

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ÓPTICA A.C.



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

Medición de vibraciones mecánicas por el método
de proyección de franjas

TESIS

Que para obtener el título de:
MAESTRO EN OPTOMECASTRÓNICA

Presenta

Ing. Francisco Alejandro Ramírez Díaz

Asesor

Dr. Bernardino Barrientos García

León, Guanajuato, septiembre 2012

DEDICATORIAS

Quisiera dedicar mi tesis en primer lugar a mi madre *Rosa* que además de darme la vida ha estado siempre pendiente de mis luchas diarias, a mi padre *Francisco* por todas esas palabras de aliento que me ha brindado a lo largo de mi vida y ambos que han compartido mis logros profesionales y personales, a mis hijos *Alejandro* y *Emilio* por ser la motivación para superarme día con día, pero sobre todo quiero agradecer a mi esposa *Amelia* quien me ha apoyado e impulsado a alcanzar la meta que hoy logro, que se ha sacrificado junto a mí y ha sido mi soporte para no darme por vencido, que ha compartido conmigo los sacrificios de salidas y noches en vela, pero sobre todo ha sido mi compañera incondicional.

Asimismo quisiera reconocer a mi asesor, *Dr. Bernardino Barrientos García* que me dio los conocimientos y bases necesarias para poder realizar este trabajo.

También agradezco a mis *maestros* por sus consejos y conocimiento que me compartieron, así como a todos los *compañeros* que me brindaron su amistad, apoyo y confianza.

Y por último apremio al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)* por el apoyo económico brindado durante mis estudios.

GRACIAS

Ing. Francisco Alejandro Ramírez Díaz

R E S U M E N

Entre las diferentes técnicas de medición óptica se encuentra la proyección de franjas (FP, por sus siglas en inglés), la cual se emplea para el análisis de campo completo de deformaciones del orden de mm.

En esta tesis se presentan los resultados de simulaciones numéricas aplicadas al estudio de la influencia de algunos parámetros en FP. Los parámetros bajo investigación son el periodo del patrón de franjas (T), la forma de las franjas portadoras (senoidales, gaussianas y rectangulares), el contraste de las franjas (C), el ciclo de trabajo (p), la resolución de las franjas (número total de píxeles de una imagen) y el grado de complejidad espacial de los desplazamientos. Para esto se modela numéricamente una placa rectangular con diversas portadoras en frecuencia. En particular se analizan varios tipos de mapas de deformación generados por diversas funciones conocidas: paraboloides, error de divergencia del haz, paraboloides con error de divergencia del haz y patrones modales producidos por vibración de una placa rectangular sujeta en las esquinas. Esta última se modela mediante el método de elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés). De esta forma, los mapas de deformación producidos por FEM corresponden a la entrada al algoritmo de FP y la fase óptica se recupera con el método de Fourier. Una vez recuperada la fase óptica, se compara con la fase de entrada y se obtiene el error relativo porcentual. Experimentalmente se evalúa la aplicabilidad de FP en la medición de vibraciones mecánicas. El objeto bajo estudio es una placa rectangular de aluminio 6061-T6, con dimensiones de 0.35 m de largo, 0.35 m de ancho y 8 mm de espesor, la cual se empotra en sus esquinas. La placa se somete a excitación dinámica mediante la aplicación de una fuerza periódica proporcionada por un martillo electromagnético.

El arreglo experimental de FP resulta ser sencillo para su implementación. Además, FP no es influenciada por ruido externo. La fuente de iluminación puede ser fabricada con lámparas LED, que son relativamente económicas y fáciles de conseguir. La cámara CCD, según el nivel de exactitud, puede ser seleccionada considerando el valor mínimo de sensibilidad y la resolución como parámetros fundamentales del sistema. Todas estas características hacen de FP una técnica aprovechable en el sector industrial.

La influencia del periodo de la rejilla proyectada es mínima cuando corresponde a un múltiplo exacto de las dimensiones de la imagen, esto debido a la periodicidad de la

transformada de Fourier discreta. Experimentalmente, a menor periodo, mayor resolución espacial del método.

Para contrastes mayores al 5% y menores que el 95%, el error se considera bajo y relativamente constante. En forma práctica, el contraste de las franjas registradas por la cámara depende del nivel de iluminación y de la resolución de la cámara. Por lo tanto, este parámetro no afecta a las mediciones mientras el nivel de iluminación sea el apropiado. El error generado por resolución espacial puede considerarse inversamente proporcional al número total de píxeles de una imagen.

FP es una técnica con un amplio potencial para aplicaciones en diversos sectores industriales, especialmente en el campo de vibraciones mecánicas.

