



METODO ROBUSTO DE TRES PASOS PARA LA
DEMODULACIÓN DE FASE ÓPTICA USANDO UN
FILTRO DE CUADRATURA ROBUSTO

TESIS COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (ÓPTICA)

PRESENTA

ING. DIANA ALEJANDRA ARROYO ALMANZA

ASESOR

DR. MANUEL SERVÍN GUIRADO

Co-ASESOR

DR. JULIO CESAR ESTRADA RICO

DEFENDIDA EL 5 DE DICIEMBRE DEL 2008

Resumen

En este trabajo presentamos un método de tres pasos robusto al error de desintonamiento y al ruido blanco, que tiene como finalidad extraer la fase óptica. El método está basado en un filtro de cuadratura que es obtenido mediante la minimización de una función de costo.

Debido a que el método de interferometría de corrimiento de fase (acrónimo en inglés PSI), de tres pasos, es muy sensible a los errores de desintonamiento y al ruido, el cual provoca que la fase óptica extraída sea incorrecta. Por esta razón proponemos un método robusto que calcula la fase correctamente cuando existen este tipo de errores.

El método de tres pasos robusto puede entenderse como un problema inverso donde a partir de una señal g dada nosotros queremos encontrar un campo complejo f . El desempeño de nuestro método es evaluado mediante la comparación de su desviación estándar con la desviación del método tradicional PSI de tres pasos. Mediante los resultados obtenidos comprobamos que nuestro método recupera la fase óptica con un error menor que con respecto al método tradicional PSI.

Índice general

1. ANTECEDENTES	13
1.1. Resumen	13
1.2. Introducción	13
1.3. Interferometría	14
1.4. Desarrollo teórico	16
1.5. Visibilidad de las Franjas de Interferencia	21
1.6. Diferencia de Caminos Ópticos	21
1.7. Interferómetros	23
1.7.1. Interferómetros de división de frente de onda	23
1.7.2. Interferómetros de división de amplitud	23
1.8. Interferómetro de Michelson	24
1.8.1. Desarrollo teórico	24
1.9. Interferómetro Twman Green	29
1.10. Medición e interpretación de los interferogramas	29
2. MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE FRANJAS	35
2.1. Resumen	35
2.2. Introducción	35
2.3. Método de la transformada de Fourier (Takeda).	37
2.4. Técnicas de Extracción Temporal de la Fase	40
2.4.1. Interferometria de Corrimiento de Fase (PSI) para Tres Pasos	41

2.4.2.	Interferometria de Corrimiento de Fase (PSI) para “ <i>N</i> ” Pasos	42
2.5.	Proceso de filtrado en el patrón de franjas	44
2.6.	Método de desenvolvimiento temporal de la fase	45
3.	FILTROS DE CONVOLUCIÓN Y DE REGULARIZACIÓN	51
3.1.	Resumen	51
3.2.	Introducción	51
3.3.	Filtros Suavizantes	52
3.4.	Filtros de Convolución	52
3.4.1.	Ventana de Convolución Promedio	53
3.4.2.	Filtro de Convolución Gaussiano	54
3.4.3.	Filtros Diferenciales	55
3.5.	Métodos de Regularización	57
3.5.1.	Método clásico de regularización	58
3.5.2.	Filtros regularizadores pasa baja de respuesta frecuencial	61
3.6.	Filtros de cuadratura robustos	61
4.	MÉTODO ROBUSTO Y RESULTADOS	67
4.1.	Resumen	67
4.2.	Introducción	67
4.3.	Método	70
4.4.	Resultados	78
4.4.1.	PRUEBA 1	80
4.4.2.	PRUEBA 2	82
4.4.3.	PRUEBA 3	83
4.4.4.	RESULTADO DEL ERROR DE DESENTONAMIENTO	84
4.4.5.	PRUEBA 4	85
4.5.	Conclusiones	86

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	89
5.1. Resumen	89
5.2. Conclusiones	89
5.3. Trabajo futuro	90

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de distintos patrones de franjas.	15
1.2. Superposición de dos frentes de onda planos	16
1.3. Representación esquemática de la superposición de dos ondas polarizadas	19
1.4. Arreglo básico del interferómetro de Michelson.	25
1.5. Interferómetro Michelson donde se colocó la imagen del espejo M_2 para calcular la diferencia de camino óptico	27
1.6. Arreglo interferométrico de Twyman Green	30
1.7. Interferogramas que muestran el número de orden de interferencia relativo de dos patrones de franjas, una con franjas abiertas y otra cerradas	32
2.1. Espectro de Fourier de una línea a lo largo del eje f_x del interferograma	39
2.2. Extracción de la fase envuelta y despues su desenvuelta	42
2.3. Fases extraidas mediante el método de tres y ocho pasos	44
3.1. Respuesta frecuencia de una ventana de 3x3	54
3.2. Imágen que resulta al aplicarle un filtro de ventana promedio 40 veces consecutivas .	55
3.3. Imagen filtrada con un filtro Gaussiano para diferentes sigmas σ	56
3.4. Imágen filtrada con un filtro diferencial	57
4.1. Sistema lineal, donde a partir de una señal dada g , queremos encontrar la señal de entrada f , la cual es muy parecida a g pero sin ruido	70
4.2. Filtro pasa baja desplazado a una frecuencia de entonamiento ω_0	73

4.3. Esquema del proceso que se sigue para extraer la fase óptica a partir de tres interferogramas	79
4.4. Fase extraída mediante el método robusto y el método PSI de tres pasos donde $\alpha = 0,3$ y el error de desentonamiento $\epsilon = 0$	81
4.5. Fase extraída mediante el método robusto y el método PSI de tres pasos para un $\alpha = 0,3$ y un error de desentonamiento $\epsilon = 0,01$	82
4.6. Fase extraída mediante el algoritmo tradicional PSI de tres pasos y el método robusto, donde $\alpha = 0,3$ y el error de desentonamiento $\epsilon = 0,1$	83
4.7. Desviación estándar de la fase extraída con el metodo tradicional PSI y el método robusto con respecto al error de desentonamiento	84
4.8. Fase extraída mediante el método robusto y el método tradicional PSI de tres pasos donde se añadio ruido blanco a los tres interferogramas.	86

INTRODUCCIÓN

Muchas de las técnicas ópticas de medición de campo completo proveen los datos medidos (información de cierta magnitud) codificados en la fase de un perfil de intensidad, que es también llamado patrón de franjas o interferómetro. El proceso de codificación, puede ser visto en la mayoría de los casos, como una asignación, donde para cada valor de intensidad del patrón de franjas le corresponde un valor de la magnitud medida y esta asignación corresponde usualmente a través de la fase ϕ , por medio de una relación funcional específica, la cual es diferente para cada situación. Los patrones de franjas aparecen como franjas brillantes y oscuras alternadas.

En metrología, los métodos ópticos cuyos resultados son presentados en forma de patrones de franjas, constituyen una de las herramientas de medición más usadas, ya que permiten obtener información en un dominio bidimensional (es decir, métodos de campo completo en lugar de métodos puntuales, los cuales proveen solo un dato simultáneo), además de proveer información valiosa al metrologo experimentado.

El proceso completo de analizar uno o más patrones de franjas, el cual proporciona un resultado en formatos adecuados a cada caso, es llamado análisis de franjas, este proceso generalmente consiste en los siguientes pasos: Primero se evalúa la fase, después se desenvuelve la fase, se eliminan términos adicionales y por último se hace un reescalamiento para una correcta presentación de los resultados. Los métodos de evaluación de fase han sido empleados desde el nacimiento de la óptica para medir diferentes magnitudes físicas en distintos campos de ingeniería y de la ciencia, sin embargo, su uso había sido inhibido por largo tiempo debido a que el proceso de rutina era tedioso

e ineficiente, debido a la gran cantidad de mediciones que se hacían manualmente, por ejemplo, se cuantificaba la fase ubicando los puntos extremos del patrón de franjas, las observaciones eran directas o fotografiándolas previamente y los científicos tenían que distinguir entre la fase del ruido. Sin embargo, durante la década de los sesentas aparecieron las cámaras de televisión de estado sólido y las computadoras, permitiendo la adquisición y restauración de los patrones de franjas en un formato adecuado para su manipulación a posteriori; esto hizo que la captura de las mediciones fueran más rápidas, además de que se desarrolló software específico que mejoraba el contraste de las franjas, reducía el ruido y localizaba fácilmente los extremos de los patrones de franjas. Después, a mediados de los años sesentas, estas técnicas fueron rápidamente reemplazadas por técnicas de procesamiento de franjas más actuales debido a que también extraían mapas de fase directamente.

Gracias a la mejora en la capacidad de almacenamiento y rapidez de las computadoras, junto con la reducción de sus precios, el uso universal de estas técnicas y su rápido desarrollo hicieron que actualmente sean unas de las herramientas metrológicas más potentes y versátiles en cuanto a aplicaciones usadas. Debido a todo lo anterior, las técnicas de análisis de franjas se han convertido en uno de los principales temas de investigación en el mundo en el campo de la metrología, como puede ser juzgado a partir de un gran número de investigadores quienes concentran sus esfuerzos en el descubrimiento de nuevos métodos y la mejora de los existentes o usando los en nuevas aplicaciones.

Existen muchas técnicas de análisis de franjas, las cuales poseen características especiales, sin embargo, no existe una única técnica que sea óptima para todas las situaciones. Por otro lado muchas de estas técnicas usan algoritmos de interferometría de pasos (acrónimo en inglés PSI) como una herramienta para el cálculo de la fase óptica. La interferometría de pasos graba una serie de interferogramas mientras la fase de referencia es cambiada. El frente de onda es codificado en la distribución de la intensidad del patrón de franjas y un cálculo punto por punto en la computadora recupera la fase. Algunas de las ventajas de los métodos de interferometría de pasos sobre otras técnicas de medición son que tienen una alta precisión del orden de $1/1000$ de la longitud de onda y

una capacidad de medición rápida. La técnica PSI fue concebida por Carré en 1966 y su desarrollo más completo fue hecho por Crane, Bruning y Wyant por mencionar algunos. Desafortunadamente existe limitaciones en las técnicas PSI, el error limitante es usualmente el movimiento de las franjas, causado por las vibraciones, ruido y variaciones indexadas en el camino óptico. Este error es llamado error de desentonamiento.

El error de desentonamiento y el ruido blanco, puede ser disminuido aumentando el número de interferogramas, pero en muchas aplicaciones como el análisis de eventos transitorios, se requiere utilizar el menor número de interferogramas, por lo que el método de interferometría de pasos ideal sería el de tres pasos, debido a que entre menor número de patrones de franjas, su captura es más rápida y el tiempo de procesamiento es menor, sin embargo, este método no es muy utilizado en los eventos dinámicos, debido a que es muy sensible a los errores de desentonamiento. Por esta razón, nosotros proponemos un método de tres pasos robusto al error de desentonamiento y al ruido blanco usando un filtro de cuadratura robusto, esto se hace mediante la minimación de una función de costo regularizada para demodular la fase óptica.

El algoritmo puede entenderse como un problema inverso, donde a partir de tres interferogramas capturados queremos encontrar la fase óptica que se encuentra codificada dentro de la distribución de intensidad. Nuestro método es robusto al error de desentonamiento donde para cualquier desplazamiento de fase α , encuentra una fase óptica correcta. El desempeño de nuestro método es demostrado mediante una comparación con el algoritmo tradicional PSI de tres pasos.

La tesis está dividida en cinco capítulos. En el capítulo 1, presentamos las definiciones y los conceptos básicos de la interferometría, así como algunas de sus aplicaciones dentro de la metrología óptica.

En el capítulo 2, se describen algunos de los principales métodos para el análisis de franjas utilizados para el cálculo de la fase óptica, entre ellos se encuentra el método de interferometría de

pasos y el método de la transformada de Fourier.

En el capítulo 3, se presenta una descripción de los filtros de convolución y regularización más usados en el área de procesamiento digital de imágenes, los cuales sirven para disminuir el ruido y obtener una mayor precisión en el cálculo de la fase óptica.

En el capítulo 4, se presenta un método de tres pasos robusto al error de desentonamiento y al ruido blanco para la demodulación de la fase óptica, usando un filtro de cuadratura robusto. También se presentan los resultados obtenidos al aplicar nuestro método robusto y el método tradicional PSI de tres pasos, resaltando las ventajas y desventajas que tiene cada uno de estos.

Finalmente en el capítulo 5, presentamos las conclusiones generales y el trabajo futuro.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

1.1. Resumen

En este capítulo se presentan las definiciones y los conceptos básicos de la interferometría, así como algunas de sus aplicaciones dentro de la metrología óptica.

1.2. Introducción

Por múltiples razones prácticas el hombre ha tenido cada vez más la necesidad de medir propiedades físicas con mayor precisión, entre sus múltiples necesidades esta la óptica como una herramienta útil, de ahí que ha estado presente desde siempre y ha evolucionado desde los inicios de la ciencia. Por otra parte, los avances y contribuciones de la óptica son imprescindibles para nuestra vida cotidiana, así el concepto físico de la óptica se encuentra en la comprensión de los fenómenos relacionados con la generación, propagación, interacción y detección de la "luz" [1, 2]. Por otra parte se pueden mencionar tres áreas de aplicaciones de la óptica, la metrología, la instrumentación y las comunicaciones.

Los métodos ópticos han sido ampliamente difundidos por su versatilidad, por ser de campo completo, de no contacto y tener la ventaja de ser sistemas de medición de alta resolución, así entre

algunas de las propiedades físicas a medir son: deformaciones, vibraciones, desplazamientos y una de las más importantes es la topografía de superficies.

En algunas aplicaciones es necesario medir la forma absoluta de la superficie, por ejemplo la medición de la forma de la superficie de lentes ó espejos de los instrumentos ópticos, donde aquí la superficie no debe desviarse de la forma teórica ideal más de una pequeña fracción de la longitud de onda de la luz, para el caso de las lentes o espejos de instrumentos de alta precisión típicamente el error permitido no es mayor de un cuarto de longitud de onda. La situación se complica todavía más cuando esta superficie óptica es de grandes dimensiones, como en el caso de los instrumentos astronómicos. Un ejemplo notable muy conocido es el telescopio espacial Hubble [1, 3], que en particular su espejo objetivo es un hiperboloide de revolución que tiene un diámetro de cuatro metros, cuando fue puesto en órbita por primera vez los astrónomos se desilucionaron debido a que las imágenes de las estrellas no eran claras, sin embargo se descubrió que debido a un error durante la construcción y las pruebas de este espejo había un error que produjo una desviación de la superficie de apenas media longitud de onda en la orilla del espejo. Este ejemplo da idea de la importancia de desarrollar mejores métodos para medir estas superficies ópticas con una alta precisión. Es aquí donde la metrología óptica y por tanto la interferometría tienen un papel muy importante, detectando y midiendo estas pequeñísimas deformaciones de las superficies.

Por lo tanto, la metrología óptica es la rama de la óptica que tiene como propósito efectuar medidas de muy alta precisión usando las ondas de luz como escala, esto se hace por medio de unos instrumentos llamados interferómetros, que están basados en el fenómeno de la interferencia [4], por lo que será descrito en la sección 3. Posteriormente, se tratarán las principales aplicaciones de la metrología óptica.

1.3. Interferometría

La interferometría se basa en el fenómeno de la interferencia que ocurre cuando dos ondas mutuamente coherentes se superponen en algún lugar del espacio donde se obtiene un interferogra-

ma(patrón de interferencia) el cual entendemos como: un conjunto de franjas que representan una modulación de la irradiancia en el plano de observación y muestra la diferencia de fase de un frente de onda con respecto a otro [4, 5, 6, 7].

Para obtener franjas de interferencia estables se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Los haces tengan la misma polarización[7].
2. La fuente sea monocromática.
3. La diferencia de camino óptico entre los haces no exceda la longitud de coherencia de la fuente.

Estos patrones de interferencia pueden presentarse en diferentes formas, como se muestra en la Figura 1.1. El número, forma y distribución de las franjas de interferencia proporciona datos muy útiles debido a las ondas que lo forman y que se estudiará en las siguientes secciones.

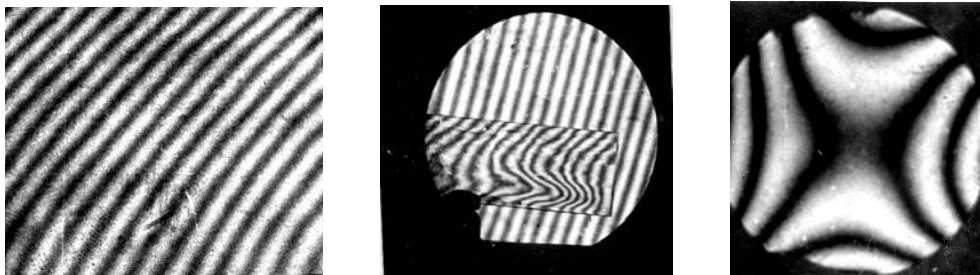


Figura 1.1: Ejemplos de distintos patrones de franjas.

Por consiguiente, al analizar la interferencia de las ondas, nos interesa conocer la influencia en el resultado final de las ondas originales, esto es: fase, amplitud, frecuencia, etc. por eso es necesario comprender el desarrollo teórico que se muestra a continuación.

1.4. Desarrollo teórico

Al hablar de franjas de interferencia no nos referimos a un solo punto en el espacio sino a un plano donde se superponen las ondas[4, 7, 8, 9], debido a esto, podemos definir la forma del patrón de interferencia de este modo, se considera también, la superposición de dos ondas planas de la misma longitud de onda, con dirección de propagación diferente (ver Figura 1.2). Supongamos que tenemos dos ondas planas que se superponen en un área determinada, estas ondas se pueden representar por sus campos eléctricos de la forma:

$$\vec{E}_1 = A_1 \cos[\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1] \quad (1.1)$$

$$\vec{E}_2 = A_2 \cos[\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2] \quad (1.2)$$

donde, \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son los campos eléctricos de cada una de las ondas que se superponen, $|\vec{k}_{1,2}|$ es el número de onda, definido como $|\vec{k}_{1,2}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω es la frecuencia temporal angular, $A_{1,2}$, es la amplitud y $\phi_{1,2}$ la fase inicial.

