CENTRO DE INVESTIGACIONES EN OPTICA, A.C.

PERFILOMETRIA DE SUPERFICIES DE CALIDAD OPTICA (INTERFEROMETRO HETERODINO DE TRES HACES GAUSSIANOS)

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Óptica)

Presenta

M. en I. Lorenzo Juárez Palafox.

León, Gto Noviembre 2007

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a mi familia, que me ha apoyado con su paciencia y compresión.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico durante mis estudios de Doctorado en Ciencias (Óptica), así mismo al personal académico y administrativo del CIO por su amable cooperación, y en especial a la Dirección del mismo por su apoyo.

También agradezco de manera especial a mi profesor Dr. Moisés Cywiak Garbarcewicz por su paciencia y cuyos conocimientos me han apoyado en todo momento de mi doctorado, además junto con el Dr. Manuel Servín Guirado han sido mis asesores de tesis, amen de su dedicación, profesionalismo, y su amable gentileza hacia mi persona, de la misma manera agradezco al maestro en ciencia Jorge Mauricio Flores por su compañerismo y su apoyo durante mi estancia en esta institución, no quiero dejar de mencionar mi agradecimiento a los Drs. David Moreno Hernández y Abundio Davíla Alvarez aceptar ser parte del jurado y por sus valiosas sugerencias, y por último al Dr. Roberto Ortega Martínez quien fue mi profesor universitario y ahora mi jurado por lo que no tengo más palabras para expresarle mi gratitud.

RESUMEN

PERFILOMETRIA DE SUPERFICIES DE CALIDAD OPTICA (INTERFEROMETRO HETERODINO DE TRES HACES GAUSSIANOS)

Esta tesis trata sobre un interferómetro para medir perfiles de superficies de calidad óptica, el primer capitulo esta dedicado a hacer un repaso de que es un perfil de una superficie, como se mide y cuales son los principales parámetros que interesan de un perfil, en el capitulo dos se hace un tratamiento matemático formal primero utilizando ondas planas para mostrar al lector de manera clara que se pretende y posteriormente se hace el formalismo matemático utilizando haces gaussianos, en el tercer capitulo se muestra como se implemento el dispositivo y se describe de manera detallada su operación que se basa en utilizar tres haces gaussianos, uno de ellos se usa como haz de prueba para recoger la información de la superficie a medir, otro como haz de referencia y el tercero se modula en frecuencia y se utiliza como modulador, los tres haces se heterodinizan y se envían a un fotodetector, la señal del voltaje es pasada a un lock-in que separa la señal recogida por el haz de prueba y que contiene la información del perfil de la superficie en un punto, un sistema de escaneo controlado por una computadora personal que va recorriendo de manera micrométrica la muestra para recolectar los datos del perfil, estos datos son enviados hacia la computadora la cual los procesa, despliega y almacena en un archivo todo esto en tiempo real el perfil.

INDICE

Página

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1 Antecedentes

Las superficies de los cuerpos son objetos muy complejos, en ellas la composición química es en general diferente de la composición dentro de los objetos, los investigadores en ciencia de materiales saben que el ordenamiento atómico también es muy distinto en las superficies y es mucho más complicado y difícil de describir, aun las superficies consideradas como ―muy lisas" muestran, cuando son analizadas a escala suficientemente fina, una compleja diversidad de particularidades geométricas, tal vez estas razones llevaron al ilustre Wolfgang Pauli (1900 - 1958) a afirmar que ―las superficies son obra del demonio".

Desde el punto de vista de la ciencia e ingeniería de materiales, la topografía se ocupa de la descripción del conjunto de particularidades geométricas naturales o artificiales que caracterizan a una superficie. En cierta manera es un pleonasmo hablar de ―topografía de superficies". Uno de los conceptos que se usan en topografía para describir la irregularidad de las superficies es la rugosidad.

Las superficies con acabados de alta-calidad siempre han sido fundamentales en el desempeño de componentes ópticos, sin embargo, es relativamente reciente que la caracterización cuantitativa de tales superficies ha recibido atención seria. Algunos trabajos teóricos notables ocurrieron a principios del siglo pasado, por ejemplo, el desarrollo realizado por H. Davies acerca de la reflexión de ondas electromagnéticas sobre superficies rugosas (Davies, 1954).

La medición de superficies finas tiene raíces en mecánica y óptica. El acabado de las superficies terminadas con herramientas mecánicas convencionales, como tornos, maquinaria que muelen, y las ruedas abrasivas, fueron caracterizadas primero por apariencia visual y percepción táctil. Los esfuerzos por usar interferencia de dos haces para perfilar superficies fallaban porque las partes eran demasiado ásperas. Las pruebas por contacto mecánico para el perfil de la superficie han estado en uso común durante muchos años, pero éstas a menudo arañan la superficie debido a la fuerza grande aplicada al diamante utilizado como punta de prueba. Estas pruebas no son generalmente utilizadas para superficies ópticas.

A mediados de los setentas del siglo pasado los perfilómetros ópticos fueron desarrollados por P. W. Baumeister y Jay M. Eastman (Eastman, 1974) y J. M. Bennett (Bennett, 1976) especialmente para medición de superficies ópticas. Los dos instrumentos eran tediosos de operar, y las superficies a ser medidas tuvieron que ser cubiertas con películas de plata o aluminio con alta reflectibidad.

Los perfilómetros ópticos ahora vendidos por ―*Chapman instruments*", ―*Wyko*", y ―*Zygo*" se desarrollaron a inicios de los 1980's. Otros incluyendo aquéllos de ―*Bauer Association*", ―*continental Optical Corporation*" y ―*Optra*", vino después. En 1981

Sommargren (Bennett, 1985) publicó un articulo describiendo un interferómetro Heterodino óptico de camino común que se volvió el prototipo para uno de tres tipos de prefilómetros ópticos que están comercialmente disponibles en los Estados Unidos. En el instrumento de Sommargren, un haz de láser de He-Ne era dividido por un prisma Wollaston en dos haces separados 100 μm. Un haz permanecía sobre el eje de rotación de una muestra, y el otro, desplazado 100 μm, describiendo un camino circular como la muestra rotaba sobre una plataforma mecánica de precisión. Las diferencias de altura de los puntos sobre el círculo fueron medidas relativas a la altura superficie al centro del círculo.

I.2 Terminología

La calidad de un producto está directamente relacionada a las desviaciones de éste con respecto al diseño original debido a fallas en los procesos de manufactura. Esto influye directamente en la funcionalidad de la pieza. Bajo este punto de vista, la falla está definida por la incapacidad del tren de producción de funcionar de una manera esperada y, en la mayoría de los casos, se manifiesta en el producto en términos de calidad.

En los procesos de maquinado, las características superficiales del producto influyen en su funcionalidad. La figura dominante en una superficie está influenciada por el método de maquinado, ya que cada tipo de herramienta de corte deja marcas distintivas en la superficie. El acabado superficial de los cuerpos puede presentar errores de forma macrogeométricos y microgeométricos. La rugosidad superficial es el conjunto de irregularidades de la superficie real, definidas convencionalmente en una sección donde los errores de forma y las ondulaciones han sido eliminados. Los parámetros utilizados para describir las superficies son:

1. **Superficie real**. Se define como la superficie que limita el cuerpo y lo separa del medio que lo rodea.

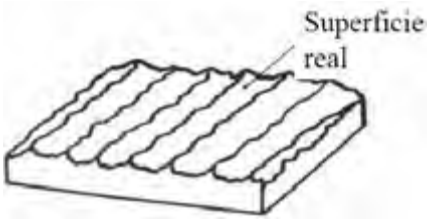

Figura 1.1 Superficie real.

2. **Superficie geométrica**. Es la superficie ideal cuya forma está especificada por el dibujo y/o todo documento técnico.

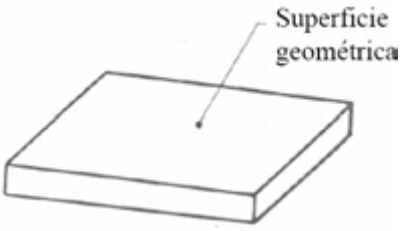

Figura 1.2 Superficie geométrica.

3. **Superficie de referencia**. Es la superficie a partir de la cual se determinan los parámetros de rugosidad. Tiene la forma de la superficie geométrica. Se puede calcular por el método de mínimos cuadrados.

4. **Perfil real**. Es la intersección de la superficie real con un plano normal.

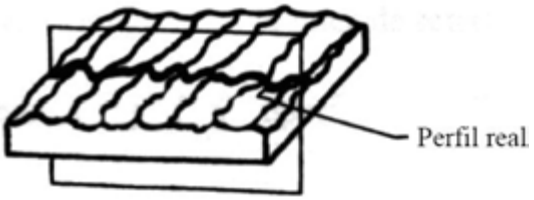

Figura 1.3 Perfil real.

5. **Longitud básica, l**. Longitud de la línea de referencia utilizada para separar las irregularidades que forman la rugosidad superficial.

6. **Longitud de evaluación, ln**. Longitud utilizada para determinar los valores de los parámetros de rugosidad superficial. Puede comprender una o varias longitudes básicas.

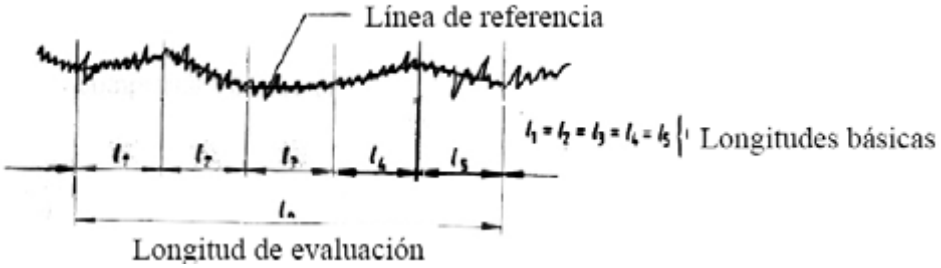

Figura 1.4 Longitud de evaluación.

7. **Línea media de los mínimos cuadrados**. Línea de referencia cuya forma es la del perfil geométrico. Divide el perfil de modo que, en el interior de la longitud básica, la suma de los cuadrados de las desviaciones a partir de esta línea es mínima.

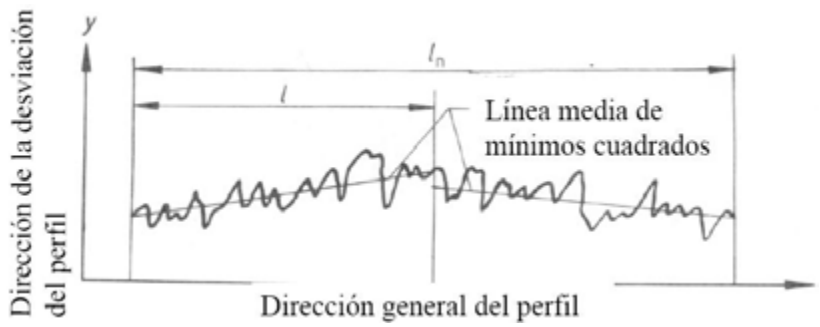

Figura 1.5 Línea media de los mínimos cuadrados.

8. **Línea media aritmética (o línea central)**. Línea de referencia con la forma del perfil geométrico, paralela a la dirección general del perfil en el interior de la longitud básica. Divide el perfil de modo que la suma de áreas comprendidas entre ella y el perfil es igual en la parte superior e inferior.

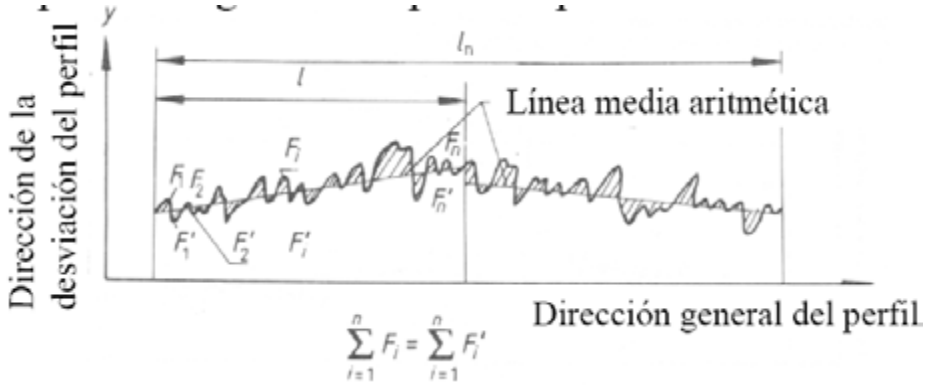

Figura 1.6 Línea media aritmética.