ÍNDICE GENERAL

C A P Í T U L O 1.....	1-1
1. INTRODUCCIÓN.....	1-1
1.1. Antecedentes del trabajo.....	1-1
1.1.1. Métodos de medición.....	1-2
1.1.2. Comparación de métodos de medición.....	1-4
1.1.3. Técnica utilizada.....	1-4
1.2. Objetivo general.....	1-4
1.3. Objetivos particulares.....	1-5
1.4. Estructura de la tesis.....	1-5
C A P Í T U L O 2.....	2-9
2. Fundamento teórico.....	2-9
2.1. Teoría de proyección de franjas.....	2-9
2.2. Registro del patrón de franjas en cámara CCD.....	2-11
2.3. Método de Fourier para obtener la diferencia de fase.....	2-12
2.4. Desarrollo de fase.....	2-16
2.5. Error por divergencia del haz.....	2-17

C A P Í T U L O 3	3-23
3. Simulaciones numéricas.....	3-23
3.1. Simulación numérica de franjas senoidales con deformación correspondiente a una función paraboloides.....	3-23
3.2. Simulación numérica producida por el error de divergencia del haz.....	3-29
3.3. Simulación numérica producida por la combinación del efecto de divergencia del haz y deformación tipo paraboloides.....	3-32
3.4. Modelado por resultados obtenidos con el método de elemento finito.....	3-35
3.4.1. Modelado de placa de aluminio mediante el uso de FEM.....	3-36
3.4.1.1. Pre-proceso.....	3-36
3.4.1.2. Solución.....	3-38
3.4.1.3. Post-proceso.....	3-38
3.5. Análisis de errores en FP.....	3-41
3.5.1. Modelado de patrones de franjas [2].....	3-42
3.5.1.1. Franjas senoidales.....	3-42
3.5.1.2. Franjas gaussianas.....	3-43
3.5.1.3. Franjas rectangulares.....	3-45
3.5.2. Franjas senoidales con patrón modal de 2326 Hz.....	3-46
3.5.2.1. Influencia del periodo.....	3-46
3.5.2.2. Influencia del contraste.....	3-48
3.5.2.3. Influencia de la resolución.....	3-50
3.5.3. Franjas gaussianas con patrón modal de 2326 Hz.....	3-51
3.5.3.1. Influencia del periodo.....	3-52
3.5.3.2. Influencia del contraste.....	3-54
3.5.3.3. Influencia del ciclo de trabajo.....	3-54
3.5.3.4. Influencia de la resolución.....	3-55
3.5.4. Franjas rectangulares con patrón modal de 2326 Hz.....	3-57
3.5.4.1. Influencia del periodo.....	3-57
3.5.4.2. Influencia del contraste.....	3-60
3.5.4.3. Influencia del ciclo de trabajo.....	3-60
3.5.4.4. Influencia de la resolución.....	3-61
3.5.5. Franjas senoidales con patrón modal de 3994 Hz.....	3-63
3.5.5.1. Influencia del periodo.....	3-63

3.6. Resultados de simulaciones.....	3-64
3.6.1. Influencia del periodo.....	3-65
3.6.2. Influencia del contraste [25, 26].	3-67
3.6.4. Influencia de la resolución espacial (tamaño de imagen).	3-71
3.7. Conclusiones.	3-74
C A P Í T U L O 4	4-79
4. Resultados experimentales	4-79
4.1. Arreglo experimental de la técnica de FP.....	4-79
4.2. Patrones modales experimentales.	4-82
4.3. Medición de patrones modales.....	4-83
4.3.1. Periodo de 1 mm.	4-84
4.3.1.1. Patrón modal de 152 Hz.....	4-84
4.3.1.2. Patrón modal de 772 Hz.....	4-88
4.3.2. Periodo de 0.5 mm.	4-92
4.3.2.1. Patrón modal de 152 Hz.....	4-92
4.3.2.2. Patrón modal de 772 Hz.....	4-94
4.4. Reconstrucción del ciclo de deformación con franjas de periodo de 1 mm....	4-97
4.4.1. Patrón modal de 152 Hz.....	4-97
4.4.1.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.	4-97
4.4.1.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.	4-99
4.4.2. Patrón modal de 772 Hz.....	4-100
4.4.2.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.	4-101
4.4.2.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.	4-102
4.5. Comparación entre imágenes procesadas con periodo de 0.5 mm.....	4-102
4.5.1. Patrón modal de 152 Hz.....	4-102
4.5.1.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.	4-102
4.5.1.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.	4-104

4.5.2. Patrón modal de 772 Hz.....	4-105
4.5.2.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.	4-105
4.5.2.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.....	4-106
4.6. Conclusiones.....	4-107
C A P Í T U L O 5	5-113
5. Conclusiones y trabajo futuro.....	5-113

