



*Medición de Topografía de Superficies Difusas y
Especulares por Técnicas de Proyección y Reflexión
de Franjas*

Tesis para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestría en Ciencias (Óptica)

Presenta:

Ing. David Ignacio Serrano García

Asesora: Dra. Amalia Martínez García

Enero 2011. León, Guanajuato, México

Resumen de la Tesis

Medición de Topografía de Superficies Difusas y Especulares por Técnicas de Proyección y Reflexión de Franjas

La recuperación tridimensional de la forma de un objeto es de gran interés en diferentes aplicaciones que pueden ser industriales, técnicas y médicas. Dadas sus características de campo completo, robustez, precisión, entre otras, las técnicas ópticas han llegado a ser de gran importancia en la obtención de la topografía. Una técnica comúnmente utilizada corresponde a la de proyección de franjas. Las franjas pueden ser generadas sintéticamente y proyectadas mediante el uso de un proyector hacia el objeto bajo investigación. La luz es esparcida por el objeto y captada por una cámara CCD. En el caso de objetos que no esparcen o que esparcen poca luz, es común que se les coloque un material (mediante spray) que provoque el esparcimiento de la luz para que pueda ser aplicada la técnica de proyección de franjas. Una solución es cambiar a la técnica de reflexión de franjas. La técnica de reflexión de franjas consiste en un sistema óptico sencillo donde se evalúa un patrón de franjas que es reflejado de la superficie de prueba. En este caso la información de la fase permite identificar los ángulos de reflexión sobre el objeto. Los resultados corresponden a información del gradiente sobre el objeto por lo que la información de la topografía se consigue a través de una integración.

Se obtiene la topografía de dos tipos de objetos de prueba cuya superficie es de tipo difuso y especular. La técnica utilizada en el primer caso corresponde a la técnica de proyección de franjas, mientras que para el segundo caso se implementó la técnica de reflexión de franjas. En ambos casos, la topografía es determinada a partir de la observación de la distorsión de las franjas, las cuales son captadas por una cámara CCD. Se presenta la teoría aplicada en cada caso para obtener el valor del parámetro z asociado a la topografía.

Agradecimientos

A la Dra. Amalia Martínez García por su apoyo incondicional y conocimientos brindados desde estancias de pregrado.

Al Ing. Juan Antonio Rayas por su apoyo técnico en la realización de este trabajo de tesis.

Al Dr. Noel-Iván Toto-Arellano y al Dr. Bernardino Barrientos García por sus valiosas sugerencias al presente trabajo de tesis.

Mis más sinceros agradecimientos a mis compañeros y amigos encontrados en esta institución.

A mi Princesa Geliztle por todas las vivencias compartidas alegremente y las que nos faltan por vivir.

A mi Padre por todo el cariño y apoyo mostrado fuera y dentro del ámbito académico.

Al CONACYT por el apoyo otorgado mediante la beca con el número de registro 234454-31458, que hizo posible la realización de mis estudios de maestría. También se agradece a CONACYT por el proyecto número 48286-F: “Interferometría de moteado para contorneo y análisis de deformaciones en 3D”, con el cual se adquirió parte del equipo para la realización de la presente tesis.

Dedico mi trabajo de tesis a:

Mi padre:

J. Jesús Serrano Hernández

A mis hermanos:

Jesús Rafael Serrano García y José Marcelo Serrano García

ÍNDICE GENERAL

Objetivo de la Tesis	- 1 -
Prólogo	- 1 -
CAPÍTULO 1: REFLEXIÓN ESPECULAR Y DIFUSA	- 8 -
CAPÍTULO 2: TEORÍA ASOCIADA A LA TÉCNICA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS	- 11 -
2.1 Medición de la topografía con iluminación colimada	- 11 -
2.2 Medición de la topografía con iluminación divergente	- 14 -
CAPÍTULO 3: TEORÍA ASOCIADA A LA TÉCNICA DE REFLEXIÓN DE FRANJAS	- 17 -
3.1 Revisión de algunos sistemas para la reconstrucción de forma mediante reflexión de franjas	- 17 -
3.2 Principio utilizado para la medición topográfica de superficies especulares	- 18 -
3.3 Planteamiento teórico de la determinación de la pendiente	- 21 -
CAPÍTULO 4: PARTE EXPERIMENTAL	- 23 -
4.1 Medición de topografía para objetos difusos	- 23 -
4.2 Medición de topografía para objetos especulares	- 25 -
4.2.1 Arreglo experimental para objetos especulares	- 26 -
4.3 Objeto especular convexo	- 28 -
4.3.1 Trazo de rayos incidentes y reflejados	- 33 -
4.3.2 Topografía del objeto especular convexo	- 35 -
4.4 Objeto especular cóncavo	- 39 -
4.4.1 Trazo de rayos incidentes y reflejados	- 45 -
4.4.2 Topografía de un objeto especular cóncavo	- 47 -
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO	- 50 -
Trabajo a futuro	- 51 -
APÉNDICE A: LEY DE REFLEXIÓN	- 52 -
A.1 Principio de Fermat	- 52 -
A.2 Ley de reflexión	- 53 -
APÉNDICE B: FORMACIÓN DE IMÁGENES PARA ESPEJOS ESFÉRICOS	- 57 -
B.1 Ecuación de espejos esféricos	- 57 -
B.2 Deducción de la ecuación para espejos esféricos	- 58 -
B.3 Trazo de rayos en un espejo esférico para la formación de imágenes	- 59 -
APÉNDICE C: FORMACIÓN DE IMAGEN EN UNA CÁMARA	- 64 -
C.1 Modelo de pinhole	- 65 -
C.2 Modelo geométrico del modelo de pinhole	- 65 -
Referencias	- 67 -

Objetivo de la Tesis

Implementación de la técnica de proyección de franjas en el caso de superficies difusas y de la técnica de reflexión de franjas para el caso de superficies especulares en la obtención de su topografía.

Prólogo

La recuperación tridimensional de la forma de un objeto por métodos ópticos es de gran interés en diferentes áreas como industriales¹, técnicas² y médicas^{3, 4}. Los métodos ópticos han ganado gran importancia debido a su robustez, precisión y en algunas casos facilidad en su implementación.

La técnica de proyección de franjas es ampliamente utilizada en la obtención de la topografía de objetos cuya superficie es de tipo difuso.⁵ En este método, un patrón de franjas es proyectado sobre el objeto como se muestra en la figura 0.1, el patrón de franjas deformado por la topografía del objeto es captado por una cámara CCD. El patrón de franjas de referencia y el deformado son procesados en una PC permitiendo determinar las dimensiones de la superficie del objeto. La figura 0.2 muestra un patrón de franjas las cuales son deformadas de acuerdo a la topografía del objeto. La figura 0.3 muestra la topografía en las unidades correspondientes a *mm*. Esta técnica puede ser combinada con el efecto de Talbot en cuyo caso se conoce como interferometría de Talbot para obtener la topografía de objeto de prueba al colocarlo en una de las autoimágenes de la rejilla.⁶

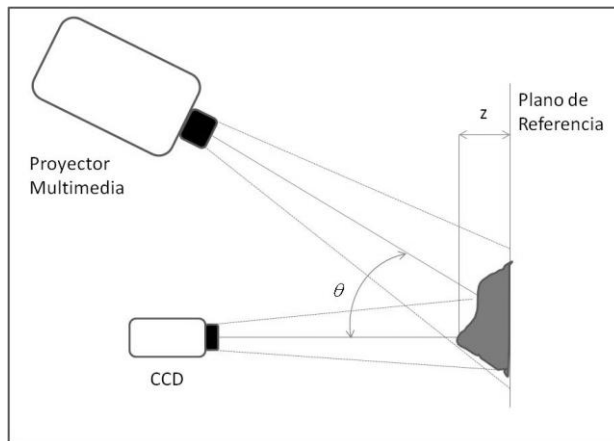


Figura 0.1.- Esquema de un sistema de proyección de franjas.

Cuando la reflexión en el objeto no es totalmente difusa, por ejemplo en superficies reflectoras, una solución es aplicar un tinte sobre la superficie con la finalidad de hacerla una superficie difusora. En algunos casos esta solución resulta inconveniente y es donde se puede utilizar la técnica de reflexión de franjas.

En la técnica de reflexión de franjas se busca evaluar el patrón de franjas que ha sido reflejado por la superficie bajo estudio. El propósito es obtener los gradientes de la superficie para posteriormente efectuar una integración sobre ella y obtener así la topografía. A continuación se mencionarán algunas configuraciones correspondientes a esta técnica.

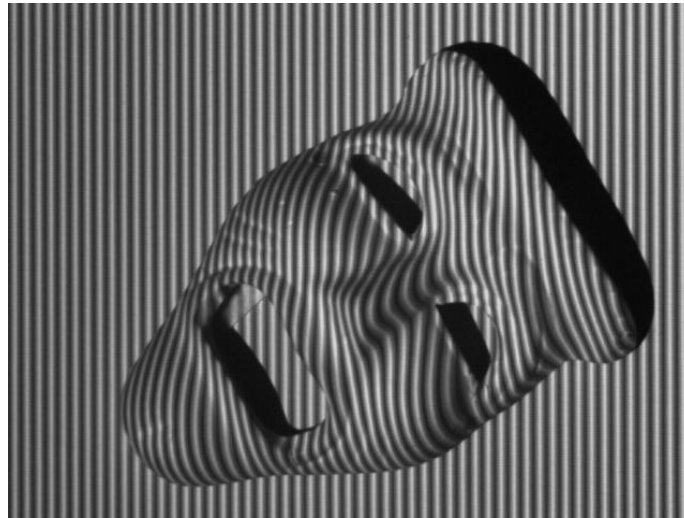


Figura 0.2.- Franjas proyectadas en un objeto correspondiente a una carita de teatro.

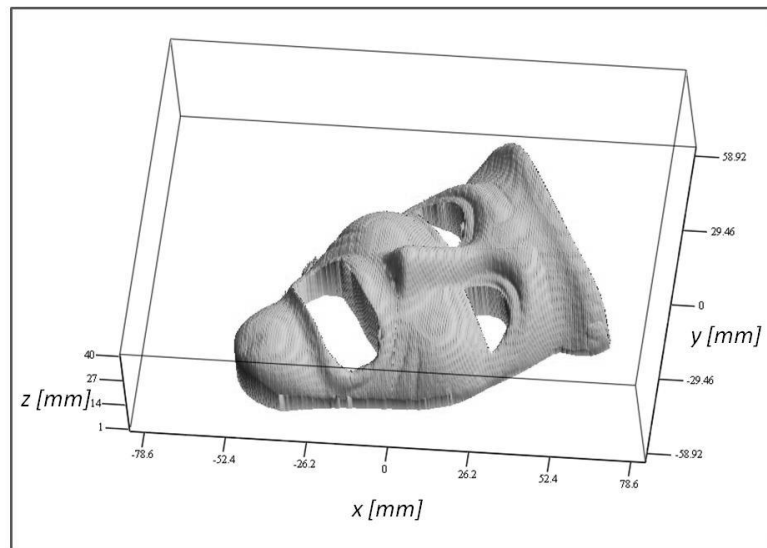


Figura 0.3. Topografía recuperada correspondiente a una carita de teatro.

La figura 0.4 muestra un arreglo basado en la técnica de reflexión de franjas ⁷. Este tipo de arreglos puede ser implementado en el análisis de objetos como parabrisas de carros, sensor de presión, lentes oftálmicas, espejos, etc. En esta técnica el objeto especular es colocado enfrente del monitor los cuales están en el eje óptico. La cámara es colocada a un ángulo con respecto al eje óptico ^{7,8}. Como se mencionó anteriormente se calculan los gradientes locales de la superficie y posteriormente la topografía del objeto por medio de integración.

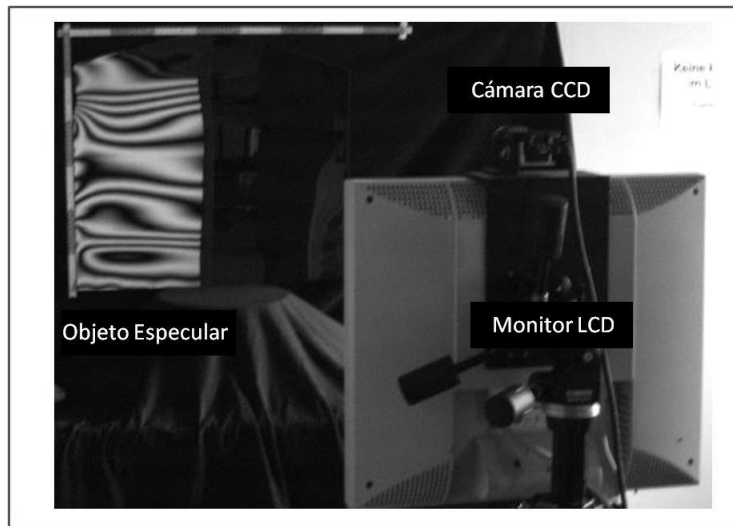


Figura 0.4.- Arreglo utilizado para medición de superficies especulares basado en la reflexión de un patrón de franjas mostrado por el monitor LCD .

Una técnica conocida como “Software Configurable Optical Test System” (SCOTS) se encuentra basada en deflectometría de fase y reflexión de franjas senoidales con corrimientos de fase continuos. Esta técnica puede ser utilizada para medición de superficie de reflectores solares y partes internas de los focos de automóvil. Utilizando un sistema de visión estéreo y dos pantallas que muestran un patrón de franjas determinado se obtienen los vectores normales a la superficie bajo estudio ⁹, ver figura 0.5.

La figura 0.6 muestra otro arreglo basado en la misma técnica de reflexión de franjas ¹⁰. En este caso las franjas son proyectadas hacia una pantalla y reflejadas hacia la cámara CCD mediante la superficie de prueba.

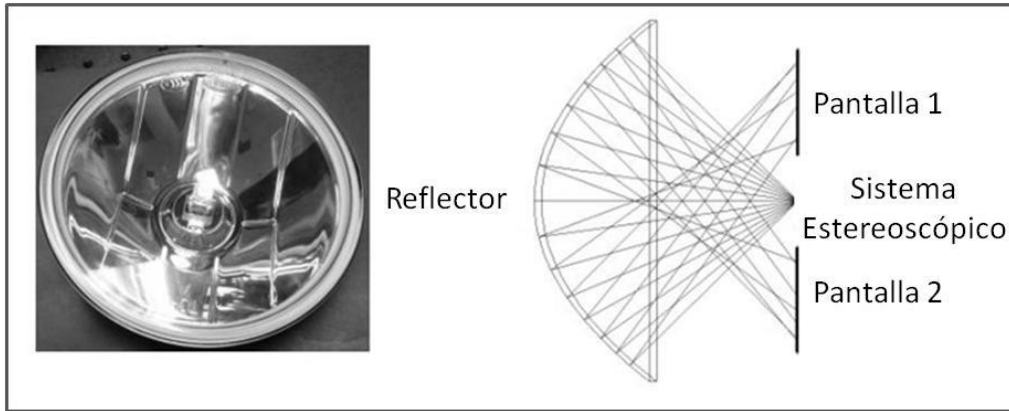


Figura 0.5.- Arreglo utilizado para la medición de reflectores solares y partes internas de los focos de automóvil por medio de la técnica de reflexión de franjas y deflectometría de fase.

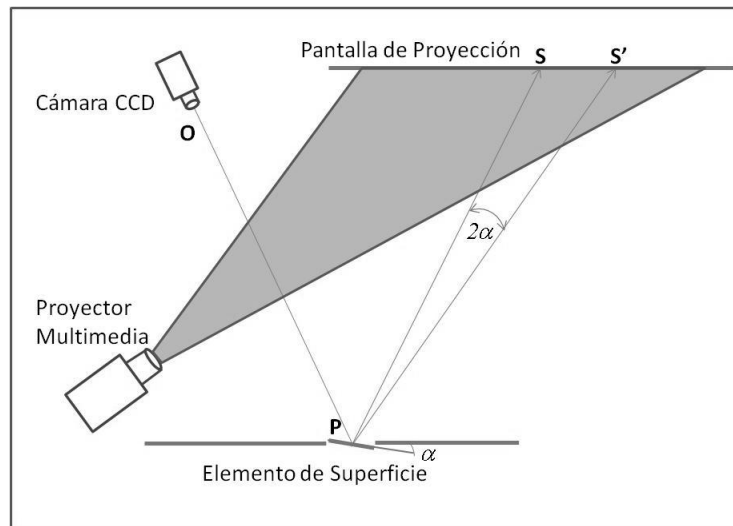


Figura 0.6.- Arreglo experimental usado para la medición de fracturas y deformaciones en partes automotrices.

La técnica de reflexión de franjas se basa principalmente en la obtención de los rayos incidentes y reflejados en la superficie. En la figura 0.7 se muestra un arreglo experimental para medición de topografía de espejos esféricos. Este sistema se basa en el desplazamiento mecánico del monitor LCD para el cálculo de los vectores de incidencia y en la calibración de la cámara CCD para el cálculo de los vectores reflejados¹¹.

Tomando como idea el trazo de rayos incidentes sobre un objeto transparente, se pueden obtener mediciones del frente de onda aberrado utilizando deflectometría de fase. Ver figura 0.8.¹²

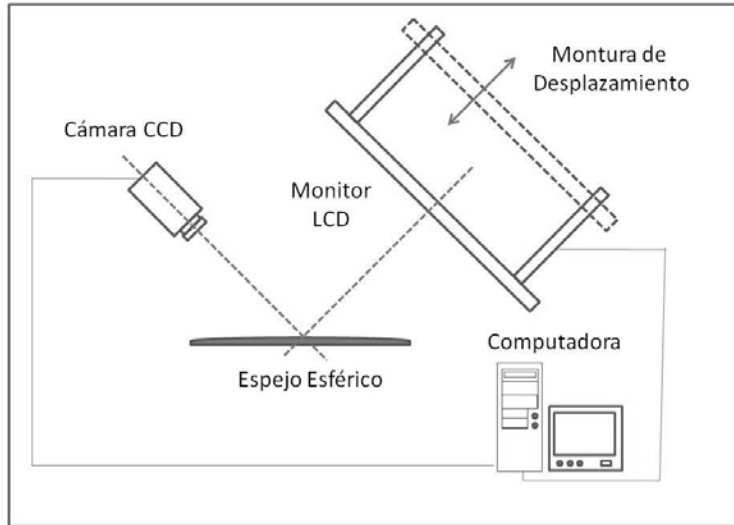


Figura 0.7.- Arreglo basado en el desplazamiento mecánico del monitor LCD para la medición de un espejo esférico.

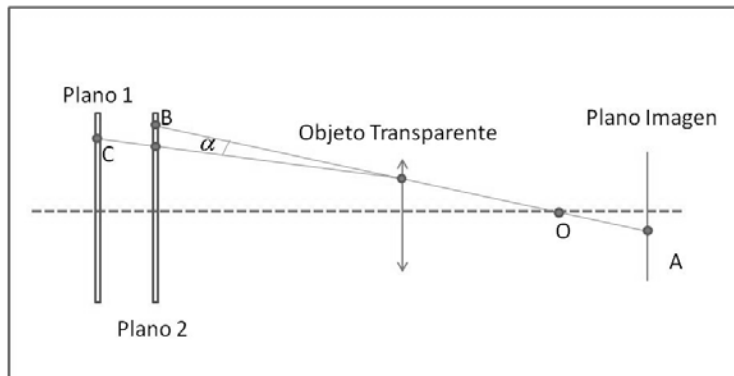


Figura 0.8.- Medición del frente de onda de aberración para un objeto transparente utilizando deflectometría de fase.

El diseño experimental utilizado en este trabajo de tesis para la medición de la topografía de una superficie reflectora se muestra en la figura 0.9, donde una pantalla LCD se encuentra situada a una cierta distancia de la superficie y una cámara CCD capta el patrón deformado debido a la reflexión. El uso de un divisor de haz hace posible tener un sistema en línea con el inconveniente de limitar el tamaño del objeto y con la ventaja de no tener que tomar en cuenta una corrección por observación o incidencia oblicua del patrón de franjas ¹³.

El uso de la técnica de proyección de franjas en el análisis de los mismos objetos de prueba nos permitirá una comparación entre ambas técnicas. Por otro lado, se obtiene información de la topografía de los objetos mediante mediciones de un esferómetro y de una máquina de coordenadas.

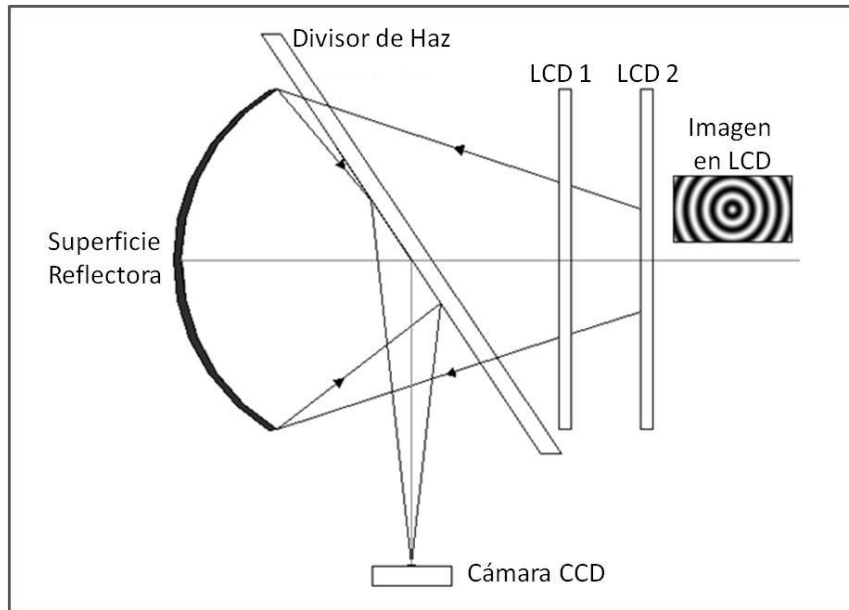


Figura 0.9.- Diseño experimental para la medición de forma de una superficie reflectora cóncava.

El contenido de la tesis está estructurado de la siguiente manera:

CAPÍTULO 1.- Se da una breve explicación de la diferencia entre la reflexión especular y difusa.

CAPÍTULO 2.- Se presenta la teoría para la técnica de proyección de franjas en los casos de iluminación colimada y divergente.

CAPÍTULO 3.- Se plantean los principios teóricos para la técnica de reflexión de franjas.

CAPÍTULO 4.- Se muestran los resultados obtenidos para la medición de la topografía aplicando las técnicas de proyección de franjas y reflexión de franjas.

CAPÍTULO 5.- Conclusiones generales y trabajo a futuro.

APÉNDICE A.- Explicación teórica de la ley de reflexión, partiendo del principio de Fermat.

APÉNDICE B.- Ley de reflexión en espejos esféricos.

APÉNDICE C.- Modelo del pinhole.

CAPÍTULO 1: REFLEXIÓN ESPECULAR Y DIFUSA

Podemos describir el proceso de reflexión de la luz por una superficie arbitraria mediante la Ley de Reflexión. Si podemos determinar la normal a la superficie en un punto cualquiera, el ángulo de incidencia puede ser calculado. El rayo de luz se verá reflejado de tal manera que, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, medido respecto a la normal a la superficie.¹⁴ Este principio puede ser aplicado a cualquier superficie (vertical, horizontal, en ángulo y superficies curvas) mientras la normal a la superficie en un punto pueda ser determinada¹⁵, como se muestra en la figura 1.1.

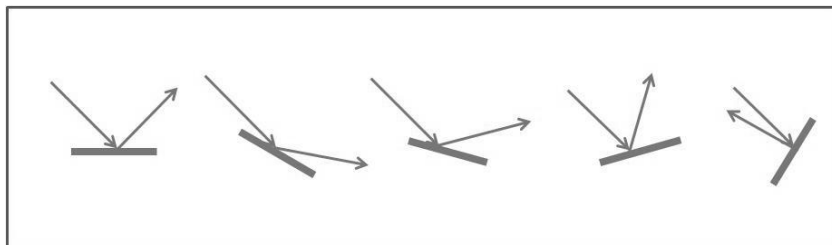


Figura 1.1.- Vectores incidentes y reflejados. El ángulo reflejado es igual al incidente respecto al vector normal a la superficie.

Todo cuerpo opaco o transparente refleja una parte de la luz que incide sobre él. Cuando la superficie de los cuerpos es áspera o irregular éstos producen una **reflexión difusa**, enviando la luz reflejada en todas las direcciones posibles (figura 1.2). Gracias a esta reflexión difusa podemos ver las superficies iluminadas: porque una parte de esa luz que ha sido reflejada en todas direcciones llega hasta donde están nuestros ojos. En cambio una superficie lisa y bien pulida produce una reflexión regular; la luz que incide en una dirección determinada y es reflejada en otra dirección bien determinada (figura 1.2). Este tipo de reflexión se llama del tipo especular.^{16,17}

Por ejemplo en superficies reflectoras como espejos el tipo de reflexión conocida es **reflexión especular**. La reflexión en una superficie rugosa como un papel se define como **difusa**, lo que ocurre en esta última es que existen reflexiones subsecuentes después de incidir en el material, ver figura 1.3.