9. **Cresta local del perfil**. es la parte del perfil comprendida entre dos mínimos adyacentes del perfil.

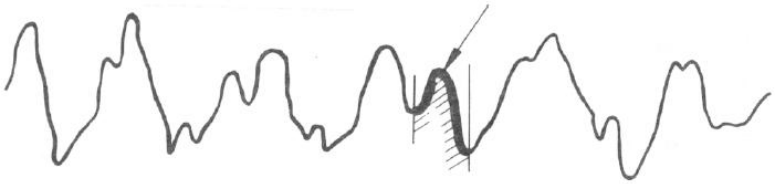

Figura 1.7 Cresta local del perfil.

10. **Valle local del perfil**. Parte del perfil comprendida entre dos máximos adyacentes del perfil.

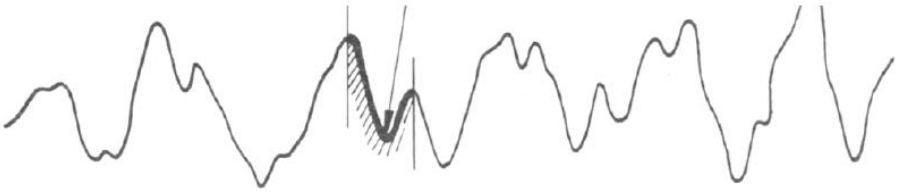

Figura 1.8 Valle local del perfil.

11. **Cresta del perfil**. Parte del perfil dirigida hacia el exterior del cuerpo uniendo dos intersecciones consecutivas del perfil con la línea media.

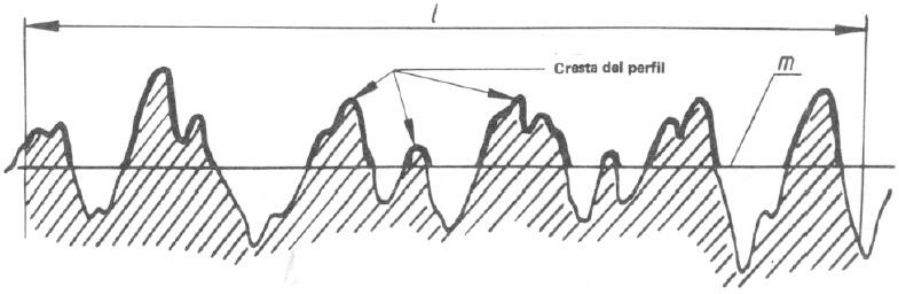

Figura 1.9 Cresta del perfil.

12. **Valle del perfil**. Parte del perfil dirigida hacia el interior del cuerpo uniendo dos intersecciones consecutivas del perfil con la línea media.

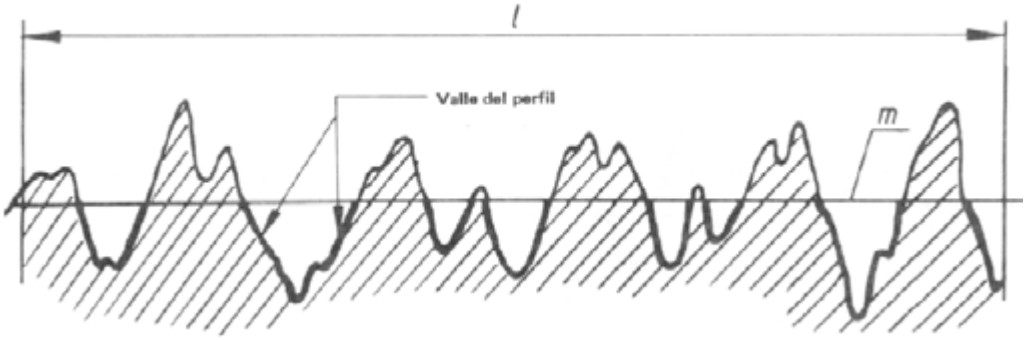

Figura 1.10 Valle del perfil.

I.3 Parámetros de Rugosidad

En general los parámetros utilizados para cuantificar la rugosidad pueden interpretarse como parámetros propios de la distribución estadística de alturas del perfil o superficie bajo análisis.

Antes de discutir los parámetros de rugosidad es conveniente distinguir entre la rugosidad propiamente dicha y otros componentes de la textura o morfología como la ondulación (waviness), la curvatura y la inclinación o tendencia (trend). En la figura 1.3 puede observarse que una superficie que puede poseer curvatura y/o ondulación periódica o aperiódica, estos componentes deben eliminarse o extraerse antes de cuantificar la rugosidad.

I.4 Rangos de Rugosidad

Una pregunta importante sobre la rugosidad es, ¿Cuál es el rango de longitudes de onda especiales para superficies?, El término ―el microroughness" se refiere a superficies cuyas longitudes de onda espaciales están el rango de 1 μm a 1 mm; las superficies cuyas longitudes de onda espaciales están en el rango de 1 μm a 100 μm esparcirán la luz visible. La rugosidad de superficies con longitudes de onda espaciales en el rango de 1 mm a 1 cm se llaman ―ondulaciones" o ―cáscara naranja"; produce esparcimiento del orden de algunos arco de segundo o fracciones de arco de segundo desde el haz especular. La rugosidad espacial con una longitud de onda más grande se hace indistinguible de la forma de la superficie y es habitualmente medida en fracciones de la longitud de onda de luz visible.

¿Qué es una superficie rugosa?

Las superficies rugosas pueden tomar muchas formas. Frecuentemente consisten de rayados diminutos en direcciones al azar que permanecen después del pulido, pero esto puede ser también la estructura reticulada sobre un espejo metálico producida por una punta de diamante, el relieve granular sobre un metal pulido tal como molibdeno, las marcas

aleatorias de distintos maquinado sobresaliendo sobre un metal pulido para darle un brillo difuso. Las ranuras paralelas diminutas en una superficie de vidrio que han sido hechas con precisión, o incluso unos rayados grandes o hoyos (digts) a veces causados por manejo impropio.

Las superficies rugosas tienen dos atributos principales: la altura de la rugosidad (o profundidad) y la dimensión lateral. Un rayado, por ejemplo, tiene una profundidad de unas décimas de un micrómetro y una anchura de unos micrómetros. Los pequeños cristalitos que constituyen las películas ópticas tienen alturas de unas décimas de manómetro y las dimensiones laterales de un fragmento de un micrómetro. Algunos tipos de estructura de película tales como los panques diminutos en una superficie.

La ASM (American Society for Metals) que es la sociedad internacional de ingenieros y científicos de materiales, es una red mundial dedicada a avanzar en la industria, la tecnología, y apliciones de metales y materiales en su ASM International Metals Handbook 9th edition, vol 16 ―Machining" (1989), da la siguiente clasificación para el acabado de superficies en cuanto a la rugosidad.

Acabado	Rugosidad Ra (μm)
Limpio	50
Rugoso	25
Semirugoso	12.5
Medio	6.3
Semifino	3.2
Fino	1.60
Terso	0.80
lustre	0.40
Pulido	0.20
Espejo	0.10

Tabla 1.1 Clasificación de los acabados de una superficie
en base al valor rms de su rugosidad.

Para concluir el capitulo mencionaremos que la clasificación más usual de los aparatos utilizados para cuantificar la rugosidad es considerarlos como de contacto y de no-contacto, según esta clasificación los equipos para medir el perfil o rugosidad de una superficie por contacto están los palpadores mecánicos que normalmente se clasifican en inductivos, capacitivos y del tipo piezoeléctricos, esto es en función de cómo su punta de prueba genera la señal eléctrica que representa la rugosidad de la superficie, dentro de esta categoría de los equipos de contacto podemos incluir al microscopio de fuerza atómica (MFA) (Meyer, 1988) que es un aparato que por su alta resolución se utilizara para efectos de calibración del sistema propuesto en esta tesis.

Por otro lado los equipos de no-contacto (Welford, 1980) normalmente son equipos ópticos que pueden ser microscopios formadores de imagen (Sicignano, 1987), mientras que otros operan en base a la interferencia de dos haces, en esta categoría existen tres clases diferentes de equipos (Zhou, 1997) que han dado su nombre en base al arreglo de interferómetro (Bhushan, 1985) que utilizan para su operación, como se muestra en la figura 1.11.

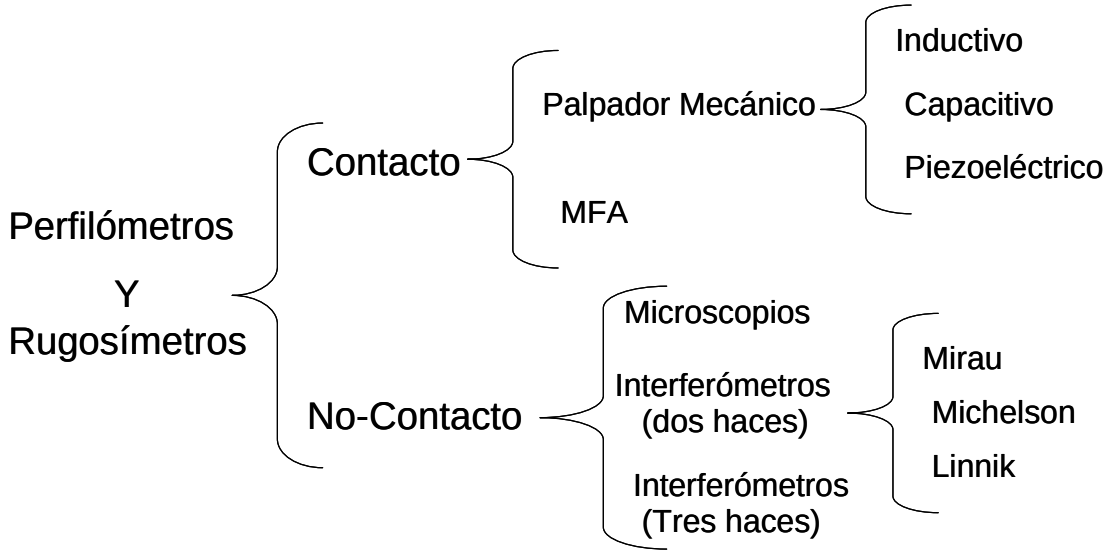

Figura 1.11 Clasificación de Rugosímetros y Perfilómetros.

Como todos los perfilómetros que existen en la actualidad son básicamente de dos haces y dan su lectura a través de la medición de la fase (Creath, 1988) y (Sochacka, 1992) por lo que no se tiene una medida directa del perfil de la superficie, esto es posible mediante de la utilización de un tercer haz que es lo novedoso en la propuesta de esta tesis y que se describe a continuación.

CAPITULO II

MODELO INTERFEROMETRICO DE TRES HACES GAUSSIANOS

II.1 Introducción

La medición de rugosidad y perfiles de superficies de calidad óptica es una herramienta invaluable en varias áreas de la industria. Por ejemplo, esta es usada para caracterización de superficies y control de calidad en la industria de la microelectrónica. Debido a esta importancia, diferentes métodos han evolucionado para el perfilado de superficies rugosas. Aunque es difícil asignar una clasificación precisa de los varios métodos de medición de rugosidad reportados en la literatura, gruesamente ellos pueden se agrupados en las siguientes cuatro categorías: métodos de aguja de diferentes tipos (Bennett, 1981), (Bennett, 1985), (Clark, 2001) y (Walker, 2003), técnicas interferométricas (Davidson, 1987) y (Caber, 1993), técnicas de microscopia confocal (Kino, 1990) y técnicas heterodinas (Johnson, 1977), (Sommargren, 1981) y (Huang, 1984). Una revisión de los diferentes métodos puede ser encontrada en las referencias (Tiziani, 1989) y (Cywiak, 2005).