Í N D I C E D E F I G U R A S

- Figura 2-1. Proyección de franjas sobre la superficie de un objeto (en línea roja se representa su superficie). Las líneas paralelas a la dirección OP_1 representan rayos provenientes de la lente telecéntrica de un proyector, los cuales forman el patrón de franjas proyectado..... 2-10
- Figura 2-2. Lóbulos de las frecuencias positivas de la transformada de Fourier de la intensidad..... 2-13
- Figura 2-3. Transformada de Fourier de la intensidad..... 2-15
- Figura 2-4. Fase envuelta 1D..... 2-16
- Figura 2-5. Fase desenvuelta en 1D..... 2-17
- Figura 2-6. Esquema para análisis del error de proyección..... 2-17
- Figura 2-7. Comparación entre las ecuaciones exacta y aproximada, para la variación del periodo proyectado. En esta puede verse que al aumentar el ángulo de proyección, la variación del periodo se incrementa, de la misma manera al ampliar el intervalo x . La variación entre ambas ecuaciones no es realmente significativa. 2-19
-

Figura 3-1. Geometría de un paraboloide.....	3-24
Figura 3-2. Mapa de deformación simulado con Matlab, para entrada al algoritmo de FP, placa de 35 cm × 35 cm.....	3-24
Figura 3-3. Señal portadora con franjas rectas sin modulación de fase con un periodo de 8 pix, en una imagen de 1024×1024 pix ² . La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.....	3-26
Figura 3-4. Señal portadora con franjas moduladas en fase para un periodo de 8 pix, generado por un término de fase paraboloide, en una imagen de 1024×1024 pix ² . La región de color rojo corresponde a la región de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.....	3-26
Figura 3-5. a) Franjas sin deformación y con deformación. Se extrae la línea central de las regiones señaladas en rojo de la Figura 3-3 y Figura 3-4. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1024×1024 pix ²	3-27
Figura 3-6. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de 1024×1024 pix ² . Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.....	3-28
Figura 3-7. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de 1024×1024 pix ² . Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.....	3-28
Figura 3-8. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas de fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de 1024×1024 pix ²	3-29
Figura 3-9. Comparación entre la fase original y computada. a) Envuelta, b) desenvuelta. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.....	3-29
Figura 3-10. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producidas por el error de divergencia del haz. Se extrae la línea central de la región equivalente a la señalada en rojo de la Figura 3-3. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea 512. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1024×1024 pix ²	3-30
Figura 3-11. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de 1024×1024 pix ² . Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.....	3-31

- Figura 3-12. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-31
- Figura 3-13. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$ 3-31
- Figura 3-14. Comparación entre la fase original y computada. a) Envuelta, b) desenvuelta. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-32
- Figura 3-15. Señal portadora con franjas rectas moduladas en fase con un periodo de 8 pix, producido por el error de proyección. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512..... 3-32
- Figura 3-16. Señal portadora con franjas moduladas en fase con un periodo de 8 pix, provocado por el efecto de proyección y por un término de deformación tipo paraboloide. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512. 3-33
- Figura 3-17. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el error de divergencia del haz. Se extrae la línea central de la región equivalente a la señalada en rojo de la Figura 3-15. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea 512. b) Resta de patrones de franjas..... 3-34
- Figura 3-18. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de la amplitud de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-34
- Figura 3-19. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de la amplitud de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-34
- Figura 3-20. Ampliación de los lóbulos filtrados de la Figura 3-7d y Figura 3-19d. Se observa que al aumentar la cantidad de señales que aportan variación en la fase, los lóbulos disminuyen en amplitud y aumenta su ancho..... 3-35
- Figura 3-21. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$ 3-35

Figura 3-22. Geometría del elemento MESH200 [19].....	3-37
Figura 3-23. Geometría SOLID185.....	3-37
Figura 3-24. Mallado libre.	3-38
Figura 3-25. Mallado Mapeado.	3-38
Figura 3-26. Patrones modales obtenidos por software FEM. a) 210 Hz, b) 777.49 Hz, c) 2326 Hz, d) 3994 Hz. La escala de desplazamientos se encuentra en milímetros y tiene que multiplicarse por un factor de 1×10^{-2} ; las dimensiones de la placa son ancho x largo de $0.35 \times 0.35 \text{ m}^2$ y 8 mm de espesor.	3-40
Figura 3-27. Derivada de los patrones modales obtenidos por software FEM y transferidos a MATLAB. a) 2326 Hz con pendiente máxima 24.49°. b) 3994 Hz con pendiente máxima 32.90°. Las dimensiones de la barra son grados.	3-41
Figura 3-28. Parámetros que definen el contraste de franjas senoidales.....	3-43
Figura 3-29. Parámetros para definir el contraste en franjas gaussianas.	3-44
Figura 3-30. Parámetros para definir el contraste en franjas rectangulares.	3-45
Figura 3-31. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.	3-46
Figura 3-32. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-31. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas. c) Mapa de fase óptica recuperada envuelta. d) Mapa fase óptica recuperada desenvuelta con error de $6.53 \times 10^{-5}\%$	3-47
Figura 3-33. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.....	3-47
Figura 3-34. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-31. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas.....	3-48
Figura 3-35. Cortes transversales de la fase original (verde) y recuperada (negra) corte de 1024 pix a lo largo de la línea número 512. a) Caso mejor $T=8$ pix. b) Caso peor $T=10$ pix.....	3-48
Figura 3-36. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 5%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.....	3-49