En una superficie difusa se sigue cumpliendo la ley de reflexión, sin embargo debido a la rugosidad de la misma la normal en cada punto difiere en orientación lo que resulta en rayos reflejados en diferentes direcciones,¹⁵ esto significa que un haz

concentrado que incide sobre una superficie rugosa se reflejará de manera aleatoria como se indica en la figura 1.3.

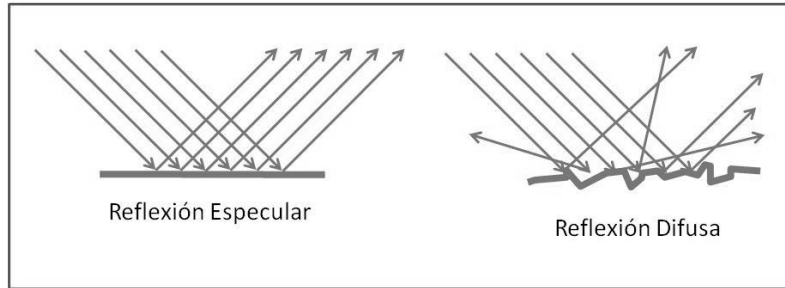


Figura 1.2.- Ejemplos del comportamiento de los rayos incidentes en una superficie especular y difusa.

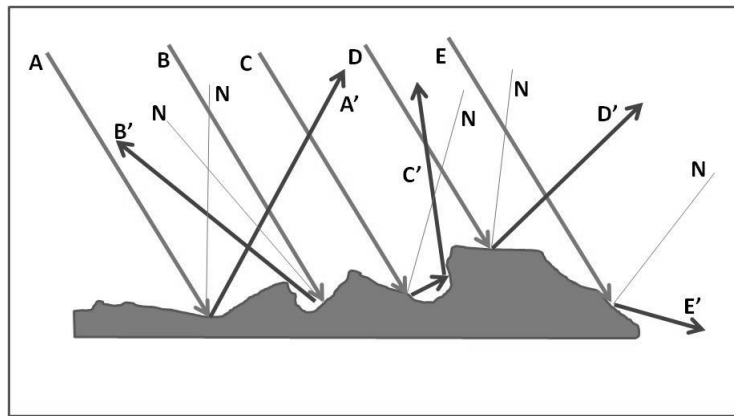


Figura 1.3.- Reflexión difusa, la normal en cada punto de la superficie difiere en orientación lo que resulta en reflexiones en diferentes direcciones.

La figura 1.4 muestra la transición de una superficie lisa a una rugosa y como va cambiando la reflexión de especular a difusa.

En esta tesis se obtiene la topografía de objetos cuyas superficies son, en un caso de tipo difuso y en otro, de tipo especular. Para el primer caso se aplicará la técnica conocida como proyección de franjas, mientras que en el segundo caso se implementará la técnica conocida como reflexión de franjas.

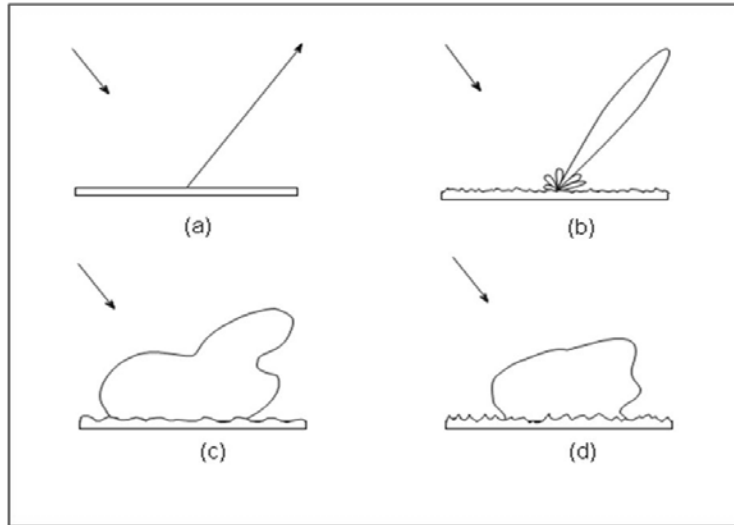


Fig. 1.4 Transición de reflexión especular a dispersión difusa. Las superficies son: (a) lisa, (b) ligeramente rugosa, (c) moderadamente rugosa y (d) rugosa.

CAPÍTULO 2: TEORÍA ASOCIADA A LA TÉCNICA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

La técnica de proyección de franjas es aplicable en la obtención de la topografía de objetos difusos. Las franjas pueden ser generadas sintéticamente y ser proyectadas mediante el uso de un proyector. Otra manera es formar la imagen de una rejilla sobre el objeto o mediante la proyección del patrón de interferencia generado por dos frentes de onda coherentes provenientes de un interferómetro.^{18,19}

Se presentarán los casos del uso iluminación colimada e iluminación divergente. Éste último presentando la ventaja de poder analizar objetos de grandes dimensiones.^{2,36}

2.1 Medición de la topografía con iluminación colimada

La obtención de la topografía de un objeto por medio de la técnica de proyección de franjas con la aproximación de iluminación colimada se encuentra dada por:²

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{d}{\sin \theta} \quad (2.1)$$

donde φ representa el término de fase, d el periodo de las franjas proyectadas y θ el ángulo existente entre la observación e iluminación. En esta sección se obtiene la ecuación 2.1 partiendo de la interferencia de dos frentes de onda planos cuyos vectores de iluminación son \hat{n}_1 y \hat{n}_2 . La interferencia da lugar a un conjunto de franjas sobre la superficie $z = f(x, y)$ ¹⁸. Cabe mencionar que \hat{n}_1 y \hat{n}_2 representan los vectores de propagación de la luz hacia el punto del objeto a un ángulo $(\theta + \alpha/2)$ y $(\theta - \alpha/2)$ con respecto al eje z. (figura 2.1).

Para simplificación de cálculos, se considera el caso de la interferencia entre dos frentes de onda planos (figura 2.1) dados por:

$$\begin{aligned} U_1 &= \exp(ik\hat{n}_1 \cdot \vec{r}) \\ U_2 &= \exp(ik\hat{n}_2 \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

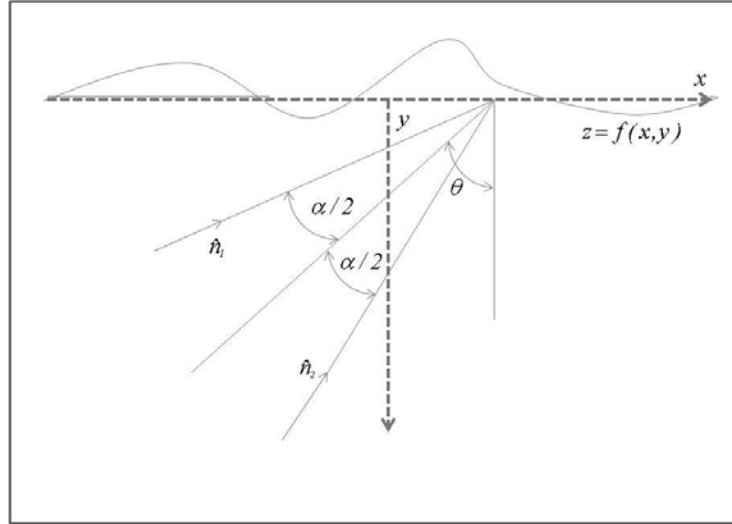


Figura 2.1.- Proyección de franjas por medio de la interferencia de dos frentes de onda planos con direcciones de propagación establecidas por \hat{n}_1 y \hat{n}_2 .

los cuales inciden en una superficie descrita por la función $z = f(x, y)$. El vector de posición es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y el vector de propagación queda definido por $\hat{n} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}$, sustituyendo en las ecuaciones 2.2 se obtiene:

$$U_1 = Ue^{ik[x \sin(\theta + \frac{\alpha}{2}) + z \cos(\theta + \frac{\alpha}{2})]} \quad (2.3)$$

$$U_2 = Ue^{ik[x \sin(\theta - \frac{\alpha}{2}) + z \cos(\theta - \frac{\alpha}{2})]} .$$

El patrón de interferencia resultante sobre la superficie se encuentra dado por:

$$I = 2(I + \cos \varphi) \quad (2.4)$$

donde

$$\varphi = k(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{d}(x \cos \theta + z \sin \theta), \quad (2.5)$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (2.6)$$

La ecuación 2.4 representa una rejilla senoidal con líneas paralelas sobre el eje y y con modulación en fase debido a variaciones en altura z con un periodo dado por

$$d_x = \frac{d}{\cos \theta} \quad (2.7)$$

en términos de frecuencia obtenido como

$$f_x = \frac{I}{d_x} = \frac{\cos \theta}{d} \quad (2.8)$$

Asumiendo que captamos una imagen (I_1) del objeto bajo estudio dado por $z_1 = f_1(x, y)$ y posteriormente una imagen (I_2) perteneciente a un objeto de referencia, por ejemplo un plano, dado por $z_2 = f_2(x, y)$. Utilizando la ecuación 2.4 y asumiendo $U = I$ se obtiene la diferencia entre ambas imágenes representada como:

$$I_1 - I_2 = 2(1 + \cos \varphi_1) - 2(1 + \cos \varphi_2) \quad (2.9)$$

$$I_1 - I_2 = 4 \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.10)$$

de la ecuación 2.5

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{d}(x_1 \cos \theta_1 + z_1 \sin \theta_1) \quad (2.11)$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{d}(x_2 \cos \theta_2 + z_2 \sin \theta_2)$$

debido a que no se efectuaron cambios en el ángulo de incidencia, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, buscando solo cambios en z , $x_1 = x_2 = x$, se obtiene que:

$$I_1 - I_2 = 4 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{d} \right) \left(x \cos \theta + \sin \theta \left(\frac{z_2 + z_1}{2} \right) \right) \right] \sin \left[\left(\frac{\pi}{d} \right) (\sin \theta (z_2 - z_1)) \right] \quad (2.12)$$

Vemos que esta función representa las franjas originales proyectadas (excepto por una ligera diferencia en fase) moduladas en amplitud por un factor de:

$$\sin \left[\left(\frac{\pi}{d} \right) (\sin \theta (z_2 - z_1)) \right] \quad (2.13)$$

teniendo un mínimo cuando

$$\left(\frac{\pi}{d} \right) (z_2 - z_1) \sin \theta = n\pi \quad (2.14)$$

Sabiendo que $\Delta z = z_2 - z_1$ y $n = \frac{\varphi}{2\pi}$ la ecuación 2.14 puede reescribirse como:

$$\Delta z = z_2 - z_1 = \frac{nd}{\sin \theta} \quad (2.15)$$

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{d}{\sin\theta} \quad (2.16)$$

La ecuación 2.16 representa la topografía de un objeto que es iluminado con un haz colimado tomando una superficie de referencia. El término φ representa la diferencia entre la fase de la superficie de referencia y la del objeto, d el periodo de las franjas proyectadas y θ el ángulo existente entre la observación e iluminación colimada.

2.2 Medición de la topografía con iluminación divergente

Considerando la proyección de franjas generadas por la interferencia entre dos fuentes puntuales, se establecerá el modelo matemático para la obtención de la topografía de un objeto¹⁹, figura 2.2. Sea $P_1(-x_1, z_1)$ y $P_2(-x_2, z_2)$ la posición de las fuentes puntuales, separadas por una distancia $2a$ iluminando el plano $x-y$.

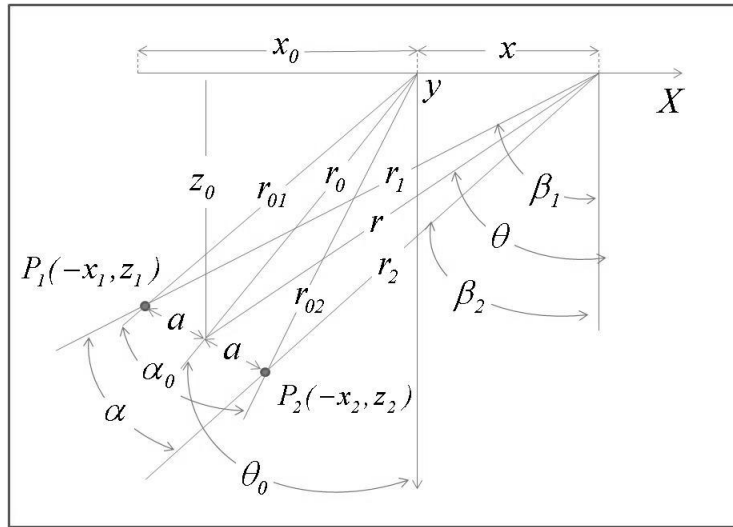


Figura 2.2.- Proyección de franjas por medio de la interferencia entre dos fuentes puntuales.

Estas dos fuentes puntuales formarán un patrón de interferencia sobre el plano $x-y$. A diferencia del modelo de ondas planas, los puntos de igual fase en el patrón de interferencia formarán hiperboloides de revolución centrados en el origen, que coincide con el centro del objeto bajo prueba¹⁹. En base a la figura 2.2 puede obtener,

$$d_0 = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} \approx \frac{\lambda}{2 \tan\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{a}{r_0}\right)}, \quad (2.17)$$

$$\Delta z_0 = \frac{d_0}{\sin \theta_0} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{ax_0}{r_0^2}\right)}, \quad (2.18)$$

$$d_{x_0} = \frac{d_0}{\cos \theta_0} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{az_0}{r_0^2}\right)}, \quad (2.19)$$

Las ecuaciones 2.17, 2.18 y 2.19 se refieren al punto central del objeto. Para un punto arbitrario del objeto es necesario efectuar ciertas aproximaciones basadas en el modelo de la figura 2.2.¹⁹ Se dibujaron los vectores r_1, r_2 desde las fuentes puntuales ubicadas en las posiciones P_1 y P_2 hacia un punto x arbitrario de la superficie. Como primera aproximación se asume que el plano de interferencia intersecta la superficie del objeto en x y bisecta el ángulo α entre r_1, r_2 . Se obtiene que:

$$\theta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad (2.20)$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}, \quad (2.21)$$

$$\Delta z = \frac{d}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)} = \frac{\lambda}{\cos \beta_2 - \cos \beta_1} \quad (2.22)$$

$$\Delta z = \frac{\lambda}{\frac{z_2}{r_2} - \frac{z_1}{r_1}}, \quad (2.23)$$

$$d_x = \frac{d}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\frac{x_1 + x}{r_1} - \frac{x_2 + x}{r_2}}, \quad (2.24)$$

como segunda aproximación $r_1 = r_2 = r$ dado por

$$r = \sqrt{(x_0 + x)^2 + z_0^2} \quad (2.25)$$

y con la ecuación 2.23 se obtiene

$$\Delta z = \frac{\lambda}{\frac{z_2 - z_1}{r}} = \frac{\lambda}{2a \sin \theta_0} = \Delta z_0 \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (2.26)$$

$$d_x = \frac{\lambda}{\frac{x_1 - x_2}{r}} = \frac{\lambda}{2a \cos \theta_0} = d_{x0} \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (2.27)$$

Al evaluar 2.26 y 2.27 en las orillas de un objeto de ancho $2X$ centrado en el origen, se obtiene un factor en común dado por:

$$\frac{r(\pm X)}{r_0} = \frac{\sqrt{(x_0 \pm X)^2 + z_0^2}}{r_0} = \sqrt{\left(\sin \theta_0 \pm \frac{X}{r_0} \right)^2 + \cos^2 \theta_0} \quad (2.28)$$

Por lo tanto ecuaciones 2.26 y 2.28 permite obtener la topografía de un objeto utilizando iluminación divergente:

$$\Delta z_n = n \frac{d_0}{\sin \theta_0} \sqrt{\left(\sin \theta_0 \pm \frac{X}{r_0} \right)^2 + \cos^2 \theta_0} \quad (2.29)$$

donde $d_0 = m d_g$, siendo m el valor de amplificación del sistema de proyección, d_0 el valor del periodo de la rejilla, θ_0 ángulo de proyección respecto del eje óptico y r_0 es la distancia del punto medio de ambas fuentes hacia el objeto.

En términos de fase la ecuación 2.29 puede ser re-escrita como:

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{d_0}{\sin \theta} \sqrt{\left(\sin \theta_0 + \frac{x}{r_0} \right)^2 + \cos^2 \theta} \quad (2.30)$$

donde: φ es la diferencia de fase obtenida para el plano de referencia y la fase del objeto y x como la distancia a lo largo del objeto medido desde el origen (usualmente el centro del objeto).

Para $x = 0$ la ecuación 2.30 se reduce a:

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{d_0}{\sin \theta} \quad (2.31)$$

lo cual se reduce al caso de iluminación colimada mostrado en la [ecuación 2.16](#)

CAPÍTULO 3: TEORÍA ASOCIADA A LA TÉCNICA DE REFLEXIÓN DE FRANJAS

3.1 Revisión de algunos sistemas para la reconstrucción de forma mediante reflexión de franjas

Existen diversos sistemas comerciales con sensores que capturan la luz reflejada de un objeto iluminado con un patrón de franjas determinado. Las mediciones efectuadas en estos objetos prueban que la técnica de reflexión de franjas permite mediciones de variaciones en la curvatura con alta sensibilidad²⁰. Se mencionarán algunas complicaciones en las mediciones de los objetos y algunas soluciones propuestas debido a la ambigüedad que existe al efectuar la medición por reflexión.

Teniendo en cuenta el principio de reflexión que señala que el ángulo que existirá entre el rayo incidente y reflejado será bisectado por la normal (\hat{n}) de la superficie en un punto dado (S), (ver apéndice A).

Existen diferentes aproximaciones propuestas para resolver el problema de reconstrucción para superficies especulares, una solución directa y exacta se encuentra al desplazar el monitor LCD una cierta distancia D . Con esta metodología las coordenadas de fase de los dos puntos $\varphi_1(x, y)$ y $\varphi_2(x, y)$ representan un solo rayo \hat{k} (figura 3.1). Una inconveniencia es la traslación mecánica de la pantalla en relación a la cámara y el objeto.

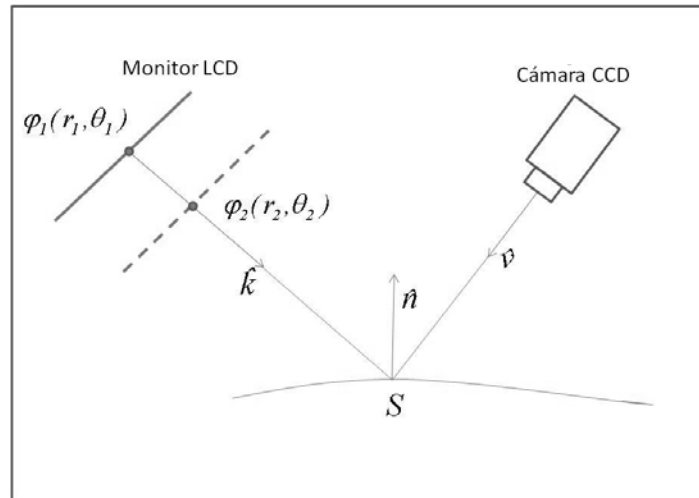


Figura 3.1.- Solución utilizada para resolver la ambigüedad en una medición por medio de reflexión efectuando un desplazamiento en el monitor LCD.

Otra solución encontrada es la adición de otra cámara que observe la misma área del objeto pero diferente región reflejada de la pantalla LCD, lo que incrementa la información obtenida reduciendo el grado de error y además el vector normal (\hat{n}) en cada punto de la superficie S ^{20,21} (figura 3.2).

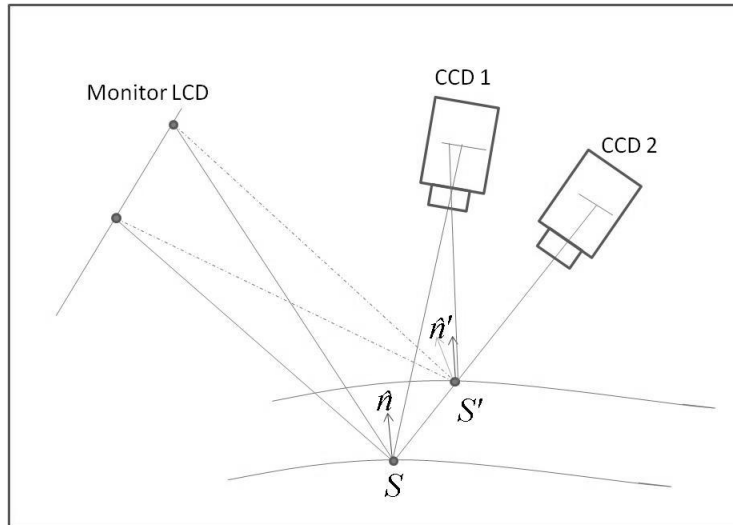


Figura 3.2.- Medición de forma en una superficie reflectora utilizando dos cámaras para el cálculo de la normal en un punto de la superficie.

3.2 Principio utilizado para la medición topográfica de superficies especulares

El arreglo óptico experimental utilizado para la medición de una superficie reflectora se muestra en la figura 3.3, donde una pantalla LCD se encuentra situada a una distancia de la superficie. Se genera un patrón de franjas en la pantalla LCD, el cual será reflejado mediante el objeto de prueba hacia la cámara CCD. Dependiendo de la forma topográfica del objeto de prueba, las franjas reflejadas aparecerán distorsionadas y una cámara CCD capta el patrón deformado debido a la reflexión en el objeto de prueba. Se utiliza un divisor de haz para tener un sistema en línea¹³.

Se capturan dos patrones de franjas los cuales corresponden a dos posiciones diferentes de la pantalla LCD. Para cada posición se aplica la técnica de desplazamiento de fase de cuatro pasos para obtener información de la fase en cada una de las dos posiciones.

Las fases son utilizadas en la asociación de pares de puntos correspondientes y realizar así el trazo de rayos incidentes en la superficie reflectora.

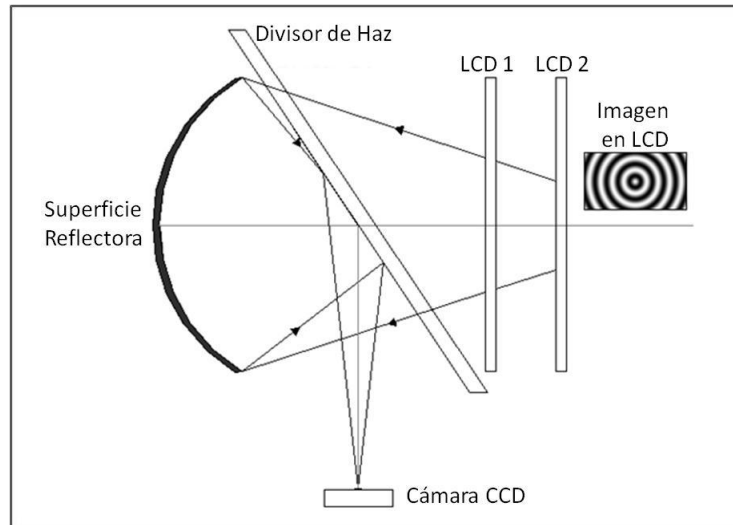


Figura 3.3.- Diseño experimental para la medición de forma de una superficie reflectora cóncava.

La idea de efectuar este desplazamiento de la LCD es obtener el vector incidente a partir del par de patrones de fase mientras que el vector reflejado se obtiene mediante los parámetros de calibración de la cámara.

Como patrón de referencia se utilizarán anillos concéntricos con perfil senoidal, figura 3.4a. En términos de fase, cada punto del monitor LCD se puede identificar con cada valor de fase encontrado figura 3.4c, esto con la finalidad de poder analizar los cambios radiales en la reflexión debido al desplazamiento del monitor LCD.

En la figura 3.4a se encuentran imágenes del patrón simulado con desplazamiento de fase para encontrar la fase envuelta (Figura 3.4b), así como su desenvolvimiento, figura 3.4c.

En la figura 3.5 se muestra un perfil de la línea central de la fase desenvuelta. Se trabaja en coordenadas polares para relacionar un valor de posición a cierto valor de fase.