Cuando es el caso que el área bajo inspección es muy pequeña (de varios micrómetros cuadrados), las técnicas de rastreo son preferidas por su mejor precisión. Estas técnicas enfocan un haz angosto sobre la superficie bajo prueba y entonces, el perfil total es obtenido obteniendo la medición de cada punto del área rastreada de la superficie. Adicionalmente, es posible incrementar la sensitividad discriminando los términos de DC. Esto es hecho, sumando una portadora temporal a la señal, haciendo que el comportamiento del sistema sea como un sistema heterodino. Dos propuestas recientemente reportadas en la literatura pueden ser encontradas Murakowski (Murakowski, 2000) y Cywiak (Cywiak, 2000). En estos reportes, un haz de láser con un perfil de intensidad gaussiana, el cual actúa como un haz de prueba, es enfocado sobre la superficie bajo prueba. La superficie bajo prueba es vibrada en un plano que es perpendicular a la dirección de propagación del haz de prueba, a una frecuencia baja (20-50 Hz), para introducir una portadora temporal. Entonces, el perfil es obtenido barriendo una línea sobre la superficie.

La técnica propuesta en este trabajo esta basada sobre principios ópticos similares a los propuestos por Goodman (Goodman, 2000) y Anders (Anders, 2003), con la diferencia que se utiliza el primer orden de difractado proveniente de una celda acusto-óptica para producir una portadora temporal. Esto evita vibrar la superficie bajo prueba. El haz difractado es coherentemente sumado con el haz de prueba el cual es reflejado desde la superficie bajo prueba. Adicionalmente un haz de referencia es introducido, hacienda al sistema un interferómetro de tres haces. Evitar vibrar la superficie bajo prueba tiene la ventaja de mejorar la precisión eliminando modos indeseados de vibración. Adicionalmente, se puede bajar el tiempo de rastreo, y de esta manera, bajar el tiempo de adquisición.

II.2 Modelo Analítico con Ondas Planas

Por simplicidad, para una descripción analítica, primero se muestra el modelo explicado con ondas planas, la figura 2.1 muestra un esquema simplificado del interferómetro.

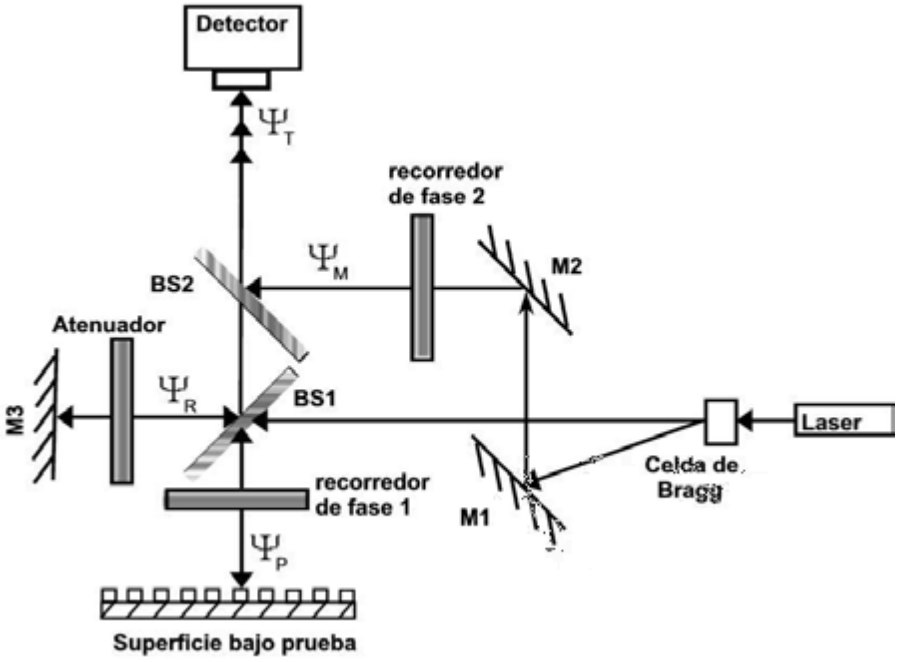

Figura 2.1 Esquema simplificado del interferómetro de tres haces.

El haz de referencia puede ser expresado como

$$\Psi_R = \sqrt{I_0} e^{ikz_R} e^{i\omega_l t}, \tag{2.1}$$

donde $i = \sqrt{-1}$, I_0 es la intensidad del haz, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ y ω_l son la longitud de onda y la frecuencia angular temporal de la luz. La variable z_R representa todo el camino óptico recorrido por este haz.

El haz de prueba, en el plano de detección, después de ser reflejado desde la superficie bajo prueba, puede ser expresado como

$$\Psi_P = \sqrt{I_0} e^{(ikz_P + \phi_P)} e^{i\omega_l t} e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda} h(x)\right]}, \tag{2.2}$$

donde $h(x)$ representa distribución de amplitud de altura vertical unidimensional de la superficie bajo prueba. Similarmente, la variable z_P representa todo el camino óptico recorrido por este haz y ϕ_P representa el corrimiento de fase introducido por el corredor de fase 1. En la ecuación 2.2 se considera que la superficie bajo prueba tiene una reflectividad constante en el área bajo inspección.

El tercer haz, el haz modulante, puede ser expresado como

$$\Psi_M = \sqrt{I_0} e^{(ikz_M + \phi_M)} e^{i(\omega_l + \omega_s)t}, \tag{2.3}$$

como este haz proviene del primer orden de difracción que emerge de la celda de Bragg, su frecuencia temporal angular es la suma de ω_l y ω_s; la frecuencia temporal angular del láser y la frecuencia de excitación aplicada a la celda de Braga respectivamente. La variable z_M representa todo el camino óptico recorrido por este haz y ϕ_M representa el corrimiento de fase introducido por el corredor de fase 2.

Superponiendo coherentemente los tres haces. Se puede escribir la distribución de amplitud total de la luz en el plano del detector como

$$\Psi_T = \Psi_R + \Psi_P + \Psi_M, \tag{2.4}$$

Ahora consideremos que

$z_P = z_R + \Delta z_p$, $z_M = z_R + \Delta z_M$ y que los corredores de fase son ajustados de la siguiente manera

$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z_P + \phi_P = (2m+1)\pi$ y $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z_M + \phi_M = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (m y n son enteros), entonces sustituyendo las ecuaciones 2.1 a 2.3 en la ecuación 2.4 tenemos

$$\Psi_T = \sqrt{I_0} e^{ikz_R} e^{i\omega_l t} + \sqrt{I_0} e^{(ikz_P + \phi_P)} e^{i\omega_l t} e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda} h(x)\right]} + \sqrt{I_0} e^{(ikz_M + \phi_M)} e^{i(\omega_l + \omega_s)t}, \tag{2.5}$$

tomando en cuenta las consideraciones para el camino óptico y las fases de los haces de prueba y modulación tenemos

$$\Psi_T = \sqrt{I_0}e^{ikz_R}e^{i\omega_l t}\left(1 + e^{(ik\Delta z_P + \phi_P)}e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]} + e^{(ik\Delta z_M + \phi_M)}e^{i\omega_s t}\right), \tag{2.6}$$

por lo que tenemos

$$\Psi_T = \sqrt{I_0}e^{i\omega_l t} - \sqrt{I_0}e^{i\omega_l t}e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]} + i\sqrt{I_0}e^{i(\omega_l + \omega_s)t}, \tag{2.7}$$

y

$$\Psi_T^* = \sqrt{I_0}e^{-i\omega_l t} - \sqrt{I_0}e^{-i\omega_l t}e^{-i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]} - i\sqrt{I_0}e^{-i(\omega_l + \omega_s)t}, \tag{2.8}$$

ya que la intensidad esta definida como $I = \Psi_T \Psi_T^*$, por lo que utilizando las ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} I = 3I_0 - I_0\left(e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]} + e^{-i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]}\right) + iI_0\left(e^{i\omega_s t} - e^{-i\omega_s t}\right) \\ + iI_0\left(e^{-i\omega_s t}e^{i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]} - e^{i\omega_s t}e^{-i\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right]}\right) \end{aligned}, \tag{2.9}$$

expresando la ecuación anterior en términos de senos y cosenos se tiene

$$I = 3I_0 - 2I_0\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x)\right] - 2I_0 sen(\omega_s t) - 2I_0 sen\left[\frac{4\pi}{\lambda}h(x) - \omega_s t\right], \tag{2.10}$$

descomponiendo el término $\frac{4\pi}{\lambda}h(x) = \frac{2\pi}{\lambda}h(x) + \frac{2\pi}{\lambda}h(x)$ y aplicando las propiedades de suma de ángulos en las funciones trigonometriítas se obtiene

$$\begin{aligned} I = 3I_0 - 2I_0\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right] + 2I_0 sen^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right] - 2I_0 sen(\omega_s t) \\ - 2I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right] - 2I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]sen^2(\omega_s t) \\ - 2I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]\cos(\omega_s t) + 2I_0\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]sen(\omega_s t) \end{aligned}, \tag{2.11}$$

arreglando los términos y simplificando se tiene

$$I = I_0 + 4I_0 sen^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right] - 4I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x) - \omega_s t\right], \tag{2.12}$$

teniendo en cuenta el área (A_d) y la responsibidad (ρ) del fotodetector, la señal en voltaje a la salida de este se puede escribir como

$$\begin{aligned} V &= A_d \rho I \\ &= A_d \rho\left\{I_0 + 4I_0 sen^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right] - 4I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x) - \omega_s t\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

en esta ecuación se puede notar que los dos primeros términos dentro de las llaves corresponden a un voltaje de DC mientras que el tercer término corresponde a un voltaje de AC y que representa una señal temporal cuya amplitud varia senoidalmete y cuyo argumento es proporcional a la altura vertical de la muestra bajo prueba.

La señal en voltaje (Juárez, 2007) dada por la ecuación 2.13 es amplificada y enviada a un amplificador lock-in para detección y procesarla. Sea A la ganancia del amplificador, entonces la amplitud de la señal voltaje dada por el lock-in, esta dada por

$$V(x_0) = 4A\rho P_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}h(x_0)\right], \tag{2.14}$$

donde $P_0 = A_d I_0$ y x_0 es el punto local donde la medición es realizada.

En este punto es importante enfatizar el resultado expresado por la ecuación 2.14 esta representa la amplitud de una portadora temporal de una frecuencia bien establecida. Esta amplitud es una función seno de la altura vertical local bajo prueba. Cuado la altura vertical se hace pequeña, en la escala nanométrica, la función seno puede ser remplazada por su argumento. Entonces la amplitud de la señal de salida se hace proporcional a la altura vertical bajo medición. Adicionalmente, como un amplificador lock-in es usado, si la altura a medir resulta muy pequeña, como es bien conocido, que un amplificador lock-in es capaz de recobrar una señal mil veces más pequeña que el ruido. Entonces, el sistema se hace altamente sensitivo a la topografía vertical local.

II.3 Modelo Analítico con Haces Gaussianos

En este punto se desarrollara la descripción analítica usando haces Gaussianos, se utilizara la figura 2.2 para desarrollar el modelo analítico.

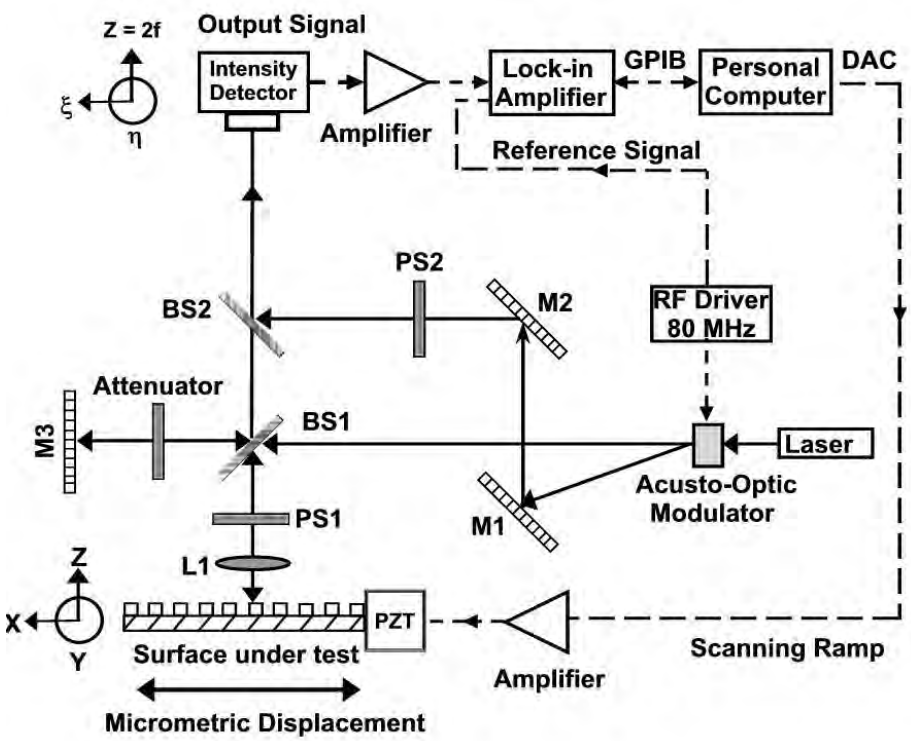

Figura 2.2. Diagrama esquemático del interferómetro de tres haces.