- Figura 3-37. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 1%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz..... 3-49
- Figura 3-38. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 4096×4096 pix²..... 3-50
- Figura 3-39. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 128×128 pix²..... 3-51
- Figura 3-40. a) Mapa de fase desenvuelta con resolución de 4096×4096 pix². b) Mapa de fase desenvuelta con resolución de 128×128 pix². c) y d) Traslape de cortes transversales de la fase original (verde) y recuperada (negra). c) Caso mejor $T=8$ pix, $C=100\%$ y 4096×4096 pix². Corte de 4096 pix a lo largo de la línea 2048. d) Caso peor $T=8$ pix, $C=100\%$ y 128×128 pix². Corte de 128 pix a lo largo de la línea 64..... 3-51
- Figura 3-41. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512..... 3-52
- Figura 3-42. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-41. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas..... 3-53
- Figura 3-43. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-53
- Figura 3-44. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=10$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz..... 3-54
- Figura 3-45. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, y $p=10\%$ producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz..... 3-55
- Figura 3-46. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 4096×4096 pix²..... 3-56
- Figura 3-47. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 128×128 pix²..... 3-57

- Figura 3-48. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512..... 3-58
- Figura 3-49. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-48. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas..... 3-58
- Figura 3-50. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512..... 3-59
- Figura 3-51. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=18$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz..... 3-60
- Figura 3-52. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, $C=100\%$, y $p=10\%$ producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz..... 3-61
- Figura 3-53. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, $p=50\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 4096×4096 pix²..... 3-62
- Figura 3-54. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, $C=100\%$, $p=50\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 128×128 pix²..... 3-62
- Figura 3-55. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 3394 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512..... 3-63
- Figura 3-56. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 3394 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-55. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas. c) Mapa de fase óptica recuperada envuelta. d) Mapa fase óptica recuperada desenvuelta con error de $1.23 \times 10^{-4}\%$ 3-64
- Figura 3-57. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=18$ pix, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 3394 Hz..... 3-64

- Figura 3-58. Error vs Periodo. Todos los casos FC=1. Error mínimo $6.53 \times 10^{-5}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz..... 3-66
- Figura 3-59. Error vs Periodo. Senoidal 512(FC=2), Gaussiana 512(FC=2), Gaussiana 1024 (FC=4), otro caso FC=1. Error mínimo $1.23 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz..... 3-66
- Figura 3-60. Error vs Contraste. Senoidal 1024 (FC=2), Gaussiana 1024 (FC=2), Rectangular 1024 (FC=3), otro caso FC=1. Error mínimo porcentual $6.53 \times 10^{-5}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz..... 3-68
- Figura 3-61. Error vs Contraste. Rectangular 1024 (FC=2), otro caso FC=1. Error mínimo porcentual $1.23 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz..... 3-68
- Figura 3-62. Error vs Contraste. Todos los casos FC=1. Error máximo porcentual $8.10 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz..... 3-69
- Figura 3-63. Error vs Contraste. Todos los casos FC=1. Error máximo porcentual $1.05 \times 10^{-3}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz..... 3-69
- Figura 3-64. Perfiles de franjas con ciclo de trabajo de 10% (violeta) y 90% (azul). a) Perfil cuadrado (perfiles complementarios). b) Perfil gaussiano (perfiles no complementarios)..... 3-71
- Figura 3-65. Error vs Ciclo de trabajo. Error mínimo porcentual $1.64 \times 10^{-4}\%$, para el caso franjas Gaussianas en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz..... 3-71
- Figura 3-66. Error vs Ciclo de trabajo. Error mínimo porcentual $5.60 \times 10^{-4}\%$, para el caso franjas Gaussianas en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz..... 3-71
- Figura 3-67. Error vs Resolución. Error mínimo porcentual $2.69 \times 10^{-6}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz. Los números corresponden a: 1: 128x128, 2: 256x256, 3: 512x512, 4: 1024x1024, 5: 2048x2048, 6: 4096x4096 pix²..... 3-72
- Figura 3-68. Error vs Resolución. Error mínimo porcentual $4.23 \times 10^{-6}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz. Los números corresponden a: 1: 128x128, 2: 256x256, 3: 512x512, 4: 1024x1024, 5: 2048x2048, 6: 4096x4096 pix²..... 3-72
- Figura 3-69. Razón de cambio del error vs resolución. Cambio de: 1:128x128 a 256x256, 2:256x256 a 512x512, 3:512x512 a 1024x1024, 4:1024x1024 a 2048x2048, 5:2048x2048 a 4096x4096 pix². T=8, C=100%, p=50%, patrón modal de 2326 Hz..... 3-73

