CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ÓPTICA A.C.

Estudio de una función invariante basada en la difracción de haces gaussianos aplicada al trazo de rayos

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta

Octavio Olvera Rábago

Asesor

Dr. Moisés Cywiak Garbarcewicz

Diciembre del 2010

Agradecimientos

A mi familia, por ser mi soporte, orgullo e inspiración. Agradezco a mi papá por motivarme a seguir preparándome, a no dejar de esforzarme. A mi mamá por siempre estar dispuesta a ayudar y ofrecer un consejo. A mis tres hermanas por siempre estar allí para apoyarme, porque deseo ser un buen ejemplo para ellas.

A mi asesor, Dr. Moisés Cywiak Garbarcewicz, porque sin él no hubiera sido posible este trabajo. Por todo su apoyo y consejo, desde la parte más estrictamente matemática hasta el trato humano, lo considero un buen amigo.

A todos los profesores que ayudaron en mi formación durante la maestría en el CIO, destacando a mis sinodales: Dr. Arquímedes Alonso Morales Romero y Dr. David Moreno Hernández por sus valiosas aportaciones y correcciones a este trabajo, y al Dr. Manuel Servín Guirado, parte importante del grupo de trabajo.

A mis amigos del CIO y DCI (antes IFUG) porque hicieron más llevaderos los momentos difíciles durante la maestría, por su amistad que va más allá de las paredes de esta institución y de la conclusión de este ciclo.

Al personal del CIO por todo su apoyo durante estos dos años, especialmente a la Lic. Guillermina Muñiz por todo el tiempo invertido en mí persona, por su tolerancia y apoyo.

A CONACYT por el apoyo económico otorgado, sin el cual no hubiera podido concluirse este trabajo.

Índice General

1. Introducción 1

2. La integral de Propagación de Fresnel 3

3. La gaussiana invariante 19

4. Trazo de rayos empleando la gaussiana invariante 29

5. Conclusiones y perspectivas a futuro 38

Bibliografía 40

Apéndice 42

Capítulo I

Estudio de una función invariante basada en la difracción de haces gaussianos aplicada a trazos de rayos

Resumen
En este trabajo se presenta una propuesta basada en las características de propagación de los haces gaussianos para la realización del trazo de rayos en sistemas ópticos. Este método explota las propiedades ondulatorias de la luz representadas por el fenómeno de la difracción para relacionar los parámetros difractivos propios de los haces gaussianos con las condiciones geométricas características del trazo de rayos. Con el fin de realizar una descripción detallada de esta propuesta se presentan algunos ejemplos descriptivos que muestran la versatilidad y precisión de esta técnica. Adicionalmente se presenta el desarrollo analítico correspondiente. Aunque en este trabajo no se muestra explícitamente, el usar esta técnica abre la posibilidad de calcular el patrón de difracción correspondiente al sistema óptico bajo estudio en un plano de observación de interés.

Introducción
El trazo de rayos representa una herramienta fundamental para la caracterización de un sistema óptico[1-2]. Por ejemplo las lentes convencionales que encontramos cotidianamente para su utilización y aprovechamiento han sido diseñadas y optimizadas mediante algún programa de cómputo[3]. Adicionalmente en la instrumentación moderna los sistemas ópticos se han vuelto parte fundamental del quehacer cotidiano, por ejemplo en aplicaciones médicas[4-5], aplicaciones biomédicas[6-9], telecomunicaciones[10-11], metrología [12], entre otras. Aún más, la nanotecnología, y especialmente la nano-óptica[13-15], han mostrado un tremendo auge en estos días. A medida que las componentes ópticas son más refinadas y sofisticadas, las condiciones de diseño y de pruebas se vuelven cada vez más complejas. Básicamente la complejidad en el diseño de estas componentes modernas radica en que la luz (ondas electromagnéticas) presenta naturaleza ondulatoria[16-18] por lo que las técnicas convencionales de trazo de rayos no resultan ser suficientes para una caracterización adecuada, ya que las características difractivas a este nivel influyen en gran medida en el comportamiento de las componentes. Por ejemplo, para encontrar la "función de transferencia

puntual”, ampliamente conocida como PSF por sus siglas en inglés, es necesario trazar cientos de rayos para obtener una estimación de dicha función[19-20]. Sin embargo, esta estimación obtenida geométricamente representa en la mayoría de los casos apenas una aproximación, ya que no presenta detalles finos que pueden ser muy importantes especialmente en áreas como la holografía y la interferometría. Adicionalmente, mediante el trazo de rayos sería prácticamente imposible obtener una estimación detallada de la respuesta debida a la difracción en alguna zona distinta a la del foco geométrico. En este sentido se vuelve necesario el estudio analítico y diseño de nuevas herramientas de cálculo y de prueba de tan refinadas componentes ópticas.

Con el fin de coadyuvar en la propuesta de contar con herramientas más precisas que permitan la caracterización más puntual de las componentes ópticas modernas, en este trabajo se presenta una propuesta en la cual la teoría de la difracción es aplicada para caracterizar un sistema óptico. Esta propuesta, además de utilizar cálculos de difracción, permite tener un enfoque geométrico, de una manera similar a la realizada mediante el trazo de rayos, ofreciendo la posibilidad de realizar cálculos del patrón de difracción. En este sentido es importante aclarar que en este reporte no se presentan patrones de difracción ya que el alcance de este trabajo se limita a presentar por primera vez la posibilidad de combinar una técnica difractiva con una técnica de trazo de rayos. Este reporte se limita a presentar los desarrollos analíticos necesarios así como algunos ejemplos particulares de trazo de rayos, dejando para un futuro la investigación que permita calcular los patrones de difracción correspondientes.

La presentación de este trabajo se divide en capítulos de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan los principios analíticos de la propagación de la luz, en el capítulo 3 se muestra el desarrollo teórico de la gaussiana invariante, en el capítulo 4 se presentan algunos códigos de los ejemplos tratados, y finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y perspectivas a futuro.

Capítulo II

La integral de Propagación de Fresnel

El método más utilizado para la realización del cálculo analítico de la propagación de un frente de onda es la integral de propagación de Fresnel. Esta integral permite determinar la distribución de amplitud de la propagación de una onda desde un plano objeto (x,y) hasta un plano imagen (ξ,η). Ambos planos son paralelos entre sí y están separados una distancia z como se indica en la figura (2.1).

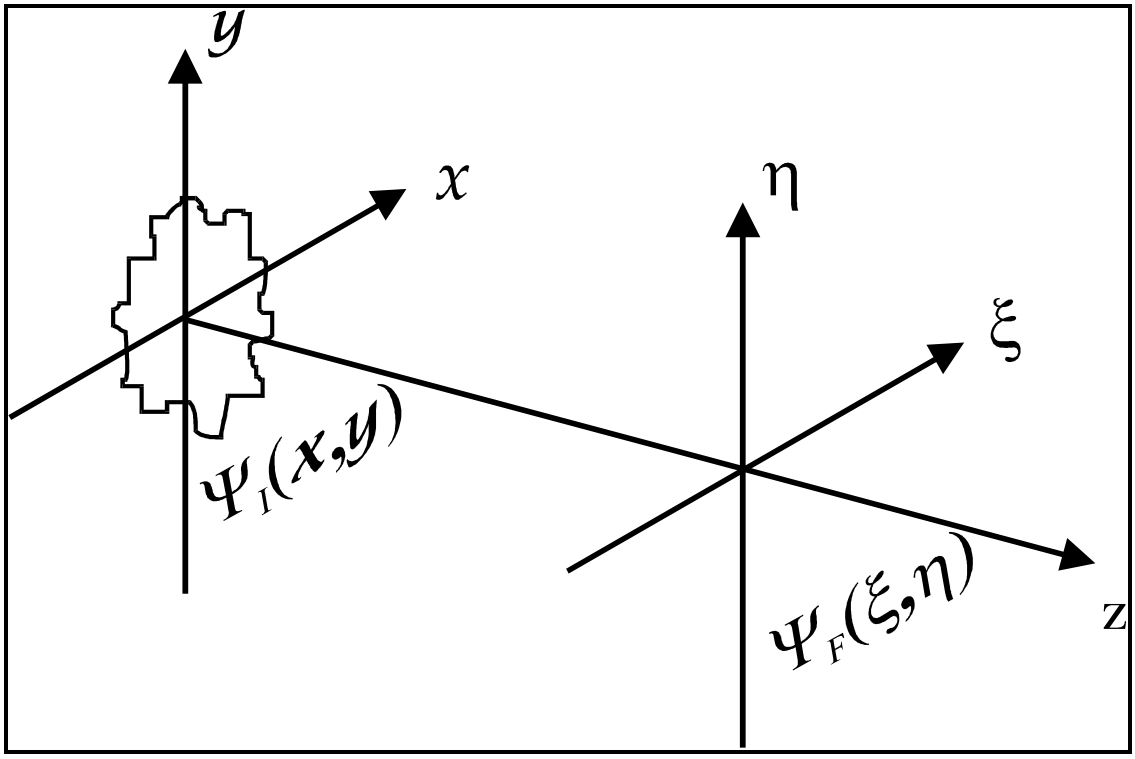

Figura (2.1). Distribución de amplitud inicial en el plano (x,y) y su correspondiente distribución final en el plano (ξ,η).

La integral de Fresnel está dada de acuerdo a la expresión matemática mostrada en la ecuación (2.1),

$$\psi_F(\xi,\eta) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_I(x,y)exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}dxdy, \qquad (2.1)$$

donde $i=\sqrt{-1}$ y λ es la longitud de onda de la luz de iluminación.

La integral de Fresnel representada por la ecuación (2.1) físicamente puede ser interpretada de acuerdo al principio de propagación de ondas pequeñas (wavelets) de Huygens. En este principio se considera que el frente de onda puede ser representado por una serie de ondas esféricas, en el cual cada onda pequeña contribuye de manera aditiva y coherente a la formación del frente de onda propagante. Los términos cuadráticos en la ecuación (2.1) representan estos frentes de onda esféricos en una aproximación de primer orden en una serie de Taylor, y son conocidos como frentes de onda parabólicos. La sumatoria, a su vez, queda representada por las integrales en dicha ecuación.

Para ciertos fines como los que se tratarán en este trabajo es importante contar con la integral de Fresnel unidimensional. Este caso puede visualizarse, ya sea en una dimensión, o de una manera más general como el tratamiento analítico de la propagación para ondas cilíndricas. En este trabajo éste será el tratamiento analítico utilizado.

Analizando el caso unidimensional (cilíndrico), puede mostrarse que la integral de Fresnel queda dada por la ecuación (2.2),

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_I(x) exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx. \tag{2.2}$$

Una herramienta matemática utilizada ampliamente en las ciencias ópticas, entre otras, es la transformada de Fourier, la cual encuentra su aplicación en el cálculo de los patrones de difracción mediante la integral de Fresnel. Sea $f(x)$ una función arbitraria, en general compleja, que depende del parámetro x. Su transformada de Fourier se define como,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) exp(-i2\pi ux) dx = \mathcal{F}\{f(x)\}. \tag{2.3}$$

En el caso de que la integral dada en la ecuación (2.3) exista, entonces es posible calcular la transformada inversa, la cual está dada por la expresión (2.4),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) exp(i2\pi ux) du = \mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}. \tag{2.4}$$

Físicamente, la transformada de Fourier puede visualizarse como la representación del espectro de frecuencias de la

función $f(x)$, por lo que la variable u representa el eje de frecuencias o el espacio denominado de Fourier.

Utilizando la transformada de Fourier, la ecuación (2.2) puede escribirse como se muestra en la ecuación (2.5),

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) \mathcal{F}\left\{\psi_I(x)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}x^2\right)\right\}. \tag{2.5}$$

El representar la transformada de Fresnel de la forma dada en la ecuación (2.5) permite tener una visualización alternativa de su significado físico, Por ejemplo, dado que la transformada de Fourier de un producto resulta ser una convolución de las transformadas de las funciones involucradas, de la ecuación (2.5) puede observarse que la transformada de Fresnel involucra la convolución de una fase cuadrática con la transformada de Fourier de la función objeto. Adicionalmente, el utilizar las técnicas de Fourier, permite realizar los cálculos de una manera más eficiente aprovechando las herramientas que ya se han desarrollado específicamente para cálculos de Fourier[21-24].

A continuación se presentan ejemplos unidimensionales de la aplicación de la integral de propagación de Fresnel para algunas distribuciones de amplitud típicas en el plano objeto y sus correspondientes distribuciones en el plano imagen.

Integral de Propagación de Fresnel para una distribución de amplitud tipo rendija

En la figura (2.2) se muestra una distribución de amplitud de tipo rendija (rectangular) en el plano objeto (x, y).

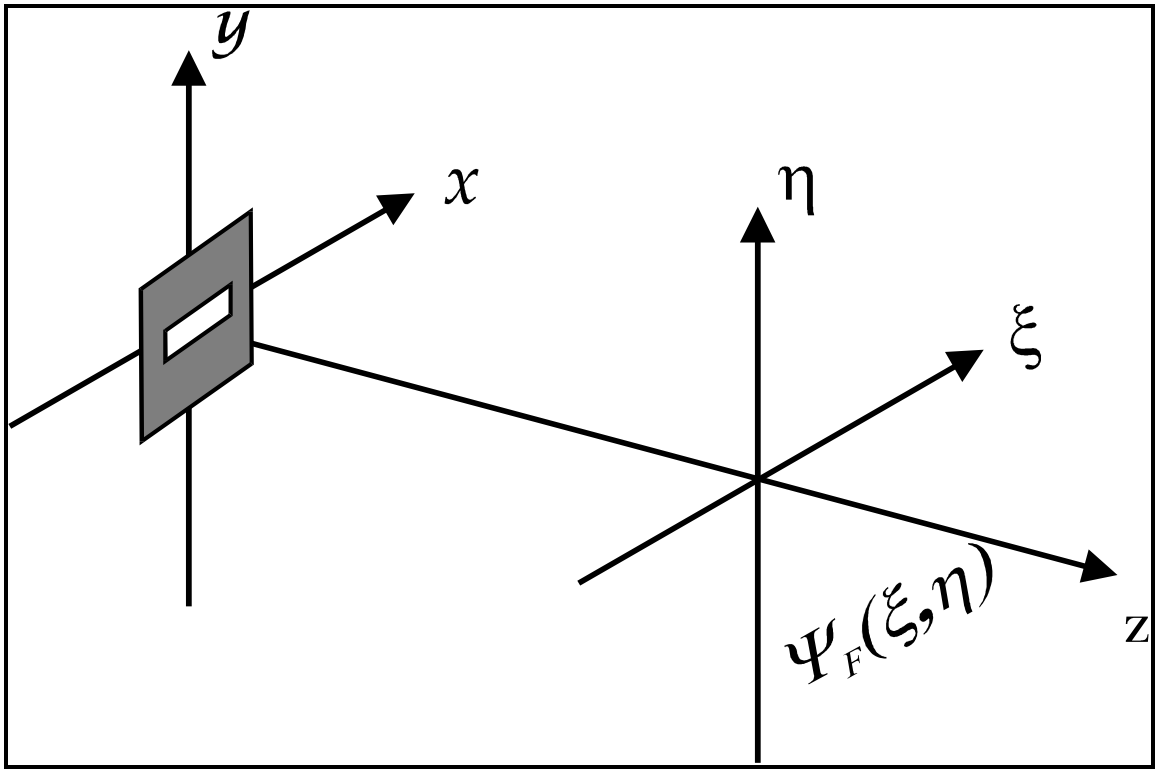

Figura (2.2). Distribución de amplitud tipo rendija en el plano (x,y).

La correspondiente distribución de amplitud en el plano imagen (ξ,η) se muestra en la siguiente ecuación,

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{x}{A}\right) exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx. \qquad (2.6)$$

En la ecuación (2.6) la función $rect\left(\frac{x}{A}\right)$ se define de la manera usual, esto es, unitaria en el intervalo $\left[-A/2, A/2\right]$ y cero fuera del intervalo.

La ecuación (2.6) no puede resolverse de manera analítica por lo que habrá que utilizar algún método numérico para su evaluación aproximada. La distribución de amplitud en el plano imagen para una rendija de 1 mm colocada en el plano objeto, utilizando técnicas de Fourier, se muestra en las figuras (2.3) a (2.6) para distintos casos.