Sea la superficie bajo prueba localizada en el plano coordenado $(x, y, z = 0)$. Entonces, la distribución de amplitud del haz de prueba en este plano puede ser escrito como

$$\Psi_0(x,y) = \left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{r_0^2}\right], \tag{2.15}$$

donde P_0 es la potencia del haz , r_0 es el radio del haz en la superficie bajo prueba y (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del haz.

Sea $h(x,y)$ la distribución de altura de la superficie bajo prueba. Entonces, después de la reflexión, considerando un aspecto de radio bajo de la superficie reflejante, el haz de prueba es modulado en fase como

$$\Psi_0'(x,y) = \Psi_0(x,y) \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda} h(x,y)\right], \tag{2.16}$$

donde λ es la longitud de de onda y $i = \sqrt{-1}$.

Como se observa de la figura 2.2, la lente L1 realiza la transformada de Fourier de la distribución de amplitud dada por la ecuación 2.16, Entonces, en el plano coordenado ($\xi, \eta, z = 2f$), la distribución de amplitud de la transformada de Fourier de $\Psi_0^{'}(x, y)$ esta dada por

$$\Psi_P(\xi,\eta) = \frac{\exp\left(i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0^{'}(x,y)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]dxdy\,. \quad (2.17)$$

En este punto se introduce la frecuencia angular temporal del haz láser, ω_l, la cual es la misma que corresponde al orden cero que emerge desde la celda de Bragg.

Una ecuación similar puede ser escrita para el haz de referencia,

$$\Psi_R(\xi,\eta) = \frac{\exp\left(i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x,y)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]dxdy\,. \quad (2.18)$$

El haz modulante es dado como,

$$\Psi_M(\xi,\eta) = \frac{\exp\left(i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left[-i\left(\omega_l + \omega_s\right)t\right]}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x,y)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]dx\,dy\ , \quad (2.19)$$

donde ω_s es la frecuencia de excitación aplicada a la celda acusto-óptica, la cual recorre la frecuencia temporal de este haz iniciando con el primer orden de difracción que emerge desde la celda de Bragg.

Como las tres distribuciones de amplitud dadas por las ecuaciones 2.17 a 2.19 son sumadas coherentemente en el plano del fotodetector, la amplitud de distribución resultante en este plano esta dada por

$$\Psi_T(\xi,\eta) = \Psi_P(\xi,\eta) + \Psi_R(\xi,\eta) + \Psi_M(\xi,\eta)\ . \quad (2.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.17) a (2.19) en la ecuación 2.20

$$\Psi_T(\xi,\eta)=\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Psi'_0(x,y)+\Psi_0(x,y)+\Psi_0(x,y)\exp\left(-i\omega_s t\right)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]dx\,dy\,\cdot \tag{2.21}$$

Para continuar, se sustituyen las ecuaciones 2.1) y 2.16 en la ecuación 2.21. Entonces, La distribución de amplitud en el plano del fotodetector esta dada por

$$\Psi_T(\xi,\eta)=\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\times$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times \tag{2.22}$$
$$\left\{1-\exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]+i\exp\left(-i\omega_s t\right)\right\}\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(\xi x+\eta y)\right]dxdy\cdot$$

En la obtención de la ecuación 2.22 se ha asumido que los corrimientos de fase introducidos por PS1 y PS2 son π y $\pi/2$ radianes, respectivamente. También, se considero que los haces son ecualizados en amplitud.

La distribución de intensidad en el plano del fotodetector esta dada por,

$$I(\xi,\eta)=\Psi_T(\xi,\eta)\,\Psi_T^*(\xi,\eta), \tag{2.23}$$

donde * denota la conjugación compleja. Dado que el area sensitiva del fotodetector es suficientemente grande para integrar toda la distribución de intensidad, la potencia total colectada por el fotodetector esta dada por,

$$\begin{aligned}P_D &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_T(\xi,\eta)\,\Psi_T^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Psi_p(\xi,\eta)+\Psi_r(\xi,\eta)+\Psi_m(\xi,\eta)\right]\times\\ &\quad\left[\Psi_p^*(\xi,\eta)+\Psi_r^*(\xi,\eta)+\Psi_m^*(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta\cdot\end{aligned} \tag{2.24}$$

Se nota que la ecuación 2.24 puede ser expandida en nueve integrales, las cuales son resueltas en el apéndice A, ahora la potencia en el plano del detector puede ser expresada como

$$
\begin{aligned}
P_D = {} & 3P_0 \\
& + \frac{4P_0}{\pi\, r_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}{r_0^2} \right] \left\{ 1 - 2\sin^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x,y) \right] \right\} dxdy \\
& - \frac{8P_0}{\pi\, r_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}{r_0^2} \right] \times \\
& \qquad \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x,y) \right] \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x,y) - \omega_s t \right] dxdy
\end{aligned}
\quad , \qquad (2.25)
$$

puede notarse que la potencia descrita por la ecuación 2.25 consiste de una componente de D.C. (los dos primeros sumandos) y un componente de A.C. (el ultimo sumando). El amplificador lock-in es entonado para recibir solamente el componente de A.C..

Sea A la ganancia del amplificador, y ρ la responsividad del fotodetector, entonces la amplitud del voltaje de A.C. (Juárez, 2006) registrado por el lock-in, usando el ultimo sumando de la ecuación 2.25, es dado por

$$
\begin{aligned}
V(x_0, y_0) = {} & \\
& \frac{8P_0}{\pi\, r_0^2} A\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}{r_0^2} \right] \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x,y) \right] dxdy
\end{aligned}
\quad , \qquad (2.26)
$$

la ecuación 2.26 representa la convolución de una función Gaussiana con una senoidal de la distribución local de la superficie, la función de entrada $h(x,y)$. De esta manera, el conjunto de procesos ópticos pueden ser representados como la convolución de la respuesta impulso del sistema con la función de entrada seno. La respuesta impulso es entonces

$$
\mathrm{K}(x_0, y_0) = \exp\left[\frac{-2\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{r_0^2} \right]. \qquad (2.27)
$$

Usando la ecuación 2.27, nos permite escribir la ecuación 2.26 como

$$
V(x_0, y_0) = \frac{8P_0}{\pi\, r_0^2} A\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{K}(x-x_0, y-y_0) \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x,y) \right] dxdy \cdot \qquad (2.28)
$$

La ecuación 2.28 indica que para obtener la altura local de la superficie $h(x_0, y_0)$, un proceso de deconvolución debe ser realizado y un seno inverso debe ser calculado.

Si embargo, el objetivo de esta tesis esta limitada a mostrar el principio de la técnica. Por ello, se seguirá un enfoque simple, el cual da resultados precisos para el experimento descrito en esta tesis, como se describe en la siguiente sección.

II.4 Simulación del Modelo Analítico

Nuestras muestras a analizar consisten de rejillas gravadas reflectivas con alturas verticales menores de $\lambda/4$ y frecuencias espaciales de 300, 600 y 1200 lineas/mm. Dado que el integrando de la ecuación 2.28 tiene dos términos uno es una función del tipo senoidal la cual esta representada en la figura 2.3, la figura 2.4 representa la función de la respuesta impulso del sistema.

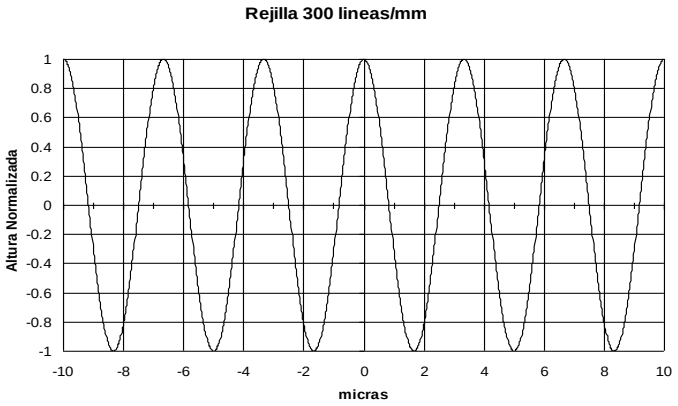

Figura 2.3. Rejilla de 300 lineas/ mm representada por medio de una función senoidal.

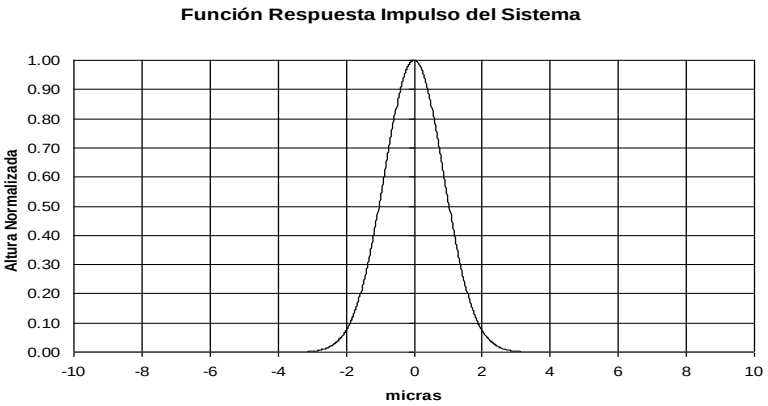

Figura 2.4. Respuesta Impulso del sistema representada por medio de una función Gaussiana.

Como es bien sabido la convolución de dos funciones se puede evaluar en el espacio de Fourier como el producto de las transformadas de Fourier de ambas funciones, por lo que la figura 2.5 muestra la transformada de Fourier de la figura 2.3, la figura 2.6 es la transformada de Fourier de la figura 2.4 y la figura 2.7 es el producto de ambas transformadas de Fourier.

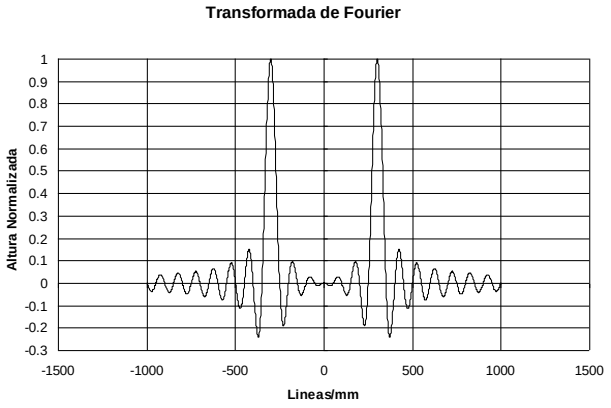

Figura 2.5. Transformada de Fourier de la función dada en la figura 2.3.

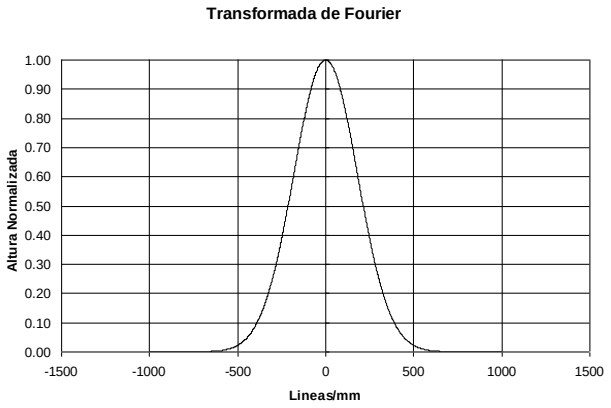

Figura 2.6. Transformada de Fourier de la función dada en la figura 2.4.

