La nomenclatura utilizada hace referencia a un haz Gaussiano (refiérase a la figura 3.4). En la expresión 3.4.20 hemos optado por colocar los valores numéricos, con el fin de clarificar cuáles son las variables por encontrar. Además hemos encontrado una función (ecuación 3.4.21) que determina el radio en la cintura del haz. Esta función se plasma gráficamente enseguida.

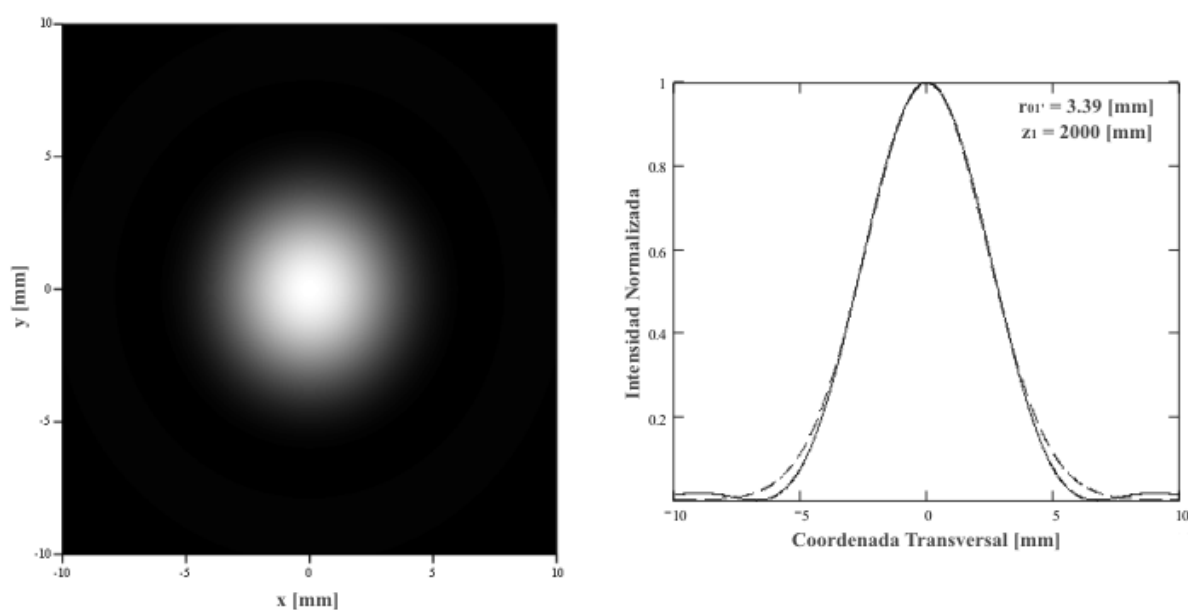


**Fig. 3.35** Función para determinar el radio en la cintura del haz

La intersección con el eje  $x$  ( $r_{01} = 0.121$  [mm], refiérase a la figura 3.35) determina el valor del radio en la cintura del haz. La otra aproximación es encontrar, numéricamente, las raíces de la expresión 3.4.21.

Por simple sustitución en cualquiera de las relaciones 3.4.20, encontramos la posición de la cintura ( $z_w = 31.5$  [mm]). El nuevo haz Gaussiano es marcadamente más divergente. Esto debido a que la posición de la cintura está muy cerca de dónde se generó el haz (compárese  $z_w = 1090$  [mm] contra  $z_w = 31.5$  [mm]).

Para comprobar estos resultados llevamos acabo otra propagación del haz ( $z_1 = 2000$  [mm]). Mediante el análisis teórico exacto, es decir mediante las funciones de Lommel, encontramos el radio que abarca el 86.5% de la energía. Dicho valor se comparó con el que entrega la relación 3.2.30 para un frente de onda Gaussiano convencional. El radio del haz en la cintura así como la localización de la misma, utilizados fueron los encontrados previamente ( $r_{01} = 0.121$  [mm],  $z_w = 31.5$  [mm]). La distribución de intensidad, calculada con la expresión exacta, se muestra enseguida.

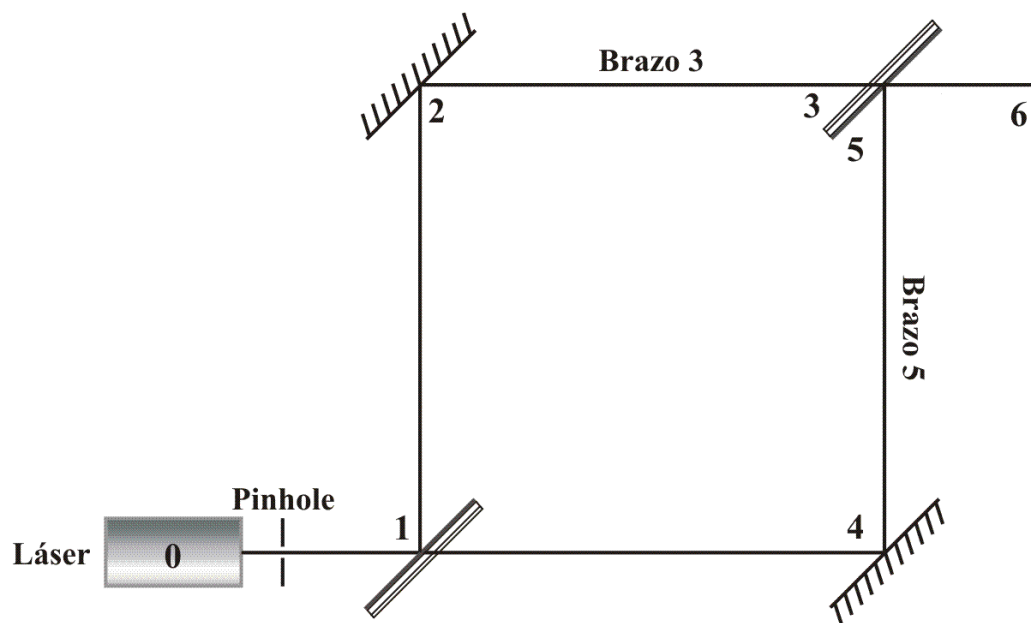


**Fig. 3.36** Patrón de difracción para comparar el método exacto con la aproximación

El valor encontrado, para el radio que cobija al 86.5% de la energía, fue  $r_{01'} = 3.39$  [mm]. El radio que se obtiene mediante la ecuación 3.2.30 es  $r_{01'} = 3.381$  [mm]. Este parámetro es casi idéntico al obtenido mediante la solución exacta. Por lo tanto, hemos demostrado que el orden central del patrón de difracción se comporta como un frente de onda Gaussiano. La ventaja de este nuevo frente de onda, es que diverge mucho más marcadamente. Esto implica que en el plano de interferencia, tendremos una mayor área de superposición. Así pues, el procedimiento de alineación del dispositivo se facilitará notablemente. En la siguiente sección se muestran los resultados de la alineación del interferómetro con la aplicación del filtro espacial.

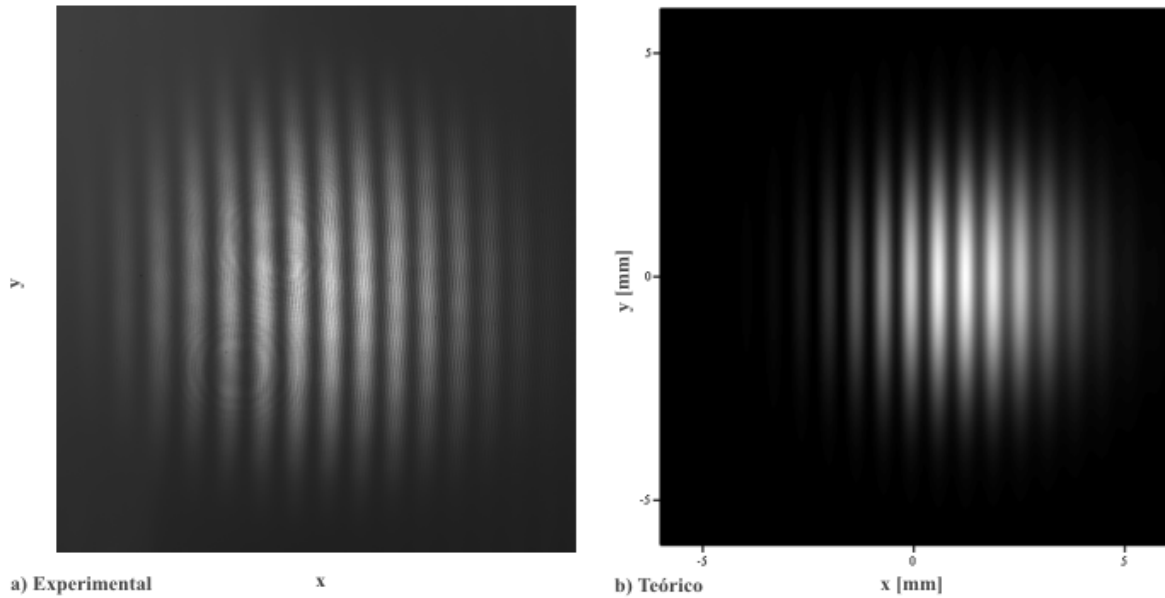
### 3.4.3 Alineación del interferómetro utilizando el filtro de aguja circular

La alineación experimental del dispositivo se llevó a cabo con la ayuda del filtro espacial de aguja. Esto redundó en una mayor limpieza en el haz, además de un incremento en el área de interferencia. Ambas condiciones facilitaron la optimización del arreglo. En la figura siguiente mostramos un diagrama del arreglo experimental con el filtro espacial.

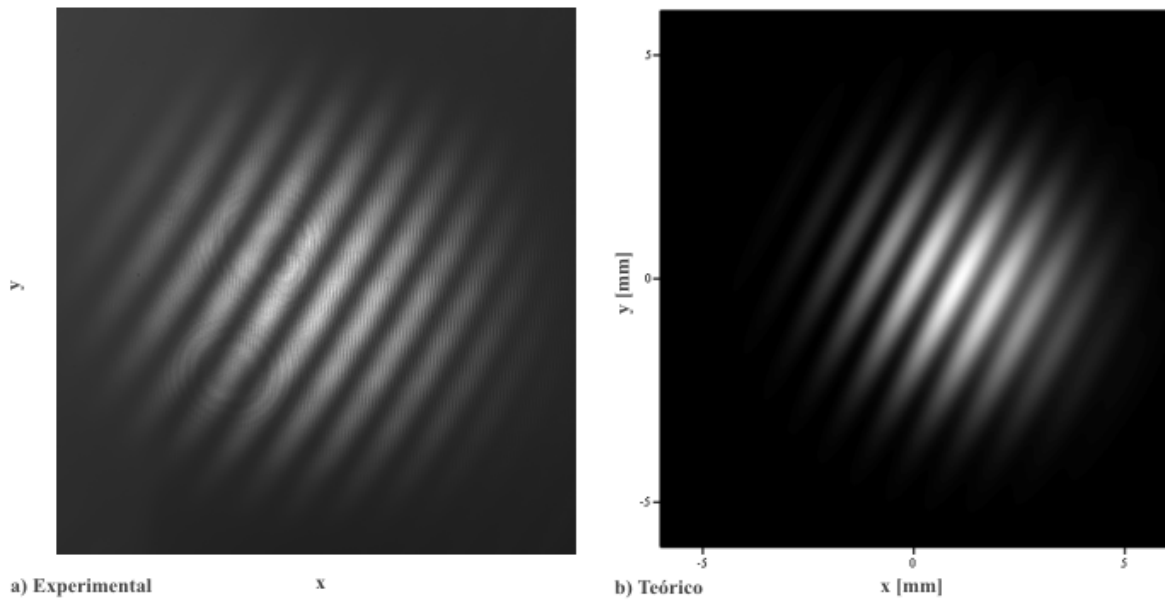


**Fig. 3.37** Arreglo experimental con el filtro espacial implementado

En la sección anterior demostramos que nuestro análisis es idéntico cuando implementamos un filtro espacial de aguja. Los únicos parámetros que cambian son los correspondientes al radio en la cintura y localización de esta última. Por lo tanto el comportamiento del sistema, con filtro, viene dado por la relación 3.4.5. Con esta información es sencillo alinear el sistema óptico. En la siguiente figura mostramos los patrones de interferencia, tanto teóricos como prácticos, del arreglo desalineado.

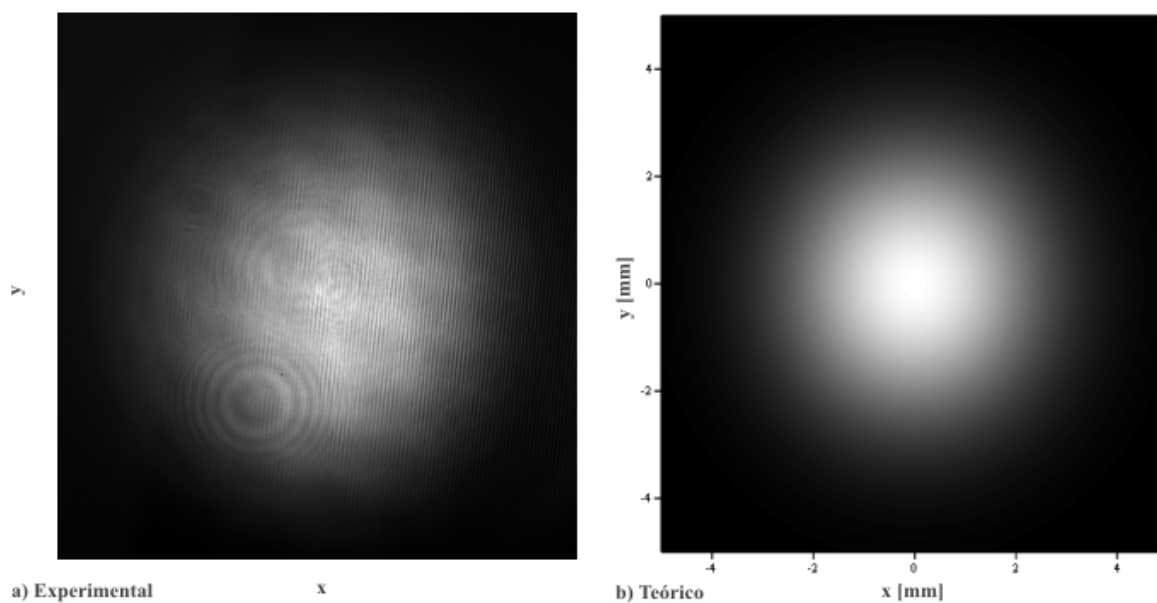


**Fig. 3.38** Comportamiento del interferómetro desalineado en la dirección x



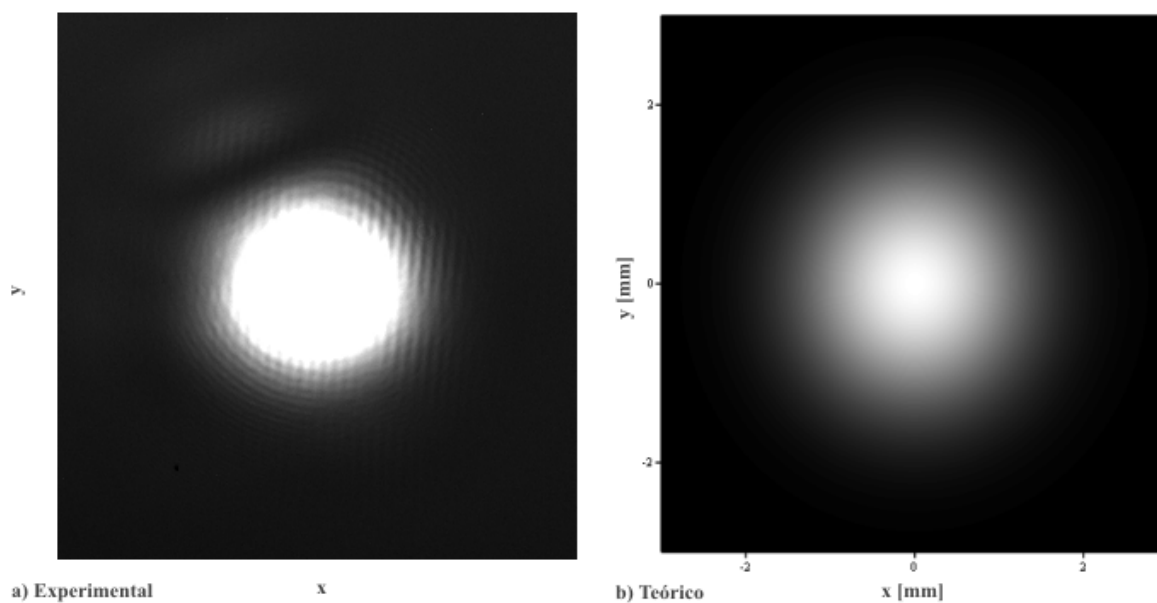
**Fig. 3.39** Comportamiento del interferómetro desalineado en ambas direcciones

Enseguida mostramos los patrones de interferencia para un interferómetro alineado.



**Fig. 3.40** Comportamiento teórico y experimental del interferómetro alineado

La implementación del filtro de aguja circular debe asegurar una correcta alineación del sistema. Esto fue comprobado experimentalmente. Posteriormente a la alineación con el filtro de aguja, éste se quitó del arreglo experimental. El resultado del patrón de intensidad se muestra a continuación.



**Fig. 3.41** Comportamiento del interferómetro alineado sin filtro de aguja circular

En esta última figura observamos que la distribución no cuenta con patrones de franjas (refiérase a las figuras 3.18 y 3.9). Esto implica que el sistema se encuentra bien alineado. Por lo tanto, hemos cumplido con el objetivo de maximizar el área de interferencia.

### 3.5 Conclusiones del capítulo 3

La aproximación de ondas secundarias de Huygens, nos permite obtener la integral de propagación de Fresnel. Este acercamiento, al concepto de la propagación de ondas electromagnéticas, es tanto intuitivo como coherente matemáticamente. La propagación de un frente de onda Gaussiano es crucial para cualquier análisis serio que involucre láseres. Un haz Gaussiano conserva este carácter, a menos que se vea influenciado por algún elemento externo a éste.

Un modelo matemático fue desarrollado para predecir el comportamiento del interferómetro. La concordancia entre resultados teóricos y experimentales fue verificada. Una alineación deficiente del sistema limita la capacidad de detección del mismo. La relación señal ruido disminuye, debido a la ausencia de superposición en un interferómetro mal alineado.

Una metodología para alinear el sistema fue propuesta y verificada experimentalmente. La implementación de un filtro de aguja ayuda, tanto a limpiar los modos no deseados de la fuente, como a generar un frente de onda Gaussiano más divergente. Esta característica facilita la alineación del dispositivo.

En resumen, la configuración interferométrica permite distinguir los fotones no atenuados. Solamente éstos generan interferencia con el frente de onda en el brazo de referencia.



## 4 INTERFEROMETRÍA HETERODINA

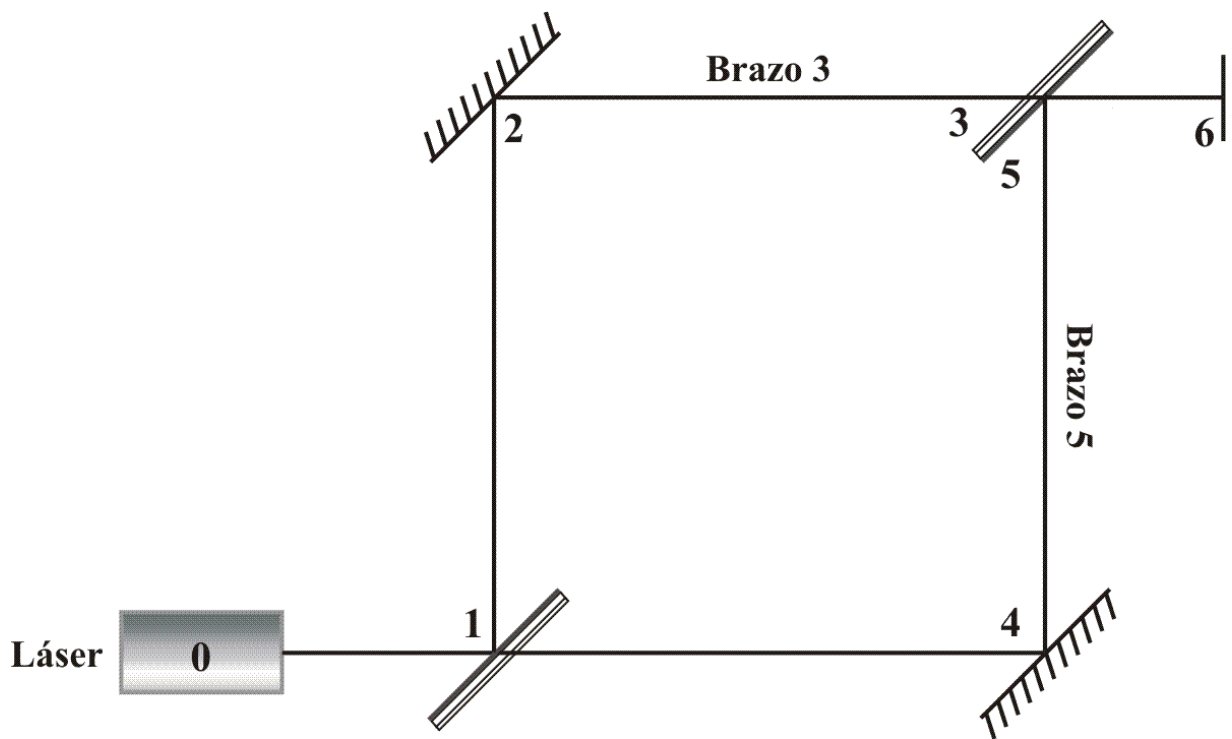
En aplicaciones biomédicas, así como en otras ramas, el análisis en tiempo real es muy importante. La configuración que fue descrita en el capítulo anterior, entrega como resultado patrones espaciales de intensidad. La implementación de un modulador temporal permite que el sistema genere una respuesta dependiente del tiempo. Este dispositivo facilitará la transformación de información espacial en información de tipo espacio-temporal. Con la utilización de un sistema de detección, el arreglo se torna solamente dependiente del tiempo. Esto facilita la implementación del arreglo para análisis en tiempo real. En resumen, el objetivo de la presente sección es el estudio del comportamiento dinámico del sistema.

La sección 4.1 recapitula las relaciones más importantes del análisis espacial del sistema óptico. Además, se proponen las modificaciones al arreglo para obtener la respuesta dinámica. En la sección 4.2, modificamos el modelo matemático para tomar en cuenta la inclusión del dispositivo modulador. La sección 4.3 se evoca al estudio del dispositivo modulador. Una montura, con actuadores piezoeléctricos, es analizada como modulador temporal. La respuesta de los actuadores piezoeléctricos también es estudiada. El control electrónico óptimo para la montura es presentado. Por último una comparación, entre el desempeño espacio-temporal teórico y real del sistema, es mostrada. En la sección 4.4 se analizan los esquemas de detección para el interferómetro. Además se presenta el arreglo experimental implementado en el laboratorio. Más aún el comportamiento, teórico y experimental del arreglo con detector, es confirmado en esta sección. También la métrica de visibilidad es estudiada. Ésta se propone como medio para determinar, experimentalmente, los parámetros primordiales del modelo matemático. En la última sección del capítulo, abordamos las conclusiones de éste.

## 4.1 Configuración dinámica del interferómetro

El arreglo, que fue estudiado en la sección precedente, entrega como resultado un comportamiento espacial. En la presente sección implementaremos un modulador temporal al arreglo propuesto. Esto brindará como resultado una respuesta espacio-temporal del sistema.

En la figura siguiente se recapitula el arreglo propuesto para efectuar el diagnóstico (refiérase al capítulo 3).



**Fig. 4.1** Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta espacial

Las relaciones matemáticas fundamentales para este arreglo son dos. Primero, las distribuciones de luz en ambos brazos del interferómetro. Segundo, la distribución de intensidad en el plano de interferencia (generada por la superposición de los haces en cada brazo). Estas expresiones matemáticas (ecuaciones 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.5), debido a su importancia en el análisis dinámico del sistema, se repiten a continuación.

$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y\right]} \quad (4.1.1)$$

$$\Psi_5(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y\right]} \quad (4.1.2)$$

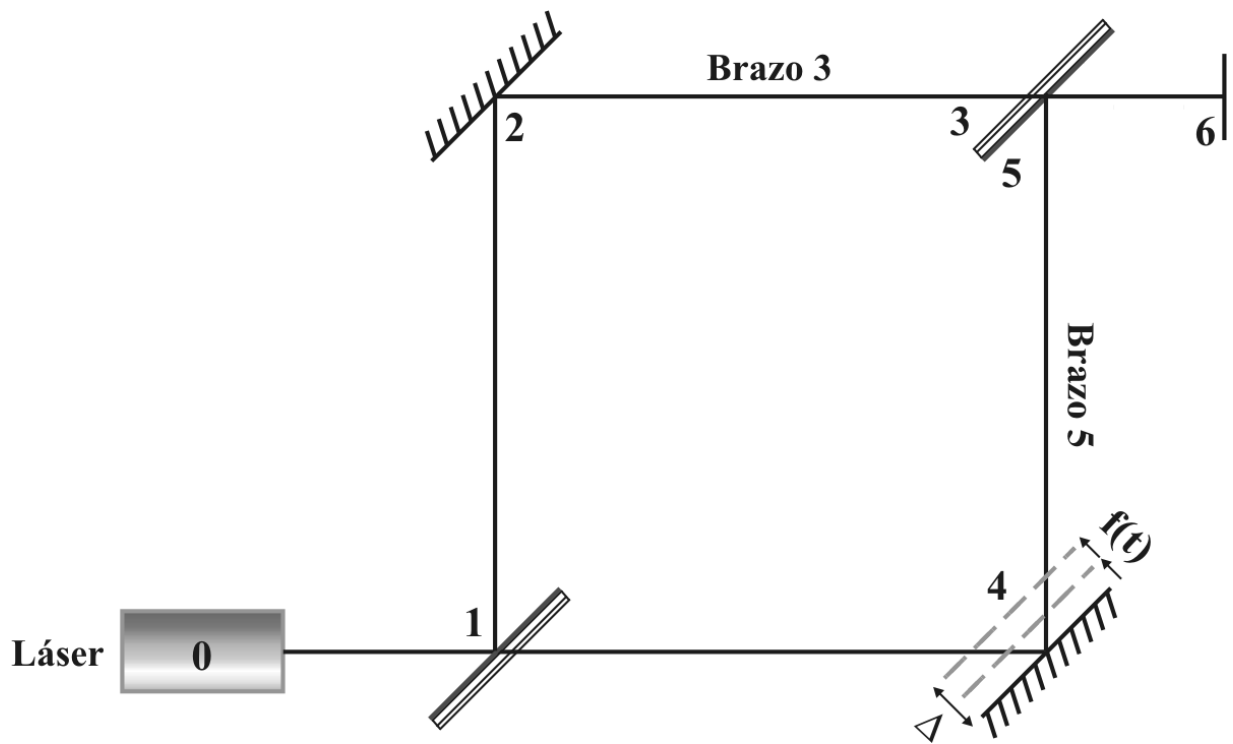
$$I_6(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \quad (4.1.3)$$

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma \right\}$$

Aquí  $\Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma_5$ , representa el desfase adicional inducido por las variables complejas,  $\alpha_3 = |\alpha_3| e^{i\gamma_3}$  y  $\alpha_5 = |\alpha_5| e^{i\gamma_5}$ . Además  $m_6$  y  $n_6$  representan la desalineación del sistema,  $m_6 = m_4 + m_3 - m_1 - m_2$  y  $n_6 = n_4 + n_3 - n_1 - n_2$ . La nomenclatura continúa siendo la propuesta al inicio de este trabajo.

En el capítulo precedente (refiérase a la sección 3.4) demostramos que la ecuación 4.1.3, predice el comportamiento del arreglo para diferentes escenarios. La información obtenida es de carácter espacial. La implementación del modulador temporal, en el interferómetro, asegura que el sistema tendrá un comportamiento dinámico.

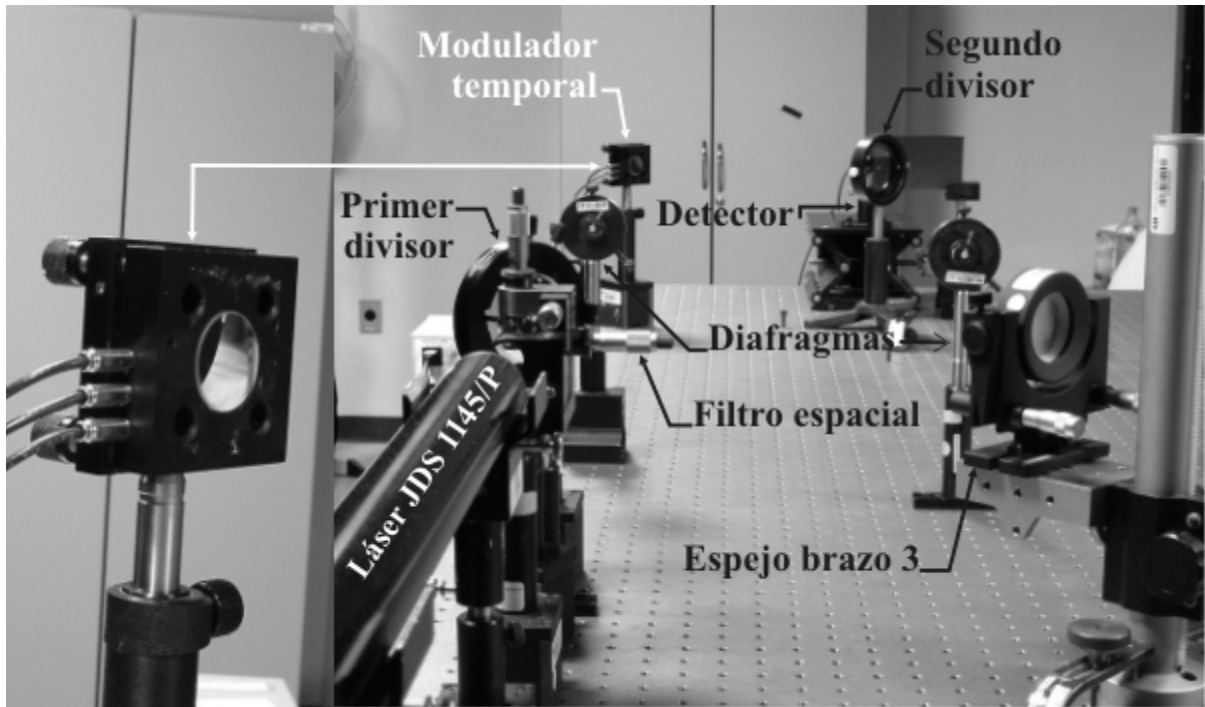
En la siguiente figura mostraremos, esquemáticamente, la implementación del modulador temporal en el interferómetro.



**Fig. 4.2** Diagrama esquemático del arreglo para obtener una respuesta dinámica

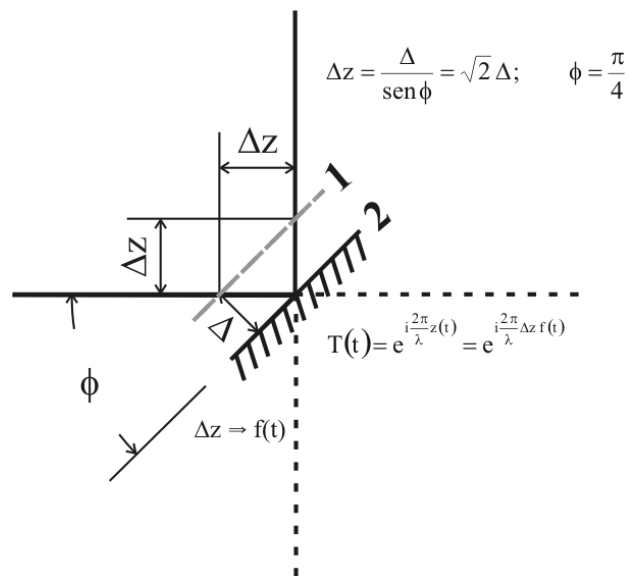
En esta figura hemos hecho consideraciones muy importantes para el arreglo. Primero, el cambio en camino óptico ( $\Delta$  representa el máximo desplazamiento del modulador) es una función del tiempo. Esta propiedad le asigna el carácter dinámico al dispositivo. Como segunda consideración, el modulador se encuentra en el brazo 5 del interferómetro. Esta selección tiene un fundamento importante. La muestra por analizar se encontrará en este brazo del interferómetro. En el segundo capítulo de este trabajo, se mencionó que el esparcimiento en tejidos es marcadamente frontal. Por lo tanto, la implementación del modulador en el brazo que contiene la muestra, ayudará para desviar aquellos fotones esparcidos un ángulo pequeño. Más aún, la muestra se colocará cerca del primer divisor de haz. Esto maximizará la desviación inducida por el modulador temporal.

El modulador temporal utilizado en nuestro arreglo fue una montura con actuadores piezoeléctricos. Un espejo, con calidad interferométrica, se sujetó a dicha montura. Una fotografía, de la configuración implementada en el laboratorio, se presenta a continuación.



**Fig. 4.3** Arreglo experimental del interferómetro con el modulador temporal

El efecto de la inclusión del modulador temporal es muy importante para el desempeño del sistema. El modulador temporal introduce una transmitancia, dependiente del tiempo, al arreglo. Un diagrama esquemático, del efecto debido al modulador, se presenta enseguida.



**Fig. 4.4** Efecto generado mediante la inclusión del modulador temporal

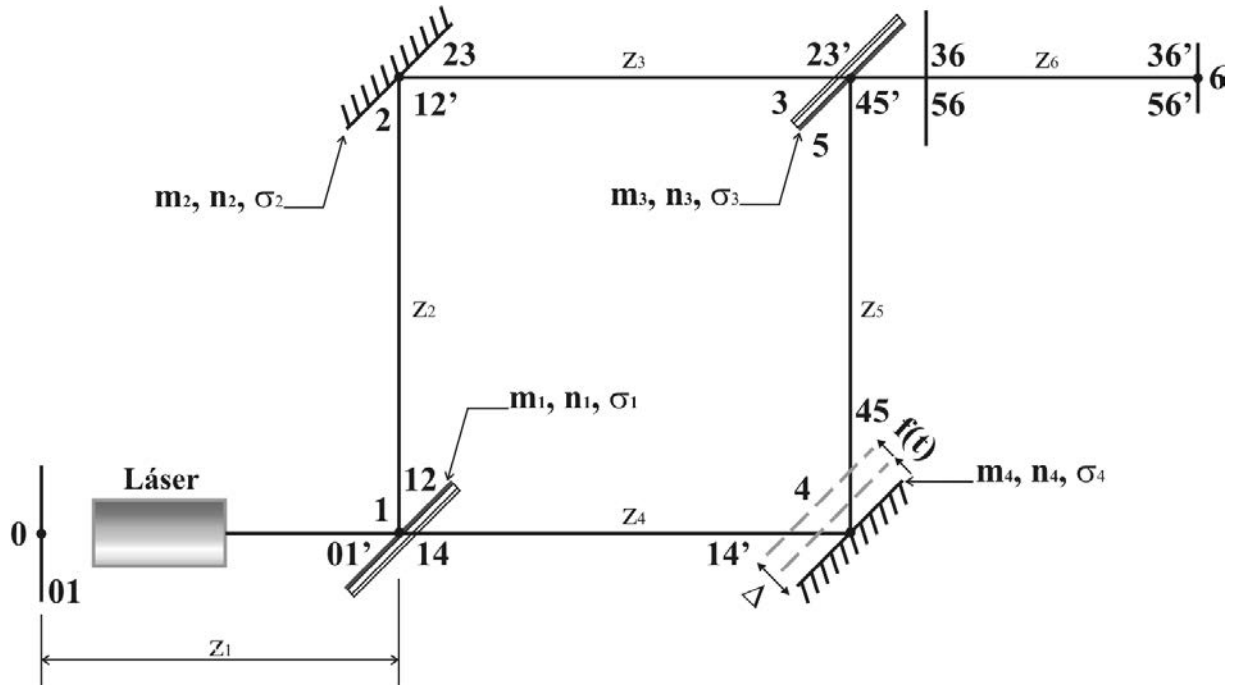
En esta figura suponemos que el espejo se desplaza de la posición 1 a la posición 2. El desplazamiento, que acompaña a este movimiento en el eje óptico, está demarcado como  $\Delta z$ . Sin embargo, el desplazamiento que conocemos es  $\Delta$ . Éste es el que introduce nuestro sistema modulador. Ambos desplazamientos están relacionados mediante una función sinusoidal (sin embargo esto no es de relevancia). El aspecto importante de esta configuración es que el camino óptico, recorrido por el haz, depende de la posición del espejo. En la figura 4.4 mostramos la transmitancia que “genera” el dispositivo modulador. Esta transmitancia se repite en la siguiente ecuación.

$$T(t) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z(t)} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z f(t)} \quad (4.1.4)$$

Mediante esta relación observamos que, el modulador temporal introduce una transmitancia (dependiente del tiempo) al sistema. El efecto global, de dicha transmitancia en el interferómetro, será estudiado en la siguiente sección.

## 4.2 Interferómetro Mach-Zehnder heterodino

La implementación del modulador temporal hace que nuestro sistema se torne en uno de carácter heterodino. En esta sección analizamos el efecto que trae consigo, la adición del modulador al interferómetro. En la siguiente figura mostramos el diagrama esquemático, con la nomenclatura utilizada en las secciones previas, del interferómetro heterodino.



**Fig. 4.5** Configuración Mach-Zehnder heterodina

El análisis matemático, de esta configuración, es idéntico al presentado previamente (sección 3.3). Incluso el brazo 3 (véase la figura 4.2) y sus diferentes distribuciones (refiérase a la sección 3.3.3), no sufren ninguna alteración en la configuración heterodina. Por otro lado, el brazo 5 si se modifica. Sin embargo, la alteración que sufre este brazo es muy específica. Además de encontrarse perfectamente localizada.

La transmitancia, inducida por el modulador temporal, afecta al brazo 5. La distribución que se modifica, debido al modulador, es aquella que se encuentra después del espejo 4;  $\psi_{45}(x, y)$ . En las siguientes expresiones recordamos cuál es la distribución del haz, instantes antes de interactuar con este espejo;  $\psi_{14'}(x', y')$ .

$$\psi_{14'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{14'} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{14'}} e^{-\left[\frac{x'^2 + y'^2}{r_{14'}^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_4} \beta_{14'} [x'^2 + y'^2]} \quad (4.2.1)$$

$$\alpha_{14'} = \alpha_{14} \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14}) - i z_1^2 (\lambda z_4) (\pi r_{14}^2)}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2) (z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad r_{14'}^2 = \left( \frac{\lambda z_4}{\pi r_{14}} \right)^2 + \left[ r_{14} \left( 1 + \frac{z_4}{z_1} \beta_{14} \right) \right]^2$$

$$\beta_{14'} = 1 - \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14})}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2)(z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad \delta_{14'} = z_1 + z_4$$

Aquí hemos tomado como base las relaciones 3.3.20. Sin embargo, hemos utilizado la nomenclatura del haz propagado (es decir, utilizando primas). Además hemos eliminado la contribución, por desalineación, del espejo (ya que aún no ha interactuado con éste).