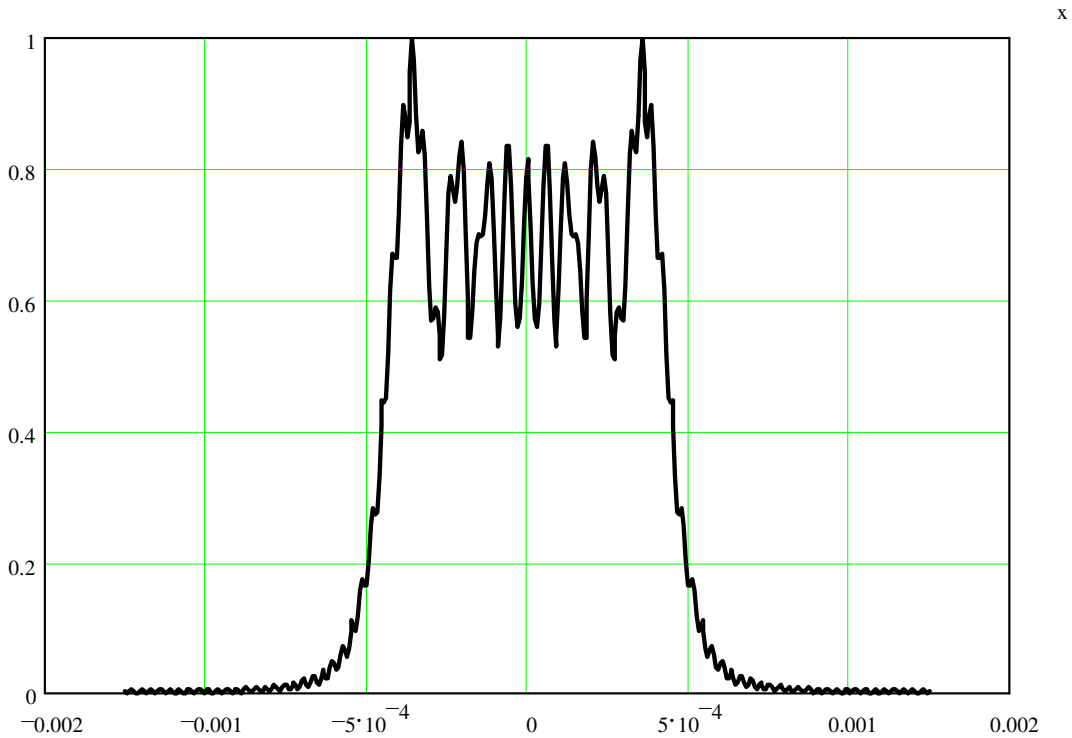

Figura (2.3). Distribución de amplitud en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 5 cm.

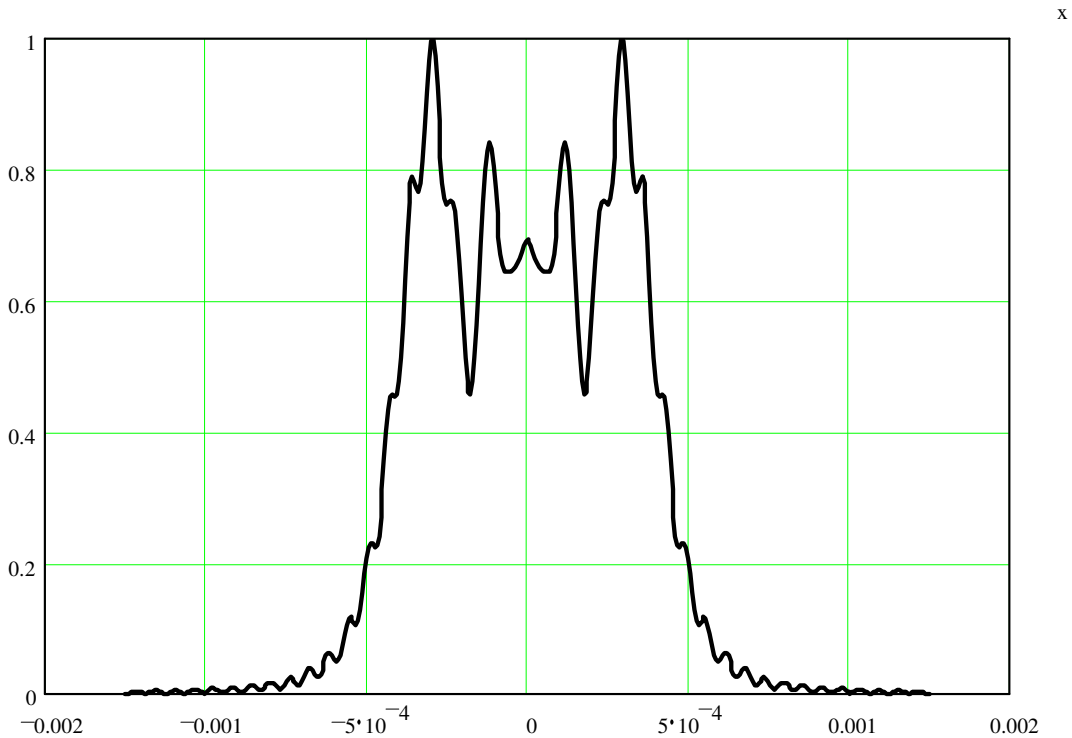

Figura (2.4). Distribución de amplitud en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 10 cm.

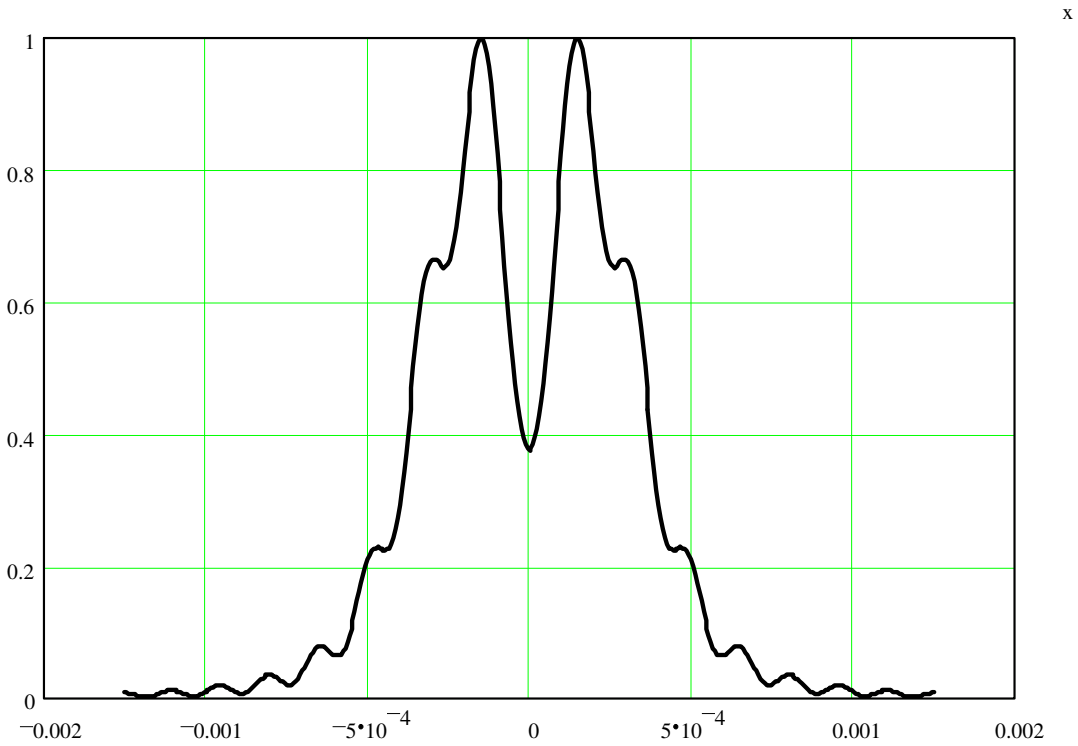

Figura (2.5). Distribución de amplitud en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 25 cm.

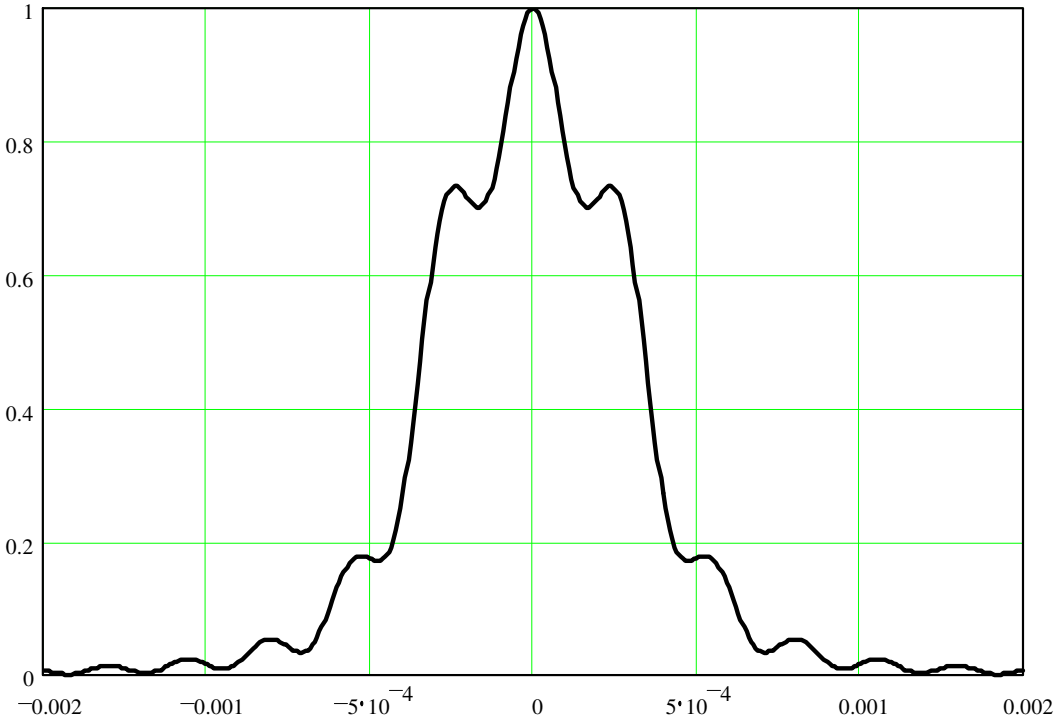

Figura (2.6). Distribución de amplitud en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 40 cm.

Se notará que para casos muy alejados del plano objeto, la función de distribución asemeja una función $sinc(x)$, la cual se define de acuerdo a la ecuación (2.7),

$$sinc(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ sen(\pi x)/(\pi x) & si\ x \neq 0 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Este fenómeno se sustenta en el principio de difracción de Fraunhoffer[17] que establece que la transformada de Fresnel en un plano imagen muy alejado puede aproximarse por la expresión dada en la ecuación (2.8),

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) \mathcal{F}\{\psi(x)\}. \tag{2.8}$$

Utilizando el principio de Fraunhoffer para la distribución rectangular del plano objeto, la amplitud en el plano imagen puede aproximarse como muestra la ecuación (2.9),

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) A\, sinc\left(A\frac{\xi}{\lambda z}\right). \tag{2.9}$$

La distribución de amplitud en el plano imagen, con distancia de separación de 1 m, se muestra en la figura (2.7).

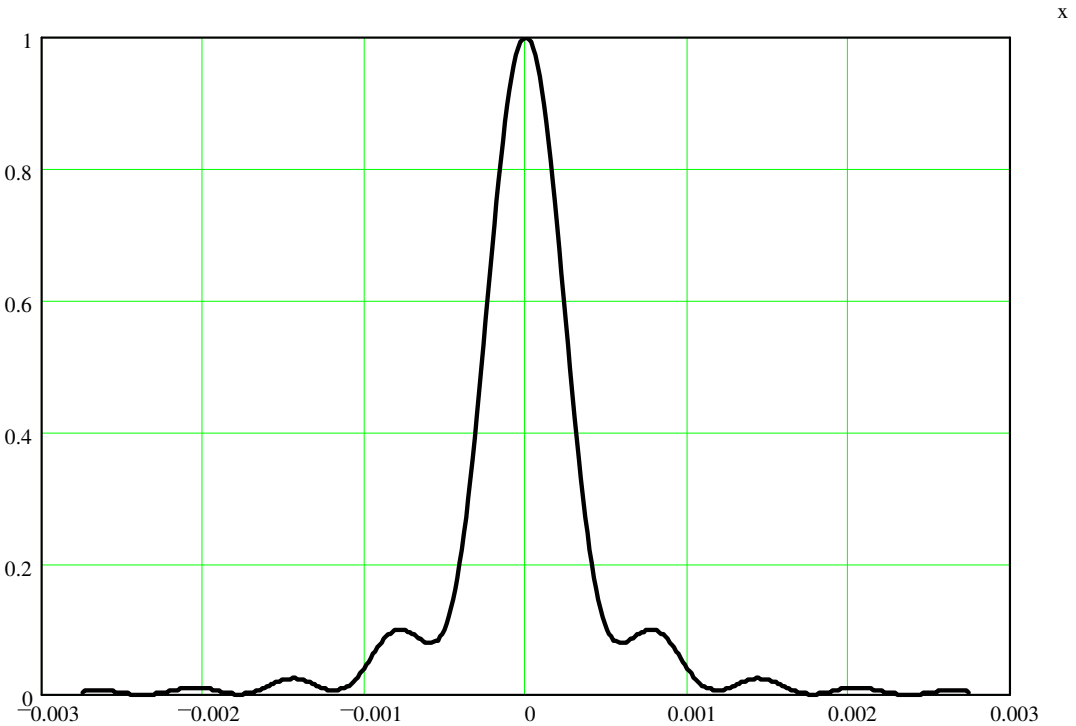

Figura (2.7). Distribución de amplitud tipo sinc en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 1 m.

Haz gaussiano de semiancho $r0$ centrado en el origen

Un haz gaussiano centrado en el origen posee la forma mostrada en la ecuación (2.10),

$$\psi(x) = exp\left[-\frac{x^2}{r0^2}\right], \tag{2.10}$$

donde $r0$ es el semiancho de la gaussiana. La distribución de amplitud de este haz se muestra gráficamente en la figura (2.8).

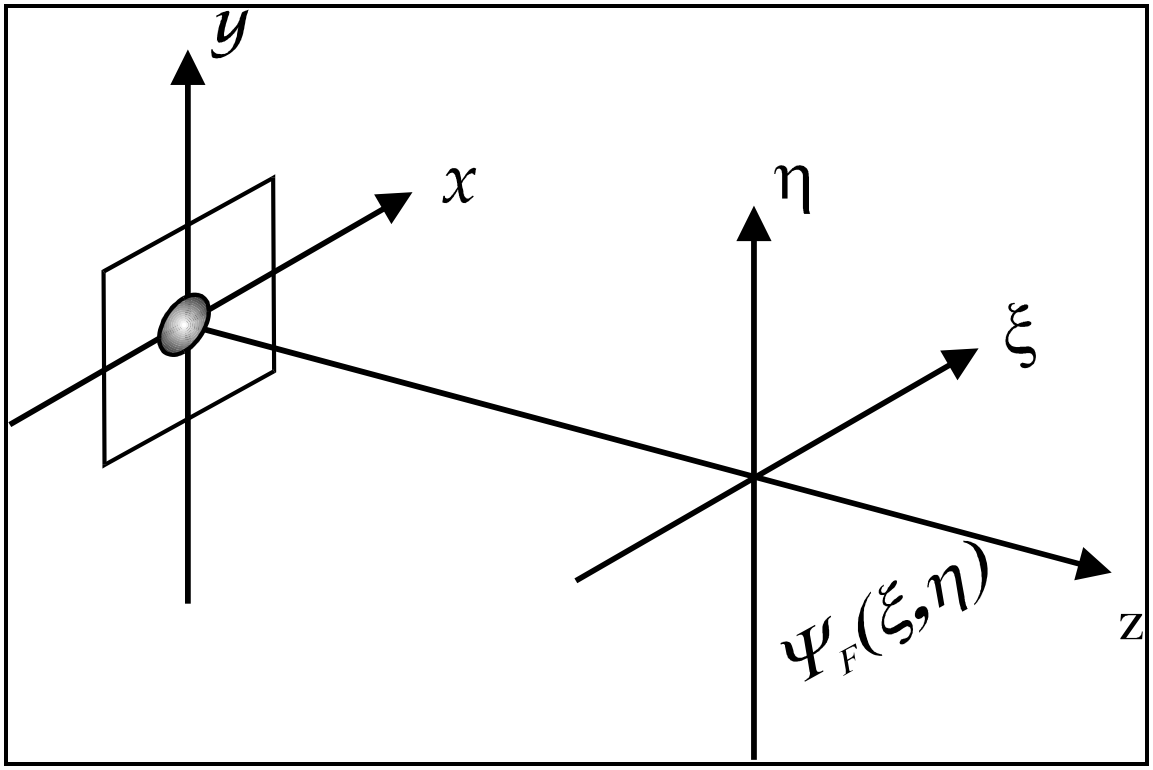

Figura (2.8). Distribución de amplitud tipo gaussiana. El centro de la gaussiana se localiza en el origen del plano objeto.