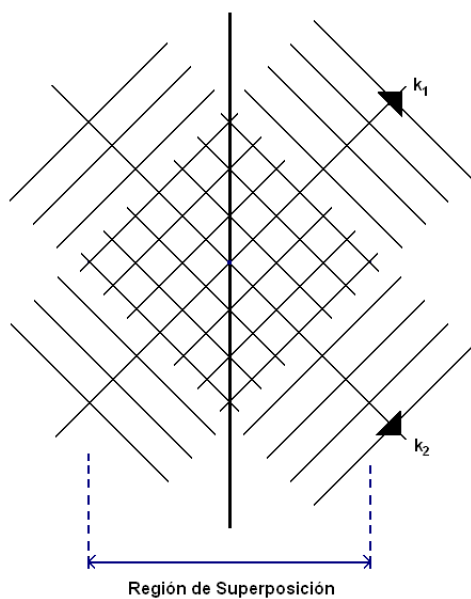


Figura 1.2: Superposición de dos frentes de onda planos

En la región de superposición el campo eléctrico resultante se puede representar como:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.3)$$

$$\vec{E} = \vec{A}_1 \cos[k_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1] + \vec{A}_2 \cos[k_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2] \quad (1.4)$$

Para la luz visible, el campo eléctrico varía rápidamente, entre $4,3 \times 10^{14}$ Hz y $7,5 \times 10^{14}$ Hz., lo que hace que sea una cantidad impráctica pero no imposible de detectar[7]. Por esta razón, para medir el efecto de la luz visible en el ojo humano y en la mayoría de los detectores es necesario tomar en cuenta la energía del haz luminoso que está relacionada con el promedio temporal del campo eléctrico incidente. La densidad de potencia de la radiación o irradiancia (I) en unidades de W/m^2 que mide el promedio en el tiempo del cuadrado de la amplitud de la onda y estará representado por:

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle \quad (1.5)$$

donde ϵ_0 es la permitibilidad eléctrica y c es la velocidad de la luz, sustituyendo las ecuaciones 1.1 y 1.2 en la ecuación 1.5 obtenemos:

$$I \propto \langle E^2 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \left\langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right) \cdot \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right) \right\rangle \quad (1.6)$$

Que da como resultado:

$$I \propto \left\langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \quad (1.7)$$

Los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación de arriba corresponden a las irradian-

cias individuales de cada una de las ondas, $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle$, $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle$, (donde se ha simplificado eliminando las constantes) por lo tanto:

$$I = I_1 + I_2 + 2I_{12} \quad (1.8)$$

así:

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 \cos \delta \quad (1.9)$$

donde δ es igual a:

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + (\phi_1 + \phi_2) \quad (1.10)$$

El parámetro δ es conocido como la diferencia de fase, mientras que al término I_{12} la interferencia y representa la variación en la irradiancia resultante dependiendo del valor de la diferencia de fase δ .

La diferencia de fase, δ es directamente proporcional a la diferencia de trayectorias ópticas y a la diferencia de fase inicial entre las ondas que se superponen. Por lo que, la diferencia de trayectorias está relacionada con la diferencia de caminos ópticos.

La ecuación 1.9 también se puede escribir de la forma:

$$I_{12} = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 \cos \delta = A_1 A_2 \cos(\theta) \cos(\delta) \quad (1.11)$$

Donde vemos que el término I_{12} es el producto escalar de dos vectores, que representan la

magnitud y dirección de las dos ondas que se superponen, puesto que θ es igual a $\theta = \theta_1 - \theta_2$, que es un ángulo entre los planos de polarización de los vectores A_1 y A_2 (Ver Figura 1.3). Dado que además de la diferencia de trayectorias y la fase inicial de las ondas la magnitud del término de interferencia I_{12} dependerá del ángulo θ de acuerdo con los siguientes casos:

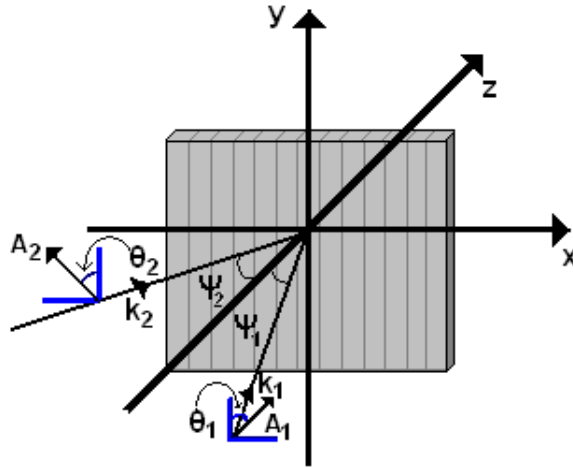


Figura 1.3: Representación esquemática de la superposición de dos ondas luminosas linealmente polarizadas, A_1 y A_2 con ángulos de polarización θ_1 y θ_2 .

1. El ángulo $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 90^0$, esto implica que los planos de vibración de los vectores A_1 y A_2 sean ortogonales [7], es decir:

$$I_{12} = A_1 A_2 \cos(90^0) \cos(\delta) = 0 \quad (1.12)$$

Por lo tanto, debido a que los dos vectores son ortogonales entre sí, el término de interferencia será cero y la intensidad resultante será igual a la suma de las intensidades de las ondas que se superponen, no habiendo interferencia entre ellas.

2. Si $\theta_1 = \theta_2 = 0^0$, equivale a que los planos de vibración de los vectores A_1 y A_2 son paralelos entre sí, esto es:

$$I_{12} = A_1 A_2 \cos(0^0) \cos(\delta) = A_1 A_2 \cos(\delta) \quad (1.13)$$

En este caso el término de interferencia se calcula considerando solamente la diferencia de caminos ópticos entre las ondas que se superponen y la diferencia de fase inicial. Así, los campos eléctricos se consideran como cantidades escalares y la ecuación 1.9 podrá escribirse como:

$$I_{12} = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 \cos \delta = A_1 A_2 \cos(\delta) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad (1.14)$$

por lo tanto:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad (1.15)$$

En este caso la interferencia se verá afectada por las variaciones de fase de las dos ondas.

3. En general para $90^0 \geq \theta \geq 0^0$ se tiene:

$$0 \leq I_{12} \leq A_1 A_2 \cos(\delta) \quad (1.16)$$

En este caso sólo las componentes paralelas de cada onda interfieren, este efecto alterará el contraste de las franjas resultantes debido a que la componente de la onda que no interfiera sólo contribuirá con una iluminación de fondo que se superpone al patrón de interferencia.

1.5. Visibilidad de las Franjas de Interferencia

La calidad de las franjas producidas por un sistema interferométrico puede describirse cuantitativamente usando la visibilidad V que, formulada inicialmente por Michelson, es proporcionada por [7, 10, 11]:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1.17)$$

donde I_{max} e I_{min} son las irradiancias correspondientes al máximo y al mínimo contiguo en el sistema de franjas. La visibilidad es una medida directa del contraste de las franjas puesto que no depende del valor de $I_{max} - I_{min}$, si no de la cantidad de luz de fondo que se observe en el interferograma, para un caso particular de la interferencia de dos frentes de onda planos (linealmente polarizados y sus vectores del campo eléctrico paralelos entre sí) la expresión de la visibilidad para las franjas resultantes, utilizando la ecuación 1.17 tomará la siguiente forma:

$$V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = 2 \frac{\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} \quad (1.18)$$

donde: I_1 , I_2 son las intensidades debidas a cada haz. La visibilidad de las franjas tendrá su valor máximo igual a uno ($V = 1$), es decir cuando el centro de las franjas oscuras tenga intensidad cero, esto sucede cuando $I_1 = I_2$. Ahora si los haces que se superponen para formar al patrón de interferencia tienen una diferencia de intensidades considerable, la visibilidad de las franjas será muy pequeña.

1.6. Diferencia de Caminos Ópticos

Al estudiar un arreglo óptico con el que se observan franjas de interferencia se analiza lo que se denomina la diferencia de trayectorias ópticas entre los haces, que está relacionada con su trayectoria geométrica [7, 12].

La trayectoria geométrica de un rayo de luz representada por la letra r está dada por el producto de velocidad v del rayo que tarda en recorrer esa distancia, es decir:

$$r = vt \tag{1.19}$$

Sin embargo, podemos definir la Longitud de Camino Óptico (LCO) como el producto de la distancia geométrica por el índice de refracción:

$$CO = nr \tag{1.20}$$

De tal manera que si una onda viaja a través de distintos medios, con espesores d_i e índices de refracción n_i diferentes, el LCO total será la suma de todos los $(LCO)_i$ individuales. Este parámetro es importante debido a que al variar el índice de refracción del medio donde se propaga la onda se modificará su velocidad así como también su fase.

Ahora bien, en interferometría uno de los parámetros importantes es la Diferencia de Camino Óptico (DCO) que es debido a los haces que se superponen, puesto que estamos interesados en diferencias de fase absolutas, es posible determinar la localización de los máximos de interferencia y las forma de las franjas, como un ejemplo, la diferencia de camino óptico DCO de dos haces cuyos caminos ópticos son: CO_1 y CO_2 , estará representada de la forma:

$$DCO = DO_1 - DO_2 \tag{1.21}$$

Por lo cual podemos decir que la diferencia de fase δ entre dos haces es directamente proporcional de la forma:

$$\delta = kDCO \quad (1.22)$$

tomando a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo tanto, nuestra ecuación anterior se puede expresar como:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}DCO \quad (1.23)$$

Una vez que hemos aprendido el concepto de diferencia de camino óptico hablaremos de algunos de los interferómetros más comunmente usados que emplean éste principio.

1.7. Interferómetros

Un interferómetro es un dispositivo que logra superponer dos o más haces de luz mediante la manipulación de sus trayectorias de propagación, que pueden ó no provenir de la misma fuente [5, 7, 13]. Los interferómetros se dividen en dos clases: división de frente de onda y por división de amplitud.

1.7.1. Interferómetros de división de frente de onda

Los interferómetros de división de frente de onda, toman al menos dos puntos de un frente de onda que es emitido por una fuente principal, esto es para generar nuevas fuentes de iluminación secundarias. Para ilustrar ésto se aplica el principio de Huygens, el cual establece que cualquier punto sobre el cual llega una perturbación ondulatoria se convierte en una fuente secundaria de ondas. Algunos ejemplos de este tipo de interferómetro son: doble rejilla de Young, espejo doble de Fresnel, bi-prisma de Fresnel, espejo de Loyd, sistema Meslin, etc.

1.7.2. Interferómetros de división de amplitud

Los interferómetros de división de amplitud dividen el frente de onda original en dos partes, mediante un elemento óptico (placa semi-reflejante, cristal birrefringente, difusor, rejillas de difrac-

ción, etc.), las fracciones de luz transmitida y reflejada (desviada, difractada, etc.) son manipuladas con el objetivo de superponerse en algún punto del espacio, entre algunos ejemplos de este tipo de interferómetros se tienen: Michelson, Twyman-Green, Fabry Perot, Mach Zehnder, Sagnac, etc.

1.8. Interferómetro de Michelson

El interferómetro de Michelson es uno de los dispositivos de división de amplitud más conocidos y útiles para la medición de distancias con alta precisión y fue originalmente diseñado para medir la velocidad de la luz [7, 13].

El arreglo experimental de éste interferómetro se muestra en la Figura 1.4. Una fuente de luz emite una onda que es dividida en amplitud por el divisor de haz, así una parte se dirige hacia el espejo $M1$ y otra parte hacia el espejo $M2$, después los dos haces son reflejados y regresan al divisor de haz, la parte del haz proveniente de $M2$ pasa a través del divisor de haz hacia el detector y la parte de haz provenientes de $M1$, es desviado por el divisor de haz hacia el detector. Por último, los haces se unen e interfieren siempre que la diferencia de caminos ópticos no sea mayor a la longitud de coherencia de la fuente luminosa.

Si analizamos la trayectoria de los haces, se induce que uno de ellos pasa por el divisor de haz tres veces y el otro solamente una vez, por esta razón se coloca una placa compensadora en la trayectoria del segundo haz con la finalidad de que los dos haces tengan la misma cantidad de trayectorias en el vidrio.

1.8.1. Desarrollo teórico

Usando el interferómetro de Michelson obtenemos un patrón de franjas, donde se encuentran franjas brillantes y oscuras. Las franjas oscuras representan interferencia destructiva y se expresan de la siguiente manera [7, 8]:

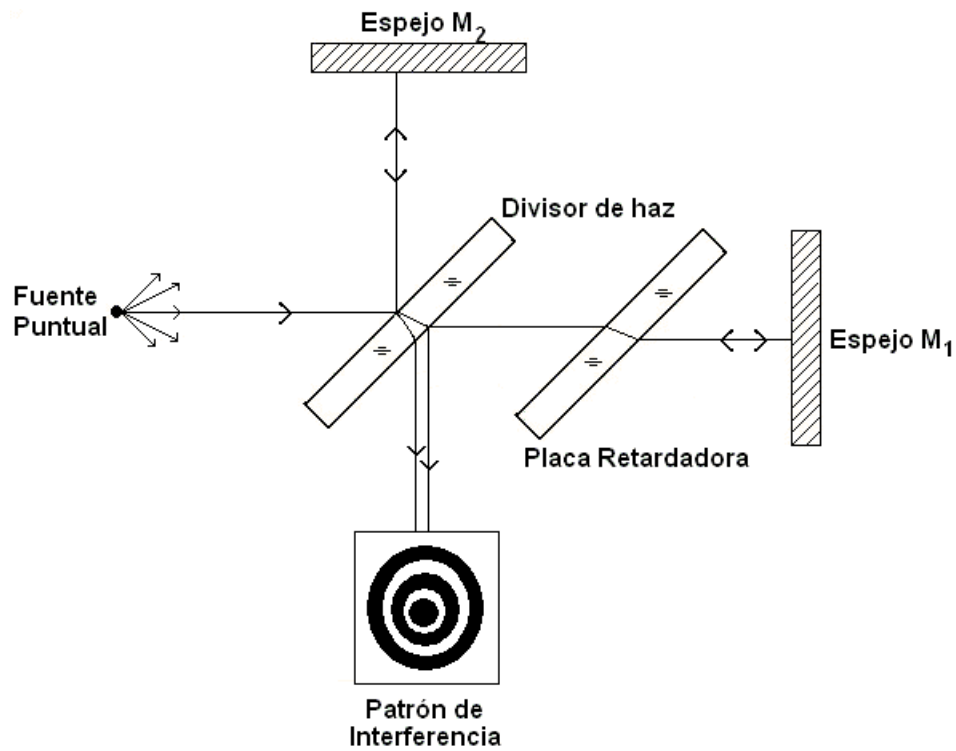


Figura 1.4: Arreglo básico del interferómetro de Michelson.

$$2d \cos(\theta_m) = m\lambda_0 \quad (1.24)$$

Donde $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, d es la distancia entre el espejo M_2 y la imagen del espejo M_1 , θ_m es el radio angular de la m -ésima franja y λ_0 es la longitud de onda de la fuente luminosa.

Debido a que la fuente de luz emite en todas direcciones, satisface de igual forma para cualquier punto sobre la superficie del detector, que esté sobre un círculo centrado en el eje óptico, por lo que, un observador colocado en éste plano observará franjas circulares concéntricas. El patrón de interferencia resultante consistirá en un número de anillos brillantes y oscuros, alternados. Ahora, si el espejo M_1 se desplaza alejándose del punto donde se encuentra, la distancia d crece y de acuerdo con la ecuación 1.24, $\cos(\theta_m)$ aumenta mientras que θ_m decrece. Por lo tanto, los anillos

se comprimen hacia el centro y cada anillo será en consecuencia más ancho, por otro lado, cuando d tienda a cero, en cuyo caso la franja central cubrirá toda la pantalla.

En el caso donde el patrón de interferencia está representado por una franja central oscura para la cual $\theta_m = 0$, la ecuación 1.24 puede representarse por:

$$2d = m_0\lambda_0 \quad (1.25)$$

Por lo tanto es posible conocer la longitud de onda de la fuente de iluminación monocromática y estará dada por:

$$\lambda_0 = \frac{2d}{n} \quad (1.26)$$

Donde n es el número de franjas brillantes u oscuras que pasan a través de un punto fijo del patrón de interferencia.

Otro punto es, ¿Cómo se forman las franjas?, para describir la formación de las franjas se hace referencia al arreglo mostrado en la Figura 1.5 donde los componentes físicos se dibujan como si estuvieran en una línea recta[7]. Aquí M'_1 corresponde a la imagen del espejo M_1 en el divisor de haz y A es la fuente luminosa, la cual ha sido girada para alinearla con O y M_2 . La posiciones de estos elementos en el diagrama dependen de sus distancias relativas respecto a O . Las superficies A_1 y A_2 son las imágenes de la fuente A en los espejos M_1 y M_2 , respectivamente.

Ahora considérese un solo punto S sobre la fuente emitiendo luz en todas direcciones y sigamos el recorrido de uno de los rayos salientes. En realidad, una onda procedente de S se dividirá en O y sus componentes se reflejarán posteriormente en M_1 y M_2 . En nuestro diagrama esquemático, lo representamos reflejando el rayo en M_2 y M'_1 . Para un observador colocado en el detector, los

dos rayos reflejados aparecerán provenientes de los puntos imagen S_1 y S_2 , como puede verse en la Figura 1.5, la diferencia de camino óptico para estos rayos es casi $2d \cos \theta$.