La interacción, entre el haz láser y el dispositivo modulador, se modeló como una transmitancia (sección 4.1) temporal. Además, es obvio que esta interacción es instantánea. En el siguiente juego de relaciones, mostramos la distribución del haz un instante después de haber interactuado con el modulador temporal;  $\psi_{45}(x, y)$ .

$$\psi_{45}(x, y) = T_M(x, y) T_D(x, y) \psi_{14'}(x, y) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t)} e^{i 2\pi \left[ \frac{2m_4}{\lambda} x + \frac{2n_4}{\lambda} y \right]} \psi_{14'}(x, y) \quad (4.2.2)$$

$$\psi_{45}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{45} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{45}} e^{-i \frac{x^2 + y^2}{r_{45}^2}} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_4} \beta_{45} [x^2 + y^2]} e^{i 2\pi \left[ \frac{2m_4}{\lambda} x + \frac{2n_4}{\lambda} y \right]} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t)}$$

$$\alpha_{45} = \alpha_{14} \sigma_4 \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14}) - i z_1^2 (\lambda z_4) (\pi r_{14}^2)}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2)(z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad r_{45}^2 = \left( \frac{\lambda z_4}{\pi r_{14}} \right)^2 + \left[ r_{14} \left( 1 + \frac{z_4}{z_1} \beta_{14} \right) \right]^2$$

$$\beta_{45} = 1 - \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{14}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{14})}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{14}^2)(z_1 + z_4 \beta_{14})]^2} \right\}; \quad \delta_{45} = z_1 + z_4$$

Obsérvese como esta expresión contiene la información de desalineación en el componente,  $T_D(x, y)$ . Además cuenta con el cambio dinámico de camino óptico, inducido por el modulador temporal,  $T_M(x, y)$ . Más aún, el coeficiente de reflexión del espejo,  $\sigma_4$ , está incluido en la constante  $\alpha_{45}$ .

El análisis del resto de las propagaciones, en el brazo 5 del interferómetro heterodino, es idéntico al efectuado previamente (secciones 3.3.2.1 y 3.3.3). La relación de interferencia depende de las distribuciones, debidas a los brazos 3 y 5, en el plano de superposición. Estas distribuciones,  $\psi_3(x, y)$  y  $\psi_5(x, y)$ , se muestran a continuación (compárese con 4.1.1 y 4.1.2).



$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y\right]} \quad (4.2.3)$$

$$\Psi_5(x, y, t) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y\right]} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t)} \quad (4.2.4)$$

Recordemos que la rápida fluctuación de las amplitudes imposibilita el rastreo de las mismas [Wangsness, 1979]. Por lo tanto la relación de superposición en intensidad, es lo que observaremos en el plano de interferencia. Esta relación se obtiene mediante una ecuación presentada en el capítulo anterior (refiérase a la sección 3.4).

$$I_6(x, y, t) = |\Psi_3(x, y)|^2 + |\Psi_5(x, y, t)|^2 + \Psi_3^*(x, y) \Psi_5(x, y, t) + \Psi_3(x, y) \Psi_5^*(x, y, t) \quad (4.2.5)$$

El patrón de intensidad es muy parecido al obtenido en la configuración interferométrica convencional. La diferencia importante es el componente dinámico del interferómetro heterodino. La relación mencionada se presenta a continuación.

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right\} \quad (4.2.6)$$

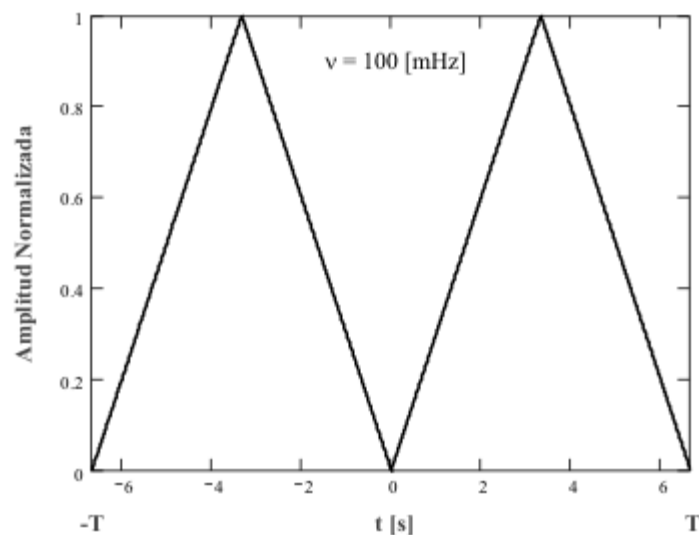
Aquí  $\Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma_5$ , representa el desfase adicional inducido por las variables complejas,  $\alpha_3 = |\alpha_3| e^{i\gamma_3}$  y  $\alpha_5 = |\alpha_5| e^{i\gamma_5}$ . Además  $m_6$  y  $n_6$  representan la desalineación acumulada del sistema,  $m_6 = m_4 + m_3 - m_1 - m_2$  y  $n_6 = n_4 + n_3 - n_1 - n_2$ . La diferencia entre la relación heterodina (ecuación 4.2.6) y la convencional (ecuación 4.1.3) se encuentra en la fase. La primera de las relaciones es solamente espacial. Mientras que la segunda presenta un carácter espacio-temporal.

El comportamiento teórico del dispositivo será estudiado enseguida. Este análisis desembocará en la necesidad de un estudio más minucioso del modulador temporal.

#### 4.2.1 Comportamiento teórico del interferómetro heterodino

La alineación, del sistema estático, fue estudiada a gran detalle (sección 3.4). Un interferómetro mal alineado implica un decremento en el área de interferencia. Por ende, la métrica de señal ruido disminuye acordeamente. La implementación de un interferómetro heterodino es delicada. El sistema puede estar alineado en su estado estático. Mientras que en el estado dinámico, el dispositivo modulador puede generar desalineaciones. Por lo tanto, el modulador temporal juega un papel crucial en el desempeño.

La simulación del desempeño ideal, para la configuración heterodina, se efectúa aplicando la relación 4.2.6. Una función temporal triangular,  $f(t)$ , fue utilizada en dichas simulaciones. Cabe mencionar que, esta función, también fue la implementada en el arreglo experimental. En la figura que sigue, mostramos la función temporal en cuestión.



**Fig. 4.6** Función temporal triangular

La expresión matemática, que describe a una función triangular, se muestra en la siguiente relación [Oppenheim *et al*, 1998].

$$f(t) = \begin{cases} t, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Cabe mencionar que esta función es periódica [Oppenheim *et al*, 1998]. La función triángulo se conforma mediante la unión de dos rectas con pendientes iguales, pero de signo contrario. Para obtener la expresión completa, para la distribución de intensidad en el plano de interferencia, sustituimos esta relación en 4.2.6. La expresión resultante se muestra enseguida.

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]}$$

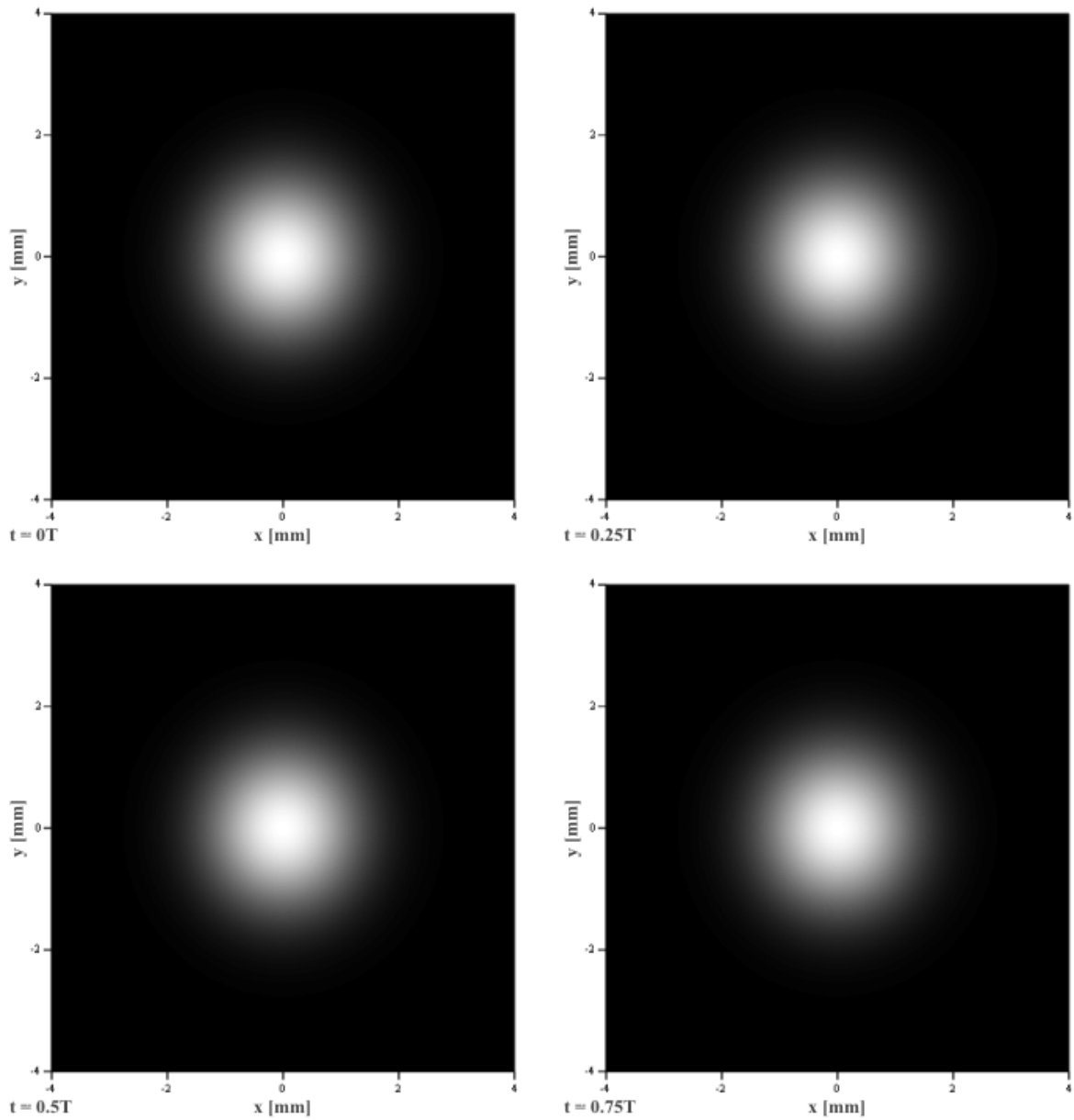
$$\cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi\Delta z}{\lambda} t \right\}$$

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]}$$

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma - \frac{2\pi\Delta z}{\lambda} t \right\} \quad (4.2.8)$$

Claramente, la primera expresión es válida para la porción con pendiente positiva, de la función triángulo;  $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ . Mientras que la segunda es válida cuando la pendiente es negativa;  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ .

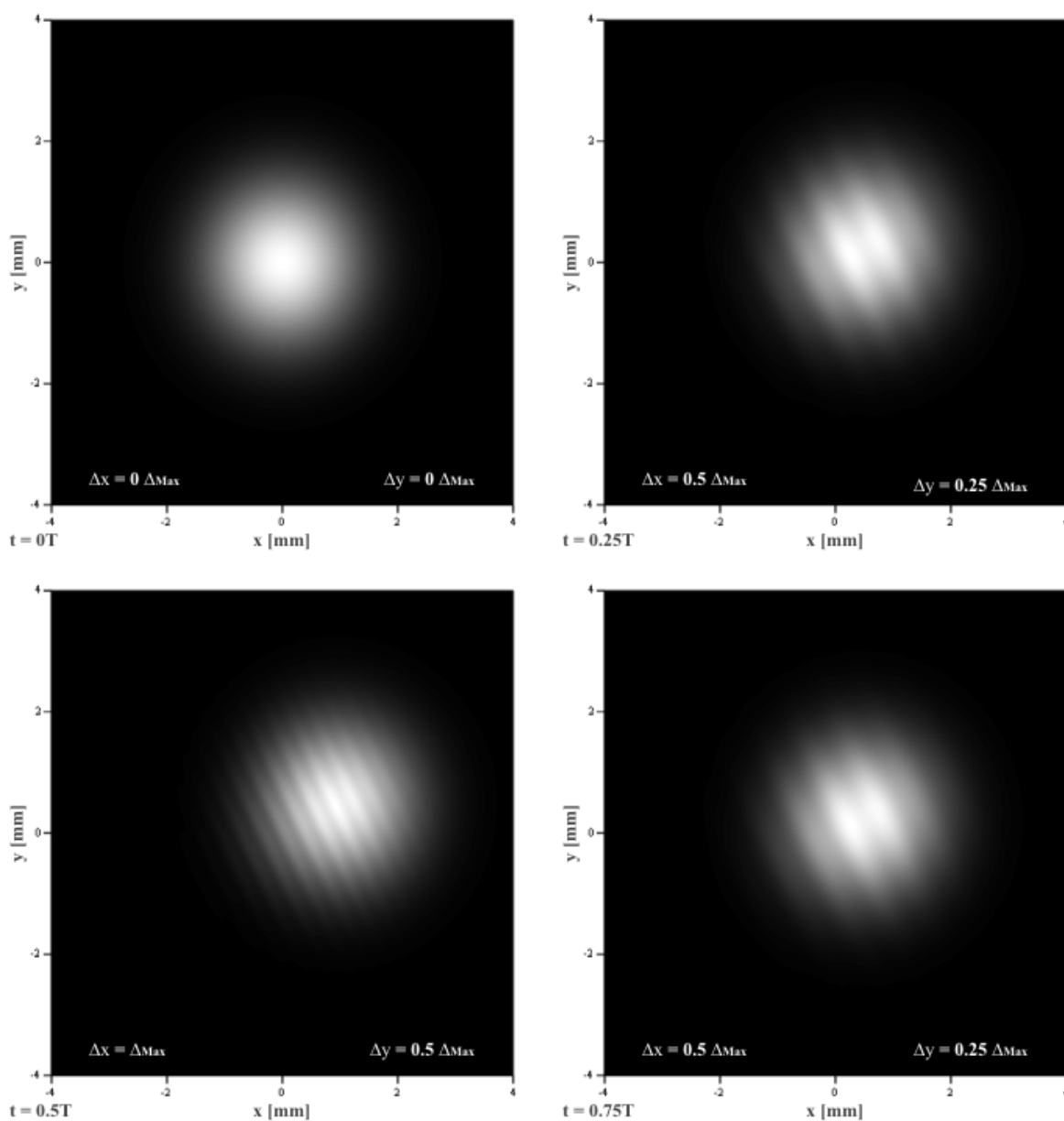
La simulación del comportamiento fue llevada a cabo con la expresión completa, para la función triangular (expresión 4.2.8). Este comportamiento se presenta a continuación.



**Fig. 4.7** Desempeño ideal del interferómetro heterodino

En estas simulaciones estamos suponiendo una diferencia de camino óptico pequeña. La diferencia se propuso igual a 2 mm. Un valor razonable para el arreglo experimental. La información de diferencia en camino óptico, será relevante en el análisis de la siguiente sección. Ahora, un escenario realista involucra desperfectos en el modulador. El modulador temporal se desplaza mediante tres actuadores piezoeléctricos (refiérase a la siguiente sección). La in-

ductancia en cada uno de estos piezoeléctricos puede ser diferente. Por lo tanto, la conversión entre voltaje y desplazamiento no es perfectamente uniforme en los tres actuadores. Esto implica que el sistema se pueda desplazar más en una dirección que en otras. Es decir, que se genere una cierta desalineación en función del tiempo. Para simular esta condición el parámetro de desalineación, del espejo involucrado, se volvió una función temporal. Los resultados obtenidos, mediante esta simulación se presentan en la siguiente figura.



**Fig. 4.8** Desalineación generada por el dispositivo modulador temporal

Aquí  $\Delta_{x,y}$  representan las desalineaciones en el sistema. Además, esta figura clarifica el comportamiento real del modulador mecánico. La función temporal que regula al modulador es triangular. Por esto, las figuras cuando  $t = 0.25T$  y  $t = 0.75T$  son idénticas (la frecuencia de oscilación es  $\nu = 100$  mHz). Este comportamiento es completamente ideal. Es decir, estamos despreciando otros efectos, como la histéresis, en la respuesta del modulador.

Además, esta simulación pone de manifiesto una restricción del sistema. El modulador temporal mecánico puede introducir imperfecciones al interferómetro. Por lo tanto, el modulador mecánico representa un área de oportunidad en la implementación del interferómetro. La utilización de un modulador electro-óptico (que no involucre desplazamientos mecánicos del sistema) optimizaría la respuesta del arreglo. Esto nos insta a estudiar a más detalle el comportamiento del modulador temporal.

### **4.3 Desempeño y optimización del modulador temporal**

El dispositivo modulador juega un papel muy importante en el desempeño del sistema. El interferómetro estático puede contar con una alineación ideal, sin embargo imperfecciones en el modulador temporal, afectan el comportamiento del sistema dinámico (refiérase a la sección 4.2.1). En esta sección presentamos las características principales del modulador temporal. Además hacemos sugerencias para optimizar su comportamiento. Más aún, proponemos la implementación de un filtro de aguja para generar funciones Gaussianas más divergentes (facilitando la alineación del sistema dinámico). Mediante esta configuración, estudiamos la optimización del comportamiento del sistema.

### 4.3.1 El modulador temporal

Al inicio de este capítulo enfatizamos que, la implementación del modulador temporal torna a nuestro sistema en uno de carácter heterodino. Una montura, con actuadores piezoeléctricos, fue utilizada como dispositivo modulador. La siguiente figura muestra el modulador temporal del arreglo.

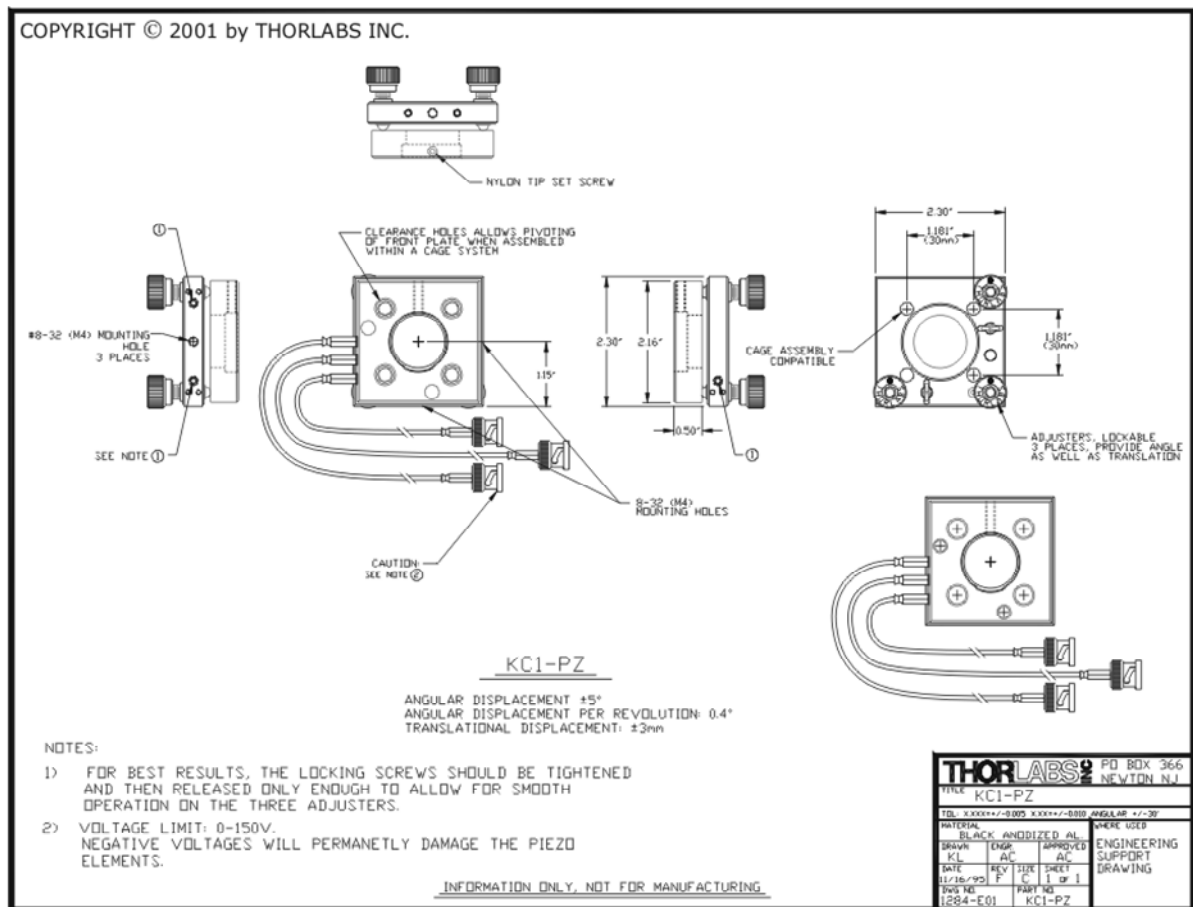
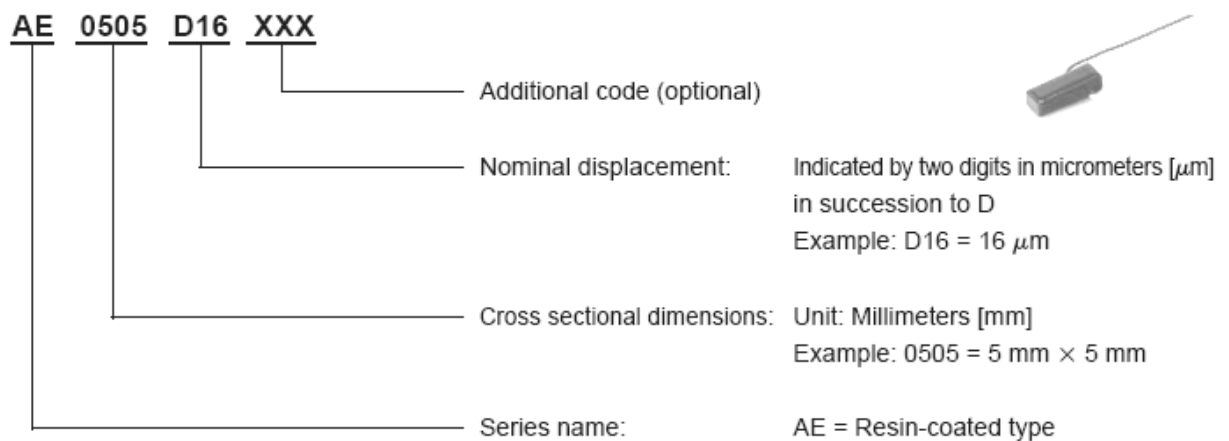


Fig. 4.9 Modulador temporal del interferómetro [Thorlabs, 2001]

Esta montura cuenta con elementos mecánicos para realizar ajustes burdos (tornillos micrométricos). Además, el ajuste fino de la montura se lleva a cabo mediante los actuadores piezoeléctricos. La montura cuenta con tres actuadores piezoeléctricos. Los piezoeléctricos utilizados en esta montura son cerámicas (modelo NEC AE0505D08). Estas cerámicas están monta-

das en la posición de los tornillos micrométricos (véase figura anterior). Esto quiere decir que, el movimiento uniforme del dispositivo dependerá de una alimentación homogénea a los actuadores. De aquí deducimos que, el controlador del modulador temporal es una variable importante en el interferómetro. Antes de estudiar el control electrónico, revisemos la respuesta característica de los piezoeléctricos.

Los actuadores piezoeléctricos son transductores de cerámica, que convierten la energía eléctrica en mecánica. El modelo, implementado en el dispositivo modulador, es el AE0505D08 de la empresa NEC/TOKIN. La nomenclatura de estos actuadores es explicada por el fabricante [NEC, 2004]. Enseguida mostramos la descripción del código para los actuadores.



**Fig. 4.10** Descripción de código para actuadores piezoeléctricos [NEC, 2004]

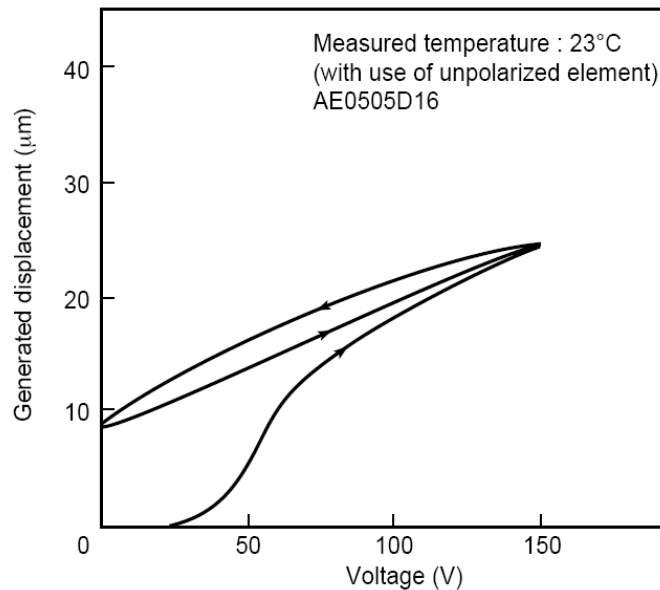
Esta figura enfatiza que los actuadores están cubiertos con una resina. Además, el desplazamiento nominal de la cerámica son 8 micras. Es decir, cuando alimentamos con el máximo voltaje la cerámica (lo cual no es recomendado por el proveedor), obtenemos este desplazamiento. El voltaje máximo de operación para estas cerámicas es 150 voltios [NEC, 2004]. Sin embargo, el proveedor recomienda que éste no sea el voltaje nominal de trabajo.

Las simulaciones del comportamiento del sistema (refiérase a las figuras 4.7 y 4.8) fueron efectuadas para un desplazamiento de aproximadamente 2 micras ( $\Delta$  en las figuras 4.2, 4.4 y



4.5). Este desplazamiento fue elegido para el arreglo experimental, ya que la respuesta de los tres piezoeléctricos es muy uniforme en este rango.

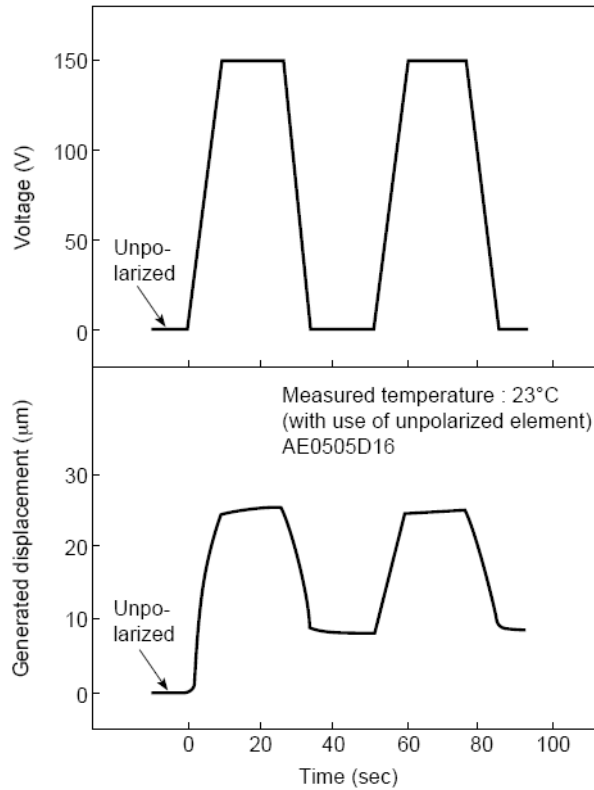
La respuesta de los piezoeléctricos presenta características de histéresis [NEC, 2004]. Es decir los piezoeléctricos no regresan exactamente a la misma posición, cuando el voltaje es variado. Las características de histéresis, para el modelo AE0505D16 se muestran en la figura siguiente.



**Fig. 4.11** Características de histéresis para el actuador, modelo AE0505D16 [NEC, 2004]

La única diferencia entre este actuador (modelo AE0505D16) y los utilizados en la montura (modelo AE0505D08), es el desplazamiento nominal (refiérase a la figura 4.10). Los problemas de histéresis no afectan nuestro sistema. Éstos solamente implican que la respuesta, entre periodos, no es idéntica (véase la sección 4.4.3).

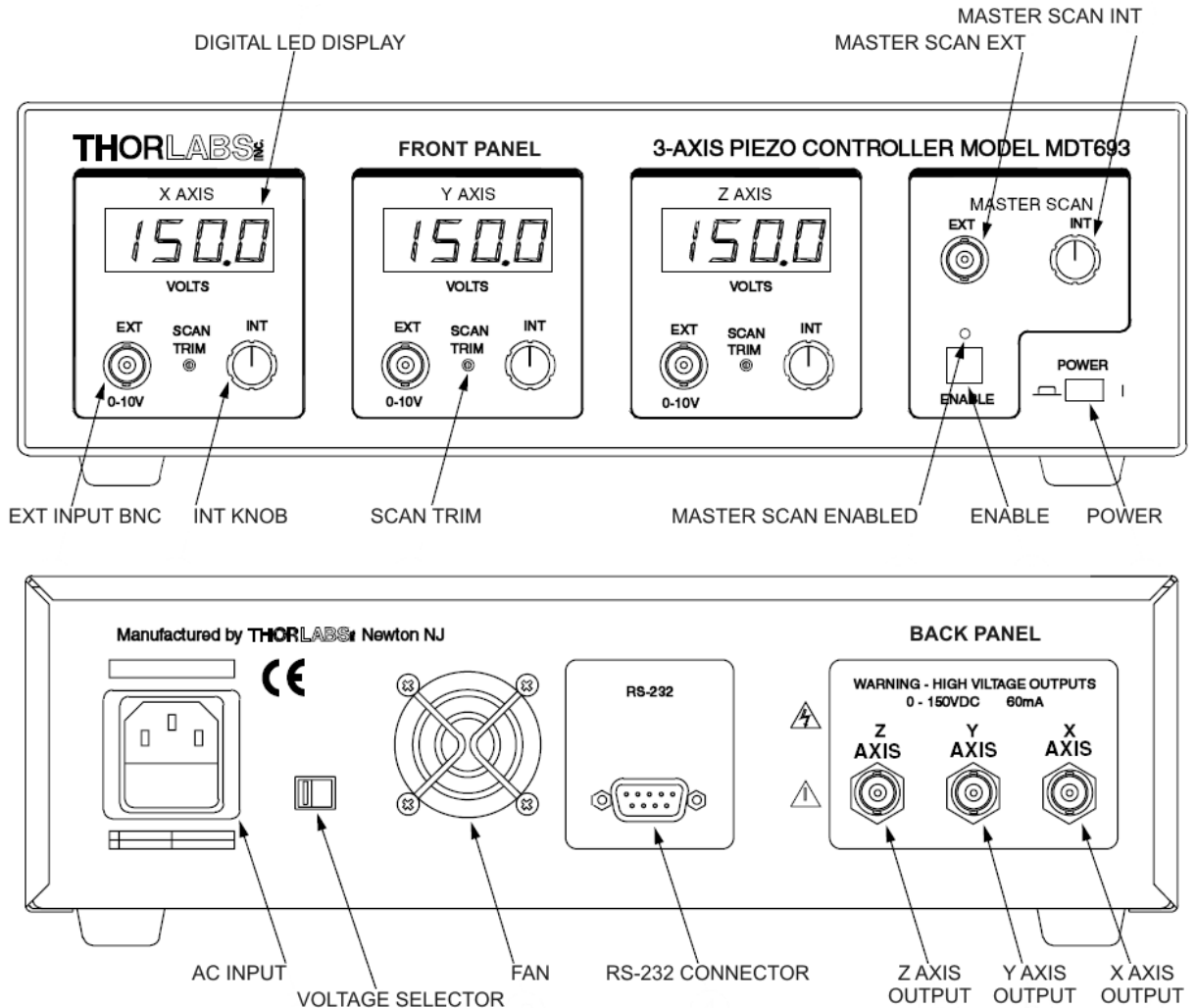
La respuesta temporal de los piezoeléctricos tampoco es perfecta. Es decir, si nosotros alimentamos al piezoeléctrico con una señal cuadrada (véase la figura siguiente), su respuesta, en periodos diferentes, no es idéntica.



**Fig. 4.12** Respuesta temporal para piezoeléctricos modelo AE0505D16 [NEC, 2004]

Esta figura pone de manifiesto que el desplazamiento máximo no es homogéneo en cada periodo. Sin embargo, también nos percatamos que las diferencias son insignificantes.

Por otro lado, un aspecto delicado de los actuadores piezoeléctricos es su impedancia. La impedancia determina la respuesta del actuador. Es decir, dependiendo de la impedancia, un actuador se puede desplazar más que otro. Una compensación precisa de impedancias implica que el dispositivo modulador se desplace uniformemente. El desplazamiento uniforme trae consigo la ausencia de desalineaciones en el sistema. Esto redundaría en una relación entre señal y ruido más alta. Por lo tanto este aspecto, la compensación de impedancias, es importante en el dispositivo modulador. Dicha compensación se efectúa mediante el controlador del modulador. A continuación mostramos un diagrama esquemático del controlador electrónico para el modulador.



**Fig. 4.13** Controlador electrónico para el modulador temporal [Thorlabs B, 2003]

Este controlador posee dos características esenciales para nuestra aplicación. Primero, cuenta con una opción para sincronizar las tres salidas al piezoeléctrico (opciones ENABLE y MASTER SCAN EXT en la figura anterior). Esto significa que podemos alimentar con una sola señal (léase una función triangular, ver figura 4.6) los tres piezoeléctricos. El dispositivo se encarga de sincronizar las salidas hacia los actuadores. Segundo, el controlador tiene tres potenciómetros (uno para cada piezoeléctrico) que regulan la ganancia de la señal de salida (opción SCAN TRIM en la figura 4.13). La regulación de voltaje, a la salida del controlador, oscila entre 80 – 120% del valor nominal [Thorlabs B, 2003]. Por lo tanto, con este controlador podemos compensar la diferencia en impedancias de los piezoeléctricos. Además fácilmente podemos controlar el movimiento de los mismos.

La respuesta en frecuencia del modulador también es importante. La facilidad para determinar la alineación del dispositivo depende de esta variable. Una frecuencia alta dificulta la evaluación del desempeño. Por lo tanto, una frecuencia baja fue utilizada para modular el dispositivo. Este parámetro también sería mejorado mediante la implementación de un dispositivo electro-óptico. Debido a que el dispositivo electro-óptico no presentaría problemas de desalineación, la frecuencia de modulación podría ser mucho mayor.

Como resumen podemos enfatizar que, en esta sección, hemos demostrado la importancia del modulador temporal en el interferómetro. Este dispositivo presenta un área de oportunidad en nuestro arreglo. La implementación de un sistema electro-óptico, que no involucre movimientos mecánicos, estabilizaría la respuesta del interferómetro. Por ejemplo, los problemas de histéresis (entre otros) desaparecerían del arreglo. En la siguiente sección presentamos los interferogramas, experimentales y teóricos, para el sistema óptico.

#### *4.3.2 Desempeño del arreglo heterodino*

En la sección precedente enfatizamos que, el desplazamiento máximo del piezoeléctrico fue aproximadamente 2 micras. La obtención de este parámetro se basa en los datos del fabricante, y el desempeño de los piezoeléctricos. La carrera máxima de los actuadores es de  $9.1 \pm 1.5 \mu\text{m}$  (modelo AE0505D0,8[NEC, 2004]). El factor de desplazamiento [Thorlabs B, 2003], es decir cuánto se desplaza el actuador por cada voltio, se obtiene dividiendo la carrera máxima entre el voltaje máximo. El resultado que obtenemos, para el actuador, es  $S = 0.061 [\mu\text{m}/\text{V}]$ . El rango de voltaje, de la función de control, fue de 0 – 2 V. Un generador de funciones, de alta precisión, fue utilizado para alimentar al controlador. La amplificación del controlador es de 1:15. Por lo tanto, la diferencia de voltaje en el piezoeléctrico fue de aproximadamente 30 V. Sin embargo, el ajuste de impedancias en nuestro arreglo, modificó el valor de voltaje suministrado a los piezoeléctricos. En la sección anterior mencionamos que la salida del controlador puede ser regulada. El rango de regulación oscila entre 80 – 120% del valor nominal



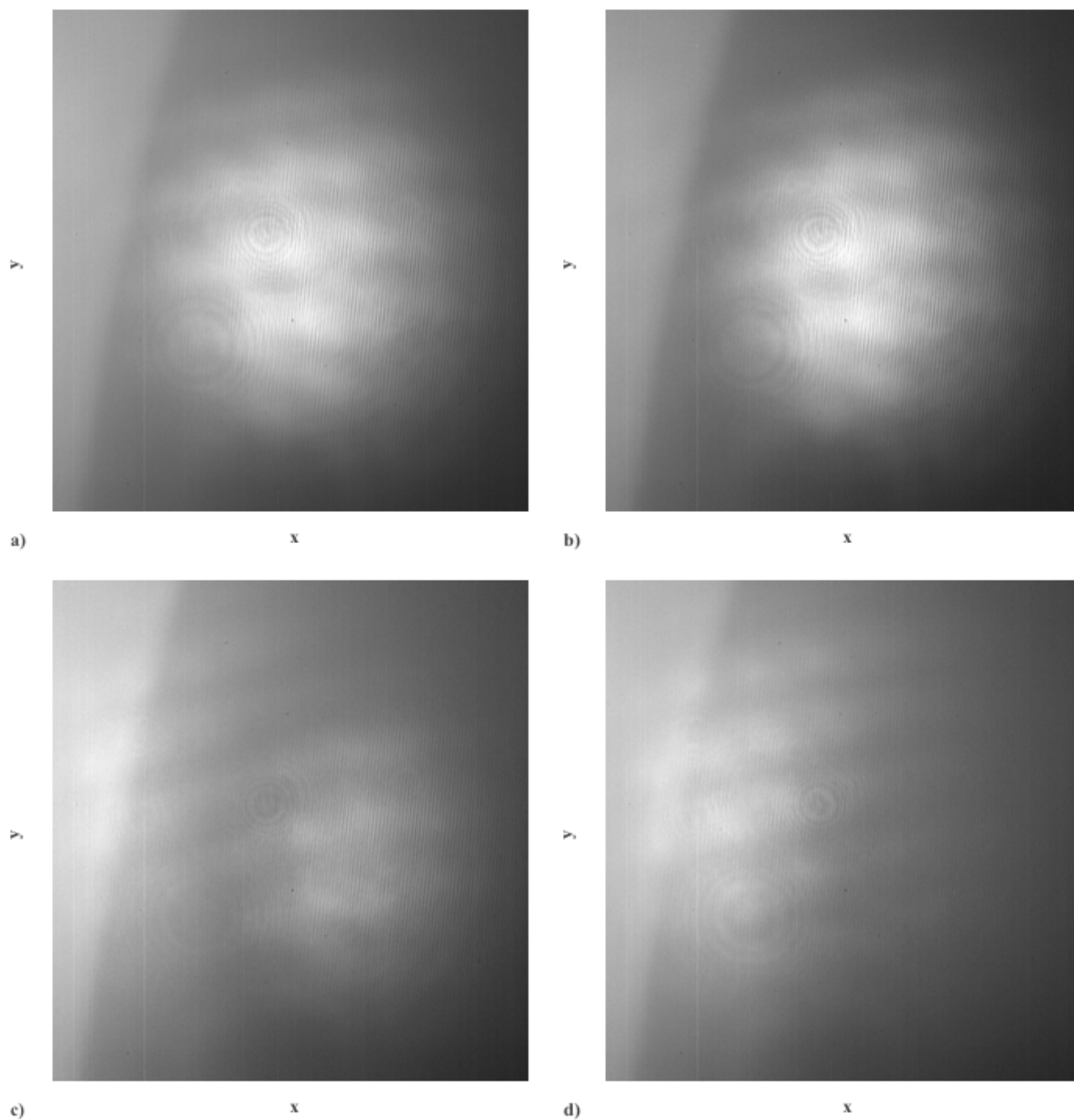
La respuesta óptima de los actuadores cerámicos, se obtiene cuando éstos son alimentados con 100 V [NEC, 2004]. Para asegurar una mejor respuesta del dispositivo modulador, al controlador se le añadió un voltaje de DC (desplazamiento 0 – 1 en la figura anterior). El nivel de DC implementado fue de 30 V. La modulación triangular (véase la figura 4.6) se comenzó desde esta plataforma (desplazamiento 1 – 2 en la figura 4.14).

Las simulaciones del comportamiento dinámico (refiérase a las figuras 4.7 y 4.8), ponen en evidencia la misma restricción que en el caso estático. La limitante dimensional es muy notoria. Los patrones de intensidad obtenidos en las simulaciones oscilan alrededor de los 3 – 5 milímetros. Esto implica que, para determinar el grado de alineación del sistema, necesitamos una cámara de alta resolución (la cual representa una restricción debido a su costo).