Aplicando la integral de propagación de Fresnel se obtiene la siguiente expresión,

$$\psi_F(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{x^2}{r0^2}\right] exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx \tag{2.11}$$

La integral mostrada en la ecuación (2.11) puede resolverse de manera exacta obteniendo el resultado dado por la ecuación (2.12),

$$\psi_F(\xi) = \frac{\pi r0^2}{\lambda z - i\pi r0^2} \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i} exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) exp\left[-\frac{\pi^2 r0^2 \lambda z}{\lambda z - i\pi r0^2}\left(\frac{\xi}{\lambda z}\right)^2\right]. \tag{2.12}$$

El resultado anterior puede escribirse de una manera más compacta definiendo $A \equiv \frac{\pi r0^2}{\lambda z - i\pi r0^2} \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i}$, separando las exponenciales que contengan términos únicamente reales y las que contengan sólo términos imaginarios se obtiene la ecuación (2.13),

$$\psi_F(\xi) = A\ exp\left[-\frac{\xi^2}{r0^2\left(1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 r0^4}\right)}\right] exp\left[i\frac{\pi\xi^2}{\lambda z\left(1+\frac{\pi^2 r0^4}{\lambda^2 z^2}\right)}\right]. \tag{2.13}$$

La amplitud de distribución representada por la ecuación (2.13) tiene un significado físico muy simple, ya que está compuesta por el producto de tres términos. El primer término representa una amplitud constante. El segundo consiste de una exponencial real que mantiene la propiedad gaussiana del haz propagado. Por último, el tercer término consiste de una exponencial con argumento imaginario que representa, como se ha indicado anteriormente de la aproximación parabólica de Fresnel, una onda esférica, en este caso divergente.

En la exponencial real, puede observarse que el semiancho de la gaussiana cambia de un valor inicial $r0$ a un valor R dado por la ecuación (2.14),

$$R \equiv r0\sqrt{1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 r0^4}}. \tag{2.14}$$

Una gráfica del semiancho de la gaussiana en función de la distancia de propagación se presenta en la figura (2.9),

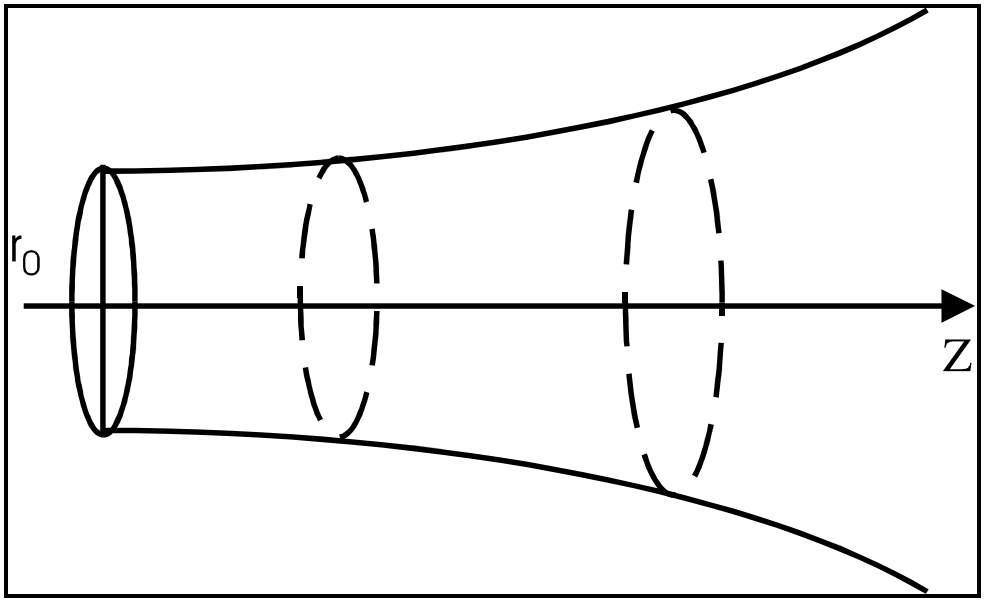

Figura (2.9). Semiancho del haz gaussiano en función de la distancia de propagación z.

De la exponencial imaginaria de la ecuación (2.13) puede observarse que el radio de curvatura queda dado por la ecuación (2.15),

$$R_C \equiv \left(z + \frac{\pi^2 r0^4}{\lambda^2 z}\right). \tag{2.15}$$

Con las definiciones introducidas por las ecuaciones (2.14) y (2.15) el haz gaussiano puede escribirse de manera más compacta como en la ecuación (2.16)

$$\psi_F(\xi) = A\ exp\left(-\frac{\xi^2}{R^2}\right)\ exp\left(i\frac{\pi}{\lambda R_C}\xi^2\right). \tag{2.16}$$

En la figura (2.10) se muestra la variación del radio de curvatura en función de la distancia de propagación.

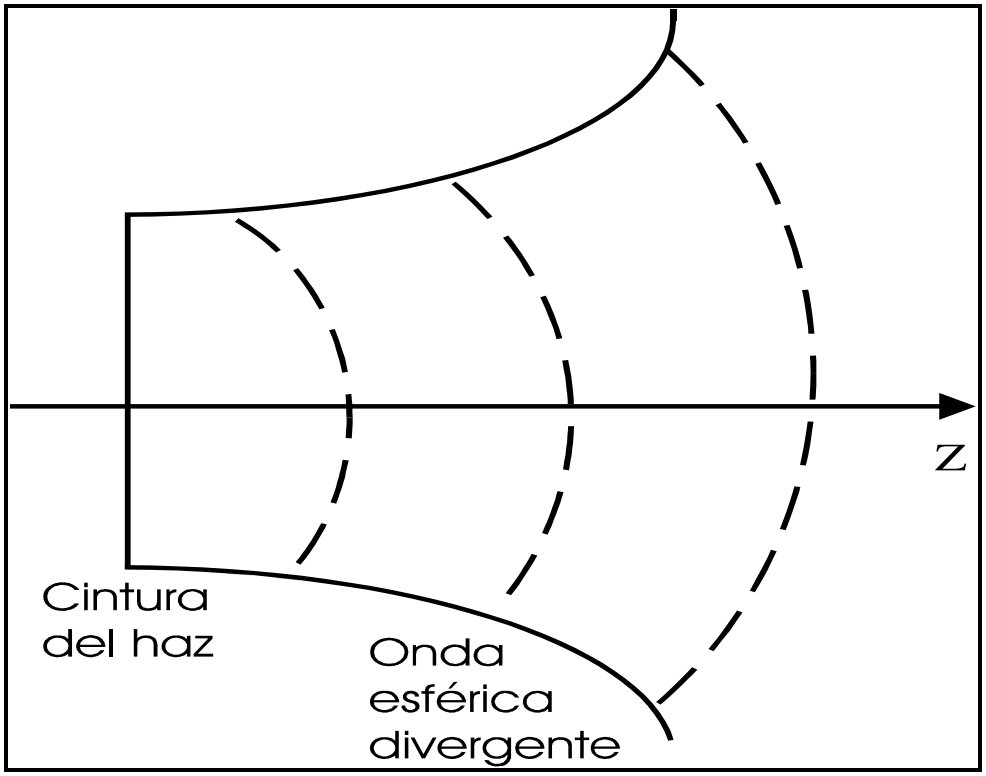

Figura (2.10). Variación del radio de curvatura del haz gaussiano en función de la distancia de propagación.

De la figura anterior puede observarse que en el plano objeto el haz gaussiano tiene el comportamiento de una onda plana y lo que mantiene la característica gaussiana es su perfil, tanto en su distribución de amplitud como de intensidad. Una vez que el haz gaussiano es propagado a una distancia determinada el haz presenta una fase cuadrática, lo cual representa una onda esférica que mantiene su confinamiento espacial dada por la envolvente gaussiana representada por la exponencial real de la ecuación (2.16).

Dada la simetría de la propagación de un haz gaussiano, es posible calcular la amplitud de distribución para valores negativos de z. Con el fin de conocer el perfil de la amplitud de la onda gaussiana para el caso convergente, como sería en el caso de utilizar una lente positiva para enfocar un haz gaussiano, es posible realizar un reflejo de la onda divergente dispuesta del lado derecho del plano objeto hacia el eje negativo, en el lado izquierdo. En la figura (2.11) se muestra el comportamiento general de la propagación de un haz gaussiano.

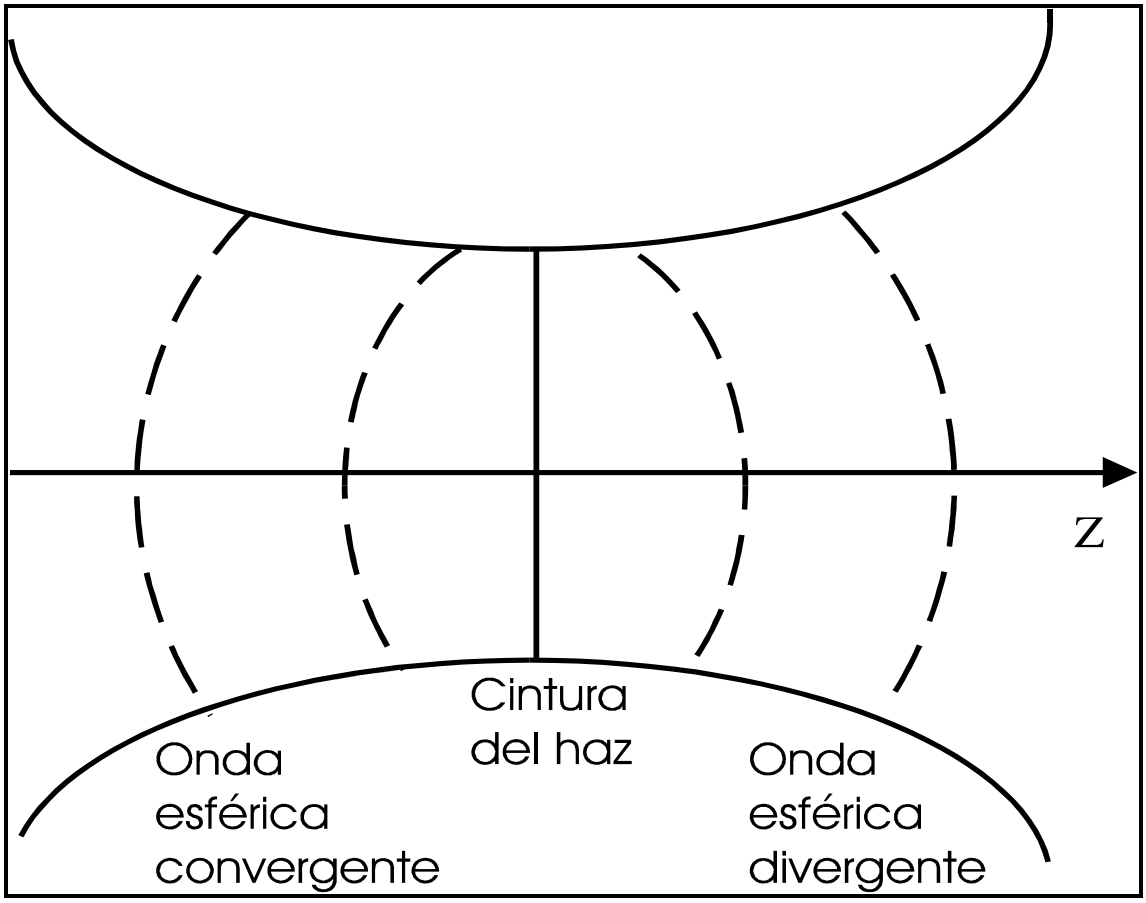

Figura (2.11). Comportamiento general de la propagación de un haz gaussiano, donde se ha incluido la reflexión del caso divergente para obtener la correspondiente parte convergente.

Se puede observar en la figura anterior que la cintura del haz queda colocada precisamente donde el haz gaussiano tiene el comportamiento de una onda plana, ya que su radio de curvatura en este plano es infinito, de acuerdo a la ecuación (2.15) para $z = 0$. Como se ha mencionado previamente la propagación del haz gaussiano muestra simetría alrededor del plano objeto.

Haz gaussiano desplazado del origen una distancia x_0

Un caso que resultará importante para el desarrollo de este trabajo queda representado por el cálculo de la propagación de un haz gaussiano desplazado del origen. Este haz puede representarse analíticamente como lo muestra la ecuación (2.17),

$$\psi(x) = A \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{r0^2}\right], \tag{2.17}$$

La integral de propagación de Fresnel para este caso es la siguiente,

$$\psi_F(\xi) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{r0^2}\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx. \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) puede resolverse de manera exacta obteniéndose la expresión dada por la ecuación (2.19),

$$\psi_F(\xi) = C\ exp\left[-\frac{(\xi-x_0)^2}{R^2}\right]\ exp\left[i\frac{\pi(\xi-x_0)^2}{\lambda R_C}\right], \tag{2.19}$$

Donde se han hecho las definiciones siguientes:

$$C = A\sqrt{\frac{\pi r0^2 \lambda z}{\lambda z - i\pi r0^2}},\ \ R = r_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 r0^4}} \text{ y } R_C = \left(z + \frac{\pi^2 r0^4}{\lambda^2 z}\right)\ .$$

La descripción física de la ecuación (2.19) es inmediata. Nuevamente consiste de tres términos multiplicativos. El primer término representa una amplitud compleja constante. El segundo término, la exponencial real mantiene la propiedad gaussiana del haz propagado, pero en esta ocasión, a diferencia del caso de la gaussiana centrada en el origen, el haz gaussiano se mantiene con el mismo desplazamiento que tenía en el plano objeto. Finalmente el tercer término, la exponencial con argumento imaginario se mantiene con el mismo desplazamiento pero con la curvatura que correspondería al caso de la gaussiana centrada en el origen. El semiancho de la gaussiana también se mantiene como en el caso del haz gaussiano centrado en el origen.

Para interpretar el resultado anterior se puede pensar en el siguiente experimento. Consideremos una transparencia en la cual se ha impreso una distribución gaussiana. Si esta distribución es colocada en el origen de un sistema óptico y es iluminada con una onda plana paralela al eje óptico, entonces la gaussiana propagada estará centrada en el eje óptico a una distancia determinada del plano objeto, con las características dadas por las ecuaciones anteriores de radio de curvatura y semiancho. Si ahora recorremos la transparencia a un punto del plano objeto fuera del origen y seguimos manteniendo la misma onda plana como fuente de iluminación, en el plano imagen se encontrará una

distribución de amplitud gaussiana idéntica a la del caso anterior pero recorrida y su centro corresponderá al de la sombra geométrica de dicha transparencia. Los casos descritos se muestran de manera gráfica en la figura (2.12).

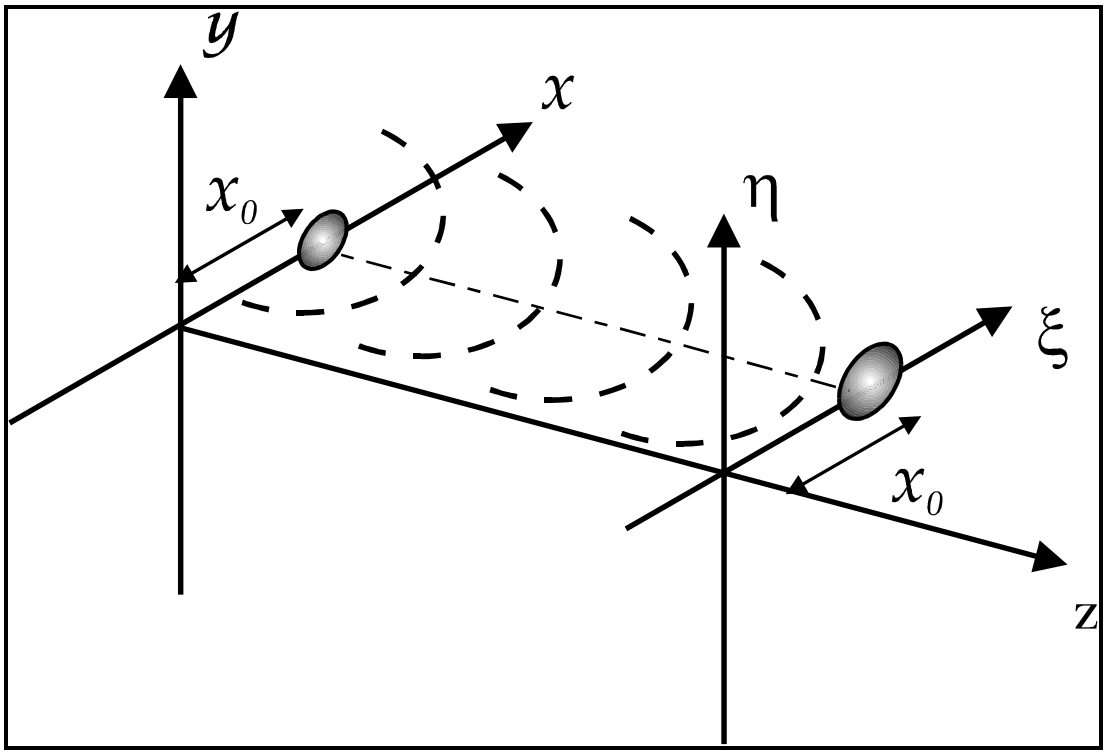

Figura (2.12). Diagrama esquemático de la propagación de un haz gaussiano centrado fuera del origen.