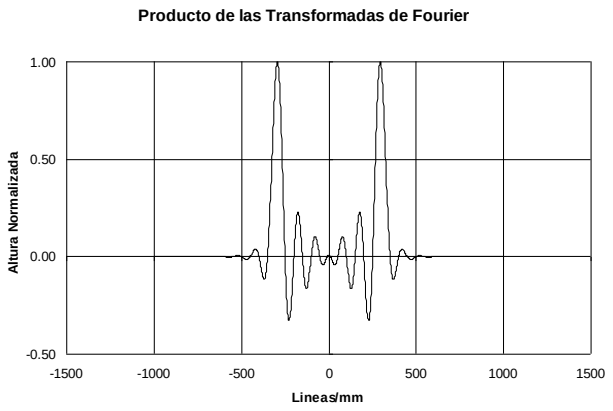

Figura 2.7. Producto de las dos Transformadas de Fourier.

Como se observa en la figura 2.7 el producto de las trasformadas de fourier es muy similar al dado por la figura 2.5 solo que se han perdidos algunos detalles de las altas frecuencias lo que indica que el sistema tiene un comportamiento de pasa bajas, este punto se discutirá en la sección tres del capitulo siguiente, por ahora lo que se hará es obtener la transformada inversa de Fourier de la figura 2.7 para comparar el resultado con la figura 2.3, esta comparación se muestra en la figura 2.8.

Figura 2.8. Comparación entre la rejilla simulada (línea de color negro) y la rejilla recuperada (línea de color gris).

Como puede notarse ambas graficas son razonablemente iguales, la diferencias en los extremos de las graficas se pueden atribuir a que no se esta tomando una rejilla de longitud infinita por razones practicas para las evaluaciones de las transformadas. Por esto, para las

muestras estudiadas en el capitulo III, la ecuación 2.26 puede ser razonablemente aproximada como

$$V(x_0, y_0) = \frac{8P_0}{\pi\, r_0^2} A\rho \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} h(x_0, y_0)\right] . \tag{2.29}$$

de esta ecuación 2.29, la altura local en (x_0, y_0) puede ser calculada aproximadamente como

$$h(x_0, y_0) = \frac{\lambda}{2\pi} \sin^{-1}\left[\frac{\pi\, r_0^2 V(x_0, y_0)}{8A\rho P_0}\right]. \tag{2.30}$$

Adicionalmente, notamos que para Alturas menores que $\lambda/4$, técnicas de desenvolvimiento de fase no son necesarias. Sin embargo, en general una técnica de desenvolvimiento pude ser requerida.

CAPITULO III

DISEÑO EXPERIMENTAL

III.1 Descripción del Interferómetro

La figura 3.1 muestra el montaje experimental que corresponde al interferómetro de tres haces. Un láser de He-Ne con un perfil de intensidad gaussiano es usado como la fuente de iluminación coherente. El haz iluminador es transmitido a través de una celda de Bragg que consiste de un medio acusto-óptico de dioxido de telurio (TeO_2) excitada a 80 MHz. Solamente los ordenes difractados cero y uno son utilizados. El orden cero es dirigido a un divisor de haz BS1 donde este es dividido en dos haces. Uno de ellos es enfocado sobre la superficie bajo prueba por la lente L1; este haz es llamado haz de prueba. Después de ser reflectado, el haz de prueba es modulado en su fase por las irregularidades locales de la superficie, es transmitido de nuevo por la lente L1 y dirigido al fotodetector por medio de BS1. El segundo haz, es reflejado desde una superficie de referencia de alta calidad M3, es dirigido al fotodetector por medio de BS1; este haz es llamado el haz de referencia. El orden uno, difractado a la salida de la celda de Bragg, es dirigido al fotodetector por el camino dado por los espejos M1 y M2 y por el divisor de haz BS2. La frecuencia temporal de este haz corresponde a la suma de la frecuencia temporal de la fuente de iluminación y la frecuencia de excitación de la celda acusto-óptica; este haz es llamado el haz modulador.

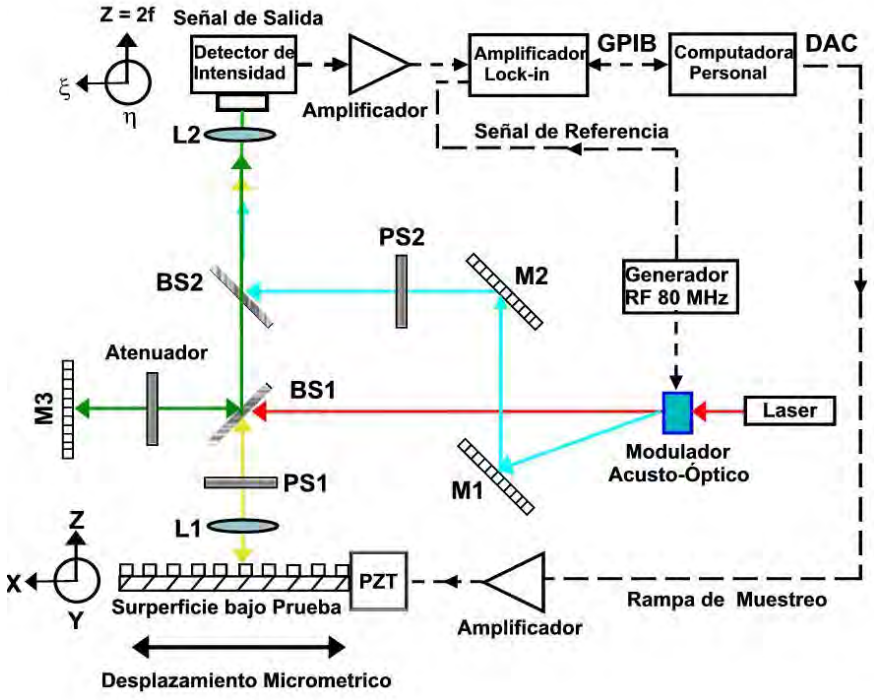

Figura 3.1 Esquema del interferómetro de tres haces.

Como se muestra en la figura 3.1, los tres haces son superimpuestos y sumados coherentemente en el plano sensitivo del fotodetector. El área sensitiva del fotodetector es suficientemente grande como para integral toda la intensidad de los haces. La señal a la salida en voltaje del fotodetector es amplificada y enviada a un amplificador lock-in para la detección de A.C. y grabada. Dos recorredores de fase PS1, PS2 y un atenuador son usados para entonar el sistema a máxima sensitividad. Las fases son recorridas en $\pi/2$ y π radianes respectivamente. El atenuador es para ecualizar las amplitudes de los haces de prueba y referencia. La introducción de estos componentes y sus correspondientes valores se explico en la sección de la descripción analítica del capitulo anterior.

El láser utilizado tiene una potencia de 15 mW con una longitud de onda 632.8 nm y un radio de 0.325 mm. La señal de excitación aplicada a la celda de Bragg es una señal senoidal de 80 MHz. Un canal de comunicaciones GPIB permite al lock-in comunicarse con una computadora personal que realiza la captura de datos, la generación de las señales eléctricas de control y sincronización. La superficie bajo prueba es recorrida usando un transductor piezoeléctrico flexurizado PZT. Un piezoeléctrico flexurizado PZT es preferido dado que se obtiene un desplazamiento prácticamente lineal en una dirección, ya que este exhibe una inclinación menor de 9 μrad en un recorrido total de 100 nm. La lente de enfoque L1, consiste de un objetivo de microscopio 100X de longitud focal de 2 mm. Con esta lente un haz de prueba con un radio de haz de aproximadamente 0.41 μm es obtenido.

Como se menciono anteriormente, las muestras consisten de rejillas de grabado reflectivas con un espaciamiento de 300, 600 y 1200 líneas/mm. Antes de realizar las mediciones se confirmo que las rejillas mostraban una reflectividad constante. Esta característica es necesaria para que el sistema trabaje apropiadamente como puede verse de la ecuación 2.2.

III.2 Respuesta en Frecuencia.

Como es bien conocido, en general, un sistema óptico responde de una manera diferente a objetos con frecuencias espaciales diferentes.

La respuesta en frecuencia de nuestro sistema se hará primero tomando la transformar de Fourier a la respuesta impulso del sistema.

La transformada de Fourier de la ecuación 2.27 se escribe como

$$\Im\{\mathrm{K}(x_0, y_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-2\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{r_0^2}\right] \exp\left[-i2\pi\left(ux_0 + vy_0\right)\right] dx_0 dy_0 , \tag{3.1}$$

esto nos permite expresar la función de transferencia del sistema como

$$F(u,v) = \frac{\pi\, r_0^2}{2} \exp\left(-\pi^2 r_0^2 \frac{u^2 + v^2}{2}\right) , \tag{3.2}$$

donde (u,v) representan las dos dimensiones correspondientes a las frecuencias espaciales, r_0 representa el semi-ancho del haz de prueba en el plano localizado sobre la superficie bajo prueba.

De la ecuación 3.2 la frecuencia de corte del sistema (en una dimensión) es

$$u_C = \frac{\sqrt{2}}{\pi r_0} \ , \tag{3.3}$$

en nuestro experimento, r_0 fue de aproximadamente 0.41 μm. Por lo que la frecuencia de corte u_c= 1097.95 líneas/mm. Así, formalmente, para un objeto bajo prueba que consiste en una rejilla, el período más corto que este sistema detectaría es alrededor de 0.91 μm.

Finalmente, mencionamos que una limitación en la resolución lateral depende de capturar los órdenes difractados reflejados desde la superficie bajo prueba. Con la lente L1 teniendo una longitud focal de 2 mm. y de un diámetro de 5 mm. resulta una abertura numérica de 0.78. Con esta abertura numérica, principalmente las primeros órdenes difractados por la rejilla reflejante son capturados para la detección. Así, las características sub-superficiales son difíciles de ser detectadas. Este problema puede ser resuelto usando una haz iluminante que tenga una longitud de onda más corta y también usando una lente de apertura numérica más grande.

III.3 Calibración del Interferómetro

Para verificar experimentalmente la respuesta en frecuencia del sistema, utilizamos tres, rejillas disponibles en el comercio, rejillas reflejantes. Las rejillas de difracción son rejillas holográficas de la alta calidad de 300, 600 y 1200 líneas/mm, las cuales fueron medidas por medio de un microscopio de fuerza atómico para propósitos de la calibración. Varias medidas fueron tomadas para cada una de las rejillas dentro de una zona pequeña de interés por ambos métodos. El microscopio de fuerza atómica, dando los resultados en la altura verdadera (nanómetro) y el sistema propuesto en voltios según la ecuación 2.14. La técnica de calibración es realizo de la siguiente manera:

En primer lugar, para cada rejilla un promedio de la distribución de alturas sobre una zona pequeña de interés fue obtenido. Los tres promedios (uno para cada rejilla), obtenidos con el microscopio de fuerza atómica, se muestran en la figura 3.2. Para cada una de estos tres promedios de distribución, un valor rms de altura es calculado para cada rejilla.