Un método alternativo, para alinear el sistema, es la utilización de un filtro de aguja circular (véase la sección 3.4 para el sistema estático). Previamente demostramos que, la implementación de este filtro espacial, genera un patrón de difracción característico (patrón de Lommel). Más aún, el orden central de dicho patrón, se comporta como una Gaussiana. Las propiedades, de la nueva Gaussiana, fueron determinadas teóricamente (sección 3.4.2.2). El nuevo frente de onda cuenta con un carácter más divergente. Lo cual facilita el proceso de alineación del sistema. Un procedimiento análogo fue seguido para alinear el sistema dinámico.

Un aspecto importante, en cuanto a la implementación del filtro espacial se refiere, es el cambio en divergencia del haz. Cuando el sistema opera sin filtro, el haz Gaussiano no diverge notoriamente. Por otro lado, el filtro provoca un cambio significativo en la divergencia del haz. Este cambio redundará en una mayor sensibilidad del interferómetro a diferencias en el camino óptico. Las diferencias significativas en camino óptico, generan patrones circulares de franjas (refiérase a las figuras 3.14 y 3.20). Por lo tanto el comportamiento ideal del sistema dinámico, será caracterizado por la convergencia, o divergencia, de patrones circulares. A continuación procederemos a comparar las respuestas, teórica y experimental, del interferómetro.

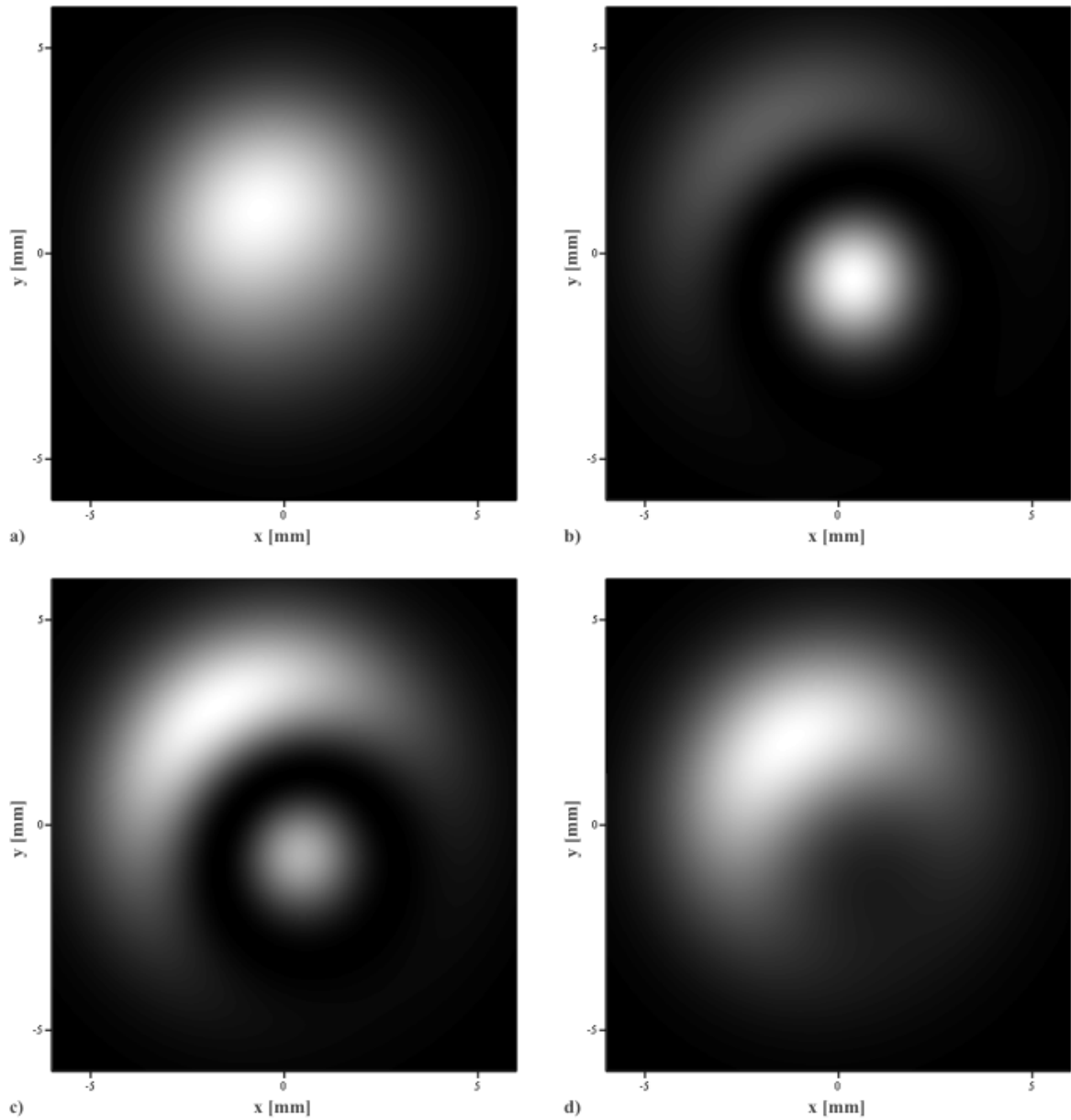
Primeramente presentaremos el comportamiento del sistema experimental, cuando las impedancias del modulador no están compensadas adecuadamente.



**Fig. 4.15** Comportamiento experimental del arreglo dinámico descompensado

En estas figuras el dispositivo tiende a converger descentradamente. Éste se inclina hacia abajo a la derecha. Es decir, el modulador está introduciendo una desviación en ambos ejes. En las figuras se observa la región de convergencia. En la primera figura, la distribución es con-

céntrica (el piezoelectrico no se ha movido). Mientras que en la última, la distribución está descentrada hacia un lado (el piezoelectrico se encuentra descompensado). La simulación teórica de este comportamiento, se presenta en la figura siguiente.

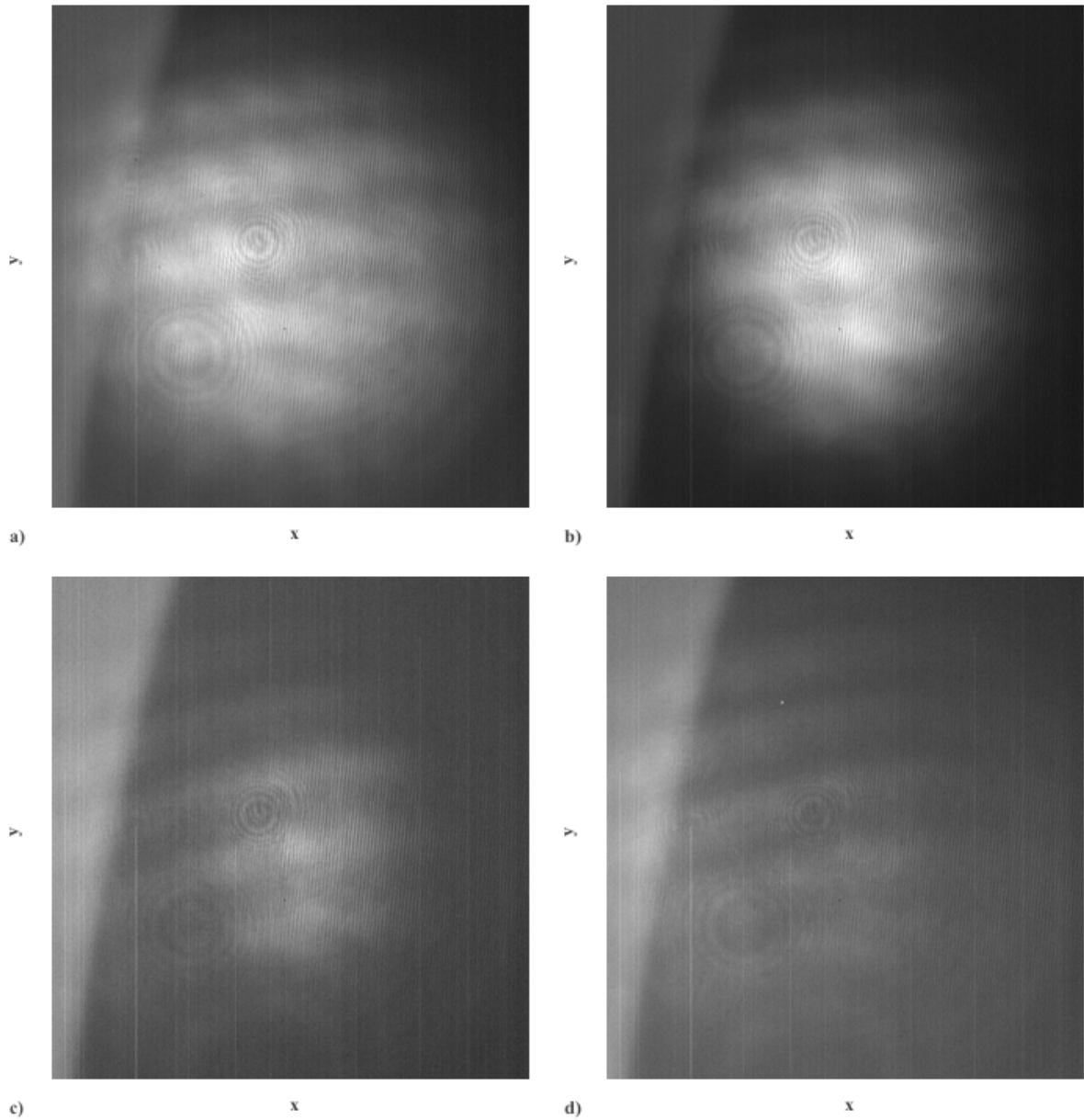


**Fig. 4.16** Comportamiento analítico del arreglo dinámico descompensado

El comportamiento del sistema fue simulado mediante la relación 4.2.8. El cambio sustancial, entre simulaciones (compárese las figuras 4.8 y 4.16) es la divergencia del haz.

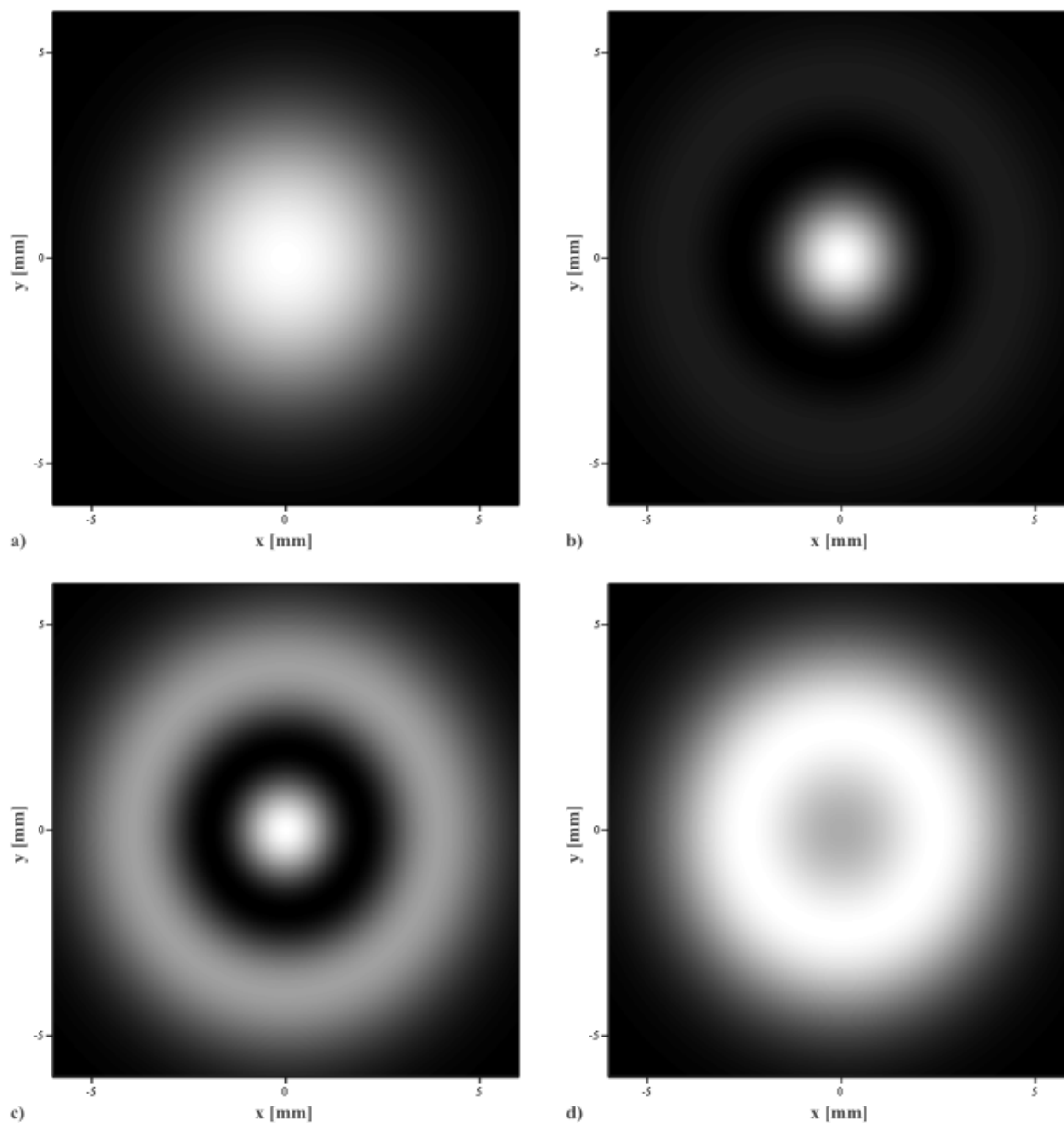


El controlador del modulador provee con potenciómetros para compensar las diferencias en impedancias (véase la sección anterior). La optimización de esta variable, en el arreglo experimental, permitió que el dispositivo modulador se desplazara uniformemente. El siguiente juego de figuras muestra el comportamiento del arreglo experimental bien compensado.



**Fig. 4.17** Comportamiento experimental del arreglo dinámico compensado

Estas figuras ponen de manifiesto que el dispositivo converge centradamente. Un sistema dinámico bien compensado debería mostrar este desempeño. Por lo tanto, nuestro sistema se encuentra en óptimas condiciones. Enseguida mostraremos el comportamiento teórico del sistema dinámico bien compensado.



**Fig. 4.18** Comportamiento analítico del arreglo dinámico compensado

Las secuencias de figuras precedentes (figuras 4.15 – 4.18) representan el estado del sistema evolucionando en el tiempo. Por ejemplo en la última figura; a) escenifica la distribución para un tiempo  $t_a$ . Posteriormente, b) representa la distribución para otro tiempo  $t_b$  ( $t_b > t_a$ ), y así sucesivamente.

La inclusión del filtro de aguja circular generó un haz Gaussiano más divergente. Este hecho justifica la aparición de las franjas circulares (refiérase a las figuras 3.14 y 3.16). Además, la generación de haces Gaussianos más divergentes facilita la alineación del dispositivo. Obsérvese que, los patrones son aproximadamente cinco veces más grandes con la implementación del filtro (compárese las figuras 4.8 y 4.16).

La flexibilidad que otorga el control del modulador, permite que el sistema sea compensado. Sin embargo, la optimización del dispositivo modulador mejoraría el desempeño global del sistema. En la siguiente sección, presentamos los esquemas de detección para el interferómetro de fotones no atenuados. Estos detectores transforman la respuesta espacio-temporal del interferómetro, en una de carácter temporal.

#### **4.4 Respuesta temporal del arreglo interferométrico**

La respuesta espacio-temporal del interferómetro, se convierte en temporal mediante la implementación de un foto-detector. En la presente sección desarrollamos el modelo matemático para tomar en cuenta la inclusión del detector en el arreglo. Dos esquemas de detección son analizados. Un detector infinito es propuesto para obtener una solución analítica. Esta solución representa la respuesta temporal del interferómetro. El esquema de detección experimental así como su respuesta teórica y práctica, también son estudiados en esta sección.

A continuación analizaremos el efecto global, en el modelo matemático, de la inclusión de un dispositivo detector.

#### 4.4.1 Esquema de detección generalizado

La irradiancia representa la densidad de potencia [McCluney, 1994]. Las expresiones para la irradiancia en nuestro arreglo, ya fueron obtenidas (ecuaciones 4.2.3 y 4.2.4). La potencia en el plano de interferencia, se puede calcular mediante la distribución de irradiancia en dicho plano. La siguiente relación determina la potencia en todo el plano de interferencia.

$$P_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_I(x, y, t) \psi_I^*(x, y, t) dx dy \quad (4.4.1)$$

Aquí hemos utilizado el subíndice  $I$  para denotar el plano de interferencia. En el plano de interferencia, la distribución de amplitud está dada por la superposición de contribuciones en ambos brazos del interferómetro.

$$\psi_I(x, y, t) = \psi_6(x, y, t) = \psi_3(x, y) + \psi_5(x, y, t) \quad (4.4.2)$$

En la siguiente figura mostramos el arreglo dinámico con la implementación del sistema de detector.

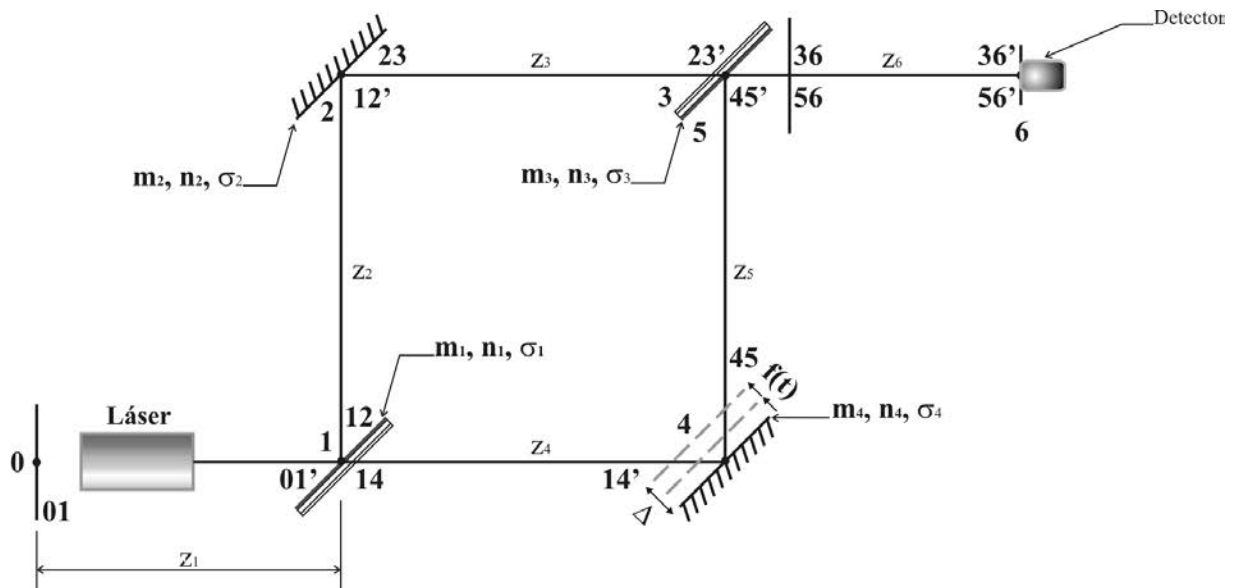
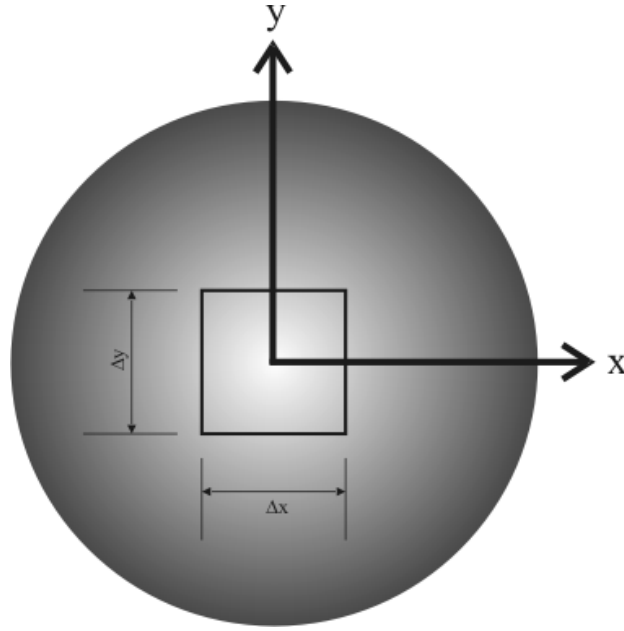


Fig. 4.19 Interferómetro heterodino con sistema de detección

La distribución de potencia en el plano del detector está dada por la ecuación 4.4.1. Sin embargo, la configuración del detector determina la cantidad de potencia que es observada por éste. En la siguiente figura mostramos la configuración generalizada del detector.



**Fig. 4.20** Configuración generalizada para el detector

Esta configuración implica que el detector solamente capta una porción de la radiación incidente (delimitada por las dimensiones del detector;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ). Es decir, la relación presentada en 4.4.1 no es válida para esta configuración. Sin embargo la distribución de intensidad, en el plano de interferencia (relación 4.2.6), sigue siendo válida. Esta relación se muestra, utilizando una nueva notación, en la siguiente ecuación.

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]}$$

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right\}$$

$$I_1(x, y, t) = I_6(x, y, t) = \Psi_6(x, y, t) \Psi_6^*(x, y, t) = \Omega_3(x, y) + \Omega_5(x, y) + \Omega_{35}(x, y, t)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_3(x, y) &= \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]}; & \Omega_5(x, y) &= \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} \\
\Omega_{35}(x, y, t) &= 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \operatorname{Re} \left( e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \right. \\
&\left. e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} \right)
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Aquí hemos optado por la nomenclatura exponencial, en lugar de usar funciones sinusoidales, por su facilidad de manejo. La potencia observada por el detector depende del área del mismo. Por lo tanto la relación, para el caso generalizado, no abarca todo el plano de interferencia (véase la ecuación 4.4.1).

$$P_D(t) = \iint_{A_{xy}} \psi_1(x, y, t) \psi_1^*(x, y, t) dx dy = \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} [\Omega_3(x, y) + \Omega_5(x, y) + \Omega_{35}(x, y, t)] dx dy \tag{4.4.4}$$

$$\int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \Omega_3(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \tag{4.4.5}$$

$$\int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \Omega_5(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \tag{4.4.6}$$

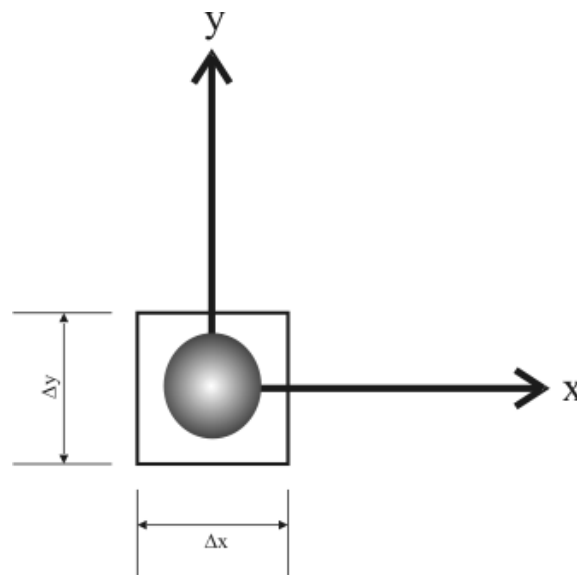
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \Omega_{35}(x, y, t) &= 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \operatorname{Re} \left( e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \right. \\
&\left. \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} dx dy \right)
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Las expresiones 4.4.5 y 4.4.6 representan valores constantes. Es decir, no son dependientes del tiempo. Por otro lado, la integral en 4.4.7 es claramente una función temporal. Sin em-

bargo, la complejidad de estas relaciones es obvia. Para contrarrestar estas dificultades, proponemos un sistema alternativo de detección. Este análisis es muy importante para la aplicación de diagnóstico. De aquí obtendremos el carácter temporal del sistema. Éste a su vez nos proporcionará información, en tiempo real, de la muestra analizada. Por ende, un análisis preciso de la respuesta temporal del sistema es crucial. En la siguiente sección analizamos el sistema alternativo de detección. Un detector “infinito” es propuesto para simplificar el desempeño del sistema.

#### 4.4.2 Arreglo dinámico con detector infinito

La implementación de un detector infinito ha sido utilizada previamente [Mueller *et al*, 1979]. En esta configuración, el haz percibe la extensión del detector como infinita. Es decir, todo el haz es contenido dentro del área sensible del detector. Un diagrama esquemático, de la configuración mencionada, se presenta en la siguiente figura.



**Fig. 4.21** Diagrama esquemático para un detector infinito

Para el caso de detectores con área sensible pequeña, la utilización de una lente permite su implementación. Una lente ideal, se comporta como un elemento de fase cuadrático [Iizuka, 1987], [Goodman, 1993], [Gaskill, 1978]. El efecto global de la implementación de la lente será un cambio en la vergencia del haz. Esto asegurará que el manchón del haz Gaussiano se tornará más pequeño, luego de su interacción con la lente (positiva). Más aún es obvio que, el análisis desarrollado en esta tesis, no sufrirá cambio sustancial con la implementación de dicho componente.

La alineación del sistema es importante para obtener la respuesta temporal. Ésta ha sido estudiada a gran detalle previamente (secciones 3.4, 4.2 y 4.3 ). Hemos demostrado que, un interferómetro mal alineado implica una disminución en el área de interferencia. Así pues, en nuestro análisis asumimos que el detector percibirá un haz alineado. Esto tendrá consecuencias (y simplificaciones) importantes para nuestro análisis matemático.

Debido a que el haz percibe al detector como infinito, podemos afirmar que éste se extiende a lo largo del plano de interferencia. Esto implica que la relación 4.4.1 ahora sí es válida. Esta suposición entrega las siguientes relaciones (compárese con las ecuaciones 4.4.4 – 4.4.7).

$$P_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x, y, t) \psi_1^*(x, y, t) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Omega_3(x, y) + \Omega_5(x, y) + \Omega_{35}(x, y, t)] dx dy \quad (4.4.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_3(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \quad (4.4.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_5(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \quad (4.4.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) = 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \operatorname{Re} \left( e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} dx dy \right) \quad (4.4.11)$$



La adición de estas relaciones integrales conforma el comportamiento temporal del sistema (ecuación 4.4.8). Las ecuaciones 4.4.9 y 4.4.10 son funcionalmente idénticas. Además, una solución analítica general puede ser encontrada fácilmente. Sin embargo, la expresión con dependencia temporal es más complicada. La evaluación de esta expresión, se llevará a cabo asumiendo que el sistema se encuentra alineado. Como mencionamos anteriormente, el comportamiento óptimo del sistema implica un arreglo bien alineado. Por lo tanto, esta suposición no tan sólo es válida (para la solución de la relación 4.4.11) sino necesaria. Enseguida resolveremos las relaciones integrales, que describen el comportamiento temporal del sistema.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_3(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy; \quad \begin{matrix} x'_3 = x - x_3 \\ y'_3 = y - y_3 \end{matrix} \quad \therefore \quad \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{x_3'^2 + y_3'^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx' dy'$$

$$\frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{x'^2 + y'^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx' dy' = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left[ \frac{r^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} r dr d\theta = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\vartheta r^2} r dr d\theta; r^2 = x'^2 + y'^2; \vartheta = \left(\frac{\sqrt{2}}{r_3}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_3(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\vartheta r^2} dr d\theta = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \frac{\pi}{2} r_3^2 = P |\alpha_3|^2 \left(\frac{r_3}{r_{01}}\right)^2 \quad (4.4.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_5(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\vartheta r^2} dr d\theta = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \frac{\pi}{2} r_5^2 = P |\alpha_5|^2 \left(\frac{r_5}{r_{01}}\right)^2 \quad (4.4.13)$$

Aquí hemos utilizado coordenadas cilíndricas para simplificar las integrales. En la sección anterior enfatizamos que, las primeras dos integrales, se reducían a términos constantes. Esta expresión pone de manifiesto dicha condición. Las aportaciones, que no implican interferencia, constituyen solamente componentes de DC (no son dependientes del tiempo). Ahora analicemos el término temporal de la integral 4.4.8. La expresión integral se repite, para facilitar su referencia, a continuación.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) = 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \operatorname{Re} \left( e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} dx dy \right) \quad (4.4.14)$$

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} dx dy \quad (4.4.15)$$

La relación integral a resolver se muestra en la última expresión. Sin embargo, estamos considerando que el sistema se encuentra bien alineado. Es decir,  $m_6 = n_6 = x_3 = x_5 = y_3 = y_5 = 0$ . Esta suposición simplifica notablemente la expresión 4.4.15. Más aún, ésta se convierte en la transformada de Fourier de una función Gaussiana compleja (evaluada en  $u = v = 0$ ).

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{x^2 + y^2}{r_3^2} + \frac{x^2 + y^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [x^2 + y^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [x^2 + y^2] \right\}} e^{i 2\pi (ux + vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 + y^2}{R^2}} e^{i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta (x^2 + y^2)} e^{i 2\pi (ux + vy)} dx dy$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{r_3^2 + r_5^2}{r_3^2 r_5^2}; \quad \beta = \beta_5 - \beta_3; \quad u = v = 0$$

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left( \frac{1}{R^2} - i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta \right) (x^2 + y^2)} e^{-i 2\pi [ux + vy]} dx dy; \quad a = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{R^2} - i \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta \right)}$$

$$\chi = \frac{(\pi R^2)(\lambda z_6)^2 - i(\pi R^2)^2 (\lambda z_6) \beta}{(\lambda z_6)^2 + (\pi R^2 \beta)^2} e^{-\pi \left[ \frac{(\pi R^2)(\lambda z_6)^2 - i(\pi R^2)^2 (\lambda z_6) \beta}{(\lambda z_6)^2 + (\pi R^2 \beta)^2} \right] (u^2 + v^2)}; \quad u = v = 0 \quad \therefore$$

$$\chi = \frac{(\pi R^2)(\lambda z_6)^2 - i(\pi R^2)^2 (\lambda z_6) \beta}{(\lambda z_6)^2 + (\pi R^2 \beta)^2} = |w| e^{i\varphi}; \quad |w| = \frac{\pi R^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \quad (4.4.16)$$

La transformada de una función Gaussiana compleja (refiérase a la sección 3.2.1), ha sido utilizada para llegar a la última relación. El resultado anterior se utiliza para encontrar el comportamiento temporal del sistema. La sustitución de la ecuación 4.4.16, en la expresión 4.4.14, entrega la relación buscada.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) &= 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \operatorname{Re} \left\{ e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \frac{\pi R^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} e^{i\varphi} \right\} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) &= 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

La superposición de las relaciones 4.4.12, 4.4.13 y 4.4.17 conforma la respuesta temporal del interferómetro (refiérase a la ecuación 4.4.8). Mediante esta aproximación, la dependencia espacial del sistema ha desaparecido. Esto permitirá llevar a cabo mediciones en tiempo real. En la siguiente expresión mostramos la respuesta temporal del arreglo.

$$P_D(t) = P \left[ \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_3|^2 + \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_5|^2 \right] + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \tag{4.4.18}$$

En la siguiente sección corroboraremos los resultados analíticos con los experimentales.

#### 4.4.3 Desempeño temporal del arreglo interferométrico

En esta sección comprobamos el comportamiento temporal del sistema. Más aún observamos que, para el voltaje aplicado al modulador espacial, su desplazamiento se encuentra cerca de  $2\lambda$ . La diferencia entre el valor real y el simulado se debe a diferencias en inductancias. Más aún, la respuesta temporal nos proporciona información acerca del desplazamiento del modulador. Los resultados obtenidos prácticamente, ponen de manifiesto la histéresis del dispositivo modulador. Estos resultados concuerdan fehacientemente, con el modelo matemático desarrollado. A continuación mostraremos el arreglo experimental con el detector infinito.



Fig. 4.22 Arreglo experimental con acercamiento al sistema de detección

El sistema de detección utilizado, para este trabajo, fue un radiómetro con detector de silicio [Newport, 1992 A], [Newport, 1992 B]. La responsividad del foto-detector de silicio, implementado en el arreglo (modelo 818-SL), se presenta en la siguiente figura.

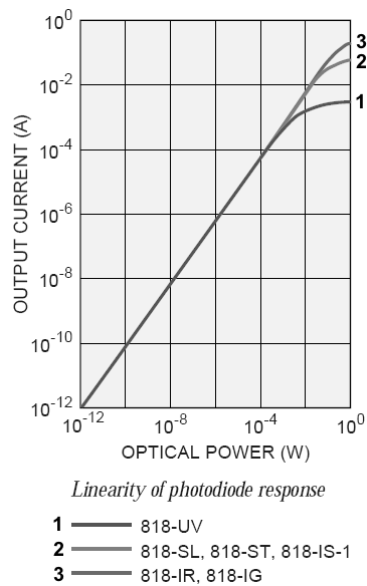
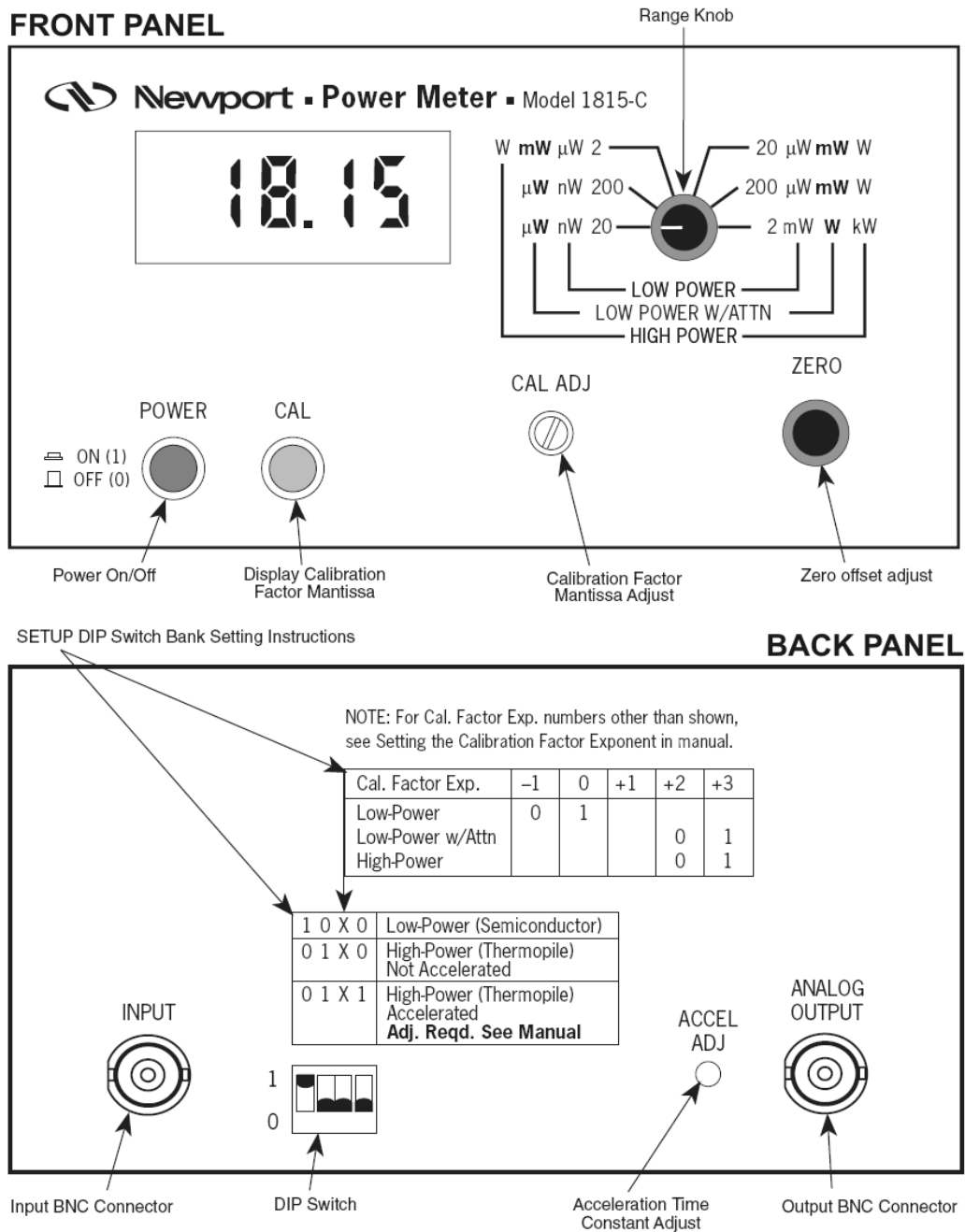


Fig. 4.23 Responsividad del detector de silicio implementado en el arreglo

La responsividad para la longitud de onda utilizada es 0.4 [Newport, 1992 B]. Sin embargo para nuestra aplicación, esta información no es necesaria. Lo anterior debido a la presencia del radiómetro. En la siguiente figura mostramos, esquemáticamente, el radiómetro involucrado en el arreglo.

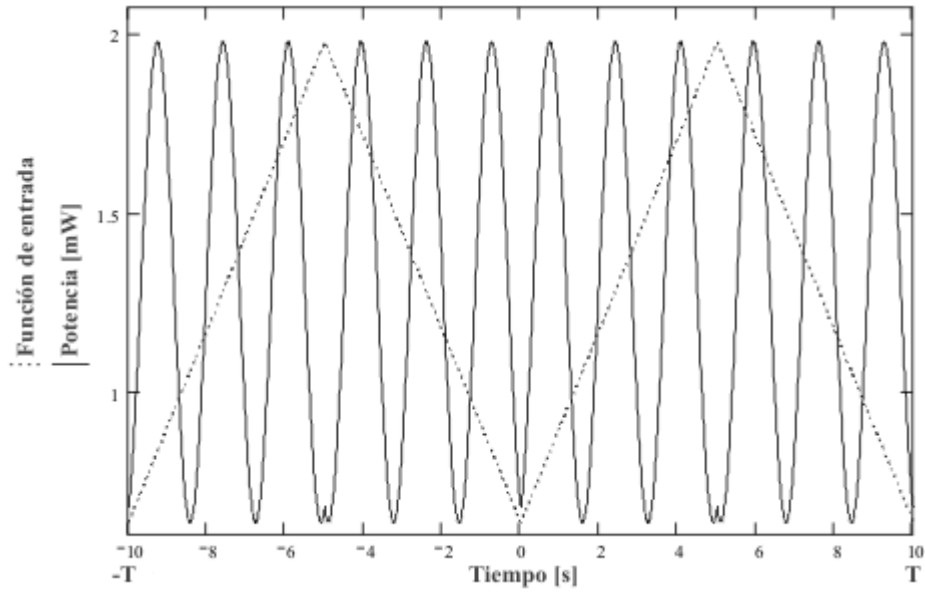


**Fig. 4.24** Diagrama del radiómetro implementado en el arreglo [Newport, 1992 A]

El radiómetro nos provee con la información de potencia incidente en el detector. Dicha información está disponible en dos formatos. El primer formato es digital. Es decir, el valor es leído directamente del display. Sin embargo cuando la señal es fluctuante, este método no es aplicable. Para estos casos, el radiómetro cuenta con un convertidor digital a analógico. Éste transforma la información de potencia a voltaje (véase la figura anterior). La salida analógica provee siempre una señal de 0 – 2 voltios. El rango de potencia se establece mediante el selector (*Range Knob* en la figura 4.24). El voltaje en la salida BNC, representa la lectura de potencia en el display [Newport, 1992 A].