Haz gaussiano propagándose con un ángulo θ de inclinación

Un caso de mayor interés que resultará importante en el desarrollo de la técnica que se presenta en este trabajo lo constituye el caso de un haz gaussiano centrado en el origen, pero en esta ocasión propagándose con un ángulo de inclinación θ como lo representa la ecuación (2.20),

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{r0^2}\right) exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right), \qquad (2.20)$$

La ecuación (2.20) puede interpretarse físicamente de las dos siguientes maneras: la primera es considerar, por ejemplo, un láser de He-Ne orientado a un cierto ángulo con respecto al eje óptico para observar el patrón de difracción en un plano

normal al eje óptico colocado a cierta distancia de dicho láser. La segunda opción es considerar una transparencia en la cual se ha impreso una distribución tipo gaussiana, la cual se ilumina con una onda plana inclinada con respecto al eje óptico.

Para determinar la distribución de amplitud en el plano imagen se emplea la integral de propagación de Fresnel sobre la ecuación (2.20), como muestra la ecuación (2.21),

$$\psi_F(\xi) = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{r0^2}\right) exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx. \qquad (2.21)$$

Como en los casos anteriores la integral anterior puede evaluarse de manera exacta resultando en la expresión dada por la ecuación (2.22),

$$\psi_F(\xi) = C\exp\left\{-\frac{(\xi-\xi_A)^2}{R^2}\right\} exp\left[i\frac{\pi}{\lambda R_C}(\xi-\xi_B)^2\right]. \qquad (2.22)$$

Donde se han hecho las definiciones siguientes:

$C = A\sqrt{\frac{\pi r0^2\lambda z}{\lambda z - i\pi r0^2}}\exp\left(-i\frac{\pi^3 r0^4\sin^2\theta}{\lambda^3 z}\right)$, $\xi_A = zsin\theta$, $R = r_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 r0^4}}$, $\xi_B = \frac{\pi^2 r0^4 zsin\theta}{\lambda^2 z^2}$, y $R_C = \left(z + \frac{\pi^2 r0^4}{\lambda^2 z}\right)$

A diferencia de los casos anteriores la ecuación (2.22) requiere una revisión cuidadosa. Primeramente se observa que consiste de tres términos multiplicativos, en este sentido es igual que en los casos anteriores. El primer término representa una amplitud compleja constante. El segundo término, la exponencial real, mantiene la propiedad gaussiana del haz propagado, y su centro coincide con la sombra geométrica esperada para el ángulo θ. Finalmente el tercer término muestra que el radio de curvatura es el mismo que en los casos anteriores, pero el centro de curvatura no coincide con la proyección geométrica esperada, sino que tiene un factor de escala multiplicativo. La interpretación física de este fenómeno está abierta para su análisis.

En la figura (2.13) se muestra un diagrama de la situación física de este caso. El haz gaussiano reside en la sombra geométrica mientras que el centro de curvatura está desplazado. Intuitivamente los radios de curvatura que se esperarían obtener seguirían la línea recta sólida, sin

embargo, los radios de curvatura reales se representan mediante las curvas punteadas, mostrando su desplazamiento con respecto al centro espacial de la gaussiana.

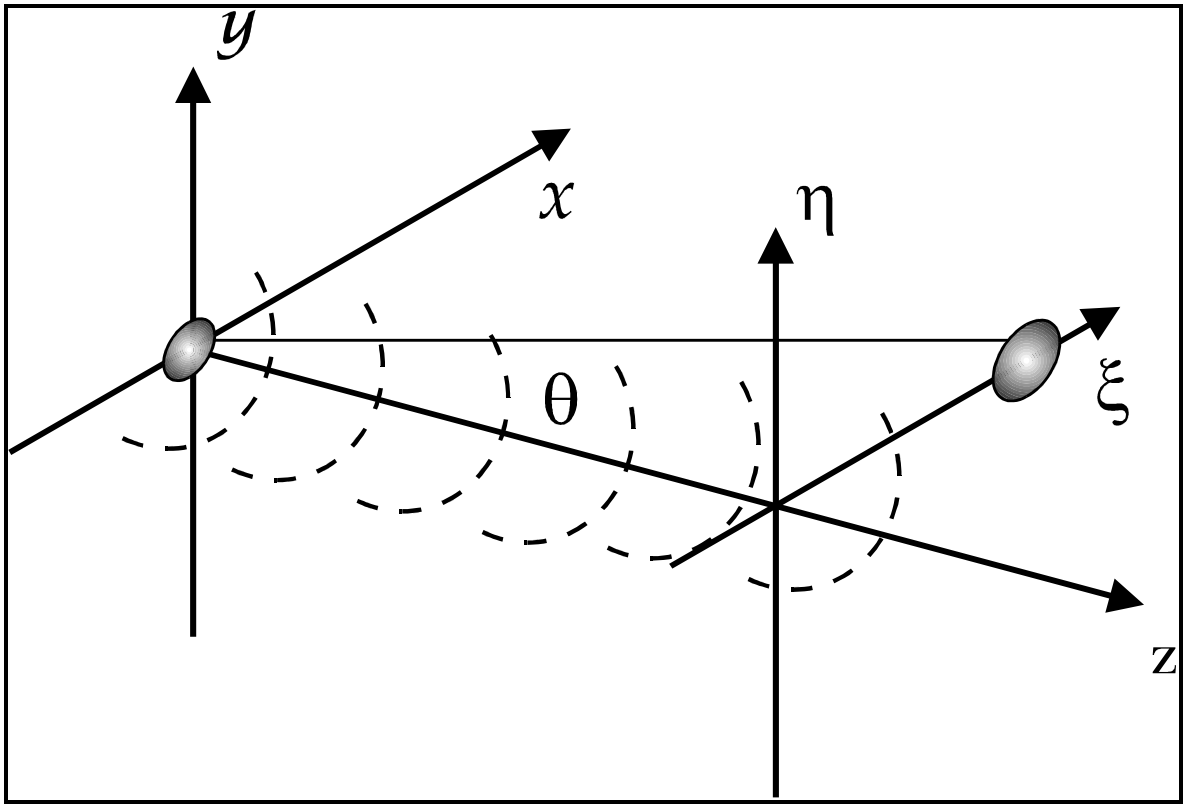

Figura (2.13). Diagrama esquemático de la propagación de un haz gaussiano con un cierto ángulo de inclinación.

Con las descripciones previas quedan sentadas las bases para el desarrollo necesario de la gaussiana invariante que se presenta en el capítulo 3 de este trabajo y permitirá, posterior a su análisis, el desarrollo de simulaciones por computadora empleando dicha invariante. Tanto el pseudocódigo como los gráficos obtenidos se presentan en el capítulo 4 de este trabajo.

Capítulo III

La gaussiana invariante

En el capítulo 2 se presentaron las bases matemáticas que permitirán realizar el trazo de rayos mediante el carácter difractivo de la integral de propagación de Fresnel. Se describió el desarrollo analítico y la interpretación física para distintos casos de haces gaussianos que se propagan. En este capítulo se describe el análisis matemático y la interpretación física de la gaussiana invariante, la cual será obtenida como una generalización de los ejemplos revisados previamente. Esta generalización permitirá construir las técnicas necesarias para realizar el trazo de rayos en un programa de simulación por computadora.

Antes de hacer la descripción de la gaussiana invariante, es necesario remarcar una aproximación que es preponderante en este trabajo. Esta aproximación permitirá realizar el trazo de rayos para cualquier sistema óptico eliminando las restricciones dadas por la teoría de la difracción, que imponen que el ángulo de inclinación de los rayos, denotado θ, debe ser suficientemente pequeño, por lo cual el trazo es válido únicamente en la región paraxial, como se vio en los ejemplos del capítulo anterior. En esos ejemplos se realizó la propagación del haz gaussiano con un ángulo de inclinación, como lo indica la ecuación (2.22), mediante el término $\xi_A = zsin\theta$, que es válido únicamente para la región paraxial, es decir, para un ángulo θ suficientemente pequeño, lo cual restringe el campo de acción de la gaussiana invariante para el trazo de rayos. Para evitar esta restricción se propone reemplazar el término indicado anteriormente por la siguiente ecuación,

$$\xi_A = zsin\theta \approx ztan\theta \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) es la sustitución natural que se puede pensar de una manera geométrica. Por supuesto queda pendiente para una discusión futura su validez en el cálculo del patrón de difracción correspondiente. Sin embargo, como se mostrará en los ejemplos subsecuentes esta aproximación permitirá

realizar el trazo de rayos de manera correcta aún fuera de la región paraxial.

En la figura (3.1) se muestra, de manera descriptiva, la validez desde el punto de vista geométrico de la sustitución propuesta, así como la zona donde ambas funciones coinciden.

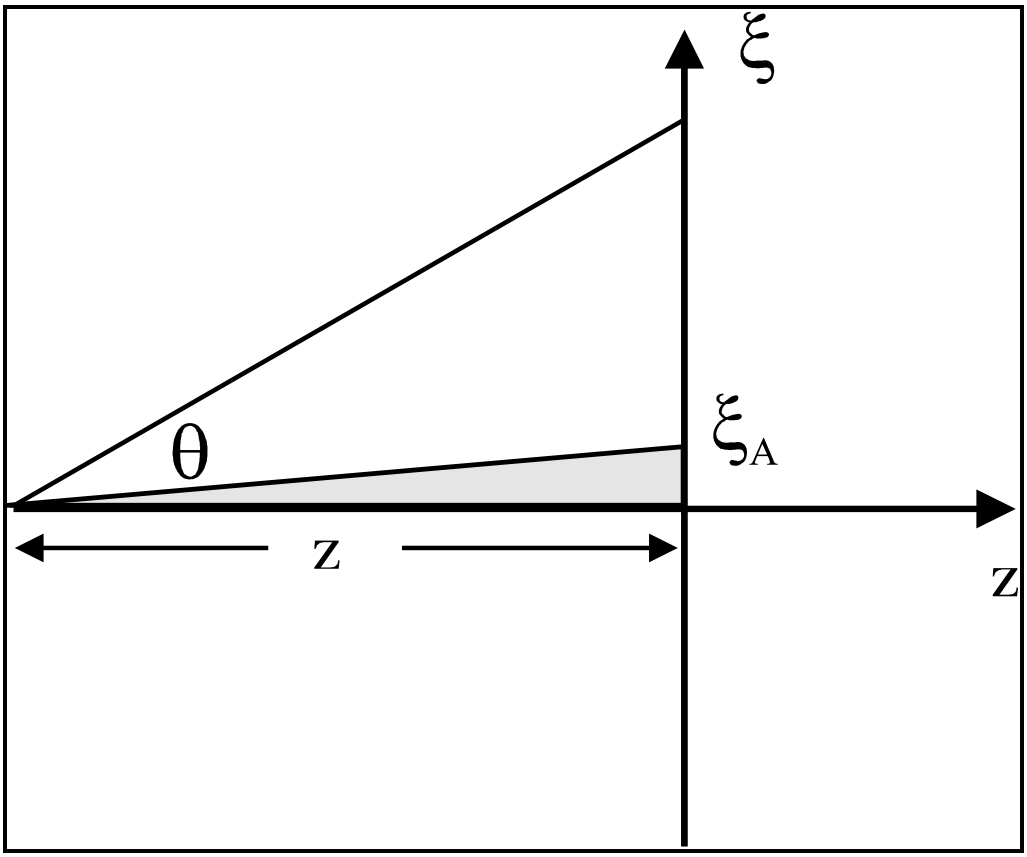

Figura (3.1). Diagrama geométrico que muestra como se puede eliminar la restricción de la aproximación paraxial para el trazo de rayos empleando la gaussiana invariante. Para ángulos pequeños (<5°) como es el caso de la zona sombreada en esta figura ambas funciones trigonométricas son válidas, (como ejemplo para un ángulo de 6° la diferencia entre ambas funciones es de una milésima), sin embargo para ángulos mayores como el mostrado en la zona sin sombra, es necesario hacer uso de la $tan\theta$.

Es necesario remarcar que el concepto de la gaussiana invariante, como se verá a continuación, no es una invariante en el sentido estricto como se le considera en el área físico-matemática, como en el caso de la invariante de Lagrange. Lo que realmente se mantiene invariante en esta propuesta es la forma matemática del haz gaussiano bajo propagación. Por lo anterior, probablemente un nombre más adecuado sería: "gaussiana invariante en su forma

matemática". Sin embargo, por brevedad, en este trabajo se le ha denominado gaussiana invariante.

Como se ha indicado en los capítulos previos, por brevedad de las ecuaciones se considerará únicamente el caso unidimensional o cilíndrico; la generalización a dos dimensiones puede hacerse extendiendo el desarrollo de manera directa.

La gaussiana invariante unidimensional está dada matemáticamente por la siguiente expresión,

$$\psi(x) = A\, exp(i\alpha x)\, exp(i\beta x^2) \exp\left[-\frac{(x-xA)^2}{r0^2}\right] \exp[\mathrm{i}\gamma(x - xB)^2]. \qquad (3.2)$$

Como puede observarse de la ecuación (3.2) la gaussiana invariante está representada por el producto de cinco términos multiplicativos. El primer término consiste de una constante que representa la amplitud de la onda. Los siguientes cuatro términos corresponden a cuatro exponenciales.

De las cuatro exponenciales mencionadas, la tercera es la que le proporciona precisamente el carácter gaussiano, ya que sus argumentos son reales y cuadráticos. Esta exponencial confina espacialmente el haz con un perfil gaussiano.

La primera exponencial permite asignarle al haz gaussiano un ángulo de propagación inclinado con respecto al eje óptico, como se ha descrito en el capítulo anterior. La segunda exponencial permite asignarle al haz un enfoque o un desenfoque, mientras que la última exponencial es propia de la propagación del haz asignándole un determinado radio de curvatura, que como se ha descrito en el capítulo anterior, el centro de curvatura no coincide con el centro espacial de la gaussiana. Las propiedades discutidas en este párrafo se muestran de manera descriptiva en la figura (3.2), la cual muestra la distribución de amplitud de un haz gaussiano propagándose con un ángulo de inclinación determinado.

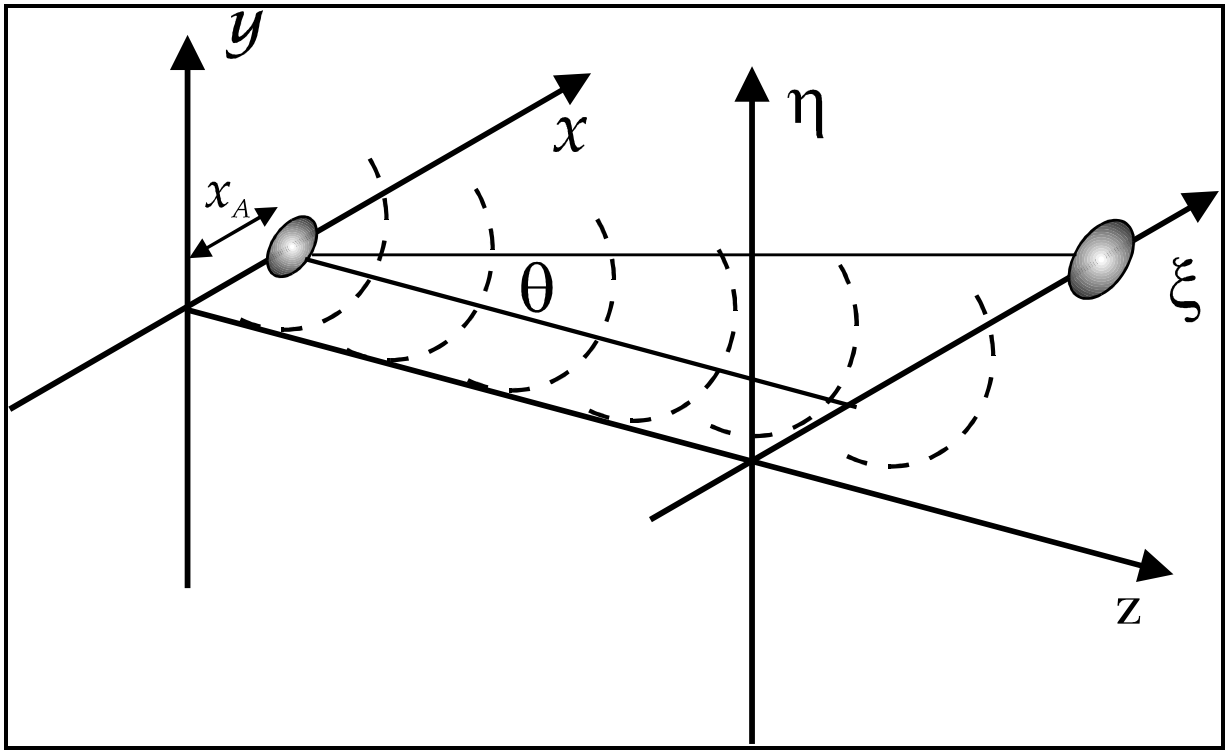

Figura (3.2). Diagrama esquemático para la propagación de un haz gaussiano con un ángulo de inclinación y centrado fuera del origen.