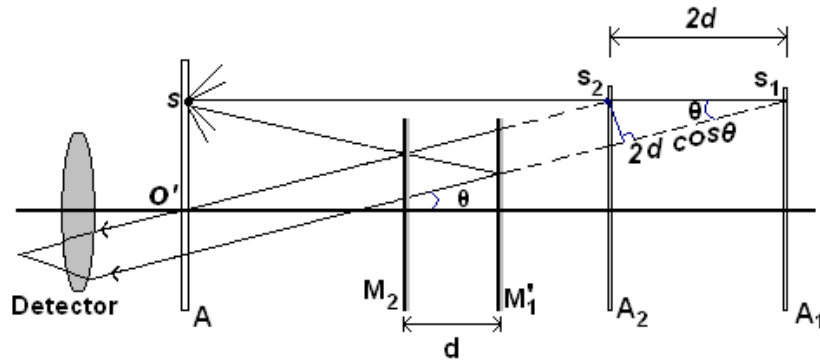


Figura 1.5: Representación del interferómetro Michelson donde se colocó la imagen del espejo M_2 con la finalidad de calcular la diferencia de camino óptico

Así la diferencia de camino óptico es igual a:

$$DCO = 2d \cos(\theta) \quad (1.27)$$

El número dos es debido a que el rayo recorre dos veces la distancia d , de modo que representa una diferencia de fase:

$$\delta = kDCO = 2kd \cos(\theta) \quad (1.28)$$

La posición angular de cualquier anillo, por ejemplo, el anillo p -ésimo, se obtiene combinando las ecuaciones 1.24 y 1.25, para quedar:

$$2d \cos \theta_p = (m_0 - p) \lambda_0 \quad (1.29)$$

Finalmente, se obtiene:

$$2d(1 - \cos \theta_p) = p\lambda_0 \quad (1.30)$$

Puesto que $\theta_m = \theta_p$ son ambos precisamente la mitad del ángulo subtendido sobre el detector por un anillo particular, y dado que $m = m_0 - p$, la ecuación 1.30 equivale a la ecuación 1.24. La nueva forma es algo más conveniente dado que $d = 10\text{cm}$, el sexto anillo oscuro puede especificarse estableciendo que $p = 6$, o en términos del orden del anillo p-ésimo, que $m = 399,994[7]$. Si θ_p es pequeño:

$$\cos(\theta_p) = 1 - \frac{\theta_p^2}{2} \quad (1.31)$$

Por tanto la ecuación 1.30 queda expresada como:

$$\theta_p = \sqrt{\frac{p\lambda_0}{d}} \quad (1.32)$$

Que es el valor del radio angular de la p-ésima franja. Estas franjas resultantes pertenecen al tipo de franjas de igual inclinación o de Haidinger. Por otro lado, cuando los espejos del interferómetro se inclinan uno respecto al otro haciendo un ángulo pequeño, es decir, cuando E_1 y E_2 no son totalmente perpendiculares entre sí, se observan franjas de igual grosor.

Si las imágenes de las fuentes debidas a la reflexión de cada uno de los espejos, forman un ángulo entre sí diferente de cero, las franjas de interferencia resultantes serán rectas y paralelas. Por esta razón, se juntarán más a medida que sea mayor el ángulo entre las imágenes.

1.9. Interferómetro Twman Green

El arreglo básico del interferómetro de Twman Green como se puede observar en la figura 1.6. En este arreglo se utiliza una fuente puntual de luz monocromática, que pasa a través de la lente L_1 para ser colimada cuyo resultado es un frente de onda plano [3, 7, 13], el frente de onda es dividido en amplitud por medio de un divisor. Los dos haces emergentes después de reflejarse en los espejos M_1 y M_2 inciden en el divisor de haz como en el interferómetro de Michelson y parte de estos dos haces incidirán en la lente L_2 , que es enfocada de modo que permitirá que toda la luz que entra por la abertura sea introducida al ojo, donde es posible observar todo el campo de visión. Las franjas de interferencia observadas son denominadas franjas de igual grosor, debido a que todos los haces luminosos inciden en los espejos con el mismo ángulo.

El arreglo básico mostrado en la Figura 1.6 puede modificarse para probar espejos ópticos muy grandes. Además, es necesario señalar que como generalmente se utiliza un láser como fuente luminosa no es necesario compensar las trayectorias ópticas siempre y cuando éstas no rebasen la coherencia del láser utilizado. Otra modificación de este interferómetro es el de reemplazar uno de los espejos por un sistema de lentes o prismas para probar este tipo de componentes.

1.10. Medición e interpretación de los interferogramas

Una vez obtenidos los interferogramas, estos deben ser medidos e interpretados para determinar la forma exacta del frente de onda que los formó con la mayor precisión posible [3, 4, 11]. Para ello, es necesario hacer un análisis de los patrones de franjas, esto se refiere a la completa recuperación de las características originales del interferograma. Así este proceso la única cantidad que se puede medir es la intensidad $I(x, y)$, la cual puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi) + n(x, y) \quad (1.33)$$

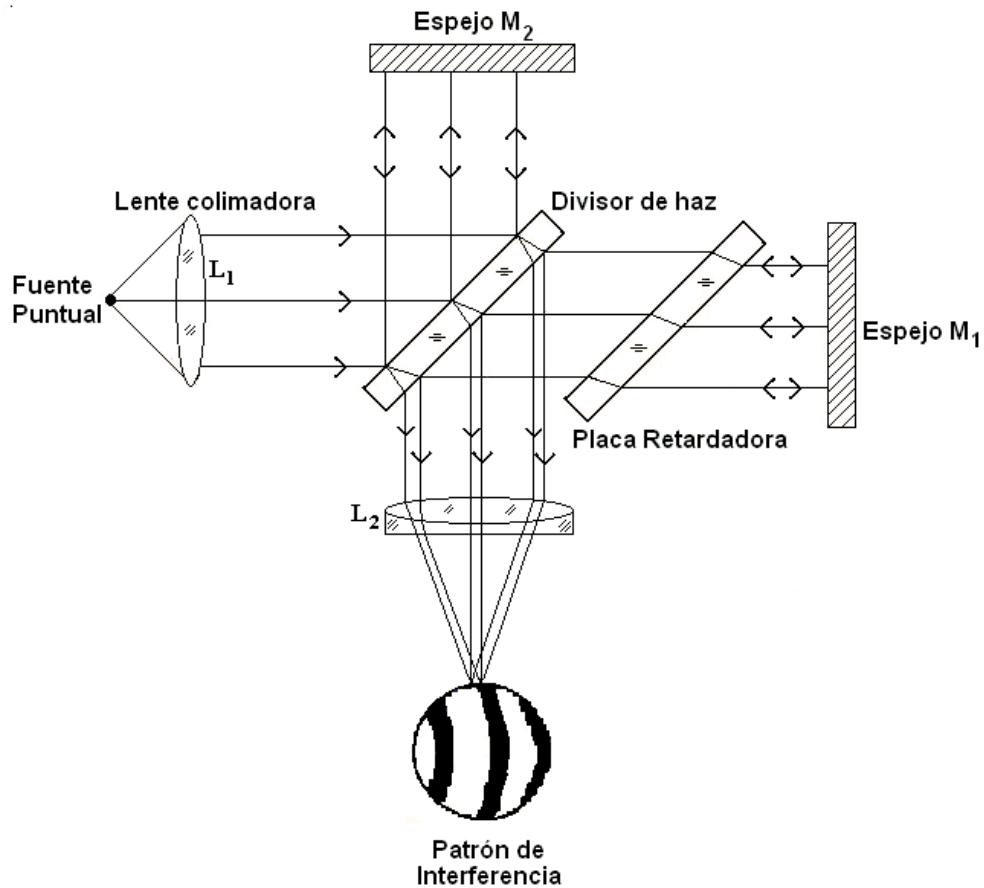


Figura 1.6: Arreglo interferométrico de Twyman Green

Donde $a(x, y)$ es la intensidad de fondo, $b(x, y)$ es la modulación ó contraste, $n(x, y)$ representa ruido de alta frecuencia y ϕ es la fase óptica. Esta función de fase es análoga a la cantidad física medida (forma, desplazamiento, deformación, etc.) que es la variable que se quiere extraer.

A partir de la ecuación 1.33 se puede extraer la fase ϕ , esto es, $I(x, y)$ depende periódicamente de la fase donde presenta problemas adicionales como:

1. Debido a la periodicidad del coseno, su fase solo puede ser determinada en modulo de 2π (ambigüedad de fase 2π).
2. Debido al carácter par de la función coseno $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, el signo de θ no puede en principio ser extraído de una sola medición de $I(x, y)$ sin un conocimiento apriori (ambigüedad

de signo).

3. En todos los casos prácticos algún tipo de ruido $n(x, y)$ es introducido de un modo aditivo y/o multiplicativo.
4. Adicionalmente, el patrón de franjas puede presentar un número de distorsiones que modifican su calidad y que repercuten estos errores en la información de fase.

La forma más sencilla de analizar la fase óptica es mediante la medición de la forma de las franjas, esto se realiza midiendo con el cursor de una tableta gráfica digitalizadora conectada a una computadora. Así la deformación sobre los puntos determinados en los centros de las franjas tendrán un valor de $n\lambda$, donde n es el orden de interferencia y es un número entero, se le puede asignar cualquier número, por que solamente interesan las deformaciones relativas del frente de onda. El orden de interferencia difiere entre una y dos franjas consecutivas. Para hacer una estimación de las deformaciones del frente de onda en una gran densidad de puntos se realiza una interpolación de los resultados obtenidos. Es lógico pensar, que en este procedimiento se supone que el frente de onda no tiene variaciones muy pronunciadas en una región pequeña de la abertura, pero frecuentemente resulta que esto no es cierto.

Ahora, el método anterior descrito funciona bastante bien, pero únicamente si las franjas son relativamente sencillas y abiertas, como se muestra en la Figura 1.7(a). Sin embargo si forman figuras cerradas como elipses o círculos, como se muestra en la Figura 1.7(b), la interpretación y el asignar a cada franja un orden de interferencia n es bastante más complicado.

Otro método es la evaluación cuantitativa auxiliada por computadora, el patrón de franja es registrado por una cámara CCD y almacenado en una memoria de computadora en un formato digital, es decir, la intensidad registrada es digitalizada en un arreglo de $M \times N$ puntos imagen (píxeles) y cuantizados en valores de niveles de gris discretos. Los número M y N fijan un límite superior a la densidad del patrón de franjas registrado.

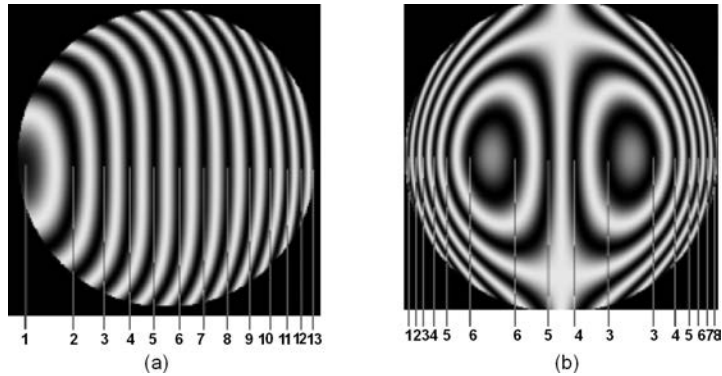


Figura 1.7: (a) Interferograma con franjas de interferencia abiertas (b) Interferograma con franjas de interferencia cerradas ambos muestran su número de orden de interferencia relativo.

El gran avance tecnológico en materia de procesadores ha sido de gran utilidad en la interpretación de la información contenida en un patrón de franjas. Por esta razón los avances en cámaras de video (CCD) y procesamiento de imágenes nos permiten realizar un análisis de patrones de franjas automático mediante algoritmos computacionales, que implica eliminar disturbios optimizando al proceso, esto a su vez ha provocado el resurgimiento de la metrología interferométrica.

Las técnicas de análisis de franjas siguen un proceso que consiste en generar las franjas, capturarlas, almacenarlas y finalmente, esta información pasa a la etapa de análisis mediante algoritmos computacionales los cuales han sido hechos exclusivamente para la demodulación de la fase. Es por ello que en este trabajo se presenta un método novedoso y robusto para la demodulación de la fase óptica que finalmente se compara con las técnicas ya desarrolladas. A continuación presentamos los métodos ya desarrollados para el análisis de franjas.

Bibliografía

- [1] D. Malacara. La metrología Óptica y sus aplicaciones. *Acta Universitaria, Universidad de Guanajuato*, 15-001, 2005.
- [2] Ronchi V. *The nature of light, an historical survey*. William Heinemann, 2nd edition, 1970.
- [3] Z. Malacara D. Malacara, M. Servín. *Interferogram analysis for optical testing*. Brian J.Thompson, 1998.
- [4] K. J. Gasvik. *Optical Metrology*. John Wiley and Sons, LTD, tercera edición, 1988.
- [5] W. H. Steel. *Interferometry*. 2nd edition, 1984.
- [6] M. V. Klein and T. E. Furtak. *Optics*. 2nd edition, 1986.
- [7] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, Reading,MA., 3rd edition, 2000.
- [8] Mc Graw Hill, editor. *Fundamentals of optics*. Jenkis f. a. and white h. e. edition.
- [9] Born M. and Wolf E. *Principles of optics*. Pergamon Press, Oxford, 3rd edition, 1999.
- [10] Discroll and Walter G. *Handbook of optics*. 2nd edition, 1978.
- [11] D. Malacara and B. J. Thompson. *Handbook of optical engineering*. Marcel Dekker, 2001.
- [12] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. MCGraw-Hill, New York., 2nd edition, 1996.
- [13] D. Malacara. *Optical Shop Testing*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1992.

Capítulo 2

MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE FRANJAS

2.1. Resumen

En este capítulo se describen algunos de los principales métodos para el análisis de franjas utilizados para el cálculo de la fase óptica, entre ellos se encuentra el método de interferometría de pasos y el método de la transformada de Fourier. Esto permitirá al lector entender el desarrollo del análisis automático de franjas en años recientes y entrar en nuevas técnicas que aquí se proponen[1, 2].

2.2. Introducción

Existe una gran diversidad de áreas involucradas en el proceso de analizar y cuantificar las propiedades de objetos tridimensionales o de superficies. Una de éstas y quizá la más importante, al menos para el objetivo de este trabajo, es la relacionada con el procesamiento digital de imágenes. Los algoritmos computacionales para el procesamiento digital de imágenes, son una herramienta muy poderosa para la obtención de información específica como es su característica, detalle ó área dentro de una imagen.

Dentro del amplio mundo del procesamiento digital de imágenes, interesa conocer el campo del procesamiento digital de franjas, el cual es utilizado para encontrar la información de la diferencia de fase en un interferograma y por tanto decodificar los datos involucrados para obtener las cantidades físicas que serán medidas, estas son: topografía, profundidad, temperatura, modos de vibración, esfuerzos así como muchas otras. Por ello, el propósito del presente capítulo es introducir y analizar las principales técnicas utilizadas para determinar la fase a partir de un interferograma.

En años recientes, el desarrollo de técnicas robustas y adaptables para el procesamiento de patrones de franjas (tales como demodulación, desenvolvimiento y calibración de fase) han sido una de las líneas más investigadas en el área de metrología óptica, debido a la complejidad de este tipo de problemas, es adecuado utilizar computación flexible y técnicas de regularización, estos métodos son apropiados para resolver problemas mal planteados y complejos.

En metrología óptica es muy común trabajar con patrones de franjas que codifican las cantidades físicas que serán medidas, en estos casos, el patrón de franjas obtenido a partir del interferograma puede ser modelado como:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\omega_x x + \phi(x, y)] \quad (2.1)$$

donde $a(x, y)$ es la iluminación de fondo y está relacionada con la potencia del láser usado en el arreglo experimental, $b(x, y)$ es la amplitud de modulación (como ejemplo, este valor en un sistema de proyección de franjas está relacionado con la reflectancia de la superficie del objeto), $\phi(x, y)$ es un término de fase el cual representa una cantidad física que puede ser medida (esta información de fase algunas veces es llamada frente de onda) y ω_x es la frecuencia angular portadora en la dirección x .

El propósito del análisis de franjas asistido por computadora es detectar automáticamente la variación de la fase óptica $\phi(x, y)$ en dos dimensiones cuando ocurre un cambio espacial en la varia-

ble física que se esta midiendo en el interferograma utilizado, pero no siempre es posible hacer un análisis de franjas completo automáticamente, en estos casos es necesario utilizar algoritmos computacionales para extraer información de la fase óptica requerida. Sin embargo, es posible reducir el requerimiento de la interacción humano-computadora e incrementar la rapidez del procedimiento mediante el uso de algoritmos de análisis de franjas [3].

Así, en las siguientes secciones desglosaremos las principales características de algunos de los métodos de evaluación de fase, como son: el método de Fourier y el método de corrimiento de fase; describiendo sus principales propiedades, ventajas y limitaciones.

2.3. Método de la transformada de Fourier (Takeda).

El método de la transformada de Fourier para el análisis de patrones de franjas fue originalmente propuesto y demostrado por Takeda et. al. (1982), donde se plantea la técnica de la transformada rápida de Fourier para la extracción de información de la fase [2, 4, 5, 6, 7, 8], que a continuación se describe.

Ahora, usando algunas de las técnicas comunes en el procesamiento digital de señales, se introduce una frecuencia espacial portadora conocida f_0 en el argumento del coseno de la Ec. 2.1 y que debe cumplir con el criterio de Nyquist (el medio de registro del mapa de franjas debe tener una resolución tal que sea al menos dos veces la mayor frecuencia contenida en el objeto), obteniendo como resultado la siguiente ecuación:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2f_0x\pi + \phi(x, y)] \quad (2.2)$$

Tomando exponenciales complejas y reordenando la la ecuación anterior, se tiene:

$$I(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{2}b(x, y)\exp[i(\phi + 2xf_0\pi)] + \frac{1}{2}b(x, y)\exp[-i(\phi + wxf_0\pi)] \quad (2.3)$$

donde $i = (-i)^{1/2}$.

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$I(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{2}c(x, y)\exp(2ixf_0\pi) + \frac{1}{2}c^*(x, y)\exp(-2ixf_0\pi) \quad (2.4)$$

donde:

$$c(x, y) = b(x, y)\exp[i\phi(x, y)] \quad (2.5)$$

y $c^*(x, y)$ es el complejo conjugado. La transformada de Fourier de la Ec.2.4 es:

$$I(f_x, f_y) = A(f_x, f_y) + \frac{1}{2}C(f_x - f_0, f_y) + \frac{1}{2}C^*(f_x + f_0, f_y) \quad (2.6)$$

Donde las letras mayúsculas indican el espectro de Fourier, y f_x y f_y son las frecuencias espaciales en la dirección x y y respectivamente. En la Ec.2.6 se usó el teorema de desplazamiento para la transformada de Fourier.

Si las variaciones espaciales de $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x)$ son lentas comparadas con la frecuencia espacial portadora f_0 (criterio de Nyquist), en el espacio de Fourier aparecerán tres términos completamente separados. El primero de estos términos $A(f_x, f_y)$ se localiza en la frecuencia cero y corresponde a la transformada de Fourier de la iluminación de fondo, los otros dos términos $C(f_x - f_0, f_y)$ y $C^*(f_x + f_0, f_y)$ están centrados para valores de frecuencias de $+f_0$ y $-f_0$ los cuales portan la información de fase a medir, ver figura 2.1.