Figura 3-70. Razón de cambio del error vs resolución. Cambio de: 1:128x128 a 256x256, 2:256x256 a 512x512, 3:512x512 a 1024x1024, 4:1024x1024 a 2048x2048, 5:2048x2048 a 4096x4096 pix².
T=8, C=100%, p=50%, patrón modal de 3994 Hz..... 3-73

Figura 4-1. Esquema del arreglo FP con ángulo θ	4-80
Figura 4-2. Esquema del arreglo experimental FP.....	4-80
Figura 4-3. Arreglo experimental del sistema FP. 1 fuente de iluminación, 2 cámara CCD, 3 placa rectangular de aluminio y en parte superior patrón de franjas, 4 <i>Shaker</i> , 5 amplificador de potencia, 6 generador de funciones y 7 osciloscopio.....	4-82
Figura 4-4. Patrones modales; a) 152 Hz; b) 772 Hz; c) 2222 Hz; d) 4217 Hz.	4-83
Figura 4-5. Zona de análisis de la placa.....	4-84
Figura 4-6. Fotografías de señal portadora senoidal con $T=1$ mm. a) Señal portadora sin modulación de fase (referencia). b) Señal portadora con modulación de fase (deformada). Fotografías de 1092×1036 pix^2 . Patrón modal 152 Hz.	4-85
Figura 4-7. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 4-6. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1092×1036 pix^2	4-85
Figura 4-8. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen 1092×1036 pix^2	4-86
Figura 4-9. Fase óptica recuperada. a) Desplazamiento en dirección positiva (arriba). b) Desplazamiento en dirección negativa (abajo). Imágenes 1092×1036 pix^2 . Los recuadros rojos corresponden a zonas que se descartan por contener errores originados por el método de Fourier: esencialmente aquellos originados por la falta de periodicidad de la estructura espacial bajo análisis.	4-86
Figura 4-10. Fase óptica recuperada corregida. a) En dirección positiva (arriba). b) En dirección negativa (abajo). Imágenes de 893×837 pix^2 (15.03×12.10 cm^2).....	4-87
Figura 4-11. Patrón modal de 152 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 2. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-10a. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$	4-88
Figura 4-12. Mapa de desplazamientos. Imagen de 893×837 pix^2 . Patrón modal 152 Hz. Desplazamiento máximo 0.26 mm . Área de observación 15.03×12.10 cm^2	4-88

- Figura 4-13. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo equivalente de la Figura 4-6. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-89
- Figura 4-14. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-89
- Figura 4-15. Lóbulos filtrados amplificados de la transformada de Fourier del patrón modal de 152 Hz y 772 Hz con periodo de 1 mm. Estos se extraen del intervalo de 675 pix hasta 752 pix de la Figura 4-8 y Figura 4-14. 4-90
- Figura 4-16. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$). 4-91
- Figura 4-17. Patrón modal de 772 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-16b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$ 4-91
- Figura 4-18. Mapa de desplazamientos. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$. Patrón modal 772 Hz. Mínimo desplazamiento es -0.129 mm y el máximo de $24.31 \mu\text{m}$. Área de observación $15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$ 4-92
- Figura 4-19. Fotografías de señal portadora senoidal con $T=0.5 \text{ mm}$. a) Señal portadora sin modulación de fase (referencia). b) Señal portadora con modulación de fase (deformada). Fotografías de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. Patrón modal 152 Hz. 4-92
- Figura 4-20. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 4-19. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-93
- Figura 4-21. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-93

- Figura 4-22. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$)..... 4-94
- Figura 4-23. Patrón modal de 152 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-22b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$ 4-94
- Figura 4-24. Mapa de desplazamientos. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$. Patrón modal 152 Hz. Desplazamiento máximo 0.25 mm . Área de observación $15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$ 4-94
- Figura 4-25. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo equivalente de la Figura 4-19. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-95
- Figura 4-26. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ 4-95
- Figura 4-27. Traslape de los lóbulos filtrados amplificados de la transformada de Fourier del patrón modal de 152 Hz y 772 Hz con periodo de 0.5 mm. Estos se extraen del intervalo de 850 pix hasta 922 pix de la Figura 4-21 y Figura 4-26..... 4-96
- Figura 4-28. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$)..... 4-96
- Figura 4-29. Patrón modal de 772 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-28b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$ 4-97
- Figura 4-30. Mapa de desplazamientos. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$. Patrón modal 772 Hz. Máximo desplazamiento positivo corresponde a 0.16 mm y el negativo a $34 \mu\text{m}$. Área de observación $15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$ 4-97