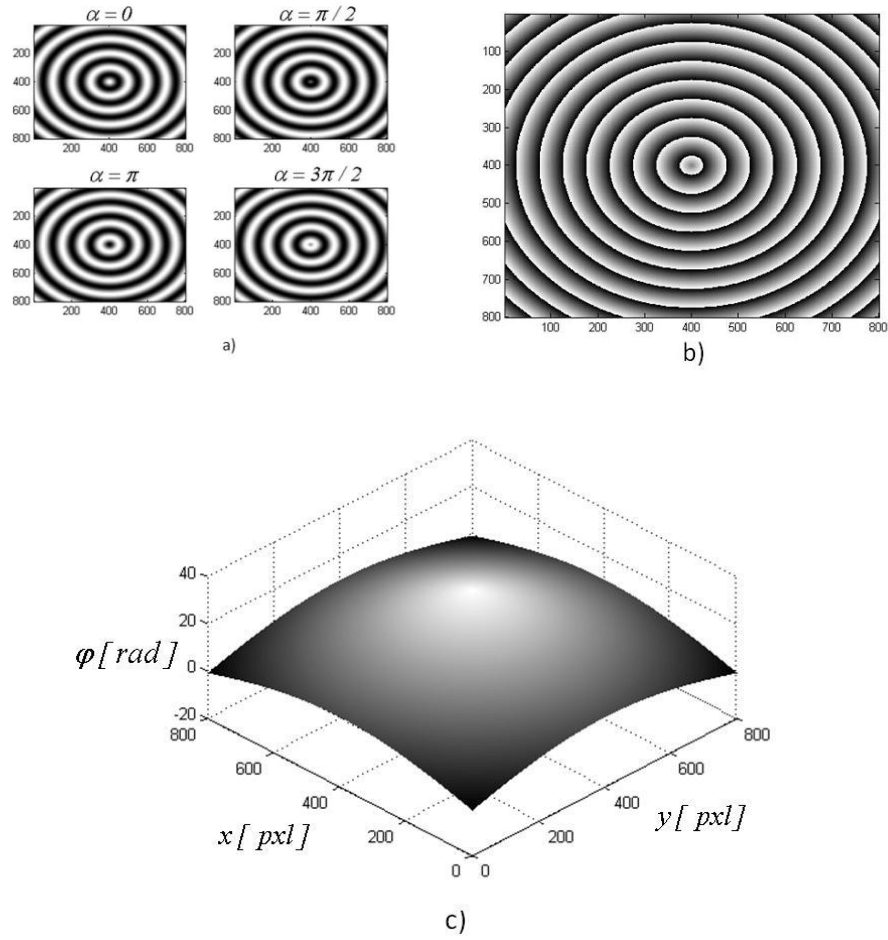


Figura 3.4. (a) Imágenes de un patrón de franjas circulares con perfil senoidal con un desplazamiento de fase de $\pi/2$, (b) fase envuelta y (c) fase desenvuelta.

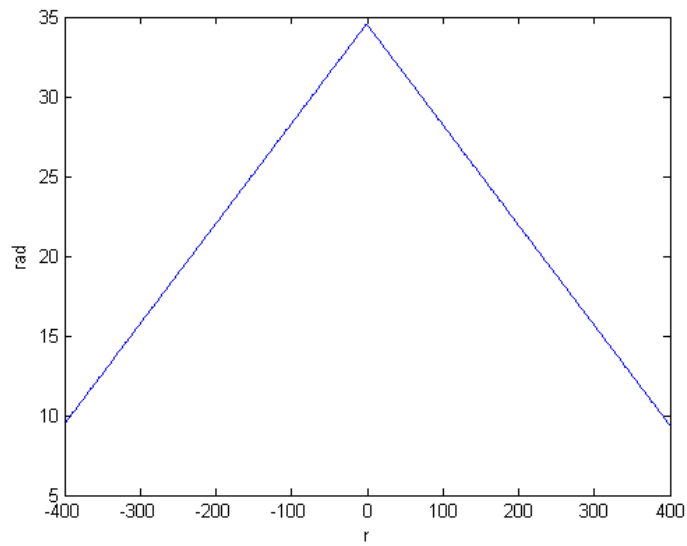


Figura 3.5.- Perfil de la línea central de la fase desenvuelta de un patrón de anillos concéntricos.

3.3 Planteamiento teórico de la determinación de la pendiente

El principio geométrico utilizado se muestra en la figura 3.6. El origen es tomado en el centro de la superficie y el eje óptico corresponde al eje Z .

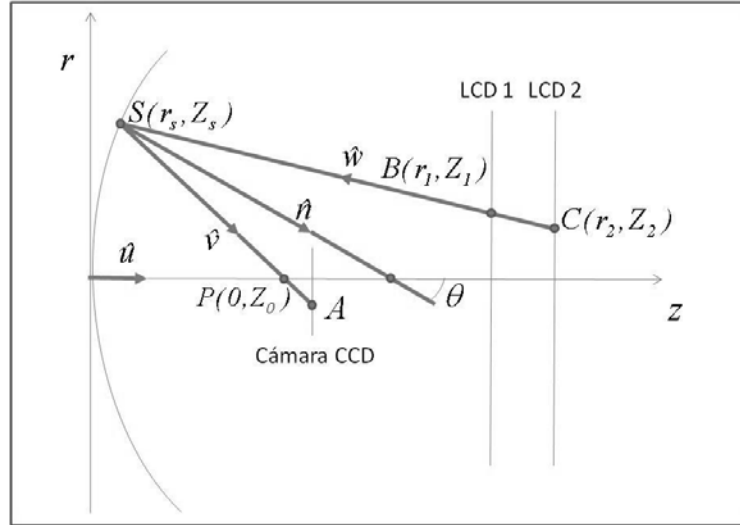


Figura 3.6.- Modelo geométrico para la medición de superficie de prueba.

La cámara se asume como modelo de pinhole (ver apéndice C), donde P representa el centro de apertura y se encuentra a una distancia Z_0 del origen. La cámara observa el patrón desplegado por la pantalla LCD y reflejado por la superficie de prueba.

El punto $B(r_1, Z_1)$ de la pantalla LCD en posición 1 a una distancia Z_1 y el punto $C(r_2, Z_2)$ en la pantalla LCD en la posición 2 a una distancia Z_2 corresponden a un mismo punto en el plano de la cámara CCD. La distancia radial r_1 del punto B y r_2 del punto C son proporcionales a la fase del patrón de franjas en la pantalla en posición 1 y posición 2 respectivamente. Los puntos de fase son calculados utilizando la técnica de desplazamiento de fase de cuatro pasos²¹, cada punto de fase representa una única posición en la pantalla LCD después del propio desenvolvimiento de la misma, figura 3.4.

La intensidad desplegada en la pantalla LCD se puede escribir como¹³

$$I(r) = a + b \cos[\varphi(r) + \alpha], \quad (3.1)$$

donde $\varphi(r) = 2\pi r / T$ es la fase; a y b son los términos de fondo y de amplitud respectivamente; r es la coordenada radial y T es el periodo del patrón de franjas; α es el desplazamiento adicional en fase utilizado para encontrar fase envuelta. Por ejemplo, en un

desplazamiento de cuatro pasos, α tomará valores de 0 , π , $\pi/2$ y $3\pi/2$ que corresponden a cuatro patrones de franjas denominados como I_1, I_2, I_3 y I_4 de donde el término de fase puede ser calculado por:

$$\varphi(r) = \tan^{-1} \left[\frac{I(r)_4 - I(r)_2}{I(r)_1 - I(r)_3} \right]. \quad (3.2)$$

La posición r_1 del punto $B(r_1, Z_1)$ en la pantalla LCD en la posición 1 se obtiene como:

$$r_1 = \frac{\varphi(r)T}{2\pi}. \quad (3.3)$$

La posición r_2 del punto observado $C(r_2, Z_2)$ en la posición 2 puede ser calculado de la misma manera.

Dado que a partir de dos puntos se puede determinar una recta, se puede calcular la línea \overline{PA} , llamada el rayo original. Simultáneamente puede ser calculado el rayo reflejado \overline{CB} perteneciente a las posiciones 1 y 2 de la pantalla LCD. La intersección de ellos $S(r_s, Z_s)$ es calculada aplicando el principio mencionado en la Ley de Reflexión. Por lo tanto haciendo uso de la ecuación A.20,

$$\hat{n} = \frac{\hat{v} - \hat{w}}{\|\hat{v} - \hat{w}\|}, \quad (3.4)$$

donde \hat{v} se refiere al vector unitario describiendo la dirección del rayo original \overline{PA} , \hat{w} describe el vector unitario perteneciente al rayo \overline{CB} y \hat{n} es el vector unitario normal en el punto de superficie S . La pendiente de la superficie en el punto S puede ser calculada en base a:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial r} \right|_{r=r_s} = \tan \theta = \frac{|\hat{n} \times \hat{u}|}{\hat{n} \cdot \hat{u}}, \quad (3.5)$$

donde θ representa el ángulo entre la normal de la superficie y el eje óptico dado por el vector unitario \hat{u} .

La regla del trapecio²² es utilizada para la integración numérica para completar la reconstrucción de la superficie. Para un caso más general en la medición, si la cámara no cumple con los requerimientos del modelo de pinhole, el rayo original \overline{PA} puede ser construido a través de la calibración de la cámara¹³

CAPÍTULO 4: PARTE EXPERIMENTAL

Se presentan resultados experimentales correspondientes a la valoración de topografía para objetos difusos y de tipo especular. En el caso de objetos difusos se aplica la técnica de proyección de franjas. Para el caso de objetos especulares se recurre a la técnica conocida como reflexión de franjas. Las mediciones obtenidas son comparadas con las obtenidas mediante un esferómetro y de una máquina de coordenadas respectivamente.

4.1. Medición de topografía para objetos difusos

El objeto bajo estudio corresponde a una lente plano convexa cuyo radio de curvatura es 32.18 mm medida a través de la medición de la sagita³⁹ usando un esferómetro. Mediante el radio de curvatura se puede simular una sección de esfera la cual será la superficie de referencia.

La sección convexa de la lente es cubierta por una pintura removible que no daña la superficie con el objetivo de tener una superficie de tipo difuso. En este caso la técnica aplicada corresponde a la de proyección de franjas descrita en capítulo 2.

La teoría de proyección de franjas para iluminación divergente desarrollada en la sección 2.2, permitió obtener la topografía para la muestra difusa la cual fue comparada con la superficie de referencia simulada.

El arreglo óptico utilizado se muestra en la figura 4.1 el cual corresponde a un sistema de proyección de franjas. El ángulo de incidencia es $\theta = 33.6^\circ$, la distancia entre el proyector y el origen del sistema en el plano de referencia es $l_p = 1020.7\text{ mm}$ y la distancia entre la cámara CCD y el origen corresponde a $l_k = 859\text{ mm}$. Cabe mencionar que en la ecuación 2.30 referente al marco teórico de la técnica de proyección de franjas, el parámetro l_p corresponde al parámetro r_0 .

El proyector genera un patrón de franjas de tipo cosenoidal sobre un plano de referencia y posteriormente sobre la lente de prueba. La figura 4.2 muestra la imagen del patrón de franjas proyectado sobre la superficie de prueba. Se nota claramente la deformación de las franjas que genera la superficie. Aplicando el método de desplazamiento de fase de cuatro pasos se obtiene la fase envuelta, ésta se muestra en la figura 4.3.

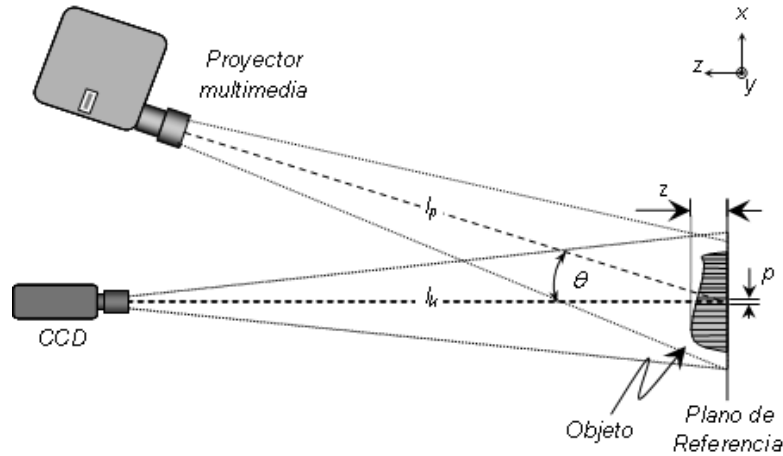


Figura 4.1. Sistema óptico de proyección de franjas para medir topografía de objetos difusos.

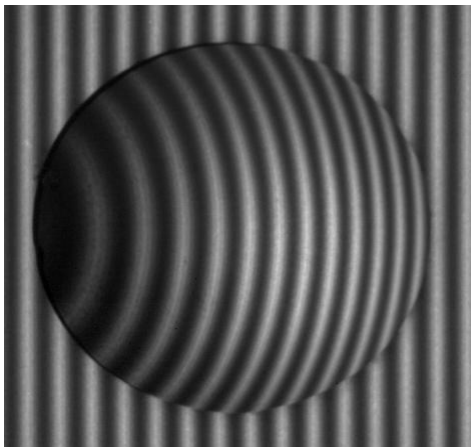


Figura 4.2. Franjas proyectadas sobre la lente.

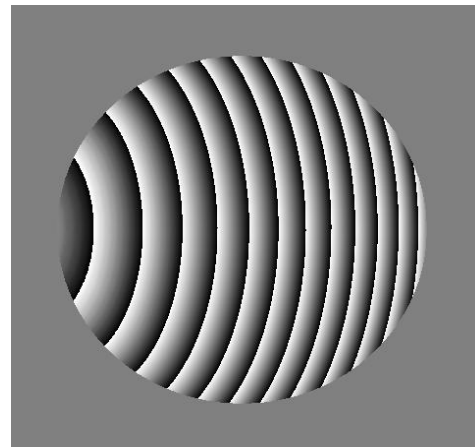


Figura 4.3. Fase envuelta.

Utilizando el algoritmo de desenvolvimiento de fase²⁴ se obtiene la fase desenvuelta. De acuerdo a la ecuación 2.30 (Sección 2.2), con la fase obtenida (φ) podemos calcular z . Usando un esferómetro para medir la sagita de la lente la cual corresponde a 10.16 mm se calculó el radio de curvatura, el cual es de 32.18 mm . Conocido el radio, se puede simular la topografía de la lente en su lado convexo. La figura 4.4 muestra estos resultados, la superficie azul representa la topografía de referencia y la superficie en rojo representa la topografía obtenida con la técnica de proyección de franjas.

En la figura 4.5 se muestra el error calculado a partir de la diferencia de topografía entre las gráficas mostradas en la figura 4.4. El error máximo corresponde a $\pm 35 \mu\text{m}$.

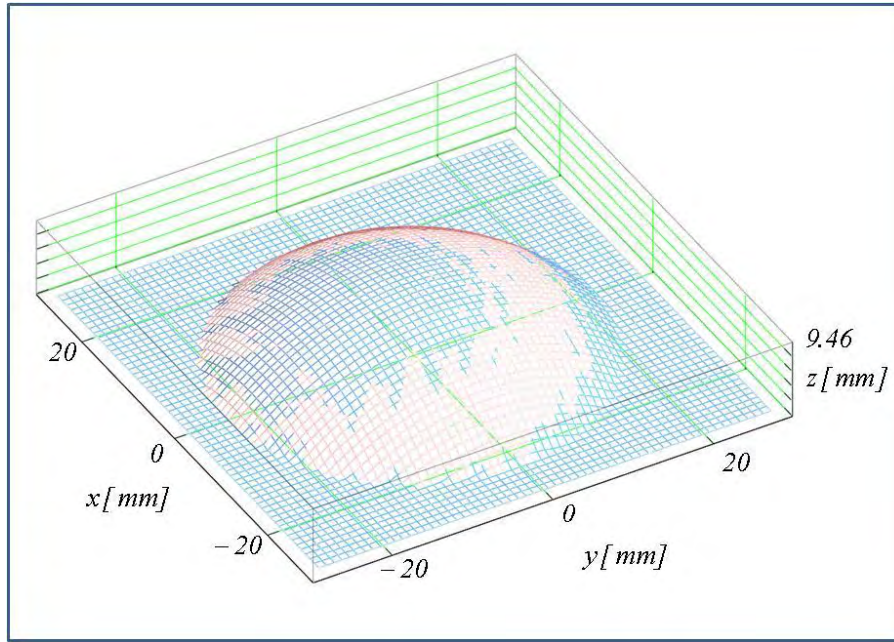


Figura 4.4. Topografía de objetos difusos. Superficie roja: referencia. Superficie azul: resultados experimentales obtenidos mediante proyección de franjas.

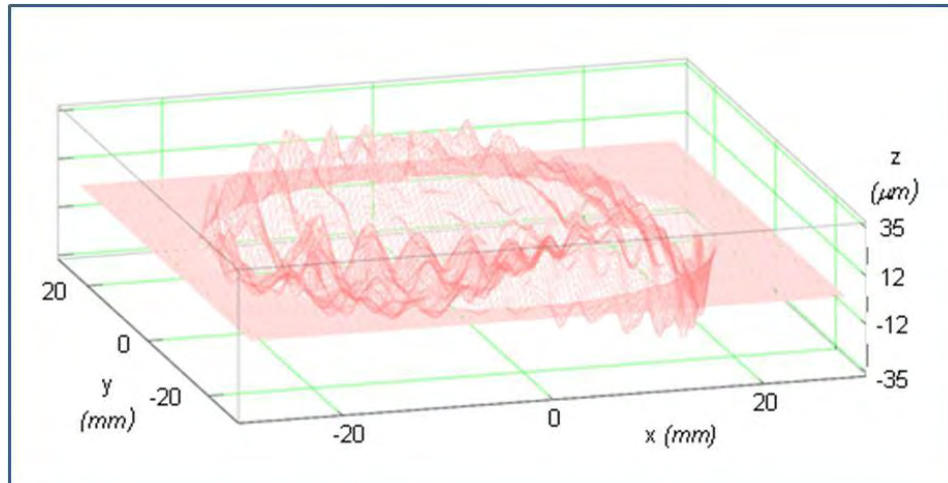


Figura 4.5. Diferencias entre la topografía simulada y la obtenida experimentalmente.

4.2. Medición de topografía para objetos especulares

En esta prueba experimental se utilizó un arreglo similar al mostrado en la sección 3.2. Los objetos de prueba corresponden para una muestra convexa y cóncava. El uso de este arreglo presenta la ventaja de que no hay necesidad de hacer la corrección de perspectiva dado que el sistema de observación se encuentra en eje óptico.

4.2.1 Arreglo experimental para objetos especulares

En la figura 4.6 se muestra el arreglo experimental utilizado para la medición de la topografía de un objeto especular. El objeto bajo estudio corresponde al mismo que fue caracterizado por la técnica de proyección de franjas, pero ahora sin el uso de la pintura usada en ese caso.

El principio fundamental consiste en que el objeto especular refleje las franjas simuladas en el monitor LCD hacia la cámara CCD a través del divisor de haz. Las franjas aparecerán distorsionadas de acuerdo a la topografía del objeto bajo estudio.

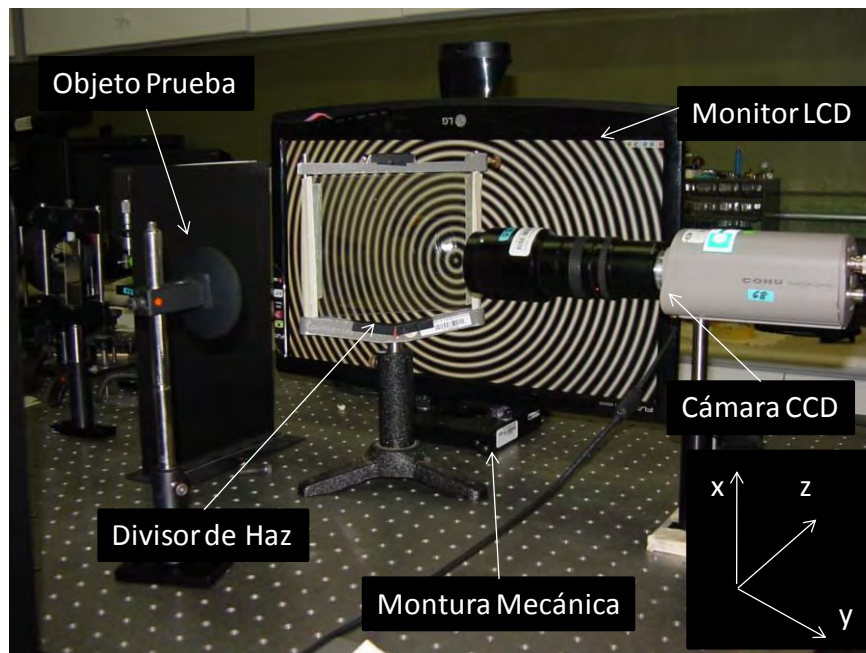


Figura 4.6.- Arreglo experimental para la medición de topografía de un objeto especular por medio de reflexión de franjas.

Para efectuar el desplazamiento mecánico del monitor LCD, éste se colocó sobre una montura con desplazamiento milimétrico en la dirección del eje z. En la figura 4.7 se muestra otra vista del arreglo experimental con los soportes utilizados.

Se utilizó una cámara CCD marca COHU *Modelo 4815-5000* con una lente marca Navitar con zoom *18-108mm* y número *f/2.5*. El monitor LCD marca LG *Modelo Flatron w20435* se montó sobre una montura milimétrica con un grado de libertad marca Edmund Optics *Modelo EDM-38204^a*. El divisor de haz tenía dimensiones de *106mm x 130mm*.

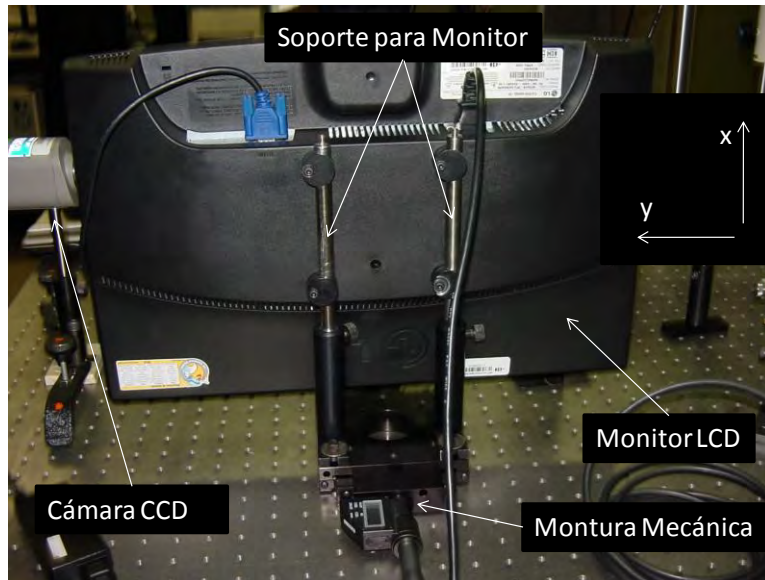


Figura 4.7.- Vista trasera del monitor mostrando el soporte utilizado así como otra vista de la montura mecánica.

En la figura 4.8 se muestra otra vista del arreglo experimental donde la cámara CCD observará la reflexión de la imagen generada en el monitor LCD en el objeto bajo estudio. Dada la geometría del sistema óptico, el objeto de prueba refleja las franjas simuladas en el monitor LCD hacia la cámara CCD sin distorsión de perspectiva dado que el sistema corresponde a un sistema en eje por el uso del divisor de haz. En este tipo de sistema se tiene ahora el problema de los efectos del divisor.

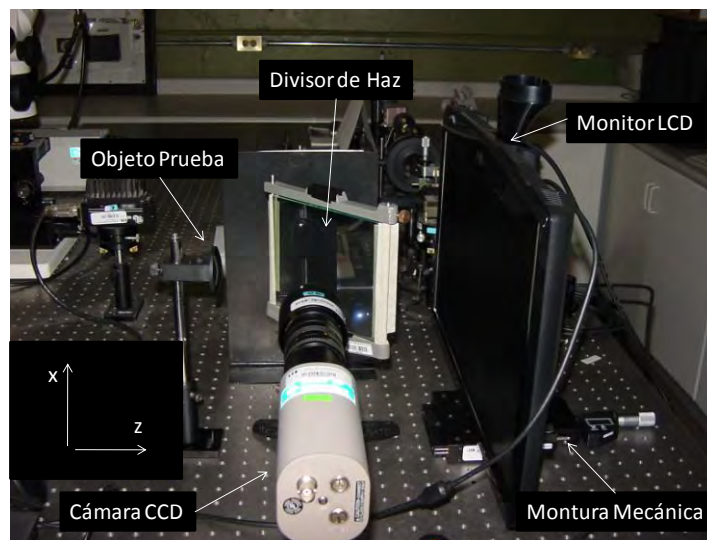


Figura 4.8.- Otra vista del arreglo.

4.3 Objeto especular convexo

De acuerdo a la teoría de la reflexión de espejos esféricos de forma convexa descrita en el apéndice B, la imagen generada por esta reflexión corresponde a una imagen virtual. Al momento de utilizar un sistema de observación integrado a la CCD, esta imagen se vuelve una imagen real.

Cabe mencionar que por la forma convexa no es posible obtener un patrón de reflexión que cubra todo el objeto debido a que se obtendrá la imagen del divisor mismo, esto quiere decir que nuestra medición se verá limitada a la región que puede ser captada, figura 4.9.

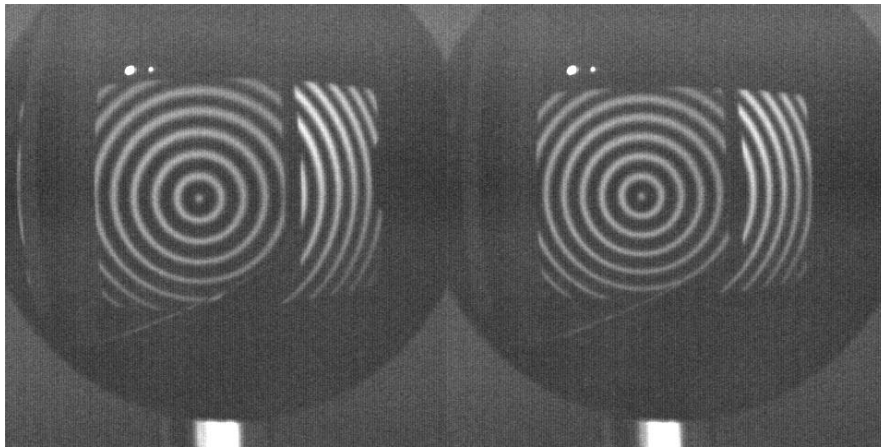


Figura 4.9.- Patrones deformados en la posición 1 y en la posición 2 para un objeto convexo.