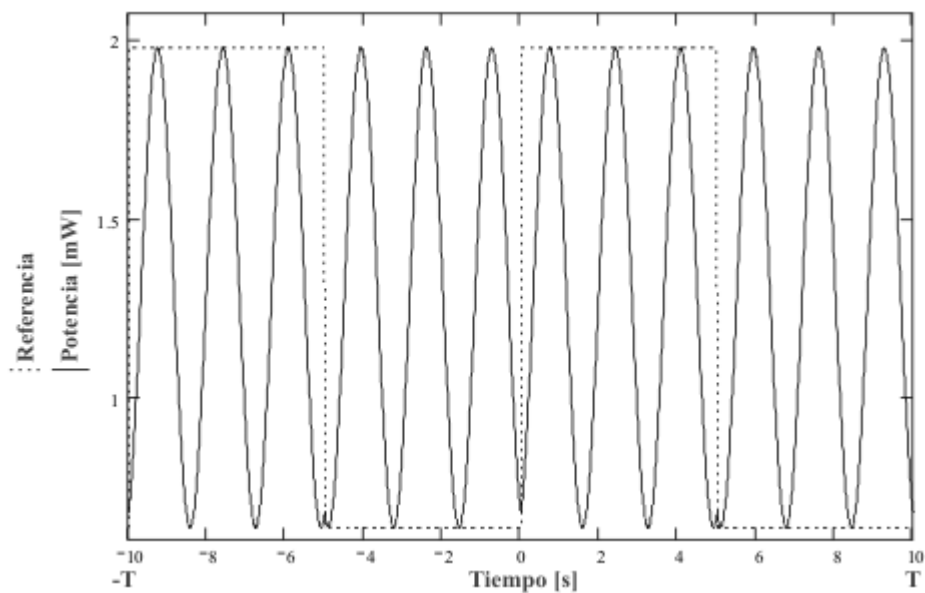
En el siguiente capítulo se estudia el impacto del sistema detector en el interferómetro. Este elemento del arreglo debe ser optimizado. Su importancia en el interferómetro no puede ser sobreestimada. Sin un detector suficientemente sensible, los resultados numéricos no son confiables. La precisión, del foto-detector utilizado, es  $\pm 2\%$  [Newport, 1992 B]. Más aún, la conversión digital a analógica incrementa, en un 0.5%, la incertidumbre en las lecturas [Newport, 1992 B]. Aún así el comportamiento del interferómetro de fotones no atenuados, puede ser obtenido con un sistema de detección como el propuesto.

La respuesta temporal del interferómetro, se obtuvo mediante la implementación del sistema de detección discutido. Para el caso analítico, la respuesta del sistema se obtiene mediante la expresión 4.4.18. Además recordemos que la función temporal, que regula al modulador, es triangular (refiérase a la figura 4.6). La utilización de esta función triangular, en la relación 4.4.18, permite obtener el comportamiento teórico. En la siguiente figura mostramos dicho desempeño.



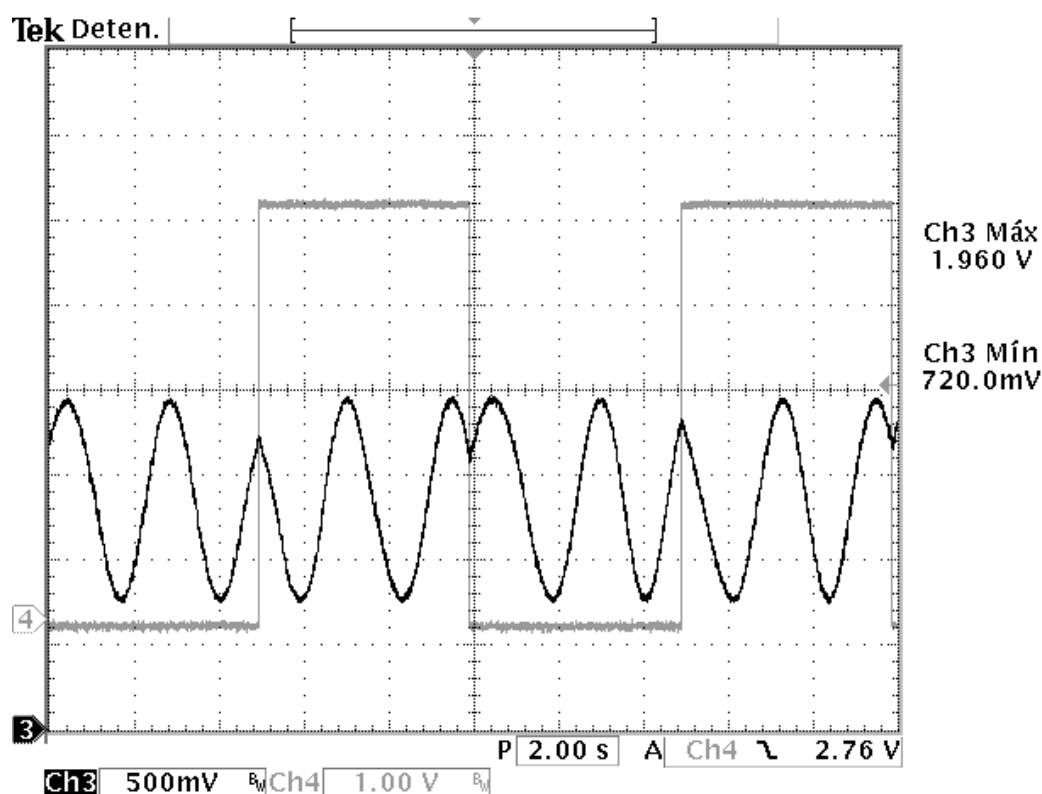
**Fig. 4.25** Comportamiento teórico con señal triangular de referencia

En esta figura se ha añadido la función de entrada triangular. El generador de funciones cuenta con una señal de disparo. Ésta se encuentra sincronizada con la función de salida del generador. La señal de disparo fue utilizada como referencia en el arreglo experimental. En la siguiente figura mostramos la simulación precedente con una señal cuadrada como referencia.



**Fig. 4.26** Comportamiento teórico con señal cuadrada de referencia

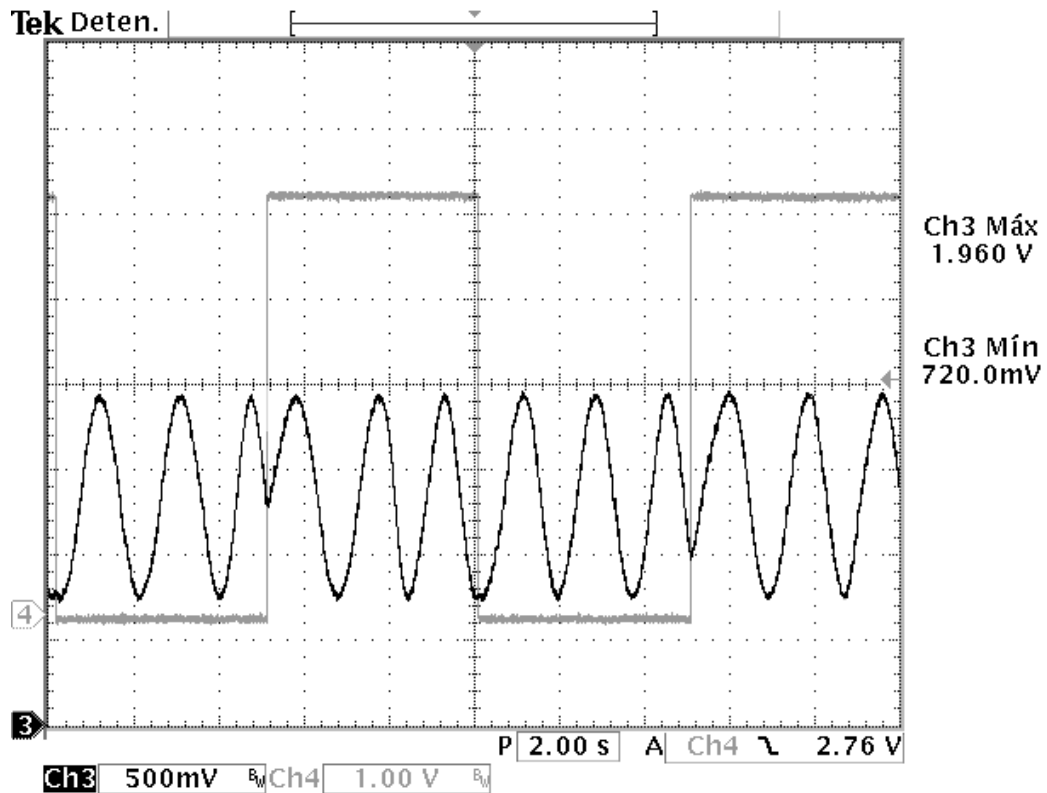
En las simulaciones es muy claro que el modulador se desplaza tres longitudes de onda. Sin embargo, en el arreglo experimental el desplazamiento fue menor. Esto es, la impedancia de los actuadores piezoeléctricos fue más grande. La respuesta experimental al igual que la onda cuadrada de referencia, se muestran a continuación.



**Fig. 4.27** Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (voltaje nominal)

En esta figura se pone de manifiesto los problemas de histéresis del modulador. El patrón temporal no se repite exactamente (compárese con la figura 4.26). Además un incremento en el voltaje de alimentación a los actuadores, hace que éstos se desplacen más. En la siguiente figura mostramos el comportamiento del sistema cuando el voltaje de control oscila entre 0 – 2.6 voltios.





**Fig. 4.28** Comportamiento práctico con señal cuadrada de referencia (incremento en voltaje)

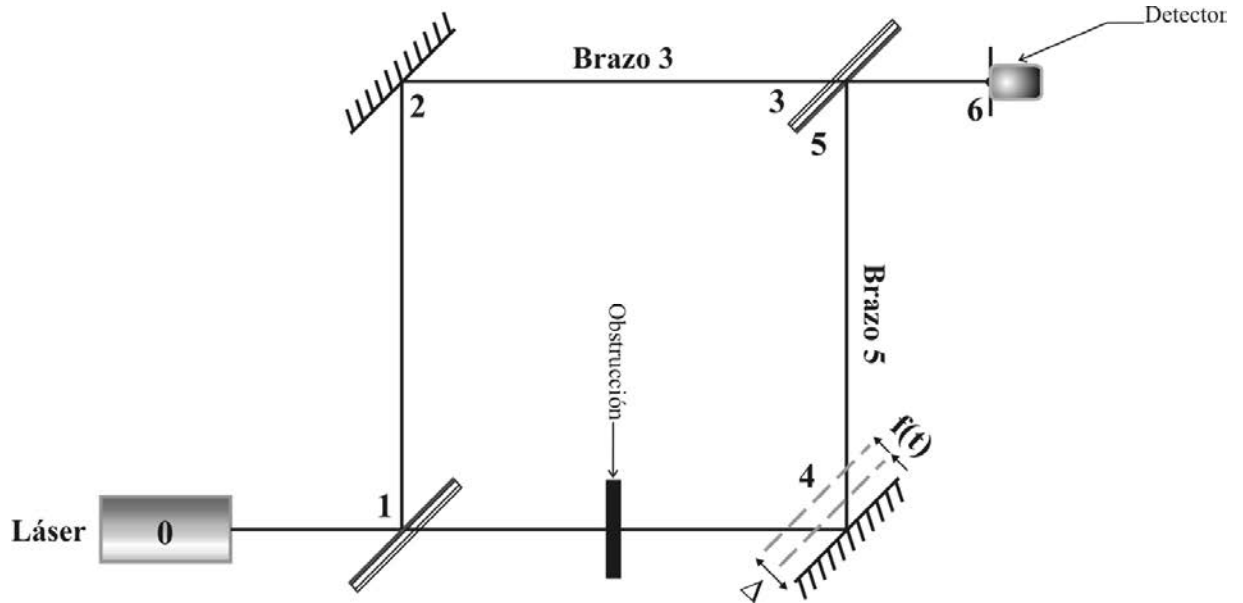
Esta figura demuestra que, el incremento en voltaje trae consigo un mayor desplazamiento (aproximadamente  $3\lambda$ ). Esto comprueba los efectos de las diferencias en impedancias. La comparación, entre el comportamiento teórico y práctico, demuestra que el modelo matemático describe precisamente el desempeño temporal del interferómetro. A continuación presentaremos una manera práctica para encontrar los parámetros de dicho modelo.

#### 4.4.4 La visibilidad y sus consecuencias en el modelo matemático

El comportamiento temporal del interferómetro ha sido estudiado a detalle. Analíticamente encontramos una solución para el esquema con detector infinito. En esta sección nos avocamos a la obtención práctica de los parámetros del modelo matemático. La relación temporal para la potencia, en el plano de detección, se repite a continuación.

$$P_D(t) = P \left[ \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_3|^2 + \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_5|^2 \right] + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (4.4.19)$$

Analíticamente podemos determinar los parámetros involucrados en esta ecuación. Sin embargo, experimentalmente estos valores deben ser encontrados. Los primeros dos términos son sencillos de obtener. El esquema propuesto, para obtener el primero de estos parámetros, se presenta en la siguiente figura.



**Fig. 4.29** Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático

Este interferómetro cuenta con una obstrucción en uno de los brazos (específicamente en el brazo de la muestra). La distribución de intensidad, en el plano de detección, no contará con contribuciones debidas al brazo cinco. Es decir, la expresión 4.2.6 se simplifica.

$$I_6(x, y, t) = |\psi_3(x, y)|^2 + |\psi_5(x, y, t)|^2 + \psi_3^*(x, y)\psi_5(x, y, t) + \psi_3(x, y)\psi_5^*(x, y, t) = |\psi_3(x, y)|^2$$

$$I_3(x, y) = |\psi_3(x, y)|^2 \therefore I_3(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} \therefore P_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_3(x, y) dx dy = P |\alpha_3|^2 \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \quad (4.4.20)$$

Aquí hemos optado por asignar el subíndice 3 tanto a la relación de intensidad, como a la correspondiente a la potencia. Esta nomenclatura enfatiza que las mediciones se efectúan con ese brazo destapado. Ahora, si el brazo 3 se encuentra obstruido, entonces la segunda expresión, en 4.4.19, puede ser encontrada.

$$I_6(x, y, t) = |\psi_3(x, y)|^2 + |\psi_5(x, y, t)|^2 + \psi_3^*(x, y)\psi_5(x, y, t) + \psi_3(x, y)\psi_5^*(x, y, t) = |\psi_5(x, y, t)|^2$$

$$I_5(x, y) = |\psi_5(x, y, t)|^2 \therefore I_5(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} \therefore P_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_5(x, y) dx dy = P |\alpha_5|^2 \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \quad (4.4.21)$$

Hasta ahora hemos encontrado las primeras dos expresiones del modelo matemático. Enseguida mostramos la expresión 4.4.19 con estos nuevos parámetros.

$$P_D(t) = P_3 + P_5 + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (4.4.22)$$

Aquí  $P_3$  representa la potencia cuando el brazo 5 se encuentra tapado. Por otro lado,  $P_5$  denota la potencia con el brazo 3 obstruido. El parámetro que se encuentra multiplicando a la función coseno, se encuentra en términos de la visibilidad del interferómetro. La visibilidad es una métrica bien establecida [Born *et al*, 1980]. En la siguiente expresión definimos, matemáticamente, el concepto de visibilidad.

$$V = \frac{P_D^{\max}(t) - P_D^{\min}(t)}{P_D^{\max}(t) + P_D^{\min}(t)} \quad (4.4.23)$$

La función temporal que modula al piezoeléctrico es triangular (refiérase a la figura 2.6). Por lo tanto, la modulación de la potencia con respecto al tiempo será sinusoidal. Esto implica que la expresión 4.4.22 tendrá los valores extremos siguientes.

$$\begin{aligned}
 P_D^{\max}(t) &= P_3 + P_5 + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = P_3 + P_5 + P_{35} \\
 P_D^{\min}(t) &= P_3 + P_5 - 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = P_3 + P_5 - P_{35}
 \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

Con estas relaciones podemos encontrar, experimentalmente, el último parámetro involucrado en el modelo matemático ( $P_{35}$  en las relaciones 4.4.24). Éste se encuentra en términos de la visibilidad del interferómetro.

$$V = \frac{P_3 + P_5 + P_{35} - P_3 - P_5 + P_{35}}{P_3 + P_5 + P_{35} + P_3 + P_5 - P_{35}} \quad \therefore \quad P_{35} = 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = V(P_3 + P_5) \tag{4.4.25}$$

En las figuras 4.27 y 4.28 se muestran los valores máximo y mínimo de potencia (en términos del voltaje). Con estos parámetros se obtiene sencillamente la visibilidad. Con la visibilidad, y las mediciones de potencia con el interferómetro obstruido, obtenemos experimentalmente todos los parámetros involucrados en el modelo matemático. Éste se muestra, en su forma experimental, en la siguiente ecuación.

$$P_D(t) = P_3 + P_5 + P_{35} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \tag{4.4.26}$$

La precisión en las mediciones de potencia es muy importante. Todo el desarrollo se ha simplificado a encontrar estos parámetros. Por ende un sistema de detección sensible y estable, es crucial para un diagnóstico preciso. Enseguida abordaremos las conclusiones del capítulo.

## 4.5 Conclusiones del capítulo 4

La implementación de un modulador temporal introduce una transmitancia, dependiente del tiempo, al sistema. Esto transforma el comportamiento puramente espacial del interferómetro, en uno de carácter espacio-temporal. Sin embargo el modulador, utilizado en el arreglo experimental, introduce imperfecciones al sistema. Por lo tanto, el modulador mecánico representa un área de oportunidad en la implementación del interferómetro. La utilización de un modulador electro-óptico (que no involucre desplazamientos mecánicos del sistema) optimizaría la respuesta del sistema.

Un efecto secundario, de la inclusión del modulador mecánico, son las desalineaciones dinámicas. Éstas se deben principalmente a la diferencia en inductancias de los actuadores piezoeléctricos. Un controlador, con ganancia individual regulable, se ha propuesto para contrarrestar esta deficiencia. Además, se implementó un filtro de aguja circular para facilitar la alineación dinámica del dispositivo. Los resultados teóricos concuerdan con el comportamiento experimental.

Dos esquemas de detección, para el interferómetro de fotones no atenuados, fueron propuestos. Estos detectores transforman la respuesta espacio-temporal del interferómetro, en una de carácter temporal. Es decir, nos permiten realizar mediciones en tiempo real. La implementación de un detector infinito provee de una herramienta analítica para predecir el comportamiento del sistema. El modelo matemático describe precisamente el comportamiento temporal del interferómetro. Un radiómetro con foto-detector de silicio se utilizó como esquema de detección. La concordancia, entre el modelo matemático y los resultados experimentales, fue verificada utilizando este esquema.

Los parámetros esenciales para el modelo matemático, fueron encontrados en términos de mediciones experimentales. La visibilidad del interferómetro representa una métrica muy importante en el sistema. Por lo tanto, la precisión en las mediciones de potencia es muy importante. Lo anterior debido a que todo el desarrollo matemático se ha simplificado a este tipo de

mediciones. Por ende un sistema de detección sensible y estable, es crucial para un diagnóstico preciso.

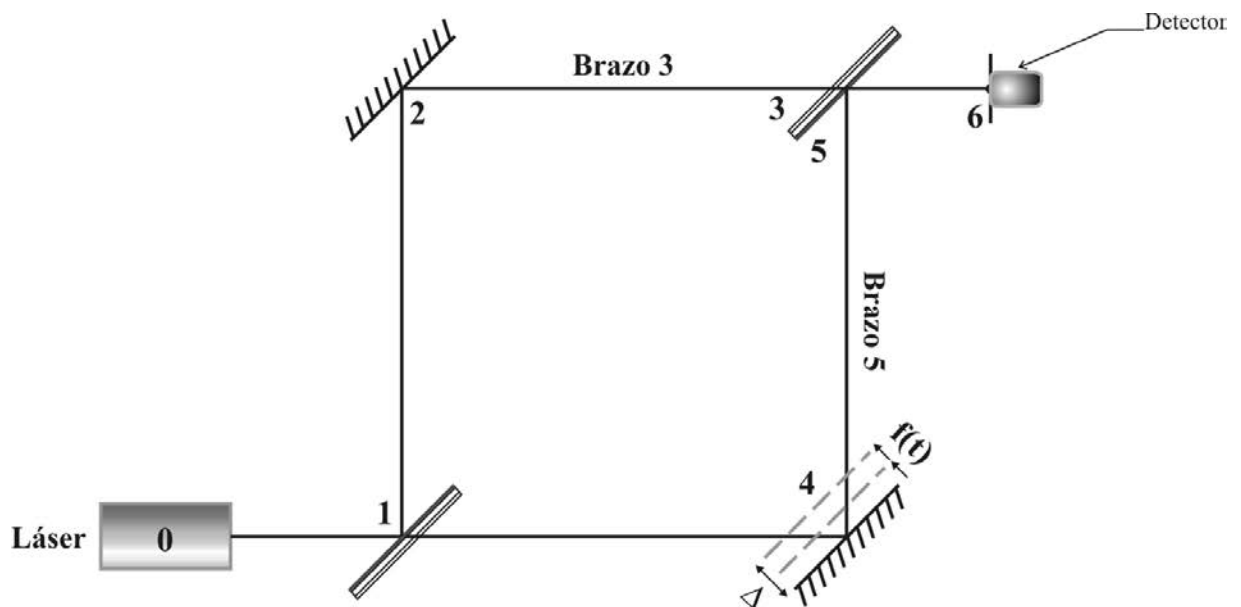
## 5 INTERFEROMETRÍA DE FOTONES NO ATENUADOS

La interferometría de fotones no atenuados representa una alternativa para efectuar diagnóstico no invasivo. La utilización de una fuente láser conlleva un diagnóstico puntual. Un sistema de barrido, como los presentados en el primer capítulo, tendrá que ser diseñado para obtener un mapa del coeficiente de atenuación de la muestra. La configuración interferométrica heterodina Mach-Zehnder, forma la base para la interferometría de fotones no atenuados. La muestra analizada se incorpora en el brazo modulado temporalmente. El efecto de la muestra, en el interferómetro, es modelado como una transmitancia óptica. Los patrones de visibilidad del interferómetro con muestra, contienen la información del coeficiente de atenuación de la misma. Las mediciones necesarias para el diagnóstico involucran solamente a la potencia. En breve, el presente capítulo se avoca al diagnóstico utilizando la visibilidad como métrica principal de análisis.

En la sección 5.1, el comportamiento del interferómetro heterodino es contextualizado para la aplicación de diagnóstico. Aquí, proponemos las modificaciones al arreglo para la aplicación pretendida. La sección 5.2 trata las modificaciones al modelo matemático, para tomar en cuenta la inclusión de la muestra. La distribución espacial, espacio-temporal y temporal del interferómetro son presentadas. Más aún, la visibilidad es estudiada como métrica principal de análisis. Ésta se propone como medio para determinar, experimentalmente, las características de la muestra analizada. En la sección 5.3 se presenta el arreglo experimental implementado en el laboratorio. El comportamiento, teórico y experimental, del arreglo es confirmado en esta sección. La sección 5.4 se enfoca al estudio de incertidumbres en las mediciones experimentales. La incertidumbre permitida, en los valores de potencia, para un esquema de detección más eficiente es propuesta. Como último punto, las conclusiones del capítulo son presentadas.

## 5.1 Los fundamentos del diagnóstico interferométrico

Los comportamientos espacial, espacio-temporal y temporal del interferómetro heterodino, han sido estudiados a detalle (refiérase a los capítulos 3 y 4). Este análisis representa la base para la interferometría de fotones no atenuados. Las expresiones matemáticas espaciales, espacio-temporales y temporales serán expandidas para abarcar la aplicación pretendida. Antes de recapitular las relaciones más importantes del análisis matemático, recordaremos la configuración propuesta para el sistema óptico. En la siguiente figura mostramos esquemáticamente el interferómetro Mach-Zehnder heterodino.



**Fig. 5.1** Diagrama esquemático de la configuración Mach-Zehnder heterodina

El análisis llevado a cabo en los capítulos anteriores es fundamental. Las relaciones matemáticas, que conforman el sustento para la interferometría de fotones no atenuados, serán presentadas a continuación. Primeramente recordaremos las expresiones espaciales del interferómetro convencional (es decir, cuando no se encuentra modulado temporalmente).

Las relaciones matemáticas fundamentales para el arreglo estático son dos. Por un lado, la distribución de radiación en el plano de detección (debida a ambos brazos del interferómetro).



Por otro lado, la distribución de intensidad en este plano (la cual es generada por la superposición de los haces en cada brazo). Las expresiones matemáticas correspondientes (ecuaciones 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.5) se repiten a continuación.

$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_3[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]} e^{i2\pi\left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda}x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda}y\right]} \quad (5.1.1)$$

$$\Psi_5(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_5[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2]} e^{i2\pi\left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda}x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda}y\right]} \quad (5.1.2)$$

$$I_6(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2\frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3||\alpha_5| e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \quad (5.1.3)$$

$$\cos\left\{\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_5[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_3[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2] + 2\pi\left[\frac{2m_6}{\lambda}x + \frac{2n_6}{\lambda}y\right] + \frac{2\pi}{\lambda}(\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma\right\}$$

Aquí  $\Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma_5$ , representa el desfase adicional inducido por las variables complejas,

$\alpha_3 = |\alpha_3|e^{i\gamma_3}$  y  $\alpha_5 = |\alpha_5|e^{i\gamma_5}$ . Además  $m_6$  y  $n_6$  representan la desalineación del sistema,

$m_6 = m_4 + m_3 - m_1 - m_2$  y  $n_6 = n_4 + n_3 - n_1 - n_2$ . La nomenclatura continúa siendo la propuesta al inicio de este trabajo.

La ecuación 5.1.3 predice el comportamiento del arreglo para diferentes escenarios. La información obtenida es de carácter espacial. Estas distribuciones serán modificadas, en la siguiente sección, para tomar en cuenta la muestra estudiada.

El interferómetro toma su carácter heterodino cuando se implementa el modulador temporal (refiérase al capítulo 4). Esto a su vez conlleva una respuesta espacio-temporal del sistema. La respuesta espacio-temporal del sistema también se verá afectada por la inclusión de la muestra. De manera análoga al caso espacial, enseguida mostraremos las relaciones espacio-temporales más importantes del interferómetro heterodino (ecuaciones 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.6).

$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y\right]} \quad (5.1.4)$$

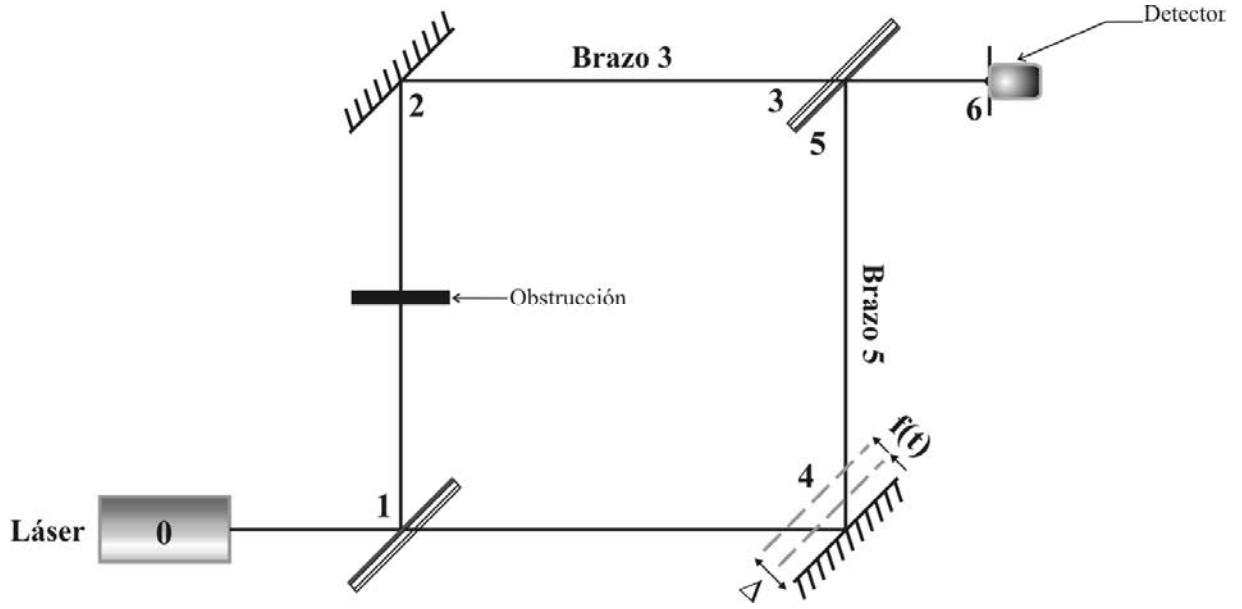
$$\Psi_5(x, y, t) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y\right]} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t)} \quad (5.1.5)$$

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right\} \quad (5.1.6)$$

Aquí, las constantes involucradas son idénticas a las presentadas previamente. Más aún, las relaciones mostradas son las equivalentes al caso espacial. Sin embargo el comportamiento dinámico (ecuaciones 5.1.4 – 5.1.6) pone de manifiesto el carácter espacio-temporal del arreglo heterodino. La información espacio-temporal del interferómetro, aún no es la óptima para el diagnóstico en tiempo real. El comportamiento óptimo implica una dependencia solamente temporal del sistema. La implementación de un detector infinito al arreglo, entregó una respuesta únicamente temporal (véase la sección 4.4). A continuación presentamos la expresión matemática, que describe la dependencia temporal del sistema (ecuación 4.4.22).

$$P_D(t) = P \left[ \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_3|^2 + \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 |\alpha_5|^2 \right] + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \phi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.1.7)$$

Las relaciones presentadas hasta ahora conforman el modelo matemático analítico. Sin embargo en la práctica necesitamos métodos específicos, para determinar los parámetros involucrados en el modelo matemático. Para trascender estas limitaciones, dos técnicas (fáciles de implementar en un prototipo) fueron propuestas en la parte final del capítulo 4. La primera implica determinar la potencia en cada uno de los brazos, cuando el otro se encuentra obstruido. A manera de recordatorio presentamos un diagrama esquemático de este método.



**Fig. 5.2** Arreglo experimental para obtener los parámetros del modelo matemático

La segunda técnica, para obtener los parámetros del modelo matemático, involucra la obtención de la visibilidad del interferómetro. La potencia representa la única medición necesaria para determinar estos parámetros experimentalmente. Los términos involucrados en el modelo matemático, se obtienen mediante las siguientes relaciones (refiérase a la sección 4.4.4).

$$P_D(t) = P_3 + P_5 + P_{35} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.1.8)$$

$$P_3 = P |\alpha_3|^2 \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.1.9)$$

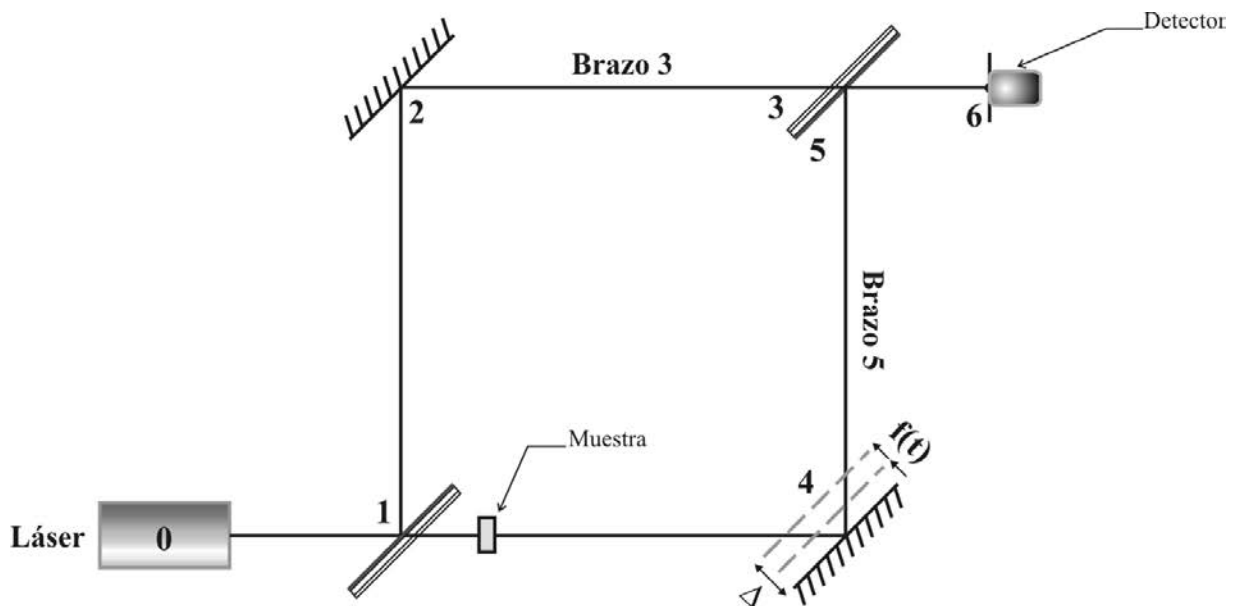
$$P_5 = P |\alpha_5|^2 \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.1.10)$$

$$P_{35} = 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = V(P_3 + P_5) \quad (5.1.11)$$

Aquí  $P_3$  representa la potencia cuando el brazo 5 se encuentra tapado. Por otro lado,  $P_5$  denota la potencia con el brazo 3 obstruido (refiérase a la figura 5.2). Además  $P_{35}$  es fácil de encontrar

trar. Esta variable se expresa en términos de la visibilidad del interferómetro heterodino y de las potencias previamente mencionadas.

En la relación 5.1.8 todos los términos, excepto la fase, pueden ser determinados experimentalmente. Es decir, el modelo matemático se transformó de ser una aproximación teórica a una de carácter experimental. Sin embargo, este análisis no cuenta aún con información sobre la muestra. La interferometría de fotones no atenuados asume que la muestra se encuentra en un brazo del interferómetro. La muestra se incorpora, para nuestro arreglo, en el brazo que cuenta con el modulador temporal. Esta aproximación tiene su fundamento en el esparcimiento que se genera debido a la interacción luz-tejido. Dicho esparcimiento es marcadamente frontal [Flock *et al.*, 1987]. Por lo tanto la implementación del modulador, en el brazo que contiene la muestra, ayudará a desviar aquellos fotones esparcidos un ángulo pequeño. Más aún, la muestra se colocará lejos del dispositivo modulador. Esto incrementará la desviación inducida por el modulador temporal. En la siguiente figura mostramos el interferómetro de fotones no atenuados.



**Fig. 5.3** Diagrama esquemático del interferómetro de fotones no atenuados

La única diferencia entre el interferómetro de fotones no atenuados, con respecto al arreglo heterodino, es la muestra. De aquí la importancia de tener bien caracterizada la configuración

interferométrica propuesta. Las implicaciones de la inclusión de la muestra serán estudiadas, a detalle, en la siguiente sección.

## 5.2 Interferometría de fotones no atenuados

El estudio de la presente sección será dividida en tres partes. La primera se enfocará al estudio del comportamiento espacial del interferómetro. En la segunda parte analizaremos la respuesta espacio-temporal del sistema. Mientras que en la última parte, obtendremos el comportamiento temporal del dispositivo.

La inclusión de la muestra en el sistema, hace que éste se torne en el interferómetro de fotones no atenuados. El efecto que trae consigo la adición de la muestra al interferómetro, es muy específico. En el capítulo 2 demostramos que la intensidad de los fotones no atenuados, decrece exponencialmente. Esto ocurre cuando el haz interactúa con medios esparcidores y absorbentes. Por lo tanto, podemos modelar la interacción entre el haz y la muestra como una transmitancia. En la siguiente figura mostramos el efecto global, generado por la muestra, en el haz incidente.

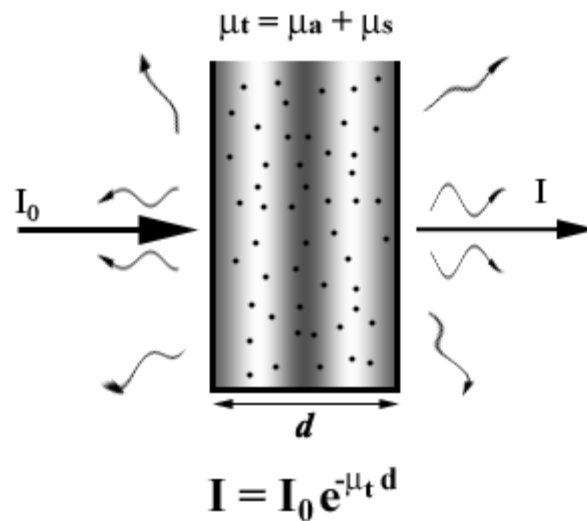


Fig. 5.4 Efecto generalizado de la muestra en el haz lumínico

Las relaciones que se presentan en la figura anterior, fueron demostradas en el capítulo 2. El efecto, de la inclusión de la muestra, se interpreta como una transmitancia en el interferómetro heterodino. Esta relación involucra la intensidad del haz lumínico.

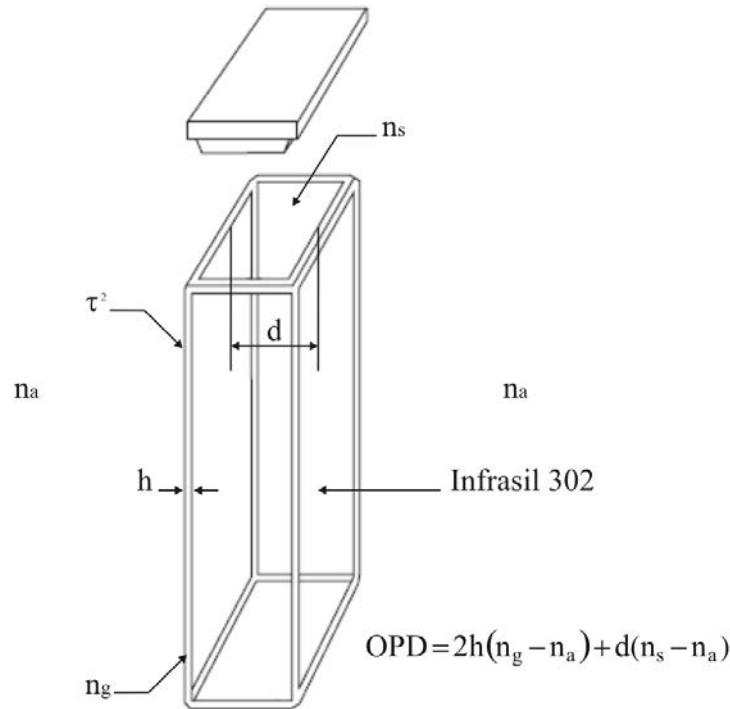
$$T_I(x, y) = \frac{I}{I_0} = e^{-[\mu_a(x, y) + \mu_s(x, y)]d} = e^{-\mu_t(x, y)d} \quad (5.2.1)$$

Además la intensidad, para luz coherente, se obtiene multiplicando la amplitud por su complejo conjugado [Goodman, 1993]. Esto quiere decir que podemos encontrar una transmitancia para las amplitudes del haz involucrado. En la siguiente relación expresamos la transmitancia en términos de dichas amplitudes.

$$T_\Psi(x, y) = \frac{\Psi}{\Psi_0} = e^{-\frac{[\mu_a(x, y) + \mu_s(x, y)]d}{2}} = e^{-\frac{\mu_t(x, y)d}{2}} \quad (5.2.2)$$

Esta relación sería exacta si el medio esparcidor y absorbente, no se portara en algún contenedor. Sin embargo, la aplicación experimental dependió de un recipiente para su implementación. Es decir, las pruebas experimentales involucraron procesos *in vitro*. Una extensión deseada para la técnica es su aplicación a procesos *in vivo*.

El recipiente utilizado fue una celda, para fluorómetro, de cuarzo. Las propiedades de la celda (tales como el coeficiente de pérdidas de Fresnel, calidad óptica, etc.) también son importantes para nuestra aplicación. Dicha información fue proporcionada por el fabricante [Starna, 2005]. La celda está compuesta por un material (Infrasil 302), que cuenta con un buen desempeño en la región infrarroja del espectro, [Heraeus, 1994]. Esto es importante debido a la respuesta de los tejidos en esta región del espectro [Fantini *et al*, 2002]. En la siguiente figura se muestra esquemáticamente la celda utilizada en el interferómetro.