- Figura 4-31. Evolución del ciclo de vibración a 152 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.2611mm. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.20978 mm. c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.07743mm. d) Instante de fase 4, desplazamiento límite -0.25812mm. e) Instante de fase 5, desplazamiento límite -0.35007 mm. 4-98
- Figura 4-32. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5. 4-99
- Figura 4-33. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix. 4-100
- Figura 4-34. Evolución del ciclo de vibración 772 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 24.32 μm , -0.1296mm. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 24.28 μm , -0.1339mm. 4-101
- Figura 4-35. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. 4-102
- Figura 4-36. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix. 4-102
- Figura 4-37. Evolución del ciclo de vibración 152 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.24779mm. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.17724 mm. c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.07635mm. d) Instante de fase 4, desplazamiento límite -0.17114mm. e) Instante de fase 5, desplazamiento límite -0.30094 mm. 4-103
- Figura 4-38. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5. 4-104
- Figura 4-39. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix. 4-105

- Figura 4-40. Evolución del ciclo de vibración 772 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.16137 mm , $-34.77\ \mu\text{m}$. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.12918 mm , $-32.82\ \mu\text{m}$. c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.10387 mm , $-28.76\ \mu\text{m}$. d) Instante de fase 4, desplazamiento límite 0.08898 mm , $-19.17\ \mu\text{m}$. e) Instante de fase 5, desplazamiento límite 0.04511 mm , -0.11669 mm 4-106
- Figura 4-41. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5. 4-106
- Figura 4-42. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 772 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) $M/4$ pix, c) $M/2$ pix, d) $3M/4$ pix y e) $M-50$ pix. Para $M=837$ pix. 4-107

C A P Í T U L O 1

Introducción

En este capítulo se describe de manera general el contenido del presente trabajo de tesis. La Sección 1.1 se refiere a los antecedentes del trabajo, haciendo hincapié en los métodos más comúnmente utilizados para la medición de vibraciones, y describiendo brevemente su forma de uso. En la Sección 1.2 se puntualizan tanto el objetivo general como los particulares. Por último, se proporciona una descripción general de la estructura de esta tesis.

1.1. Antecedentes del trabajo.

En la actualidad el uso de diversos materiales en ingeniería demanda análisis exhaustivos de los mismos desde el punto de vista de diferentes campos del conocimiento, por ejemplo propagación de calor y deformación. También, el reciente desarrollo y crecimiento de la óptica ha tenido como consecuencia novedosas aplicaciones en ingeniería. En esta tesis se abordan los parámetros que influyen la medición de vibración de elementos mecánicos mediante la técnica de proyección de franjas. Con esta técnica se pueden hacer mediciones sin necesidad de tener contacto mecánico con los objetos a medir. En adición, es posible hacer la medición en campo completo y casi en tiempo real.

Si un elemento mecánico es excitado dinámicamente se pueden presentar vibración y ruido. Los efectos de ruido y vibración van desde el fastidio, fatiga e incluso peligros de salud. En máquinas, vehículos y edificios los efectos pueden ser: desgaste, funcionalidad reducida, falla o cualquier grado de daño irreversible.

Bajo ciertas condiciones, las vibraciones pueden dar lugar a fenómenos de resonancia [1-3]. La resonancia ocurre cuando las fuerzas dinámicas en un proceso excitan las frecuencias naturales o los modos de vibración (formas específicas de deformación producidas a diversas frecuencias de excitación), de las estructuras mecánicas. Ahí radica la importancia de estudiar modos de vibración mediante una técnica de medición óptica. Además, un análisis de vibraciones puede llegar a ser la base para una descripción dinámica completa de cierto elemento mecánico. Esto debido a que los métodos de análisis tradicionales ignoran este carácter variable de los esfuerzos y se realiza un cálculo estático, afectando a la magnitud de los esfuerzos o a la tensión admisible del material con el

correspondiente coeficiente de seguridad. Cuando el carácter variable o "dinámico" de las cargas es importante, o cuando hay fenómenos tales como choques, estos coeficientes de seguridad tienen valores tan grandes como 10 ó 15 en previsión de lo que pudiera suceder. Entonces con mediciones de campo completo es posible prever daños tempranamente o comportamientos inesperados.

Con base en lo mencionado, es de gran importancia implementar métodos de medición de precisión, que sirvan como base para la caracterización de los patrones modales y con esto determinar y pronosticar posibles fallas en elementos mecánicos.

1.1.1. Métodos de medición.

En la actualidad existen diversos métodos de medición de vibraciones en las que se destaca el uso de sensores inductivos, capacitivos, mecánicos, que son comúnmente utilizados en la industria. Recientemente se ha realizado un gran avance tecnológico en óptica, y como consecuencia de esto se han diversificado varios métodos ópticos donde las perturbaciones pueden ser evaluadas con mayor exactitud, además de ofrecer resultados en la zona completa de análisis (campo completo). Estas ventajas las ofrecen la mayor parte de los métodos ópticos cuando se les compara con sensores no ópticos, ya que estos últimos ofrecen resultados de manera puntual.