Utilizando como objeto prueba un vidrio de forma convexa con diámetro de 50 mm y radio de curvatura de 32.18 mm se obtuvo una reconstrucción de una región correspondiente a $12 \times 12\text{ mm}$.

En base al modelo geométrico de la Sección 3.3, como parte inicial se mostrará la fase correspondiente a la posición 1 y 2 del monitor LCD. Debido a este desplazamiento mecánico ocurrirán cambios radiales en los términos de fase y en base a esto se obtendrán los vectores de incidencia (\hat{w}). Para el vector de reflexión (\hat{v}) se hará uso de los parámetros de la cámara utilizando el modelo de pinhole, Apéndice C.1.

Se obtienen los vectores normales (\hat{n}) de la superficie, ecuación 3.4, para el cálculo de la derivada radial del objeto, ecuación 3.5, y efectuando una integral radial

utilizando la regla del trapecio se calcula la topografía del objeto y por último estos datos son comparados con la superficie de referencia obtenida mediante datos del esferómetro.

El patrón de anillos concéntricos mostrado anteriormente, figura 3.4, es presentado por medio del monitor LCD conectado a una computadora, esto con el fin de efectuar desplazamientos en fase de este patrón para identificar cada punto del monitor visto en la reflexión.

En la figura 4.10 se muestran los cuatro patrones desplazados en fase, $\pi/2$ cada uno, captados por la cámara CCD. Utilizando la ecuación 3.1 se obtiene el término de fase envuelta, figura 4.11, para posteriormente aplicar un algoritmo de desenvolvimiento²⁴ y obtener los datos de fase mostrados en la figura 4.12.

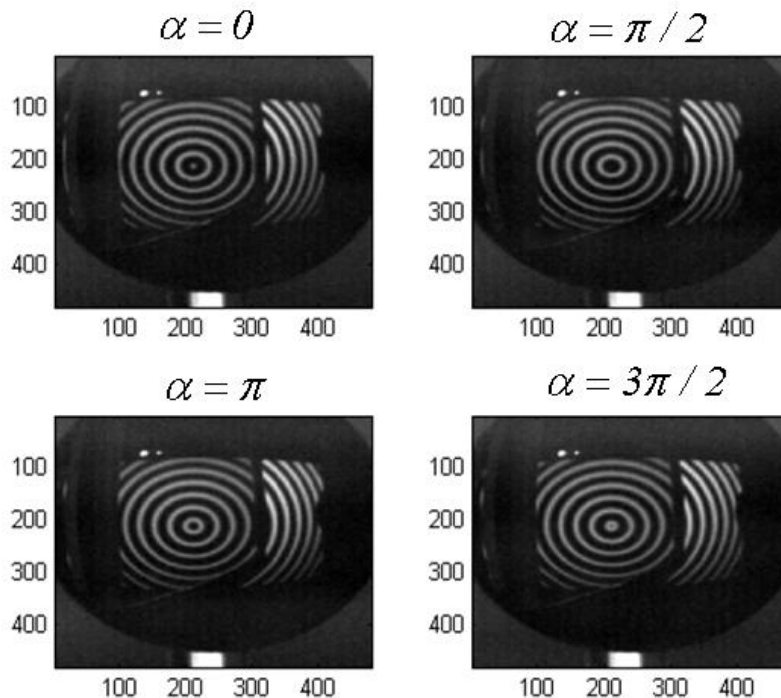


Figura 4.10.- Patrones deformados con cuatro desplazamientos en fase en posición 1

Se puede identificar cada punto del monitor tomando como referencia el centro de los anillos utilizados inicialmente, en nuestra superficie de fase desenvuelta, figura 4.12, esta posición se podrá identificar como el punto máximo de la superficie obtenida.

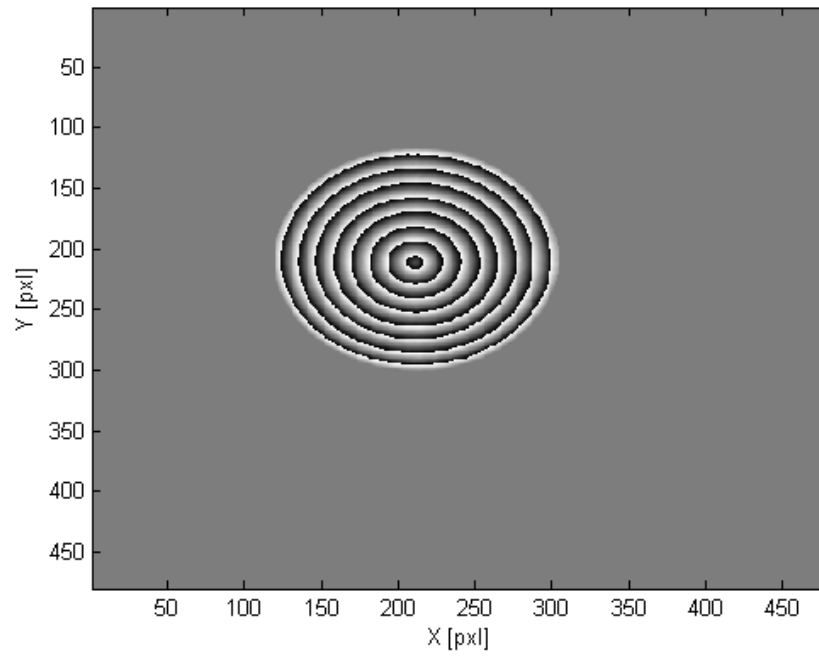


Figura 4.11.- Fase envuelta para la posición 1 de LCD.

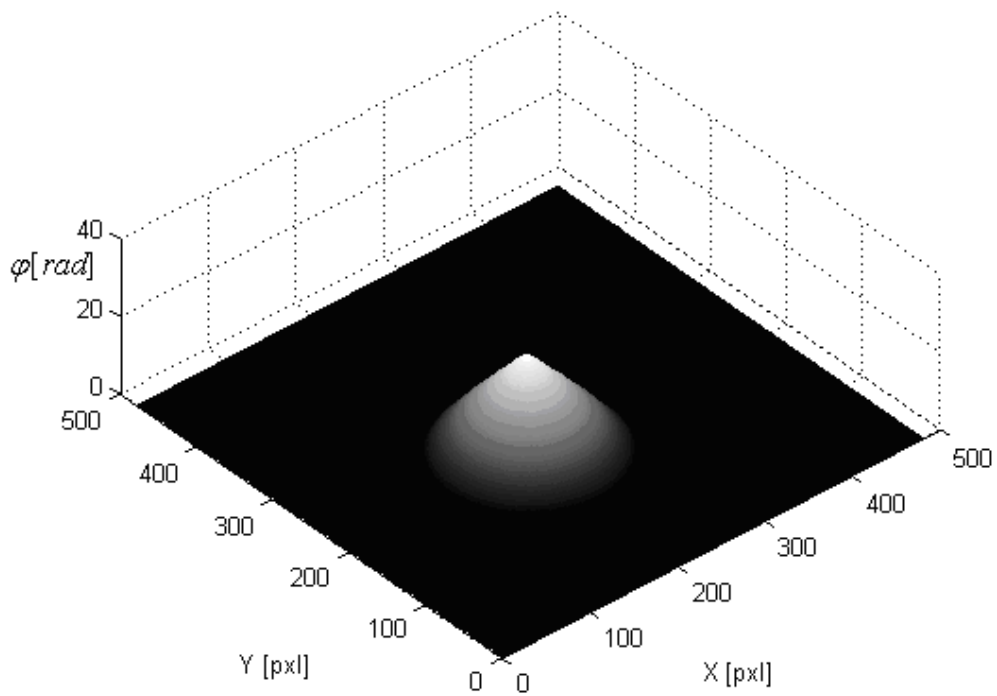


Figura 4.12.- Fase desenvuelta obtenida en la posición 1.

Se lleva a cabo el mismo procedimiento anteriormente descrito para una segunda posición del monitor donde se mantiene el mismo patrón de franjas utilizado en la posición 1. El desplazamiento del monitor LCD corresponde a 29 cm sobre el eje z y se realiza mediante la montura mecánica ya descrita. Este desplazamiento tendrá como resultado un cambio en el patrón de anillos reflejados, lo que interesa es poder identificar el cambio en la imagen del patrón de anillos. Dado el diseño del arreglo experimental y la simetría del objeto, solamente se observarán cambios radiales en el patrón reflejado y no existirá ningún cambio de posición en el punto de referencia es decir el centro del patrón de los anillos.

En la figura 4.13 se observan los patrones deformados en la posición 2 del monitor LCD para posteriormente encontrar los valores de fase envuelta, figura 4.14 y su correspondiente fase desenvuelta, figura 4.15.

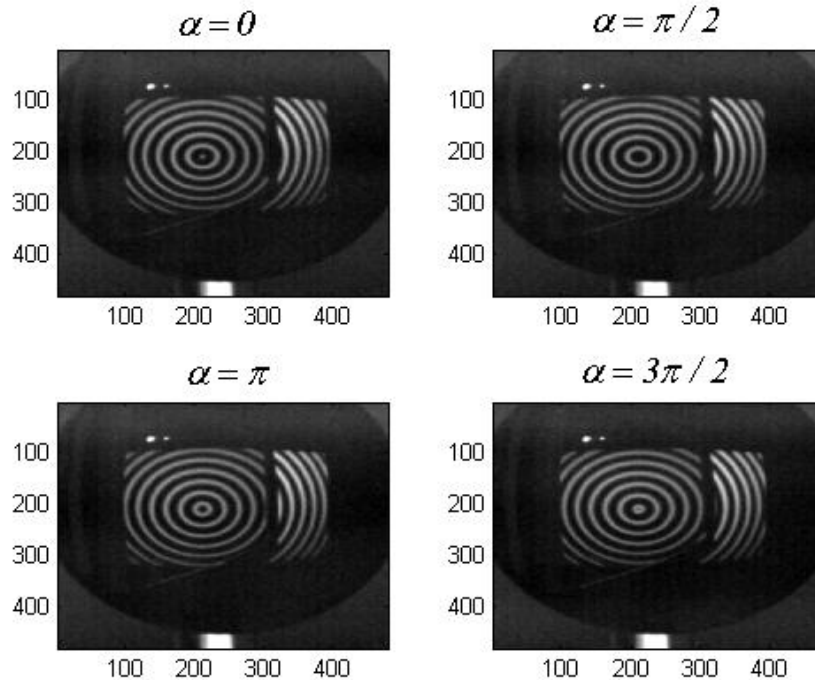


Figura 4.13.- Patrones deformados en la posición 2 del monitor LCD.

Como se menciono anteriormente, al efectuar el desplazamiento mecánico se tendrá un cambio en los anillos iniciales, este cambio en término de fase resulta en que cada punto medido inicialmente tendrá como resultado un desplazamiento radial tomando como referencia el máximo de esa superficie obtenida.

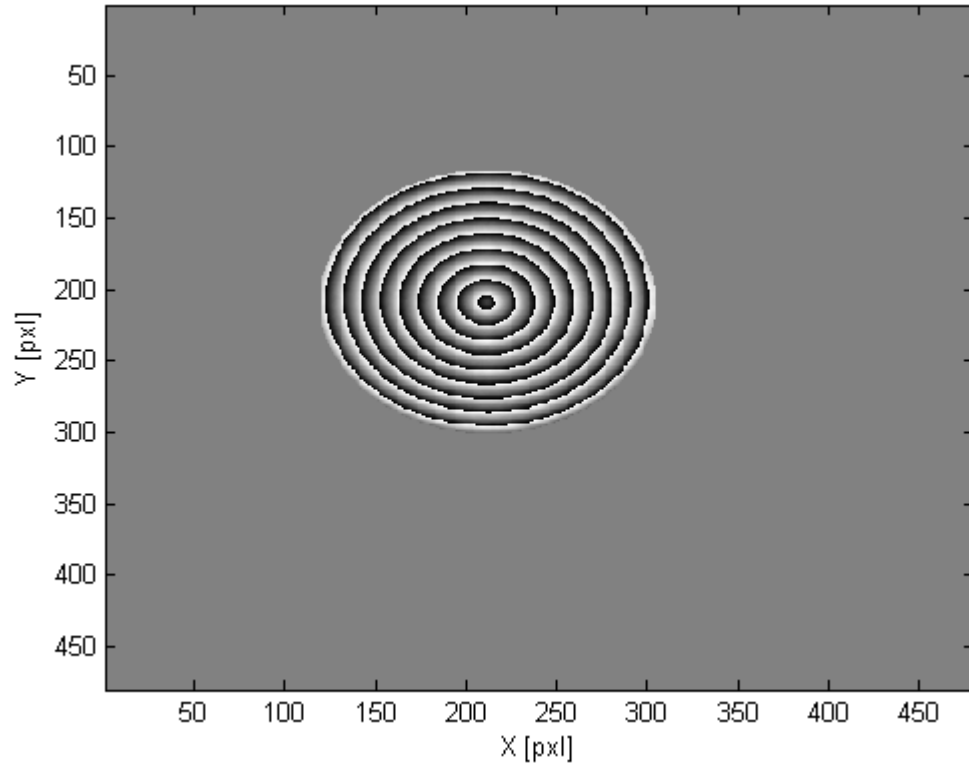


Figura 4.14.- Fase envuelta en la posición 2 del monitor LCD.

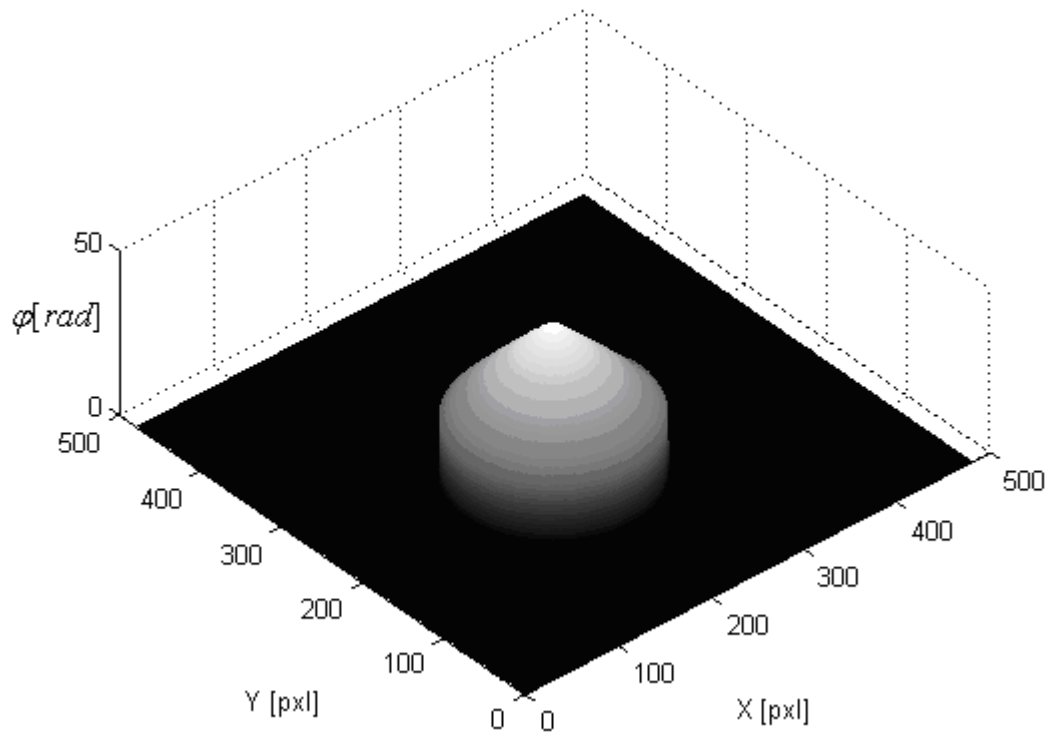


Figura 4.15.- Fase desenvuelta en la posición 2.

En la figura 4.16 se muestra la línea central de ambas superficies donde la línea azul pertenece a la posición 1 y la línea roja a la posición 2 observando gráficamente cambios laterales para un mismo valor de fase.

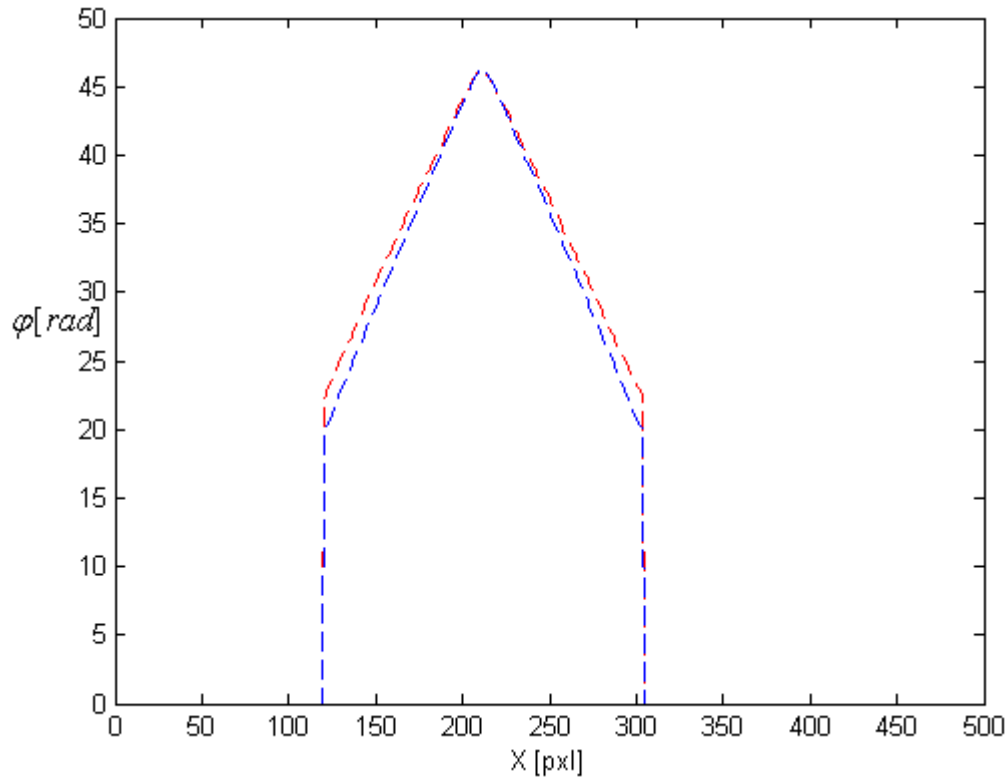


Figura 4.16.- Línea central de las superficies donde se buscarán desplazamientos radiales de la primera posición (línea azul) a los datos de la segunda línea (línea roja) que cuenten con el mismo valor de fase.

La idea principal es identificar los mismos valores de fase en ambas superficies para encontrar los cambios radiales ocurridos. En la figura 4.17 se observan de manera gráfica algunos puntos donde las líneas azules representan estos desplazamientos encontrados.

4.3.1 Trazo de rayos incidentes y reflejados

En este punto ya se tienen identificados los desplazamientos radialmente de los anillos del patrón de franjas reflejado, lo que prosigue es hacer el trazo de los rayos incidentes (\hat{w}) hacia el objeto en base a la figura 3.6. En la figura 4.18 se muestran los rayos incidentes determinados a partir de la fase de los anillos concéntricos en las dos diferentes posiciones del monitor.

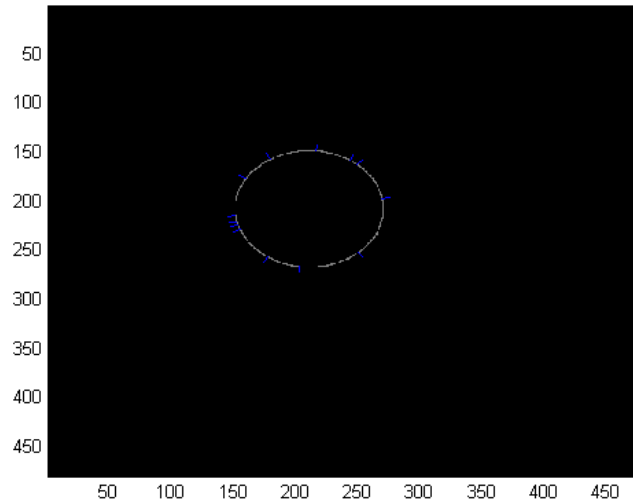


Figura 4.17.- Se muestran los desplazamientos radiales (línea azul) de los puntos para un valor de fase.

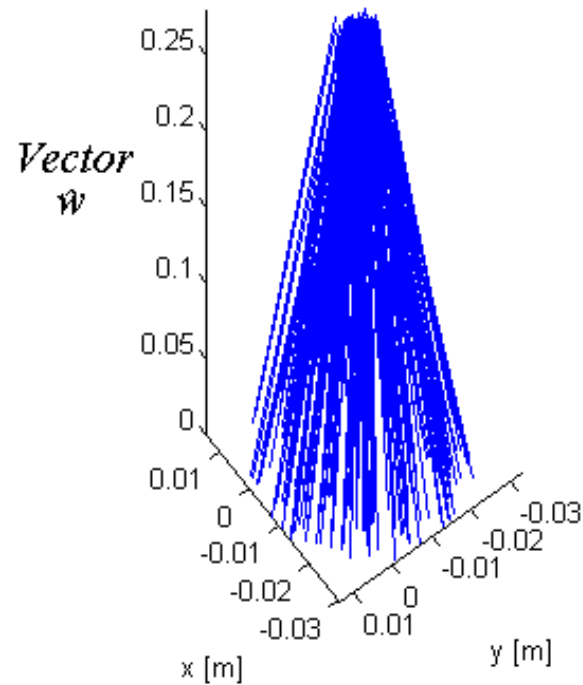


Figura 4.18.- Vector \hat{w} referente a los rayos incidentes provenientes del monitor LCD hacia el objeto.

Para la parte correspondiente de los rayos reflejados de la superficie analizada los cuales son identificados mediante los vectores \hat{v} , se toma en cuenta el modelo de pinhole (Apéndice C.2) de la lente utilizada en la cámara CCD como puede ser visto en la figura 4.19.

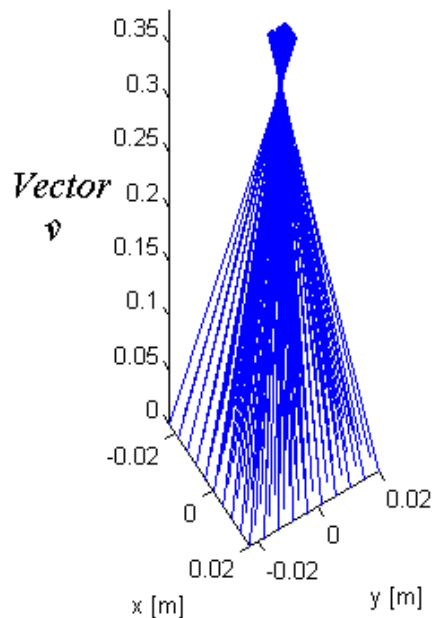


Figura 4.19.- Vectores asociados a los rayos reflejados los cuales son obtenidos mediante el modelo de pinhole de la cámara.

4.3.2. Topografía del objeto especular convexo

Se buscaron puntos correspondientes en el rango de tamaño de la superficie observada para poder efectuar el cálculo de la normal de la superficie (ecuación 3.4). Posteriormente el cálculo de la derivada radial con base a la teoría mostrada en la sección 3.3 se muestra en la figura 4.20.

Debido a que la superficie obtenida representa la derivada radial del objeto, se realiza una integración utilizando el método del trapecio para la obtención de la topografía. En la figura 4.21 se muestra el resultado obtenido de la integración. En la figura 4.21 se observan líneas radiales partiendo del centro de la superficie debido a errores computacionales al momento de implementar la integración.

En la figura 4.22 se muestra la superficie obtenida por la simulación de la esfera con los datos obtenidos del esferómetro. La figura 4.23 muestra los resultados experimentales obtenidos mediante la técnica de reflexión de franjas.