**Fig. 5.5** Celda de cuarzo utilizada para las pruebas experimentales [Starna, 2005]

La transmitancia debe ser modificada para tomar en cuenta las pérdidas de Fresnel en las superficies del recipiente [Klein, 1970]. En la figura anterior se muestran, esquemáticamente, dichas pérdidas ( $\tau^2$  en la figura). Además, la muestra es analizada puntualmente (el tamaño del píxel lo fija el haz Gaussiano). Por lo tanto, el coeficiente de atenuación,  $\mu_t$ , es independiente de las coordenadas para una posición dada (refiérase a las ecuaciones 5.2.1 y 5.2.2). Las expresiones, que toman en cuenta estos aspectos, se presentan a continuación.

$$T_I = \frac{I}{I_0} = \tau^2 e^{-(\mu_a + \mu_s)d} = \tau^2 e^{-\mu_t d} \quad (5.2.3)$$

$$T_\Psi = \frac{\Psi}{\Psi_0} = \tau e^{-\frac{(\mu_a + \mu_s)}{2}d} = \tau e^{-\frac{\mu_t}{2}d} \quad (5.2.4)$$

Otro punto importante, en cuanto a la implementación de la muestra se refiere, es el cambio en camino óptico que sufre el haz (véase la figura 5.5). Además de agregar un recipiente de cuarzo (del cual conocemos todas sus características), la muestra analizada tiene un índice de

refracción específico. Éste es diferente al del aire. Por ejemplo, el fluido extracelular cuenta con un índice de refracción entre 1.348 y 1.351. Mientras que algunos tejidos, como los lípidos (1.46) y las proteínas (1.51), cuentan con índices de refracción más grandes [Mourant *et al*, 1997]. Por lo tanto, estos cambios deben tomarse en cuenta para nuestro análisis. La diferencia en camino óptico, se presenta explícitamente en la figura 5.5. Ésta se repite a continuación.

$$OPD = 2h(n_g - n_a) + d(n_s - n_a) \quad (5.2.5)$$

Aquí  $h$  se refiere al espesor del recipiente de cuarzo,  $n_g$  es el índice de refracción de este contenedor,  $n_a$  representa el índice de refracción del aire,  $n_s$  se refiere al índice de refracción de la muestra, y  $d$  especifica el espesor de la muestra. Las aportaciones de cada brazo, al camino óptico, estarán presentes en el modelo matemático.

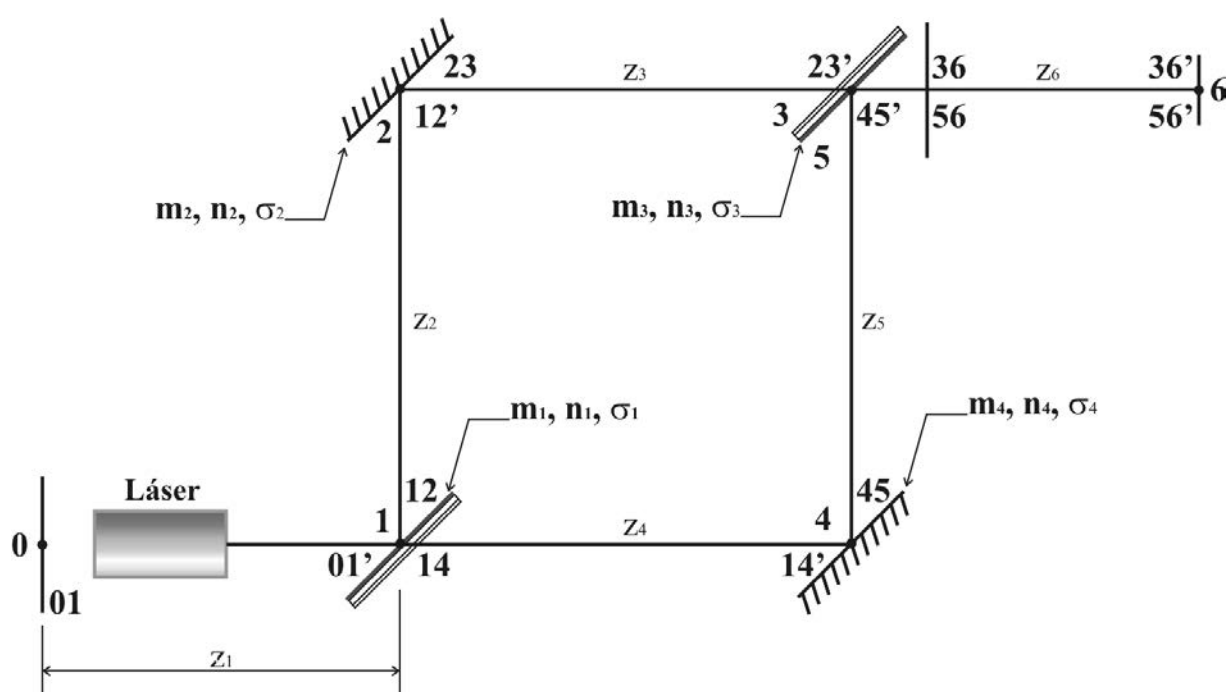
En resumen podemos decir que, la implementación de la muestra en el sistema óptico se modela como una transmitancia. El decremento exponencial en la intensidad, se presenta solamente en el brazo del modulador temporal (brazo 5 en la figura 5.3). Por lo tanto las modificaciones en el modelo matemático se presentarán solamente en este brazo. A continuación estudiaremos los efectos inducidos por la muestra, en el comportamiento espacial del interferómetro.

### 5.2.1 Respuesta espacial del interferómetro de fotones no atenuados

Las condiciones de coherencia (tanto temporal como espacial) al igual que las de polarización, son indispensables para que el fenómeno de interferencia acontezca. En el segundo capítulo enfatizamos que, en el proceso de absorción, la radiación involucrada se disipa dentro del medio absorbente. Es decir, estos fotones no generan interferencia (debido a que nunca llegan al plano de detección). Sin embargo, el fenómeno más predominante en la interacción luz-tejido es el esparcimiento [Ramakrishna *et al*, 2000]. Éste, además, es predominantemente frontal



[Jacques, 1987]. Lo cual implica que los fotones esparcidos sí llegarán al plano de interferencia. Sin embargo estos fotones han sufrido tanto pérdidas de polarización como de coherencia. Estas condiciones son cruciales para poder discernir entre los fotones esparcidos y aquellos no atenuados. Así pues, solamente los fotones no atenuados generarán interferencia con los fotones en el brazo de referencia. Es decir, nuestro sistema discrimina entre las aportaciones de esparcimiento, y aquéllas que a nosotros nos interesan para el diagnóstico. Antes de analizar el comportamiento espacial del interferómetro de fotones no atenuados, recordemos la nomenclatura utilizada en las secciones precedentes.



**Fig. 5.6** Nomenclatura utilizada para el análisis del interferómetro

Al inicio de esta sección se enfatizó que el único cambio en el interferómetro, respecto al análisis previamente realizado, es la inclusión de la muestra en el brazo 5. Es decir, todo nuestro análisis del brazo de referencia permanece idéntico. Mientras tanto, el decremento exponencial, en la intensidad, se presenta en el brazo con muestra. Es decir, el efecto de la inclusión de la muestra se modela como una transmitancia. Ésta afecta a la distribución en el brazo 5, específicamente al trayecto 1 – 4 (véase la figura 5.6). En la siguiente figura se presenta un diagrama del trayecto en cuestión, para el interferómetro de fotones no atenuados.

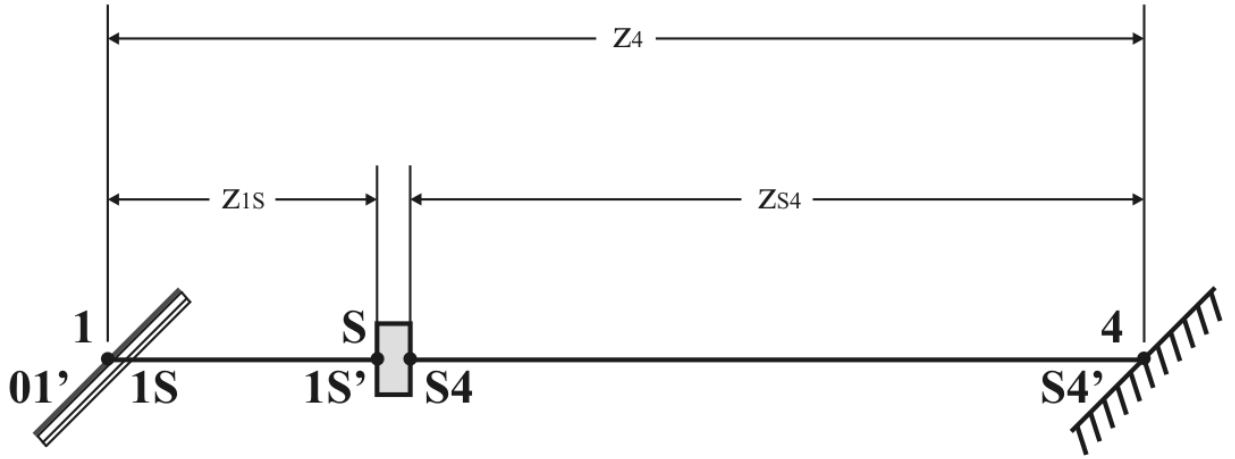


Fig. 5.7 Sección del interferómetro con la muestra

Las dimensiones del recipiente, así como los índices de refracción involucrados en éste, no se han incluido en esta figura. Lo anterior debido a que esta información, ya fue presentada previamente (refiérase la figura 5.5).

El análisis sin muestra, para esta sección del interferómetro, fue llevado a cabo en el tercer capítulo (sección 3.3.3). Las distribuciones que se ven afectadas directamente, son las correspondientes a los nodos 1 y 4. El punto de partida, para el análisis con muestra, es la distribución  $\psi_{1S}(x, y)$ . Ésta es idéntica a la distribución  $\psi_{14}(x, y)$ , refiérase a las expresiones 3.3.19. Solamente hemos agregado el nodo de la muestra (nodo S), para mantener coherencia en la nomenclatura. La distribución  $\psi_{14}(x, y)$ , léase  $\psi_{1S}(x, y)$ , se repite a continuación.

$$\psi_{14}(x, y) = \psi_{1S}(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{1S} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{1S}} e^{-\left[\frac{x^2+y^2}{r_{1S}^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_1} \beta_{1S} (x^2+y^2)} \quad (5.2.6)$$

$$\alpha_{1S} = (1 - \sigma_1) \left[ \frac{(\pi r_{01}^2)^2 - i(\lambda z_1)(\pi r_{01}^2)}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2} \right]; \quad \beta_{1S} = 1 - \frac{(\pi r_{01}^2)^2}{(\lambda z_1)^2 + (\pi r_{01}^2)^2}; \quad r_{1S}^2 = \left( \frac{\lambda z_1}{\pi r_{01}^2} \right)^2 + r_{01}^2; \quad \delta_{1S} = z_1$$

La distribución del haz, antes de que la radiación interactúe con la muestra;  $\psi_{1S}(x', y')$ , se encuentra mediante la aplicación de la relación de Fresnel (ecuación 3.2.13).

$$\psi_{1S'}(x', y') = \frac{e^{ikz_{1S}}}{i\lambda z_{1S}} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \psi_{1S}(x, y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z_{1S}}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx dy \quad (5.2.7)$$

El efecto de la muestra, en la radiación incidente, se modela mediante una transmitancia. Para los estudios *in vitro*, los decrementos por pérdidas de Fresnel en el recipiente ya han sido tomados en cuenta. En nuestro trabajo, las pruebas analizadas fueron *in vitro*. Por lo tanto, la distribución, luego de la interacción con la muestra, se obtiene multiplicando la relación 5.2.7 por la correspondiente a la transmitancia (con pérdidas de Fresnel), ecuación 5.2.4.

$$\psi_{S4}(x, y) = T_S(x, y)\psi_{1S'}(x, y) = \tau e^{-\frac{\mu_t(x, y)d}{2}} \psi_{1S'}(x, y) \quad (5.2.8)$$

$$\psi_{S4}(x, y) = T_S \psi_{1S'}(x, y) = \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} \psi_{1S'}(x, y) \quad (5.2.9)$$

La última expresión pone de manifiesto un carácter importante del diagnóstico. Al inicio de esta sección se enfatizó que la muestra es analizada puntualmente. Esto implica que el coeficiente de atenuación (también llamado coeficiente de extinción) es independiente de las coordenadas para una posición dada. Para obtener el comportamiento global de la muestra, se necesita llevar a cabo un barrido de la misma. Este barrido no es un inconveniente en el sistema. De hecho, éste se efectúa en la mayoría de las técnicas de diagnóstico (refiérase al primer capítulo de esta tesis).

La relación 5.2.9 es crucial para nuestro análisis. Ésta implica que las relaciones espaciales obtenidas previamente, se mantendrán para el interferómetro de fotones no atenuados. La única variación en el análisis será la información inducida por la muestra. Recordemos que justamente esta información representa la base del diagnóstico.

La distribución del haz de referencia, en el plano de interferencia, es idéntica a la obtenida previamente (expresión 5.1.1). Sin embargo la contribución del brazo con muestra cambia. La modificación en este brazo contiene la información que estamos buscando. Es decir, el

coeficiente de atenuación de la muestra. La distribución espacial, en el plano de detección, para el brazo de referencia se muestra enseguida (expresiones 3.3.18).

$$\psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda} x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda} y\right]} \quad (5.2.10)$$

$$\phi_{36} = 2\{(m_1 + m_2)^2 + (n_1 + n_2)^2\}; \quad x_3 = x_{36} + 2(m_1 + m_2)z_6; \quad y_3 = y_{36} + 2(n_1 + n_2)z_6$$

$$\alpha_3 = \alpha_{36} \left\{ \frac{z_3 (\pi r_{36}^2)^2 (z_3 + z_6 \beta_{36}) - iz_3^2 (\lambda z_6) (\pi r_{36}^2)}{(\lambda z_3 z_6)^2 + [(\pi r_{36}^2)(z_3 + z_6 \beta_{36})]^2} \right\}; \quad \beta_3 = 1 - \left\{ \frac{z_3 (\pi r_{36}^2)^2 (z_3 + z_6 \beta_{36})}{(\lambda z_3 z_6)^2 + [(\pi r_{36}^2)(z_3 + z_6 \beta_{36})]^2} \right\}$$

$$r_3^2 = \left( \frac{\lambda z_6}{\pi r_{36}} \right)^2 + \left[ r_{36} \left( 1 + \frac{z_6}{z_3} \beta_{36} \right) \right]^2; \quad \delta_3 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_6 - \phi_{12} z_2 - \phi_{23} z_3 - \phi_{36} z_6) n_a$$

Estas relaciones son exactamente iguales a las deducidas en el tercer capítulo. Las expresiones que se modifican tienen que ver con el brazo 5 del interferómetro (expresiones 3.3.22). En éstas encontraremos contenida la información de la muestra investigada.

$$\psi_5(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2]} e^{i2\pi \left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda} x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda} y\right]} \quad (5.2.11)$$

$$\phi_{56} = 2\{(m_4 + m_3)^2 + (n_4 + n_3)^2\}; \quad x_5 = x_{56} + 2(m_4 + m_3)z_6; \quad y_5 = y_{56} + 2(n_4 + n_3)z_6$$

$$\alpha_5 = \alpha_{56} \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56}) - iz_5^2 (\lambda z_6) (\pi r_{56}^2)}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2)(z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}; \quad \beta_5 = 1 - \left\{ \frac{z_5 (\pi r_{56}^2)^2 (z_5 + z_6 \beta_{56})}{(\lambda z_5 z_6)^2 + [(\pi r_{56}^2)(z_5 + z_6 \beta_{56})]^2} \right\}$$

$$r_5^2 = \left( \frac{\lambda z_6}{\pi r_{56}} \right)^2 + \left[ r_{56} \left( 1 + \frac{z_6}{z_5} \beta_{56} \right) \right]^2; \quad \delta_5 = (z_1 + z_{1s} + z_{s4} + z_5 + z_6 - \phi_{45} z_5 - \phi_{56} z_6) n_a + 2 h n_g + d n_s$$

Estas expresiones ponen de manifiesto las dos contribuciones de la muestra al interferómetro. En primera instancia, la distribución debida al brazo 5 cuenta con la información sobre la muestra. Como segunda contribución, el camino óptico (en las relaciones del capítulo 3 supusimos un índice de refracción unitario) es diferente debido a la inclusión de la muestra. Estas diferencias se obtienen restando  $\delta_5$  menos  $\delta_3$ . A continuación mostramos esta relación.

$$\delta_5 - \delta_3 = 2h(n_g - n_a) + d(n_s - n_a) \quad (5.2.12)$$

Para llegar a esta expresión hemos supuesto que las distancias entre componentes (para ambos brazos) son idénticas, esto es  $z_2 = z_5$  y  $z_3 = z_{1s} + h + d + h + z_{s4}$ . Además despreciamos las contribuciones debidas al arreglo desalineado.

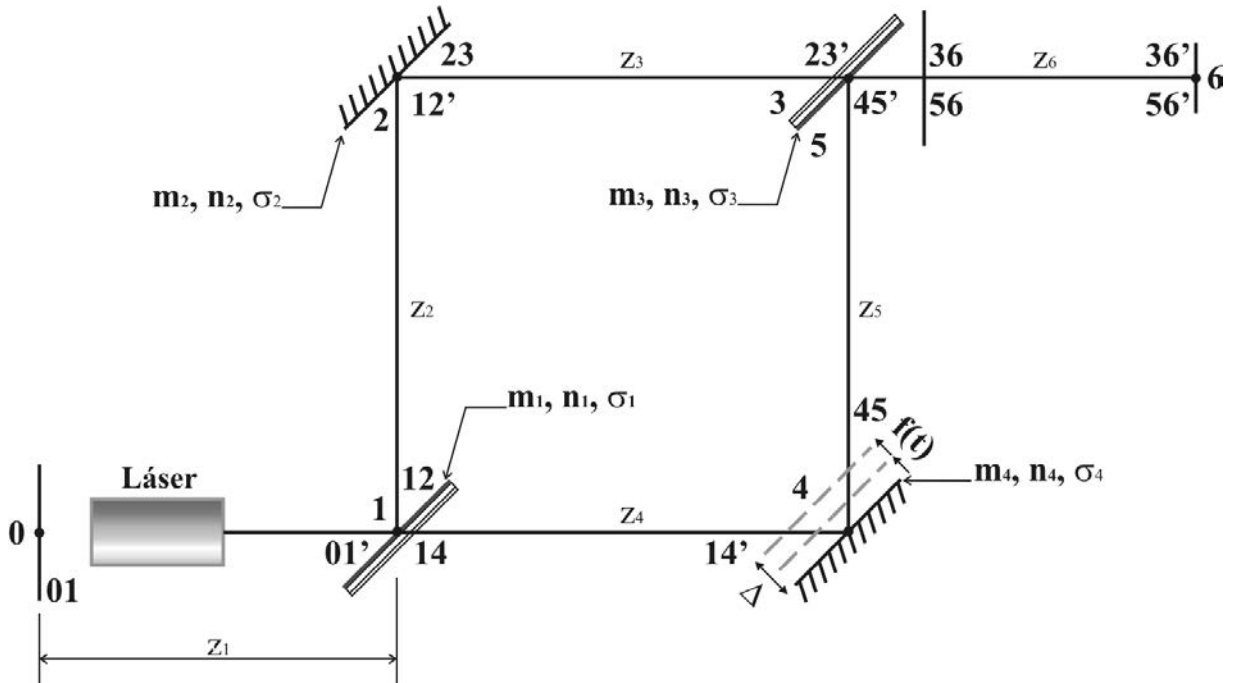
Las expresiones 5.2.10 y 5.2.11 forman la base para encontrar la distribución de intensidad, en el plano de interferencia. Enseguida mostramos la relación de intensidad para la superposición de estos haces.

$$I_6(x, y) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \tau^2 e^{-\mu_1 d} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \cos\left\{\frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[\frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y\right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma\right\} \quad (5.2.13)$$

Aquí hemos vuelto a utilizar la relación 3.4.4 para encontrar la intensidad. Además los parámetros de esta relación, han sido presentados en varias ocasiones a lo largo del trabajo (refiérase a la sección 5.1). Las modificaciones, debidas a la muestra, son claramente perceptibles en el modelo matemático (compárese las relaciones 5.1.1 – 5.1.3 con las encontradas en esta sección). La información de la muestra está codificada en los patrones de intensidad. Por lo tanto, este modelo cuenta con la información necesaria que queremos analizar. Esto lo habilita como una herramienta para realizar diagnóstico. En la siguiente sección obtendremos la respuesta espacio-temporal del interferómetro de fotones no atenuados.

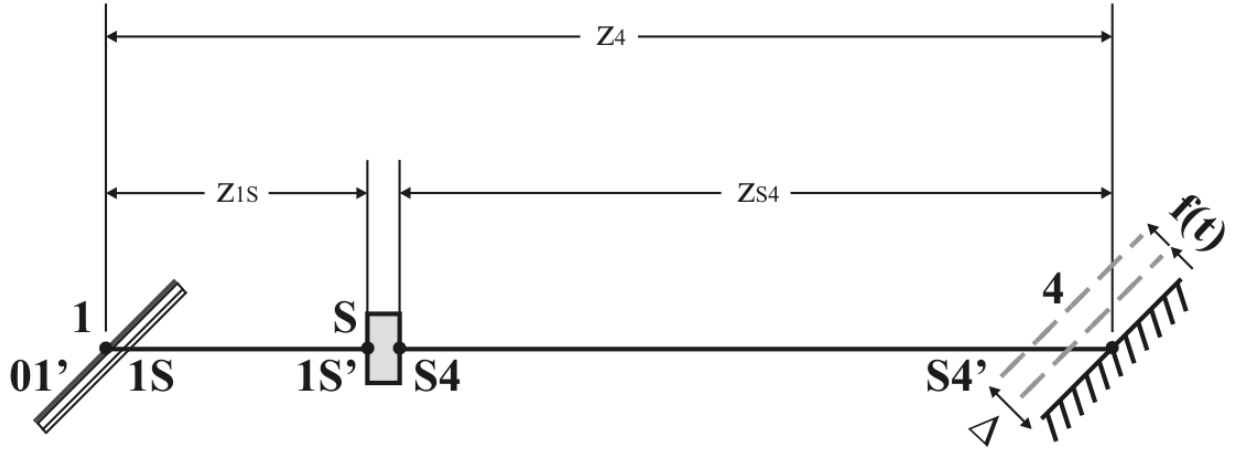
### 5.2.2 Respuesta espacio-temporal del interferómetro de fotones no atenuados

La extensión del análisis precedente, para obtener la respuesta espacio-temporal del interferómetro, es muy sencilla. En la siguiente figura mostramos la configuración tradicional Mach-Zehnder con el modulador temporal.



**Fig. 5.8** Interferómetro Mach-Zehnder con el modulador temporal

La aportación de la muestra, al interferómetro heterodino, es muy puntual. Al igual que el caso precedente, solamente el brazo 5 modifica su comportamiento. El efecto de la muestra se representa mediante una transmitancia. Ésta es independiente de la posición. Lo cual quiere decir que la propagación de Fresnel para la distribución, después de la muestra, no modifica en lo absoluto los resultados obtenidos en el capítulo 4. En la siguiente figura mostramos el brazo con la muestra, además del modulador temporal.



**Fig. 5.9** Sección del interferómetro heterodino con la muestra

La distribución del haz, que incide en el espejo modulador;  $\psi_{S4'}(x', y')$ , es exactamente igual al caso sin muestra. Excepto que ahora, dicha distribución, cuenta con la contribución de la muestra. Enseguida presentamos la distribución antes de incidir en el espejo modulado.

$$\psi_{S4'}(x', y') = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_{S4'} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta_{S4'}} e^{-\left[\frac{x'^2 + y'^2}{r_{S4'}^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_4} \beta_{S4'} [x'^2 + y'^2]} \quad (5.2.14)$$

$$\alpha_{S4'} = \alpha_{1S} \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{1S}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{1S}) - i z_1^2 (\lambda z_4) (\pi r_{1S}^2)}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{1S}^2) (z_1 + z_4 \beta_{1S})]^2} \right\}; \quad \beta_{S4'} = 1 - \left\{ \frac{z_1 (\pi r_{1S}^2)^2 (z_1 + z_4 \beta_{1S})}{(\lambda z_1 z_4)^2 + [(\pi r_{1S}^2) (z_1 + z_4 \beta_{1S})]^2} \right\}$$

$$r_{S4'}^2 = \left( \frac{\lambda z_4}{\pi r_{1S}^2} \right)^2 + \left[ r_{1S} \left( 1 + \frac{z_4}{z_1} \beta_{1S} \right) \right]^2; \quad \delta_{S4'} = (z_1 + z_{1S} + z_{S4}) n_a + 2h n_g + d n_s$$

Obsérvese como esta distribución es exactamente igual a la presentada en la sección 4.2, excepto por la función exponencial decreciente, así como el camino óptico recorrido. Más aún todos los parámetros con subíndices  $1S$ , están dados por las relaciones estudiadas en el comportamiento espacial (relación 5.2.6). De aquí en adelante, el análisis es completamente análogo al llevado a cabo en la sección 4.2. En lugar de volver a desarrollar este análisis, las distribuciones en el plano de interferencia se presentan a continuación.

$$\Psi_3(x, y) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_3 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta_3} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{r_3^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_3[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]} e^{i2\pi\left[\frac{2(m_1+m_2)}{\lambda}x + \frac{2(n_1+n_2)}{\lambda}y\right]} \quad (5.2.15)$$

$$\Psi_5(x, y, t) = \sqrt{\frac{2P}{\pi r_{01}^2}} \alpha_5 \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta_5} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} e^{i\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_5[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2]} e^{i2\pi\left[\frac{2(m_4+m_3)}{\lambda}x + \frac{2(n_4+n_3)}{\lambda}y\right]} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z f(t)} \quad (5.2.16)$$

Todos los parámetros, en estas relaciones, pueden ser obtenidos mediante las expresiones 5.2.10 y 5.2.11. Los cambios sustanciales en estas relaciones, al igual que para el caso espacial, son el decremento exponencial debido a la muestra y el cambio de camino óptico inducido por ésta. De manera análoga al análisis espacial, la relación 3.4.4 entrega la distribución de intensidad en el plano de interferencia.

$$I_6(x, y, t) = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \tau^2 e^{-\mu_1 d} e^{-\left[\frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]} + 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} e^{-\left[\frac{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}{r_5^2}\right]} \cos\left\{\frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_5[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6}\beta_3[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2] + 2\pi\left[\frac{2m_6}{\lambda}x + \frac{2n_6}{\lambda}y\right] + \frac{2\pi}{\lambda}(\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta z f(t)\right\} \quad (5.2.17)$$

Los parámetros de esta relación, han sido estudiados previamente (véase la sección 5.1). La contribución de la muestra (compárese con la expresión 5.1.6) se percibe tanto en el decremento exponencial, como en la diferencia de camino óptico. El comportamiento espacio-temporal, del interferómetro de fotones no atenuados, es casi idéntico al espacial. Esta analogía era de esperarse, ya que las configuraciones Mach-Zehnder convencional y heterodina presentaron la misma similitud. La implementación de un detector infinito, entregó una respuesta puramente temporal en la configuración tradicional. En la última parte de esta sección, llevamos acabo el análisis análogo para el interferómetro de fotones atenuados.



### 5.2.3 Respuesta temporal del interferómetro de fotones no atenuados

En la sección 4.4.2 estudiamos los efectos que conlleva la implementación de un detector infinito en el arreglo. Las relaciones espacio-temporales para el interferómetro heterodino, se convirtieron en funciones puramente temporales. Esta característica se enfatizó como crucial para realizar diagnóstico en tiempo real. En la presente sección llevamos acabo el análisis análogo para el interferómetro de fotones atenuados.

Al igual que en el arreglo convencional, el haz percibe la extensión del detector como si fuera infinita. Por lo tanto, la potencia en el detector se obtiene integrando la relación de intensidad encontrada previamente (ecuación 5.2.17).

$$P_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_6(x, y, t) \psi_6^*(x, y, t) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Omega_3(x, y) + \Omega_5(x, y) + \Omega_{35}(x, y, t)] dx dy \quad (5.2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_3(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \quad (5.2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_5(x, y) dx dy = \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_5|^2 \tau^2 e^{-\mu_1 d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{\left(\frac{r_5}{\sqrt{2}}\right)^2} \right]} dx dy \quad (5.2.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) = 2 \frac{2P}{\pi r_{01}^2} |\alpha_3| |\alpha_5| \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \operatorname{Re} \left( e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{r_3^2} + \frac{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}{r_5^2} \right]} e^{i \left\{ \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_5 [(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2] - \frac{\pi}{\lambda z_6} \beta_3 [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2] + 2\pi \left[ \frac{2m_6}{\lambda} x + \frac{2n_6}{\lambda} y \right] \right\}} dx dy \right) \quad (5.2.21)$$

Aquí hemos vuelto a adoptar la nomenclatura propuesta en la sección 4.4.2. Las relaciones integrales son exactamente iguales a las resueltas en el capítulo anterior. Por lo tanto, la respuesta temporal del interferómetro de fotones atenuados es muy fácil de obtener. La solución de las integrales involucradas se efectúa de igual manera que en la sección 4.4.2. La única

suposición que no se debe olvidar es que, el sistema debe encontrarse bien alineado. Los resultados de las integrales 5.2.19 – 5.2.21 se presentan enseguida.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_3(x, y) dx dy = P \left| \alpha_3 \right|^2 \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.2.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_5(x, y) dx dy = P \left| \alpha_5 \right|^2 \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \tau^2 e^{-\mu_1 d} \quad (5.2.23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{35}(x, y, t) = 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} \left| \alpha_3 \right| \left| \alpha_5 \right| \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.2.24)$$

La adición de estas relaciones integrales, conforma el comportamiento temporal del interferómetro de fotones no atenuados (ecuación 5.2.18). Este comportamiento se muestra en la siguiente expresión.

$$P_D(t) = P \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \left| \alpha_3 \right|^2 + P \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \left| \alpha_5 \right|^2 \tau^2 e^{-\mu_1 d} + 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} \left| \alpha_3 \right| \left| \alpha_5 \right| \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.2.25)$$

En esta expresión es importante notar la presencia de la información requerida. Una comparación, entre las expresiones encontradas y las correspondientes al arreglo convencional (relación 5.1.7), pone de manifiesto esta condición. Sin embargo, la expresión encontrada es completamente analítica. La última parte de esta sección explica la metodología para obtener, experimentalmente, la información de la muestra.

### 5.2.3.1 Visibilidad como métrica principal de diagnóstico

Al inicio de este capítulo se recapitulaban dos técnicas para encontrar, prácticamente, los parámetros del modelo matemático en un interferómetro convencional. La primera de ellas invo-

lucra la medición de potencia en cada uno de los brazos, mientras que el otro se obstruye. La segunda técnica hace uso de la visibilidad del interferómetro, para determinar el parámetro faltante en el modelo matemático. Estas técnicas transforman el modelo matemático. Éste pasa de ser una aproximación analítica a una de carácter experimental. Dichas relaciones (para el interferómetro heterodino) se volvieron a presentar al inicio del capítulo (ecuaciones 5.1.8 – 5.1.11). La utilización de éstas en la relación temporal del interferómetro de fotones no atenuados (ecuación 5.2.25), convierte dicha expresión en una de carácter práctico. Enseguida mostramos el comportamiento temporal del interferómetro de fotones no atenuados, con los parámetros determinados experimentalmente.

$$P_D(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d} + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.2.26)$$

$$P_3 = P |\alpha_3|^2 \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.2.27)$$

$$P_5 = P |\alpha_5|^2 \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.2.28)$$

$$P_{35} = 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = V(P_3 + P_5) \quad (5.2.29)$$

Aquí  $P_3$  representa la potencia cuando el brazo 5, sin muestra, se encuentra tapado. Por otro lado,  $P_5$  denota la potencia con el brazo 3 obstruido. Además  $P_{35}$  se expresa en términos de la visibilidad del interferómetro (sin muestra), y de las potencias previamente mencionadas.

La relación 5.2.26 contiene la información requerida de la muestra. Más aún todos los parámetros, excepto la fase, son conocidos. La determinación del coeficiente de atenuación, para el píxel en cuestión, se encuentra en función de la visibilidad del interferómetro con muestra. A continuación recordamos la definición de esta métrica.

$$V_s = \frac{P_D^{\max}(t) - P_D^{\min}(t)}{P_D^{\max}(t) + P_D^{\min}(t)} \quad (5.2.30)$$

En esta expresión hemos optado por utilizar el subíndice  $S$  para indicar que las medidas involucran a la muestra. La función temporal, que modula al piezoeléctrico, es triangular (refiérase a la sección 4.2.1). Por lo tanto la modulación de la potencia con respecto al tiempo, en el interferómetro de fotones no atenuados, será sinusoidal. Esto implica que podemos encontrar una relación para el coeficiente de atenuación, en términos de la visibilidad del interferómetro con muestra.

$$P_D^{\max}(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d} + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}; \quad P_D^{\min}(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d} - P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}$$

$$V_S(\mu_1) = \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d}} \quad \therefore \quad P_5 V_S \tau^2 q^2 - P_{35} \tau q + P_3 V_S = 0; \quad \text{si } q = e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \quad \therefore$$

$$\mu_{t_{-,+}} = -\frac{2}{d} \ln(q_{+,-}) = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right] \quad (5.2.31)$$

Esta relación representa una de las aportaciones más importantes del trabajo. Solamente mediciones de potencia (implícitamente en la métrica de visibilidad) están involucradas en la última relación. Esta observación enfatiza la importancia del sistema de detección en el interferómetro. Mediante la ecuación 5.2.31, nos damos cuenta que nuestro análisis siempre brindará dos resultados. Sin embargo, una restricción aplica para la elección del coeficiente de atenuación. El coeficiente de atenuación debe ser positivo para representar un escenario físico. Esta restricción se muestra matemáticamente a continuación.

$$0 < q_{+,-} \leq 1 \quad \therefore \quad 0 < \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \leq 1 \quad (5.2.32)$$

Esta condición se deduce usando las propiedades de los logaritmos naturales [Boas, 1983]. Por lo tanto una conclusión importante es que, los resultados físicos están siempre en este rango. Más aún, pequeñas variaciones en este parámetro implican grandes desviaciones en los valores del coeficiente de extinción. Un estudio de incertidumbres será efectuado (basándonos en la ecuación 5.2.31) para evaluar la sensibilidad del interferómetro al sistema de detección.

Más aún, el coeficiente de atenuación encontrado en la relación 5.2.31 representa el valor para un píxel dado. Un sistema de barrido, como los presentados en el primer capítulo, tendrá que ser diseñado para obtener un mapa bi o tridimensional del coeficiente de atenuación de la muestra.

En breve resumiremos los resultados de esta sección. Los modelos matemáticos, desarrollados en los capítulos previos, fueron aplicados y extendidos para demostrar el principio de la interferometría de fotones no atenuados. Una aproximación experimental, para la determinación de los coeficientes de extinción, fue propuesta y justificada. La única medición involucrada, en el diagnóstico, es la potencia. La métrica más importante, para el interferómetro de fotones no atenuados, es la visibilidad. Los coeficientes de atenuación, físicamente concebibles, son más sensibles a variaciones en potencia. En la siguiente sección presentaremos los resultados, teóricos y experimentales, de la interferometría de fotones no atenuados.

### **5.3 Desempeño del interferómetro de fotones no atenuados**

En esta sección abordaremos el desempeño del interferómetro de fotones no atenuados. Primeramente obtendremos el comportamiento teórico del interferómetro. Las relaciones teóricas, entre la visibilidad del dispositivo y el coeficiente de extinción, pondrán de manifiesto características de flexibilidad en el sistema. Un esquema práctico, para incrementar la aplicabilidad del interferómetro, será estudiado. Posteriormente presentaremos el arreglo experimental. Leche semi-descremada es propuesta como símil de tejido para nuestra aplicación. Además, demostramos que el coeficiente de atenuación, para concentraciones bajas de leche, cumple con la relación de Beer (refiérase a la sección 2.3). Más aún, el comportamiento global del interferómetro es verificado. Por último analizamos limitaciones, del arreglo experimental, para obtener valores precisos del coeficiente de extinción.

### 5.3.1 Respuesta teórica del interferómetro de fotones no atenuados

En la primera parte de esta sección obtendremos el comportamiento teórico del interferómetro de fotones no atenuados. Para llevar acabo este análisis partimos de la ecuación 5.2.31. Ésta se repite a continuación para facilitar su referencia.

$$\mu_{t_{-,+}} = -\frac{2}{d} \ln(q_{+,-}) = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_s^2}}{2\tau P_5 V_s} \right]; \quad P_{35} = (P_3 + P_5)V \quad (5.3.1)$$

Como recordatorio,  $P_3$  representa la potencia cuando el brazo 5, sin muestra, se encuentra tapado. Por otro lado  $P_5$  denota la potencia, para el interferómetro convencional, con el brazo 3 obstruido. Además,  $P_{35}$  se obtiene mediante la multiplicación de la visibilidad del interferómetro (sin muestra) por la superposición de las potencias previamente mencionadas. Más aún,  $V_s$  representa la visibilidad del interferómetro con muestra. Por último,  $\tau$  representa las pérdidas de Fresnel en el recipiente, mientras que  $d$  es el espesor de la muestra.

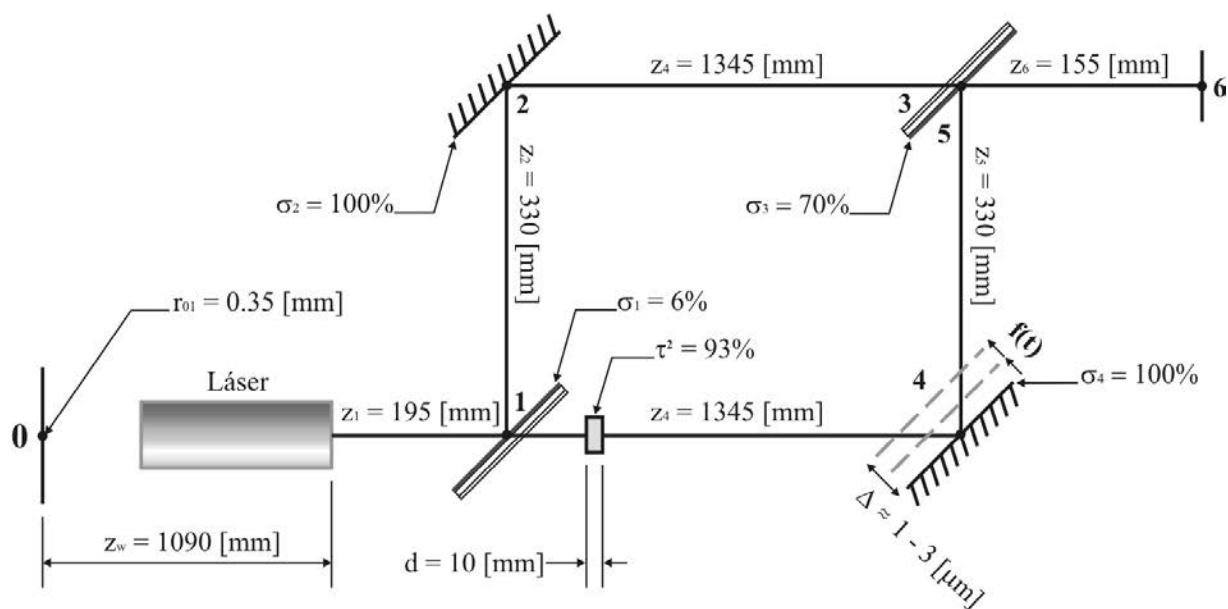
En la sección precedente se mencionó que todos estos parámetros se pueden determinar experimentalmente. Sin embargo, los parámetros que involucran al interferómetro sin muestra, también pueden ser conocidos teóricamente. Enseguida presentamos las relaciones teóricas para estos parámetros (relaciones 5.2.27 – 5.2.29).

$$P_3 = P |\alpha_3|^2 \left( \frac{r_3}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.3.2)$$

$$P_5 = P |\alpha_5|^2 \left( \frac{r_5}{r_{01}} \right)^2 \quad (5.3.3)$$

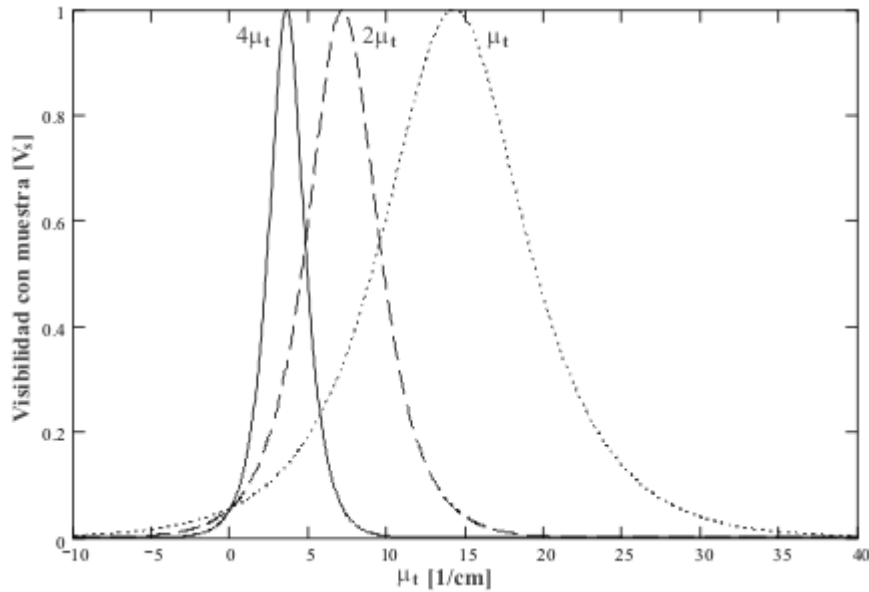
$$P_{35} = 4P \left( \frac{R}{r_{01}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\pi R^2 \beta}{\lambda z_6} \right)^2}} |\alpha_3| |\alpha_5| = V(P_3 + P_5) \quad (5.3.4)$$

Con estas relaciones obtendremos el comportamiento analítico esperado. Todos los parámetros en estas relaciones son conocidos. Una figura esquemática, con los valores utilizados para la simulación (los cuales fueron tomados del arreglo experimental), se presenta a continuación.