Algunos de los métodos que se destacan para la medición de vibraciones son:

a) Proyección de franjas.

La técnica de proyección de franjas (FP) es una técnica óptica de campo completo no intrusiva usada en la medición de la componente fuera de plano del desplazamiento de un objeto que se somete a deformación [4-6].

Esta técnica se describe con mayor detalle en los siguientes capítulos por ser el tema de tesis.

b) Interferometría electrónica de patrones de moteado.

La interferometría electrónica de patrones de moteado (ESPI, por sus siglas en inglés: *Electronic Speckle Pattern Interferometry*) es un método óptico basado en iluminación láser y sistemas optoelectrónicos de captura y procesado para visualizar desplazamientos estáticos y dinámicos de componentes con superficies ópticamente rugosas [7-12].

c) Vibrómetro láser Doppler.

El vibrómetro láser Doppler es un dispositivo que emplea un láser para producir interferencia óptica y poder medir velocidades de superficie o vibraciones de puntos específicos en una estructura en vibración, con una alta resolución temporal y con un amplio intervalo de amplitud y frecuencias.

El principio de la vibrometría láser (*Laser Doppler Vibrometry*, LDV) se basa en la detección de un cambio Doppler en la frecuencia de la luz coherente dispersada por la superficie de un objetivo en movimiento, del cual se obtiene una medición, resuelta en el tiempo, de la velocidad del mismo.

El cambio en frecuencia de la luz devuelta desde la superficie, es una cantidad proporcional a la velocidad de la superficie (efecto Doppler). El instrumento mide este desplazamiento de frecuencia para producir una señal de velocidad instantánea la cual puede ser analizada subsecuentemente [13, 14].

d) Holografía Digital.

Los hologramas consisten en el registro de fotografías de un objeto iluminado mediante un haz láser. Cuando un holograma es registrado en una cámara CCD (*Charged Coupled Device*), el resultado es un holograma digital. Entonces un holograma es comparado en un instante de tiempo contra otro y con esto se puede obtener el desplazamiento producido entre ambos instantes [15-19].

e) Transductores de corriente de Eddy.

Son dispositivos de desplazamiento sin contacto, que miden directamente la posición de un eje giratorio con respecto a un punto fijo. El cambio en la posición de un eje provee una indicación directa de la vibración. La punta de una sonda contiene una bobina encapsulada, la cual cuando es excitada con una señal de alta frecuencia genera un campo electromagnético. A medida que el eje rota bajo condiciones de vibración, se alejará o se acercará a la punta de la sonda, interactuando por consiguiente, con el campo electromagnético. Con esto se induce una corriente de Eddy en el material, cuya energía es proporcional al campo magnético por lo que estos transductores son considerados como del tipo inductivos. Por lo tanto, midiendo el valor de la corriente de Eddy, se puede determinar la posición del eje y por consiguiente la vibración [20-22].

1.1.2. Comparación de métodos de medición.

En la Tabla 1-1 se presentan algunas características importantes que nos permiten comparar los diferentes métodos de medición de vibraciones.

Tabla 1-1 Comparación general entre métodos de medición.

Parámetros	Método				
	FP [23]	ESPI [24]	LDV [25]	Holografía digital [16]	Sensores de corrientes de Eddy [20, 21, 26]
Contacto mecánico	no	no	no	no	no
Campo completo	si	si	puntual	si	puntual
Sensibilidad al ruido externo	baja*	moderada**	moderada**	moderada**	moderada**
Uso en materiales	ópticamente rugosos	ópticamente rugosos	cualquiera	ópticamente rugosos	metales
Resolución	20 μm	0.2 μm	0.1 nm	0.1 μm	100 μm
Rango de medición	20 μm –10 cm	0.2 μm –10 μm	10 nm–10 mm	25 nm–10 μm	0.1 mm–2.25 mm
Tiempo de procesamiento	0.5 s	1 s	1 μs	1 s	50 μs
Tamaño de los objetos	0.5 m \times 0.5 m	0.5 m \times 0.5 m	puntual	0.5 m \times 0.5 m	puntual

* Baja afectación en la señal por parte de señales externas.

** Moderada afectación en la señal por parte de señales externas. Ejemplo, en holografía, variaciones pequeñas en el ambiente pueden llegar a afectar severamente las mediciones, mientras que en FP no.