Al examinar cuidadosamente la ecuación (3.2), puede pensarse como una primera impresión que hay términos repetidos que podrían simplificarse ya que existe una interrelación entre algunos de los parámetros de la gaussiana. Por ejemplo, el parámetro α, está íntimamente relacionado con γ y xB ; asimismo el parámetro β está relacionado con γ. Más adelante se verá la necesidad de mantener estos parámetros independientes, y se hará la descripción del uso de éstos.

Para encontrar la distribución de amplitud de la ecuación (3.2) en el plano imagen, localizado a una distancia z, se empleará la integral de propagación de Fresnel. La integral queda entonces de la siguiente manera,

$$\psi_F(\xi) = A\int_{-\infty}^{\infty} exp(i\alpha x)\, exp(i\beta x^2)\, \exp\left[-\frac{(x-xA)^2}{r0^2}\right] \exp[\mathrm{i}\gamma(x-xB)^2] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2\right] dx. \tag{3.3}$$

Arreglando términos, la ecuación (3.3) puede escribirse como lo muestra la ecuación (3.4),

$$\psi_F(\xi) = A\exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right)\exp\left(i\gamma xB^2\right)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\pi\left(\frac{\lambda z - ir0^2\lambda z(\beta+\gamma) - i\pi r0^2}{\pi r0^2\lambda z}\right)x^2\right]$$

$$\mathrm{X}\exp\left[-i2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda z}+\frac{\gamma xB}{\pi}+\frac{ixA}{\pi r0^2}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)x\right]dx \quad . \qquad (3.4)$$

Puede observarse de la ecuación anterior, que la integral consiste de la transformada de Fourier de una exponencial compleja cuadrática. Como en los ejemplos descritos en el capítulo anterior, la integral en la ecuación (3.4) puede resolverse de manera exacta utilizando las técnicas de Fourier. Como resultado de la integración se obtiene la siguiente expresión,

$$\psi_F(\xi) = C\exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right)\exp\left(i\gamma xB^2\right)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)$$

$$\mathrm{X}\exp\left[-\frac{\pi^2 r0^2\lambda z[\lambda z + ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}]}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left(\frac{\xi}{\lambda z}+\frac{\gamma xB}{\pi}+\frac{ixA}{\pi r0^2}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\right]. \qquad (3.5)$$

Donde, por brevedad se ha definido $C \equiv A\sqrt{\frac{\pi r0^2\lambda z}{\lambda z - ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}}$. De una manera similar a la descripción realizada sobre la ecuación (3.2), puede observarse que la distribución de amplitud en el plano imagen dada por la ecuación (3.5) consta de cinco términos multiplicativos. Para interpretar físicamente cada uno de estos términos será necesario reescribir la última de estas exponenciales. Esta exponencial puede separarse a su vez en dos exponenciales, una conteniendo solamente términos reales y la otra con argumento puramente imaginario. Procediendo de esta manera, la ecuación (3.5) puede reescribirse de la siguiente forma,

$$\psi_F(\xi) = C\exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right)exp\left(i\gamma xB^2\right)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)$$

$$Xexp\left\{-\frac{\pi^2 r0^2\lambda z}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left\{\lambda z\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2 z^2}+\frac{\gamma^2 xB^2}{\pi^2}+\frac{\alpha^2}{4\pi^2}-\frac{xA^2}{\pi^2 r0^4}+\frac{2\gamma xB\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\gamma xB}{\pi^2}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}\left(i\frac{2\xi xA}{\pi r0^2\lambda z}+i\frac{2\gamma xAxB}{\pi^2 r0^2}-i\frac{\alpha xA}{\pi^2 r0^2}\right)\right\}$$

$$Xexp\left\{-\frac{\pi^2 r0^2\lambda z}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left\{\lambda z\left(i\frac{2\xi xA}{\pi r0^2\lambda z}+i\frac{2\gamma xAxB}{\pi^2 r0^2}-i\frac{\alpha xA}{\pi^2 r0^2}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2 z^2}+\frac{\gamma^2 xB^2}{\pi^2}+\frac{\alpha^2}{4\pi^2}-\frac{xA^2}{\pi^2 r0^4}+\frac{2\gamma xB\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\gamma xB}{\pi^2}\right).\right\} \qquad (3.6)$$

Dada la extensión de la ecuación (3.6), para su análisis se considerarán por separado las exponenciales reales y las que contienen sólo términos imaginarios. Para este fin, se denotarán como Re e Im estas exponenciales respectivamente. Primeramente, la exponencial real, Re, puede reescribirse de la siguiente manera,

$$Re = \exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right) exp\left\{-\frac{\pi^2 r0^2 \lambda^2 z^2}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2 z^2} + \frac{\gamma^2 xB^2}{\pi^2} + \frac{\alpha^2}{4\pi^2} - \frac{xA^2}{\pi^2 r0^4} + \frac{2\gamma xB\xi}{\pi\lambda z} - \frac{\alpha\xi}{\pi\lambda z} - \frac{\alpha\gamma xB}{\pi^2}\right)\right]\right\} exp\left\{-\frac{\pi^2 r0^4 \lambda z\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[\left(-\frac{2xA\xi}{\pi r0^2 \lambda z} - \frac{2\gamma xAxB}{\pi^2 r0^2} + \frac{\alpha xA}{\pi^2 r0^2}\right)\right]\right\}. \quad (3.7)$$

Con el fin de llevar la ecuación (3.7) a una forma similar a la de la gaussiana invariante, se procede a completar el binomio cuadrado en la ecuación (3.7), con lo que se obtiene la expresión dada por la ecuación (3.8),

$$Re = \exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right) exp\left\{-\frac{\pi^2 r0^2}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[(\xi - \xi A)^2 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\alpha\lambda z}{2} - \gamma xB\lambda z + \{\pi + (\beta+\gamma)\lambda z\}xA\right)^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2}\left(\gamma^2 xB^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{xA^2}{r0^4} - \alpha\gamma xB\right) + \frac{\lambda z\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\pi^2}(-2\gamma xAxB + \alpha xA)\right]\right\}, \quad (3.8)$$

donde, nuevamente por brevedad se ha definido,

$$\xi_A \equiv \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha\lambda z}{2} - \gamma xB\lambda z + \{\pi + (\beta+\gamma)\lambda z\}xA\right). \quad (3.9)$$

Para simplificar aún más la ecuación (3.8) se define el semiancho de la gaussiana de la siguiente manera,

$$R \equiv \frac{\sqrt{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}}{\pi r0}, \quad (3.10)$$

Con la definición dada por la ecuación (3.10), la ecuación (3.8) se puede escribir de la siguiente manera,

$$Re = \exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right) exp\left[-\frac{(\xi-\xi A)^2}{R^2}\right] exp\left\{-\frac{\pi^2 r0^2}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[-\frac{\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2 xA^2}{\pi^2} - \frac{\lambda^2 z^2 xA^2}{\pi^2 r0^4}\right]\right\}. \quad (3.11)$$

Reorganizando los términos la ecuación (3.11) puede escribirse como,

$$Re = \exp\left(-\frac{xA^2}{r0^2}\right) exp\left[-\frac{(\xi-\xi A)^2}{R^2}\right] exp\left\{\frac{r0^2 xA^2}{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[\frac{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}{r0^4}\right]\right\}. \quad (3.12)$$

Finalmente la ecuación (3.12) puede simplificarse notablemente como,

$$Re = exp\left[-\frac{(\xi-\xi A)^2}{R^2}\right]. \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13), como se describirá más adelante, representará el confinamiento espacial de tipo gaussiano del frente de onda en el plano imagen.

Para continuar con el desarrollo analítico de las exponenciales imaginarias, tomadas de la ecuación (3.6), de acuerdo a la notación mencionada, se puede reescribir la exponencial con argumento imaginario, Im, de la siguiente manera,

$$Im = exp(i\gamma xB^2)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) exp\left\{-i\frac{\pi^2 r0^4\lambda z\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda^2 z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[\frac{\xi^2}{\lambda^2 z^2}+\frac{\gamma^2 xB^2}{\pi^2}+\frac{\alpha^2}{4\pi^2}-\frac{xA^2}{\pi^2 r0^4}+\frac{2\gamma xB\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\xi}{\pi\lambda z}-\frac{\alpha\gamma xB}{\pi^2}\right]\right\} exp\left\{-i\frac{\pi^2 r0^2\lambda^2 z^2}{\lambda^2 z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\left[\frac{2xA\xi}{\pi r0^2\lambda z}+\frac{2\gamma xAxB}{\pi^2 r0^2}-\frac{\alpha xA}{\pi^2 r0^2}\right]\right\}. \tag{3.14}$$

Con el fin de llevar la ecuación (3.14) a una forma similar a la de la gaussiana invariante, se procede a completar el binomio cuadrado en la ecuación (3.14), con lo que se obtiene la expresión dada por la ecuación (3.15),

$$Im = exp(i\gamma xB^2)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right) exp\left\{-i\frac{\pi^2 r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda z[\,\lambda^2 z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2]}\left[(\xi-\xi B)^2-\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma xB-\frac{xA\lambda z}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right)^2+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2}\left(\gamma^2 xB^2+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{xA^2}{r0^4}-\alpha\gamma xB+\frac{(2\gamma xB-\alpha)xA\lambda z}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right)\right]\right\}, \tag{3.15}$$

donde, nuevamente por brevedad se ha definido,

$$\xi B = \frac{\lambda z}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma xB-\frac{xA\lambda z}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right). \tag{3.16}$$

Para simplificar aún más la ecuación (3.15) se define el término siguiente,

$$\gamma' \equiv -\frac{\pi^2 r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda z[\,\lambda^2 z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2]} \tag{3.17}$$

Simplificando, se puede escribir la ecuación (3.15) de una manera más compacta como se muestra en la siguiente expresión,

$$Im = exp(i\gamma x B^2)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)exp[i\gamma'(\xi-\xi B)^2]$$

$$X\ exp\left\{i\frac{r0^4\lambda z\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{[\lambda^2z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2]}\left[\left(\frac{xA^2\ \lambda^2z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2xA^2}{r0^8\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}\right)\right]\right\}, \quad (3.18)$$

Finalmente, la exponencial con argumento imaginario obtiene su forma más compacta dada por la ecuación (3.19),

$$Im = exp(i\gamma x B^2)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)exp[i\gamma'(\xi-\xi B)^2]exp\left[i\frac{\lambda z x A^2}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right]. \quad (3.19)$$

La solución para la gaussiana invariante está dada por las expresiones para las dos exponenciales tratadas en este capítulo, Re e Im, el resultado general de la distribución de amplitud para la gaussiana invariante se muestra en la ecuación (3.20),

$$\psi_F(\xi) = A\sqrt{\frac{\pi r0^2\lambda z}{\lambda z - ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}}\,exp\left[i\frac{\lambda z x A^2}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right]exp(i\gamma x B^2)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2\right)$$

$$exp\left[-\frac{\pi^2r0^2}{\lambda^2z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}(\xi-\xi A)^2\right]exp\left[-i\frac{\pi^2r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda z[\lambda^2z^2+r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2]}(\xi-\xi B)^2\right], \quad (3.20)$$

Con el fin de reagrupar los términos de una forma similar a la ecuación (3.2), se puede reescribir la ecuación (3.20) de la siguiente manera,

$$\psi_F(\xi) = A'\,exp(i\alpha'\xi)\,exp(i\beta'\xi^2)\exp\left[-\frac{(\xi-\xi A)^2}{r0'^2}\right]\exp[i\gamma'(\xi-\xi B)^2], \quad (3.21)$$

Se puede observar que la ecuación (3.21) representa nuevamente una función gaussiana compleja similar a la dada por la ecuación (3.2). Realizando una comparación uno a uno entre ambas ecuaciones, puede verse que las siguientes relaciones se cumplen,

$$A' = A\sqrt{\frac{\pi r_0{}^2\lambda z}{\lambda z - ir0^2\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}}\,exp\left[i\frac{\lambda z x A^2}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right]exp(i\gamma x B^2). \quad (3.22)$$

$$\alpha' = 0. \quad (3.23)$$

$$\beta' = \frac{\pi}{\lambda z}. \tag{3.24}$$

Por conveniencia se repiten aquí las ecuaciones (3.9) y (3.10), ya que pertenecen al conjunto de ecuaciones de interés, y se renombrarán respectivamente como (3.25) y (3.26),

$$\xi A = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha\lambda z}{2} - \gamma x B\lambda z + \{\pi + (\beta+\gamma)\lambda z\} x A\right). \tag{3.25}$$

$$r0' = \frac{\sqrt{\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2}}{\pi r0}. \tag{3.26}$$

De igual manera se repiten las ecuaciones (3.16) y (3.17) siendo renombradas como (3.27) y (3.28) respectivamente,

$$\xi B = \frac{\lambda z}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma x B - \frac{x A\, \lambda z}{r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}\right). \tag{3.27}$$

$$\gamma' = -\frac{\pi^2 r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}}{\lambda z[\,\lambda^2 z^2 + r0^4\{\pi+(\beta+\gamma)\lambda z\}^2]}. \tag{3.28}$$

El conjunto de ecuaciones (3.23)-(3.28) representa un sistema que relacionan los parámetros de la distribución de amplitud del haz gaussiano en el plano objeto con la distribución de amplitud del haz gausssiano en el plano imagen. Con este sistema de ecuaciones es posible construir un sistema iterativo como se describe a continuación.

Sea un sistema en el cual, en un plano determinado existe una distribución de amplitud gaussiana dada por la ecuación (3.2), reescrita de la siguiente manera,

$$\psi_n(x) = A_n\, exp(i\alpha_n x)\, exp(i\beta_n x^2) \exp\left[-\frac{(x - xA_n)^2}{{r0_n}^2}\right] \exp[\mathrm{i}\gamma_\mathrm{n}(x - xB_n)^2], \tag{3.29}$$

entonces la distribución de amplitud en un plano de propagación paralelo al plano anterior, que se encuentra a una distancia z estará dada por,

$$\psi_{n+1}(x) = A_{n+1}\, exp(i\alpha_{n+1} x)\, exp(i\beta_{n+1} x^2) \exp\left[-\frac{(x - xA_{n+1})^2}{{r0_{n+1}}^2}\right] \exp[\mathrm{i}\gamma_\mathrm{n+1}(x - xB_{n+1})^2]. \tag{3.30}$$

En la relación de ambas ecuaciones (3.29) y (3.30) la variable x dada que es una variable muda, representa la coordenada del plano donde se realiza el cálculo de interés.