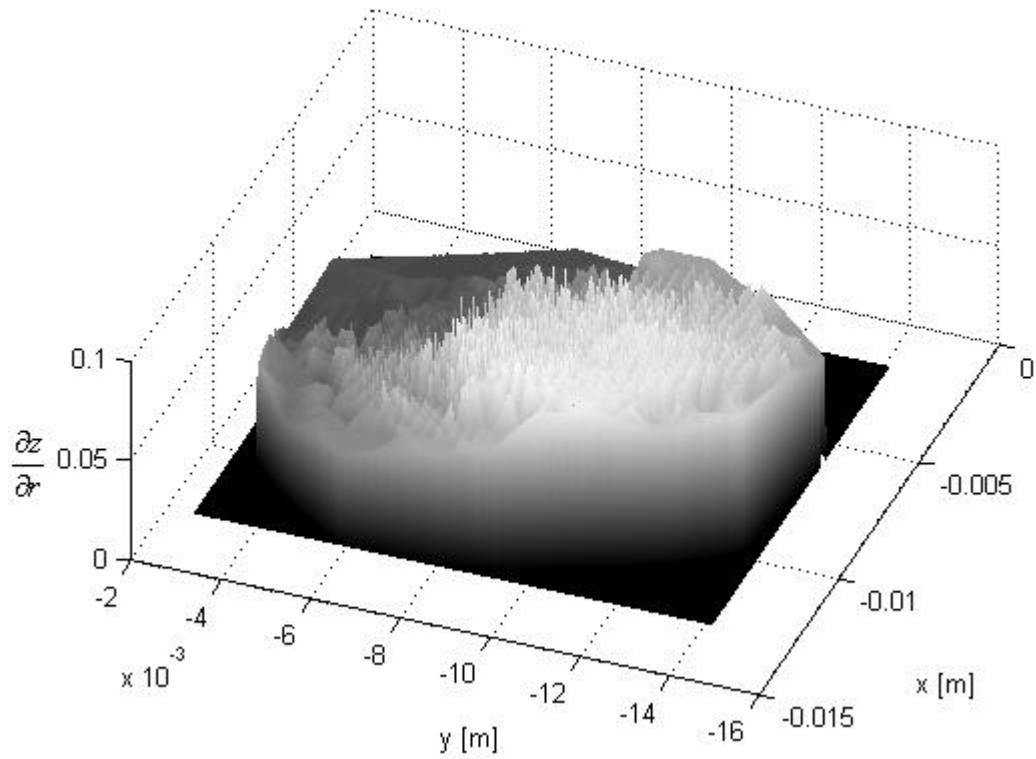


Figura 4.20.- Derivada radial de la superficie.

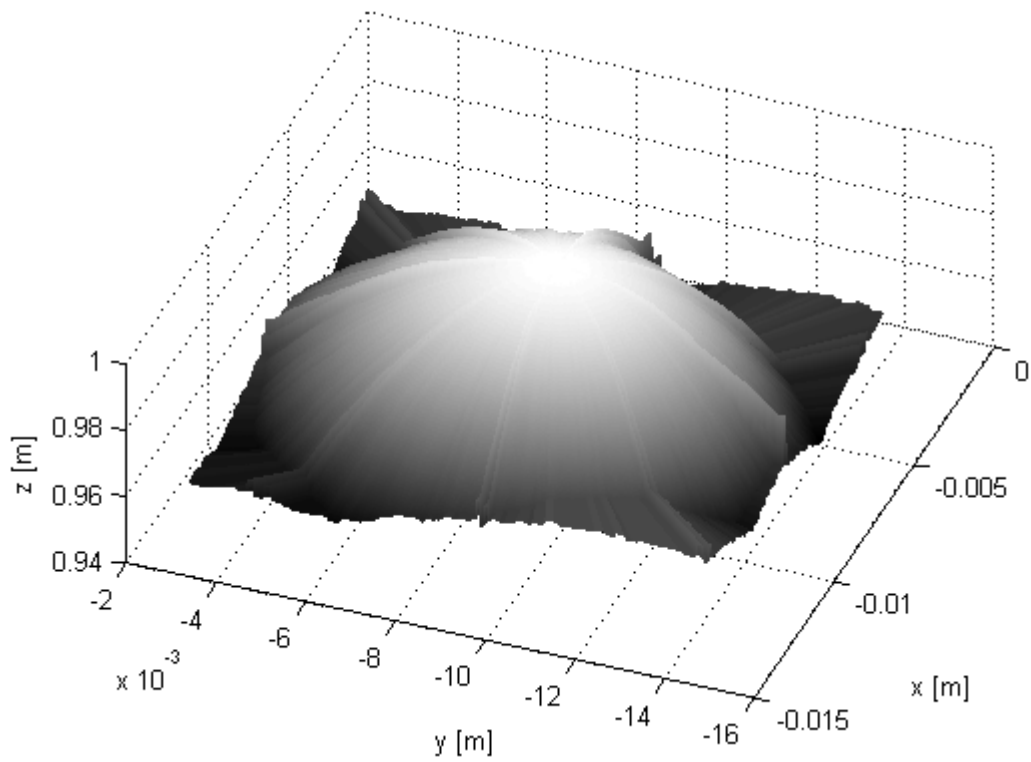


Figura 4.21.- Integración sobre la derivada radial perteneciente a la superficie convexa.

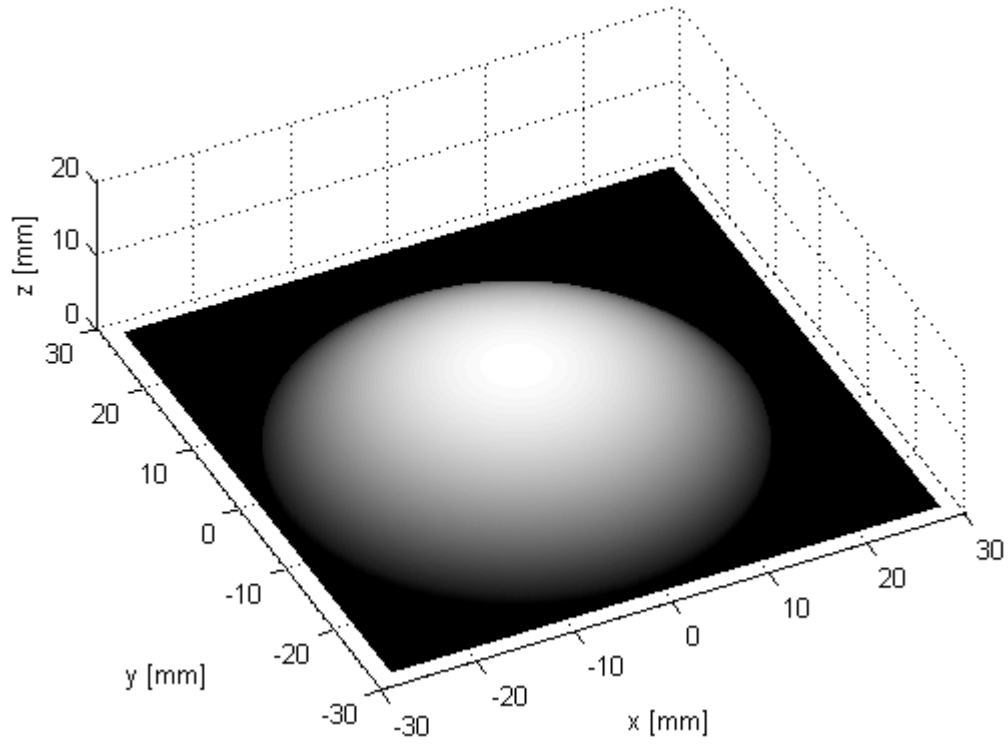


Figura 4.22.- Superficie calculada con los datos del esferómetro.

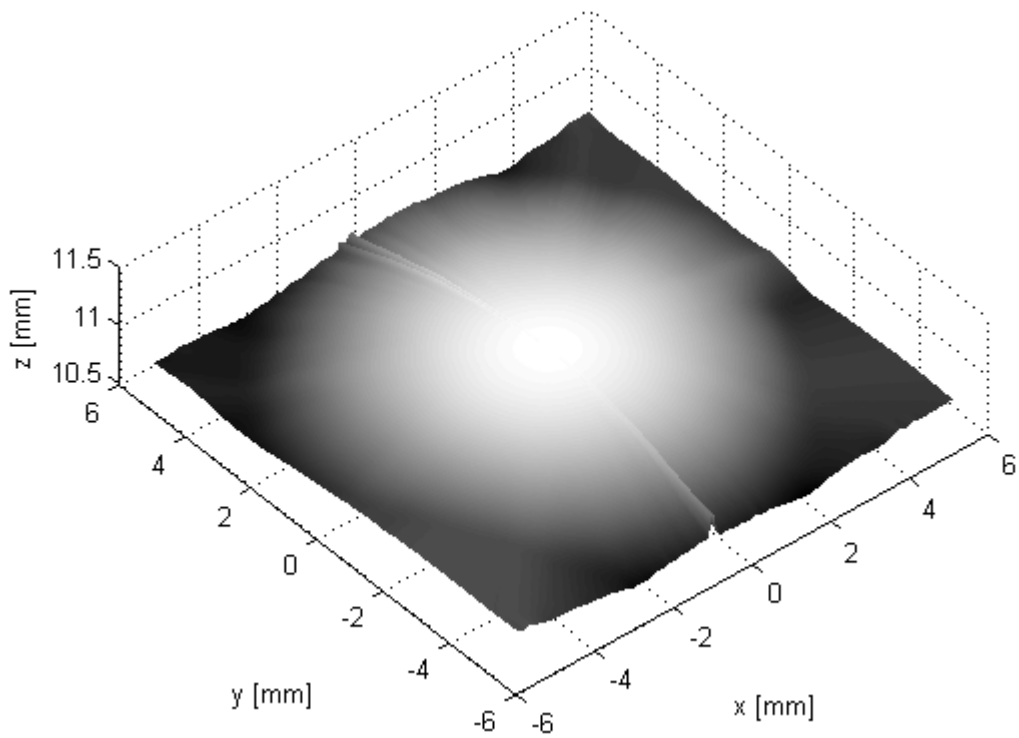


Figura 4.23.- Topografía obtenida mediante la técnica de reflexión de franjas.

La información obtenida mediante la técnica de franjas reflejadas corresponde a un área cuyo radio es aproximadamente 10 mm , mientras que la topografía simulada de los datos obtenidos con el esferómetro corresponde a un área cuyo radio es 50 mm . Para hacer una comparación entre las medidas obtenidas de la topografía se busca empalmar la sección correspondiente de la topografía obtenida ópticamente con la simulada. La figura 4.24 muestra la comparación. La gráfica en azul muestra la simulación y la roja es la medida experimental. Se muestran dos cortes perpendiculares que pasan por el centro de la muestra. El error máximo obtenido corresponde a un 1.5% .

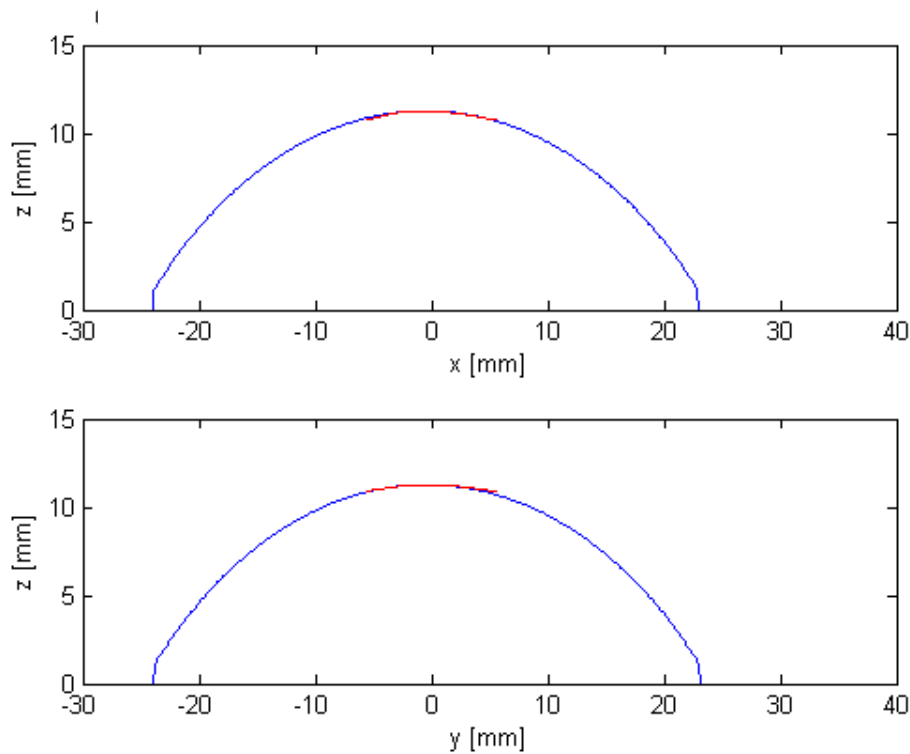


Figura 4.24.- Comparación gráfica de los datos del esferómetro y la prueba experimental.

Como se menciono al inicio, solamente se pudo reconstruir una parte parcial de la superficie perteneciente a una región 24 mm^2 con un rango de diferencia de $.2\text{ mm}$.

No se pudo efectuar una medición de un área mayor debido al diseño experimental utilizado. Esto quiere decir que al momento de tener un divisor de haz a 45° entre el objeto y el monitor este divisor restringe la distancia entre ambos. Debido a que los cálculos efectuados son en base a la imagen generada por el objeto al momento de incrementar esta distancia la imagen del monitor se hace pequeña (Apéndice B Tabla B.4).

4.4. Objeto especular cóncavo

Basados en los desarrollos propuestos se analizó una lente oftálmica (analizada en su parte cóncava). Las consideraciones a tomar para esta medición es la distancia a la que se colocará el objeto de la fuente, debido a que como se vio en la apéndice B, la imagen generada por esta superficie es una imagen real dado que la superficie corresponde a una superficie especular cóncava. Esto quiere decir que al colocar una pantalla es posible ver esa imagen.

Debido a que la muestra es una lente oftálmica con cara anterior y posterior, se tienen dos reflexiones pertenecientes a ambas caras. Por lo tanto, esto nos resulta en dos patrones superpuestos y al momento de efectuar mediciones de fase, éstas se superponen. Para resolver este problema se busca experimentalmente una distancia óptima entre monitor y objeto donde ya no se tenga una segunda reflexión.

En la figura 4.25 se muestra un par de imágenes correspondiente a cada una de las posiciones del monitor, a diferencia de la muestra convexa se tiene un mayor área de estudio.

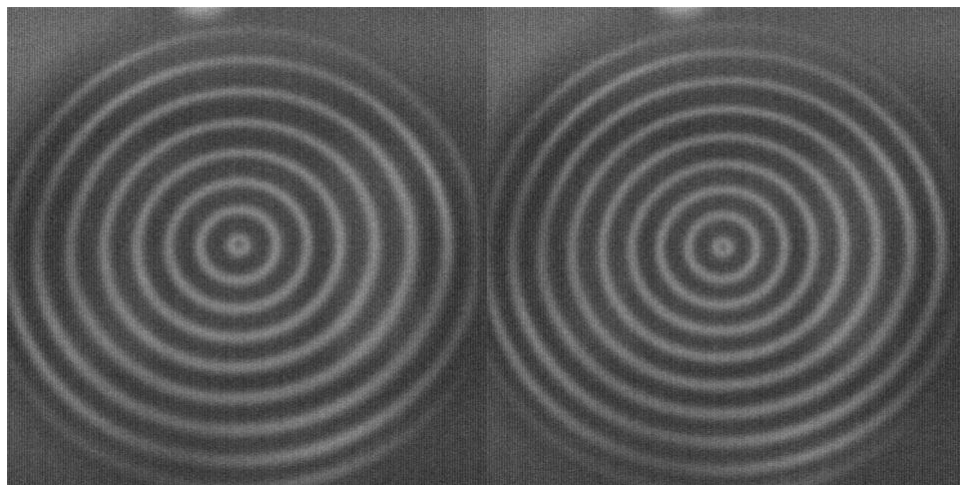


Figura 4.25.- Patrón de anillos correspondientes a las posiciones 1 y 2 respectivamente.

Efectuando el mismo desarrollo experimental mostrado en la sección 4.3 se muestran los datos obtenidos de fase para la posición 1 y 2 del monitor. Posteriormente se hará el cálculo de los vectores de incidencia y de reflexión y por último el cálculo de la

derivada e integración radial para la obtención de la topografía correspondiente. La topografía obtenida se compara con los datos obtenidos de la máquina de coordenadas.

Siguiendo el mismo procedimiento experimental mostrado en el sección 4.3.1 en la figura 4.26 se muestran los patrones correspondientes al corrimiento de fase de $\pi/2$ entre cada uno. Con estas imágenes se procede a encontrar la fase envuelta, figura 4.27 para posteriormente su correspondiente desenvolvimiento, figura 4.28.

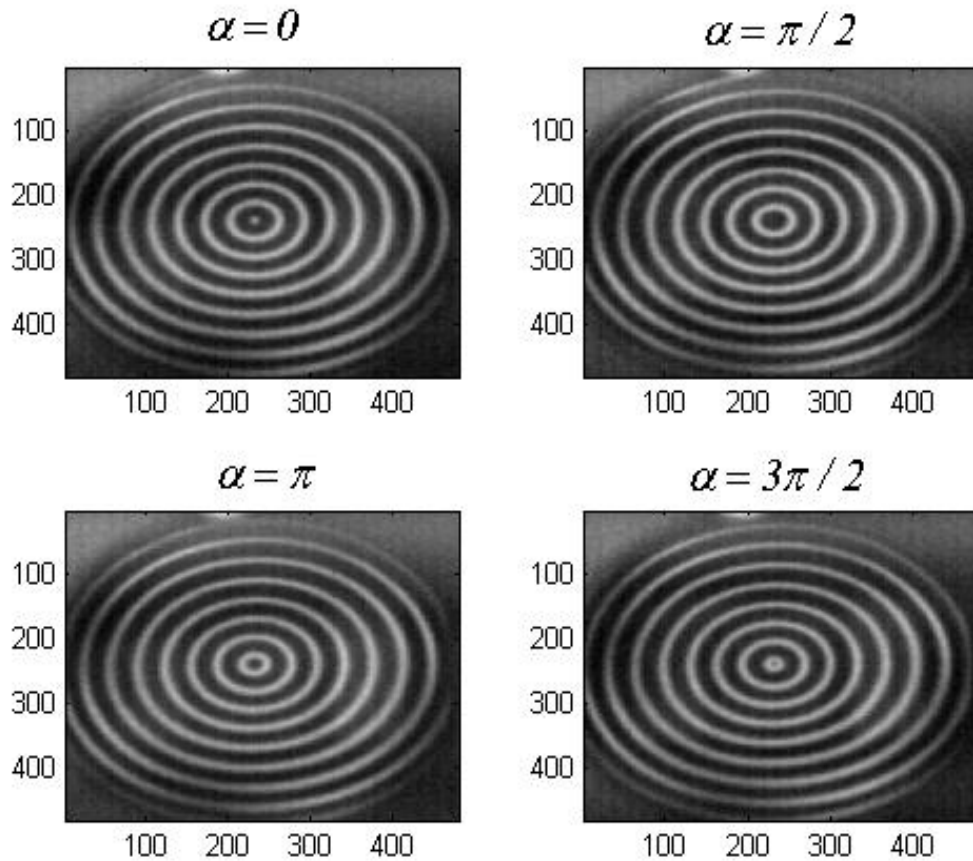


Figura 4.26.- Patrones deformados correspondientes a los cuatro corrimientos en fase para la posición 1 del monitor LCD.

El desplazamiento entre la primera y segunda posición es de 29 mm sobre el eje z. En la figura 4.29 se observan los patrones deformados en la posición 2 para posteriormente encontrar los valores de fase envuelta figura 4.30 y la fase desenvuelta correspondiente, figura 4.31.

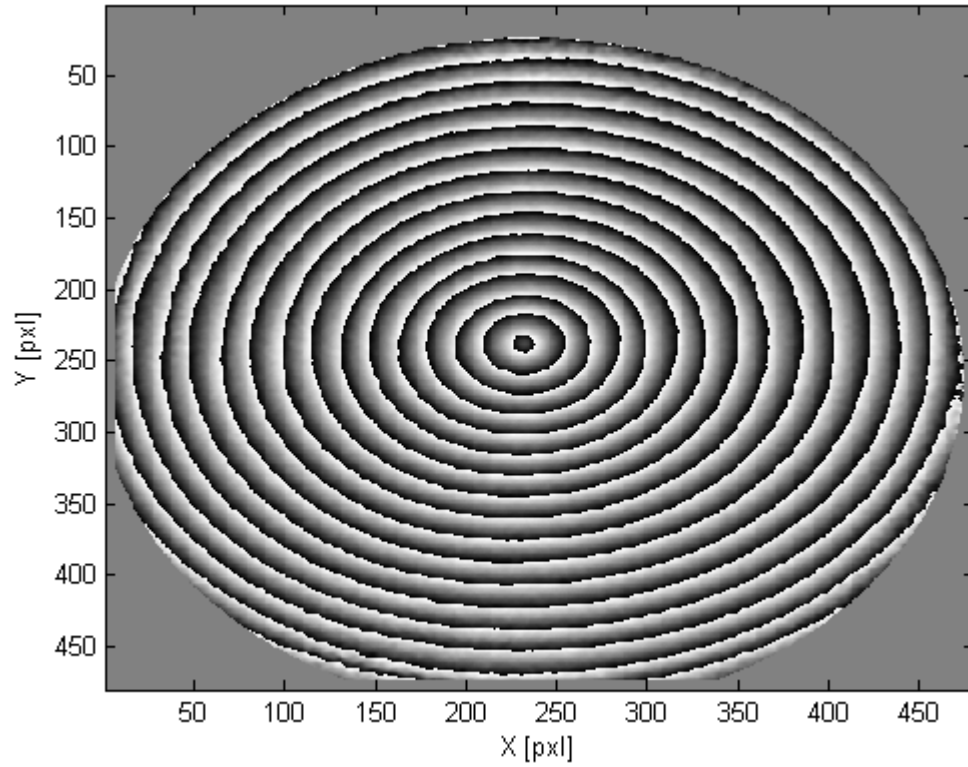


Figura 4.27.- Fase envuelta para la posición 1 de LCD.

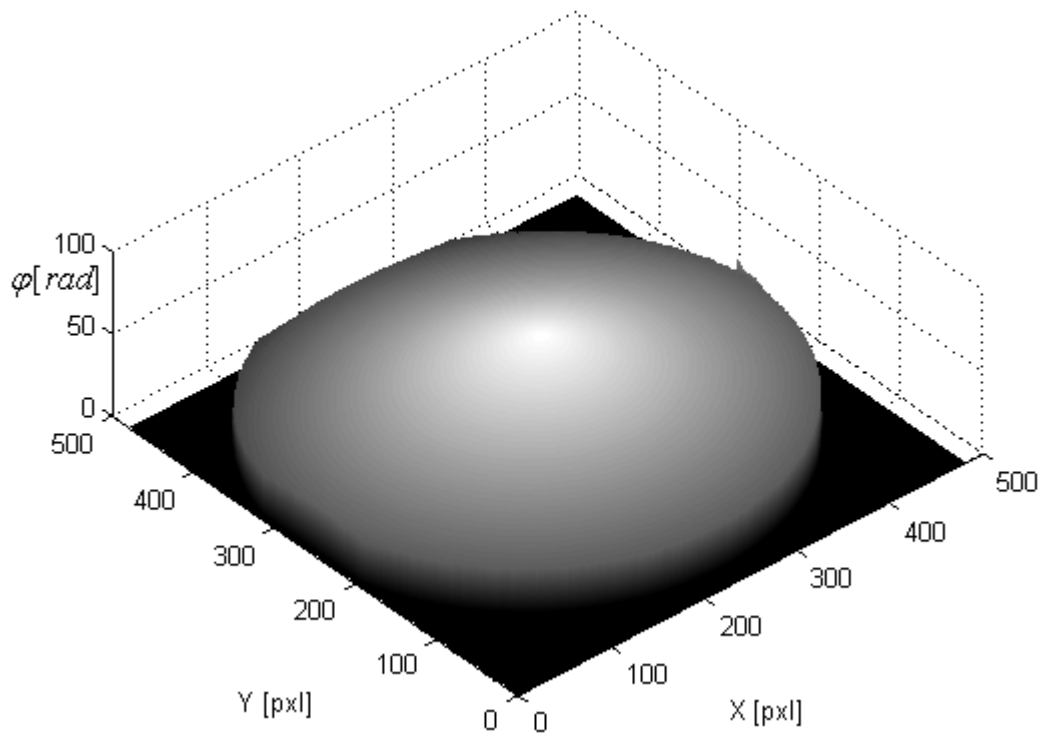


Figura 4.28. Fase desenvuelta obtenida en la posición 1.

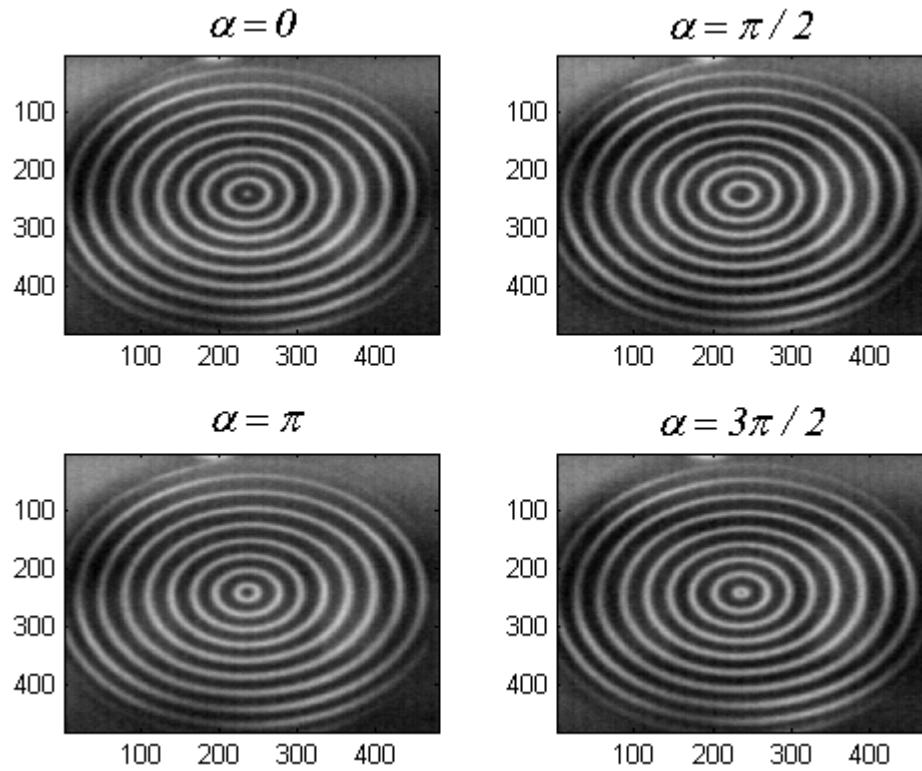


Figura 4.29.- Patrones deformados correspondientes a los cuatro corrimientos en fase efectuados en la posición 2 del monitor LCD.