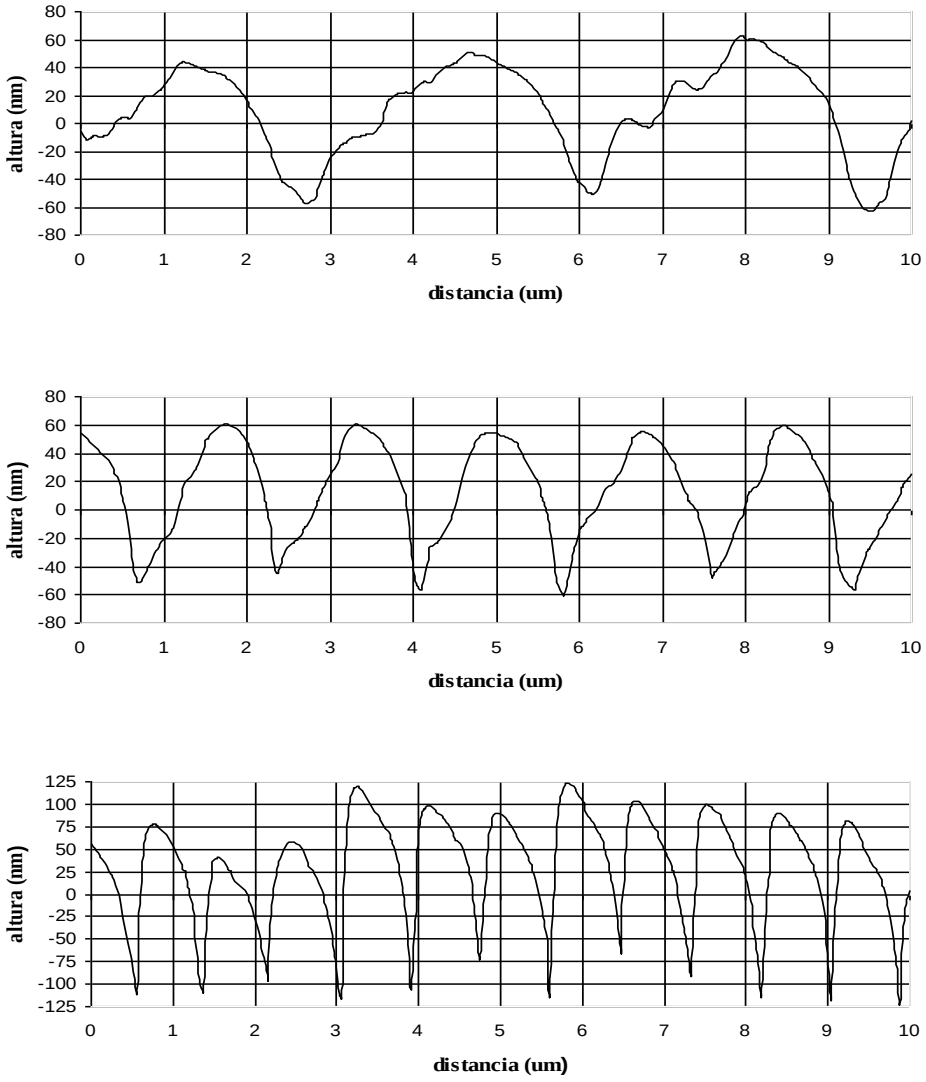

Figura 3.2 Perfil de las rejillas de 300, 600 y 1200 líneas/mm obtenido con el microscopio de fuerza atómica.

En segundo lugar, para cada rejilla un promedio de la distribución de alturas fue obtenido con la propuesta técnica. Sin embargo, en esta ocasión, la distribución resultante de alturas se obtuvo tal como se expresa en voltios por la ecuación 2.14. Las tres distribuciones, que corresponden a los promedios obtenidos con el microscopio de fuerza atómica, se muestran normalizados en la figura 3.3. De los tres promedios resultantes un valor rms, en voltios, se obtiene para cada rejilla.

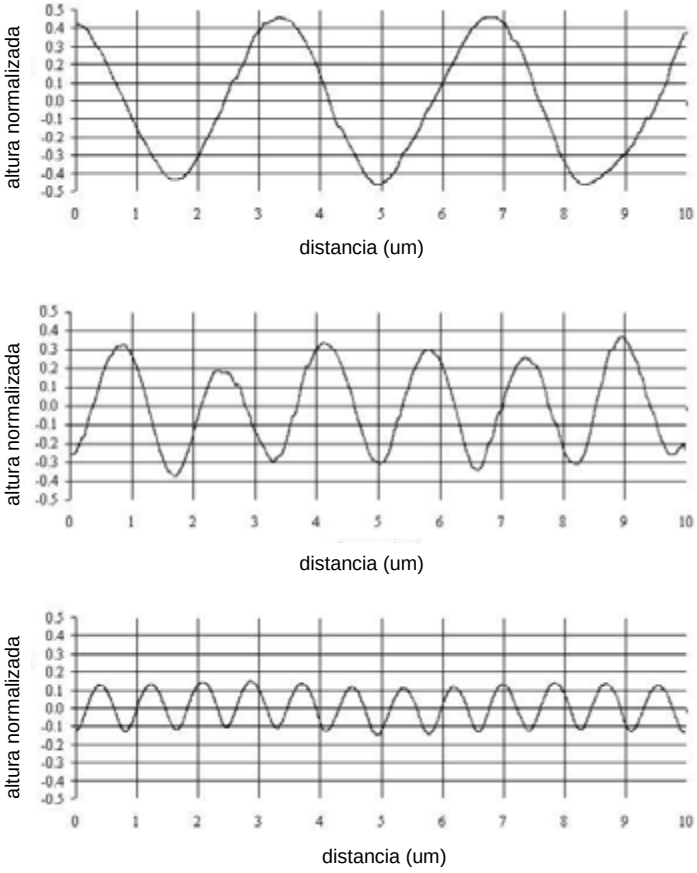

Figura 3.3 Perfil normalizado en altura de las rejillas de 300, 600 y 1200 líneas/mm obtenido con el método propuesto.

Antes de proceder con la medición experimental de las superficies de calidad óptica, una discusión sobre los resultados mostrados en las figuras 3.2 y 3.3 se da a continuación. Una comparación directa puntual entre métodos no es simple, ya que no es posible obtener exactamente la misma línea de barrido con ambos métodos. Además, el sistema óptico está limitado en su resolución lateral debido a la difracción; Como es habitual, se puede considerar λ como límite. Además, el microscopio de fuerza atómica responde a diferentes propiedades físicas, en comparación con el sistema óptico. Una amplia discusión sobre este tema es dada por Anders Kuhle (Anders, 2003). La figura 3.3, pone de manifiesto que, incluso una rejilla con una frecuencia espacial, como la frecuencia de 1200 líneas/mm (periodo = 0,83 μm), pueden ser fácilmente detectados con el método propuesto. Por lo tanto, una resolución lateral cercana a λ es obtenida. Esto es atribuido a la alta sensibilidad vertical del sistema, que a su vez mejora la resolución lateral. Así, para una razonable comparación de los métodos, los valores rms promedio de un conjunto de mediciones son utilizados.

Tercero, de los valores rms obtenidos antes y las razones de los voltajes de salida rms a las alturas rms correspondientes fueron calculadas para cada una de las frecuencias espaciales.

Una curva de respuesta en frecuencia para las razones arriba mencionadas fue obtenida por interpolación. La grafica normalizada es mostrada en la figura 3.4. Se notara que la respuesta en frecuencia experimentalmente obtenida esta en perfecto acuerdo con la respuesta en frecuencia teórica dada por la ecuación 2.27.

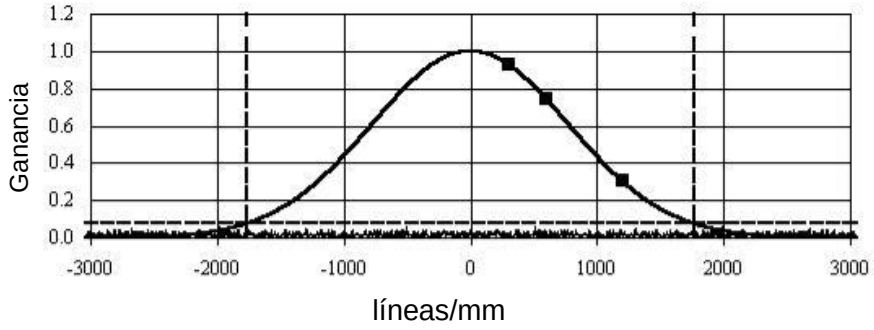

Figura 3.4. Grafica normalizada de la respuesta en frecuencia del sistema y la distribución de ruido correspondiente al mismo.

Señalamos que la curva de la respuesta en frecuencia fue ajustada mediante el uso de sólo tres puntos. Esto se hizo sólo con fines ilustrativos y más puntos se pueden agregar si así se desea. Para mayor claridad la parte simétrica de la curva es mostrada.

La figura 3.4 también muestra la distribución de ruido en una escala que corresponde a normalización de la respuesta en frecuencia, esta distribución de ruido se obtuvo como la siguiente manera. El perfil promedio obtenido para cada una de las rejillas fue restado a cada una de las mediciones. Entonces, colocando cada resultado de cada resta uno a continuación del otro, para formar un conjunto. Esto da un conjunto de muestras representativo del ruido. Finalmente, La transformada de Fourier del conjunto fue obtenida y graficada.

En la figura 3.4 las líneas verticales punteadas indican el área útil dentro del filtro que puede ser usada para recobrar el perfil de entrada a ser medido por el sistema.

Finalmente la respuesta inversa limitada en frecuencia del sistema es mostrada en la figura 3.5. Esta grafica esta limitada por la intersección del ruido con la curva de respuesta en frecuencia.

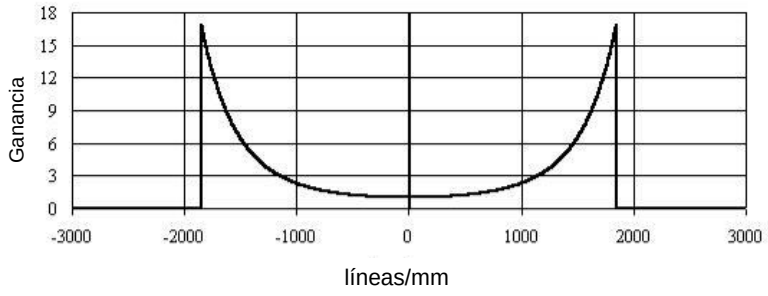

Figura 3.5 Grafica de la respuesta Inversa en frecuencia
(limitada en frecuencia) del sistema.

Con el fin de calcular una figura de mérito de la relación señal/ruido del sistema, se utilizó la bien conocida ecuación

$$\frac{S}{N} = \frac{E\{f^2(t)\}}{E\{n^2(t)\}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega)d\omega}, \tag{3.3}$$

donde $f(t)$ es una función que representa la señal a medir y $n(t)$ es una función que representa el ruido a la hora de realizar la medición, de donde $E\{f^2(t)\}$ es la media o valor esperado de la función $f^2(t)$, igualmente para $E\{n^2(t)\}$. $S_f(w)$ y $S_n(w)$ definen los espectros de potencia de $f(t)$ y $n(t)$ respectivamente. La relación de señal a ruido obtenida, fue de aproximadamente 24 db. En el siguiente capitulo, procederemos a medir el perfil de una superficie de alta calidad óptica.

CAPITULO IV

MEDICION DE UNA SUPERFICIE DE CALIDAD OPTICA

IV.1 Introducción

Las superficies de calidad óptica alta son muy demandadas en la industria para varias aplicaciones, sobre todo en la industria de la electrónica (Davidson, 1987) y (Caber, 1993), como la actuación de los dispositivos electrónicos depende de la calidad de la superficie y se hace necesario tener instrumentos exactos para las medidas de aspereza. Se han desarrollado varias técnicas para las medidas de aspereza de alta calidad óptica.

Obtener un perfil real de una superficie de alta calidad óptica. Ésta normalmente es una tarea difícil con otras técnicas ópticas. Por ejemplo, por obtener perfiles de superficies de alta calidad en áreas micrometricas, se usan microscópicos interferométricos con diferentes configuraciones. Debido a la complejidad de estos sistemas ópticos, es en general difícil obtener un simple analíticamente la expresión de la contestación de frecuencia espacial, haciéndo difícil procesar los datos crudos, la técnica expuesta en este trabajo muestro una respuesta en la frecuencia espacial simple que consiste en función de Gaussiana centrada en el origen. Esto permite procesar los datos de una manera fácil y obtener un resultado que se parece mejor al perfil real. Una ventaja adicional del interferómetro propuesto es el uso de una frecuencia temporal portadora que se usa para filtrar las señales indeseadas (ruido). Cuando esta portadora no se usa, las señales espurias pueden engañar las medidas de altura reales. Estas medidas espurias crecen cuando el haz reflejado no-modulado (banda base) se trata como la actual altura real, como es el caso de otros instrumentos mencionadas en al inicio del presente trabajo.

IV.2 Medición de una Superficie de $\lambda/4$

La muestra a ser caracterizada consistió en una superficie comercial circular de calidad alta óptica con un radio de aproximadamente 1.25 cm. El perfil de la distribución experimental del barrido sobre una línea de aproximadamente 12 μm obtenido con el sistema propuesto, una grafica de la señal de salida normalizada contra la distancia del barrido, se muestra en Fig. 4.1.