Entonces, el conjunto de ecuaciones que relaciona ambos sistemas se obtiene del conjunto de ecuaciones (3.23)-(3.28), de la siguiente manera:

$$A_{n+1} = A_n \sqrt{\frac{\pi r0_n{}^2 \lambda_n z}{\lambda_n z - i r0_n{}^2 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}}}\ exp\left[i \frac{\lambda_n z x A_n{}^2}{r0_n{}^4 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}}\right] exp\left(i\gamma_n\, x B_n{}^2\right). \quad (3.31)$$

$$\alpha_{n+1} = 0. \quad (3.32)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{\pi}{\lambda_n z} \quad (3.33)$$

$$\xi A_{n+1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha_n \lambda_n z}{2} - \gamma_n x B_n \lambda_n z + \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\} x A_n\right). \quad (3.34)$$

$$r0_{n+1} = \frac{\sqrt{\lambda_n{}^2 z^2 + r0_n{}^4 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}^2}}{\pi r0_n} \quad (3.35)$$

$$\gamma_{n+1} = -\frac{\pi^2 r0_n{}^4 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}}{\lambda_n z\left[\lambda_n{}^2 z^2 + r0_n{}^4 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}^2\right]}. \quad (3.36)$$

$$\xi B_{n+1} = \frac{\lambda_n z}{\pi}\left(\frac{\alpha_n}{2} - \gamma_n x B_n - \frac{x A_n \lambda_n z}{r0_n{}^4 \{\pi + (\beta_n + \gamma_n)\lambda_n z\}}\right). \quad (3.37)$$

El conjunto de ecuaciones (3.31) a (3.37) representa un sistema iterativo que permite realizar la propagación de un plano determinado a otro y repetir el procedimiento tantas veces como se requiera. Llevando un registro de todos los valores de la variable xA en función de z, es posible realizar el trazo de rayos. Como se ha descrito anteriormente, la variable xA representa el centro espacial del haz gaussiano y coincide precisamente con la trayectoria del rayo.

En el capítulo siguiente, se presenta el desarrollo de la programación necesaria para ser aplicada a algunos ejemplos descriptivos.

Capítulo IV

Trazo de rayos empleando la gaussiana invariante

En el capítulo 3 se determinaron los parámetros necesarios para propagar un haz con perfil de intensidad gaussiano. La ecuación analítica se determinó abarcando el caso más general posible dentro de la teoría de la difracción escalar. Se determinaron los parámetros para realizar el cálculo de la propagación desde un plano objeto hasta un plano imagen mediante una formulación iterativa. Esta formulación se basa en lo que en este trabajo se ha denominado gaussiana invariante en su forma matemática. En este capítulo se mostrará que con los resultados mencionados, será posible que, calculando las propagaciones de los haces gaussianos, y realizando un seguimiento puntual del centro espacial de cada haz, se podrá realizar el trazo de rayos en un sistema óptico de una manera análoga al trazo que se obtiene mediante métodos geométricos.

Para trazar cada rayo, se requiere realizar un rastreo punto a punto del parámetro xA a lo largo de toda la trayectoria para cada rayo trazado. Los trazos se obtienen de manera iterativa realizando propagaciones a planos muy próximos entre sí hasta cubrir la trayectoria total del rayo. Esta es una forma de simular un rayo propagándose de manera real, sin embargo, esto no significa una restricción de la técnica ya que de manera alternativa se pueden tomar solamente los puntos inicial y final en la región donde el rayo no cambie sus condiciones de dirección o de longitud de onda, y continuar así sucesivamente.

Para el seguimiento del parámetro xA o equivalentemente, para el trazo de rayos, se puede emplear un programa de graficado comercialmente disponible, dada la facilidad de la implementación de la técnica ya que al ser un sistema iterativo, solamente se requiere ingresar una vez los parámetros requeridos y repetir el proceso en un lazo de programación.

Para mostrar la precisión de la técnica propuesta, en algunos de los ejemplos que se presentan se hace una comparación con el trazo de rayos obtenido en condiciones similares mediante el programa OSLO[MR], el cual es un programa comercial de amplio uso en el área de la óptica geométrica. Debido a que el alcance de este trabajo pretende solamente mostrar el uso de la técnica y la excelente adaptación de ésta para el trazo de rayos, se analizarán algunas configuraciones típicas como son: una interfase óptica, una lente convergente y un arreglo de espejos. Con el fin de mostrar la utilidad de la técnica, por último, se realizará una corrección de enfocamiento para la aberración de la lente esférica mediante una curva asférica.

A continuación se presentan los ejemplos del uso de la gaussiana invariante.

Como primer ejemplo se considera la simulación de una interfase óptica. Realizando el trazo de rayos en el programa matemático se obtiene la gráfica mostrada en la figura (4.1).

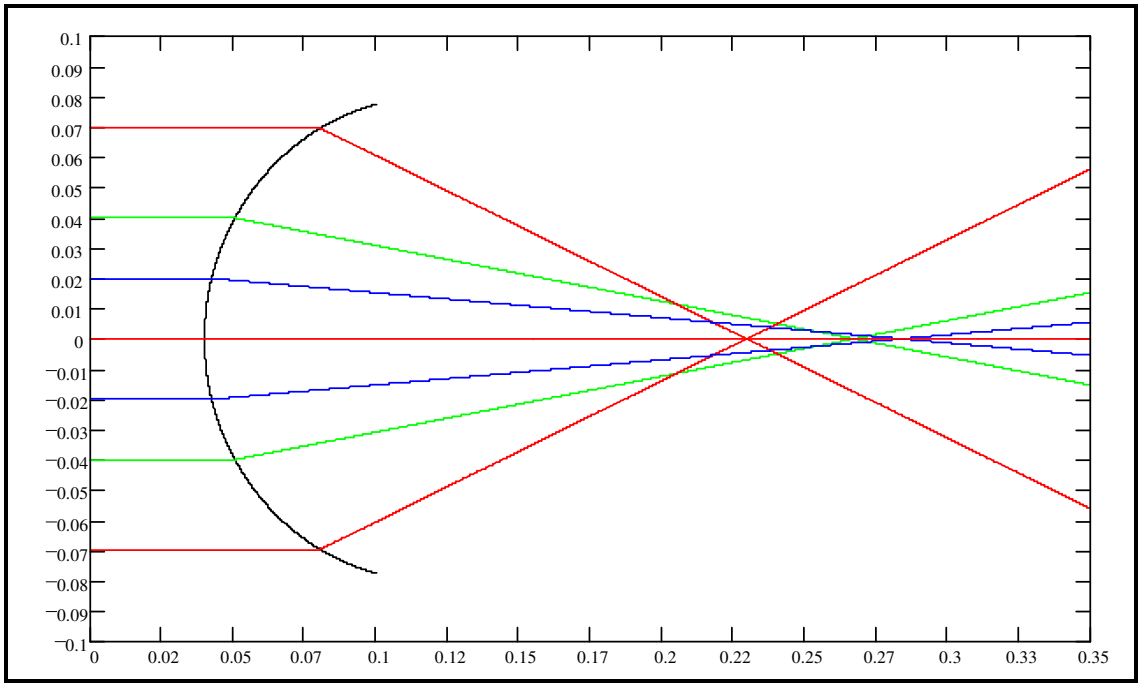

Figura (4.1). Interfase óptica aire-BK7. Trazo de rayos mediante la gaussiana invariante.

En la interfase óptica los rayos inicialmente en aire inciden desde la izquierda a una interfase de otro material con distinto índice de refracción. Para este ejemplo se empleó el

BK7. Los parámetros ópticos empleados se eligieron de manera arbitraria y son los siguientes:

Radio del haz de entrada = 7 cm

Radio de curvatura de la interfase óptica = 8 cm.

El pseudocódigo utilizado para esta configuración se anexa en el apéndice de este trabajo, para evitar alargar innecesariamente la extensión de este capítulo.

Como se ha indicado previamente, con el fin de verificar la precisión del resultado obtenido mediante la gaussiana invariante, en la figura (4.2) se presenta el resultado obtenido utilizando el programa OSLO^{MR} en condiciones similares.

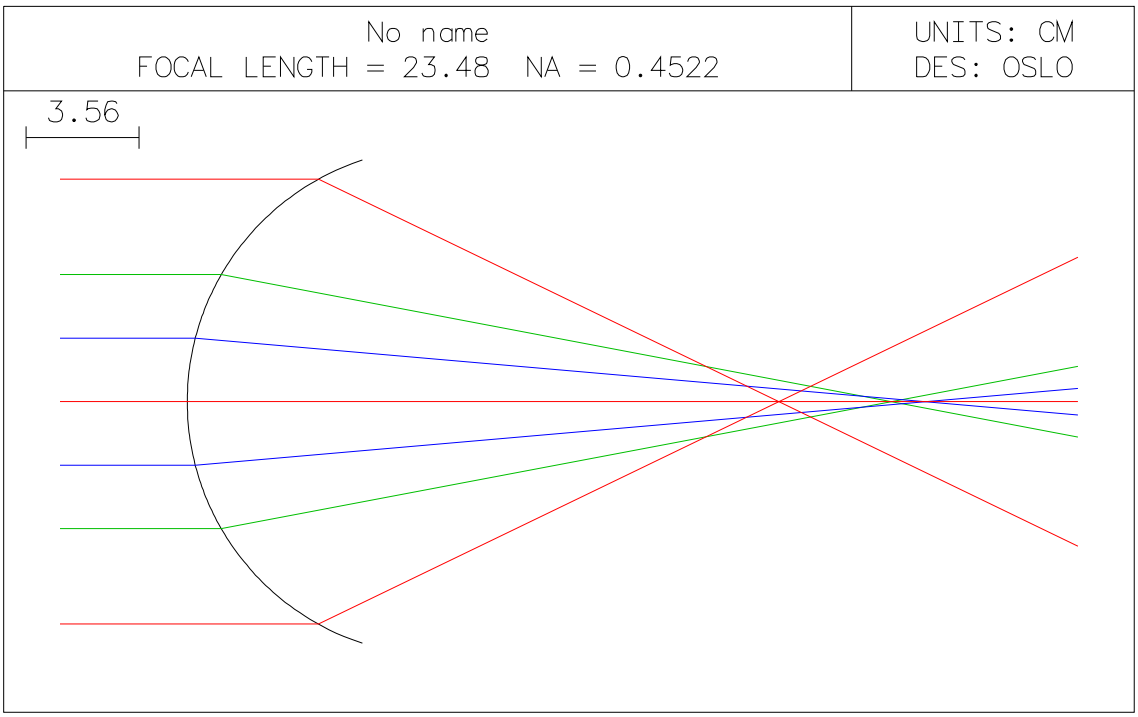

Figura (4.2). Interfase óptica aire-BK7. Trazo de rayos mediante el programa comercial OSLO^{MR}.

Analizando las figuras (4.1) y (4.2) se observa una similitud excelente en el trazo de rayos empleando ambos programas, la gaussiana invariante permite reproducir fielmente el trazo dado por el programa OSLO^{MR}, lo cual asegura la validez de la técnica empleada en este trabajo. Un punto de comparación que resulta necesario es la distancia focal (distancia a la que se enfocan los rayos) para ambas interfases. Cabe aclarar que

el color mostrado para los rayos en las figuras es únicamente para facilitar su visualización y no tiene relación con la longitud de onda de emisión del haz. En el programa OSLO^{MR} la distancia focal medida tiene el valor $f = 19.05\,cm$ para los rayos rojos (extremos superior e inferior) y $f = 23.03\,cm$ para los rayos verdes (inmediatos internos a los rayos rojos). Mientras que usando el método de la gaussiana invariante esta distancia es de $f = 19.03\,cm$ para los rayos rojos y de $f = 23.11\,cm$ para los rayos verdes. La discrepancia entre ambas mediciones se atribuye al método de medición usado para ambas gráficas. El programa OSLO^{MR} proporciona una escala de referencia que permite obtener el valor real de la distancia focal, mientras que en el programa matemático se hizo uso de una de las funciones incluidas que permite medir con gran precisión este valor. Por lo anterior se comprueba la gran confiabilidad de la gaussiana invariante como una técnica para el trazo de rayos.

El segundo ejemplo que se revisa en este trabajo es el diseño de una lente positiva y su correspondiente trazo de rayos. Se procede de la misma manera que el caso anterior, se presentan los parámetros ópticos característicos de la lente convergente, el pseudocódigo utilizado empleando la gaussiana invariante se anexa en el apéndice, y finalmente se presentan las gráficas comparativas entre ambos programas. Los parámetros ópticos empleados son:

Radio del haz de entrada = 7 cm,

Radio de curvatura de la lente convergente = 8 cm

Grosor de la lente = 6 cm.

Haciendo el trazo de rayos dado por el pseudocódigo en el programa matemático se obtiene la gráfica para la lente convergente mostrada en la figura (4.3),

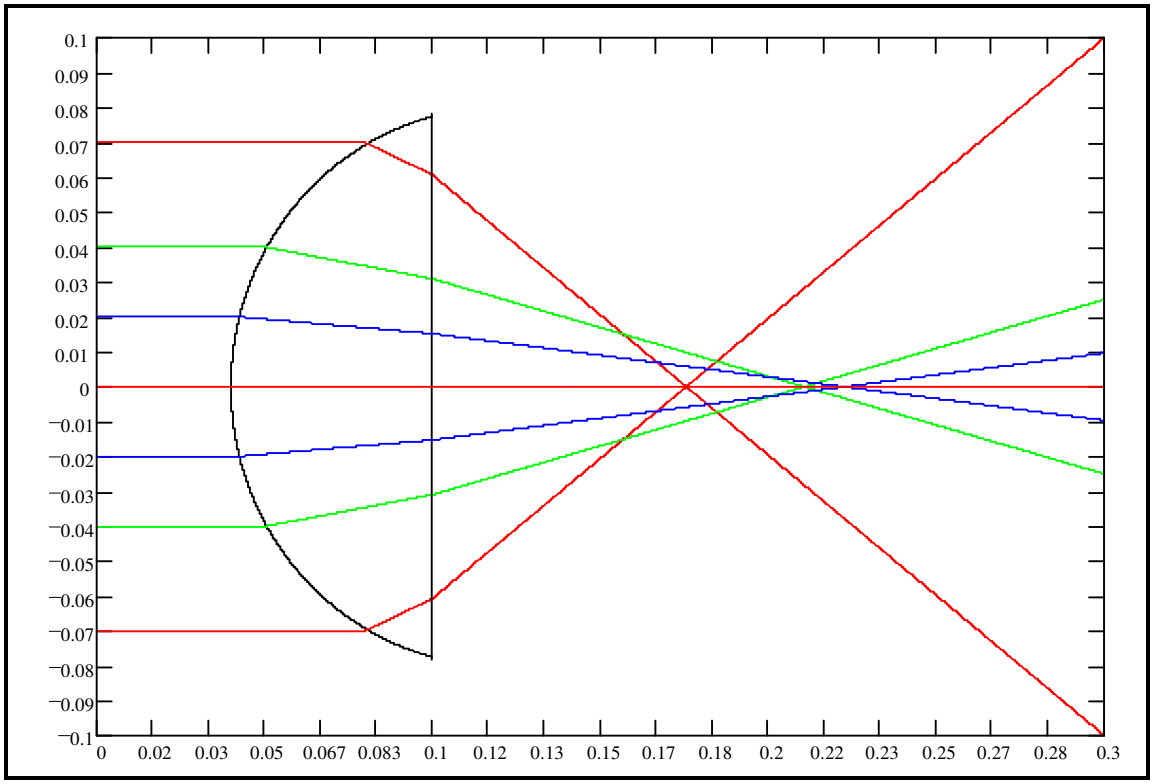

Figura (4.3). Trazo de rayos para una lente convergente de BK7 empleando la gaussiana invariante.

De manera similar al caso anterior, empleando los parámetros característicos de la lente positiva en el programa OSLO^{MR} se obtuvo la gráfica que se muestra en la figura (4.4).

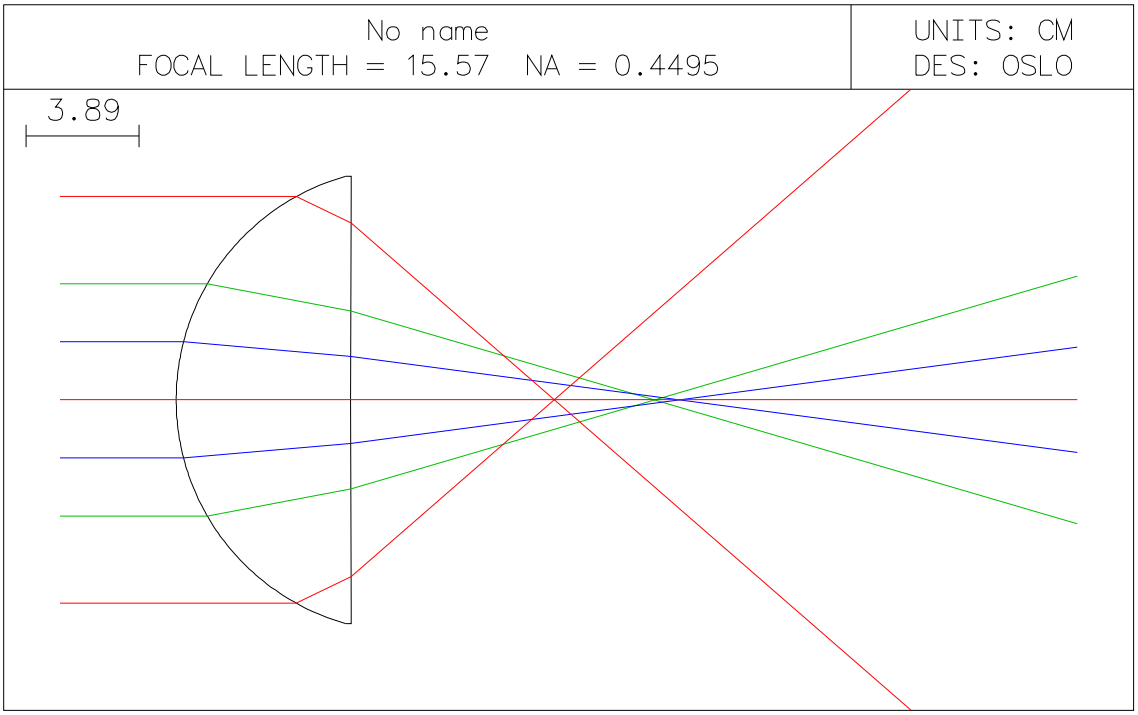

Figura (4.4). Trazo de rayos para una lente convergente de BK7 empleando el programa comercial OSLO^{MR}.