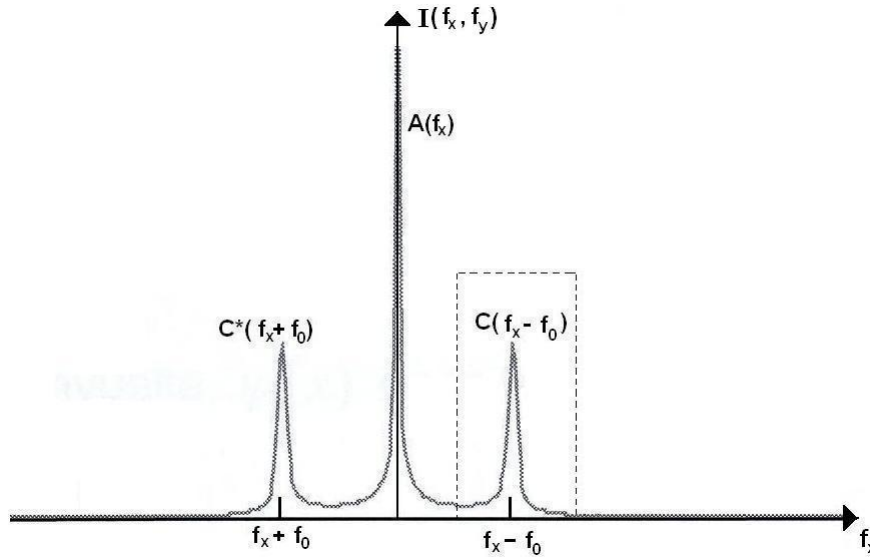


Figura 2.1: Espectro de Fourier de una línea a lo largo del eje f_x del patrón de franjas representado por la Ec. 2.6. La frecuencia portadora debe ser lo suficientemente grande para separar los tres ordenes de difracción, después se aplica un filtro pasa-banda seleccionando así uno de los términos presentes en el espectro de frecuencias para extraer la información

Para obtener la fase es necesario realizar un proceso de filtraje, como se muestra en la figura 2.1, aplicando un filtro pasa-banda. Este filtro permite seleccionar uno de los términos presentes en el espectro de frecuencias para extraer la información, después de un proceso de centrado del lóbulo filtrado y finalmente, al tomar la transformada inversa de Fourier de este último resultado obtendremos $c(x)$.

La fase $\phi(x)$ puede recuperarse a través de:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{c(x, y)\}}{\text{Re}\{c(x, y)\}} \right], \quad (2.7)$$

Donde Im representa la parte imaginaria y Re a la parte real. Debido a que los valores obtenidos en la ecuación 2.7, se encuentran en el intervalo $[-\pi, \pi]$, existen discontinuidades que deben corregirse, de modo que se corrige por medio de un proceso de desenvolvimiento de fase [4] que más adelante se describirá.

El método de Transformada de Fourier ha sido estudiado por varios autores con el fin de cuantificar su efecto sobre los resultados, para una posible reducción de este error[9]. Las principales fuentes de error de este método son:

1. Presencia de ruido[10]
2. Discontinuidades en el patrón[11]
3. La ausencia de franjas en parte de la imagen[7]
4. Los efectos que tiene el muestreo de la señal sobre el espectro de la señal[12]
5. Falta de periodicidad del patrón[12]

El método de la Transformada de Fourier permite la evaluación temporal y espacial de la fase y existen muchas variantes de este método, sin embargo, en esencia todas coinciden en trasladar la señal al dominio de las frecuencias, donde son procesadas las señales y después se vuelve al dominio inicial por una transformación inversa.

2.4. Técnicas de Extracción Temporal de la Fase

Uno de los métodos más exitosos y versátiles para la extracción de la fase es la técnica de Interferometría de Corrimiento de Fase (en inglés, Phase Stepping Interferometry (PSI)). Sin duda, el desarrollo de dispositivos electrónicos como piezoeléctricos y celdas Pockels han contribuido en gran medida a la extensión de esta técnica, ya que estos dispositivos ofrecen una alta velocidad de respuesta y precisión en el corrimiento de la fase[2, 4, 13, 14, 15, 16].

El objetivo principal del método de corrimiento de fase es obtener un mapa de fase a partir de un conjunto de n interferogramas, donde cada interferograma se diferencia en un término de fase α_n , introducido mediante alguno de los dispositivos anteriormente mencionados. La ecuación que rige el proceso es:

$$I_n = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_n) \quad (2.8)$$

donde $\alpha_n = 2\pi/n$, siendo n el número máximo de pasos para obtener la fase. Los algoritmos de corrimiento de fase son clasificados de acuerdo al valor de n , encontrándose algoritmos de tres pasos ($n = 3$), cuatro ($n = 4$), etc.

2.4.1. Interferometria de Corrimiento de Fase (PSI) para Tres Pasos

El número de cambios (o equivalentes de interferogramas) que deben registrarse mientras se cambia la fase que varía, pero como mínimo deben realizarse tres mediciones puesto que existen tres variables desconocidas en la ecuación 2.8: $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$. El caso general puede ser resuelto usando un tamaño de paso α igual [2, 17, 18, 19]. En este caso:

$$I_1 = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) - \alpha] \quad (2.9)$$

$$I_2 = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad (2.10)$$

$$I_3 = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha] \quad (2.11)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicamente para $\phi(x, y)$ se obtiene[16]:

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3} \right) \quad (2.12)$$

Debido a la función \tan^{-1} la fase $\phi(x, y)$ toma valores en el rango de $[-\pi, \pi]$. En otras palabras, por lo que la fase tendrá discontinuidades de 2π . Por lo que se requiere un proceso para eliminar estas discontinuidades y obtener así una fase suave, a este proceso se le llama Desenvolvimiento. Sin ruido el proceso de desenvolvimiento es un asunto trivial puesto que se le adiciona o sustrae un factor de 2π a cada una de las discontinuidades que se encuentran en la fase, como se muestra en

la figura 2.2. Desafortunadamente en metrología óptica las mediciones son ruidosas y este método de desenvolvimiento falla, por lo tanto algoritmos de desenvolvimiento mas complejos pueden ser usados. El desenvolvimiento de fase se discutirá en la sección 2.6

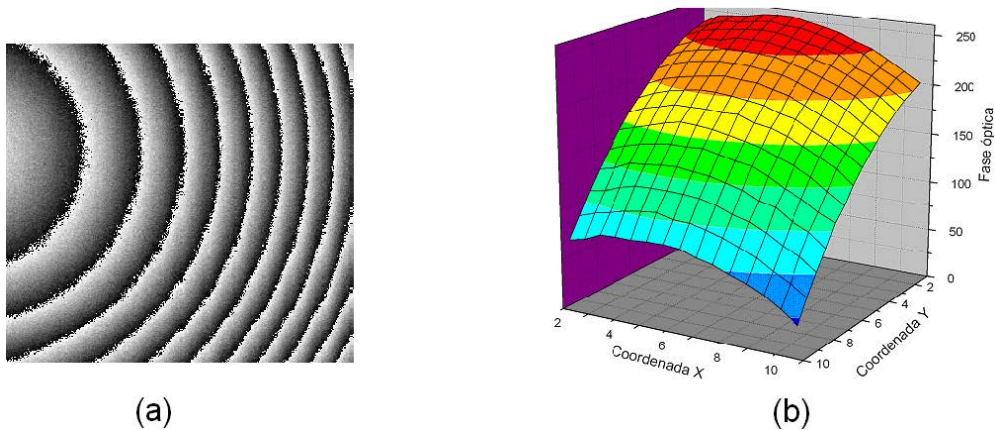


Figura 2.2: (a) Gráfica de una fase envuelta y (b) Gráfica que muestra la misma fase de la gráfica del lado izquierdo, pero desenvuelta, hecho mediante un proceso de desenvolvimiento en dos dimensiones y sin ruido. El proceso de desenvolvimiento en este caso simplemente requirió de la adición o sustracción de un factor de 2π para cada una de las discontinuidades encontradas en la fase.

En la siguiente tabla (Ver cuadro 2.1), se muestra algunos de los algoritmos más utilizados para la extracción de la fase óptica $\phi(x, y)$ para diferentes pasos. Debido a que la cantidad de algoritmos es muy extensa recomendamos al lector interesado consultar las siguientes citas [2, 3, 4, 17, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

El método de corrimiento de fase tiene la ventaja de la exactitud en el cálculo de la fase con respecto a las técnicas de Fourier. Sin embargo, es necesario conocer con bastante precisión el intervalo de fase entre los interferogramas medidos, puesto que esta situación nos puede acarrear errores de sintonía [23] en el cálculo de la fase óptica.

2.4.2. Interferometría de Corrimiento de Fase (PSI) para “ N” Pasos

El presente método nace de la necesidad de obtener una mayor precisión en la información de la fase óptica que se obtiene al analizar un patrón de franjas y de que los algoritmos tradicionales

Cálculo de la Fase	NP	α (rad)
$\tan[\phi(x, y)] = \frac{I_2}{I_1}$	2	$\frac{-\pi}{2}$
$\tan[\phi(x, y)] = -\sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{I_1 - 2I_2 + I_3}$	3	$\frac{2\pi}{3}$
$\tan[\phi(x, y)] = -\frac{I_1 + I_2}{I_2 - I_3}$	3	$\frac{\pi}{2}$
$\tan[\phi(x, y)] = -\frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3}$	4	$\frac{\pi}{2}$
$\tan[\phi(x, y)] = -\frac{I_2 - I_4}{\frac{1}{2}I_1 - I_3 + \frac{1}{2}I_5}$	5	$\frac{\pi}{2}$
$\tan[\phi(x, y)] = -\frac{3I_2 - 3I_3 - I_4 + I_5}{I_1 - I_2 - 3I_3 + 3I_4}$	5	$\frac{\pi}{2}$

Cuadro 2.1: Algoritmos típicos para la obtencion de la fase óptica. Nomenclatura de la tabla: NP=Número de pasos, α = desplazamiento de fase.

de desplazamiento de la fase de cuatro o cinco pasos son menos robustos a una variación en la calibración del desplazamiento lineal de la fase[20, 21, 22, 23, 24] esto es, que se generan al tomar imágenes consecutivas que a la vez se convierten en una limitante cuando el nivel de ruido incrementa.

Por lo tanto, al promediar un número mayor de imágenes, se asegura que el nivel de ruido se promedia, de modo que se logra una disminución en el ruido de fondo y un mejor contraste en el patrón de franjas. Así, la fase se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\tan(\phi) = \frac{\frac{I(0) - I(N)}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{N}\right) - \sum_{n=1}^{N-1} I(n) \sin\left(\frac{2n\pi}{N}\right)}{\frac{I(0) - I(N)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} I(n) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)} \quad (2.13)$$

El término $I(0)$, representa la imagen de referencia a capturar, N es el número total de imágenes que representa la cantidad de pasos ó imágenes capturadas en un cambio de fase de 2π . Para

obtener un mejor desempeño, aumentamos el número de pasos en nuestro algoritmo, como se puede observar en la figura 2.3(a) para un tres pasos la fase óptica tiene mucho ruido de fondo, mientras que si observamos la figura 2.3(b) se utilizó un algoritmo para N pasos, donde obtuvimos una fase mejorada y con menos ruido.

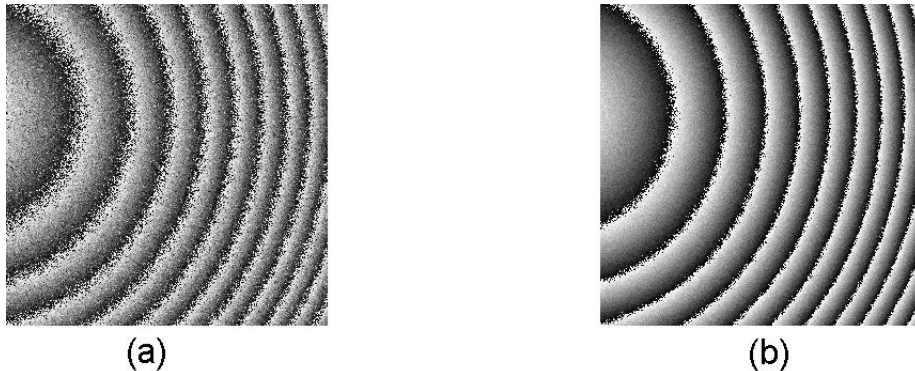


Figura 2.3: (a) Fase envuelta utilizando el método de tres pasos, (b) fase envuelta obtenida mediante el algoritmo de " N "pasos, como caso particular de 8 pasos, podemos ver entre las imagenes la diferencia en el ruido de fondo.

2.5. Proceso de filtrado en el patrón de franjas

Para la evaluación cuantitativa de las mediciones realizadas por alguna técnica interferométrica, el patrón de franjas debe ser procesado. Debido a la fuente de iluminación en este tipo de experimentos que involucran interferencia de al menos 2 frentes de onda, como en el caso de un láser, este elemento será un factor importante para incrementar el ruido en el sistema, por esta razón habrá pérdidas de información y/o incremento en la incertidumbre de los datos obtenidos. Por lo tanto, los filtros digitales en el análisis patrones de franjas se convierten en una herramienta indispensable para la correcta interpretación de la información.

Un filtro es un sistema que elimina o selecciona ciertas frecuencias de un espectro eléctrico, acústico, óptico o mecánico. Existen en la literatura diversos métodos de filtraje de imágenes, muchos de ellos se basan en un kernel, máscara ó ventana de filtrado[25, 26, 27]. En este trabajo

desarrollamos un filtro de regularización llamado "filtro de regularización robusto", el cual como su nombre lo dice es robusto a errores de desentonamiento y ruido blanco.

Para obtener resultados satisfactorios, a partir de un patrón de franjas, el procesamiento puede involucrar además de las técnicas de análisis de fase, una etapa de filtraje y una para desenvolver ó decodificar la información contenida en la fase. Si el algoritmo de filtrado es lo suficientemente eficiente, esto es, para lograr una imagen suave del patrón de franjas, donde el ruido de moteado por el haz esté lo más atenuado posible, no requiere de implementar alguna otra técnica para leer los datos propios de la fase. También es posible no ahondar en el filtraje y optimizar los algoritmos de desenvolvimiento de fase para obtener la misma calidad de datos[30]. Es por ello que a continuación analizamos el tema de desenvolvimiento de fase.

2.6. Método de desenvolvimiento temporal de la fase

Para concluir el este capítulo, se presentará uno de los algoritmos que se utilizan para desenvolver la fase óptica (unwrapping, en ingles). El objetivo de los algoritmos de desenvolvimiento de fase, es reconstruir la información de la fase del patrón de franjas sin la presencia de las discontinuidades ocasionadas por el modulo de 2π presente en la fase envuelta; estos algoritmos se basan en la suposición de que los cambios en la fase son continuos en toda la imagen[2, 17]. Por tanto, las discontinuidades en la fase se consideran como un cambio.

Uno de los algoritmo más usados para el desenvolvimiento de la fase es el llamado seguidor de fase regularizado (Regularized phase tracking unwrapper), de modo que requiere de una función llamada de mérito ó costo, que utiliza al menos dos términos, los cuales contribuyen a restringir la búsqueda del campo que se desea desenvolver. Estos términos son:

1. La fidelidad entre la función estimada y las observaciones realizadas.
2. El conocimiento a priori acerca del comportamiento espacial de la fase desenvuelta.

Para este algoritmo, se establece que la fase del patrón de franjas $\pi(x, y)$ a predecir, debe minimizar la siguiente función de mérito en cada punto (x, y) que contiene la fase válida

$$U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y) = \sum_{(\epsilon, \eta) \in (N_{x,y} \cap L)} \left(V[\phi_w(\epsilon, \eta)] - \phi_e(x, y, \epsilon, \eta) \right) + \lambda [\phi_w(\epsilon, \eta) - \phi_e(x, y, \epsilon, \eta)]^2 \sigma(\epsilon, \eta) \quad (2.14)$$

donde ϕ_e es:

$$\phi_e(x, y, \epsilon, \eta) = \phi(x, y) + \omega_x(x, y)(y - \eta) \quad (2.15)$$

Las funciones $\phi_w(x, y)$ y $\phi(x, y)$ corresponden a la fase envuelta y a la desenvuelta que se desea obtener, estimadas en el píxel (x, y) . L es el dominio bidimensional donde son válidos los datos de la fase envuelta; $N_{x,y}$ corresponde a los vecinos alrededor de la coordenada (x, y) . La función $\sigma(\epsilon, \eta)$ es un campo indicador el cual es igual a 1 si el lugar correspondiente a la coordenada (ϵ, η) ha sido desenvuelto y 0 de otra forma. Ahora, de la ecuación 2.15 aproximando el comportamiento de la fase desenvuelta mediante un plano cuyos parámetros $\phi(x, y)$, $\omega_x(x, y)$ y $\omega_y(x, y)$ son determinados de tal forma que la función de mérito $U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y)$ en la posición (x, y) en L , es minimizada.

El primer término del lado derecho de la ecuación 2.14, intenta mantener el modelo de la fase local lo más cercano al mapa de fase obtenida mediante la implementación de mínimos cuadrados con sus vecinos $N_{x,y}$ y el segundo término contribuirá una pequeña cantidad al valor de la función de mérito $U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y)$ sólo para las funciones de fase desenvueltas suavemente. También, el plano local de la fase esta adaptado simultáneamente al dato observado en el espacio envuelto, usando el operador de envolvimiento $V(x)$ y la fase desenvuelta continua especificada por $\phi(x, y)$. Para ilustrar y tener conocimiento del método, se cita la bibliografía correspondiente [28].

Bibliografía

- [1] F. J. Cuevas, M. Servin, Ramón Rodríguez-Vera, and J. H. Sossa-Azuela. Soft computing algorithms for phase detection from fringe pattern. *Recent Res. Devel. Optics*, 3:21–39, 2003.
- [2] Z. Malacara D. Malacara, M. Servín. *Interferogram analysis for optical testing*. Brian J.Thompson, 1998.
- [3] M. Servín. *Advanced techniques for fringe analysis*. PhD thesis, Centro de Investigaciones en Óptica.
- [4] D. W. Robinson and G. T. Reid. Interferogram analysis: Digital fringe pattern measurement techniques. *Institute of Physics, Bristol, UK*, 1993.
- [5] Mitsuo Takeda, Hideki Ina, and Seiji Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1):156–160, 1982.
- [6] Jr. W. W. Macy. Two-dimensional fringe-pattern analysis. *App. Opt.*, 22(23):3898–3901, 1983.
- [7] Claude Roddier and François Roddier. Interferogram analysis using fourier transform techniques. *Appl. Opt.*, 26(9):1668–1673, 1987.
- [8] T. Kreis and W. P. O. Juptner. Fourier-transform evaluation of interference pattern the role of filtering in the spatial frequency domain. *Proc. SPIE*, 1162:116–25, 1989.
- [9] D. Robinson and G. T. Reid. *The Fourier Transform and its Applications*. Institute of Physics, 1993.