**Fig. 5.10** Diagrama esquemático experimental del interferómetro

Esta información, al igual que las relaciones matemáticas desarrolladas a lo largo de este trabajo, provee el contexto necesario para la obtención del desempeño del sistema. En la siguiente figura mostramos el comportamiento del coeficiente de extinción. Éste se muestra como una función de la visibilidad del interferómetro con muestra (expresión 5.2.31).

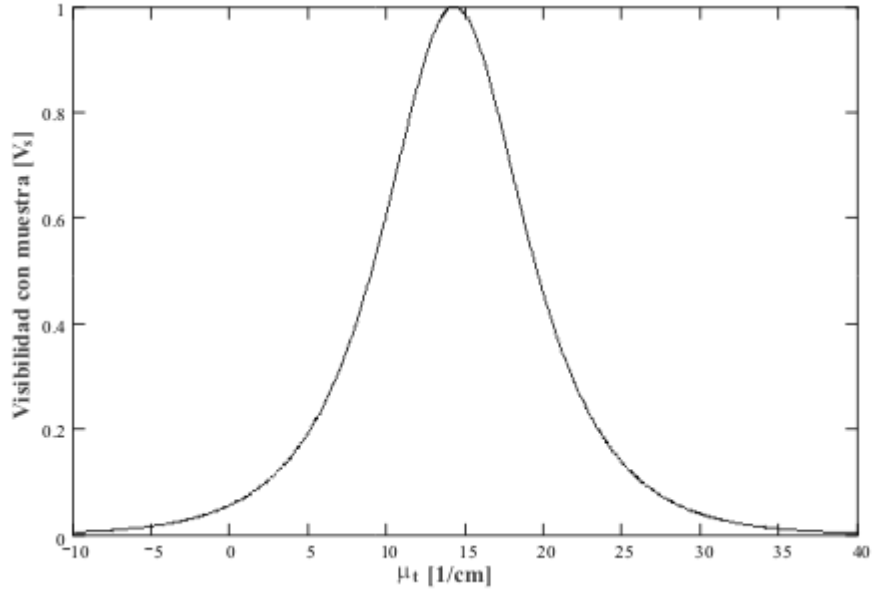


**Fig. 5.11** Respuesta óptima para el arreglo mostrado en la figura 5.10

La figura precedente contiene información muy importante para nuestra aplicación. El eje de las ordenadas presenta la información de visibilidad. Mientras que el eje de las abscisas muestra el coeficiente de atenuación. En la gráfica, tres escenarios son analizados. El primero de ellos (la gráfica que se encuentra más a la derecha) representa una muestra con un dado coeficiente de extinción,  $\mu_t$ . La segunda gráfica, situada en medio de las tres, representa el comportamiento para una muestra que atenúa el doble. Por último, el tercer escenario involucra a una muestra cuatro veces más atenuante.

Sin embargo, si nosotros trazamos una línea horizontal a lo largo de cualquiera de estas gráficas, la visibilidad satisface dos valores del coeficiente de atenuación. Una pregunta importante es, ¿cuál de estas dos soluciones es la que caracteriza a la muestra analizada? La respuesta a esta pregunta implica que se comprenda adecuadamente el principio físico de operación. En la siguiente figura mostramos solamente el comportamiento de una de las muestras.





**Fig. 5.12** Visibilidad como función del coeficiente de atenuación

En esta gráfica observamos que el comportamiento de la muestra tiene un valor extremo relativo. Este valor extremo determina el máximo valor de la visibilidad. Para encontrar el coeficiente de atenuación, que satisface esta condición, retomamos la ecuación 5.2.31.

$$V_s(\mu_t) = \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} \quad (5.3.5)$$

La derivada de una función permite determinar sus valores extremos relativos [Courant, 1970]. Éstos se encuentran igualando la derivada a cero. Esta operación, para la ecuación 5.3.5, entrega el siguiente resultado.

$$\frac{dV_s(\mu_t)}{d\mu_t} = \frac{d}{d\mu_t} \left[ \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} \right] = -\frac{P_{35} \tau d}{2} \frac{e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} + P_{35} P_5 \tau^3 d \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} e^{-\mu_t d}$$

$$\frac{dV_s(\mu_t)}{d\mu_t} = 0 \Rightarrow -\frac{P_{35} \tau d}{2} \frac{e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} + P_{35} P_5 \tau^3 d \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d}} e^{-\mu_t d} = 0 \quad \therefore P_3 - \tau^2 P_5 e^{-\mu_t d} = 0$$

$$\mu_{t_{\max}} = -\frac{1}{d} \ln \left( \frac{P_3}{\tau^2 P_5} \right) \quad (5.3.6)$$

Si derivamos nuevamente la expresión 5.3.5 y sustituimos el valor encontrado, obtenemos que la segunda derivada es menor a cero. Por lo tanto, la visibilidad máxima se presenta cuando el coeficiente de atenuación está dado por la relación 5.3.6. Ahora recordemos la relación de potencia (en el plano de detección) para el sistema con muestra (ecuación 5.2.26).

$$P_D(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_t d} + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_5 - \delta_3) + \Delta\gamma + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z f(t) \right] \quad (5.3.7)$$

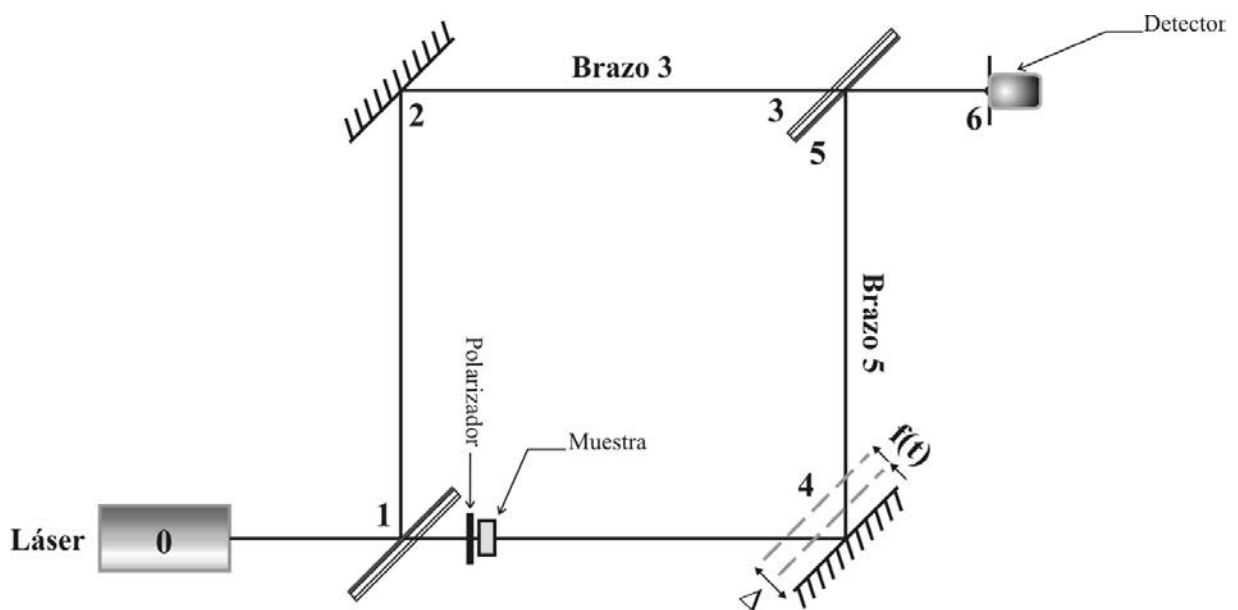
Los dos primeros términos de esta expresión tienen que ver con las contribuciones individuales de cada brazo. Es decir, si nosotros pudiéramos medir solamente los fotones no atenuados, estas expresiones representarían la potencia en cada brazo del interferómetro, mientras el otro permanece tapado (compárese con la sección 4.4.4). Si nosotros sustituimos el coeficiente de atenuación, para la condición de visibilidad máxima, encontramos un resultado muy importante (tanto conceptualmente como matemáticamente).

$$P_D(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\left[ -\frac{1}{d} \ln \left( \frac{P_3}{\tau^2 P_5} \right) \right] d} + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} \cos \vartheta(t) = P_3 + P_3 + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_t d}{2}} \cos \vartheta(t) \quad (5.3.8)$$

Aquí hemos optado por expresar la fase en términos de una sola función. La relación anterior sirve para concluir sobre la condición de visibilidad máxima en el interferómetro. Si la potencia del brazo con muestra es idéntica a la del brazo de referencia, entonces la visibilidad en el interferómetro se maximiza. Con esta aproximación comprendemos mejor el comportamiento del sistema (refiérase a las figuras 5.11 y 5.12). Mientras la muestra no atenúe la potencia en el brazo del interferómetro, hasta el grado que las potencias en ambos brazos sean iguales, la visibilidad del dispositivo se incrementará. Cuando el coeficiente sea tal que las potencias en ambos brazos son iguales, entonces la visibilidad será máxima. Esto implica que, de este coeficiente de atenuación en adelante, la visibilidad disminuirá acordeamente. Por lo tanto, el comportamiento encontrado es congruente, tanto conceptualmente como matemáticamente.

Más aún ahora se comprende la razón por la cual, un valor de visibilidad puede representar dos coeficientes de atenuación.

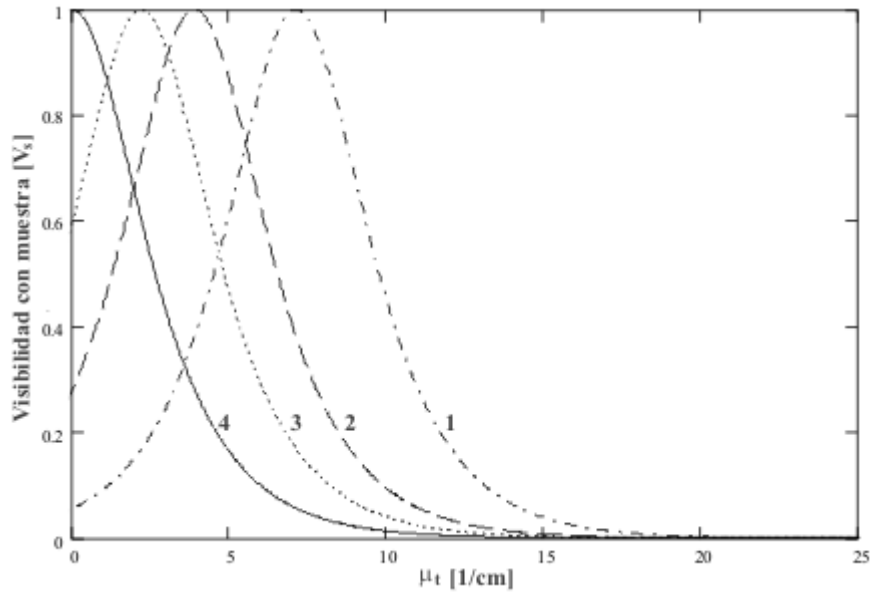
Una consecuencia de este análisis es que la flexibilidad del sistema puede incrementarse. Para llevar esto a cabo, se agregó un polarizador al brazo con la muestra. Dicho componente sirve para regular la potencia en este brazo (debido a que el láser está polarizado linealmente [JDS Uniphase]). Un diagrama del interferómetro de fotones no atenuados, con la implementación del polarizador, se muestra enseguida.



**Fig. 5.13** Diagrama del interferómetro con la implementación del polarizador

El efecto del polarizador se toma como ideal, es decir éste no afecta en nada la distribución del haz. El polarizador solamente induce un decremento en la potencia del láser. Sin embargo un análisis detallado, de las perturbaciones inducidas por este dispositivo, enriquecería el presente estudio.

El comportamiento teórico del sistema, en términos de la disminución en potencia, se muestra en la siguiente gráfica.



**Fig. 5.14** Comportamiento del sistema con un polarizador en el brazo de la muestra

La gráfica 1 representa el comportamiento del sistema mostrado en la figura 5.10, es decir sin polarizador. La gráfica 2 implica una atenuación, en el haz de la muestra, igual al 80%. En la gráfica 3 la disminución es del 91.5%. Por último en la gráfica 4 la potencia, del brazo con muestra, se reduce un 97%.

La figura 5.14 pone de manifiesto el incremento en flexibilidad del sistema. Inicialmente la única información disponible, sobre los coeficientes de atenuación, era la demarcada mediante la gráfica 1. Sin embargo, gracias a la implementación del polarizador (el cual sirve básicamente como un filtro neutro), hemos ampliado el rango de diagnóstico.

En la gráfica 4 de la figura 5.14, observamos que hemos situado la visibilidad máxima para un coeficiente de atenuación nulo (es decir, como si la aportación de la muestra fuera despreciable). Esto implica que la visibilidad, del interferómetro heterodino, sea máxima. Lo anterior debido a que, el interferómetro heterodino equivale al interferómetro de fotones no atenuados para un coeficiente de atenuación igual a cero.

Así pues para encontrar el comportamiento de la muestra, a concentraciones bajas, la visibilidad del sistema heterodino debe ser máxima. Esto debido a que, para dichas condiciones, el

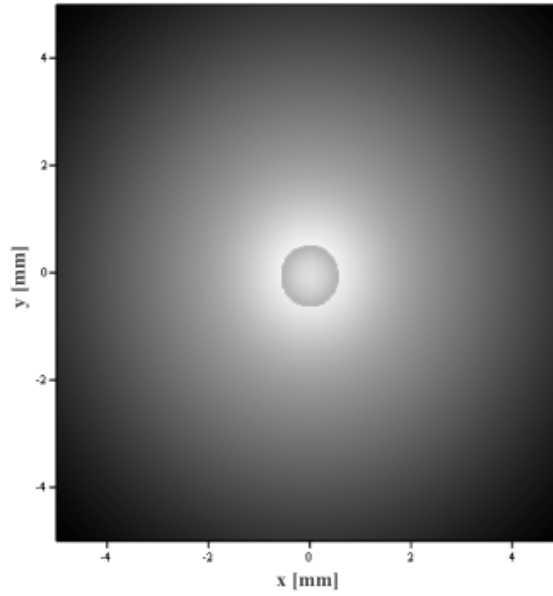
coeficiente de atenuación es proporcional a la concentración [Beer, 1852]. Es decir, los valores del coeficiente de atenuación, para muestras con concentraciones bajas, se encontrarán en la región demarcada por la gráfica 4 en la figura 5.14.

Hasta aquí, el estudio del comportamiento ha sido para un sistema ideal. En este análisis hemos supuesto que el interferómetro cuenta con una visibilidad óptima (es decir, que podemos lograr visibilidades cercanas a la unidad). Sin embargo también hay condiciones que disminuyen la visibilidad del interferómetro. Enseguida estudiamos diversos escenarios que distorsionan el comportamiento del sistema.

#### 5.3.1.1 Condiciones que deterioran la visibilidad del interferómetro

Esta sección aplica tanto para el arreglo heterodino convencional, como para el interferómetro de fotones no atenuados. En la sección anterior se mencionó que, el sistema heterodino puede ser observado como un caso especial del interferómetro de fotones no atenuados. Por lo tanto, las consideraciones de esta sección de la tesis aplican para ambos sistemas.

La visibilidad del interferómetro es crucial para el diagnóstico. Sin embargo existen condiciones que deterioran esta métrica en el interferómetro. El primer escenario involucra diferencias en los diámetros de los haces. Es decir, los haces se consideran perfectamente Gaussianos pero la interacción con los componentes ópticos, implica que el diámetro, en uno de los haces, pueda disminuir. En la siguiente figura mostramos dicho escenario.

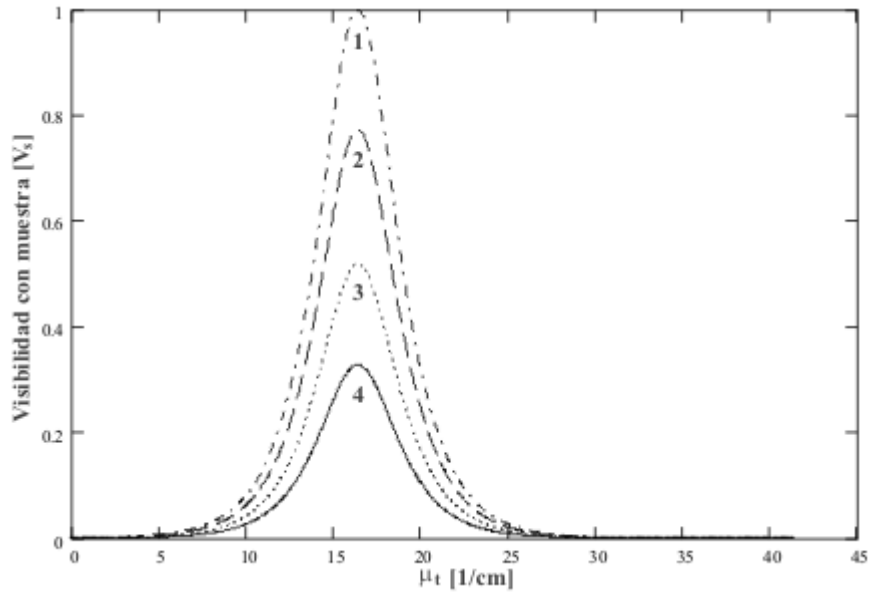


**Fig. 5.15** Deterioro en visibilidad por diferencias en diámetros de los haces

Esta figura enfatiza que si los dos haces no cuentan con el mismo diámetro, entonces el área de interferencia no es máxima. Si el área de interferencia no es máxima, esto redundaría en que la potencia tampoco lo sea. Por lo tanto, la métrica de visibilidad será inferior que en el caso ideal.

Una diferencia grande de camino óptico, en los dos brazos del interferómetro, representa un claro ejemplo de esta condición. En el tercer capítulo demostramos que si esta condición se presentaba, los patrones de interferencia serían circulares (véase la sección 3.4). Esto implica que los diámetros de los haces son diferentes.

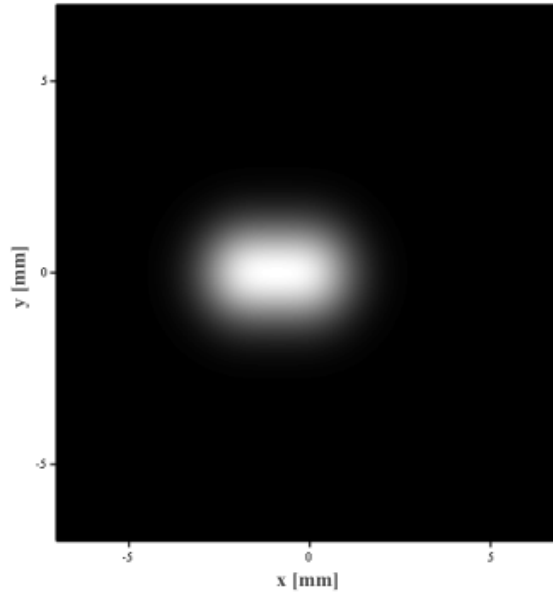
El efecto del deterioro en visibilidad, para el escenario estudiado, se muestra en la siguiente figura.



**Fig. 5.16** Comportamiento del sistema debido al deterioro por diferencias en diámetros

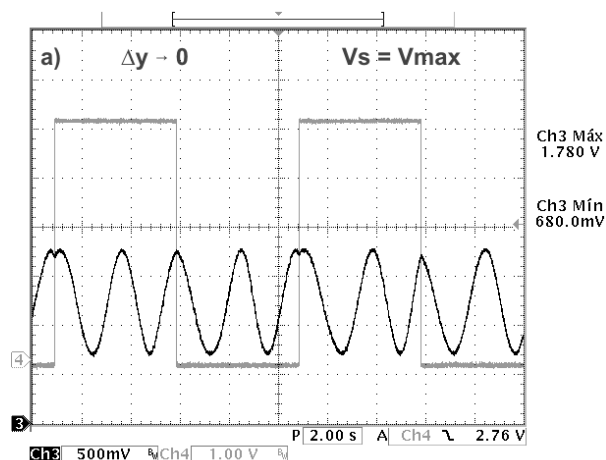
La curva 1 representa el comportamiento del sistema sin diferencia de camino óptico (además, el sistema no cuenta con polarizador). La curva 2 implica una diferencia de 1000 [mm]. En la curva 3 la diferencia es de 2000 [mm]. Por último, la curva 4 simula una diferencia de 3500 [mm]. Estas diferencias son casi imposibles de obtener experimentalmente, debido a la vergencia con la que cuenta el láser. Por otro lado, si se implementara un filtro (refiérase a la sección 3.4.2.2), entonces diferencias pequeñas en el camino óptico traerían consigo este comportamiento. Sin embargo no debemos olvidar la interacción del haz con los componentes ópticos. Dicha interacción bien podría reducir el diámetro de algún haz en el interferómetro. Lo cual redundaría en el comportamiento mostrado en la figura precedente.

Una buena alineación del sistema es muy importante para su correcto desempeño. Este tema ha sido muy recurrente a lo largo del trabajo. La métrica de visibilidad también se ve afectada por deficiencias en la alineación del interferómetro. Más aún, el área de interferencia se optimiza cuando el interferómetro se encuentra alineado. Esto implica que, el mejor comportamiento del sistema, se presenta cuando la alineación es ideal. En la siguiente figura mostramos un escenario en el que, debido a la desalineación del sistema, el área de interferencia no se encuentra maximizada.

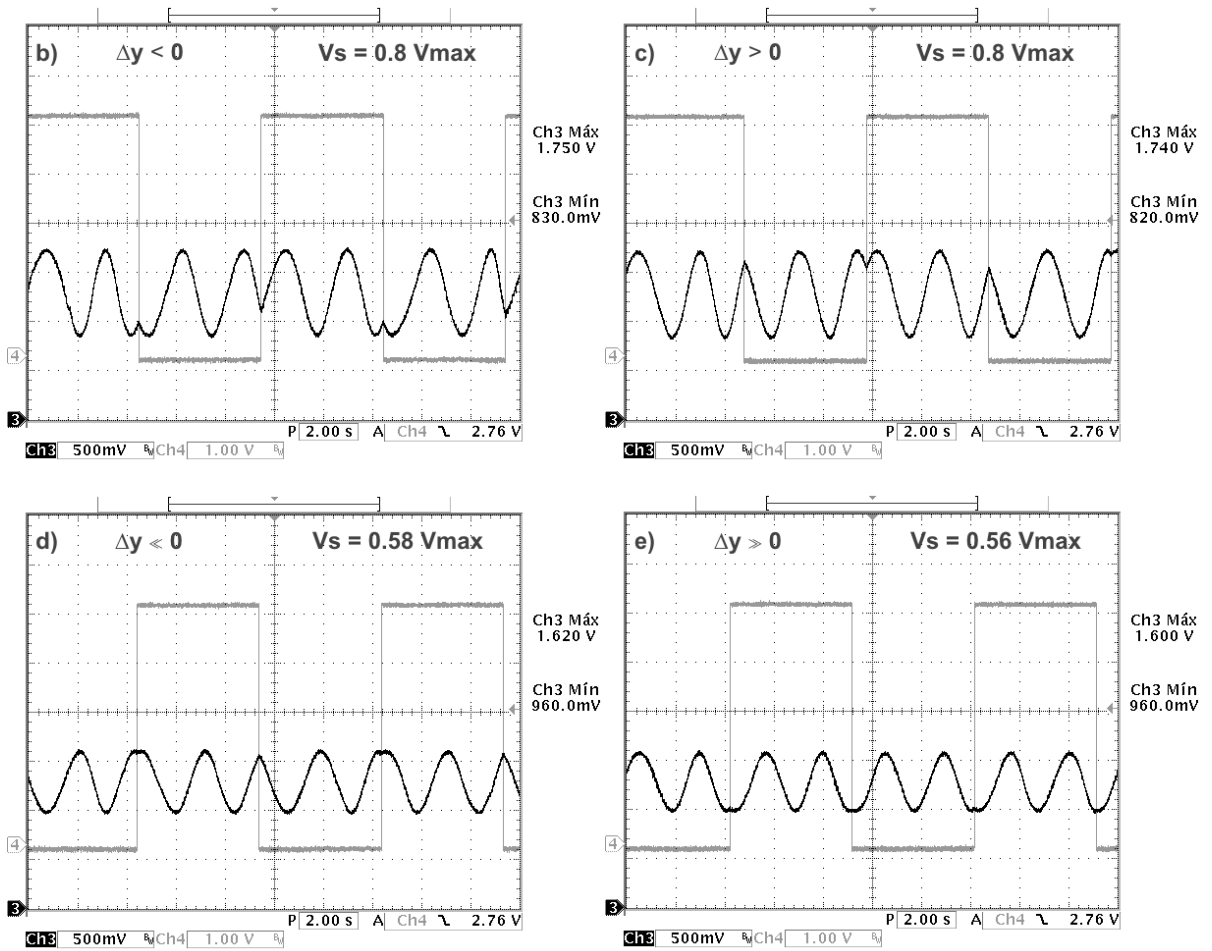


**Fig. 5.17** Deterioro en visibilidad por desalineaciones en el sistema óptico

Mediante esta figura nos damos cuenta que el área de interferencia no es máxima. Por lo tanto, los problemas en la alineación se reflejarán en el desempeño del sistema. Más aún mediante comparaciones de la visibilidad, podemos determinar qué tan bien alineado se encuentra nuestro sistema. Este análisis fue llevado a cabo experimentalmente para verificar la validez del procedimiento de alineación propuesto en el tercer capítulo. La máxima visibilidad del sistema fue obtenida utilizando el filtro de aguja circular. Esto comprueba que nuestro método de alineación funciona correctamente. En la siguiente figura mostramos estos resultados.





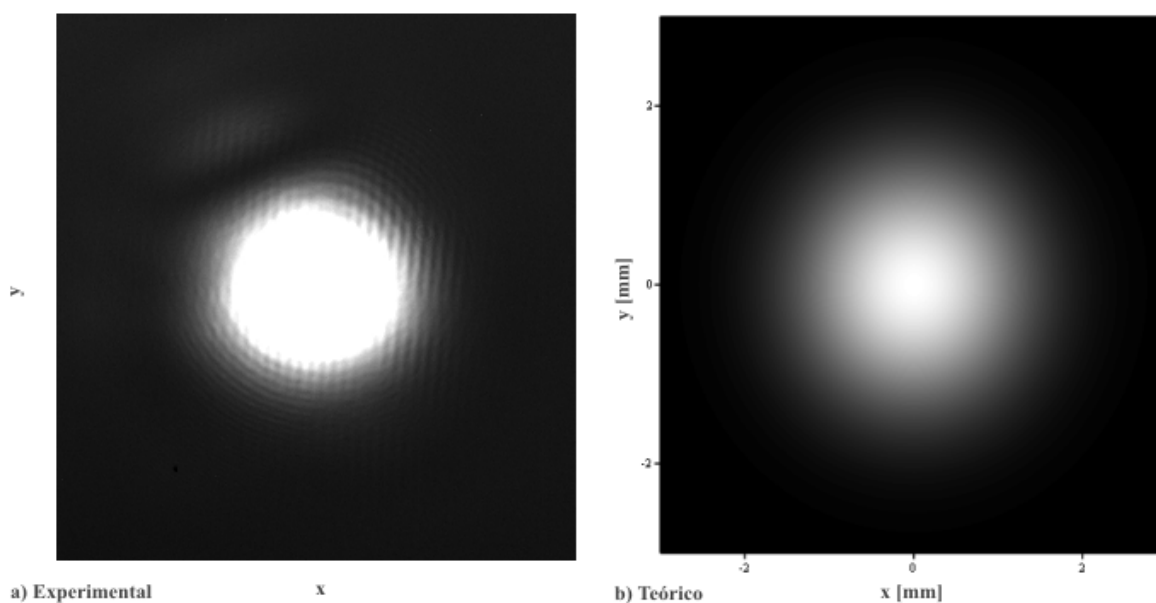


**Fig. 5.18** Comportamiento experimental debido al deterioro por desalineaciones

En la figura 5.18 el escenario a) muestra el comportamiento luego de haber alineado el sistema usando el método propuesto (véase la sección 3.4). La visibilidad del interferómetro se tomó como máxima para esta condición ( $V_s = V_{max}$ ). Una pequeña desalineación en la dirección vertical (tanto en la dirección positiva como en la negativa) propició una disminución en la visibilidad del sistema, refiérase a los escenarios b) y c). Una desviación mayor, en la misma dirección, limitó aún más la visibilidad del sistema, escenarios d) y e). Por lo tanto, nuestro sistema presenta el mejor comportamiento después de llevar a cabo el procedimiento de alineación. Esto comprueba la efectividad del método de alineación propuesto.

El punto importante de este análisis es el siguiente; la alineación del sistema debe ser optimizada para asegurar que la visibilidad sea máxima. Esto a su vez redundará en una mayor sensibilidad del dispositivo, para llevar a cabo el diagnóstico.

Hasta el momento hemos analizado tres escenarios distintos, que podrían limitar la visibilidad del sistema. Dos de ellos involucran decrementos en el diámetro del haz. Mientras que el último implica deficiencias en la alineación del sistema. Otro aspecto que puede deteriorar la visibilidad del sistema, tiene que ver con la distribución del haz. En nuestro análisis hemos asumido que el haz es perfectamente Gaussiano. Sin embargo, en el tercer capítulo demostramos que, en la práctica, esto no es así. Incluso propusimos un filtro con transmitancia Gaussiana para mejorar la distribución del haz (refiérase a la sección 3.4.1.2). En la siguiente figura presentamos la distribución teórica y práctica del haz Gaussiano.



**Fig. 5.19** Comparación entre la distribución experimental y teórica del haz Gaussiano

Nuevamente enfatizamos que, la distribución experimental dista de ser perfectamente Gaussiana. Por lo tanto, el área de los haces no tiene que ser igual. Esto redundará en una menor área de interferencia y, por ende, en un deterioro en la visibilidad.

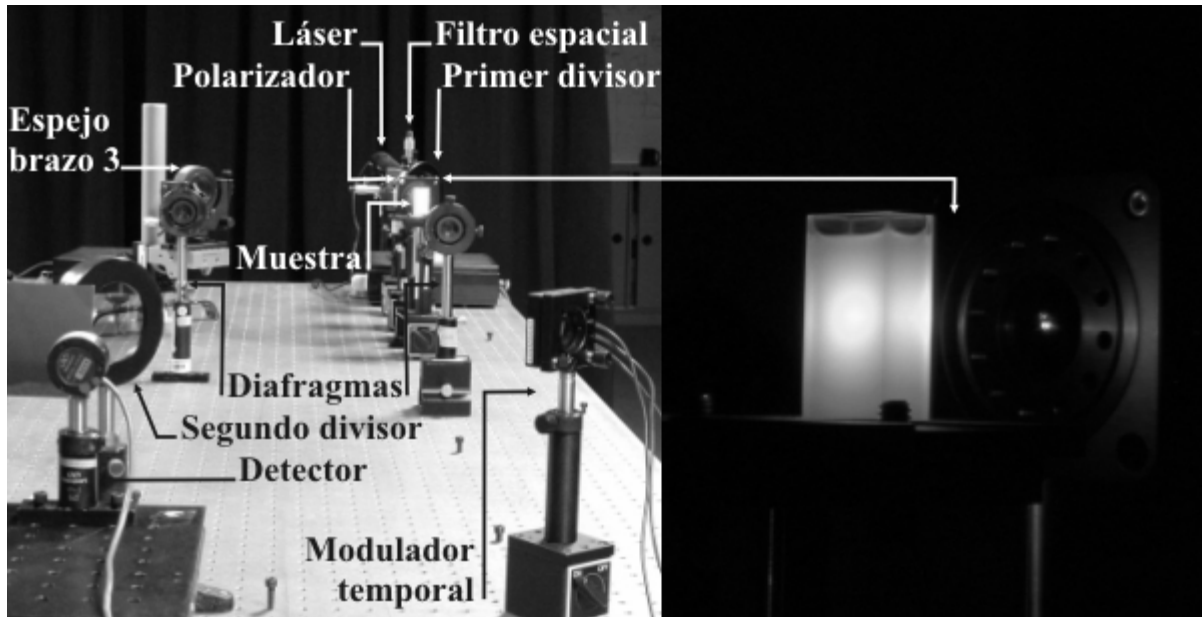
Los escenarios que deterioran la visibilidad del sistema son diversos. Esto debe tomarse en cuenta para el análisis experimental del interferómetro. A continuación presentaremos tanto el arreglo experimental, como los resultados de esta tesis.

### *5.3.2 Arreglo y resultados para el interferómetro de fotones no atenuados*

En esta sección presentaremos los resultados experimentales que comprueban el comportamiento del interferómetro de fotones no atenuados. La presentación del análisis experimental se dividirá en tres temas principales. Como primer punto una discusión, sobre el arreglo experimental implementado en el laboratorio, será llevada a cabo. En ésta detallaremos la manera utilizada para preparar las muestras. La segunda parte se enfocará a la comprobación de la expresión de Beer. Es decir el comportamiento proporcional, entre el coeficiente de atenuación y la concentración de la muestra, será validado. El último punto que se abordará será una comprobación del comportamiento estudiado en la sección precedente. En específico se obtendrán gráficas de visibilidad en función del coeficiente de extinción de la muestra. El arreglo experimental del interferómetro de fotones no atenuados será estudiado a continuación.

#### *5.3.2.1 Arreglo experimental y preparación de muestras*

El arreglo experimental, utilizado para la interferometría de fotones no atenuados, es casi idéntico al presentado en el capítulo anterior. Básicamente dos diferencias distinguen a estos dispositivos: la muestra por analizar y el polarizador para flexibilizar el sistema. En la siguiente figura mostramos el arreglo experimental del interferómetro de fotones no atenuados.



**Fig. 5.20** Arreglo experimental para el interferómetro de fotones no atenuados

En esta figura se pone énfasis en los componentes nuevos que conforman al interferómetro de fotones no atenuados. En el segundo capítulo se estudiaron los procesos ópticos más preponderantes en la propagación de luz en tejido. Más aún, al inicio de este capítulo se mencionó que el esparcimiento (en comparación con la absorción) contribuye de manera más significativa a la atenuación de luz en tejidos. Además, en la región del infrarrojo cercano, la contribución de la absorción es despreciable [Fantini *et al*, 2002].

La leche no presenta absorción característica en la parte visible del espectro (400 – 700 nm), [Alais, 1998]. El proceso de homogenización, de la materia grasa de la leche, dispersa los glóbulos grasos en fragmentos muy pequeños. Éstos no vuelven a aglutinarse bajo condiciones normales. Más aún las emulsiones de lípidos, así como las proteínas coloidales, generan los procesos de esparcimiento en la leche [Tuchin, 2002]. Es decir, la leche se comporta como un medio esparcidor en la región visible del espectro. De manera análoga, los tejidos se comportan como medios esparcidores en la región infrarroja del espectro [Fantini *et al*, 2002]. Por lo tanto, para este análisis propusimos la utilización de leche homogeneizada y semi-descremada como símil de tejido.

Las muestras se diluyeron con agua destilada. El agua destilada fue utilizada ya que no aporta ni partículas absorbentes ni esparcidoras. Las pruebas fueron realizadas para diferentes porcentajes en volumen de leche (micro litros de leche por cada 10 mililitros de solución) [Burns, 1996]. Un matraz de 10 ml fue utilizado para mezclar los compuestos. El primer paso, para formar una muestra, implicó el vaciado del volumen de leche para la concentración dada. Posteriormente se llenaba completamente el matraz con agua destilada. Esta suspensión se mezclaba, en una mesa agitadora (alrededor de 5 minutos), para uniformizar la muestra. Por último, la muestra era vaciada en la celda de cuarzo para efectuar las mediciones. En la siguiente figura se presenta una de las pruebas en la mesa agitadora.



**Fig. 5.21** Homogenización del símil de tejido

Este fue el procedimiento seguido para formar las pruebas. Cabe mencionar que una aplicación pretendida con el interferómetro, es la comparación de muestras con coeficientes de extinción ya conocidos. Para efectuar esta comparación, nosotros proponemos utilizar Intralipid 10% como símil de tejido. Lo anterior debido a que las características ópticas de esta emulsión intravenosa, han sido ampliamente estudiadas [Star *et al*, 1987], [Moes *et al*, 1989], [van

Staveren *et al*, 1991], [Flock *et al*, 1992]. Esta comparación será parte esencial del trabajo a futuro, que se desprende de esta tesis. Enseguida mostramos el comportamiento del sistema para concentraciones bajas de leche.

### 5.3.2.2 Relación entre concentración y coeficiente de atenuación

Para concentraciones bajas, el coeficiente de atenuación de una muestra es linealmente proporcional a su concentración [Schmidt, 1999]. Nosotros proponemos encontrar esta relación de proporcionalidad, como comprobación de la interferometría de fotones no atenuados. En la sección 5.2.3.1 obtuvimos las relaciones experimentales para determinar los coeficientes de atenuación de la muestra. Debido a la importancia de estas relaciones, para la comprobación del comportamiento proporcional, éstas se replantean enseguida (expresiones 5.2.31).

$$P_D^{\max}(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d} + P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}; \quad P_D^{\min}(t) = P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d} - P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}$$

$$V_s(\mu_t) = \frac{P_{35} \tau e^{-\frac{\mu_1 d}{2}}}{P_3 + P_5 \tau^2 e^{-\mu_1 d}} \quad \therefore \quad P_5 V_s \tau^2 q^2 - P_{35} \tau q + P_3 V_s = 0; \quad \text{si } q = e^{-\frac{\mu_1 d}{2}} \quad \therefore$$

$$\mu_{t_{-,+}} = -\frac{2}{d} \ln(q_{+,-}) = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_s^2}}{2\tau P_5 V_s} \right] \quad (5.3.9)$$

Los valores del coeficiente de extinción dependen únicamente de la potencia. Sin embargo es necesario conocer el espesor de la muestra y las pérdidas de Fresnel del recipiente. Esta información se encuentra contenida en la figura 5.10.