Como puede observarse de las figuras (4.3) y (4.4), de manera similar al caso de la interfase óptica, la gaussiana invariante reproduce perfectamente el trazo de rayos geométrico dado por el programa OSLO^{MR}, en cuanto al valor de la distancia focal de la lente se tienen valores de $f = 13.27\,cm$ para los rayos rojos y $f = 16.93\,cm$ para los rayos verdes en el programa OSLO^{MR}, mientras en el programa matemático se obtuvieron $f = 13.36\,cm$ para los rayos rojos y $f = 17.01\,cm$ para los rayos verdes, con lo que el porcentaje de error es considerablemente bajo, y de nuevo se atribuye al método de medición.

Para el caso de la lente convergente puede observarse que existe aberración esférica, por lo cual cada grupo de rayos, dependiendo de la altura a la que inciden en la lente, se enfocan en un punto distinto. El siguiente ejemplo que se revisa es el diseñar una lente asférica que corrija esta aberración mediante el uso de la gaussiana invariante. Su correspondiente diseño para el programa OSLO^{MR} no se realizó debido a la complejidad que conlleva. Nuevamente el pseudocódigo se anexa en el apéndice, sólo es necesario especificar que a la curvatura esférica se agregaron términos

de 6° orden para obtener la correspondiente curvatura asférica.

En la figura (4.5) se muestra la gráfica obtenida para la lente asférica.

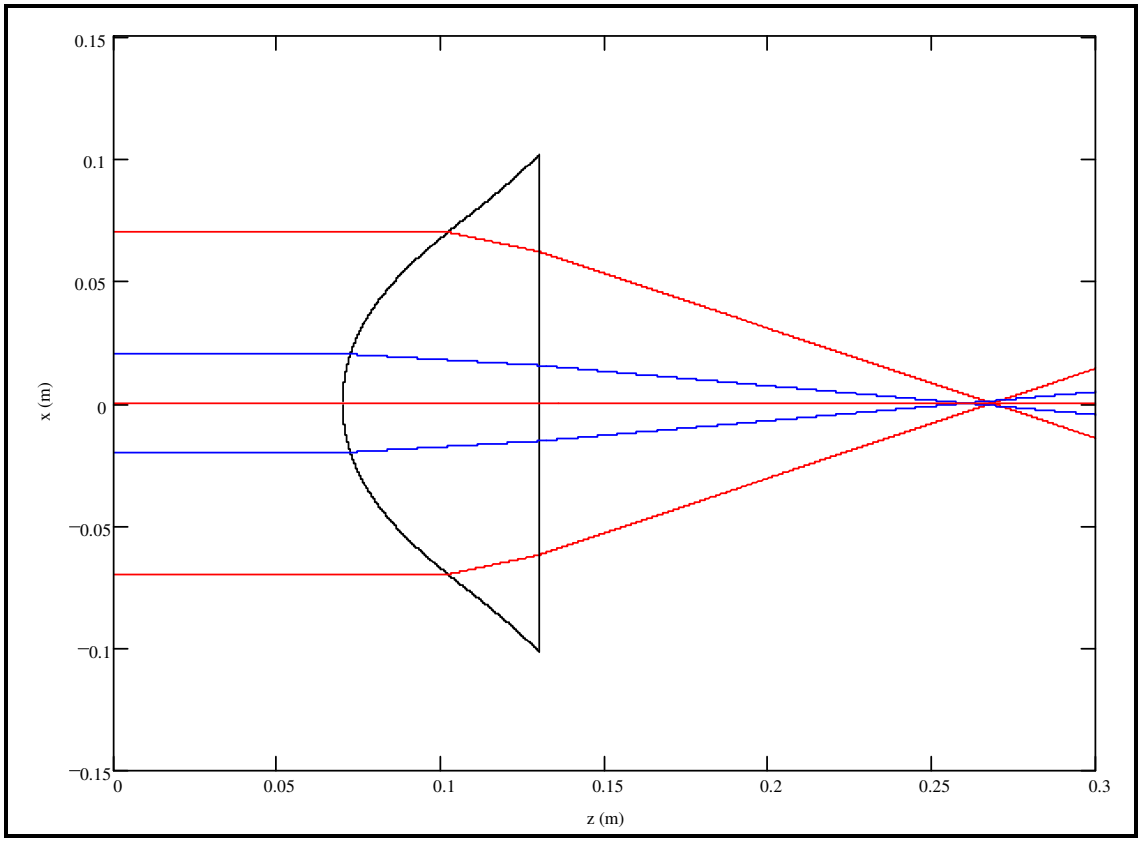

Figura (4.5). Trazo de rayos para una lente asférica que corrige la aberración esférica empleando la gaussiana invariante.

Como se observa de la figura (4.5) la corrección dada por la lente asférica es muy buena para evitar la aberración esférica, ahora cada conjunto de rayos se enfoca en un mismo punto aún cuando inciden a distintas alturas respecto al eje óptico.

Finalmente se presenta el análisis para el trazo de rayos en un sistema de espejos. Con este ejemplo se terminan de revisar los sistemas ópticos más comunes, la interfase óptica, la lente y el espejo, incluida la propagación a través de un medio en todos los casos, siendo cada uno de ellos bien reproducido mediante la técnica usada en este trabajo. La figura (4.6) muestra la gráfica obtenida en el programa matemático al emplear la gaussiana invariante para

el trazo de rayos de un sistema de espejos con forma de embudo. Se eligió la pendiente de manera arbitraria, del mismo valor y con signo contrario para cada espejo.

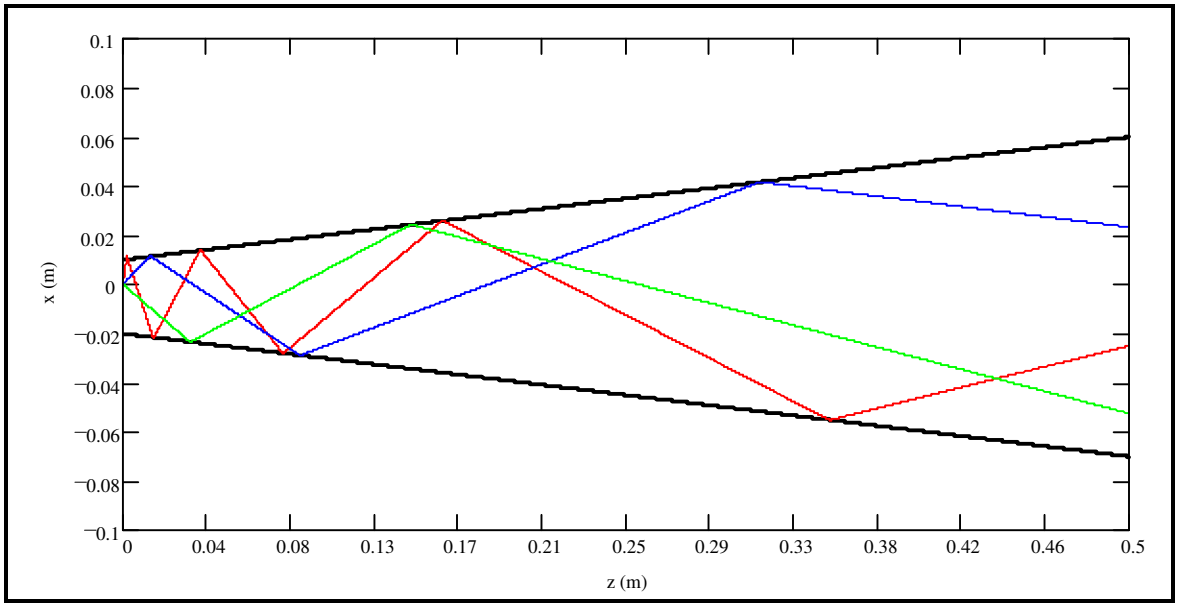

Figura (4.6). Trazo de rayos empleando la gaussiana invariante para un sistema de espejos con forma de embudo.

Como se observa en la figura (4.6) el trazo de rayos mediante la gaussiana invariante no tiene problema alguno para este arreglo, aún cuando se realizan propagaciones cercanas a los 90° de inclinación.

Para concluir con los ejemplos descriptivos de este trabajo, en la figura (4.7) se muestra otro caso de amplio interés en el área de la óptica, una fibra óptica. Empleando la gaussiana invariante se pueden simular las trayectorias de los rayos propagándose en el núcleo al interior de la fibra, se realizó el diseño para una fibra con $20\,\mu m$ de diámetro en el núcleo, se consideró el caso ideal de reflexión total interna y no se agregó el revestimiento en el diseño, aunque es posible simularlo si se desea.

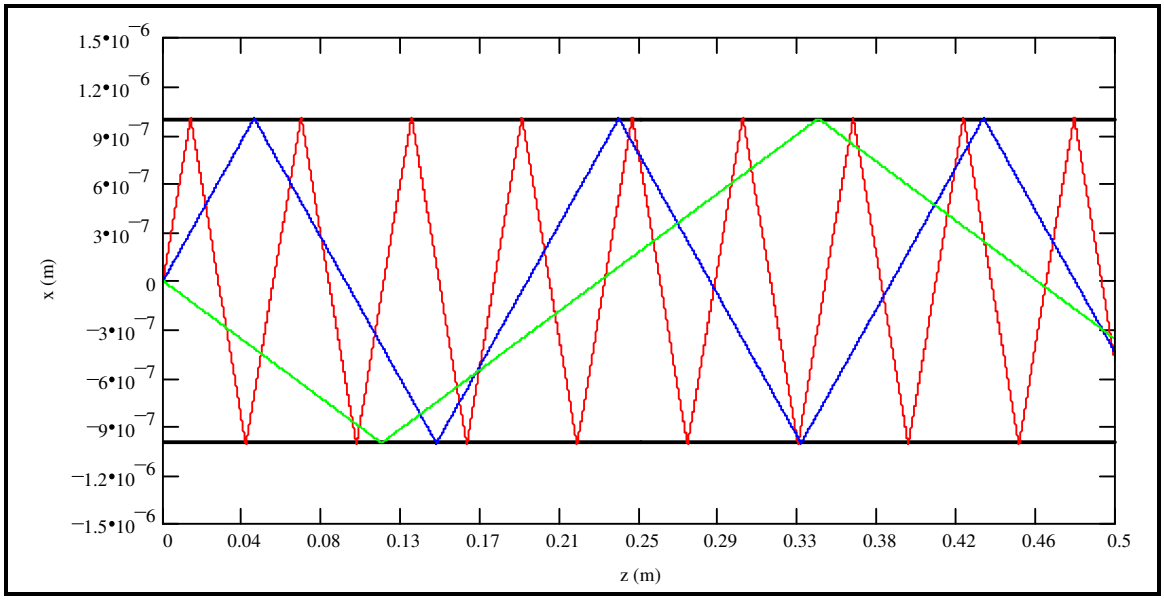

Figura (4.7). Trazo de rayos empleando la gaussiana invariante para un sistema de espejos que modelan una fibra óptica.

Una vez finalizado el análisis da la gaussiana invariante y su aplicación a distintos ejemplos del trazo de rayos geométricos, y además habiendo corroborado su validez, sólo resta mostrar las conclusiones que surgieron a partir de este trabajo, así como las perspectivas a futuro que se tienen, lo cual se presenta en el capítulo 5.

Capítulo V

Conclusiones y perspectivas a futuro

Para finalizar la presentación de este trabajo, a continuación se enumeran algunas conclusiones que se desean resaltar, así como algunas perspectivas de trabajo a futuro.

Se realizó el análisis matemático de la gaussiana invariante, permitiendo relacionar sus parámetros difractivos con las correspondientes condiciones geométricas características.

Mediante el empleo iterativo de estos parámetros en un programa matemático fue posible realizar el trazo de rayos geométrico.

Empleando la aproximación $\xi_A = zsin\theta \approx ztan\theta$ fue posible eliminar la restricción dada por la óptica paraxial (ángulo <5°), lo que permite realizar el trazo de rayos prácticamente para cualquier ángulo.

Se aplicó la técnica a diversos casos ópticos de interés, como son una interfase, una lente positiva, una lente asférica y un par de arreglos de espejos, uno de ellos simulando el comportamiento de una fibra óptica. Para cada caso se hizo el correspondiente trazo de rayos.

Se corroboró la validez de esta técnica de trazo de rayos al comparar las gráficas obtenidas mediante ésta, con sus correspondientes gráficas realizadas en el programa OSLO^{MR} de óptica.

Perspectivas

El presente trabajo ha generado interesantes perspectivas a futuro, debido a la gran versatilidad que ofrece el empleo de la gaussiana invariante, así como la infinidad de casos de amplio interés que pueden ser simulados, algunos de los cuales incluso resueltos por primera vez.

Se tiene interés en estudiar otra de las grandes ventajas de la gaussiana invariante, y que debido a los alcances de este trabajo no fue posible realizar, el usar esta técnica para calcular el patrón de difracción de un

sistema óptico bajo estudio en un plano de observación de interés, aún para casos alejados del foco geométrico.

Bibliografía

[1] The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics, O. N. Stavroudis, Academic Press Inc, 1972.

[2] Laser ray-tracing method for optical testing, Rafael Navarro and Esther Moreno-Barriuso, Optics letters, Vol. 24, No. 14, 1999.

[3] OSLO^{MR} de Sinclair Optics, www.sinopt.com.

[4] Improved sensitivity to cerebral hemodynamics during brain activation with a time-gated optical system: analytical model and experimental validation, Juliette Selb et al, Journal of biomedical optics, Vol. 10 (1), 2005.

[5] A 32-channel time-resolved instrument for medical optical tomography, Florian E. W. Schmidt et al, Review of scientific instruments, Vol. 71, No. 1, 2000.

[6] Biomedical Optics: Principles and imaging, Lihong V. Wang, Hsin-I Wu, Wiley-Interscience, 2007.

[7] Fiber optics probes for biomedical optical spectroscopy, Rebecca R. Richards-Kortum, Journal of biomedical optics, Vol. 8, No. 1, 2003.

[8] Optical fiber probe for biomedical Raman spectroscopy, Jason T. Motz et al, Applied optics, Vol. 43, No. 3, 2004.

[9] Comparison of spatially and temporally resolved diffuse-reflectance measurement systems for determination of biomedical optics properties, Johannes Swartling et al, Applied optics, Vol. 42, No. 22, 2003.

[10] Limitations on lightwave communications imposed by optical-fiber non-linearities, Andrew R. Chraplyvy, Journal of lightwave technology, Vol. 8, No. 10, 1980.

[11] Passive optical fast frequency-hop CDMA communications system, Habib Fathallah et al, Journal of lightwave technology, Vol. 17, No. 3, 1999.

[12] Optical Metrology, Ghanim A. Al-Jumaily, SPIE Optical Engineering Press, 1999.

[13] Principles of Nano-Optics, Lukas Novotny, Bert Hecht, Cambridge University Press, 2006.

[14] Nano-optics from sensing to waveguiding, Surbhi Lal et al, Nature photonics, Vol 1, 2007.

[15] Surface plasmon micro- and nano-optics, J. R. Kreen et al, Journal of microscopy, Vol. 209, Pt. 3, pp. 167-72, 2003.

[16] Introduction to Modern Optics, Grant R. Fowles, Second edition, Dover publications Inc., New York, 1975.

[17] Introduction to Fourier Optics, Joseph W. Goodman, Second edition, The McGraw-Hill Companies Inc., 1996.

[18] Classical Electrodynamics, John David Jackson, Third edition.