- [10] R. J. Green, J. G. Walker, and D. W. Robinson. Investigation of the fourier-transform method of fringe pattern analysis. *Optics and Lasers in Engineering*, 8:29–44, 1988.
- [11] R. W. T. Preater and R. Swain. Fourier transform fringes analysis of electronic speckle pattern interferometry fringes from high-speed rotating components. *Opt. Eng.*, 33(4):1271–1279, 1994.
- [12] K. A. Nugent. Interferogram analysis using an accurate fully automatic algorithm. *Appl. Opt.*, 24(18):3101–3105, 1985.
- [13] H. J. Bruning. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surface and lenses. *Appl. Opt.*, 13:2693–2703, 1974.
- [14] D. Malacara. *Optical Shop Testing*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1992.
- [15] M. Kujawska and J. Wójciak. Spatial phase-shifting techniques of fringe pattern analysis in photomechanics. *Proc. SPIE*, 1554B:503–513, 1991a.
- [16] M. Kujawska and J. Wójciak. Spatial-carrier phase shifting technique of fringe pattern analysis”. *Proc. SPIE*, 1508:61–67, 1991b.
- [17] D. Malacara and B. J. Thompson. *Handbook of optical engineering*. Marcel Dekker, 2001.
- [18] K. Creath. Phase-measurement interferometry techniques. *Prog. Opt. Eng.*, 26:349–393, 1988.
- [19] K. Creath. Comparison of phase-measurement algorithms. *Proc. SPIE*, 680:19–28, 1986.
- [20] J. Schwider, R. Burow, K. E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel. Digital wave front measuring interferometry: Some systematic error sources. *Appl. Opt.*, 22:3421–3434, 1983.
- [21] R. Martínez Celorio. *Técnicas híbridas espacio-temporales en interferometría de moteado para la detección de fenómenos continuos*. Cap. 3, Centro de Investigaciones en Óptica, 2001.
- [22] P. Hariharan, B. F. Areb, and T. Eyui. Digital phase-shifting interferometry: A simple error-compensating phase calculation algorithm. *Appl. Opt.*, 26:3899, 1987.
- [23] John R. Tyrer F. Mendoza, S. David Kerr. Interferometric fringe analysis using a simple step technique. *Appl. Opt.*, 27(21):4362–4364, 1988.

- [24] R. Cordero, J. Molimard, F. Labbé, and A. Martínez. Strain maps obtained by phase-shifting interferometry: An uncertainty analysis. *Opt. Com.*, 281:2195–2206, 2008.
- [25] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*. John Wiley and Sons, 1978.
- [26] G. Pajares and J. M. de la Cruz. *Visión por Computador*. Alfaomega, 2002.
- [27] Rafael C. González and Richard E. Woods. *Tratamiento Digital de Imagenes*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [28] M. Servín, J. Marroquin, D. Malacara, and F. Cuevas. Phase unwrapping with a regularized phase-tracking system. *OSA*, 37(10):1917–1923, 1998.

Capítulo 3

FILTROS DE CONVOLUCIÓN Y DE REGULARIZACIÓN

3.1. Resumen

En este capítulo se presenta una descripción de los filtros de convolución y regularización más usados en el área de procesamiento digital de imágenes, los cuales sirven para disminuir el ruido y obtener una mayor precisión en el cálculo de la fase óptica.

3.2. Introducción

Todos los interferogramas obtenidos experimentalmente contienen algún tipo de ruido esto es, debido a factores externos y al dispositivo de captura de video digital. Generalmente los patrones de franjas contienen principalmente una señal de baja frecuencia junto con ruido blanco degradado (multiplicativo o aditivo). De manera que aplicando un filtro pasa bajas (suavizante) a un interferograma éste puede remover la mayor parte de este ruido, haciendo que el proceso de demodulación sea más confiable. Los filtros que revisaremos en éste capítulo son: los filtros de convolución y los filtros de regularización pasa bajas.

3.3. Filtros Suavizantes

Los filtros suavizantes se emplean para hacer que la imagen aparezca algo borrosa, ésta borrosidad ayuda a reducir el ruido que tienen las imágenes, para ello pueden ser usados los filtros lineales o no lineales. Algunos de estos filtros son los de convolución y de regularización que a continuación presentamos.

3.4. Filtros de Convolución

El filtrado de imágenes consiste, que para cada imagen bidimensional se tiene una matriz de filtrado 2D ó también llamado Kernel de convolución[1, 2, 3, 4]. De manera que, para determinar el nuevo valor de cada píxel en la imagen a filtrar se toma el valor de la suma de los productos. Este producto es el valor del color del píxel actual ó del vecino de éste, por el valor correspondiente a la matriz de filtrado. El centro de la matriz de filtrado tiene que ser multiplicada por el píxel actual y los otros elementos de la matriz de filtrado con los píxeles vecinos correspondientes.

Esta operación donde se realiza la suma de los productos de los elementos de dos funciones (imagen a filtrar y kernel) también nos permite realizar un desplazamiento de una de las dos funciones sobre cada elemento de la otra función (sin importar cual de las dos se mueva), esto es llamado convolución o correlación. Debido a que se trabaja con imágenes digitales el teorema de convolución puede expresarse como:

$$f_0(x, y) = f * h = \sum_m \sum_n f(m, n)h(x - m, y - n)dm dn \quad (3.1)$$

donde $f_0(x, y)$ es la imagen a filtrar y h es el kernel de convolución.

A continuación presentamos las principales características de los filtros de convolución:

1. El tamaño de la matriz debe ser impar, por lo que tiene un centro, por ejemplo 3x3, 5x5 y 7x7.

2. Si se requiere que la imagen resultante tenga el mismo brillo original, por tanto la suma de todos los elementos del filtro deben ser igual a 1.
3. Si la suma de todos los elementos es mayor que 1, el resultado será una imagen más brillante, y si es menor que 1, entonces será una imagen más oscura.
4. Si la suma es igual a 0, la imagen resultante será muy opaca, más no necesariamente completamente negra.

A continuación presentamos 3 distintos filtros de convolución, usando tres kernels diferentes: Gaussiana, ventana promedio y la derivada de una Gaussiana.

3.4.1. Ventana de Convolución Promedio

La ventana de convolución promedio también es conocida como filtrado espacial de paso baja, éste es uno de los filtros más usados en el análisis de franjas[2, 3, 4]. Así la respuesta al impulso digital de este filtro puede ser representada como:

$$h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

De modo que la respuesta en frecuencia de esta matriz de convolución esta dada por:

$$H(\omega_x, \omega_y) = (1/9)[1 + 2 \cos \omega_x + 2 \cos \omega_y + 2 \cos \sqrt{2}(\omega_x + \omega_y) + 2 \cos \sqrt{2}(\omega_x - \omega_y)] \quad (3.3)$$

donde ω_x y ω_y son las frecuencias angular en la dirección x y y respectivamente. Este filtro de convolución puede ser usado muchas veces para disminuir la frecuencia pasabanda, de ahí que cuando se aplica un filtro de convolución muchas veces éste se transforma a un filtro de frecuencia pasa baja[1]. La respuesta frecuencial de una serie idéntica de filtros pasa bajas aproximará a una respuesta de forma gaussiana, como se muestra en la figura 3.1 donde se observa que tan rápido

cambia la forma de la respuesta frecuencial para un filtro promedio de 3x3 convolucionada por si misma 1,2 y 3 veces.

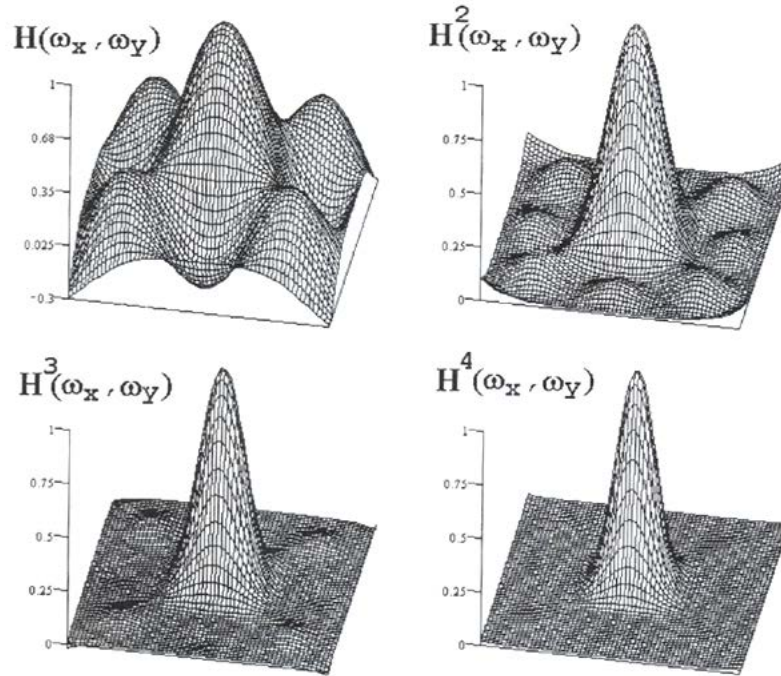


Figura 3.1: Respuesta frecuencial de una ventana de 3x3, donde el número de convoluciones se incrementa y su respuesta frecuencial tiende a la forma de una Gaussiana

Como ejemplo se ocupo este filtro de convolución promedio sobre una misma imagen 40 veces. En la figura 3.2(b) podemos observar que la imagen se difumina y no tiene errores en los bordes.

3.4.2. Filtro de Convolución Gaussiano

El filtro de convolución Gaussiano utiliza un kernel Gaussiano cuya función es representada de la siguiente forma[2, 3]:

$$f(x) = A \exp \left\{ \frac{-((x - b)^2 + (y - c)^2)}{\sigma^2} \right\} \quad (3.4)$$

donde A , b , c y σ son constantes reales ($a > 0$). El parámetro A es la altura de la campana centrada en el punto b y c en la dirección x y y respectivamente. La gráfica de la función es simétrica

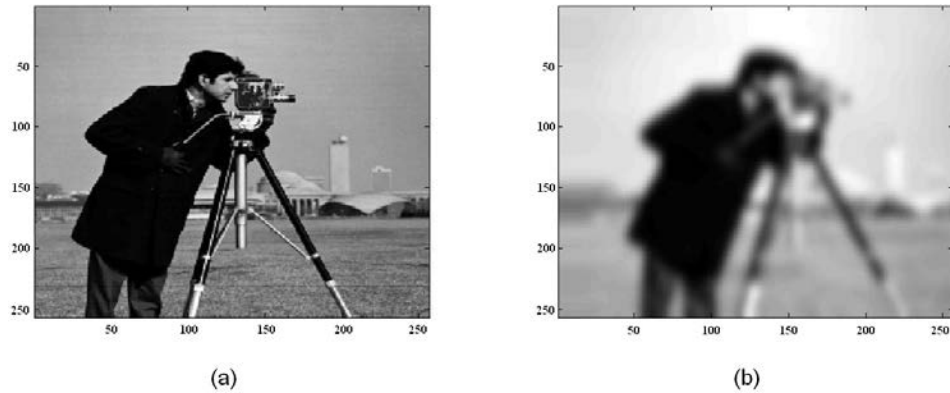


Figura 3.2: (a) Imágen original, (b) Imágen que resulta al aplicarle un filtro de ventana promedio 40 veces consecutivas, observando un efecto de suavizado y sin errores en los bordes

con forma de campana, conocida como campana de Gauss.

Aplicando este filtro de convolución Gaussiana a una imágen, para tres valores diferentes de σ , obtenemos diferentes tipos de suavizado, esto lo podemos observar en cada una de las imagenes filtradas de la figura 3.3.

De ahí que en las imagenes se puede ver que conforme se aumenta el valor de σ la imágen se suaviza más y aumentan los errores del borde, de manera que en estas imagenes podemos observar que al aumentar el valor de σ , la imágen original al aplicarle este filtro se suaviza más y se incrementa el error en los bordes, también hay un obscurecimiento de las imagenes.

3.4.3. Filtros Diferenciales

Los filtros diferenciales, se basan en la derivación o diferenciación. La diferenciación promedia los valores de los píxeles de una región, lo cual tiende a difuminar o suavizar los detalles y bordes de la imagen, por lo que la derivación aumenta la nitidez de la imagen y resalta los bordes, por ello su principal utilidad es para la detección de bordes. [2, 3]. El método más común de diferenciación en las aplicaciones de procesamiento de imagenes, es el gradiente. Para una función $f(x, y)$, el gradiente de f en el punto de coordenadas (x, y) se define como el vector:

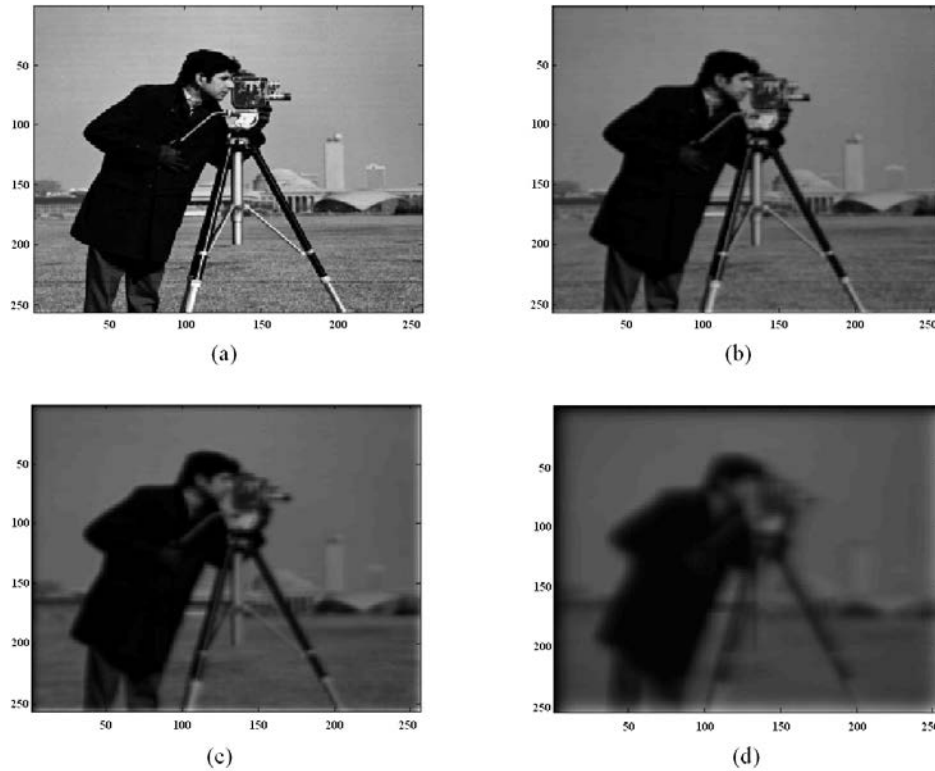


Figura 3.3: (a) Imagen original, (b) Imagen filtrada con un filtro Gaussiano con una $\sigma = 2$, (c) $\sigma = 4$ y (d) $\sigma = 10$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Y su módulo es:

$$\nabla f(x, y) = \text{mag}(\nabla f) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

Éste módulo es la base de varias aproximaciones a la diferenciación de la imagen. Para ilustrar consideremos la región de la imagen que se muestra en la figura 3.4(a), a la cual se le aplica un filtro diferencial (donde el kernel es la derivada de la Gaussiana definida en la sección anterior). Por lo tanto, mostramos los resultados obtenidos al aplicar este filtro.

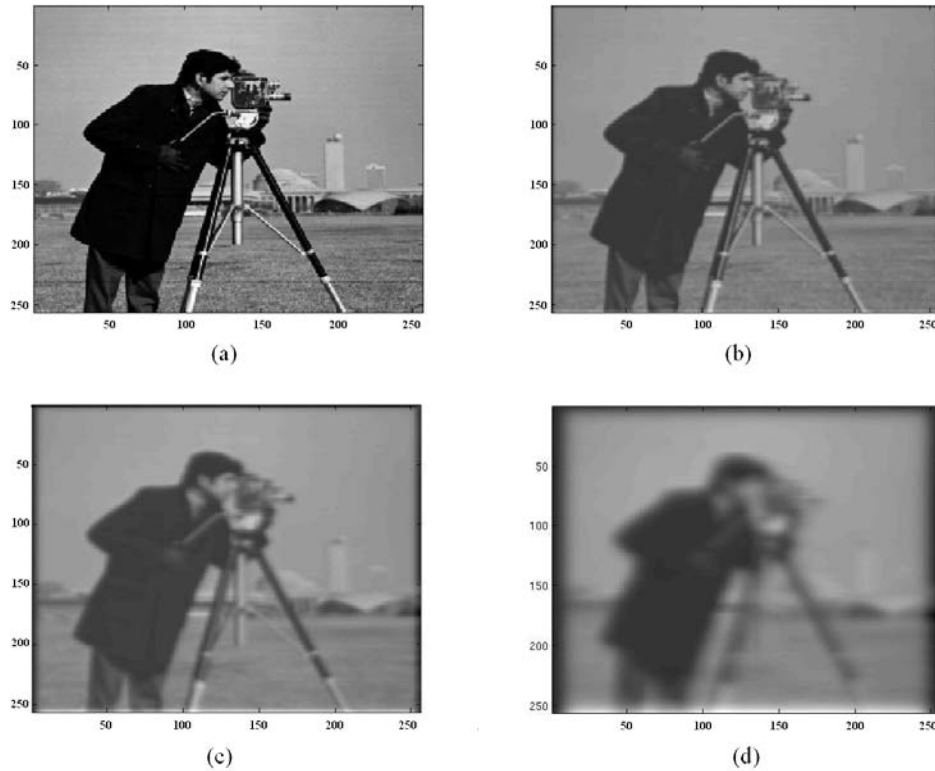


Figura 3.4: (a) Se muestra la imagen original del Fotografo, (b) muestra el resultado de aplicar el filtro diferencial a la imagen original en la direcci3n x con $\sigma = 2$, (c) $\sigma = 4$ y por 3ltimo (d) con $\sigma = 10$.

En la figura 3.4(a) se muestra la imagen original del fotografo, en la figura3.4(b) se muestra el resultado de aplicar en filtro diferencial en la direcci3n x a la imagen original con $\sigma = 2$, donde podemos ver que se obtuvo una imagen suavizada y un pequeo error en los bordes, por 3ltimo podemos observar que en las figuras 3.4(c) y (d)aumenta el suavizado y el error en los bordes en la imagen conforme aumentamos el valor de sigma.