En la sección 5.3.1 propusimos la implementación de un polarizador para incrementar la flexibilidad del sistema. Además mostramos que, cuando el interferómetro heterodino presenta visibilidad máxima, el comportamiento de la muestra a bajas concentraciones puede ser estudiado (refiérase a la figura 5.14). Por lo tanto, la obtención del comportamiento experimental implicó, primeramente, la maximización de la visibilidad en el interferómetro heterodino. Los

datos experimentales para el rango de  $800-1500 \left[ \frac{\mu\text{l}}{10\text{ml}} \right]$ , con intervalos de  $100 \left[ \frac{\mu\text{l}}{10\text{ml}} \right]$ , se muestran en la siguiente tabla.

$$P_3 = 0.134 \text{ [mW]}; \quad P_5 = 0.134 \text{ [mW]}; \quad V = 0.56; \quad P_{35} = 0.15 \text{ [mW]}$$

Concentración $\left[ \frac{\mu\text{l}}{10\text{ml}} \right]$	Coefficiente de atenuación $\left[ \frac{1}{\text{cm}} \right]$	Visibilidad con muestra
800	4.390	0.119
900	4.647	0.105
1000	4.843	0.096
1100	5.069	0.086
1200	5.329	0.075
1300	5.440	0.071
1400	5.679	0.063
1500	5.916	0.056

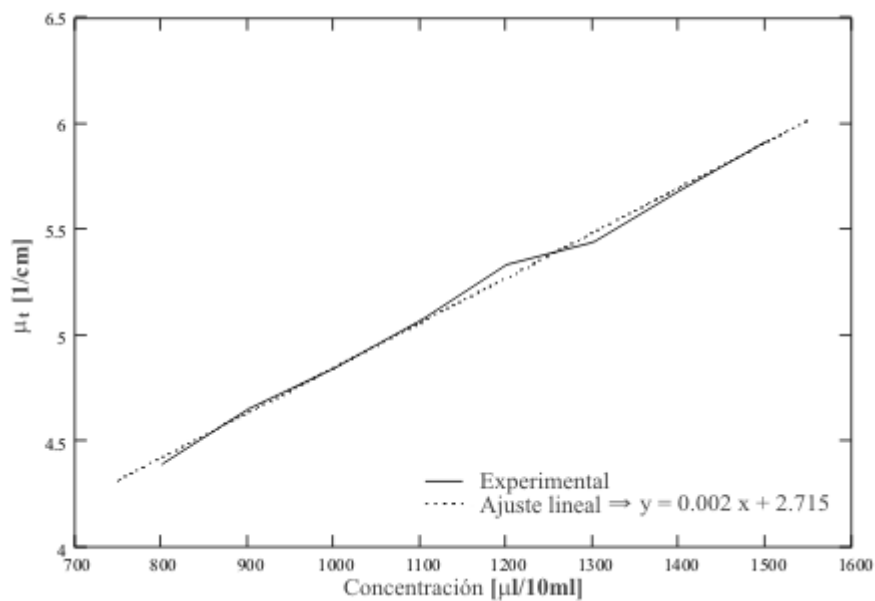
**Tabla 5.1** Datos experimentales para comprobar la relación de Beer

Las potencias en cada uno de los brazos, cuando el otro se encuentra obstruido, son idénticas ( $P_3 = P_5$ ). Esto quiere decir que nuestro sistema se encuentra centrado, para el coeficiente de atenuación nulo (véase la figura 5.14).

Mediante la utilización de la expresión 5.3.9 obtenemos dos coeficientes de atenuación. La elección del coeficiente que describe el comportamiento es muy simple. Uno de estos coeficientes es negativo. Un coeficiente de atenuación negativo significaría que tenemos incrementos en la intensidad, en lugar de decrementos. Esto no es físicamente lógico. Por lo tanto, solamente el coeficiente positivo cuenta con información física significativa. Esta observación justifica la aparición de un solo coeficiente de atenuación en la tabla precedente.

La visibilidad óptima del interferómetro heterodino fue menor a la unidad ( $V = 0.56$ ). Una causa, que justifica esta condición, es la distribución Gaussiana no ideal del haz láser (refiérase a la sección 5.3.1.1). Además la visibilidad con muestra decrece conforme la concentración, del símil de tejido, es aumentada. Este comportamiento es justamente el que esperábamos, de acuerdo a la simulación presentada en la figura 5.14.

La información de la tabla 5.1 permite determinar el comportamiento del coeficiente de atenuación en función de la concentración. Dicho comportamiento se muestra en la siguiente figura.



**Fig. 5.22** Relación experimental entre el coeficiente de atenuación y la concentración

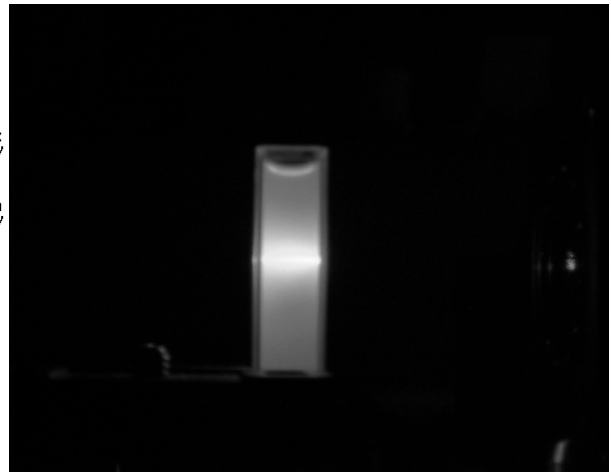
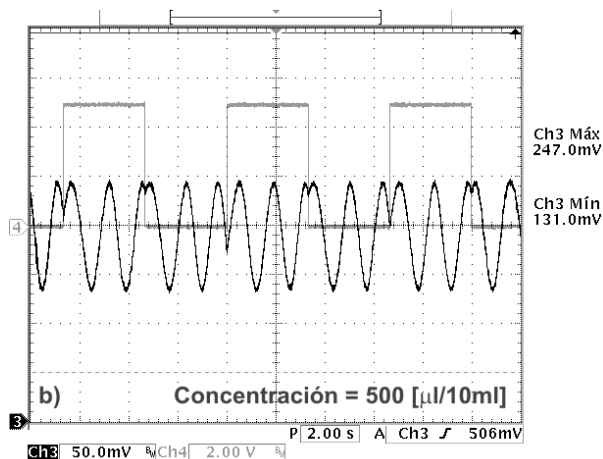
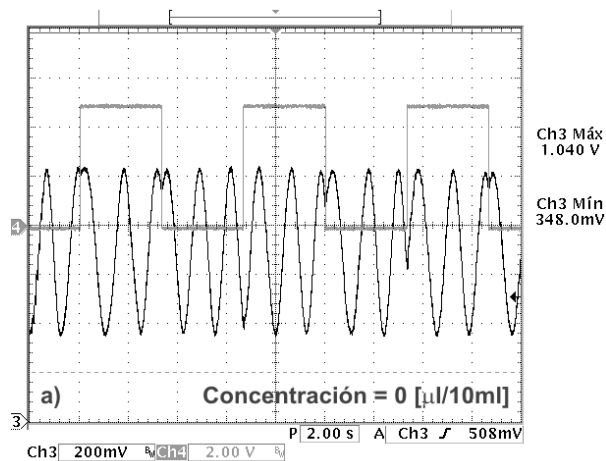
El comportamiento lineal es claramente perceptible. El ajuste lineal facilita análisis posteriores de la muestra. La ventaja es que, los coeficientes de atenuación, pueden determinarse simplemente sustituyendo el valor de concentración en la relación lineal. Sin embargo, falta determinar la precisión con la que los coeficientes de atenuación fueron encontrados. Este análisis se posterga hasta la sección 5.4. En dicho estudio encontraremos deficiencias claras en el sistema de detección utilizado. No obstante el comportamiento, de la relación de Beer, ha sido comprobado. Enseguida analizaremos el comportamiento de la visibilidad del interferómetro, en función del coeficiente de atenuación de la muestra.

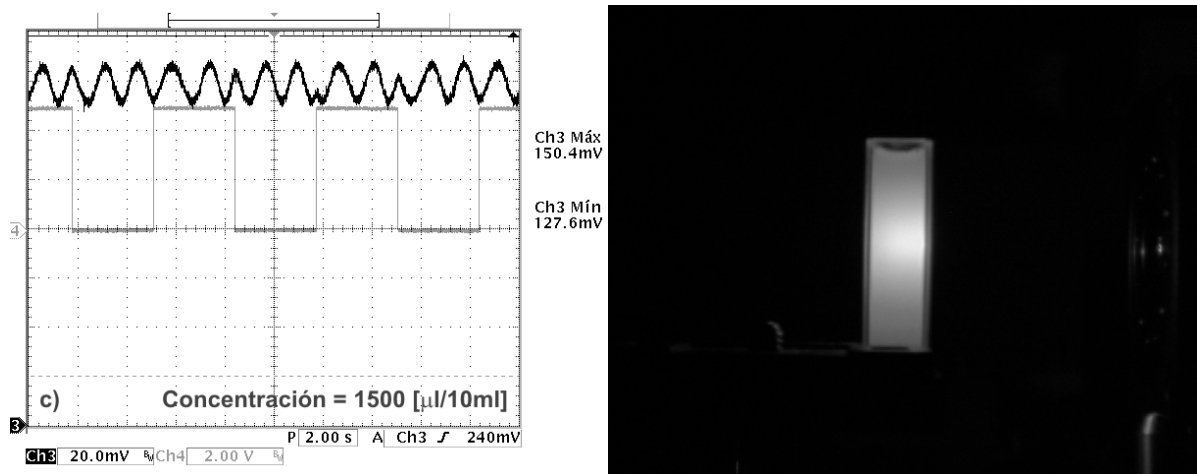


### 5.3.2.3 Desempeño experimental del interferómetro de fotones no atenuados

En esta última sección vamos a comprobar el comportamiento del interferómetro de fotones no atenuados. La visibilidad, como función del coeficiente de atenuación, es la información que obtenemos mediante nuestro sistema óptico (refiérase a la sección 5.3.1).

La secuencia, para determinar el comportamiento de una muestra, implica primero la obtención de la visibilidad del interferómetro sin muestra. Posteriormente la muestra, con sus diferentes grados de atenuación, se incorpora al interferómetro. Con la muestra, nuevamente se obtiene la información de visibilidad. La relación entre visibilidad y coeficiente de atenuación obtenida de esta manera, conforma el comportamiento del sistema para la muestra dada. En el siguiente juego de gráficas mostramos el comportamiento del sistema conforme se va incrementando la atenuación de la muestra.





**Fig. 5.23** Comportamiento experimental para incrementos en la atenuación de la muestra

Las gráficas de esta figura, ponen de manifiesto el comportamiento esperado del sistema. Es decir conforme se aumenta la atenuación de la prueba (véase la diferencia, de brillo, en las fotos de la muestra), la visibilidad del interferómetro disminuye. La visibilidad es fácilmente obtenida de los valores de voltaje máximo y mínimo presentados en las gráficas (refiérase a la sección 4.4.3). Más aún, los aumentos en atenuación fueron generados mediante incrementos en la concentración del símil de tejido. La muestra utilizada, tanto para la ejemplificación del procedimiento como para las mediciones experimentales, fue leche semi-descremada.

La ejemplificación, del procedimiento de análisis, fue realizada a una frecuencia de modulación diferente ( $\nu = 150$  mHz). La respuesta del modulador temporal, a un incremento en frecuencia, es muy buena. Este aumento no deteriora la alineación del sistema. Sin embargo, la implementación de un modulador electro-óptico aseguraría un incremento, en frecuencia, más sustancial. Lo anterior debido a que tanto la frecuencia de resonancia de los piezoeléctricos, como la dificultad para alinear dinámicamente el sistema, restringen al modulador mecánico. Cabe mencionar que los resultados experimentales (tanto de la sección pasada como de la presente) fueron obtenidos con el mismo arreglo experimental. Es decir, utilizando la frecuencia de modulación de 100 mili hertz. Aquí solamente queríamos mostrar que el sistema se comporta como esperamos aún incrementando la frecuencia de modulación.

La obtención del comportamiento del sistema implicó múltiples adquisiciones de patrones, como los presentados en la figura 5.23. A continuación se presentan, de manera tabulada, los resultados experimentales.

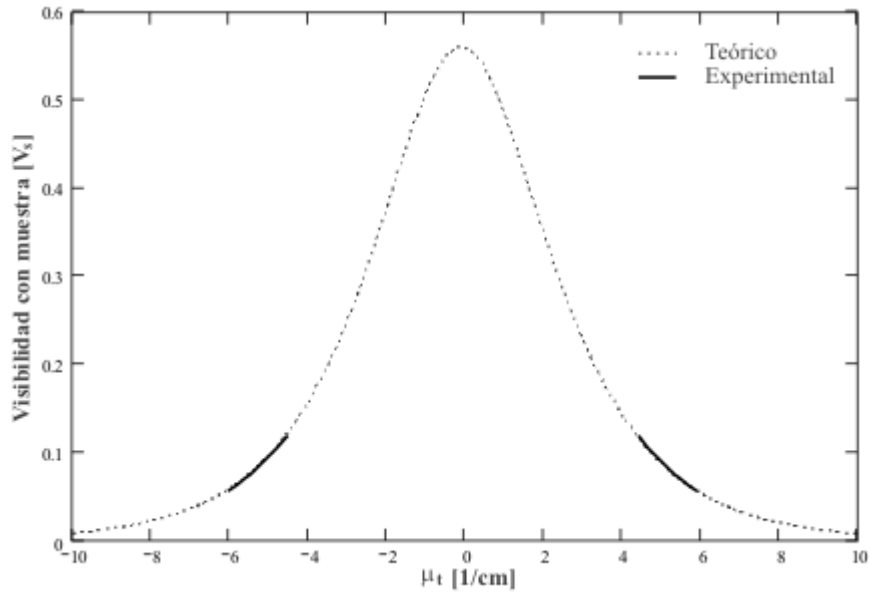
$$P_3 = 0.134 \text{ [mW]}; \quad P_5 = 0.134 \text{ [mW]}; \quad V = 0.56; \quad P_{35} = 0.15 \text{ [mW]}$$

$c \left[ \frac{\mu\text{l}}{10\text{ml}} \right]$	$P_{\text{max}} \text{ [mW]}$	$P_{\text{min}} \text{ [mW]}$	$V_s$	$\mu_- \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right]$	$\mu_+ \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right]$
800	150	118	0.119	-4.535	4.390
900	147	119	0.105	-4.792	4.647
1000	149	123	0.096	-4.988	4.843
1100	146	123	0.086	-5.214	5.069
1200	143	123	0.075	-5.474	5.329
1300	143	124	0.071	-5.585	5.440
1400	143	126	0.063	-5.824	5.679
1500	141	126	0.056	-6.061	5.916

**Tabla 5.2** Datos experimentales para comprobar el comportamiento del sistema

Aquí los coeficientes de extinción se obtuvieron empleando la relación 5.3.9. Esta relación entrega resultados negativos, cuando el argumento del logaritmo natural es mayor a la unidad (es decir, cuando el signo de la ecuación cuadrática es positivo). Por otro lado, los coeficientes positivos se encuentran cuando el argumento del logaritmo natural es menor a la unidad (esta condición se presenta cuando el signo de la ecuación cuadrática es negativo). Esta aclaración ayuda a entender la supuesta contradicción, en los signos de los subíndices de esta relación.

La sustentación del modelo matemático, mediante el comportamiento experimental, se obtiene con la información de la tabla 5.2. Este resultado, que comprueba la factibilidad de la interferometría de fotones no atenuados, se presenta en la siguiente figura.



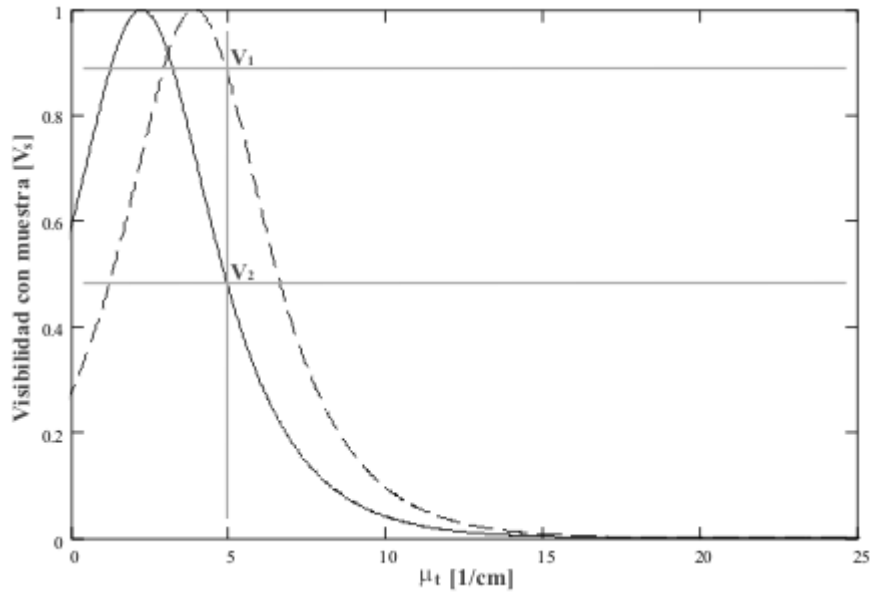
**Fig. 5.24** Comprobación del diagnóstico mediante interferometría de fotones no atenuados

El comportamiento presenta la tendencia prevista por el modelo teórico. Un mayor rango de mediciones, para coeficientes de atenuación pequeños, es necesario para obtener el comportamiento general.

Para asegurar la precisión de los coeficientes de atenuación encontrados, un estudio de sensibilidad fue llevado a cabo. Debido a que la única medición necesaria, para llevar a cabo el diagnóstico, es la potencia. Ésta se observó como el parámetro esencial de análisis. Así pues, un estudio de incertidumbres en el sistema de detección fue llevado a cabo. Este análisis, presentado a continuación, conforma la última aportación de la tesis.

#### **5.4 Análisis de incertidumbres en el sistema de detección**

La implementación de un polarizador al arreglo aumentó la flexibilidad de éste (refiérase a la sección 5.3.1). Gracias a dicho componente, el mismo valor del coeficiente de atenuación de la muestra puede obtenerse con dos visibilidades distintas en el interferómetro. La figura siguiente pone de manifiesto esta ventaja del sistema óptico.



**Fig. 5.25** Obtención del mismo coeficiente de atenuación para dos visibilidades distintas

En esta figura el coeficiente de atenuación de la muestra ( $\mu_t = 5$ ) puede ser determinado en dos visibilidades distintas ( $V_1 \approx 0.9$ ,  $V_2 \approx 0.5$ ). Sin embargo, los valores experimentales, para el coeficiente de extinción, no eran iguales. Además el sistema no respondía adecuadamente a incrementos pequeños en concentración. Estos dos aspectos nos motivaron para llevar a cabo un estudio de incertidumbres en el sistema de detección.

Enseguida mostramos el modelo matemático experimental. Éste forma la base de nuestro análisis de incertidumbres. La referencia central utilizada para el análisis de incertidumbres es el libro de [Taylor, 1981].

$$\mu_{t_{+,-}} = -\frac{2}{d} \ln(q_{+,-}) = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right]$$

$$V = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}}$$

$$P_{35} = V(P_3 + P_5) \tag{5.4.1}$$

Las fuentes de error se asumieron independientes y aleatorias. Los errores independientes y aleatorios demarcan un límite inferior, en cuanto a la incertidumbre de la medición. Por lo tanto, el análisis que sigue entrega la incertidumbre mínima para los coeficientes de extinción. La nomenclatura utilizada, para este análisis, se explica enseguida.

$$P_3 = P_3 [\text{mW}] \pm \delta P_3 [\text{mW}] = P_3 [\text{mW}] \pm \frac{\delta P_3}{|P_3|} \% = P_3 [\text{mW}] \pm \phi P_3 \% \quad (5.4.2)$$

Aquí  $\delta P_3$  representa una incertidumbre absoluta. Las unidades, entre el valor medido y la incertidumbre absoluta, son idénticas. Por el contrario,  $\phi P_3 = \delta P_3 / |P_3|$  representa una incertidumbre fraccional o relativa. Ésta, en contraste con la primera, es adimensional. La incertidumbre absoluta se obtiene multiplicando el valor medido, por su incertidumbre fraccional. Mientras que la incertidumbre relativa implica la división de la incertidumbre absoluta, entre el valor medido.

Las operaciones matemáticas entre cantidades con incertidumbres implican la utilización, tanto de incertidumbres absolutas como fraccionales. Por esto es importante la notación.

En el cuarto capítulo hicimos énfasis en que, la precisión del foto-detector utilizado era igual a  $\pm 2\%$  del valor desplegado en el radiómetro [Newport, 1992 B]. Más aún también mencionamos que, la conversión digital a analógica incrementa, en un  $0.5\%$ , la incertidumbre en las lecturas [Newport, 1992 B].

El modelo matemático necesita los valores de potencia en cada uno de los brazos, cuando el otro está tapado. Estos valores, con su incertidumbre asociada, se presentan enseguida.

$$P_3 = P_3 [\text{mW}] \pm \delta P_3 [\text{mW}] = P_3 [\text{mW}] \pm \phi P_3 \% = P_3 [\text{mW}] \pm 2\% \quad (5.4.3)$$

$$P_5 = P_5 [\text{mW}] \pm \delta P_5 [\text{mW}] = P_5 [\text{mW}] \pm \phi P_5 \% = P_5 [\text{mW}] \pm 2\% \quad (5.4.4)$$

La visibilidad del interferómetro se obtuvo después de la conversión digital a analógica de la señal. Esto incrementa, en un 0.5%, las incertidumbres para la potencia. A continuación mostramos los valores para la potencia máxima y mínima del interferómetro modulado.

$$P_{\max} = P_{\max} [\text{mW}] \pm \delta P_{\max} [\text{mW}] = P_{\max} [\text{mW}] \pm \phi P_{\max} \% = P_{\max} [\text{mW}] \pm 2.5\% \quad (5.4.5)$$

$$P_{\min} = P_{\min} [\text{mW}] \pm \delta P_{\min} [\text{mW}] = P_{\min} [\text{mW}] \pm \phi P_{\min} \% = P_{\min} [\text{mW}] \pm 2.5\% \quad (5.4.6)$$

La recurrencia de la visibilidad en el análisis, asegura que ésta es la variable más crítica en nuestro análisis. Más aún la mayor incertidumbre, en los parámetros que la conforman, comprueba su criticidad. La obtención de la visibilidad implica una operación de suma, resta y división (refiérase a las expresiones 5.4.1). Las incertidumbres absolutas se suman en cuadratura para las operaciones de suma y resta. Mientras tanto, las incertidumbres fraccionales se suman en cuadratura para las operaciones de multiplicación y división. Cabe mencionar que, si los errores no fueran independientes y aleatorios, las incertidumbres se sumarían algebraicamente. La relación de visibilidad para el interferómetro sin y con muestra, así como su incertidumbre asociada, se muestran a continuación.

$$V = \left( \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \right) \pm \sqrt{\frac{\delta P_{\max}^2 + \delta P_{\min}^2}{(P_{\max} + P_{\min})^2} + \frac{\delta P_{\max}^2 + \delta P_{\min}^2}{(P_{\max} - P_{\min})^2}} = V \pm \phi V \quad (5.4.7)$$

$$V_s = \left( \frac{P_{\max}^S - P_{\min}^S}{P_{\max}^S + P_{\min}^S} \right) \pm \sqrt{\frac{(\delta P_{\max}^S)^2 + (\delta P_{\min}^S)^2}{(P_{\max}^S + P_{\min}^S)^2} + \frac{(\delta P_{\max}^S)^2 + (\delta P_{\min}^S)^2}{(P_{\max}^S - P_{\min}^S)^2}} = V_s \pm \phi V_s \quad (5.4.8)$$

La incertidumbre resultante de esta operación es fraccional. Esto se debe a que la división es la última operación que se efectúa.

Solamente en estas expresiones utilizamos las potencias para describir la visibilidad. Esta notación es engorrosa y puede ser confusa. Por lo tanto, optamos por mantener las letras V y  $V_s$ , para describir las visibilidades con y sin muestra, respectivamente.

Con las relaciones 5.4.3, 5.4.4 y 5.4.7 podemos obtener el parámetro  $P_{35}$  (refiérase a la ecuación 5.4.1).

$$P_{35} = (P_3 + P_5) V \pm \sqrt{\frac{\delta P_3^2 + \delta P_5^2}{(P_3 + P_5)^2} + \phi V^2} = P_{35} \pm \phi P_{35} \quad (5.4.9)$$

Nuevamente la incertidumbre, para la variable  $P_{35}$ , es fraccional. Todos los parámetros necesarios, para determinar los coeficientes de atenuación, ya son conocidos. Más aún, el denominador del argumento logarítmico es fácil de encontrar (refiérase a las relaciones 5.4.1).

$$2\tau P_5 V_s = 2\tau P_5 V_s \pm \sqrt{\left(\frac{\delta P_5}{P_5}\right)^2 + \phi V_s^2} = 2\tau P_5 V_s \pm \sqrt{\phi P_5^2 + \phi V_s^2} \quad (5.4.10)$$

Aquí debemos mencionar que, la multiplicación de una constante por una cantidad con incertidumbre fraccional, no modifica a la incertidumbre de la última. Además, la incertidumbre en el denominador es fraccional, ya que la última operación es una multiplicación.

La evaluación del numerador, en el argumento logarítmico, es más elaborada. Para facilitar su referencia, esta relación se repite a continuación.

$$\mu_{t_{+,-}} = -\frac{2}{d} \ln(q_{+,-}) = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_s^2}}{2\tau P_5 V_s} \right] \quad (5.4.11)$$

La incertidumbre de una cantidad, a la cual se le aplica alguna función matemática, se encuentra derivando dicha función. Este resultado se multiplica por la incertidumbre absoluta de la cantidad involucrada. En breve, la expresión matemática se muestra a continuación.

$$\alpha \pm \delta\alpha = f(q \pm \delta q); \quad \alpha = f(q); \quad \delta\alpha = \left| \frac{df(q)}{dq} \right| \delta q \quad (5.4.12)$$



Esta relación es importante ya que necesitamos conocer, tanto el caso de un valor elevado a una potencia, como el correspondiente a una función logarítmica. Enseguida mostramos el detalle para una cantidad, con incertidumbre, elevada a una potencia.

$$\alpha \pm \delta\alpha = (q \pm \delta q)^n; \quad \alpha = q^n; \quad [\delta\alpha = |n q^{n-1}| \delta q] \frac{|\alpha|}{|q^n|}; \quad \therefore \frac{\delta\alpha}{|\alpha|} = |n| \frac{\delta q}{|q|} \quad \text{ya que} \quad \frac{|\alpha|}{|q^n|} = 1 \quad (5.4.13)$$

$$\text{si } n = 2 \quad \therefore \quad \alpha \pm \frac{\delta\alpha}{|\alpha|} = q^2 \pm 2 \frac{\delta q}{|q|} \quad \therefore \quad \alpha \pm \varphi\alpha = q^2 \pm 2\varphi q \quad (5.4.14)$$

$$\text{si } n = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \alpha \pm \frac{\delta\alpha}{|\alpha|} = \sqrt{q} \pm \frac{1}{2} \frac{\delta q}{|q|} \quad \therefore \quad \alpha \pm \varphi\alpha = \sqrt{q} \pm \frac{1}{2}\varphi q \quad (5.4.15)$$

Las expresiones 5.4.14 y 5.4.15 son particularizaciones del caso general (ecuación 5.4.13). La primera relación permite evaluar el cuadrado de una cantidad con incertidumbre. La segunda se aplica cuando una raíz cuadrada se ve involucrada. Ambos casos son necesarios para evaluar el numerador del argumento logarítmico (refiérase a la relación 5.4.1). Enseguida se presenta el resultado, del término cuadrático de potencia, para la expresión 5.4.11.

$$P_{35}^2 = [(P_3 + P_5)V]^2 \pm 2 \sqrt{\frac{\delta P_3^2 + \delta P_5^2}{(P_3 + P_5)^2} + \varphi V^2} = P_{35}^2 \pm 2\varphi P_{35} \quad (5.4.16)$$

La incertidumbre, para esta última expresión, es fraccional. El término que involucra tanto a  $P_3$  como a  $P_5$  (en la relación 5.4.11), se muestra a continuación.

$$4P_3 P_5 V_S^2 = 4P_3 P_5 V_S^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\delta P_3}{P_3}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_5}{P_5}\right)^2 + (2\varphi V_S)^2} = 4P_3 P_5 V_S^2 \pm \sqrt{\varphi P_3^2 + \varphi P_5^2 + 4\varphi V_S^2} \quad (5.4.17)$$

De igual manera que la relación 5.4.16, esta expresión cuenta con una incertidumbre fraccional.

La raíz en la expresión 5.4.11, se efectúa sobre la diferencia de las relaciones 5.4.16 y 5.4.17. Las relaciones 5.4.16 y 5.4.17 cuentan con incertidumbres fraccionales. Sin embargo, las incertidumbres absolutas se suman en cuadratura para las operaciones de suma y resta. A continuación mostramos las relaciones 5.4.16 y 5.4.17 con su incertidumbre absoluta, así como la resta de ambas.

$$P_{35}^2 = [(P_3 + P_5)V]^2 \pm 2[(P_3 + P_5)V]^2 \sqrt{\frac{\delta P_3^2 + \delta P_5^2}{(P_3 + P_5)^2} + \phi V^2} = P_{35}^2 \pm 2P_{35}^2 \phi P_{35} \quad (5.4.18)$$

$$\begin{aligned} 4P_3 P_5 V_S^2 &= 4P_3 P_5 V_S^2 \pm 4P_3 P_5 V_S^2 \sqrt{\left(\frac{\delta P_3}{P_3}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_5}{P_5}\right)^2 + (2\phi V_S)^2} \\ &= 4P_3 P_5 V_S^2 \pm 4P_3 P_5 V_S^2 \sqrt{\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2} \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

$$P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2 = P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2 \pm 2\sqrt{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)} \quad (5.4.20)$$

La raíz, de una cantidad con incertidumbre, fue obtenida previamente (refiérase a la expresión 5.4.15). La obtención de la raíz, implica que la incertidumbre de la cantidad sea fraccional. Por lo tanto, necesitamos expresar la incertidumbre, en la relación 5.4.20, en su forma relativa. La raíz de la expresión 5.4.20 se muestra a continuación.

$$\sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} = \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \pm \frac{\sqrt{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)}}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \quad (5.4.21)$$

$$\sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} = \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \pm \frac{\sqrt{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)}}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \quad (5.4.22)$$

Este resultado es análogo al mostrado en la expresión 5.4.21. Sin embargo, la incertidumbre para la relación 5.4.22 es absoluta. Este hecho se confirma haciendo un análisis dimensional.

La última expresión es necesaria para obtener el denominador de la relación 5.4.11 en su totalidad.

$$P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} = \left( P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right) \pm \sqrt{\delta P_{35}^2 + \frac{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}} \quad (5.4.23)$$

$$P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} = \left( P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right) \pm \frac{1}{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}} \sqrt{\delta P_{35}^2 + \frac{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}} \quad (5.4.24)$$

Aquí, la última relación es análoga a la mostrada en 5.4.23. Sin embargo, la incertidumbre para la expresión 5.4.24 es fraccional. La relación 5.4.24 contiene información muy importante para nuestra aplicación.

El rango, del argumento de la función logarítmica, que representa un escenario físico corre de cero a uno (refiérase a la sección 5.2.3.1). Si el signo positivo es tomado en la relación 5.4.24, el argumento de la función logarítmica muy probablemente será mayor a uno. Por lo tanto, los escenarios físicos serán obtenidos, en su mayoría, con el signo negativo en la relación 5.4.24. Sin embargo, esto implica que la incertidumbre será mayor. Esto es claramente reconocible en la relación 5.4.24, ya que  $P_{35} + \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \geq P_{35} - \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}$ .

El argumento de la función logarítmica se obtiene dividiendo la expresión 5.4.24 entre la 5.4.10. Dicho argumento se muestra a continuación.

$$\frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} = \left( \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right) \pm \sqrt{\phi P_5^2 + \phi V_S^2 + \frac{1}{(P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2})^2} \left[ \delta P_{35}^2 + \frac{(P_{35}^2 \phi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\phi P_3^2 + \phi P_5^2 + 4\phi V_S^2)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right]} \quad (5.4.25)$$

La evaluación del logaritmo natural de una cantidad con incertidumbre, se encuentra mediante la aplicación de la expresión 5.4.12. Este resultado es crucial para la obtención de la incertidumbre en los coeficientes de extinción.

$$\alpha \pm \delta\alpha = \ln(q \pm \delta q); \quad \alpha = \ln(q); \quad \delta\alpha = \left| \frac{d}{dq} [\ln(q)] \right| \delta q = \frac{1}{|q|} \delta q$$

$$\alpha \pm \delta\alpha = \ln(q) \pm \frac{1}{|q|} \delta q \quad (5.4.26)$$

Aquí la incertidumbre tanto del argumento de la función logarítmica, como la obtenida luego de su evaluación son absolutas. El argumento de nuestra función logarítmica, con su incertidumbre absoluta, se muestra a continuación.

$$q \pm \delta q = \left( \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right) \pm \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S}$$

$$\sqrt{\varphi P_5^2 + \varphi V_S^2 + \frac{1}{\left( P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right)^2} \left[ \delta P_{35}^2 + \frac{\left( P_{35}^2 \varphi P_{35} \right)^2 + \left( 2P_3 P_5 V_S^2 \right)^2 \left( \varphi P_3^2 + \varphi P_5^2 + 4\varphi V_S^2 \right)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right]}$$

$$(5.4.27)$$

El logaritmo natural de esta expresión se obtiene sustituyéndola en la expresión 5.4.26.

$$\alpha \pm \delta\alpha = \ln(q \pm \delta q) = \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right] \pm$$

$$\sqrt{\varphi P_5^2 + \varphi V_S^2 + \frac{1}{\left( P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right)^2} \left[ \delta P_{35}^2 + \frac{\left( P_{35}^2 \varphi P_{35} \right)^2 + \left( 2P_3 P_5 V_S^2 \right)^2 \left( \varphi P_3^2 + \varphi P_5^2 + 4\varphi V_S^2 \right)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right]}$$

$$(5.4.28)$$

$$\alpha \pm \varphi\alpha = \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right] \pm \frac{1}{\ln \left( \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right)} \sqrt{\varphi P_5^2 + \varphi V_S^2 + \frac{1}{(P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2})^2} \left[ \delta P_{35}^2 + \frac{(P_{35}^2 \varphi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\varphi P_3^2 + \varphi P_5^2 + 4\varphi V_S^2)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right]}$$

(5.4.29)

La segunda relación es análoga a la mostrada en 5.4.28. Sin embargo, la incertidumbre para la expresión 5.4.29 es fraccional. Con esta relación obtenemos tanto los coeficientes de atenuación, como su incertidumbre fraccional.

$$\mu_{t_{-,+}} = -\frac{2}{d} \ln \left[ \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right] \pm \frac{1}{\ln \left( \frac{P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2}}{2\tau P_5 V_S} \right)} \sqrt{\varphi P_5^2 + \varphi V_S^2 + \frac{1}{(P_{35} \pm \sqrt{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2})^2} \left[ \delta P_{35}^2 + \frac{(P_{35}^2 \varphi P_{35})^2 + (2P_3 P_5 V_S^2)^2 (\varphi P_3^2 + \varphi P_5^2 + 4\varphi V_S^2)}{P_{35}^2 - 4P_3 P_5 V_S^2} \right]}$$

(5.4.30)

Esta relación describe la sensibilidad de nuestro sistema, a incertidumbres en las mediciones de potencia. Como último punto de este análisis mostramos valores numéricos, para el escenario experimental que hemos caracterizado.

$$P_3 = P_3 [\text{mW}] \pm 2\% = 0.134 [\text{mW}] \pm 2\%$$

$$P_5 = P_5 [\text{mW}] \pm 2\% = 0.134 [\text{mW}] \pm 2\%$$

$$P_{\max} = P_{\max} [\mu\text{W}] \pm 2.5\% = 0.425 [\mu\text{W}] \pm 2.5\%$$

$$P_{\min} = P_{\min} [\mu\text{W}] \pm 2.5\% = 0.119 [\mu\text{W}] \pm 2.5\%$$

$$P_{\min}^S = P_{\min}^S [\mu\text{W}] \pm 2.5\% = 0.118 [\mu\text{W}] \pm 2.5\%$$

$$P_{\max}^S = P_{\max}^S [\mu\text{W}] \pm 2.5\% = 0.150 [\mu\text{W}] \pm 2.5\%$$

Las pérdidas de Fresnel así como el espesor de la muestra, cuentan con los mismos valores empleados,  $\tau^2 = 0.93$  y  $d = 1 \text{ [cm]}^{-1}$ . La relación 5.4.30, determina los coeficientes de extinción. Toda la información necesaria, para emplear esta expresión, es conocida. Los resultados se muestran a continuación.

$$\mu_- = -4.535 \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right] \pm 0.71\%$$

$$\mu_+ = 4.39 \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right] \pm 1131\%$$

Para el primer caso, el argumento de la función logarítmica (refiérase a la ecuación 5.4.11) es mayor a uno. Mientras tanto, para el segundo caso el argumento de la función es menor uno. Esto justifica la diferencia en incertidumbres. Enseguida mostramos los valores del argumento de la función logarítmica (con su respectiva incertidumbre).

$$q_+ = 9.656 \pm 0.151\%$$

$$q_- = 0.111 \pm 277\%$$

El logaritmo natural, de la primera cantidad, es positivo (por lo tanto, la nomenclatura en el subíndice del coeficiente de extinción se invierte respecto a ésta). Más aún, este valor es aproximadamente 100 veces mayor que el correspondiente a  $q_-$ . Así, la incertidumbre involucrada en este parámetro,  $q_+$ , será casi insignificante en comparación con la involucrada en el segundo.

Si el sistema de detección fuera 1000 veces más sensible, el resultado obtenido sería mucho más preciso. Este requerimiento no representa una limitante en el sistema. Hay que recordar que el sistema de detección utilizado estaba conformado por un radiómetro convencional. Enseguida mostramos los resultados para el caso sugerido.

$$P_3 = P_3 [\text{mW}] \pm 0.002\% = 0.134 [\text{mW}] \pm 0.002\%$$

$$P_5 = P_5 [\text{mW}] \pm 0.002\% = 0.134 [\text{mW}] \pm 0.002\%$$

$$P_{\max} = P_{\max} [\mu\text{W}] \pm 0.0025\% = 0.425 [\mu\text{W}] \pm 0.0025\%$$

$$P_{\min} = P_{\min} [\mu\text{W}] \pm 0.0025\% = 0.119 [\mu\text{W}] \pm 0.0025\%$$

$$P_{\min}^S = P_{\min}^S [\mu\text{W}] \pm 0.0025\% = 0.118 [\mu\text{W}] \pm 0.0025\%$$

$$P_{\max}^S = P_{\max}^S [\mu\text{W}] \pm 0.0025\% = 0.150 [\mu\text{W}] \pm 0.0025\%$$

$$q_+ = 9.656 \pm 0.015\%$$

$$q_- = 0.111 \pm 0.277\%$$

$$\mu_- = -4.535 \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right] \pm 0.001\%$$

$$\mu_+ = 4.39 \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right] \pm 1.131\%$$

La conclusión importante de este análisis es que nuestro sistema de detección necesita ser optimizado. Sin embargo, el comportamiento del sistema puede ser comprobado utilizando el sistema de detección propuesto. La implementación de un foto-detector, con una incertidumbre de aproximadamente 0.002% en sus lecturas, aseguraría repetibilidad en el sistema. Esto nos permitiría comparar los coeficientes de atenuación, obtenidos mediante nuestra técnica, con los existentes en la literatura. La implementación del esquema de detección, así como la comparación de coeficientes, se propone como trabajo a futuro. A continuación abordaremos las conclusiones de este capítulo.

## 5.5 Conclusiones del capítulo 5

La inclusión de la muestra, se interpreta como una transmitancia en el interferómetro heterodino. Esta prueba representa la única diferencia entre el interferómetro de fotones no atenuados y el arreglo heterodino. Con base en esto, la distribución espacial, espacio-temporal y temporal del interferómetro fueron expandidas para demostrar el principio de la interferometría de fotones no atenuados. Una aproximación experimental, para la determinación de los coeficientes de extinción, fue propuesta y justificada analíticamente. La única medición involucrada, en la determinación de los coeficientes de extinción, es la potencia. La métrica más importante, en el interferómetro de fotones no atenuados, es la visibilidad. El comportamiento analítico de la visibilidad, en función del coeficiente de atenuación, fue obtenido. Este comportamiento involucra dos coeficientes de extinción. Uno de éstos no cuenta con interpretación física, mientras que el otro sí. Los coeficientes de atenuación físicamente concebibles son más sensibles a variaciones en potencia. Los coeficientes de atenuación encontrados diagnostican el tejido en un punto dado (léase en un píxel dado). Un sistema de barrido, como los presentados en el primer capítulo, tendrá que ser diseñado para obtener un mapa bi o tridimensional del coeficiente de atenuación de la muestra.