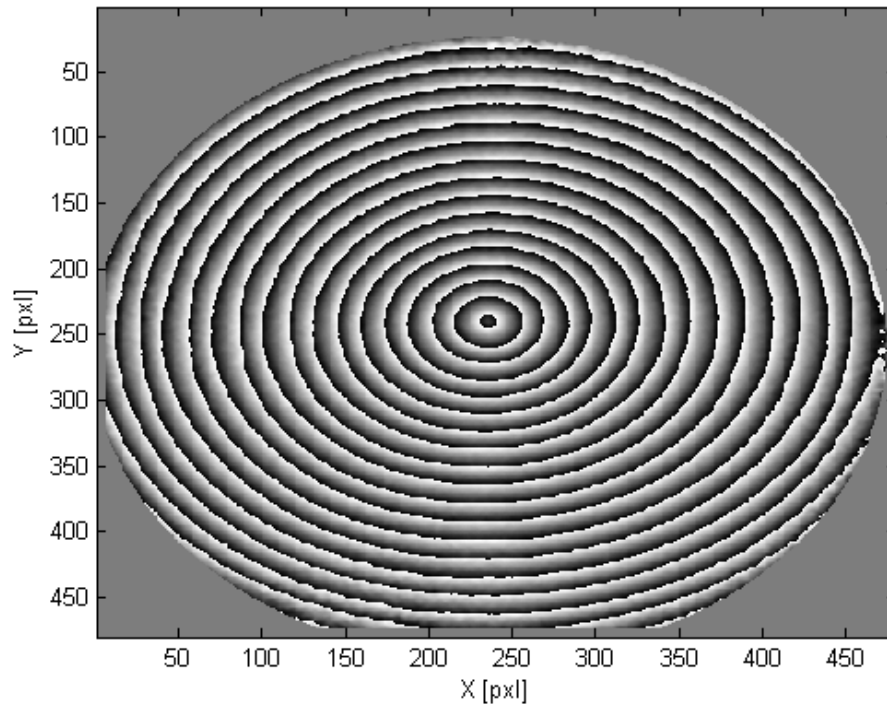


Figura 4.30.- Fase envuelta en la posición 2 del monitor LCD.

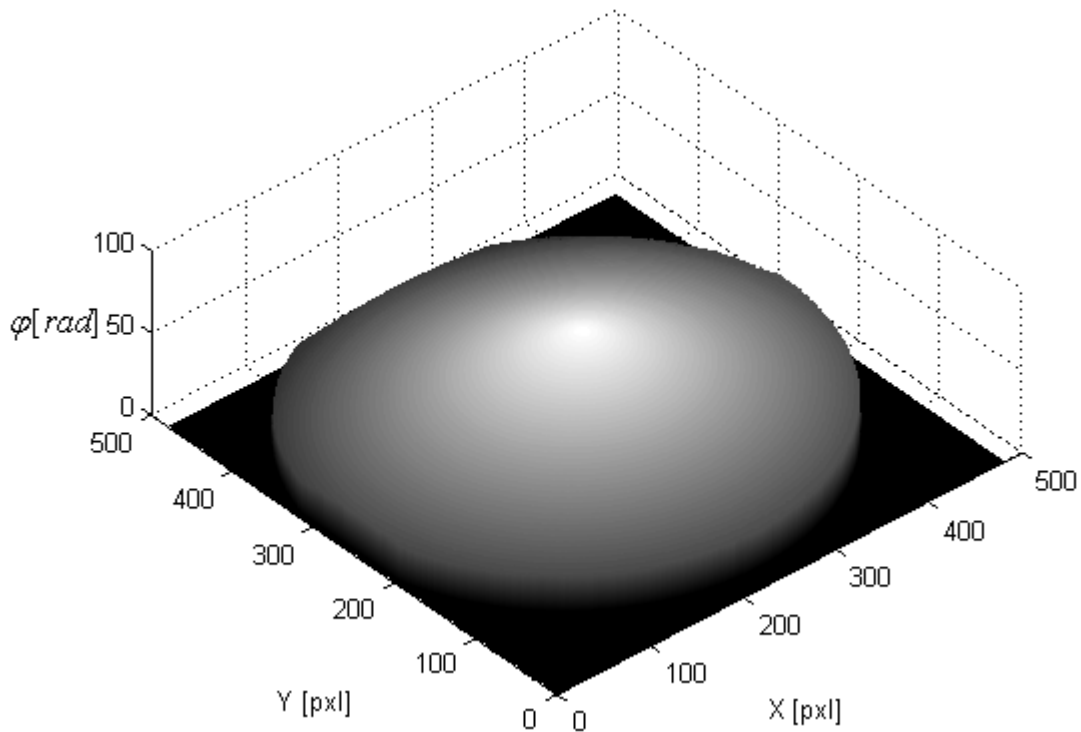


Figura 4.31. - Fase desenvuelta en la posición 2.

Como se menciona anteriormente, al efectuar el desplazamiento mecánico se tendrá un cambio en los anillos iniciales, este cambio en término de fase resulta en que cada punto medido inicialmente tendrá como resultado un desplazamiento radial tomando como referencia el máximo de esa superficie obtenida.

En la figura 4.32 se muestra la línea central de ambas superficies donde la línea azul pertenece a la posición 1 y la línea roja a la posición 2 observando gráficamente cambios laterales a valores mismos de fase.

La idea principal de nuestro algoritmo es encontrar el desplazamiento radial que tendrá un mismo valor en fase, por lo tanto en la figura 4.33 se muestra la resta de ambas superficies para encontrar los valores que tendrán correspondencia. Es importante mencionar que estos datos no tienen ningún valor de topografía solamente nos interesa encontrar esos cambios radiales.

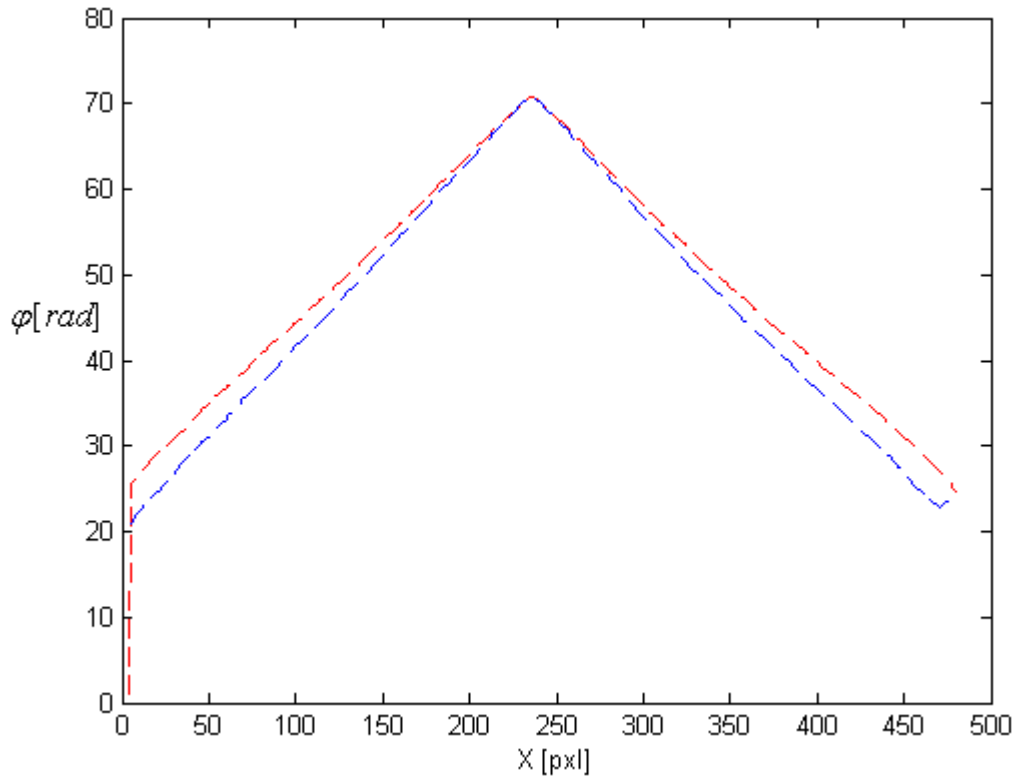


Figura 4.32.- Línea central de las superficies donde se buscarán desplazamientos laterales de la primera posición (línea azul) a los datos de la segunda línea (línea roja) que cuenten con el mismo valor de fase.

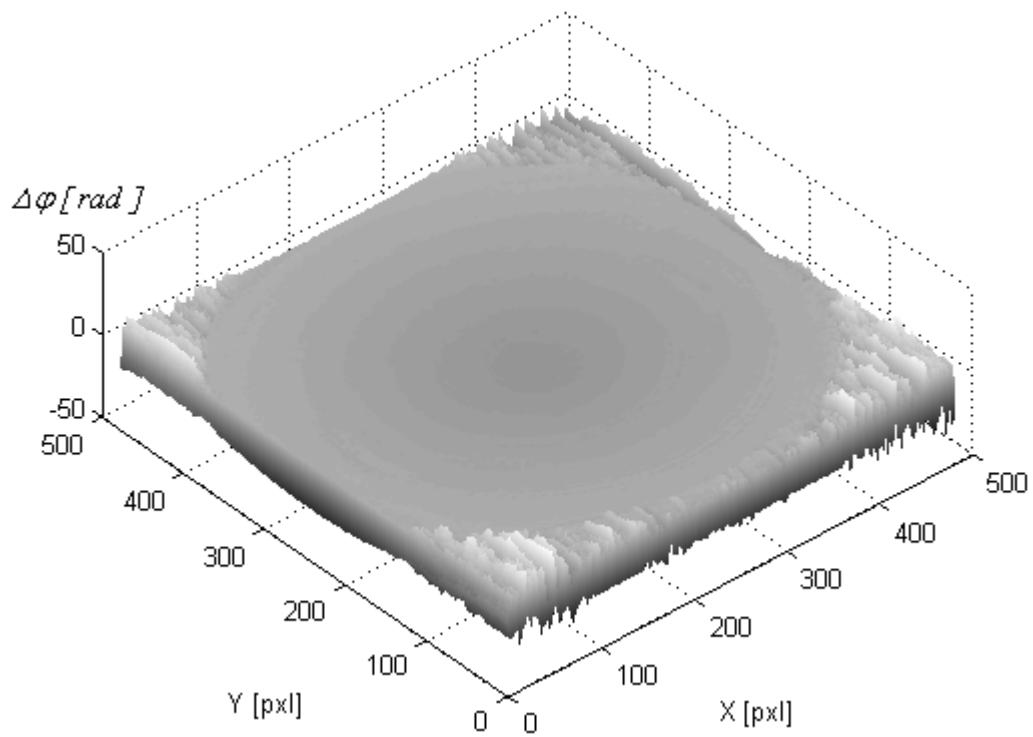


Figura 4.33.- Resta de las fases desenvueltas para encontrar correspondencias entre ambas superficies de fase.

El siguiente paso es encontrar los cambios que se generaron en los datos de fase de la posición 2 a la posición 1. Debido a nuestra geometría, lo que se obtendrán al buscar los mismos valores de fase serán anillos nuevamente y como es conocido el comportamiento de éstos, se puede deducir los desplazamientos radiales de los anillos en la reflexión. En la figura 4.34 se muestran algunos datos obtenidos.

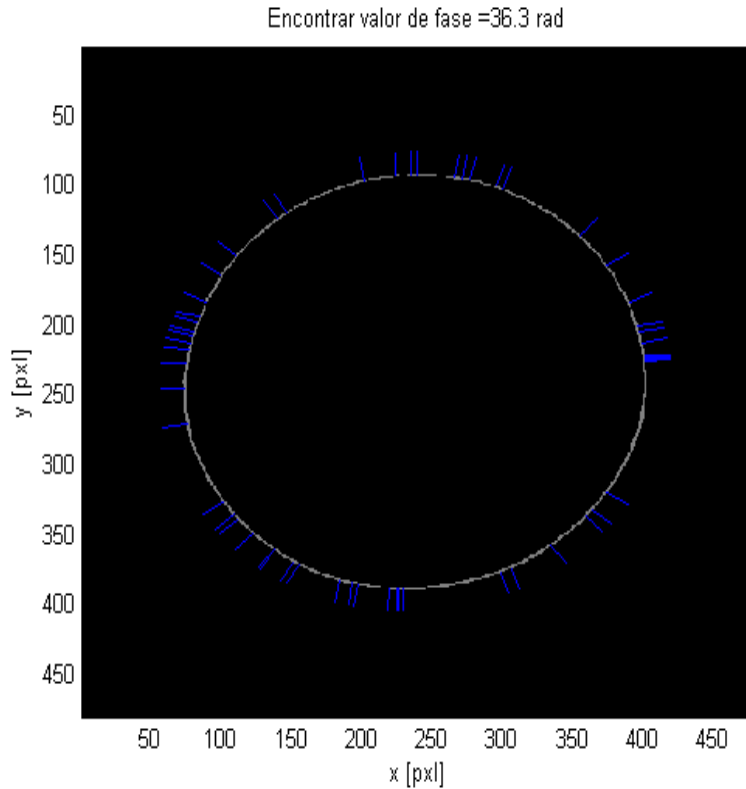


Figura 4.34.- Se muestran los desplazamientos radiales (línea azul) de los puntos para un valor de fase.

4.4.1 Trazo de rayos incidentes y reflejados

En este punto ya se tienen identificados los desplazamientos radialmente, lo que se prosigue a hacer es el trazo de los rayos incidentes (\hat{w}) hacia el objeto en base a la figura 3.6 del sección 3.2. En la figura 4.35 se muestran los rayos incidentes provenientes de la segunda posición del monitor hacia el objeto Para seguir con la convención de variables mostradas en el sección 3.3 estos rayos pertenecen al rayo \hat{w} .

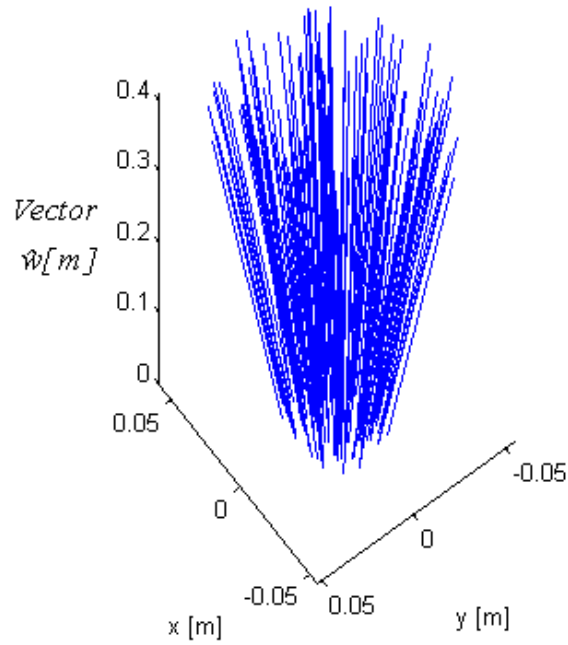


Figura 4.35.- Vectores \hat{w} que representan a los rayos incidentes provenientes del monitor LCD hacia el objeto.

Para la parte correspondiente de los rayos reflejados de la superficie analizada representados vectorialmente mediante \hat{v} se toma en cuenta el modelo de pinhole (Apéndice C.2) de la lente utilizada en la cámara CCD como puede ser visto en la figura 4.36.

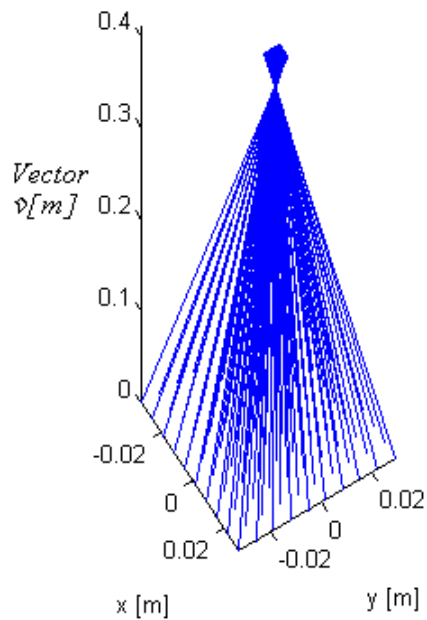


Figura 4.36.- Vector reflejado obtenido basado en el modelo de pinhole de la cámara.

4.4.2 Topografía de un objeto especular cóncavo

Se buscaron puntos correspondientes en el rango de tamaño de la superficie observada para poder efectuar el cálculo de la normal de la superficie (ecuación 3.4, sección 3.3). Posteriormente el cálculo de la derivada radial con base a la teoría mostrada en el sección 3.3 se muestra en la figura 4.37.

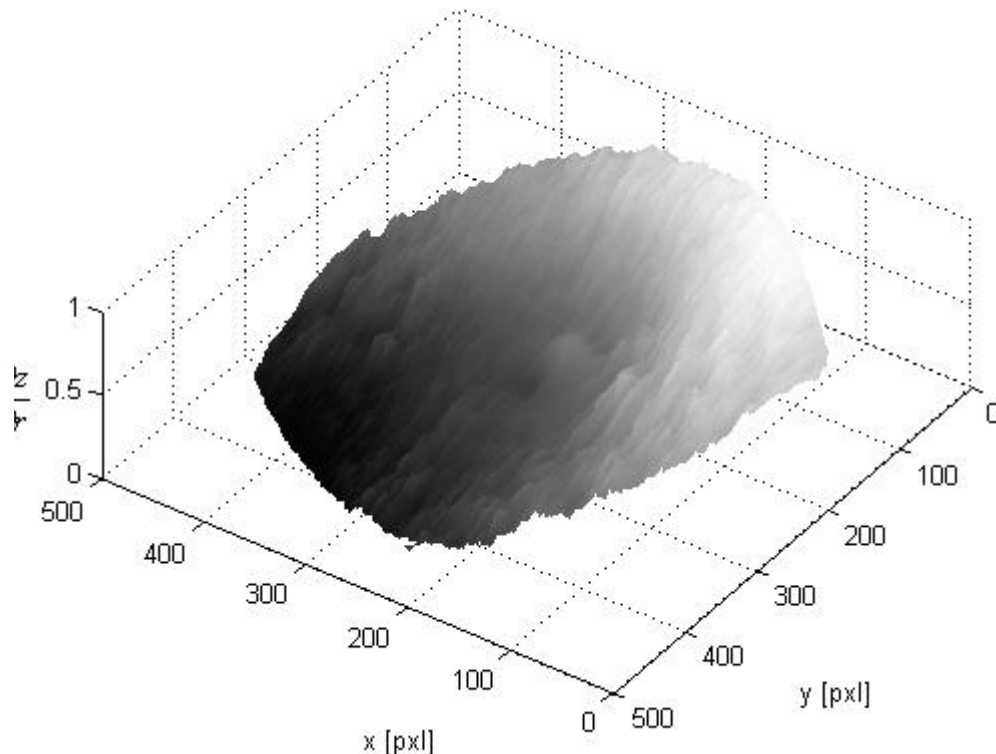


Figura 4.37.- Derivada radial de la superficie cóncava.

Debido a que la superficie obtenida pertenece a la derivada radial del objeto, se prosiguió a efectuar una integración utilizando el método del trapecio, en la figura 4.38 se muestra el resultado obtenido.

En la figura 4.38 se observan líneas radiales partiendo del centro de la superficie debido a errores computacionales al momento de implementar la integración.

En la figura 4.39 se muestra la superficie obtenida utilizando una aproximación polinomial de los datos obtenidos mediante una máquina de coordenadas.

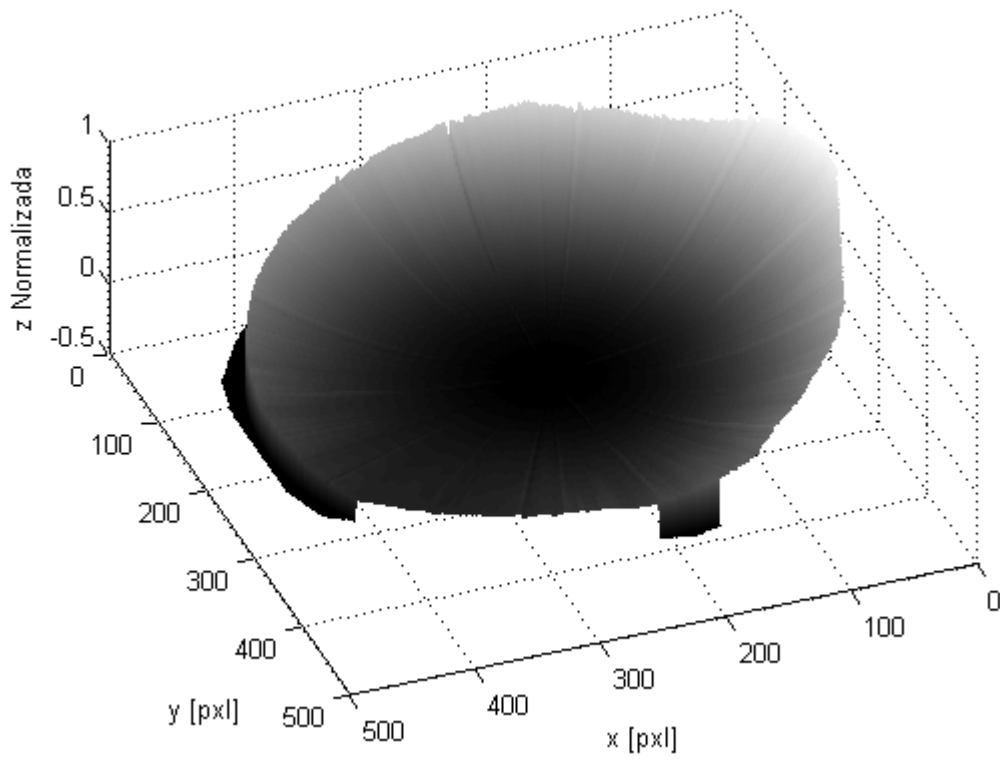


Figura 4.38.- Integración sobre la derivada radial perteneciente a la superficie cóncava.

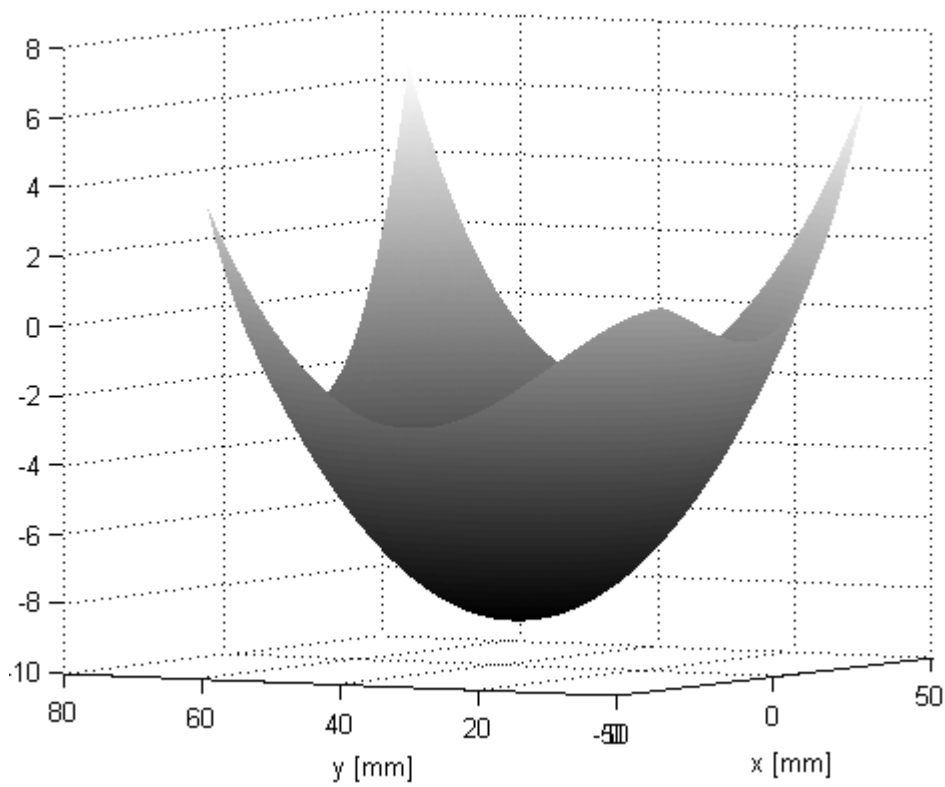


Figura 4.39.- Superficie obtenida de la máquina de coordenadas.