3.5. M3todos de Regularizaci3n

La principal desventaja de los filtros de convoluci3n como una aplicaci3n para el procesamiento de patrones de franjas, es que tienen un efecto indeseable en los bordes de los interferogramas. Por lo tanto, la distorsi3n aumenta debido a las fronteras del patron de franjas, as3, los filtros de convoluci3n mezclan la iluminaci3n de fondo con los bordes del patr3n de franjas, elevando el

error de estimación de la fase en esa zona. Ésta indeseable distorsión de borde puede ser importante puesto que algunas personas reducen el área del interferograma para evitar estos indeseables pixeles cerca del borde, también, los filtros de convolución no pueden preservar las variaciones del nivel de gris rápidamente mientras remueve substancialmente una cantidad de ruido. Por estas razones, es más conveniente formular el problema de suavizamiento mediante el siguiente método de filtro clásico de regularización.

3.5.1. Método clásico de regularización

El problema de filtrado puede ser definido como [5]: encontrar una función de suavizado $f(x, y)$, donde x y y son las coordenadas de un punto definidas en un campo bidimensional L , dado por las observaciones $g(x, y)$ que puede ser modeladas mediante la siguiente expresión:

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (3.7)$$

Donde $n(x, y)$ es un campo de ruido (por ejemplo el ruido blanco Gaussiano). Los problemas de filtrado pueden ser vistos como un problema de optimización en el cual uno tiene un compromiso entre obtener un campo filtrado suavizado $f(x, y)$, mientras permanece una buena fidelidad de los datos de observación $g(x, y)$. En el dominio continuo, la forma teórica común para el problema del suavizado, puede ser establecida como un campo $f(x, y)$ que minimiza la siguiente función de energía o costo:

$$U[f(x, y)] = \int \int [f(x, y) - g(x, y)]^2 + \lambda \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \quad (3.8)$$

Como se muestra en la ecuación 3.8, el primer término del lado derecho, es una medida de la fidelidad entre el campo suavizado $f(x, y)$ y los datos observados $g(x, y)$ en un sentido de mínimos cuadrados, el segundo término (el regularizador) penaliza la salida a aquel píxel del campo filtrado $f(x, y)$ que no este suavizado. El término de regularización de primer orden es también conocido como membrana regularizadora, esto debido a que la función de costo es minimizada respecto a la energía mecánica de la membrana bidimensional $f(x, y)$ adjuntada, mediante resortes lineales a

las observaciones $g(x, y)$. El parámetro λ mide la rigidez del modelo de la membrana, así un valor grande para λ permitirá un campo mejor filtrado.

También se puede suavizar el campo $f(x, y)$ usando ordenes de regularización altos, tal como, el regularizador de segundo orden o también llamado placa delgada. En el dominio continuo, el funcional de costo se describe como:

$$U[f(x, y)] = \int \int \frac{1}{\lambda} [f(x, y) - g(x, y)]^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.9)$$

En este caso el campo suavizado $f(x, y)$ corresponde a la altura de una placa metálica delgada adjunta a las observaciones $g(x, y)$ mediante resortes lineales, nuevamente el parámetro λ mide la rigidez de la placa delgada modelada ó a la soldadura de los resortes lineales conectados de la placa delgada (campo filtrado) a los datos observados.

Para optimizar el funcional de costo mostrado arriba mediante un algoritmo, es necesario primero discretizar el funcional de costo. Sin embargo, las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son ahora definidas en el nodo del vertice regular L , entonces la integral se convierte en la suma sobre el dominio de nuestro interés, por ejemplo:

$$U[f(x, y)] = \sum \sum [f(x, y) - g(x, y)]^2 + \lambda R_1[f(x, y)] \quad (3.10)$$

donde S es el subconjunto de L y los datos de observación son disponibles. La versión discreta del regularizador de primer orden $R_1[f(x, y)]$ puede ser aproximado a:

$$R_1[f(x, y)] = [f(x, y) - f(x - 1, y)]^2 + [f(x, y) - f(x, y - 1)]^2 \quad (3.11)$$

y el regularizador de segundo orden $R_2[f(x, y)]$ aproximado a:

$$\begin{aligned}
R_2[f(x, y)] &= [f(x+1, y) - 2f(x, y)]^2 + [f(x-1, y)]^2 + [f(x, y+1) - 2f(x, y)]^2 + [f(x, y-1)]^2 \\
&+ [f(x+1, y+1) - f(x-1, y-1)]^2 + [f(x-1, y+1) - f(x+1, y-1)]^2 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Considerando unicamente los primeros dos términos del regularizador de segundo orden uno puede reducir significativamente la carga computacional del proceso de filtrado, mientras preserva un comportamiento parecido al de una placa delgada.

Una forma simple para optimizar la función de costo discreta declarada en esta sección es por medio de un gradiente descendiente, por ejemplo.

$$f^{k+1}(x, y) = f^k(x, y) - \eta \frac{\partial U[f(x, y)]}{\partial f(x, y)} \quad (3.13)$$

donde k es el número de iteración y $\eta \approx 0,1$ es el tamaño de paso del gradiente buscado. A pesar de que ésta es una técnica de optimización simple también es un procedimiento lento especialmente para ordenes de regularización altos. Uno puede conjugar métodos de gradientes para acelerar el proceso de optimización.

Finalmente uno puede considerar que los filtros de regularización son más robustos que los filtros de convolución por las siguientes razones:

1. A diferencia de los filtros de convolución, en los filtros de regularización los datos que se encuentran fuera del área de S no afectan el proceso del filtrado; por ejemplo, los efectos de borde en los filtros de regularización en la frontera de S son minimizados, esto es importante especialmente cuando se trabaja con regiones que tienen formas irregulares.
2. Estos filtros de regularización toleran observaciones faltantes debido a la capacidad de interpolar sobre regiones de datos faltantes con un buen comportamiento. El comportamiento de interpolación de los filtros es dado mediante de la forma de los términos de regularización.

3. Mediante la modificación de potenciales en las funciones de costos uno puede obtener distintos tipos de filtros, es decir, como los filtros de cuadratura pasabanda (QFs, los cuales están descritos en la siguiente sección), éstos son muy importante en el análisis de franjas para la demodulación de la fase óptica.

3.5.2. Filtros regularizadores pasa baja de respuesta frecuencial

El campo filtrado $f(x, y)$ que minimiza las funciones de costo vistas que se hace mención en la sección anterior suaviza el campo de observación $g(x, y)$. Para tener una idea de la cantidad de cuantización de suavizado se puede encontrar mediante la respuesta frecuencial del regularizador, de este modo para ver la respuesta frecuencial de primer orden del filtro pasa baja [6, 7] se considera un borde bidimensional infinito. Por lo tanto, haciendo el gradiente de la función de costo e igualandola a 0, obtenemos así, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$f(x, y) - g(x, y) + \lambda[-f(x-1, y) + 2f(x, y) - f(x+1, y) - f(x, y-1) + 2f(x, y) - f(x, y+1)] = 0 \quad (3.14)$$

y tomando la transformada de Fourier discreta de la ultima ecuación se obtiene:

$$G(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y)[1 + 2\lambda(2 - \cos \omega_x - \cos \omega_y)] \quad (3.15)$$

Por consiguiente, esto permite que la función de transferencia sea igual a:

$$H(\omega_x, \omega_y) = \frac{F(\omega_x, \omega_y)}{G(\omega_x, \omega_y)} = \frac{1}{[1 + 2\lambda(2 - \cos \omega_x - \cos \omega_y)]} \quad (3.16)$$

La cual representa un filtro pasa bajo con una ancho de banda controlado por el parámetro λ .

3.6. Filtros de cuadratura robustos

Un filtro de cuadratura pasabanda robusto puede ser obtenido mediante el desplazamiento de los potenciales de regularización en el dominio de la frecuencia, como se mencionó en la sección

anterior, donde ω_{0x} es la frecuencia portadora del patrón de franjas[6, 8]. Esto es:

$$U[f(x, y)] = \sum \sum [f(x, y) - 2g(x, y)]^2 + \lambda R_1[f(x, y)], \quad (3.17)$$

de aquí que el regularizador de primero orden, ahora es:

$$R_1[f(x, y)] = [f(x, y) - f(x - 1, y)\exp(-\omega_{0x})]^2 + [f(x, y) - f(x, y - 1)]^2, \quad (3.18)$$

donde tenemos que el desplazamiento del regularizador de primer orden es en la dirección x . La minimización de la función de costo dado el campo de observación $2g(x, y)$ es un filtro pasabanda de cuadratura, por esta razón nos permite encontrar la respuesta frecuencial del filtro que minimiza la función de costo (ecuación 3.18); considerando un borde infinito bidimensional, ahora haciendo el gradiente de la función de costo $U[f(x, y)]$ e igualandola a 0 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x, y) - 2g(x, y) + \lambda[-f(x - 1, y)\exp(i\omega_{0x}) + 2f(x, y) - f(x + 1, y)\exp(i\omega_{0x})] \\ &+ \lambda[-f(x, y - 1) + 2f(x, y) - f(x, y + 1)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

realizando la transformada de Fourier discreta se obtiene:

$$[1 + 2\lambda[2 - \cos(\omega_x - \omega_{0x})] - \cos(\omega_y)]F(\omega) = G(\omega) \quad (3.20)$$

Entonces permite que la función de transferencia $H(\omega)$ sea igual a:

$$H(\omega_x, \omega_y) = \frac{F(\omega_x, \omega_y)}{G(\omega_x, \omega_y)} = \frac{1}{[1 + 2\lambda[2 - \cos(\omega_x - \omega_{0x})] - \cos(\omega_y)]} \quad (3.21)$$

Esta función de transferencia describe a un filtro pasabanda de cuadratura, centrado en la frecuencia ($\omega_x = \omega_{0x}, \omega_y = 0$) con un ancho de banda controlado por el parametro λ , considerando que la frecuencia responde mostrando la forma del filtro, esto es, exactamente lo mismo como la

membrana del filtro pasa baja que se analizó en la sección anterior pero desplazada en el dominio de la frecuencia de coordenadas $(\omega_{0x}, 0)$. Por lo tanto, este filtro puede ser utilizado para estimar la fase de un interferograma con una frecuencia portadora.

Bibliografía

- [1] D. Malacara and B. J. Thompson. *Handbook of optical engineering*. Marcel Dekker, 2001.
- [2] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*. John Wiley and Sons, 1978.
- [3] Rafael C. González and Richard E. Woods. *Tratamiento Digital de Imágenes*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [4] G. Pajares and J. M. de la Cruz. *Visión por Computador*. Alfaomega, 2002.
- [5] J. L. Marroquin. Deterministic interactive particle models for image processing and computer graphics. *Computer and Vision, Graphics and Image Processing*, 55:408–417, 1993.
- [6] M. Servín J. L. Marroquin, J. E. Figueroa. Robust quadrature filters. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 14(4):779–791, April 1997.
- [7] J. L. Marroquin. Adaptive quadrature filters and the recovery of phase from fringe pattern images. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(8):1742–1753, August 1997.
- [8] J. C. Estrada, Manuel Servin, and D. A. Arroyo. Temporal phase detection of interferograms without carrier frequency. *Proceeding (SPIE)*, 2008.

Capítulo 4

MÉTODO ROBUSTO Y RESULTADOS

4.1. Resumen

En este capítulo se presenta un método de tres pasos robusto al error de desentonamiento y al ruido blanco para la demodulación de la fase óptica, usando un filtro de cuadratura robusto. También se presentan los resultados obtenidos al aplicar nuestro método robusto y el método tradicional PSI de tres pasos, resaltando las ventajas y desventajas que tiene cada uno de estos.

4.2. Introducción

El plan de este trabajo es el siguiente se menciona a continuación: En la sección 1, se presenta una introducción a la técnica PSI y un desarrollo a los errores más comunes que existen en las técnicas de pasos. En la sección 2, se presenta el desarrollo del método propuesto, que consta de un filtro de cuadratura robusto de tres pasos. En la sección 3, se muestran los resultados obtenidos a partir de nuestro método comparándolo con el método tradicional PSI de tres pasos. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones.

En años recientes, se han desarrollado sistemas basados en métodos de interferometría de pasos (PSI) para medir propiedades físicas tales como la medición del contorno de objetos (3-D), desplazamientos, vibraciones, etc. con una gran resolución en tiempo real [1, 2, 3]. Sin embargo, existen fuentes de error como: turbulencias de aire, vibraciones y desintonamiento en el desplazamiento de fase (en inglés llamado, error de detuning) que pueden ser lineales o no lineales y que repercuten en la demodulación de la fase óptica. Para disminuir el efecto de los dos primeros errores se aísla y se protege el arreglo interferométrico, mientras que para disminuir el error en el desplazamiento de fase se aumenta el número de interferogramas capturados, puesto que esto robustece el algoritmo, no obstante el tiempo de cómputo se incrementa.

Los métodos PSI obtienen una fase correcta cuando su desplazamiento de fase es $2\pi/N$, donde N es un número entero [4]. Pero esto no siempre es así, puesto que existen varios factores que afectan al desplazamiento de fase (desintonamiento), entre algunos de estos factores que se presentan son: El movimiento del objeto, esto causa que la fase óptica varíe y que el desplazamiento no lineal del piezoeléctrico (PZT) provoque en ambos casos que los desplazamientos de fase no sean constantes entre cada muestra, de modo que varios artículos tratan de compensar el error de desplazamiento de fase [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], estos errores son usualmente reflejados en el mapa de fase, vistos como si tuviera una frecuencia espacial de dos veces la frecuencia de la franja del patrón de interferencia [14]. El efecto de la miscalibración del desplazamiento de fase y el error de no linealidad toma diferentes formas según el algoritmo de medición de fase que se este utilizando.

Cuando se trabaja con eventos transitorios se requiere utilizar de pocos pasos para que el tiempo de procesamiento sea el menor posible, por ello el algoritmo ideal es el de tres pasos, puesto que éste es el método más sencillo y el que requiere el menor número de interferogramas. Sin embargo, este algoritmo funciona bien sólo si el desplazamiento de fase es $2\pi/N$. Por esta razón, el algoritmo de tres pasos no es usado para eventos dinámicos puesto que éstos provocan errores de desintonamiento. Para minimizar el error de desintonamiento en el algoritmo de tres pasos proponemos un algoritmo basado en el método de tres pasos que emplea un filtro de cuadratura robusto, mediante

el cual obtenemos una fase óptica más parecida a la fase real en comparación con el método tradicional PSI de tres pasos, así este método es más robusto al ruido blanco y al desentonamiento.

Muchos métodos para demodular la fase han sido reportados en la literatura; entre ellos se encuentra el método PSI de tres y cuatro pasos, el promediado de 3×3 , Carré y el de 5 pasos de Hariharan [15, 16]. Aquí se presenta el algoritmo de tres pasos, el cual utiliza tres interferogramas con un desplazamiento de fase de $\alpha = \pi/2$:

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ I_2 &= a + b \cos(\phi + \pi) \\ I_3 &= a + b \cos(\phi) \end{aligned} \tag{4.1}$$

La ecuación 4.1 contiene 3 variables desconocidas la iluminación de fondo a , la modulación b y la fase óptica ϕ a medir. Por lo que se requiere de al menos tres interferogramas para encontrar la fase óptica, la característica esencial de la técnica PSI es que el desplazamiento de fase α es una fase modulada, que es introducida y controlada experimentalmente mediante un piezoelectrónico. El paso entre cada medida adyacente puede ser cualquiera entre 0 y π grados.

Con estos tres interferogramas, la fase es calculada por la expresión:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2I_1 - I_2 - I_3}{I_2 - I_3} \right] \tag{4.2}$$

Todos los algoritmos de desplazamiento de fase propuestos trabajan bien siempre y cuando cumplan con las siguientes condiciones ideales:

1. El rango de la intensidad de la luz debe estar dentro del rango lineal de la cámara CCD [17].
2. Los desplazamientos de fase de los interferogramas deben ser constantes $2\pi/N$.
3. Todos los mecanismos de perturbación dentro del interferograma (vibración, turbulencia de

aire, etc.) durante la captura de los interferogramas digitales deben ser pequeños.

Si se lleva a acabo las condiciones anteriores, entonces esperamos encontrar una fase óptica correcta usando cualquiera de las fórmulas del método de interferometria de pasos (PSI).

A continuación presentamos el desarrollo de un filtro pasa baja, a partir del cual se va a desarrollar nuestro filtro de cuadratura robusto para la demodulación de una secuencia de tres interferogramas con un error de desentonamiento y ruido blanco.

4.3. Método

Explicuemos el problema a partir de la Figura 4.1.

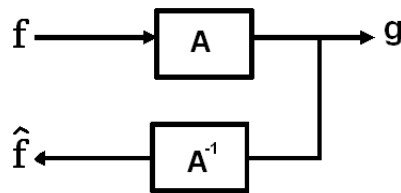


Figura 4.1: Sistema lineal, donde tenemos una señal de entrada g y al pasar por el sistema (caja negra) este le adhiere ruido saliendo como resultado una señal f parecida a la señal g pero con ruido

El problema puede ser planteado como un problema inverso, donde dado g queremos recuperar f , así como se muestra la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} g &= A(f) + \eta \\ f &= A^{-1}(g) \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde g son nuestros datos de observación, η es el ruido introducido y f es nuestra señal que queremos encontrar. Supongamos la señal f pasa por un sistema A , por lo que f es perturbada (se le añade ruido blanco), obteniendo así la señal g . Entonces la señal f tiene que parecerse mucho

a la señal de salida g . Este problema puede resolverse usando filtros de regularización clásica[18], para ello hacemos lo siguiente.

Primero diseñamos una función de costo, la cual nos indica la diferencia entre lo que estoy viendo y los datos que teníamos al principio. Esto puede ser modelado mediante mínimos cuadrados, esto es:

$$U(f(t)) = \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - g(t)|^2 \quad (4.4)$$

Donde $U(f(t))$ es la función de costo. Entonces si buscamos una señal f tal que, evaluada en la función de costo de la ecuación 4.4 nos de el costo mínimo obteniendo a la señal f muy parecida a la señal g . Por lo tanto el objetivo es minimizar la función de costo $U(f)$, sin embargo este problema de minimización está mal planteado, puesto que sólo obtenemos una solución trivial que es $f = g$, pero lo que nosotros esperamos es obtener a f pero que sea muy parecida a la señal g , además, ésta no tenga ruido o que las variaciones de f sean muy suaves. Para ello, es necesario regularizar nuestro problema, esto se realiza usando la información a priori, de modo que nuestra señal recuperada tiene que parecerse mucho a g pero sin ruido. Entonces se propone el siguiente funcional de costo[14, 18].

$$U(f(t)) = \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - g(t)|^2 + \lambda \sum |f(t) - f(t-1)|^2 \quad (4.5)$$

Donde el primer término del lado derecho de la ecuación, restringe a que la señal f se parezca mucho a la señal g y el segundo término restringe las variaciones de la señal f sean muy suaves, puesto que mide las variaciones finitas entre los vecinos, el parámetro λ es llamado parámetro de regularización, que controla el ancho de banda del filtro, esto es, mientras más grande es λ más suave es la señal f .