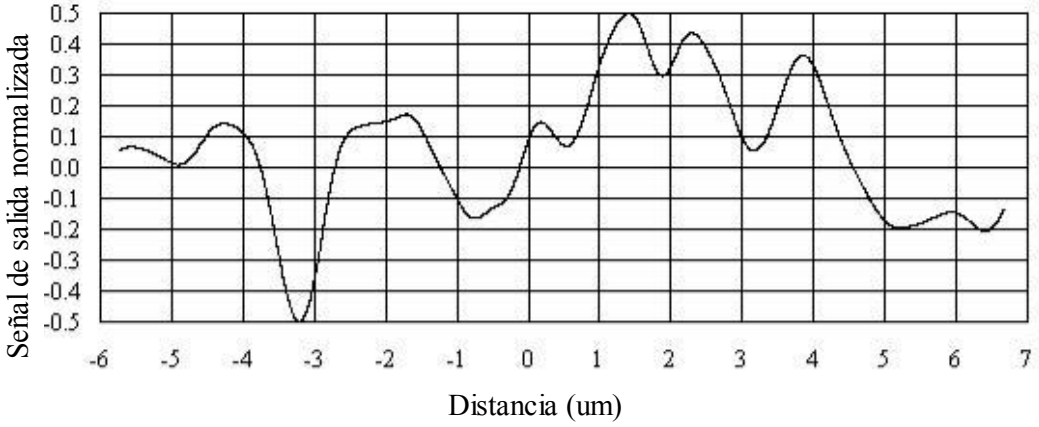

Figura 4.1 Señal de salida normalizada obtenida de un barrido sobre una línea de la superficie óptica con el sistema propuesto.

Como se menciono anteriormente todo instrumento tiene una cierta respuesta en frecuencia por lo que el perfil de distribución mostrado en la figura 4.1 no es el perfil real de la muestra bajo prueba, este perfil debe se procesado para compensar la respuesta en frecuencia del sistema, el trabajo se realizo obteniendo la transformada de Fourier del perfil mostrado en la figura 4.1 y multiplicando el resultado por el filtro inverso mostrado en la figura 3.5, a este resultado se le aplico la transformada inversa de Fourier, el perfil de la superficie óptica después de ser procesado es mostrado en la figura 4.2

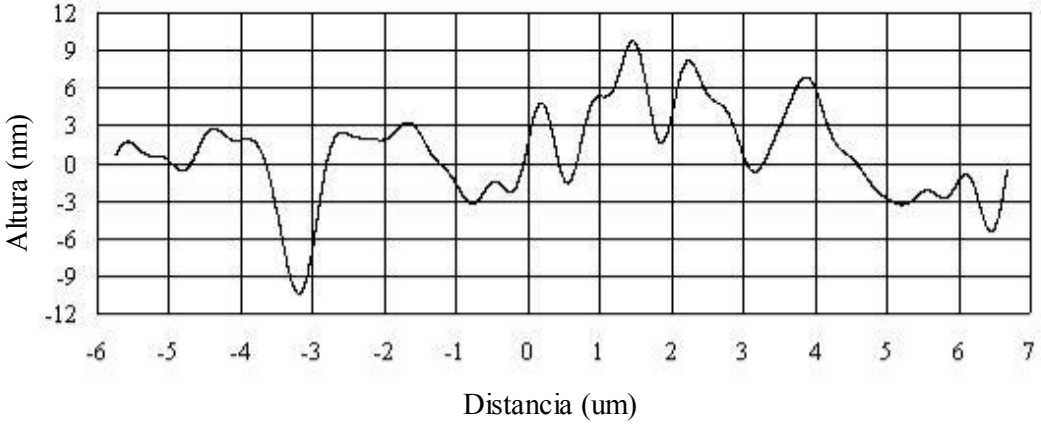

Figura 4.2 Perfil calculado usando la respuesta inversa en frecuencia del sistema para la superficie óptica bajo prueba.

Según la discusión anterior, se espera que, después de haber procesando la señal de salida, la topografía mostrada en figura 4.2 represente mejor la topografía real de la superficie bajo la prueba. Como se puede observar en la figura 4.2 se acentuaron las alturas de las altas frecuencias que habían sido atenuadas en la figura 4.1 debido a la naturaleza pasa bajas frecuencias del instrumento.

Antes de concluir, notamos que no es posible lograr una comparación del perfil resultante con el microscopio de fuerza atómica porque, como se indicó anteriormente, resultaría muy complejo examinar precisamente la misma línea con ambos métodos, además es importante notar que dado que las dos técnicas funcionan con principios físicos distintos los resultados no pueden ser completamente iguales.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

V.1 Conclusiones Generales

La aportación de este trabajo de tesis doctoral fue el desarrollo de un nuevo instrumento de medición de perfiles de superficies de lata calidad, para lo cual se invento un nuevo interferómetro óptico de tres haces a diferencia de los actuales que utilizan solo dos haces pero no miden de manera directa el valor del perfil, mientras que el nuevo instrumento realiza esta medición de forma directa.

El dispositivo utiliza un láser de He-Ne con un perfil de intensidad gaussiano, el cual es usado como la fuente de iluminación coherente, dos haces derivados de este haz principal se utilizan como haz de referencia y modulador respectivamente lo que le da el carácter de interferómetro heterodino, por ser un instrumento óptico se puede clasificar como un instrumento de no-contacto, el aparato proporciona la altura de un punto sobre la superficie bajo prueba donde uno de las haces llamado haz de prueba, es enfocado con la ayuda de un objetivo de microscopio por lo que también se puede clasificar dentro de los microscopios interferométricos, para obtener el perfil sobre una linea en una superficie se utiliza un sistema de barrido, por lo que es un perfilómetro, por todo esto el instrumento se puede catalogar como un perfilómetro interferométrico heterodino.

V.2 Conclusiones Particulares

Se presento un modelo analítico simplificado utilizando ondas planas para mostrar la viabilidad del sistema y después se desarrollo un modelo utilizando haces gaussianos.

El formalismo matemático desarrollado del aparato permitió mostrar que la señal a la salida del fotodetector consiste de una señal senoidal variante en el tiempo cuya amplitud es una funcion senoidal cuyo argumento es proporcional a la altura local vertical de la muestra en el punto de enfoque.

La potencia que integra el fotodetector es proporcional a una función senoidal cuyo argumento es proporcional al perfil de la superficie.

El formalismo matemático mostró que la respuesta en frecuencia del sistema tiene un comportamiento pasa bajas con un perfil de la función de transferencia gaussino el cual se comprobó experimentalmente y se hizo notar la concordancia entre el modelo matemático y los resultados experimentales obtenidos para la respuesta en frecuencia del instrumento.

Se obtuvo un filtro inverso de la respuesta en frecuencia de sistema el cual se aplico al perfil obtenido por el sistema de una superficie de calidad óptica para obtener un perfil más real de la superficie de calidad óptica.

V.3 Perspectivas a Futuro

Las perspectivas a futuro son implementarle un segundo eje al barrido del sistema o algún otro sistema que poder obtener no solamente el perfil de una línea sobre la superficie, sino la topografía de la misma, además de poder utilizar un láser de menor longitud de onda lo que aumentaría la resolución vertical del sistema.

Por otra parte el sistema solo ha sido utilizado en reflexión, pero al utilizarlo en el modo de transmisión podríamos correlacionar alguna otra propiedad física de la muestra bajo prueba con la información que nos entrega el interferómetro.

REFERENCIAS

1. J. M. Bennett, ―Measurement of the rms roughness, autocovariance function and statistical proprieties of optical surfaces using a FECO scanning interferometer”, Appl. Opt. 15, 2705-2721 (1976).
2. J. M. Bennett and J. H. Dancy, ―Stylus profiling instrument for measuring statistical properties of smooth optical surfaces”, App. Opt. 20 (10) 1785 (1981).
3. J. M. Bennett, ―Comparison of techniques for measuring the roughness of optical surfaces”, Opt. Eng. 24 (3), 380-387 (1985).
4. J. M. Bennett, V. Elings, and K. Kjoller, "Precision metrology for studying optical surfaces," Opt. Photon. News 2 (5), 14-18 (1991).
5. B. Bhushan, J. C. Wyant, and C. L. Koliopoulos, "Measurement of Surface Topography of Magnetic Tapes by Mirau Interferometry," Appl. Opt. 24, 1489-1497 (1985).
6. P. J. Caber, ―Interferometric profiler for rough surfaces”, App. Opt. 32 (19), 3438-3441 (1993).
7. S. R. Clark, and J. E. Greivenkap, ―Optical reference profilometry”, Opt. Eng. 40 (12), 2845 (2001).
8. K. Creath, "Measuring Step Heights Using an Optical Profiler," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 661, 296-301 (1986).
9. K. Creath, ―Submicron linewidth measurement using an interferometric optical profiler,” in Integrated Circuit Metrology, Inspection, and Process Control, W. H. Arnold, ed., Proc. SPIE 1464, 474–483 (1991).
10. M. Cywiak, J. Murakowski and G. Wade., ―Beam blocking method for optical characterization of surfaces”, IJIST 11, 164-169 (2000).
11. M. Cywiak, J. F. Aguilar and B. Barrientos, ―Low-numerical-aperture Gaussian beam confocal system for profiling optically smooth”, Opt. Eng. 44 (1), 1-7 (2005).
12. M. Davidson, K. Kaufman, I. Mazor, F. Cohen, ―An application of interference microscopy to integrated circuit inspection and metrology”, in Integrated Circuit Metrology, Inspection and Process Control, K. M. Monahan, ed., Proc. SPIE 775, 233-247 (1987).
13. H. Davies, ―THE REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM A ROUGH SURFACE”, Proceedings of IEE 4 (101), 209-214 (1954).
14. M. J. Downs, W. H. McGivern, and H. J. Fergusen, ―Optical system for measuring the profile of super smooth surface,” Precision Eng. 7(4), 211–215 (1985).
15. J. M. Eastman and P. W. Baumeister, ―Measurement of the microtopography of optical surfaces using scanning Fizeau interferometer”, J. Opt. Soc. Am, 64, 1369A (1974).
16. W. J. Goodman, Introduction to Fourier Optics, Second ed., Mc Graw-Hill, New York, 2000, Chap. 4,5.
17. J. S. Hartman, R. S. Gordon, and D. L. Lessor, ―Nomarski differential interference contrast microscopy for surface slope measurements: an examination of techniques,‘‘ Appl. Opt. 20, 2665–2669 (1981).
18. J. S. Hartman, R. S. Gordon, and D. L. Lessor, ―Quantitative surface topography determination by Nomarski reflection microscopy. 2. Microscope modification, calibration, and planer sample experiments,‘‘ Appl. Opt. 19, 2998–3009 (1980).
19. C-C. Huang, ―Optical heterodyne profilometer”, Opt. Eng. 23 (4), 365-370 (1984).

20. G. W. Johnson, D. C. Leiner and D. T. Moore, ―Phase-locked Interferometry", Proc. SPIE 126, 152-160 (1977).
21. Lorenzo Juárez P., Moisés Cywiak, Bernardino Barrientos, and J. Mauricio Flores, ―Three Gaussian beam heterodyne interferometer for surface profiling", Opt. Comm. 268, 209–214 (2006).
22. Lorenzo Juárez P., Moisés Cywiak, Manuel Servín, and J. Mauricio Flores, ―Three Gaussian beam interferometric profilometer applied to the characterization of an optical flat", Opt. Express 527, 15(9), (2007).
23. G. S. Kino and S. S. C. Chim, ―Mirau correlation microscope", App. Opt. 29 (26), 3775-3783 (1990).
24. Anders Kuhle et al., ―Comparison of roughness measurement with atomic force microscopy and interference microscopy," Proc. SPIE 5188, 154-161 (2003).
25. B. S. Lee and T. C. Strand, "Profilometry with a coherence scanning microscope," Appl. Opt. 29, 3784-3788 (1990).
26. D. L. Lessor, J. S. Hartman, and R. L. Gordon, ―Quantitative surface topography determination by Nomarski reflection microscopy. 1.Theory,‘‘ J. Opt. Soc. Am. 69, 357–365 (1979).
27. D. Levy, L. Singher, J. Shamir, and Y. Leviatan, ―Step height determination by a focused Gaussian beam," Opt. Eng. 34, 3303–3313 (1995).
28. Q. Li, H. Gao, S. Xue, and Y. Li, ―Optical profilometer based on the principle of differential interference,‘‘ Opt. Eng. 40, 833–836 (2001).
29. J. Li, X.-Yu Su, and L.-R. Guo, ―An improved Fourier transform profilometry for automatic measurement of 3D object shapes," Opt. Eng. 29(12), 1439–1444 (1990).
30. G. Meyer and N. M. Amer, ―Novel optical approach to atomic force microscopy," Appl. Phys. Lett. 53, 1045–1047 (1988).
31. J. Murakowski, M. Cywiak, B. Rosner and D. van der Weide, ―Far field optical imaging with subwavelength resolution", Opt. Comm. 185, 295-303 (2000).
32. D. Pantzer, J. Politch, and L. Ek, "Heterodyne Profiling Instrument for the Angstrom Region," Appl. Opt. 25, 4168-4172 (1986).
33. K. Phan, J. Nistler, and B. Singh, ―Metrology issues associated with submicron linewidths," in Integrated Circuit Metrology, Inspection, and Process Control, W. H. Arnold, ed., Proc. SPIE 1464, 424–437 (1991).
34. C. W. See, M. Vaez Iravani, and H. K. Wickramasinghe, ―Scanning differential phase contrast optical microscope— application to surface study," Appl. Opt. 24, 2373–2379 (1985).
35. C. W. See, R. K. Appel, and M. G. Somekh, ―Scanning differential optical profilometer for simultaneous measurement of amplitude and phase variation," Appl. Phys. Lett. 53, 10–12 (1988).
36. A. Sicignano and M. V. Iravani, ―Quantitative linewidth measurement using in situ differential SEM techniques," in Integrated Circuit Metrology, Inspection, and Process Control, W. H. Arnold, ed., Proc. SPIE 1261, 2–8 (1987).
37. M. G. Somekh, M. S. Valera, and R. K. Appel, ―Scanning heterodyne confocal differential phase and intensity microscope," Appl. Opt. 34, 4857–4868 (1995).
38. M. G. Somekh, ―Depth discrimination in scanned heterodyne microscope systems," J. Microsc. 168, 131–151 (1992).
39. G. E. Sommargren, ―Optical heterodyne profilometry," Appl. Opt. 20, 610–618 (1981).