La figura 4.40 muestra cortes transversales correspondientes a las gráficas mostradas en las figuras 4.38 y 4.39 para su comparación. Se obtiene un error máximo correspondiente al 18%.

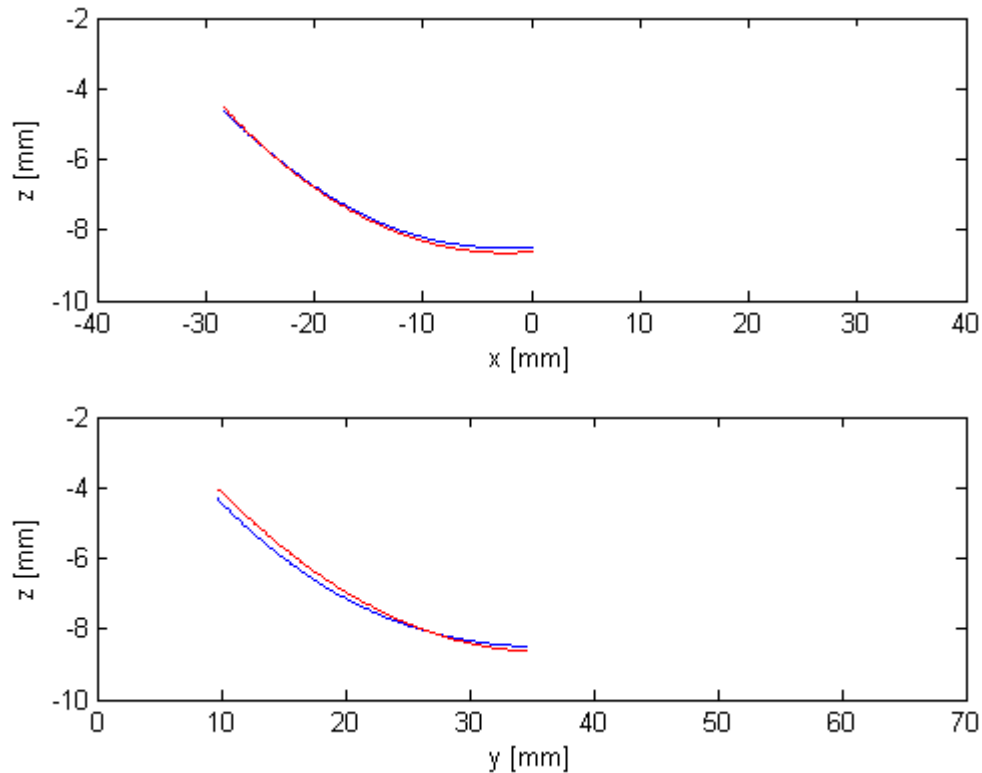


Figura 4.40.- El trazo rojo corresponde a la sección transversal de la superficie obtenida con la máquina de coordenadas y el trazo azul a la superficie medida por la técnica de reflexión de franjas .

Entre los factores que contribuyen al error están: no se efectuó calibración del sistema y faltó tomar en cuenta la calidad del divisor de haz. En la bibliografía consultada, respecto a la calibración, efectúan el cálculo de una matriz de transformación de coordenadas entre plano monitor y el plano del objeto haciendo uso de un espejo plano con marcas bien establecidas para identificar cada punto de incidencia. Por otro lado también se menciona otra matriz de transformación para los puntos pertenecientes a la cámara-objeto para los vectores de reflexión y con un proceso computacional encontrar puntos correspondientes entre ellos.^{25, 26}

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Las técnicas revisadas en este trabajo corresponden a la técnica de proyección de franjas y reflexión de franjas las cuales son utilizadas en la obtención de la topografía de objetos difusos y especulares respectivamente. El tipo de objetos estudiados corresponde a formas cóncava y convexa.

La técnica de reflexión de franjas se combinó con la técnica de corrimiento de fase para obtener la fase de un patrón de franjas cosenoidales circulares desplegadas en un monitor, donde éste fue colocado en dos posiciones distintas para determinar el vector de incidencia. La información hace posible obtener la derivada radial de la superficie bajo estudio. La topografía es recuperada a través de un proceso de integración.

Como objetos prueba se utilizó una lente plana convexa (se estudio la parte convexa) y una lente oftálmica (se estudio la parte cóncava). Para comparación de los resultados se utilizó la superficie generada por un esferómetro para la prueba convexa y las mediciones tomadas por una máquina de coordenadas para la superficie cóncava.

Las ventajas de la técnica implementada para objetos especulares en este trabajo efectuado se enlistan a continuación:

- Se puede utilizar el modelo de reflexión en un espejo esférico para el cálculo de los vectores de incidencia y reflexión. Esto se logro obtener debido a que los objetos bajo estudio tienen simetría radial y a que los elementos ópticos utilizados (cámara y monitor) se encontraban centrados en el mismo eje.
- Como patrón de referencia se utilizan anillos concéntricos con perfil cosenoidal debido a que nuestro punto de referencia para la obtención de los cambios radiales será el centro de éstos. En términos de fase este centro de los anillos será el punto máximo de la superficie de fase obtenida. Cabe mencionar que este último no cambia de posición al momento de efectuar el desplazamiento mecánico de la fuente.
- Se omite el uso de patrones de franjas verticales y horizontales utilizando un solo patrón con simetría radial.

Trabajo a futuro

- Implementación de técnicas de calibración para obtener mejores correspondencias entre el monitor-objeto-cámara y mejorar la resolución del sistema utilizado para medición de superficies especulares.
- Implementación de técnicas de deflectometría fuera de eje y corrección de perspectiva de manera similar a la corrección efectuada en la técnica de proyección de franjas ³⁶
- Aplicaciones en el área oftalmológica para corneas humanas y superficies esféricas.
- Implementación de técnicas de corrimiento de fase por polarización para la obtención de fase con la ventaja de hacer corrimiento de fase de una sola toma ³⁷ haciendo posible aplicar la técnica en eventos dinámicos ³⁸
- Implementación de la técnica para superficies irregulares es decir sin simetría radial.

APÉNDICE A: LEY DE REFLEXIÓN

Se presentan las leyes y relaciones fundamentales para el desarrollo del principio de Fermat para la obtención de la ley de reflexión.

La ley de reflexión establece que el vector normal en el punto de una superficie bisecta el ángulo que existe entre el rayo incidente y reflejado.²⁷

A.1 Principio de Fermat

En óptica geométrica la luz se modela y se representa por medio de rayos individuales propagándose en un medio ordinario²⁷, es decir por líneas rectas. Un medio ordinario se refiere a que es homogéneo (el mismo en cada punto) e isotrópico (el mismo para toda dirección), por lo tanto en un medio ordinario la luz a una definida longitud de onda se propaga a velocidad constante v . En el vacío (un ejemplo de medio ordinario), la velocidad de la luz es la misma para todas las longitudes convencionalmente simbolizado por la letra c . Tomando como referencia la velocidad de la luz en el vacío se obtiene la definición de índice de refracción

$$n = c/v \quad (\text{A.1})$$

Se define a la longitud de camino óptico (L) en un medio ordinario como el producto de la longitud geométrica del rayo (l_i) por el índice de refracción del medio (n_i) desde un punto A hacia un punto A' a través de un medio por lo tanto el camino óptico total se obtiene por medio de

$$L = \sum n_i l_i \quad (\text{A.2})$$

donde $n_i l_i$ se refiere a la longitud de camino óptico (L) a través de un volumen de un medio particular ordinario.

Tomando en cuenta estas definiciones el Principio de Fermat se define como:

El camino óptico de la luz viajando desde un punto A hacia un punto A' tiene un valor estacionario con respecto a las variaciones infinitesimales del camino.²⁷

Matemáticamente puede ser expresado por

$$\delta L = \delta \sum n_i l_i = 0 \quad (\text{A.3})$$

siendo δL una variación infinitesimal de camino óptico, l_i la longitud geométrica del rayo y n_i el índice de refracción del medio. La ecuación A.3 establece que la diferencia de camino óptico recorrido de un camino de luz entre dos puntos fijos siempre será mínimo, máximo o constante comparado con todas las posibilidades de caminos ópticos vecinos ²⁸.

A.2 Ley de reflexión

De ahora en adelante los cálculos efectuados se referirán a un medio ordinario con índice de refracción $n = 1$, donde se toma como modelo, la reflexión de un solo rayo. El camino óptico (L) por lo tanto es la longitud geométrica teniendo

$$L = \sum l_i \quad (\text{A.4})$$

donde l_i son las longitudes individuales desde el punto inicial a la primera superficie.

El camino óptico de un rayo que presenta una sola reflexión se muestra en la figura A.1 donde $P(x, y, z)$ es un punto arbitrario en la superficie reflectora y la luz recorre un camino (l_1) iniciando desde el punto $A(\xi, \eta, \zeta)$ hacia $P(x, y, z)$ y después hacia $A'(\xi', \eta', \zeta')$ como punto final una distancia (l_2).

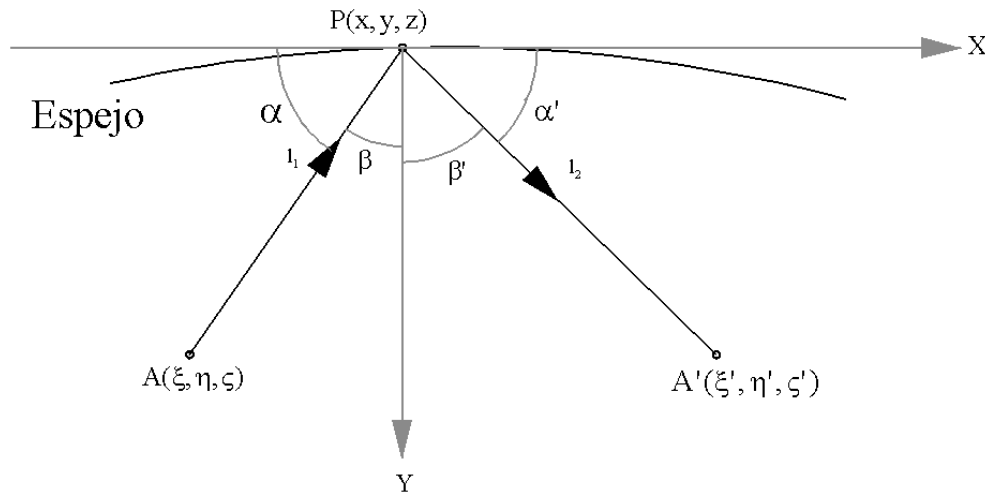


Figura A.1.- Reflexión en una superficie reflectora en un punto $P(x, y, z)$.

Teniendo una longitud de camino

$$L = l_1 + l_2 \quad (\text{A.5})$$

obteniendo cada una de sus longitudes en términos de las coordenadas cartesianas

- Apéndice A: Ley de Reflexión -

$$l_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (\text{A.6})$$

$$l_2^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + (\zeta' - z)^2$$

para un desplazamiento infinitesimal, $(\delta x, \delta y, \delta z)$, en el punto $P(x, y, z)$ de la superficie se obtiene

$$l_1 \delta l_1 = (x - \xi) \delta x + (y - \eta) \delta y + (z - \zeta) \delta z \quad (\text{A.7})$$

$$l_2 \delta l_2 = (x - \xi') \delta x + (y - \eta') \delta y + (z - \zeta') \delta z$$

de acuerdo a la geometría mostrada en la figura A.1 los cosenos directores de l_1 y l_2 serán:

$$\cos \alpha = (x - \xi) / l_1, \quad \cos \beta = (y - \eta) / l_1, \quad \cos \gamma = (z - \zeta) / l_1, \quad (\text{A.8})$$

$$\cos \alpha' = (\xi' - x) / l_2, \quad \cos \beta' = (\eta' - y) / l_2, \quad \cos \gamma' = (\zeta' - z) / l_2,$$

utilizando las ecuaciones (A.7) y (A.8) se puede obtener las variaciones del camino óptico

$$\delta L = \delta l_1 + \delta l_2 \quad (\text{A.9})$$

$$\delta L = (\cos \alpha - \cos \alpha') \delta x + (\cos \beta - \cos \beta') \delta y + (\cos \gamma - \cos \gamma') \delta z$$

esta última ecuación puede representarse como un producto escalar de tres vectores dado por un vector de incidencia (\hat{I}_1) a un ángulo (ε) con respecto a la normal (\hat{N}) y el vector de reflexión (\hat{I}_2) a un ángulo (ε') con respecto a la normal (\hat{N}), figura A.2.

1. Vector de incidencia,

$$\hat{I}_1 = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \quad (\text{A.10})$$

2. Vector de reflexión,

$$\hat{I}_2 = \cos \alpha' + \cos \beta' + \cos \gamma' \quad (\text{A.11})$$

3. Vector de desplazamiento tangente al plano en el punto $P(x, y, z)$

$$\vec{\delta s} = \vec{\delta x} + \vec{\delta y} + \vec{\delta z} \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto la ecuación A.9 puede ser rescrita en términos de componentes vectoriales de la forma

$$\delta L = (\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \cdot \vec{\delta s} \quad (\text{A.1})$$

de acuerdo al Principio de Fermat: anteriormente comentado, $\delta L = 0$, obtenemos

$$(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \cdot \vec{\delta s} = 0 \quad (\text{A.1})$$

- Apéndice A: Ley de Reflexión -

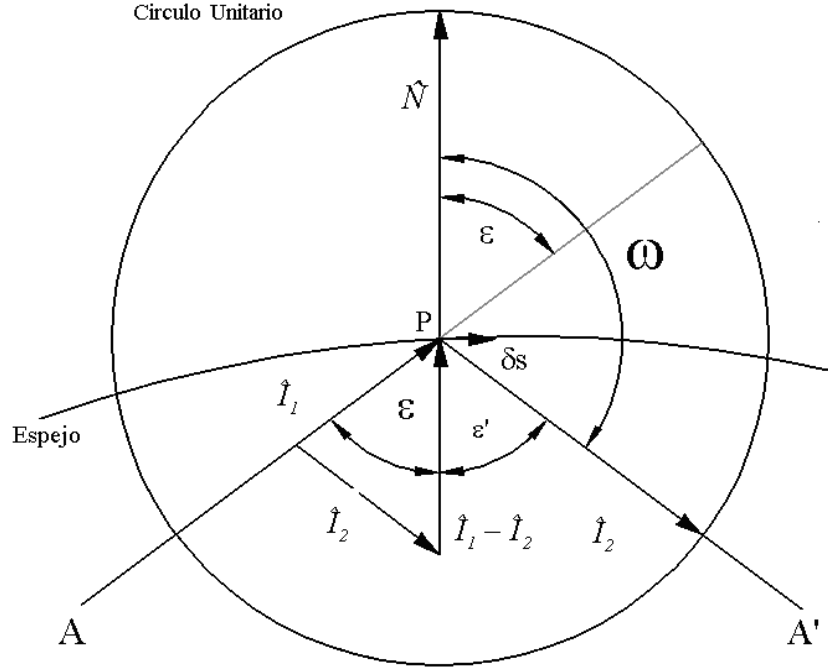


Figura A.2.- Representación geométrica de la ley de reflexión: \hat{I}_1 vector de incidencia, \hat{I}_2 vector de reflexión, \hat{N} vector normal a la superficie, ε ángulo de incidencia y ε' ángulo de reflexión.

La ecuación A.14 muestra que los vectores $(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)$ y $\vec{\delta s}$ son ortogonales entre sí, lo que equivale a decir que el vector $(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)$ es paralelo al vector normal \hat{N} de la superficie en el punto $P(x, y, z)$, vectorialmente esto se puede describir como:

$$(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \times \hat{N} = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde se obtiene que

$$\hat{I}_1 \times \hat{N} = \hat{I}_2 \times \hat{N} \quad (\text{A.3})$$

$$|\hat{I}_1| |\hat{N}| \sin(\hat{I}_1, \hat{N}) = |\hat{I}_2| |\hat{N}| \sin(\hat{I}_2, \hat{N})$$

debido a que son vectores unitarios

$$|\hat{I}_1| |\hat{N}| = |\hat{I}_2| |\hat{N}| = 1 \quad (\text{A.4})$$

se puede concluir que

$$\sin(\hat{I}_1, \hat{N}) = \sin(\hat{I}_2, \hat{N}) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{ang}(\hat{I}_1, \hat{N}) = \text{ang}(\hat{I}_2, \hat{N})$$

o en términos de la figura A.2 se obtiene que

$$\varepsilon = \varepsilon' \quad (\text{A.6})$$

La última ecuación comprende la ley de reflexión mostrando que

La normal de una superficie en un punto bisecta el ángulo que existe entre el rayo incidente y reflejado^{27,28}

Por lo tanto el vector unitario normal (\hat{n}) en un punto $S(x,y,z)$ de una superficie se puede trazar como una resta vectorial entre el rayo incidente (\hat{w}) y el rayo reflejado (\hat{v}), figura A.3.

$$\hat{n} = \frac{\hat{v} - \hat{w}}{\|\hat{v} - \hat{w}\|} \quad (\text{A.7})$$

donde el ángulo (θ) entre \hat{n} y \hat{w} es el mismo al de \hat{n} y \hat{v} . El vector unitario \hat{v} se refiere a la dirección del rayo incidente, \hat{w} describe el vector unitario perteneciente al rayo reflejado y \hat{n} es el vector unitario normal en el punto de superficie¹³.

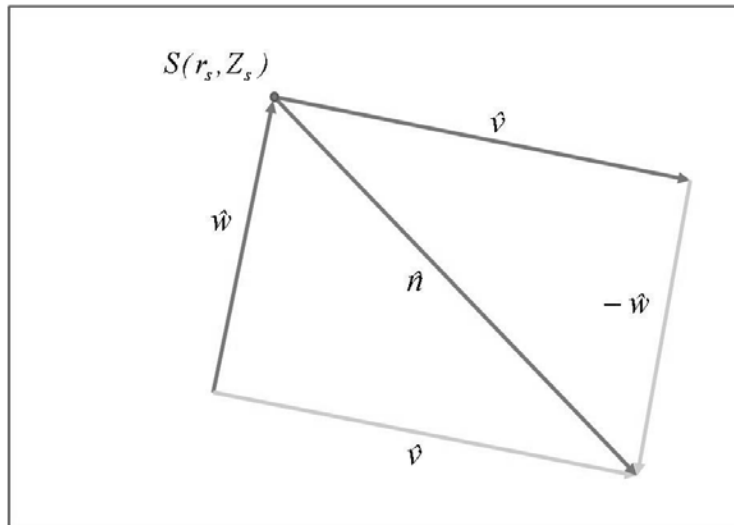


Figura A.3.- Vector normal \hat{n} en un punto $S(x,y,z)$ a partir de un vector \hat{w} representando el rayo incidente y un vector \hat{v} como rayo reflejado.

APÉNDICE B: FORMACIÓN DE IMÁGENES PARA ESPEJOS ESFÉRICOS

Debido a que se buscarán aplicaciones para superficies oftálmicas se toman como objetos bajo prueba superficies con simetría esférica, por lo tanto es necesaria la comprensión de los efectos que se obtendrán dependiendo su forma (convexo y cóncavo). En este apéndice se desarrolla la ecuación de espejos esféricos para posteriormente explicar el trazo de rayos y las imágenes obtenidas dependiendo la posición del objeto.

B.1 Ecuación de espejos esféricos

Para la deducción de la ecuación de los espejos esféricos en el aproximación paraxial, se toma en cuenta que el rayo proveniente de un punto objeto se verá reflejado al mismo ángulo de incidencia con respecto a la normal de la superficie reflectora (Apéndice A: Ley de Reflexión). Tomando en cuenta la geometría mostrada en la figura B.1, una superficie esférica reflectora con un punto objeto ubicado a una distancia (S_o) con respecto del vértice de la misma tendrá un punto imagen a una distancia (S_i) debido a la reflexión con ella en base a:

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (\text{B.1})$$

Donde $f = -R / S$ siendo la distancia focal de ese punto de la superficie esférica ²⁹.

<i>Cantidad</i>	<i>Signo</i>	
	+	-
S_o	Izquierda de V, Objeto Real	Derecha de V, Objeto Real
S_i	Izquierda de V, Imagen Real	Derecha de V, Imagen Virtual
f	Espejo esférico cóncavo	Espejo esférico convexo
R	C derecha de V, Convexo	C Izquierda de V, Cóncavo
Y_o	Eje superior, Imagen recta	Eje Inferior, Imagen Invertida
Y_i	Eje superior, Imagen recta	Eje superior, imagen invertida

Tabla B.1.- Convención de signos utilizada en la reflexión en un espejo esférico ²⁹.

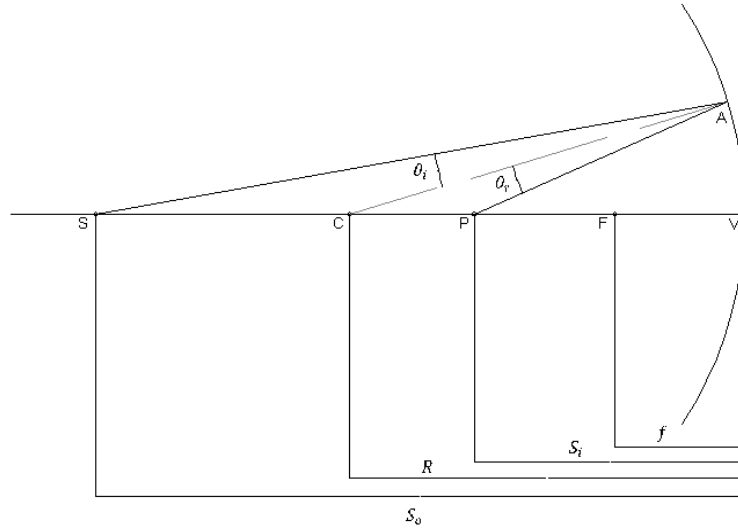


Figura B.1.- Reflexión en una superficie esférica.

La convención de signos utilizada para la ecuación B.1 se encuentra mencionada en la tabla B.1 basada en el libro de Eugene Hecht “Optics”²⁹.

B.2 Deducción de la ecuación para espejos esféricos

Tomando como referencia una superficie esférica con radio de curvatura R , un punto objeto (S) tendrá un punto imagen (P), figura B.1, cumpliendo con la ley de reflexión mencionada en el apéndice A.

Tomando como referencia la figura B.1, el ángulo $\angle SAP$ formado por el punto objeto (S) hacia el punto imagen (P) se encuentra dividido por la línea \overline{CA} referente al punto en la superficie (A) y el punto del centro de curvatura (C), el tramo \overline{SP} se encuentra dividido en dos tramos cumpliendo con la siguiente relación

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} \quad (\text{B.2})$$

por lo tanto se pueden encontrar las siguientes relaciones referente al punto objeto (S_0) y al punto imagen (S_i)

$$\overline{SC} = S_0 - |R| \quad \overline{CP} = |R| - S_i \quad (\text{B.3})$$

Debido a que S_0 y S_i se encuentran a la izquierda de la superficie se tomará la convención de tener valores positivos y además el punto C, referente a la curvatura del

- Apéndice B: Formación de Imágenes para Espejos Esféricos -

objeto, se encuentra a la izquierda el radio R tomará un valor negativo, tabla B.1. Por lo tanto para nuestro caso que la superficie es cóncava se obtiene:

$$|R| = -R \quad (B.4)$$

$$\overline{SC} = S_0 + |R| \quad \overline{CP} = -(R + S_i)$$

debido a que nos encontramos en la región paraxial se podrá decir que $\overline{SA} \approx \overline{S_0}$, $\overline{PA} \approx \overline{S_i}$ y tomando en cuenta la ecuación B.2 y las relaciones encontradas anteriormente se obtiene

$$\frac{S_0 + R}{S_0} = -\frac{S_i + R}{S_i} \quad (B.5)$$

$$\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = -\frac{2}{R} \quad (B.6)$$

La ecuación B.6 es conocida como la ecuación de los espejos esférico donde la convención de signos tomada es que una superficie cóncava tiene radio negativo ($R < 0$) y convexa radio positivo, tabla B.1, ($R > 0$).

Para encontrar la ecuación de los espejos en base a su distancia focal se toma en cuenta que los puntos focales primario (f_0) y secundario (f_i) son ²⁹:

$$\lim_{S_i \rightarrow \infty} S_0 = f_0 \quad \lim_{S_0 \rightarrow \infty} S_i = f_i \quad (B.7)$$

sustituyendo en la ecuación B.6 por separado se obtienen las siguientes relaciones

$$f_0 = f_i = -\frac{R}{2} \quad (B.8)$$

$$\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (B.9)$$

donde la distancia f tomará valor positivo para un espejo cóncavo ($R < 0$) y negativo para un espejo convexo ($R > 0$), S_0 y S_i se refieren a la distancia del objeto y de la imagen del mismo medido desde el vértice del espejo esférico.

B.3 Trazo de rayos en un espejo esférico para la formación de imágenes

La formación de imágenes para espejos esféricos es muy similar a la teoría para la formación de imágenes en lentes tomando algunas consideraciones para la convención de signos. Como es mostrado en la figura B.2 se encuentra que los rayos que inciden paralelos al eje óptico convergen hacia el plano focal del espejo.