A estos métodos de regularización los podemos ver como filtros pasa baja. La minimización de los datos nos da una señal filtrada como en los filtros pasa baja, pero a diferencia de los filtros de

convolución no tenemos los problemas en los bordes de la señal, puesto que en el caso de los filtros de regularización como en la ecuación 4.5 el filtro está definido en el dominio de la señal. Es por eso, que es común llamarle a este tipo de filtros robustos.

Una vez que tenemos planteada nuestra función de costo $U(f)$ como se muestra en la ecuación 4.5 vamos a minimizarla; esto lo hacemos primero sacando el gradiente de la función de costo y después igualándola a cero, donde cada elemento del vector gradiente se representa como:

$$\frac{\partial U(f(t))}{\partial f(t)} = f(t) - g(t) + \lambda\{f(t-1) - 2f(t) + f(t+1)\} = 0 \quad (4.6)$$

El proceso de minimización puede ser planteado como un proceso iterativo donde para cada iteración tenemos lo siguiente:

$$f(t) + \lambda\{f(t-1) - 2f(t) + f(t+1)\} = g(t) \quad (4.7)$$

después de un número considerable de iteraciones obtenemos la señal f más próxima al mínimo de la función de costo $U(f)$.

Continuando, vamos a ver como se obtiene un filtro de cuadratura robusto a partir de un filtro pasa baja robusto. Para ello, se mostrará el siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos un filtro Gaussiano, esto es:

$$h(t) = \exp(-at^2) \quad (4.8)$$

sacando su transformada de Fourier obtenemos[19]:

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\pi}{a} \exp(-\omega^2/4a) \quad (4.9)$$

Es un filtro pasa baja robusto y se muestra en la figura 4.2(a), allí podemos ver que la gaussiana

esta centrada en el origen ($\omega = 0$).

Ahora si desplazamos el filtro Gaussiano en el dominio de Fourier a una frecuencia ω_0 (llamada frecuencia de entonamiento) de tal forma que no exista una respuesta del lado derecho del origen, como se muestra en la figura 4.2(b), entonces su ecuación es:

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\pi}{a} \exp\{-(\omega - \omega_0)^2/4a\} \quad (4.10)$$

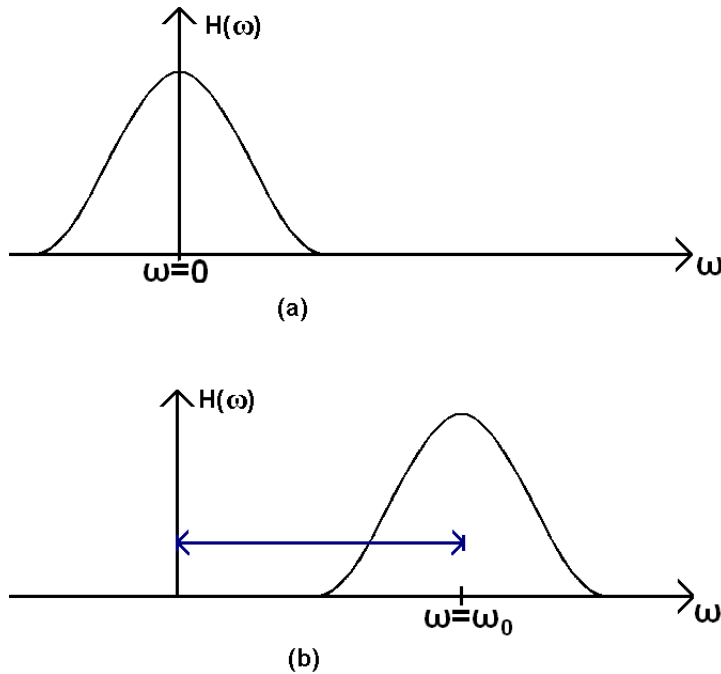


Figura 4.2: (a) Filtro pasa baja, donde la Gaussiana esta centrada en el origen $\omega = 0$. (b) El filtro pasa baja es desplazado a una frecuencia de entonamiento ω_0 para crear un filtro de cuadratura

Regresando nuestra gaussiana desplazada al espacio directo su expresión, es representada de la forma:

$$h(t) = \exp(i\omega_0 t) \exp(-at^2) \quad (4.11)$$

Donde observamos que es la misma gaussiana pero multiplicada por una exponencial compleja

cuya frecuencia de entonamiento es ω_0 .

De esta manera podemos ver que es fácil obtener un filtro de cuadratura a partir de un filtro pasa baja desplazando a éste en el espacio de Fourier a una frecuencia de entonamiento ω_0 . Podemos ver que una de las propiedades de este tipo de filtro es que si filtramos una señal real obtenemos una señal compleja donde la parte real es la señal de entrada filtrada y la parte imaginaria es la cuadratura de la parte real.

De manera análoga vamos a obtener un filtro de cuadratura robusto usando nuestro filtro pasa baja robusto[20] (ver ecuación 4.5). Para ello primero le sacamos la transformada de Fourier a la ecuación 4.7 obteniendo lo siguiente.

$$\mathcal{F}(\omega) + \lambda\{\mathcal{F}(\omega)\exp(-i\omega) - 2\mathcal{F}(\omega) + \mathcal{F}(\omega)\exp(i\omega)\} = \mathcal{G}(\omega) \quad (4.12)$$

Donde $i = (-1)^{1/2}$ y ω es la frecuencia discreta. Después obtenemos la función de transferencia correspondiente al filtro pasa baja lineal en el espectro de Fourier:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\lambda(1 - \cos(\omega))} \quad (4.13)$$

Como era esperado vemos que esta función de transferencia representa un filtro pasa baja robusto.

Ahora para construir nuestro filtro de cuadratura robusto hacemos lo siguiente: El filtro pasa baja robusto es desplazado en el dominio de Fourier a una frecuencia ω_0 , que será nuestra frecuencia de entonamiento, como se muestra en la figura 4.2. Por lo tanto la función de transferencia del filtro pasa baja robusto es reescalado por un factor de 2 y trasladado a una frecuencia ω_0 .

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\lambda[1 - \cos(\omega - \omega_0)]} \quad (4.14)$$

Esta ecuación se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{F}(\omega)}{\mathcal{G}(\omega)} &= \frac{2}{1 + 2\lambda(1 - \cos(\omega - \omega_0))} \\
\mathcal{G}(\omega) &= \mathcal{F}(\omega) \{1 + 2\lambda[1 - \cos(\omega - \omega_0)]\} \\
\mathcal{G}(\omega) &= \mathcal{F}(\omega) \left\{ 1 + 2\lambda \left[1 - \frac{1}{2} (\exp\{-i(\omega - \omega_0)\} - \exp\{i(\omega - \omega_0)\}) \right] \right\} \\
\mathcal{G}(\omega) &= \mathcal{F}(\omega) + \lambda[2\mathcal{F}(\omega) - \mathcal{F}(\omega)\exp\{-i(\omega - \omega_0)\} - \mathcal{F}(\omega)\exp\{i(\omega - \omega_0)\}] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Realizando la transformada de Fourier inversa de la ecuación anterior y utilizando las propiedades básicas de Fourier de traslación en la frecuencia y en el tiempo, obtenemos lo siguiente:

$$g(t) = f(t) + \lambda \{-f(t-1)\exp(i\omega_0) + 2f(t) - f(t+1)\exp(i\omega_0)\}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, nuestra función de costo es:

$$U(f(t)) = \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - g(t)|^2 - \lambda \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - f(t-1)e^{i\omega_0}|^2 \quad (4.17)$$

Que es el filtro de cuadratura robusto propuesto por Marroquin [20]. Donde ahora la señal f es un campo complejo, i.e. $f(t) = \varphi(x) + i\psi(t)$.

En nuestro caso nosotros vamos a simplificar el problema, esto es, en lugar de desplazar la respuesta frecuencial de nuestra señal f vamos a desplazar nuestros datos de observación (señal g), de tal forma que tenemos el siguiente funcional de costo:

$$U[f(t)] = \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - f(t-1) - g(t) - g(t-1)e^{i\alpha(a-b)}|^2 + \lambda \sum_{t=1}^{N-2} |f(t) - f(t-1)|^2. \quad (4.18)$$

Aquí vemos que los datos de observación están multiplicados por un exponencial complejo, lo que significa que están desplazados a una frecuencia α , donde $a-b = 1$ si se toma la diferencia entre t y $t-1$ y $a-b = -1$ si se toma la diferencia entre t y $t+1$. Por lo que la ecuación 4.18 es importante debido a que nos sugiere una estrategia de regularización para un algoritmo de desplazamiento de

fase de 3 pasos.

Como se vio anteriormente la solución a este problema de regularización es mediante la minimización de la función de costo, realizando el gradiente de la función de costo e igualandola a cero. Pero ahora tenemos dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria, esto es:

Parte real:

$$\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi(t)} = 2 \{ \varphi(t) 2(1 + \lambda) - 2g(t) - (1 + \lambda)[\varphi(t - 1) + \varphi(t + 1)] + g(t - 1) \cos(\alpha) + g(t + 1) \cos(\alpha) \} \quad (4.19)$$

Parte imaginaria:

$$\frac{\partial U(\psi)}{\partial \psi(t)} = 2 \{ \psi(t) 2(1 + \lambda) - (1 + \lambda)[\psi(t - 1) + \psi(t + 1)] + g(t - 1) \sin(\alpha) - g(t + 1) \sin(\alpha) \} \quad (4.20)$$

El sistema de ecuaciones que se obtiene a partir de 4.19 y 4.20 que tienen que resolverse para un algoritmo de tres pasos donde $N = 3$ es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 2(2 - \lambda) & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t - 1) \\ \varphi(t) \\ \varphi(t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t) - g(t + 1) \cos(\alpha) \\ 2g(t) - [g(t - 1) + g(t + 1)] \cos(\alpha) \\ g(t) - g(t - 1) \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

es la parte real,

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 2(2 - \lambda) & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(t - 1) \\ \psi(t) \\ \psi(t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(t) \sin(\alpha) \\ -[g(t + 1) - g(t - 1)] \sin(\alpha) \\ g(t) \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

es la parte imaginaria.

Debido a que la solución de la minimización del sistema de ecuaciones lineales es singular (significa que la matriz no tiene inversa o que la solución es degenerada) en la función de costo de la ecuación 4.18 la señal f del primer término de la suma tiene que se multiplicada por un factor de 2, este factor también se incluye en la diagonal del sistema de ecuaciones lineales, con la finalidad de remover la singularidad del sistema.

$$U[f(t)] = \sum_{t=1}^{N-2} |2f(t) - f(t-1) - g(t) - g(t-1)e^{i\alpha(a-b)}|^2 + \lambda \sum_{t=1}^{N-2} |(f(t) - f(t-1))|^2. \quad (4.23)$$

Ahora nuestro sistema de ecuaciones lineales es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2(2-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t-1) \\ \varphi(t) \\ \varphi(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t) - g(t+1) \cos(\alpha) \\ g(t) - [g(t-1) + g(t+1)] \cos(\alpha) \\ g(t) - g(t-1) \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

es la parte real,

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2(2-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(t-1) \\ \psi(t) \\ \psi(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(t) \sin(\alpha) \\ -[g(t+1) - g(t-1)] \sin(\alpha) \\ g(t) \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

es la parte imaginaria.

Resolviendo el sistema para el píxel central de la parte real y de la parte imaginaria se tiene:

Para la parte real

$$\varphi(t) = \frac{(1 + \lambda)g(t) + [g(t - 1) + g(t + 1)] \cos(\alpha)}{(1 + 3\lambda)} \quad (4.26)$$

Y para la parte imaginaria

$$\psi(t) = \frac{[g(t - 1) - g(t + 1)] \sin(\alpha)}{(1 + 3\lambda)} \quad (4.27)$$

Como se mencionó anteriormente, nuestra señal f es un campo complejo $f(t)$ el cual esta definido como:

$$f(t) = \varphi(t) + i\psi(t). \quad (4.28)$$

Finalmente, la fase óptica en el tiempo $t = 0$, se obtiene como el argumento del campo complejo $f(t)$ como:

$$\phi(t) = \arg[f(t)] = \arctan \left[\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right]. \quad (4.29)$$

sustituyendo las ecuaciones 4.26 y 4.27 en la ecuación anterior, nuestra ecuación final para encontrar la fase óptica en el píxel central es:

$$\phi(t) = \arctan \left[\frac{[g(t - 1) - g(t + 1)] \sin(\alpha)}{(1 + \lambda)g_t + [g(t - 1) + g(t + 1)] \cos(\alpha)} \right]. \quad (4.30)$$

Para resolver los dos sistemas de ecuaciones mostrados en las ecuaciones 4.24 y 4.25, debido a que ambas son matrices simétricas y positivas, se pueden resolver de dos maneras: analíticamente o mediante un algoritmo computacional. En este trabajo fue resuelto de manera analítica.

4.4. Resultados

Para obtener nuestros resultados se realizó lo siguiente (Ver figura 4.3): Primero simulamos tres interferogramas mediante el uso del software Matlab, después se les aplicó el algoritmo (Filtro de

cuadratura robusto y método tradicional PSI) para obtener como resultado su fase óptica correspondiente al tiempo $t = 0$.

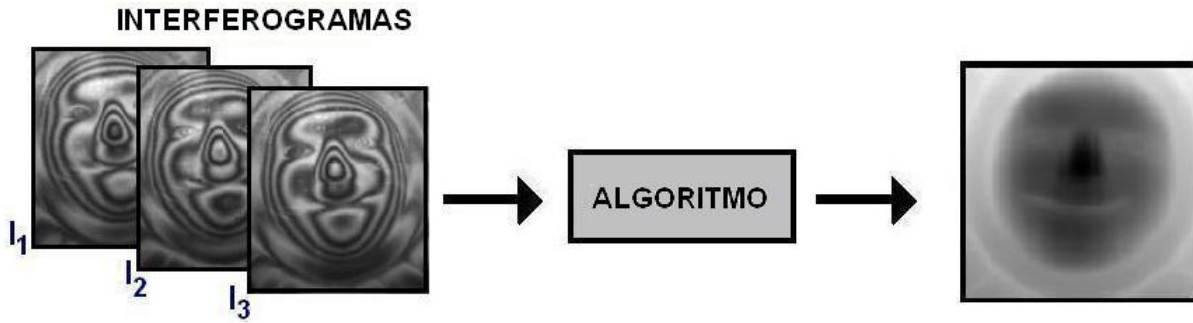


Figura 4.3: Esquema del proceso que se sigue para extraer la fase óptica a partir de tres interferogramas. En éste caso son tres interferogramas obtenidos mediante la técnica de moiré, en el curso de Metrología

En las tres primeras pruebas se comprobará que nuestro método obtiene mejores resultados cuando existe error de desintonamiento ϵ en los interferogramas. También se hará una comparación cuantitativamente entre el método tradicional de tres pasos mostrado en la ecuación 2,12, y nuestro algoritmo robusto, mostrado en la ecuación 4.23, con un desplazamiento de fase α constante. Después en la última prueba se generarán tres interferogramas con ruido blanco, donde también podremos ver que la fase extraída con nuestro método robusto obtiene un resultado mucho mejor que con el método tradicional PSI.

Primero se generó tres interferogramas definidos de la forma:

$$g_1(t) = 1 + \cos(\phi - (\alpha + \epsilon)t) \tag{4.31}$$

$$g_2(t) = 1 + \cos(\phi)$$

$$g_3(t) = 1 + \cos(\phi + (\alpha + \epsilon)t). \tag{4.31}$$

$$\tag{4.32}$$

donde ϕ es la fase óptica desconocida. Para una comparación cuantitativa, usaremos la desviación estándar entre la fase verdadera y la fase obtenida con el algoritmo tradicional de tres pasos y con nuestro algoritmo robusto de tres pasos. La desviación estándar que se utilizó es la siguiente:

$$\sigma^2[\hat{\phi}] = \frac{1}{MxN} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} \left[W \left\{ W[\phi(x, y)] - W[\hat{\phi}(x, y) + a] \right\} \right]^2, \quad (4.33)$$

donde ϕ es la fase real, $\hat{\phi}$ es la fase estimada, M y N son las dimensiones de la imagen y W es una función envuelta definida como: el desplazamiento promedio de la fase real con respecto a la fase estimada, que se puede escribir como:

$$W = \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \right] \quad (4.34)$$

y a esta defina como:

$$a = \frac{1}{MxN} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} \{ W[W[\phi(x, y)] - \hat{\phi}(x, y)] \}. \quad (4.35)$$

4.4.1. PRUEBA 1

En esta prueba, primero se simuló en Matlab una fase real que es modelada como: $\phi = 3*peaks(128)$, donde $peaks$ es una función de matlab de dos variables, obtenida mediante el traslado y escalamiento de la distribución Gaussiana, después se escogió el valor del desplazamiento de fase $\alpha = 0,3$ y el error de desentonomiento igual a $\epsilon = 0$. Una vez que tenemos todos estos datos se introducen en las ecuaciones 4.32, que se obtiene:

$$\begin{aligned} g_1(t = -1) &= \cos(\phi - 0,3) \\ g_2(t = 0) &= \cos(\phi) \\ g_3(t = 1) &= \cos(\phi + 0,3). \end{aligned} \quad (4.36)$$

A partir de estos tres interferogramas nosotros esperamos encontrar la solución exacta de la

estimación de la fase óptica usando el algoritmo tradicional de tres pasos y el algoritmo robusto de tres pasos.