[19] Aberrations of the Symmetrical Optical System, W. T. Welford, Academic Press Inc (London), 1974.

[20] Lens Design Fundamentals, Rudolf Kingslake, Academic Press Inc (London), 1978.

[21] Fourier Optics: An Introduction, E. G. Steward, Ellis Horwood Limited, 1983.

[22] Coherent gradient sensing: a Fourier optics analysis and applications to fracture, Hareesh V. Tippur, Applied optics, Vol. 31, No. 22, 1992.

[23] Application of Fourier analysis to the visibility of gratings, F. W. Campbell and J. G. Robson, J. Physiol., 197, pp. 551-66, 1968.

[24] Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing, Moisés Cywiak et al, Optics Express, Vol. 17, Issue 13, pp. 10564-72, 2009.

Apéndice

A continuación se presenta el pseudocódigo para el trazo de rayos de la interfase óptica revisada en el capítulo 4 mediante el uso de la gaussiana invariante, donde se han empleado el conjunto de ecuaciones (3.31) a (3.37).

$N = 2000$ // Número de iteraciones

$n = 0 \dots N$ // Contador para iteraciones

$zT = 30 * 10^{-2}$ // Distancia total que recorrerá cada rayo

$dz = \frac{zT}{N}$ //Distancia de propagación entre planos consecutivos

$z_n = n * dz$ // Contador de distancia

$R = 8 * 10^{-2}$ // Radio de curvatura de la interfase

$Vértice = 4 * 10^{-2}$ // Origen del vértice de la interfase

$x0 = R + vértice$ // Centro de la esfera de la interfase

$F1(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$ // Función para generar la parte superior de la interfase

$F2(x) = -F1(x)$ // Función para generar la parte inferior de la interfase

// A continuación se presenta la función que calculará cada parámetro de la gaussiana invariante. La función recibe dos parámetros: x [m] indica la altura del rayo en el plano objeto, θ [rad] indica el ángulo de inclinación del rayo en dicho plano. Todas las unidades de distancia en esta función están dadas en metros. Con el fin de trazar gaussianas lo más semejantes a un rayo, se utilizarán longitudes de onda muy pequeñas, aunque cualquier valor arbitrario puede ser utilizado.

$P(x, \theta) = \{$

$\lambda_0 = 0.6 * 10^{-15}$; $z_0 = 0$;

$xA_0 = x;$ $\qquad xB_0 = 0;$

$Nref_0 = 1;$ $\qquad \alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} tan(\theta);$

$\beta_0 = 0;$ $\qquad \gamma_0 = 0;$

$r0 = 1 * 10^{-3};$ $\qquad \theta_1 = \theta;$

$zT = 0;$ $\qquad Bandera = 0;$

//Bandera funciona como un control para evitar que el rayo se propague en una dirección incorrecta al estar cerca de una interfase, debido a que la precisión que se tiene en el programa es finita.

$for\ m \epsilon 1 \dots N$

$Bandera = Bandera - 1\ if\ Bandera\ > 0;$

$z_m = dz;$ $\qquad zT = zT + dz;$

$Nref_m = 1;$ $\qquad \lambda_m = \lambda_0;$

// Ahora se presentan los parámetros desarrollados en el capítulo 3 de este trabajo para la gaussiana invariante.

$D_m = {\lambda_m}^2 {z_m}^2 + {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2;$

$\alpha_m = 0;$ $\qquad \beta_m = \frac{\pi}{\lambda_m z_m};$

$\gamma_m = \frac{-\pi^2 {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2}{D_m \lambda_m z_m};\ \ r_m = \frac{\sqrt{D_m}}{\pi r_{m-1}};$

$xA_m = xA_{m-1} + \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{\lambda_m z_m xA_{m-1}(\beta_{m-1} + \gamma_{m-1})}{\pi};$

$xB_m = \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{{\lambda_m}^2 {z_m}^2}{\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi} * \frac{xA_{m-1}}{\pi {r_{m-1}}^4};$

$\theta_1 = atan\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}(\alpha_{m-1} - 2\gamma_{m-1} xB_{m-1})\right];$

$if\ \left(\left|Re\big(F1(zT)\big) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $\qquad S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 20;$

$if\left(\left|Re\left(F2(zT)\right) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 20;$

$if(|zT - (Vertice + Grueso)| < 1.5dz) * (Bandera = 0)$

$\alpha P = -asin\left(\frac{Nref_2}{Nref_2} sin(\theta_1)\right);$ $\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$

$\beta_m = 0;$ $\gamma_m = 0;$

$r_m = r_0;$ $Bandera = 20;$

$for\ m \epsilon 0 \ldots N$

$U_{m,o} = xA_m;$

$Return\ U$

}

A continuación se presenta el pseudocódigo para la lente convergente revisada en el capítulo 4. Todas las unidades empleadas serán metros,

$N = 2000$ // Número de iteraciones

$n = 0 \ldots N$ // Contador para iteraciones

$zT = 30 * 10^{-2}$ // Distancia total que recorrerá cada rayo

$dz = \frac{zT}{N}$ //Distancia de propagación entre planos consecutivos

$z_n = n * dz$ // Contador de distancia

$R = 8 * 10^{-2}$ // Radio de curvatura de la lente

$Vértice = 4 * 10^{-2}$ // Origen del vértice de la lente

$x0 = R + vértice$ // Centro de la esfera de la lente

$F1(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$ // Función para generar la parte superior de la lente

$F2(x) = -F1(x)$ // Función para generar la parte inferior de la lente

$F3(x) = mx + b$ // Función para generar la superficie plana de la lente, donde m es la pendiente y debe ser un valor muy grande para obtener la vertical y b es la ordenada al origen.

// A continuación la función que calculará cada parámetro de la gaussiana invariante. La función recibe dos parámetros: x [m] indica la altura del rayo en el plano objeto, θ [rad] indica el ángulo de inclinación del rayo en dicho plano. Todas las unidades de distancia en esta función están dadas en metros. Con el fin de trazar gaussianas lo más semejantes a un rayo, se utilizarán longitudes de onda muy pequeñas, aunque cualquier valor arbitrario puede ser utilizado.

$P(x, \theta) = \{$

$\lambda_0 = 0.6 * 10^{-15};$ $\quad z_0 = 0;$

$xA_0 = x;$ $\quad xB_0 = 0;$

$Nref_0 = 1;$ $\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} tan(\theta);$

$\beta_0 = 0;$ $\gamma_0 = 0;$

$r0 = 1 * 10^{-3};$ $\theta_1 = \theta;$

$zT = 0;$ $Bandera = 0;$

//Bandera funciona como un control para evitar que el rayo se propague en una dirección incorrecta al estar cerca de una interfase, debido a que la precisión que se tiene en el programa es finita.

$for\ m \epsilon 1 \dots N$

$Bandera = Bandera - 1\ if\ Bandera\ > 0;$

$z_m = dz;$ $zT = zT + dz;$

$Nref_m = 1;$ $\lambda_m = \lambda_0;$

// Ahora se presentan los parámetros desarrollados en el capítulo 3 de este trabajo para la gaussiana invariante.

$D_m = {\lambda_m}^2 {z_m}^2 + {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2;$

$\alpha_m = 0;$ $\beta_m = \frac{\pi}{\lambda_m z_m};$

$\gamma_m = \frac{-\pi^2 {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2}{D_m \lambda_m z_m};$ $r_m = \frac{\sqrt{D_m}}{\pi r_{m-1}};$

$xA_m = xA_{m-1} + \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{\lambda_m z_m xA_{m-1}(\beta_{m-1} + \gamma_{m-1})}{\pi};$

$xB_m = \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{{\lambda_m}^2 {z_m}^2}{\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi} * \frac{xA_{m-1}}{\pi {r_{m-1}}^4};$

$\theta_1 = atan\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}(\alpha_{m-1} - 2\gamma_{m-1} xB_{m-1})\right];$

$if\left(\left|Re\big(F1(zT)\big) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 20;$

$if\left(\left|Re\left(F2(zT)\right) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 20;$

$if(|zT - (Vertice + Grueso)| < 1.5dz) * (Bandera = 0)$

$\alpha P = -asin\left(\frac{Nref_2}{Nref_2} sin(\theta_1)\right);$ $\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$

$\beta_m = 0;$ $\gamma_m = 0;$

$r_m = r_0;$ $Bandera = 20;$

$for\ m \epsilon 0 \ldots N$

$U_{m,o} = xA_m;$

$Return\ U$

}

A continuación se presenta el pseudocódigo para la lente asférica revisada en el capítulo 4. Todas las unidades empleadas serán metros,

$N = 4000$ // Número de iteraciones

$n = 0 \ldots N$ // Contador para iteraciones

$zT = 30 * 10^{-2}$ // Distancia total que recorrerá cada rayo

$dz = \frac{zT}{N}$ //Distancia de propagación entre planos consecutivos

$z_n = n * dz$ // Contador de distancia

$R = 8 * 10^{-2}$ // Radio de curvatura de la lente

$Vértice = 7 * 10^{-2}$ // Origen del vértice de la lente

$x0 = R + vértice$ // Centro de la esfera de la lente

$F1(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + 5 * 10^3 x^6$ // Función para generar la parte superior de la lente asférica

$F2(x) = -F1(x)$ // Función para generar la parte inferior de la lente asférica

$F3(x) = mx + b$ // Función para generar la superficie plana de la lente, donde m es la pendiente y debe ser un valor muy grande para obtener la vertical y b es la ordenada al origen.

// A continuación la función que calculará cada parámetro de la gaussiana invariante. La función recibe dos parámetros: x [m] indica la altura del rayo en el plano objeto, θ [rad] indica el ángulo de inclinación del rayo en dicho plano. Todas las unidades de distancia en esta función están dadas en metros. Con el fin de trazar gaussianas lo más semejantes a un rayo, se utilizarán longitudes de onda muy pequeñas, aunque cualquier valor arbitrario puede ser utilizado.

$P(x, \theta) = \{$

$\lambda_0 = 0.6 * 10^{-15};$ $\quad z_0 = 0;$

$xA_0 = x;$ $\quad xB_0 = 0;$

$Nref_0 = 1;$ $\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} tan(\theta);$

$\beta_0 = 0;$ $\gamma_0 = 0;$

$r0 = 1 * 10^{-3};$ $\theta_1 = \theta;$

$zT = 0;$ $Bandera = 0;$

//Bandera funciona como un control para evitar que el rayo se propague en una dirección incorrecta al estar cerca de una interfase, debido a que la precisión que se tiene en el programa es finita.

$for\ m \epsilon 1 \dots N$

$Bandera = Bandera - 1\ if\ Bandera\ > 0;$

$z_m = dz;$ $zT = zT + dz;$

$Nref_m = 1;$ $\lambda_m = \lambda_0;$

// Ahora se presentan los parámetros desarrollados en el capítulo 3 de este trabajo para la gaussiana invariante.

$D_m = {\lambda_m}^2 {z_m}^2 + {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2;$

$\alpha_m = 0;$ $\beta_m = \frac{\pi}{\lambda_m z_m};$

$\gamma_m = \frac{-\pi^2 {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2}{D_m \lambda_m z_m};$ $r_m = \frac{\sqrt{D_m}}{\pi r_{m-1}};$

$xA_m = xA_{m-1} + \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{\lambda_m z_m xA_{m-1}(\beta_{m-1} + \gamma_{m-1})}{\pi};$

$xB_m = \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{{\lambda_m}^2 {z_m}^2}{\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi} * \frac{xA_{m-1}}{\pi {r_{m-1}}^4};$

$\theta_1 = atan\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}(\alpha_{m-1} - 2\gamma_{m-1} xB_{m-1})\right];$

$if\left(\left|Re\big(F1(zT)\big) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 60;$

$if\left(\left|Re\left(F2(zT)\right) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 60;$

$if(|zT - (Vertice + Grueso)| < 1.5dz) * (Bandera = 0)$

$\alpha P = -asin\left(\frac{Nref_2}{Nref_2} sin(\theta_1)\right);$ $\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$

$\beta_m = 0;$ $\gamma_m = 0;$

$r_m = r_0;$ $Bandera = 60;$

$for\ m \epsilon 0 \ldots N$

$U_{m,o} = xA_m;$

$Return\ U$

}

A continuación se presenta el pseudocódigo para el arreglo de espejos revisado en el capítulo 4. Todas las unidades empleadas serán metros,

$N = 4000$ // Número de iteraciones

$n = 0 \ldots N$ // Contador para iteraciones

$zT = 30 * 10^{-2}$ // Distancia total que recorrerá cada rayo

$dz = \frac{zT}{N}$ //Distancia de propagación entre planos consecutivos

$z_n = n * dz$ // Contador de distancia

$Top = 1 * 10^{-2}$ // ordenada al origen para la superficie reflectora superior

$Bottom = -1 * 10^{-2}$ // ordenada al origen para la superficie reflectora inferior

$Slope1 = 1 * 10^{-1}$ // pendiente para la superficie reflectora superior

$Slope2 = -1 * 10^{-1}$ pendiente para la superficie reflectora inferior

$F1 = Slope1 * z_n + Top$ // Función para generar el espejo superior

$F2 = Slope2 * z_n + Bottom$ // Función para generar el espejo inferior

// A continuación la función que calculará cada parámetro de la gaussiana invariante. La función recibe dos parámetros: x [m] indica la altura del rayo en el plano objeto, θ [rad] indica el ángulo de inclinación del rayo en dicho plano. Todas las unidades de distancia en esta función están dadas en metros. Con el fin de trazar gaussianas lo más semejantes a un rayo, se utilizarán longitudes de onda muy pequeñas, aunque cualquier valor arbitrario puede ser utilizado.

$P(x, \theta) = \{$

$\lambda_0 = 0.6 * 10^{-15};$ $z_0 = 0;$

$xA_0 = x;$ $xB_0 = 0;$

$Nref_0 = 1;$ $\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} tan(\theta);$

$\beta_0 = 0;$ $\gamma_0 = 0;$

$r0 = 1 * 10^{-3};$ $\theta_1 = \theta;$

$zT = 0;$ $Bandera = 0;$

//Bandera funciona como un control para evitar que el rayo se propague en una dirección incorrecta al estar cerca de una interfase, debido a que la precisión que se tiene en el programa es finita.

$for\ m \epsilon 1 \dots N$

$Bandera = Bandera - 1\ if\ Bandera\ > 0;$

$z_m = dz;$ $zT = zT + dz;$

$Nref_m = 1;$ $\lambda_m = \lambda_0;$

// Ahora se presentan los parámetros desarrollados en el capítulo 3 de este trabajo para la gaussiana invariante.

$D_m = {\lambda_m}^2 {z_m}^2 + {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2;$

$\alpha_m = 0;$ $\beta_m = \frac{\pi}{\lambda_m z_m};$

$\gamma_m = \frac{-\pi^2 {r_{m-1}}^4 (\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi)^2}{D_m \lambda_m z_m};$ $r_m = \frac{\sqrt{D_m}}{\pi r_{m-1}};$

$xA_m = xA_{m-1} + \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{\lambda_m z_m xA_{m-1}(\beta_{m-1} + \gamma_{m-1})}{\pi};$

$xB_m = \frac{\alpha_{m-1}\lambda_m z_m}{2\pi} - \frac{\gamma_{m-1}\lambda_m z_m xB_{m-1}}{\pi} + \frac{{\lambda_m}^2 {z_m}^2}{\beta_{m-1}\lambda_m z_m + \gamma_{m-1}\lambda_m z_m + \pi} * \frac{xA_{m-1}}{\pi {r_{m-1}}^4};$

$\theta_1 = atan\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}(\alpha_{m-1} - 2\gamma_{m-1} xB_{m-1})\right];$

$if\left(\left|Re\big(F1(zT)\big) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 60;$

$if\left(\left|Re\left(F2(zT)\right) - xA_m\right| < \frac{R}{100}\right) * (Bandera = 0) * (zT < x0)$

$S = Slope(zT);$ $S = 0\ if\ Im(S) \neq 0;$

$Angulo = atan(S);$

$\alpha P = Angulo + asin\left(\frac{Nref_1}{Nref_2} sin(\theta_1 - Angulo)\right);$

$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$ $\beta_m = 0;$

$\gamma_m = 0;$ $r_m = r_0;$

$Bandera = 60;$

$if(|zT - (Vertice + Grueso)| < 1.5dz) * (Bandera = 0)$

$\alpha P = -asin\left(\frac{Nref_2}{Nref_2} sin(\theta_1)\right);$ $\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} tan(-\alpha P);$

$\beta_m = 0;$ $\gamma_m = 0;$

$r_m = r_0;$ $Bandera = 60;$

$for\ m \epsilon 0 \ldots N$

$U_{m,o} = xA_m;$

$Return\ U$

}