- Apéndice B: Formación de Imágenes para Espejos Esféricos -

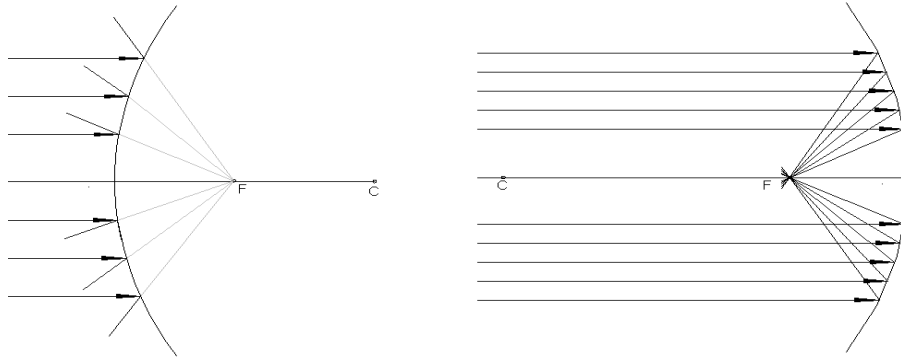


Figura B.2.- Rayos focales en un espejo esférico convexo y cóncavo.

Por lo tanto para la formación de imágenes en el espejo esférico se puede utilizar el trazado de cuatro rayos^{31, 32}, figura B.3, siendo:

1. Un rayo que cruce por el punto de curvatura (C) será reflejado por la misma dirección
2. Un rayo paralelo al eje óptico se reflejara hacia el punto focal (f) del espejo
3. Un rayo que cruce por el foco (f) será reflejado de manera paralela al eje óptico.
4. Un rayo que incide hacia el vértice del espejo esférico será reflejado con el ángulo contrario al eje óptico.

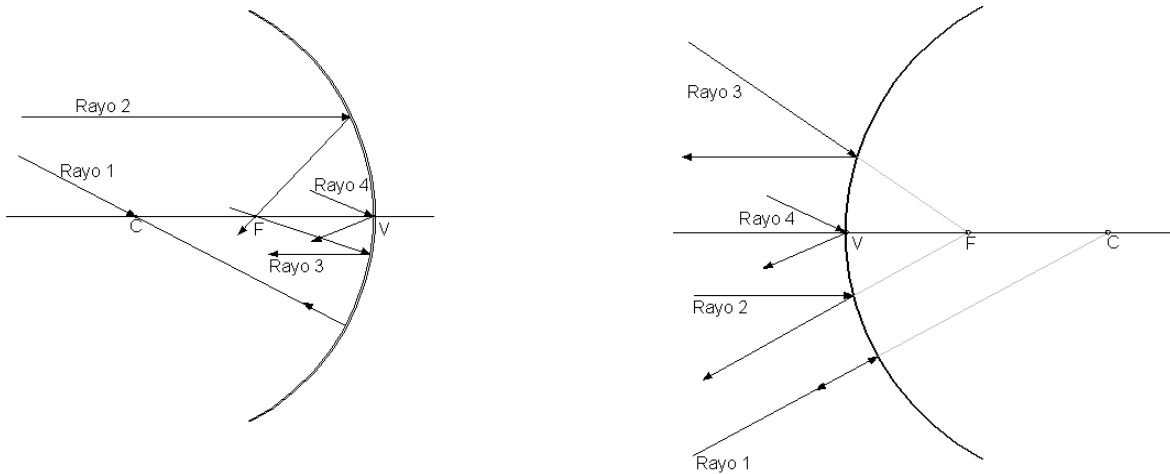


Figura B.3.- Trazo de cuatro posibles rayos en un espejo esférico cóncavo y convexo donde mínimo se necesitan dos para la formación de imágenes.³²

- Apéndice B: Formación de Imágenes para Espejos Esféricos -

En base al trazado de los rayos mencionados anteriores un objeto real, figura B.4, se pueden obtener relaciones para la amplificación transversal (M_T) como²⁹:

$$M_T = \frac{Y_i}{Y_o} = -\frac{S_i}{S_o} \quad (\text{B.10})$$

dependiendo de la posición de el objeto bajo estudio su imagen formada se encontrará con diversas características, tabla B.2, para un espejo cóncavo, tabla B.3, y para un espejo convexo, tabla B.4. Cabe mencionar que en este último no importa la posición del objeto siempre se obtendrá una imagen virtual.^{29, 32}

Cuando los rayos provenientes de un objeto convergen en un punto, figura B.2 prueba cóncava, se obtiene una *imagen real* pudiendo ser observados en una pantalla colocada en el plano imagen o grabada en una placa de fotografía. En la situación de la prueba convexa se obtiene una *imagen virtual* donde un observador captará una imagen aunque ningún rayo converge a esa imagen debido a que el elemento óptico utilizado para observarla forma una imagen real sobre el objeto, v.g. La retina del ojo humano, sensor CCD de una cámara^{30,33}.

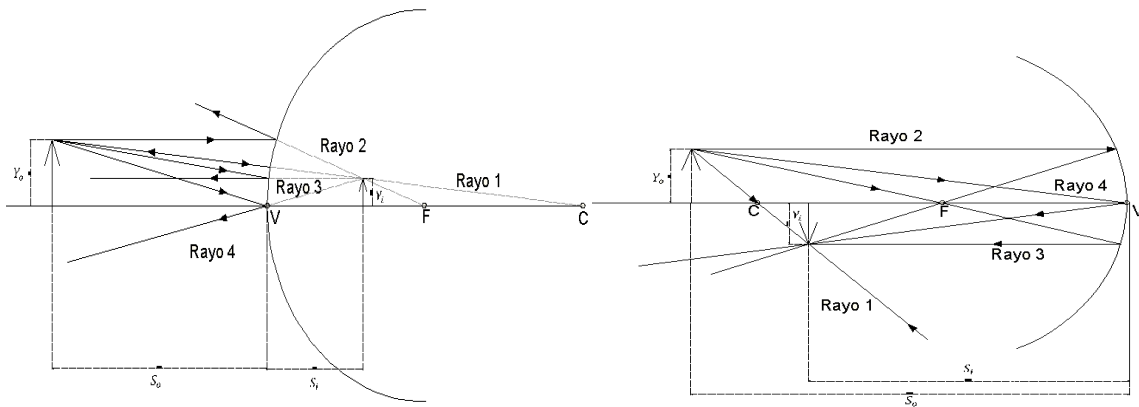


Figura B.4.- Trazo de rayos para un objeto real en una superficie reflectora convexa y cóncava.

Formación de Imagen en base a la posición del objeto en un espejo esférico				
Cóncavo				
Objeto		Imagen		
Posición	Tipo	Ubicación	Orientación	Tamaño Relativo
$\infty > S_o > 2f$	Real	$f < S_i < 2f$	Invertida	Minimizada
$S_o = 2f$	Real	$S_i = 2f$	Invertida	Mismo Tamaño
$f < S_o < 2f$	Real	$\infty > S_i > 2f$	Invertida	Magnificada
$S_o = f$	Real	$\pm \infty$		
$S_o < f$	Virtual	$ S_i > S_o$	Recta	Magnificada
Convexo				
Objeto		Imagen		
Posición	Tipo	Ubicación	Orientación	Tamaño Relativo
Cualquiera	Virtual	$ S_o < f $ $S_o > S_i $	Recta	Minimizada

Tabla B.2.- Características de la imagen obtenida en base a la posición del objeto para espejos esféricos.

Formación de Imagen en un Espejo Esférico		
		Cóncavo
Objeto	Imagen	
$\infty > S_o > 2f$	$f < S_i < 2f$	

- Apéndice B: Formación de Imágenes para Espejos Esféricos -

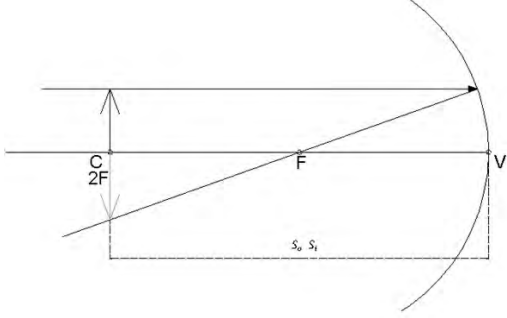
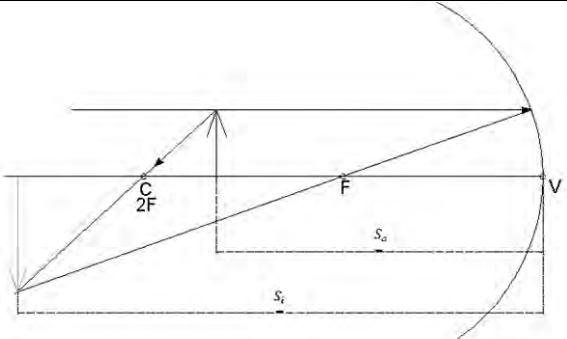
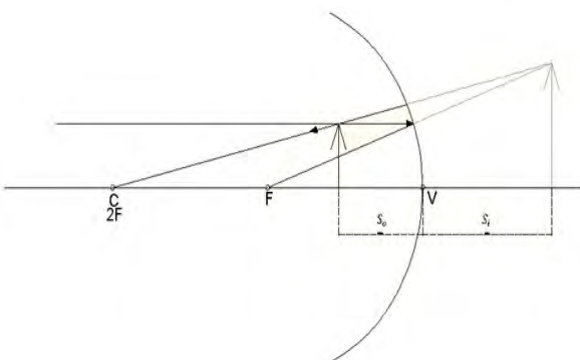
$S_o = 2f$	$S_i = 2f$	
$f < S_o < 2f$	$\infty > S_i > 2f$	
$S_o < f$	$ S_i > S_o$	

Tabla B.3.- Imagen obtenida dependiendo la posición del objeto en un espejo cóncavo.

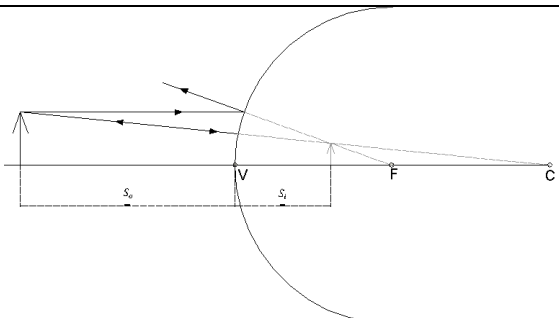
Convexo		
Objeto	Imagen	
Cualquiera	$ S_o < f $ $S_o > S_i $	

Tabla B.4.- Imagen formada por un espejo convexo.

APÉNDICE C: FORMACIÓN DE IMAGEN EN UNA CÁMARA

El principio básico de la formación de imagen en una cámara o sistema de imagen empieza con los rayos de luz que entran a la cámara a través de un ángulo de apertura (pupila) e intersectan una pantalla o plano imagen por medio de un sistema óptico hacia un dispositivo fotosensible que registra la intensidad de la luz. (Figura C.1).

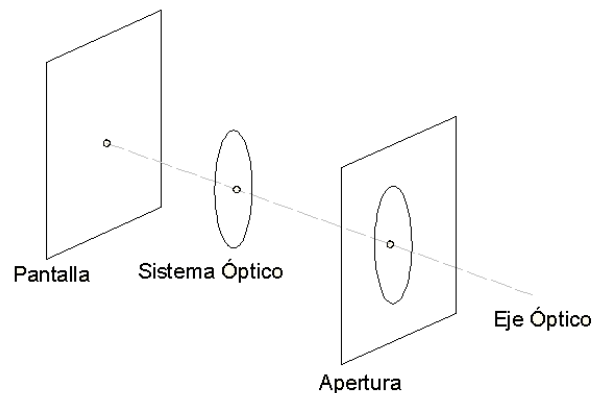


Figura C.1.- Elementos básicos en un dispositivo para la formación de imágenes.

Por lo tanto cualquier punto en una escena tendrán un punto en el plano imagen, pero también puede ocurrir que varios puntos objeto converjan al mismo punto imagen. Esto último puede ser corregido de dos maneras:

1. Reduciendo la apertura de la cámara. Esto quiere decir que solamente un rayo proveniente de cada punto objeto pueda entrar a la cámara y crear una correspondencia de uno a uno entre los puntos visibles y puntos imagen.
2. Introduciendo un sistema óptico compuesto por lentes y aperturas de otros elementos explícitamente diseñados para converger diversos puntos provenientes del mismo objeto hacia su correspondiente punto imagen.

Una desventaja del primer modelo mencionado, comúnmente conocido como de perspectiva o de pinhole, es necesario incrementar el tiempo de exposición debido a que el dispositivo fotosensible necesita un mínimo de intensidad de luz para registrar la imagen.³⁴

C.1 Modelo de pinhole

La luz proveniente de cada punto de un objeto transmitiéndose por una pequeña apertura hacia una pantalla, generará una región de iluminación proporcional al tamaño de la apertura. Por cada punto de objeto se obtendrán regiones de luz proporcionales al tamaño de la apertura, obteniendo como resultado un área iluminada correspondiente a la forma del objeto pero invertida, figura C.2 (a).

Considerando a la apertura muy pequeña, las regiones individuales de iluminación ocuparán menor región, así se podrá obtener una imagen fiel del objeto sobre el plano imagen, figura C.2 (b), el tamaño de la imagen invertida obtenida dependerá de la distancia a la que se coloque el objeto y pantalla cumpliendo con

$$\frac{h'}{h} = \frac{a'}{a} \quad (C.1)$$

donde h' , h , a y a' representan el tamaño y distancia del objeto e imagen respectivamente. Cabe destacar que la nitidez de la imagen dependerá del tamaño de la apertura pero sin llegar a los límites de difracción donde se obtendrán imágenes borrosas.

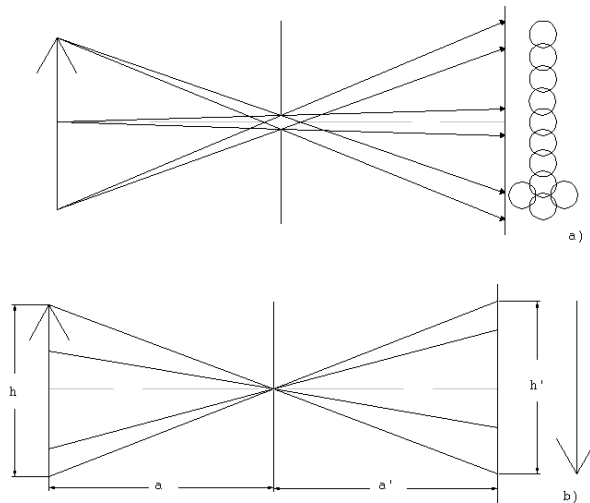


Figura C.2.- Formación de una imagen mediante una apertura donde se muestran las regiones que ocuparan rayos provenientes del mismo objeto.

C.2 Modelo geométrico del modelo de pinhole

Considerando una proyección de manera central de puntos del espacio hacia un plano. El centro de proyección se tomará como el origen de coordenadas en un sistema

euclidiano, y el plano imagen se encontrará a una distancia $Z = f$ llamado plano imagen o plano focal. En el modelo de pinhole, un punto en el espacio, $\mathbf{X}=(X,Y,Z)^T$, es mapeado en un punto en el plano imagen donde una línea que une el punto \mathbf{X} con el plano imagen, en el punto \mathbf{x} , atravesando el centro de la cámara, figura C.3. Por triangulo similares se puede obtener que un punto $(X,Y,Z)^T$ tomará un punto $\left(\frac{fX}{Z}, \frac{fY}{Z}, f\right)^T$ en el plano imagen. Como convención se ignora la coordenada final obteniendo ³⁵

$$(X,Y,Z)^T \rightarrow \left(\frac{fX}{Z}, \frac{fY}{Z}\right)^T \quad (C.2)$$

Describiendo que la proyección de puntos objeto a coordenadas imagen buscando la transformación de un plano euclidiano \mathfrak{R}^3 a un plano euclidiano \mathfrak{R}^2 . La línea perpendicular al plano imagen y proveniente del centro de la cámara se llama *eje principal* o *rayo principal de la cámara* y el punto donde el rayo principal intersecta el plano imagen se conoce como *punto principal*. ³⁵

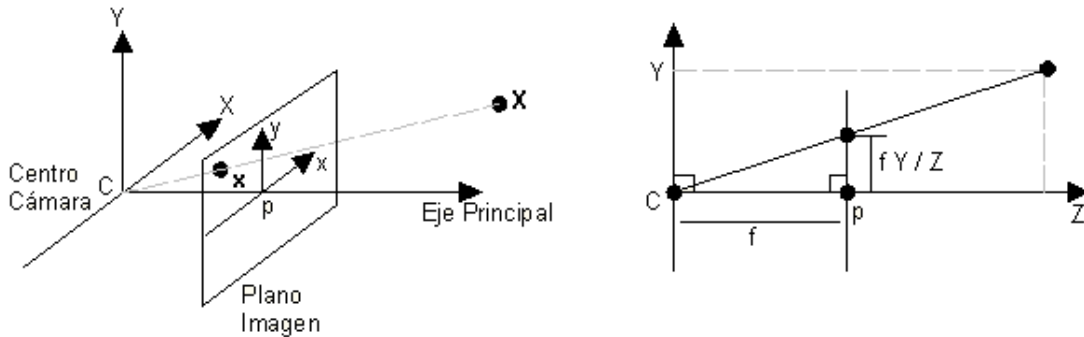


Figura C.3.- Modelo de la cámara de pinhole.

Referencias

- 1 - R. B. Rao, S. C-Y. Lu, *“Inverse engineering: A methodology for learning models to support engineering design”*, Proc. of IEEE (1993), ISBN: 0-8186-3840-0.
- 2 - A. Martínez, J. A. Rayas, S. Vázquez, A. Jaramillo, *“Analysis of secondary mirror mold topography to large millimeter telescope using fringe projection technique”*, Proc. of SPIE, Vol. 6046-1X (2006), ISBN: 9780819460783.
- 3 - K. Genovese, *“Mechanical characterization of hyperelastic materials with fringe projection and optimization techniques”*, Opt. Lasers Eng., Vol. 44-5 (2006), pp. 423-442.
- 4 - M. A. Rosales, M. Juárez-Aubry, E. López-Olazagasti, J. Ibarra, E. Tepichín, *“Anterior corneal profile with variable asphericity”*, Appl. Opt., Vol. 48-35 (2009), pp. 6594-6599.
- 5 - D. Serrano, A. Martínez, J. A. Rayas, A. Serrano-Heredia, *“Reconstruction of Three Dimensional Objects Using Fringe Projection Technique”*, VI Simposio La Óptica en la Industria, Monterrey N. L. Marzo 8-9, 2007.
- 6 - D. Serrano, A. Martínez, A. Serrano-Heredia, J. A. Rayas, *“Development and Application of Talbot Images Technique for Reconstruction of Three Dimensional Objects”*, Proc. of SPIE Vol. 6292 (2006), ISBN: 9780819463715.
- 7 - T. Bothe, W. Li, C. von Kopylow, W. Jüptner, *“High-resolution 3D shape measurement on specular surfaces by fringe reflection”*, Proc. of SPIE, Vol. 5457 (2004), ISBN: 081945379X .

- Referencias -

8. - T. Bothe, W. Li, C. von Kopylow, W. Jüptner. "*Fringe Reflection for high resolution topometry and surface description on variable lateral scales*", Fringe 2005 edited by Wolfgang Osten, Springer (2006), pp. 362-371, ISBN: 9783540293033.
9. - L. Wanga, P. Sua, R. E. Parks, J. M. Sasian and J. H. Burgoa. "*A Low-cost, Flexible, High Dynamic Range Test for Free-form Illumination Optics*", Proc. Of SPIE, Vol. 7652 (2010), ISBN 978-0-8194-8082-8.
10. - R. Höfling, P. Aswendt y Re. Neugebauer, "*Phase reflection-a new solution for the detection of shape defects on car body sheets*", Opt. Eng., Vol. 39-1 (2000), pp. 175–182.
11. - H. Guo, P. Feng, T. Tao, "*Specular Surface Measurement by Using Least Squares Light Tracking Technique*", Opt. Lasers Eng., Vol. 8-2 (2010), pp. 166–171.
12. - Y. Liu, X. Su, Q. Zhang, "*Wavefront Measurement Based on active Deflectometry*", Proc. of SPIE, Vol. 6723 (2007), ISBN: 9780819468802.
13. - W. Zhao, X. Su, "*Testing an Aspheric Mirror Based on Phase Measuring Deflectometry*", Opt. Eng., Vol. 48-10 (2009), pp. 1036031-1 1036031-5.
14. - H. Young, R. Freedman. "*Física Universitaria*", Vol. 2, Addison Wesley Longman de México (1999). Tema: 34.3 *Reflexión y Refracción*. ISBN: 9702605121.
15. - "*Reflections and Its Importance*".
<http://www.physicsclassroom.com/class/refln/u1311d.cfm> al 8 de diciembre de 2010.
16. - A. M. Cetto, "*La luz en la Naturaleza y en el Laboratorio*", Fondo de Cultura Económica, México (1987). Tema 1.2 *Reflexiones*. ISBN 968-16-2565-X.

- Referencias -

- 17.- P. Tippens, “ *Física Básica*”, Mc Graw-Hill, México (1994). Tema: 21.6 *Reflexión de la Luz*. ISBN: 968-422-767-1.
18. - K. Gasvik, M. E. Fournery, “*Projection Moire Using Digital Video Processing: A Technique for Improving the Accuracy and Sensitivity*”, ASME Transc., Vol. 53 (1986), pp. 652-656.
19. - K. Gasvik, “*Moire Technique by Means of Digital Image Processing*”, Appl. Opt., Vol. 22-23 (1983), pp. 3543-3548.
20. - P. Aswendt, R. Hofling, “*New Calibration Procedure for measuring shape on specular surfaces*”, Fringe 2005 edited by Wolfgang Osten, Springer (2006), pp. 354-361, ISBN: 9783540293033.
21. - J. Kaminski, S. Lowitzsch, “*Full-Field Shape Measurement of Specular Surfaces*”, Fringe 2005 edited by Wolfgang Osten, Springer (2006), pp. 372-379, ISBN: 9783540293033.
22. – “*Trapezoidal Rule*”. <http://mathworld.wolfram.com/TrapezoidalRule.html> . Al 29 de diciembre de 2010.
23. - D. Serrano, A. Martínez, J. A. Rayas, “*Topography measurement of specular and diffuse surfaces*”. Proc. of SPIE, Vol. 7792 (2010), ISBN: 9780819482884.
24. - K. J. Gasvik, “*Optical Metrology*”, John Wiley & Sons, Ltd, England (2003), Tema: 11.5 *Phase Unwrapping*. ISBN-10: 0470843004.
25. - M. C. Knauer, J. Kaminski, and G. Hausler, “*Phase measuring deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces*”, Proc. of SPIE, Vol. 5457 (2004), ISBN: 9780819453792.

- Referencias -

26. - R Tutsch et al, "*Optical 3D measurement of scattering and specular reflecting surfaces*" J. Phys.: Conference Series, Vol. 139-1 (2008).
27. - D. Korsh, "*Reflective Optics*", Academic Press INC, EUA (1991), Tema 2.1: *Fermat Principle*. ISBN-10: 0124211704.
28. - F. Jenkins, "*Fundamentals of Optics*", Mc Graw-Hill, EUA (1950). ISBN-10: 0070323305.
29. - E. Hecht, "*Optics*", Adison Wesley Longman, U.S.A. (1998), Tema 5.4 *Mirrors*. ISBN-10: 0805385665.
30. - O. S. Heavens, "*Insights into Optics*", John Wiley & Sons, England (1991). ISBN-10: 0471927694.
31. - K. J. Gasvik, "*Optical Metrology*", John Wiley & Sons, Ltd, England (2003), Tema 2.5: *Reflection at a Spherical Surface*. ISBN-10: 0470843004.
32. - D. Malacara, "*Óptica Básica*", Fondo de Cultura Económica, Mexico (1989), Tema 3.4: *Espejos Esféricos*. ISBN: 9681673131.
33. - F. Jenkins, "*Fundamentals of Optics*", McGraw-Hill, EUA (1950). Tema 6: *Spherical Mirrors*. ISBN-10: 0070323305.
34. - R. Hartley, "*Multiple View Geometry in Computer Vision*", Cambridge University Press, Edinburg (2003). Tema 6.1 *Finite Cameras*. ISBN: 0521540518.
35. - E. Trucco, "*Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*", Prentice Hall, EUA (1998). ISBN-10: 0132611082.

- Referencias -

36. - A. Martínez, J. A. Rayas, H. J. Puga, K. Genovese, “*Iterative estimation of the topography measurement by fringe-projection method with divergent illumination by considering the pitch variation along the x and z directions*”, *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 48-9 (2010), pp. 877-881.
37. - N. Toto-Arellano, A. Martínez, G. Rodríguez-Zurita, J. A. Rayas, A. Montes, “*Slope measurement of a phase object using a polarizing phase-shifting high frequency Ronchi grating interferometer*”, *Appl. Opt.*, Vol. 49-33 (2010), pp. 6402-6408.
38. - R. Cordero, A. Martínez, J. A. Rayas, F. Labbe, “*Necking progression in tensile specimens monitored in real-time by using fringe projection*”, *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 48-12 (2010), pp. 1285-1290.
39. - Z. Malacara, “*Optical Shop Testing*”, Wiley, EUA (2007), 2nd Edition edited by Daniel Malacara. Tema: 17.4.2: *Optical Measurement of Radius of Curvature*. ISBN-10: 0471484040.