En la figura 4.4 podemos observar los mapas de fase obtenidos con el método tradicional PSI de tres pasos y con nuestro método robusto, donde cualitativamente se observa que la fase estimada con ambos métodos es correcta. Para ver estos resultados pero de manera cuantitativa, calculamos la desviación estándar de la fase óptica estimada:

$$\sigma^2 = 1,7166 \times 10^{-29}, \text{ Algoritmo tradicional de tres pasos.}$$

$$\sigma^2 = 2,3809 \times 10^{-31}, \text{ Algoritmo robusto de tres pasos}$$

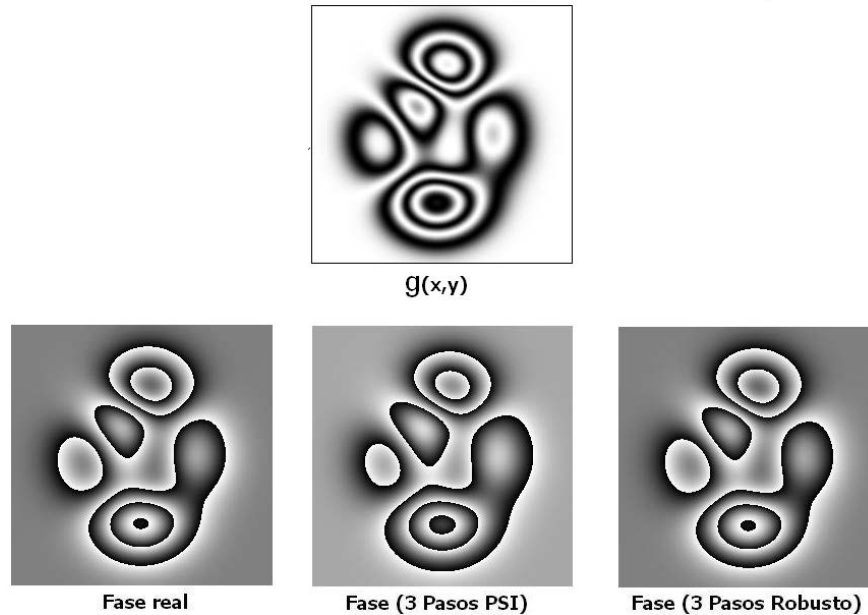


Figura 4.4: Aquí se muestra el interferograma g simulado, la fase real ϕ , la fase obtenida mediante el algoritmo tradicional de tres pasos, y el algoritmo robusto de tres pasos para un $alpha = 0,3$ y un error de desentonamiento $\epsilon = 0$

4.4.2. PRUEBA 2

Aquí el valor del desplazamiento de fase es $\alpha = 0,3$ y el error de desentonamiento aumenta $\epsilon = 0,01$. Entonces introducimos estos datos en las ecuaciones 4.32, así tenemos:

$$\begin{aligned}g(t = -1) &= \cos(\phi - 0,3 - 0,01) \\g(t = 0) &= \cos(\phi) \\g(t = 1) &= \cos(\phi + 0,3 + 0,01).\end{aligned}\tag{4.37}$$

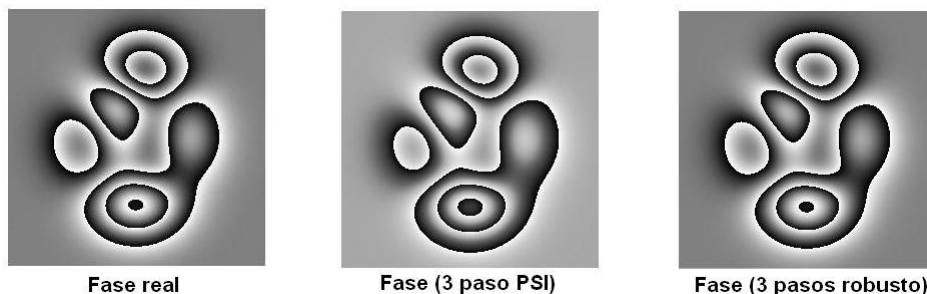


Figura 4.5: Aquí se muestra la fase real $\phi(x, y)$ simulada, la fase obtenida mediante el algoritmo tradicional de tres pasos, y usando el algoritmo robusto de tres pasos, para un $\alpha = 0,3$ y un error de desentonamiento $\epsilon = 0,01$

A partir de estos tres interferogramas esperamos encontrar una solución muy cercana a la fase real, esto mediante el uso del algoritmo robusto de tres pasos y el algoritmo tradicional PSI de tres pasos. Cuantitativamente podemos ver que ambas fases obtienen correctamente la fase.

Se presentan los resultados obtenidos para cada una de las fases estimadas con los dos métodos usando la desviación estandar:

$$\sigma^2 = 0,0064, \text{ para algoritmo tradicional de tres pasos.}$$

$$\sigma^2 = 3,6819 \times 10^{-06}, \text{ Para algoritmo robusto de tres pasos.}$$

En la figura 4.5 se muestra los contornos de fase obtenidos con cada uno de los algoritmos, donde observamos las fases estimadas que son muy parecidas a la fase real simulada.

4.4.3. PRUEBA 3

Ahora incrementamos considerablemente el error de desentonamiento, esto es $\epsilon = 0,1$ y el desplazamiento de fase es el mismo que los anteriores $\alpha = 0,3$, de modo que estos datos se introducen en las ecuaciones 4.32, así tenemos:

$$\begin{aligned}
 g(-1) &= \cos(\phi - 0,3 - 0,1) \\
 g(0) &= \cos(\phi) \\
 g(1) &= \cos(\phi + 0,3 + 0,1).
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

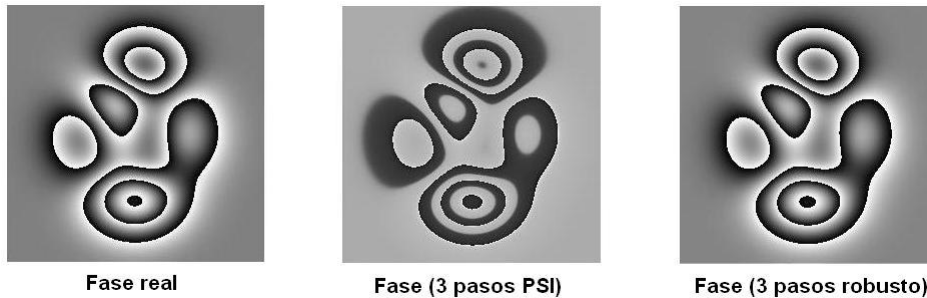


Figura 4.6: Aquí se muestra la fase real $\phi(x, y)$ simulada, la fase obtenida mediante el algoritmo tradicional PSI de tres pasos, la cual tiene un error. Mientras que usando el algoritmo robusto de tres pasos se obtuvo una fase óptica aceptable, donde $\alpha = 0,3$ y el error de desentonamiento es $\epsilon = 0,1$

Ahora en esta prueba esperamos obtener un error en la fase óptica usando el algoritmo tradicional de tres pasos, mientras que con el algoritmo robusto de tres pasos esperamos obtener aún la fase esperada.

Se presenta los resultados obtenidos de manera cuantitativa usando la desviación estándar de

cada una de las fases ópticas calculadas mediante ambos algoritmos:

$$\sigma^2 = 0,03733, \text{ para algoritmo tradicional de tres pasos.}$$

$$\sigma^2 = 3,6557 \times 10^{-04}, \text{ Para algoritmo robusto de tres pasos.}$$

En la figura 4.6 se puede observar que los contornos de fase obtenidos con el método tradicional de tres pasos obtiene una fase incorrecta, mientras que con el método robusto seguimos obteniendo una mejor fase óptica que la estimada con el método tradicional.

4.4.4. RESULTADO DEL ERROR DE DESENTONAMIENTO

Como pudimos observar de manera cualitativa nuestro método extrae la fase óptica con un menor error que con el método tradicional PSI. Para comparar de manera cuantitativa los dos métodos graficamos la variación de la desviación estándar con respecto al error de desentonamiento.

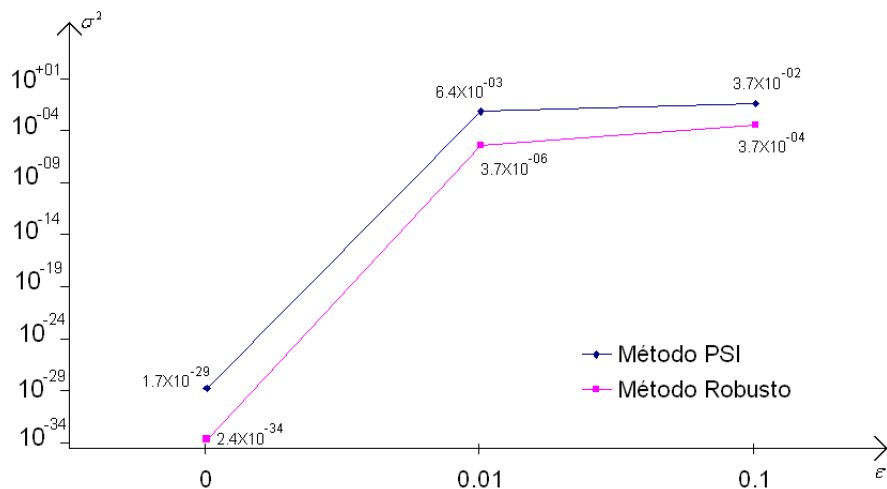


Figura 4.7: Desviación estándar de la fase extraída con el método tradicional PSI y el método robusto con respecto al error de desentonamiento

En la figura 4.7 podemos ver que conforme aumenta el error de desentonamiento nuestro método robusto extrae una fase con una desviación estándar menor, mientras que con el método

tradicional PSI de tres pasos el error es varios ordenes de magnitud mayor. Por lo tanto podemos comprobar que nuestro método es mejor que el método PSI ya que tiene menor error.

4.4.5. PRUEBA 4

Finalmente, se añadió ruido blanco gaussiano a la fase óptica, por lo que el desplazamiento de los interferogramas son:

$$\begin{aligned}g(-1) &= \cos(\phi - \alpha + n_1) \\g(0) &= \cos(\phi + n_2) \\g(1) &= \cos(\phi + \alpha + n_3),\end{aligned}\tag{4.39}$$

donde n_c para $c = 1, 2, 3$ son campos aleatorios con una distribución normal, con un desplazamiento de fase de $0,3$. A continuación presentamos los resultados de manera cuantitativa mediante la desviación estandar para cada una de las fases obtenidas.

$\sigma^2 = 2,2971$, Para algoritmo tradicional de tres pasos.

$\sigma^2 = 0,1825$, Para algoritmo robusto de tres pasos.

En la figura 4.8 se muestra los contornos de fase obtenidos con cada uno de los algoritmos, donde se observa que la fase que se estimo con el algoritmo tradicional de tres pasos es totalmente incorrecta, mientras que con el método robusto, se obtuvo una fase óptica aceptable, pero con errores aleatorios ó también llamado errores espurios.

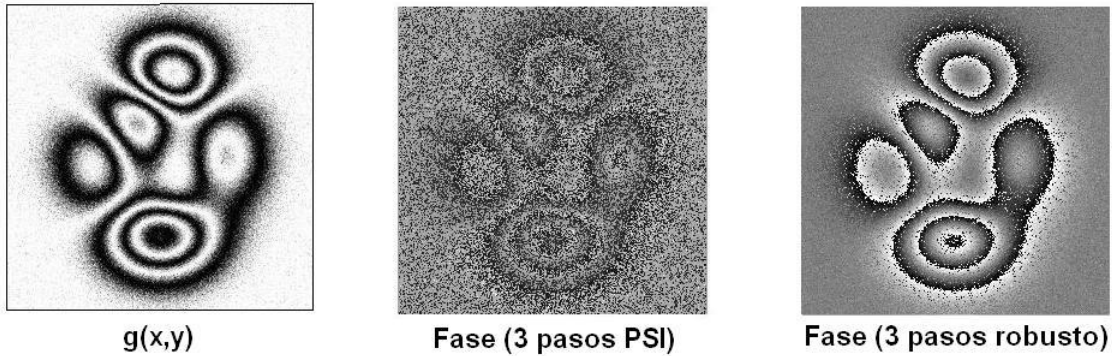


Figura 4.8: En esta prueba se utilizó la misma fase real simulada como en las anteriores pruebas, pero ahora se le añadió ruido blanco. Se puede observar que la fase obtenida mediante el algoritmo robusto de tres pasos es considerablemente mejor que el algoritmo tradicional de tres pasos

4.5. Conclusiones

En este capítulo se propuso un algoritmo robusto de tres pasos mediante la técnica de regularización clásica, para demodular una secuencia de 3 interferogramas con desplazamiento de fase no lineal (detuning) y ruido blanco gaussiano. Con los resultados se comprobó que nuestro método es más robusto al error de desintonamiento y al ruido blanco, mientras que el método tradicional de tres pasos es más susceptible a estos factores.

Bibliografía

- [1] Peisen S. Huang and Song Zhang. Fast three-step phase shifting algorithm. *Appl. Opt.*, 45(21):5086–5091, 2006.
- [2] S. Zhang and P. Huang. High-resolution, real-time 3-d shape acquisition. *Presented at the IEEE Computer Vision and Patern Recognition Workshop*, 2004.
- [3] P.S. Huang, C. Zhang, and F. P. Chiang. High-speed 3-d shape measurement based on digital fringe projection. *Opt. Eng.*, 42:163–168, 2003.
- [4] J. C. Wyant C. Ai. Effect of piezoelectric transducer nonlinearity on phase shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 26:1112–1116, 1987.
- [5] J.R.Schwider, R. Burow, K. E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel. Digital wave-front measuring interferometry:some systematic error sources. *Appl. Opt.*, 22:3421–3432, 1983.
- [6] Y. Y. Cheng and J. C. Wyant. Phase shifter calibration in phase-shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 24(18):3049–3052, 1984.
- [7] P. Hariharan, B. F. Areb, and T. Eyui. Digital phase-shifting interferometry: A simple error-compensating phase calculation algorithm. *Appl. Opt.*, 26:3899, 1987.
- [8] K. Frieschald and C. L. Koliopoulos. Fourier description of digital phase-measuring interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 7:542–551, 1990.
- [9] J. van Wingerden, H. J. Frankena, and C. Smorenburg. Linear approximation for measurement error in phase shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 30:2718–2729, 1991.

- [10] Y. Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping. *Appl. Opt.*, 35:51–60, 1996.
- [11] M. Servin, M. Cywiak, D. Malacara-hernandez, and J.C. Estrada. Spatial carrier interferometry from temporal phase shifted interferograms: Squeezing interferometry. *Optics Express*, 16(13), 2008.
- [12] J. H. Bruning, D. R. Herriot, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfel, A. D. White, and D. J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometry for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.*, 13:2693–2703, 1974.
- [13] C. Joenathan. Phase-measuring interferometry: new methods and error analysis. *Appl. Opt.*, 33(19):4147–4155, 1994.
- [14] D. Malacara and B. J. Thompson. *Handbook of optical engineering*. Marcel Dekker, 2001.
- [15] Z. Malacara D. Malacara, M. Servín. *Interferogram analysis for optical testing*. Brian J. Thompson, 1998.
- [16] J. E. Greivenkamp and J. H. Bruning. *Phase-shifting interferometry in 'Optical Shop Testing'*, Malacara Ed.,. Wiley, New York, 1992.
- [17] K. J. Gasvik. *Optical Metrology*. John Wiley and Sons, LTD, tercera edition, 1988.
- [18] J. L. Marroquin, M. Rivera, S. Botello, R. Rodriguez-Vera, and M. Servin. Regularization methods for processing fringe-pattern images. *Appl. Opt.*, 38(5):788–794, 1999.
- [19] Hwei P. Hsu. *Analysis de Fourier*. Prentice Hall, 1998.
- [20] M. Servín J. L. Marroquin, J. E. Figueroa. Robust quadrature filters. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 14(4):779–791, April 1997.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

5.1. Resumen

En este capítulo, se expone las conclusiones generales, a partir de nuestro método robusto propuesto. Donde se observa a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 4, que nuestro método es robusto al error de desintonamiento y al ruido blanco. También se hará una descripción del trabajo futuro.

5.2. Conclusiones

Como se observó en el capítulo anterior, se propuso un algoritmo de tres pasos robusto al error de desintonamiento y al ruido blanco, usando un filtro de cuadratura robusto, esto con la finalidad de demodular la fase óptica. Los resultados muestran que nuestro método es menos sensible al error de detuning y al ruido blanco comparado con el método tradicional PSI de tres pasos, donde se obtuvo una fase óptica más parecida a la fase real simulada. Por lo tanto, concluimos lo siguiente:

1. Nuestro método de tres pasos es robusto al: error de desintonamiento y al ruido blanco, obteniendo así una fase con menor error comparado con el método tradicional de tres pasos

PSI. Estos resultados se comprobaron mediante el cálculo de su desviación estándar para cada una de las fases extraídas.

2. A partir de un filtro pasa baja construimos nuestro filtro de cuadratura robusto. A diferencia del filtro de cuadratura propuesto por Marroquin en 1997, en nuestro filtro se desplazaron los datos de observación a una frecuencia de entonamiento ω_o (espectro de Fourier) en lugar de la respuesta frecuencial.
3. Nuestro filtro de cuadratura robusto tiene una relación señal a ruido grande, de modo que éste es controlado mediante el parámetro de regularización λ y que controla el ancho de banda del filtro.
4. Nuestro algoritmo robusto tiene ventajas numéricas debido a que el tiempo de procesamiento es más corto, además de que es más estable numericamente.
5. Nuestro filtro de cuadratura robusto genera un sistema de ecuaciones desacopladas, esto significa que tenemos un sistema de ecuaciones para la parte real y otro para la parte imaginaria, por lo que su procesamiento es más rápido y sencillo.

5.3. Trabajo futuro

Este trabajo es la base para el desarrollo de la demodulación de interferogramas temporales para pruebas de eventos transitorios, debido a que en los eventos transitorios lo que se quiere es que el procesamiento de las imágenes sea lo más rápido posible y para ello se debe utilizar un algoritmo de pocos pasos. Por esta razón, el algoritmo de tres pasos ha sido una de las mejores opciones para el cálculo de fase óptica, es decir, que entre todos los algoritmos existentes es el que utiliza el menor número de interferogramas.

Sin embargo, como vimos en los eventos dinámicos el objeto bajo prueba se encuentra en movimiento por lo que la fase óptica también varía con respecto al tiempo, por esta razón se presentan errores de desentonamiento (detuning), donde los algoritmos tradicionales PSI de tres pasos son in-

capaces de obtener una fase correcta debido a que no son robustos a éste tipo de errores. Mientras que el método propuesto en este trabajo funciona muy bien para calcular una fase correcta cuando existe ruido blanco y errores de desentonamiento.

Otro trabajo a futuro es desarrollar un método de autoentonamiento para enrobustecer más los métodos de PSI regularizados, como el que se presento en esta tesis.