La implementación de un polarizador incrementa la flexibilidad del interferómetro de fotones no atenuados. Este dispositivo amplía el rango de diagnóstico del dispositivo. El coeficiente de atenuación, para obtener una visibilidad máxima en el sistema, fue obtenido. La visibilidad del sistema aumenta o decrece en dependencia de dos parámetros: la atenuación de la muestra y la visibilidad del interferómetro heterodino. Si la potencia del brazo con muestra es idéntica a la del brazo de referencia, entonces la visibilidad en el interferómetro se maximiza. La configuración óptima, para analizar muestras con coeficientes de atenuación pequeños, es un interferómetro heterodino con la potencia, en ambos brazos, idéntica.

Los deterioros en visibilidad restan flexibilidad al interferómetro de fotones no atenuados. Las diferencias en el diámetro del haz implican menores áreas de interferencia. Esto redundará en que la métrica de visibilidad sea inferior al caso ideal. Una mala alineación del sistema, también reduce el área de interferencia y, por ende, la visibilidad. La precisión, del método de



alineación propuesto en el tercer capítulo, fue comprobada experimentalmente. La visibilidad obtenida, luego de dicha alineación, conformó el mejor escenario en el sistema. La distribución no Gaussiana del haz, representa otra causa que disminuye la visibilidad del sistema. Debido al carácter no perfectamente Gaussiano del láser, la visibilidad del arreglo experimental heterodino no fue unitaria.

Las características, tanto de absorción como de esparcimiento, de la leche la habilitan como un buen símil de tejido. Leche semi-descremada fue empleada en el arreglo experimental. El comportamiento lineal, entre concentración de leche y coeficiente de atenuación (es decir la relación de Beer), fue comprobado experimentalmente. El comportamiento de la visibilidad, en función del coeficiente de atenuación, fue verificado experimentalmente. El comportamiento práctico concuerda con el obtenido mediante el modelo matemático. Es decir, la factibilidad, de la interferometría de fotones no atenuados, como método de diagnóstico fue demostrada.

El análisis de incertidumbres puso de manifiesto que el sistema de detección, del interferómetro de fotones no atenuados, es una componente crítica. El sistema de detección, para nuestro arreglo experimental, necesita ser optimizado. Las operaciones matemáticas involucradas, en la determinación del coeficiente de atenuación, tornan más sensible el análisis de incertidumbres para los casos con significado físico. Por lo tanto, la obtención de valores precisos implica la utilización de un esquema de detección más sensible que el propuesto. Un sistema de detección mil veces menos incierto, entregaría valores del coeficiente de atenuación con solamente 1% de incertidumbre. Esto permitiría comparar los coeficientes de atenuación, obtenidos mediante nuestra técnica, con los existentes en la literatura.

## CONCLUSIONES

La configuración interferométrica permite distinguir los fotones no atenuados. La cantidad de fotones no atenuados depende de la composición del medio analizado. Más aún, solamente éstos generan interferencia. Lo cual permite que, en función de éstos, llevemos acabo el diagnóstico del medio.

La demostración teórica y experimental de la interferometría de fotones no atenuados, como técnica para diagnóstico, constituyó el objetivo principal de esta tesis. El objetivo principal del trabajo se logró mediante la implementación de un modelo matemático. El modelo matemático incluyó tres escenarios: la respuesta espacial, el desempeño espacio-temporal así como el comportamiento temporal del sistema. Cada uno de estos escenarios fue desarrollado para predecir el comportamiento del sistema óptico. La concordancia entre resultados teóricos y experimentales fue verificada.

En cuanto al escenario espacial se refiere, la propagación de Fresnel fue esencial para predecir el comportamiento del sistema. La aproximación de ondas secundarias de Huygens, permitió la obtención de la integral de Fresnel. Este acercamiento, al concepto de la propagación de ondas electromagnéticas, es tanto intuitivo como coherente matemáticamente. La propagación de un frente de onda Gaussiano es crucial para el análisis espacial del interferómetro. Un haz Gaussiano conserva este carácter, a menos que se vea influenciado por algún elemento externo a éste.

Una alineación deficiente del sistema limita la capacidad de detección del mismo. La relación señal ruido disminuye, debido a la ausencia de superposición entre los frentes de onda, en un interferómetro mal alineado. Una metodología para alinear el sistema fue propuesta. Esta metodología implica la utilización de un filtro de aguja circular. Dicha implementación, ayuda tanto a limpiar los modos no deseados de la fuente, como a generar un frente de onda Gaussiano más divergente. Esta característica facilita la alineación del dispositivo. El comportamiento experimental demostró que la metodología de alineación es apropiada.

El comportamiento espacio-temporal del sistema se logró mediante la implementación de un modulador temporal. Este modulador introduce una transmitancia, dependiente del tiempo, al sistema. Sin embargo el modulador, utilizado en el arreglo experimental, introduce imperfecciones al sistema. Por lo tanto, el modulador mecánico representa un área de oportunidad en la implementación del interferómetro. La utilización de un modulador electro-óptico (que no involucre desplazamientos mecánicos del sistema) optimizaría la respuesta del interferómetro.

Un efecto secundario, de la inclusión del modulador mecánico, son las desalineaciones dinámicas. Éstas se deben principalmente a la diferencia en inductancias de los actuadores piezoeléctricos. Un controlador, con ganancia individual regulable, se ha propuesto para contrarrestar esta deficiencia. Además, se implementó un filtro de aguja circular para facilitar la alineación dinámica del dispositivo. Los resultados teóricos concuerdan con el comportamiento experimental.

La respuesta temporal del sistema fue obtenida mediante la implementación de un foto-detector. Este foto-detector transforma la respuesta espacio-temporal del interferómetro, en una de carácter temporal. Es decir, nos permite realizar mediciones en tiempo real. Dos esquemas de detección, para el interferómetro de fotones no atenuados, fueron propuestos. La implementación de un detector infinito provee de una herramienta analítica para predecir el comportamiento del sistema. El modelo matemático describe precisamente el comportamiento temporal del interferómetro. Un radiómetro con foto-detector de silicio se utilizó como esquema de detección. Una metodología, para obtener experimentalmente los parámetros del modelo matemático, fue propuesta. La concordancia, entre el modelo matemático y los resultados experimentales, fue verificada utilizando este esquema.

La muestra representa la única diferencia entre el interferómetro de fotones no atenuados y el arreglo heterodino. La inclusión de ésta, se interpreta como una transmitancia en el interferómetro de fotones no atenuados. Con base en esto la distribución espacial, espacio-temporal y temporal del interferómetro fueron expandidas para demostrar el principio de la interferometría de fotones no atenuados. Una aproximación experimental, para la determinación de los coeficientes de extinción, fue propuesta y justificada analíticamente. La única medición invo-

lucrada, en la determinación de los coeficientes de extinción, es la potencia. La métrica más importante, en el interferómetro de fotones no atenuados, es la visibilidad. El comportamiento analítico de la visibilidad, en función del coeficiente de atenuación, fue obtenido. Este comportamiento involucra dos coeficientes de extinción. Uno de éstos no cuenta con interpretación física, mientras que el otro sí. Los coeficientes de atenuación físicamente concebibles son más sensibles a variaciones en potencia. Los coeficientes de atenuación encontrados diagnostican el tejido en un punto dado (léase en un píxel dado). Un sistema de barrido tendrá que ser diseñado para obtener un mapa bi o tridimensional del coeficiente de atenuación de la muestra.

La implementación de un polarizador incrementa la flexibilidad del interferómetro de fotones no atenuados. Este dispositivo amplía el rango de diagnóstico del dispositivo. El coeficiente de atenuación, para obtener una visibilidad máxima en el sistema, fue obtenido. La visibilidad del sistema aumenta o decrece en dependencia de dos parámetros: la atenuación de la muestra y la visibilidad del interferómetro heterodino. Si la potencia del brazo con muestra es idéntica a la del brazo de referencia, entonces la visibilidad en el interferómetro se maximiza. La configuración óptima, para analizar muestras con coeficientes de atenuación pequeños, es un interferómetro heterodino con la potencia, en ambos brazos, idéntica.

Los deterioros en visibilidad restan flexibilidad al interferómetro de fotones no atenuados. Las diferencias en el diámetro del haz implican menores áreas de interferencia. Esto redundaría en que la métrica de visibilidad sea inferior al caso ideal. Una mala alineación del sistema, también reduce el área de interferencia y, por ende, la visibilidad. La precisión del método de alineación, utilizando un filtro de aguja circular, fue comprobada utilizando la visibilidad del sistema. El comportamiento obtenido, luego de dicha alineación, conformó el mejor escenario en el sistema. La distribución no Gaussiana del haz, representa otra causa que disminuye la visibilidad del sistema. Debido al carácter no perfectamente Gaussiano del láser, la visibilidad del arreglo experimental heterodino no fue unitaria.

Las características, tanto de absorción como de esparcimiento, de la leche la habilitan como un buen símil de tejido. Leche semi-descremada fue empleada en el arreglo experimental. El

comportamiento lineal, entre concentración de leche y coeficiente de atenuación (es decir la relación de Beer), fue comprobado experimentalmente. El comportamiento de la visibilidad, en función del coeficiente de atenuación, fue verificado experimentalmente. El comportamiento práctico concuerda con el obtenido mediante el modelo matemático. Es decir, la factibilidad, de la interferometría de fotones no atenuados, como método de diagnóstico fue demostrada. Esto implica que el objetivo primordial de la tesis fue logrado. Más aún, un análisis de incertidumbres en el sistema fue llevado a cabo. Éste demostró que nuestro sistema de detección necesita ser optimizado. Sin embargo, el comportamiento del sistema puede ser comprobado utilizando el sistema de detección propuesto. La implementación de un fotodetector, con una incertidumbre de aproximadamente 0.002% en sus lecturas, aseguraría repetibilidad en el sistema. Esto a su vez permitiría comparar los coeficientes de atenuación, obtenidos mediante nuestra técnica, con los existentes en la literatura.

## TRABAJO A FUTURO

La respuesta espacial del sistema puede ser mejorada mediante la implementación de un filtro con transmitancia Gaussiana. Por lo tanto, el diseño e implementación de dicho filtro se proponen como mejoras posibles al sistema.

El comportamiento espacio-temporal del sistema es influenciado por el modulador mecánico utilizado en el arreglo. Es decir, éste introduce imperfecciones al sistema. Por lo tanto, la sustitución de este modulador, por uno de carácter electro-óptico, optimizaría la respuesta dinámica del sistema. Más aún, la modulación se podría llevar a cabo a frecuencias más elevadas. Por ende, se propone modificar el modulador temporal mecánico para mejorar el comportamiento del sistema.

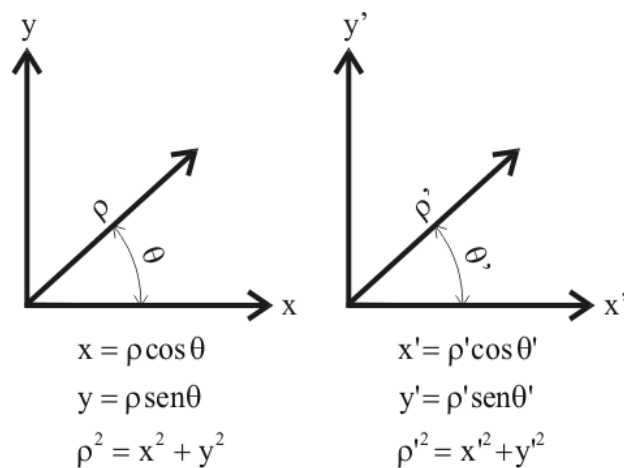
El efecto del polarizador implementado en el arreglo fue descrito como ideal. Éste induce solamente un decremento en la potencia del láser. Sin embargo un análisis detallado, de las perturbaciones inducidas por este dispositivo, enriquecerá el presente estudio. Más aún, el análisis de incertidumbres demostró que el sistema de detección necesita ser optimizado. Por lo tanto, estos puntos representan aspectos principales en el trabajo a futuro.

La implementación de estos cambios optimizará el arreglo experimental. Con este escenario proponemos, como trabajo a futuro, la comparación de los coeficientes de atenuación obtenidos mediante nuestra técnica, con los existentes en la literatura. Para efectuar esta comparación sugerimos utilizar Intralipid 10% como símil de tejido. Lo anterior debido a que las características ópticas de esta emulsión intravenosa, han sido ampliamente estudiadas [Star *et al*, 1987], [Moes *et al*, 1989], [van Staveren *et al*, 1991], [Flock *et al*, 1992].

## A RELACIÓN DE FRESNEL: SIMETRÍA RADIAL

En este apéndice deducimos la relación de Fresnel para coordenadas cilíndricas. Además demostramos que, para funciones con simetría radial, la propagación de Fresnel se reduce a una transformada de Hankel de orden cero.

La relación de Fresnel fue obtenida mediante la aproximación de ondas secundarias de Huygens (refiérase a la sección 3.2). Esta expresión involucra coordenadas cartesianas. Para problemas con simetría radial, es más conveniente el uso de coordenadas cilíndricas [Bracewell, 2000]. La siguiente figura pone de manifiesto la relación entre estos sistemas de coordenadas [Cheng, 1997].



**Fig. A.1** Relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas

En esta figura hemos mantenido la nomenclatura propuesta en los capítulos precedentes. Las coordenadas con primas hacen referencia a un sistema propagado. Por otro lado, la ausencia de éstas implica un sistema en su estado inicial.

La expresión de Fresnel representa la base para nuestro análisis. Esta relación, ecuación 3.2.13, se repite enseguida para facilitar su referencia.

$$\psi(x', y') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx dy \quad (\text{A.1})$$

$$\psi(x', y') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[x'^2 + y'^2]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x'}{\lambda z}\right)x + \left(\frac{y'}{\lambda z}\right)y\right]} dx dy$$

Nosotros buscamos expresar esta relación en coordenadas cilíndricas. Así pues, sustituyendo las relaciones entre coordenadas cartesianas y cilíndricas (véase la figura A.1) obtenemos la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \psi(\rho', \theta') &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \psi(\rho, \theta) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} e^{-i2\pi\frac{\rho\rho'}{\lambda z}[\cos\theta\cos\theta' + \text{sen}\theta\text{sen}\theta']} \rho d\rho d\theta \\ \psi(\rho', \theta') &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \psi(\rho, \theta) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} e^{-i2\pi\frac{\rho\rho'}{\lambda z}\cos(\theta-\theta')} \rho d\rho d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Hasta aquí no hemos hecho ninguna suposición. Esta relación tiene un carácter general. Desafortunadamente, no presenta ventajas significativas con respecto a la expresión en coordenadas cartesianas. Una simplificación importante ocurre cuando la distribución que estamos analizando, posee simetría radial;  $\psi(\rho, \theta) = \psi(\rho)$ . Para este caso, la relación anterior se puede expresar más compactamente.

$$\psi(\rho', \theta') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} \int_0^{\infty} \psi(\rho) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} \rho \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi\frac{\rho\rho'}{\lambda z}\cos(\theta-\theta')} d\theta \right\} d\rho \quad (\text{A.3})$$

Claramente esta expresión se puede simplificar aún más. Para llevar acabo esto, necesitamos determinar el valor de la integral en  $\theta$ . La resolución de esta ecuación, se efectuará en términos de las funciones de Bessel [Butkov, 1968]. A continuación mostramos la integral que deseamos encontrar.

$$\Omega = \int_0^{2\pi} e^{-ix\cos(\theta-\theta')} d\theta; \quad x = 2\pi\frac{\rho\rho'}{\lambda z} \quad (\text{A.4})$$



Las funciones de Bessel ocurren en múltiples escenarios científicos [Watson, 1995]. Una manera de obtener estas funciones es resolviendo la ecuación diferencial de Bessel (utilizando, por ejemplo, el método de Frobenius) [Ross, 1974]. Otra aproximación a este problema, implica la utilización de la función generadora de los polinomios de Bessel [Andrews, 1998]. En este trabajo utilizaremos esta última aproximación. La única suposición, para nuestro análisis, es la existencia de una función generadora de los polinomios de Bessel. Esta función se muestra a continuación.

$$\omega(x, t) = e^{\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n, \quad t \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

Aquí hemos supuesto que conocemos la función generadora de los polinomios de Bessel. Además se ha propuesto la solución buscada. Para encontrar los polinomios  $J_n(x)$ , expandimos en series las dos expresiones exponenciales [Boas, 1983].

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = e^{\frac{1}{2}xt} e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k}}{j!k!} t^{j-k} \quad (\text{A.6})$$

Ahora proponemos el cambio de variable  $n = j - k$ , para igualar el exponente de la variable  $t$ . Debido a que las variables  $j$  y  $k$  son índices de las sumatorias, los límites de éstas cambian acordemente. Ambas sumatorias corren de cero a infinito. Por lo tanto si  $j = 0$  y  $k = \infty$ , entonces  $n = -\infty$ . Mientras que si  $j = \infty$  y  $k = 0$ , entonces  $n = \infty$ . Los límites de la nueva variable corren de menos infinito a infinito. Esto pone de manifiesto que la variable  $j$  debe ser intercambiada por la nueva variable  $n$  ( $j = n + k$ ). La aplicación de este cambio de variable (con su respectivo cambio de índices) entrega como resultado la expresión buscada.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!k!} t^n \quad \therefore J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!k!} \quad (\text{A.7})$$

Esta expresión determina los polinomios de Bessel. Ahora propongamos el siguiente cambio de variable,  $t = e^{-i\theta}$ . La utilización de esta expresión, en la función generadora (ecuación A.5), nos lleva a una relación importante.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (e^{-i\theta})^n = e^{\frac{1}{2}x(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} = e^{-ix \left( \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{-i2} \right)} = e^{-ix \operatorname{sen} \theta} \quad (\text{A.8})$$

Esta expresión tiene una forma similar a la relación que estamos tratando de evaluar A.4. A continuación encontraremos el valor de la expresión A.8, cuando ésta se integra respecto a  $\theta$ .

$$e^{im\theta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (e^{-i\theta})^n = e^{-ix \operatorname{sen} \theta} \right\}; \Rightarrow e^{i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{i(m-n)\theta}; \quad m \rightarrow \text{entero}$$

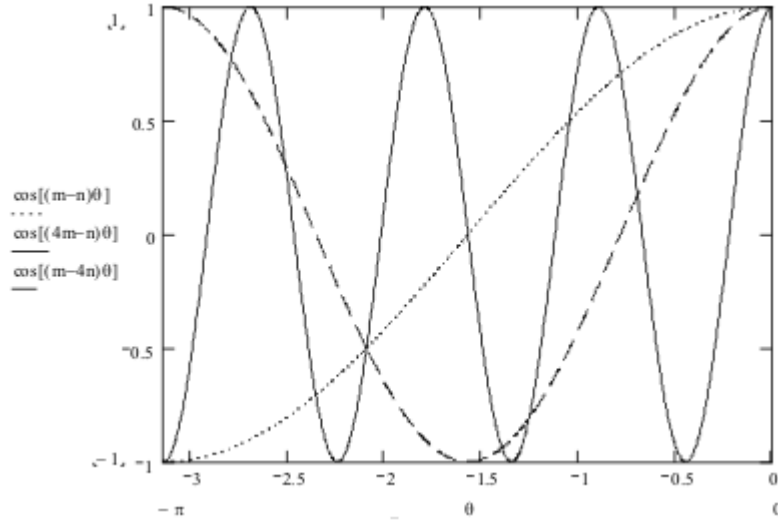
$$\int_0^{\pi} e^{i(m\theta - x \operatorname{sen} \theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{i(m-n)\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \quad (\text{A.9})$$

La separación, en componentes real e imaginaria de la última expresión, brinda una solución directa.

$$\operatorname{Re} \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{\pi} \cos[(m-n)\theta] d\theta \quad (\text{A.10})$$

$$\operatorname{Im} \Rightarrow \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}[(m-n)\theta] d\theta \quad (\text{A.11})$$

La primera de estas expresiones se puede evaluar muy sencillamente. Esto se visualiza fácilmente a través de la siguiente figura.



**Fig. A.2** Evaluación gráfica de la expresión A.10

Esta figura demuestra que las áreas bajo la curva, para  $m \neq n$ , son idénticas. Por lo tanto, la integral de la expresión A.10 será nula excepto cuando  $n = m$ . Esto se expresa matemáticamente de la siguiente forma.

$$\int_0^{\pi} \cos[(m-n)\theta] d\theta = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Este resultado tiene dos implicaciones muy importantes. Primero, la serie de los polinomios de Bessel se restringe a un solo valor. Segundo, la integral presentada en A.11 es nula. Lo anterior, ya que solamente tenemos soluciones posibles cuando el índice  $n$  es igual a  $m$ . En resumen, encontramos los siguientes resultados.

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta - x \operatorname{sen}\theta) d\theta = \pi J_m(x); \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(m\theta - x \operatorname{sen}\theta) d\theta = 0; \quad \therefore$$

$$\int_0^{\pi} [\cos(m\theta - x \operatorname{sen}\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta - x \operatorname{sen}\theta)] d\theta = \int_0^{\pi} e^{i(m\theta - x \operatorname{sen}\theta)} d\theta = \pi J_m(x) \quad (\text{A.13})$$

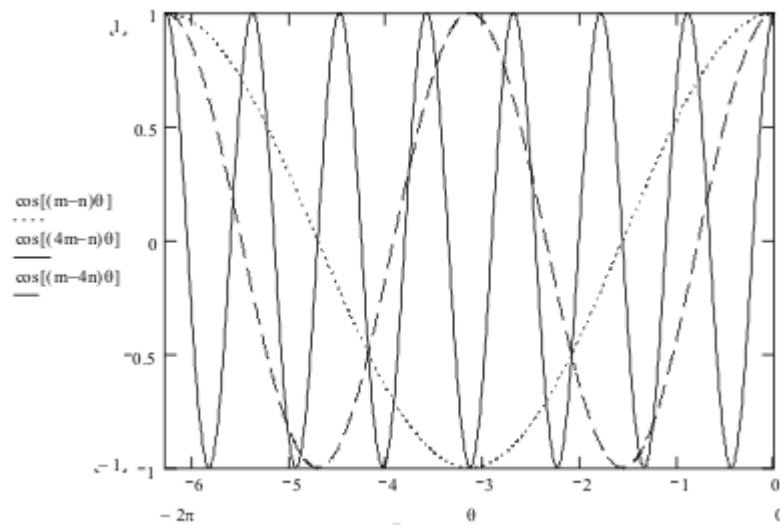
Cuando  $m = 0$  obtenemos una relación integral casi idéntica a la que queremos resolver.

$$\int_0^{\pi} e^{-ix \sin \theta} d\theta = \pi J_0(x) \quad (\text{A.14})$$

Los límites de integración pueden ser cambiados de acuerdo a nuestras necesidades. Enseguida presentamos estas relaciones matemáticas, además de una explicación gráfica de los resultados.

$$\text{Re} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\theta] d\theta \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Im} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(m\theta - x \sin \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\theta] d\theta \quad (\text{A.16})$$



**Fig. A.3** Evaluación gráfica de la expresión A.15

Nuevamente las áreas bajo la curva, para  $m \neq n$ , son idénticas. Por lo tanto, la integral de la expresión A.15 será nula excepto cuando  $n = m$ . Este resultado se resume enseguida.

$$\int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\theta] d\theta = \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \therefore \quad \int_0^{2\pi} e^{-ix \operatorname{sen}\theta} d\theta = 2\pi J_0(x) \quad (\text{A.17})$$

Ahora, lo que nos resta es aplicar cambios de variables. Con éstos llegaremos a la solución buscada.

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \operatorname{sen}\theta} d\theta; \quad \theta = \theta' + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad d\theta = d\theta' \quad \therefore \quad \begin{matrix} \theta'(0) = -\frac{\pi}{2} \\ \theta'(2\pi) = \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \quad \therefore \quad J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-ix \cos\theta'} d\theta' \quad (\text{A.18})$$

La integral se sigue efectuando sobre un periodo completo. Por lo tanto, no importa cuál sea este periodo. Así que podemos expresar esta relación como se muestra enseguida.

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-ix \cos\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos\theta} d\theta; \quad \theta = \theta' - \phi; \quad \phi \rightarrow \text{cte} \quad \therefore \quad J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi}^{2\pi+\phi} e^{-ix \cos(\theta'-\phi)} d\theta' \quad (\text{A.19})$$

Esta última integral sigue siendo en un periodo. Debido a que no importa sobre cuál periodo llevemos acabo la integración, llegamos al resultado buscado.

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\theta-\theta')} d\theta = 2\pi J_0(x) = 2\pi J_0\left(2\pi \frac{\rho'}{\lambda z} \rho\right) \quad (\text{A.20})$$

En esta relación, hemos vuelto a expresar la integral en términos de las variables iniciales (refiérase a la ecuación A.4). La sustitución de este resultado, en la relación de Fresnel para una función con simetría radial, entrega la relación requerida (ecuación 3.4.11).

$$\psi(\rho') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} \left[ 2\pi \int_0^{\infty} \psi(\rho) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} J_0\left(2\pi \frac{\rho'}{\lambda z} \rho\right) \rho d\rho \right] = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho'^2} H_0 \left[ \psi(\rho) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2} \right]_{u=\frac{\rho'}{\lambda z}} \quad (\text{A.21})$$

Aquí también hemos expresado el resultado en términos de la transformada de Hankel de orden cero [Bracewell, 2000], [Gaskill, 1978]. La transformada de Hankel, de una función arbitraria  $h(\rho)$ , se define en la siguiente expresión.

$$H_0(\rho') = H_0\{h(\rho)\} = 2\pi \int_0^{\infty} h(\rho) J_0(2\pi\rho'\rho) \rho \, d\rho \quad (\text{A.22})$$

Con estas dos últimas relaciones, hemos simplificado el problema de la propagación de una frente de onda con simetría radial. Dicha propagación se reduce a la obtención de la transformada de Hankel de orden cero de la distribución. Otra aproximación a este problema es resolver la integral presentada en la ecuación A.21.

## REFERENCIAS

- [Alais, 1998] Alais C., *Ciencia de la leche*, Compañía Editorial Continental, México (1998).
- [Andrews, 1998] Andrews L., *Special functions of mathematics for engineers*, Oxford Science Publications & SPIE Press, Bellingham (1998).
- [Beer, 1852] Beer A., “Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbigen Flüssigkeiten”, *Ann. Physik Chem.*, **86**(5), pp. 78–88 (1852).
- [Beran *et al*, 1974] Beran M., Parrent G. *Theory of Partial Coherence*, SPIE Press, (1974).
- [Blanchard, 2000] Blanchard S., *Introduction to biomedical engineering*, J. Bronzino Ed., Harcourt Brace College Publishers, pp. 843-903 (2000).
- [Boas, 1983] Boas M., *Mathematical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons, New York (1983).
- [Bohren *et al*, 1983] Bohren C., Huffman D., *Absorption and Scattering of light by Small Particles*, John Wiley & Sons, New York (1983).
- [Born *et al*, 1980] Born M., Wolf E., *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [Bouguer, 1729] Bouguer P., *Essai d’optique sur la gradation de la lumière. Section II. De la transparence et de l’opacité. II. De la proportion selon laquelle la lumière diminue en traversant les milieux.*, (1729).
- [Bracewell, 2000] Bracewell R., *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, Boston (2000).
- [Burns, 1996] Burns R., *Fundamentos de química*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1996).

- [Bushong, 1996] Bushong S., *Magnetic Resonance Imaging: Physical and Biological Principles*, Mosby, St. Louis (1996).
- [Butkov, 1968] Butkov E., *Mathematical physics*, Addison Wesley, Reading (1968).
- [Cheng, 1997] Cheng D., *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, Addison Wesley, México (1997).
- [Cheong *et al*, 1990] Cheong W., Prahl S., Welch A., “A review of the optical properties of biological tissues”, *IEEE J Quant Elec*, **26**(12), pp. 2166–2185 (1990).
- [Churchill, 1948] Churchill R., *Introduction to complex variables and applications*, McGraw-Hill, New York (1948).
- [Cope, 1991] Cope M., “The development of a near infrared spectroscopy system and its application for non invasive monitoring of cerebral blood and tissue oxygenation in the newborn infant”, Ph. D. Thesis, University College London, London (1991).
- [Conway *et al*, 1984] Conway J., Norris K., Bodwell C., “A new approach for the estimation of body composition: infrared interactance”, *Am J Clin Nutr*, **40**(6), pp. 1123–1130 (1984).
- [Curry, 1990] Curry T., Dowdey J., Murry R., *Christensen’s Physics of Diagnostic Radiology*, Lea & Febiger, Philadelphia and London, (1990).
- [Fantini *et al*, 2002] Fantini S., Franceschini M., “Frequency-domain techniques for tissue spectroscopy and imaging,” in *Handbook of optical biomedical diagnostics*, V. Tuchin Ed., SPIE Press, 405-453 (2002).
- [Flock *et al*, 1987] Flock S., Wilson B., Patterson M., “Total attenuation coefficients and scattering phase functions of tissues and phantom materials at 633 nm”, *Med. Phys.*, **14**(5), pp. 835–841 (1987).



- [Flock *et al*, 1992] Flock S., Jacques S., Wilson B., Star W., van Gemert M. “The optical properties of Intralipid: a phantom medium for light propagation studies”, *Lasers Surg. Med.*, **12**(5), pp. 510–519 (1992).
- [Gaskill, 1978] Gaskill J., *Linear systems, Fourier transforms and optics*, John Wiley & Sons, New York (1978).
- [Goodman, 1985] Goodman J., *Statistical Optics*, John Wiley & Sons, New York (1985).
- [Goodman, 1993] Goodman J., *Introduction to Fourier Optics*, Addison Wesley Longman, Reading (1993).
- [Glasser, 1934] Glasser O., *Wilhelm Conrad Roentgen and the Early History of the Roentgen Rays*, Charles C Thomas, Springfield, (1934).
- [Gray *et al*, 1995] Gray R., Goodman J., *Fourier transforms: an introduction for engineers*, Kluwer Academic Publishers (1995).
- [Grosenick *et al*, 2003] Grosenick D., Moesta K., Wabnitz H., Mucke J., Stroszczynski C., Macdonald R., Schlag P., Rinneberg H., “Time-domain optical mammography: initial clinical results on detection and characterization of breast tumors”, *App. Opt.*, **42**, pp. 3170-3186 (2003).
- [Hariharan, 1985] Hariharan P., *Optical interferometry*, Academic Press Australia, Sydney (1985).
- [Heraeus, 1994] Heraeus, *Infrasil 301, 302, and 303 product description*, Heraeus Web Catalog: [http://www.heraeusoptics.com/uploads/100005\\_datasheets/100042.pdf](http://www.heraeusoptics.com/uploads/100005_datasheets/100042.pdf), Heraeus, (1994).
- [Hollis, 2002] Hollis M., “Non-Invasive Monitoring of Brain Tissue Temperature by Near-Infrared Spectroscopy,” Ph.D. Thesis, University College London, London (2002).

- [Hounsfield, 1973] Hounsfield G., "Computerized transverse axial scanning (tomography): Part I. Description of system", *Br. J. Radiol.*, **46**, pp. 1016-1022 (1973).
- [http Brighamrad] <http://brighamrad.harvard.edu/Cases/bwh/hcache/98/full.html>
- [http Science] <http://science.howstuffworks.com/x-ray2.htm>
- [http Somersetmedical] <http://www.somersetmedicalcenter.com/12538.cfm>
- [http Teachnet] <http://www.teachnet.ie/dkeenahan/page11.html>
- [Iizuka, 1987] Iizuka K., *Engineering optics*, Springer Verlag, Berlin (1987).
- [Jacques, 1987] Jacques S., Alter C., Prahl S., "Angular Dependence of He-Ne Laser Light Scattering by Human Dermis", *Lasers Life Sci.*, **4**, pp. 309-333 (1987).
- [JDS Uniphase] JDS Uniphase Catalog, Helium-Neon Laser Heads, 1100 Series
- [Ketcham *et al*, 2001] Ketcham R., Carlson W., "Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences", *Computers & Geosciences*, **27**, pp. 318-400 (2001).
- [Klein, 1970] Klein M., *Optics*, John Wiley & Sons, New York (1970).
- [Lakowicz, 1990] Lakowicz J., "Emerging biomedical applications of time-resolved fluorescence spectroscopy," in *Topics in fluorescence spectroscopy, Volume 4*, J. Lakowicz Ed., Plenum Press, pp. 1-20 (1990).
- [Lambert, 1760] Lambert J., *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, Augsburg (1760).
- [Lommel, 1886] Lommel E., *Abh. der math. phys. Classe der k. b. Akad. der Wiss.*, **XV**, pp. 229-328, 529-664, München (1886).
- [McCluney, 1994] McCluney W., *Introduction to radiometry and photometry*, Artech House, Boston (1994).

- [Mansfield *et al*, 1982] Mansfield P., Morris P., *NMR Imaging in Biomedicine*, Academic Press, London (1982).
- [Meyer-Arendt, 1972] Meyer-Arendt J., *Introduction to classical and modern optics*, Prentice-Hall, New Jersey (1972).
- [Moes *et al*, 1989] Moes C., van Gemert M., Star W., Marijnissen J., Prahl S., “Measurements and calculations of the energy fluence rate in a scattering and absorbing phantom at 633 nm”, *App. Opt.*, **28**, pp. 2292–2296 (1989).
- [Mourant *et al*, 1997] Mourant J., Fuselier T., Boyer J., Johnson T., Bigio I., “Predictions and measurements of scattering and absorption over broad wavelength ranges in tissue phantoms”, *App. Opt.*, **36**(4), pp. 949-957 (1997).
- [Mueller *et al*, 1979] Mueller R., Rylander R., “New demodulation scheme for laser-scanned acoustical-imaging systems”, *J. Opt. Soc. Am.*, **69**(3), 407-412 (1979).
- [NEC, 2004] NEC/TOKIN Co., *Multilayer piezoelectric actuators*, NEC/TOKIN Web Catalog: [http://www.nec-tokin.com/english/product/pdf\\_dl/MultilayerPiezoelectricActu.pdf](http://www.nec-tokin.com/english/product/pdf_dl/MultilayerPiezoelectricActu.pdf), NEC/TOKIN Co., (2004).
- [Newport, 1992 A] Newport Co., *1815-C Optical Power Meter: operator manual*, Newport Co., (1992).
- [Newport, 1992 B] Newport Co., *818 Series Photodetector Guide: operator manual*, Newport Co., (1992).
- [Oppenheim *et al*, 1998] Oppenheim A., Willsky A., Nawab S., *Señales y sistemas*, Prentice-Hall, México, (1998).

- [Owens *et al*, 2001] Owens J., Murray T., McCulloch J., Wyper D., “Synthesis of (R,R) 123I-QNB, a SPECT imaging agent for cerebral muscarinic acetylcholine receptors in vivo”, *Journal of Labelled Compounds and Radiopharmaceuticals*, **31**, pp. 45-60 (1991).
- [Parrent *et al*, 1962] Parrent G., Shore R., Skinner T., *J. Math. Phys.*, **3**, 178 (1962).
- [Prudnikov *et al*, 1986] Prudnikov A., Brychkov Y., Marichev O., *Integrals and Series, Volume 2: Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, Australia, (1986).
- [Panofsky *et al*, 1962] Panofsky W., Phillips M., *Classical electricity and magnetism*, Addison Wesley Publishing, Reading, (1962).
- [Plotkin *et al*, 2005] Plotkin S. et al., “Facial numbness in a man with inguinal and retroperitoneal masses”, *Nat Clin Pract Oncol*, **2**, pp. 54–58 (2005).
- [Ramakrishna *et al*, 2000] Ramakrishna A., Divakara K., “Estimation of light transport parameters in biological media using coherent backscattering”, *Pramana – J. Phys.*, **54**(2), 255-267 (2000).
- [Radon, 1917] Radon J., “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten”, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys.*, **69**, pp. 262-277 (1917).
- [Reitz *et al*, 1993] Reitz J., Milford F., Christy R., *Foundations of electromagnetic theory*, Addison Wesley Longman, Reading (1993).
- [Ross, 1974] Ross S., *Differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1974).
- [Schmidt, 1999] Schmidt F., “Development of a Time-Resolved Optical Tomography System for Neonatal Brain Imaging,” Ph.D. Thesis, University College London, London (1999).

- [Scholl, 1996] Scholl M., “Signal generated by an extra-solar-system planet detected by a rotating shearing interferometer”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 1584-1592 (1996).
- [Siegman, 1986] Siegman A., *Lasers*, University Science Books, California (1986).
- [Sinichkin *et al*, 2002] Sinichkin Y., Kollias N., Zonios G., Utz S., Tuchin V., “Reflectance and fluorescence spectroscopy of human skin In Vivo,” in *Handbook of optical biomedical diagnostics*, V. Tuchin Ed., SPIE Press, 725-787 (2002).
- [Sorenson *et al*, 1987] Sorenson J., Phelps M., *Physics in Nuclear Medicine*, Grune & Stratton, (1987).
- [Spiegel, 1998] Spiegel M., *Análisis Vectorial*, McGraw-Hill, México, pp. 57-81 (1998).
- [Srinivasan *et al*, 2003] Srinivasan S., Pogue B., Jiang S., Dehghani H., Kogel C., Soho S., Gibson J., Tosteson T., Poplack S., Paulsen K., “Interpreting hemoglobin and water concentration, oxygen saturation, and scattering measured in vivo by near-infrared breast tomography”, *PNAS*, **100**, pp. 12349-12354 (2003).
- [Star *et al*, 1987] Star W., Marijnissen J., Jansen H., Keijzer M., van Gemert M., “Light dosimetry for photodynamic therapy by whole bladder wall irradiation”, *Photochem. Photobiol.*, **46**, pp. 619–624 (1987).
- [Starna, 2005] Starna Cells, *Starna Cells Catalog*, Starna Cells Web Catalog: [http://www.starna.com/d\\_download / Starna.pdf](http://www.starna.com/d_download/Starna.pdf), Starna Cells, (2005).
- [Steel, 1986] Steel W., *Interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [Stratton, 1941] Stratton J., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1941).

- [Strojnik *et al*, 1999] Strojnik M., Paez G., “Simulated interferometric patterns generated by a nearby star-planet system and detected by a rotational shearing interferometer”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, pp. 2019-2024 (1999).
- [Taylor, 1981] Taylor J., *An introduction to error analysis*, University Science Books, California (1997).
- [Thorlabs, 2001] Thorlabs Inc., *Kinematic Mirror Mount for Ø1" Optics*, Thorlabs Web Catalog: [http://www.thorlabs.com/NewGroupPage9.cfm?Category\\_ID=26&ObjectGroup\\_ID=231&PN=KC1-PZ](http://www.thorlabs.com/NewGroupPage9.cfm?Category_ID=26&ObjectGroup_ID=231&PN=KC1-PZ), Thorlabs Inc, (2001).
- [Thorlabs A, 2003] Thorlabs Inc., *Operating Manual Model WM100 and WM100B Omega Meter Beam Profiler*, Thorlabs Inc, (2003).
- [Thorlabs B, 2003] Thorlabs Inc., *Operating Manual, MDT693 Three Channel Piezo Driver*, Thorlabs Inc, (2003).
- [Thyagarajan *et al*, 1981] Thyagarajan G., Ghatak A., *Lasers Theory and Applications*, Plenum Press, New York (1981).
- [Tuchin, 2002] Tuchin V., *Handbook of optical biomedical diagnostics*, V. Tuchin Ed., SPIE Press, (2002).
- [van de Hulst, 1981] van de Hulst H., *Light Scattering by Small Particles*, Dover Publications, New York, (1981).
- [van Staveren *et al*, 1991] van Staveren H., Moes C., van Marle J., Prahl S., van Gemert M., “Light scattering in Intralipid-10% in the wavelength range of 400-1100 nm”, *App. Opt.*, **30**(31), pp. 4507–4514 (1991).
- [Wang *et al*, 1979] Wang Z., Guo D., *Special functions*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [Wangsness, 1979] Wangsness R., *Electromagnetic Fields*, John Wiley & Sons, New York, (1979).

- [Watson, 1995] Watson G., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, New York, (1995).
- [Webb, 1990] Webb S., *The Physics of Medical Imaging*, Adam Hilger, S. Webb Ed., Bristol, Philadelphia and New York, (1990).
- [Wolbarsh *et al*, 1981] Wolbarsh M., Walsh A., George G., “Melanin, a unique biological absorber”, *App. Opt.*, **20**(13), pp. 2184-2186 (1981).
- [Zimnyakov, 2002] Zimnyakov D., “Coherence Phenomena and Statistical Properties,” in *Handbook of optical biomedical diagnostics*, V. Tuchin Ed., SPIE Press, 265-310 (2002).