40. M. Stedman, "Limits of surface measurements by optical probes," in Surface Measurement and Characterization, J. M. Bennett, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1009,62-66 (1988).
41. J. F. Song and T. V. Vorburger, ―Stylus profiling at high resolution and low force," Appl. Opt. 30, 42–49 (1991).
42. H. Stahl and J. Tome, ―Phase-measuring interferometry: performance characterization and calibration," in Optical Testing and Metrology II, C. Grover, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 954, 78–87 (1988).
43. M. B. Suddendorf, C. W. See, and M. G. Somekh, ―Combined differential amplitude and phase interferometer with a single probe beam," Appl. Phys. Lett. 67, 28–30 (1995).
44. H. J. Tiziani, ―Optical methods for precision measurements", Optical and Quantum Electronics 21, 253-282 (1989).
45. M. Takeda and K. Motoh, ―Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3D object shapes," Appl. Opt. 22(24),3977–3982 (1983).
46. D. Walker, H. Yang and S. Kim, ―Novel hybrid stylus for nanometric profilometry for large optical surfaces", Opt. Express 11, 1793-1798 (2003).
47. W. T. Welford, "Noncontacting Measurement of Surface Roughness," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 235, 118-121 (1980).
48. W. Zhou, Z. Zhou, and G. Chi, ―Investigation of common-path interference interferometry," Opt. Eng. 36, 3172–3175 (1997).

APENDICE A

Como se menciono en el capitulo II, la ecuación 2.24 puede ser expandida en nueve integrales, se procede a evaluar

1. La primera integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_p(\xi,\eta)\Psi_p^*(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \tag{A.1}$$

sustituyendo las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.17 en A.1 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(i\omega_l t\right)}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.2}$$

simplificando los términos independientes de la integración tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.3}$$

cambiando el orden de integración, podemos eliminar las exponenciales que contienen a la función h(x,y) por lo que obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy \tag{A.4}$$

cambiando nuevamente el orden de integración y desarrollando los términos cuadráticos de las exponenciales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x^2-2xx_0+x_0^2)+(y^2-2yy_0+y_0^2)}{r_0^2}\right]\exp\left[-i2\pi\left(x\frac{\xi}{\lambda f}+y\frac{\eta}{\lambda f}\right)\right]dxdy\times\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x^2-2xx_0+x_0^2)+(y^2-2yy_0+y_0^2)}{r_0^2}\right]\exp\left[-i2\pi\left(-x\frac{\xi}{\lambda f}-y\frac{\eta}{\lambda f}\right)\right]dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.5}$$

desarrollando los términos cuadráticos y arreglando la exponencial obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left[-\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\exp\left[-\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}\right]\exp\left[\frac{2xx_0+2yy_0}{r_0^2}\right]\exp\left[-i2\pi\left(x\frac{\xi}{\lambda f}+y\frac{\eta}{\lambda f}\right)\right]dxdy\times\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}\right]\exp\left[\frac{2xx_0+2yy_0}{r_0^2}\right]\exp\left[-i2\pi\left(-x\frac{\xi}{\lambda f}-y\frac{\eta}{\lambda f}\right)\right]dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.6}$$

reordenando los términos de las exponenciales para darles la forma de una integral de una gaussiana tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left[-2\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\pi\left(\left\{\frac{x}{\sqrt{\pi}r_0}\right\}^2+\left\{\frac{y}{\sqrt{\pi}r_0}\right\}^2\right)\right]\exp\left[-i2\pi\left(x\left\{\frac{\xi}{\lambda f}-\frac{x_0}{i\pi r_0^2}\right\}+y\left\{\frac{\eta}{\lambda f}-\frac{y_0}{i\pi r_0^2}\right\}\right)\right]dxdy\times\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\pi\left(\left\{\frac{x}{\sqrt{\pi}r_0}\right\}^2+\left\{\frac{y}{\sqrt{\pi}r_0}\right\}^2\right)\right]\exp\left[-i2\pi\left(x\left\{-\frac{\xi}{\lambda f}-\frac{x_0}{i\pi r_0^2}\right\}+y\left\{-\frac{\eta}{\lambda f}-\frac{y_0}{i\pi r_0^2}\right\}\right)\right]dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.7}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left[-2\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\times\sqrt{\pi}r_0\sqrt{\pi}r_0\sqrt{\pi}r_0\sqrt{\pi}r_0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\pi^2 r_0^2\left(\left\{\frac{\xi}{\lambda f}+\frac{ix_0}{\pi r_0^2}\right\}^2+\left\{\frac{\eta}{\lambda f}+\frac{iy_0}{\pi r_0^2}\right\}^2\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\exp\left[-\pi^2 r_0^2\left(\left\{-\frac{\xi}{\lambda f}+\frac{ix_0}{\pi r_0^2}\right\}^2+\left\{-\frac{\eta}{\lambda f}+\frac{iy_0}{\pi r_0^2}\right\}^2\right)\right]\right\}d\xi d\eta \tag{A.8}$$

desarrollando los términos cuadráticos y simplificando obtenemos

$$\frac{2\pi r_0^2 P_0}{\lambda^2 f^2}\exp\left[-2\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\pi^2 r_0^2\left(\left\{\frac{\xi^2}{\lambda^2 f^2}+i2\frac{\xi x_0}{\lambda f\pi r_0^2}-\frac{x_0^2}{\pi^2 r_0^4}\right\}+\left\{\frac{\eta^2}{\lambda^2 f^2}+i2\frac{\eta y_0}{\lambda f\pi r_0^2}-\frac{y_0^2}{\pi^2 r_0^4}\right\}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\exp\left[-\pi^2 r_0^2\left(\left\{\frac{\xi^2}{\lambda^2 f^2}-i2\frac{\xi x_0}{\lambda f\pi r_0^2}-\frac{x_0^2}{\pi^2 r_0^4}\right\}+\left\{\frac{\eta^2}{\lambda^2 f^2}-i2\frac{\eta y_0}{\lambda f\pi r_0^2}-\frac{y_0^2}{\pi^2 r_0^4}\right\}\right)\right]\right\}d\xi d\eta \tag{A.9}$$

simplificando términos obtenemos

$$\frac{2\pi r_0^2 P_0}{\lambda^2 f^2}\exp\left[-2\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\exp\left[\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]\exp\left[\frac{x_0^2+y_0^2}{r_0^2}\right]$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2 r_0^2\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{\lambda^2 f^2}\right)\right]d\xi d\eta \tag{A.10}$$

separando las integrales obtenemos

$$\frac{2\pi r_0^2 P_0}{\lambda^2 f^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}\pi r_0}{\lambda f}\xi\right)^2\right]d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}\pi r_0}{\lambda f}\eta\right)^2\right]d\eta \tag{A.11}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{2\pi r_0^2 P_0}{\lambda^2 f^2}\frac{\lambda f}{\sqrt{2}\pi r_0}\frac{\lambda f}{\sqrt{2}\pi r_0}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} \tag{A.12}$$

finalmente simplificando tenemos

$$P_0 \tag{A.13}$$

2. La segunda integral a evaluar es
3.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_p(\xi,\eta)\Psi_r^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.14}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 en A.14 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\frac{\exp\left(-i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(i\omega_l t\right)}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.15}$$

simplificando los términos independientes de la integración tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.16}$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy \tag{A.17}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.18}$$

de donde obtenemos

$$\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.19}$$

4. La tercera integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_p(\xi,\eta)\Psi_m^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.20}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 en A.14 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left[i(\omega_l+\omega_s)t\right]}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.21}$$

simplificando los términos independientes de la integración tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.22}$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right. \tag{A.23}$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.24}$$

finalmente obtenemos

$$\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.25}$$

5. La cuarta integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_p^*(\xi,\eta)\Psi_r(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.26}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 en A.14 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp(i\omega_l t)}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right. \tag{A.27}$$
$$\left.\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp(-i\omega_l t)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta$$

simplificando los términos independientes de la integración tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.28}$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy \tag{A.29}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy\right. \tag{A.30}$$

finalmente obtenemos

$$\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy\right. \tag{A.31}$$

6. La quinta integral a evaluar es similar a la primera integral por lo que podemos decir que su valor es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_r(\xi,\eta)\Psi_r^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = P_0 \tag{A.32}$$

7. La sexta integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_r(\xi,\eta)\Psi_m^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.33}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.16, 2.18 y 2.19 en A.14 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(-i\omega_l t\right)}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$

$$\left.\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left[i(\omega_l+\omega_s)t\right]}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.34}$$

simplificando términos obtenemos

$$\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.\\ \left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy\end{array} \tag{A.35}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.36}$$

finalmente obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(i\omega_s t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.37}$$

8. La séptima integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_p^*(\xi,\eta)\Psi_m(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.38}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.15, 2.16, 2.17 y 2.19 en A.14 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(-i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left(i\omega_l t\right)}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\,\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$

$$\left.\frac{\exp\left(i\,\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp\left[-i(\omega_l+\omega_s)t\right]}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.39}$$

simplificando los términos independientes de la integración tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left(-i\omega_s t\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\,\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\exp\left[-i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta \tag{A.40}$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left(-i\omega_s t\right)\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\,\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\,\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.\\ &\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\,\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy\end{aligned} \tag{A.41}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left(-i\omega_s t\right)\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\,\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\,\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.42}$$

finalmente obtenemos

$$\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(-i\omega_s t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\frac{4\pi}{\lambda}h(x,y)\right]\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.43}$$

9. La octava integral a evaluar es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_r^*(\xi,\eta)\Psi_m(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{A.44}$$

sustituyendo las ecuaciones de la 2.16, 2.18 y 2.19 en A.14 tenemos

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp(i\omega_l t)}{-i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right.\\ &\left.\frac{\exp\left(i\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\exp[-i(\omega_l+\omega_s)t]}{i\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\times\\ \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\end{array}\right\}dxdy\right\}d\xi d\eta\end{aligned} \tag{A.45}$$

cambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(-i\omega_s t)\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right.\\ &\left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi+y\eta)\right]\right\}d\xi d\eta\right\}dxdy\end{aligned} \tag{A.46}$$

evaluando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2}\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp(-i\omega_s t)\lambda f\lambda f\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.47}$$

finalmente obtenemos

$$\frac{2P_0}{\pi r_0^2}\exp\left(-i\omega_s t\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}{r_0^2}\right]dxdy \tag{A.48}$$

10. La novena integral a evaluar es similar a la primera y quinta integrales su valor es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m\left(\xi,\eta\right)\Psi_m^*\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta = P_0 \tag{A.49}$$