1.1.3. Técnica utilizada.

En esta tesis se describe la implementación del método de proyección de franjas (FP) en la medición de vibraciones mecánicas. Se optó por esta técnica ya que a diferencia de otras técnicas, tales como ESPI y holográfica digital, FP puede ser usada en ambientes industriales por su baja sensibilidad al ruido. Esto se debe a su reducido número de componentes (un proyector y una cámara) y al uso de luz blanca estructurada. FP es una técnica de campo completo.

1.2. Objetivo general.

Optimizar mediante simulación numérica los diferentes parámetros relacionados con la técnica de proyección de franjas tales como: ciclo de trabajo, contraste, forma de las franjas de proyección y resolución espacial, así como implementar el arreglo FP optimizado para medir desplazamiento en una placa metálica sometida a vibración, con objeto de valorar su aplicabilidad en la industria.

1.3. Objetivos particulares.

- a) Simular numéricamente la técnica FP.
- b) Obtener los patrones modales de una placa rectangular de aluminio mediante software de elemento finito (FEM).
- c) Probar la técnica FP numéricamente con patrones modales obtenidos mediante FEM, variando los parámetros ya mencionados.
- d) Implementar experimentalmente el arreglo clásico de FP.
- e) Medir desplazamientos en una placa de aluminio sometida a vibración.

1.4. Estructura de la tesis.

En el Capítulo 2 se describe la técnica de proyección de franjas. Se incluye el desarrollo matemático para la obtención de la expresión que relaciona la diferencia de fase óptica y el desplazamiento. Lo anterior, haciendo uso del método de Fourier.

Posteriormente se proporciona el análisis matemático de la influencia del error de proyección en FP.

En el Capítulo 3 se desarrollan las simulaciones numéricas, mediante el uso de herramientas computacionales, con objeto de observar gráficamente la influencia de los parámetros involucrados en FP. También se obtienen los patrones modales producidos por la vibración en el modelo de placa rectangular de aluminio mediante FEM (paquete ANSYS estructural). Estos modos de vibración se prueban numéricamente con FP y se evalúa el desempeño de FP respecto a diversos parámetros.

Posteriormente en el Capítulo 4 se describe el procedimiento experimental, donde se detalla la selección de los valores de los diferentes parámetros; adicionalmente, se mencionan los resultados prácticos obtenidos, así como su evaluación.

Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales del trabajo.

Referencias

1. B. Kjær, "Structural testing Part 1: Mechanical Mobility Measurements," *Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement* **1**(1), 1-47 (1988).
2. B. Kjær, "Vibration Testing," *Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement* **1**(1), 1-24 (1983).
3. B. Kjær, "Measuring vibration," *Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement* **1**(1), 1-40 (1982).
4. R. Windecker, S. Franz, and H. J. Tiziani, "Optical roughness measurements with fringe projection," *Appl. Opt.* **38**(13), 2837-2842 (1999).
5. B. Barrientos, M. Cerca, J. Garcia-Marquez, and C. Hernandez-Bernal, "Three-dimensional displacement fields measured in a deforming granular-media surface by combined fringe projection and speckle photography," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **10**(10), 1-10 (2008).
6. B. Barrientos, M. Cywiak, W. K. Lee, and P. Bryanston-Cross, "Measurement of dynamic deformation using a superimposed grating," *Rev. Mex. Fis.* **50**(1), 12-18 (2004).
7. R. Rodríguez Vera, J. A. Rayas, A. Martínez, A. Dávila, J.L. Marroquín, "Algunas aplicaciones industriales de la interferometría electrónica de patrones de moteado," *CENAM Memorias del Simposio de Metrología* **D**(3), 6-11 (2001).
8. W. C. Wang and C. H. Hwang, "Experimental analysis of vibration characteristics of an edge-cracked composite plate by ESPI method," *Int. J. Fracture* **91**(4), 311-321 (1998).
9. C. H. Huang and C. C. Ma, "Vibration of cracked circular plates at resonance frequencies," *J. Sound Vib.* **236**(4), 637-656 (2000).
10. S. Mirza, P. Singh, R. Kumar, A. L. Vyas, and C. Shakher, "Measurement of transverse vibrations/visualization of mode shapes in square plate by using digital speckle pattern interferometry and wavelet transform," *Opt. Lasers Eng.* **44**(1), 41-55 (2006).
11. D. Lecompte, A. Smits, S. Bossuyt, H. Sol, J. Vantomme, D. Van Hemelrijck, and A. M. Habraken, "Quality assessment of speckle patterns for digital image correlation," *Opt. Lasers Eng.* **44**(11), 1132-1145 (2006).

12. B. Barrientos, R. A. Martínez-Celorio, L. M. Lopez, J. J. J. Dirckx, and M. Cywiak, "Measurement of out-of-plane deformation by combination of speckle photography and speckle shearing interferometry," *Optik* **115**(6), 248-252 (2004).
13. D. Moreno, B. Barrientos, C. Perez-Lopez, and F. M. Santoyo, "Modal vibration analysis of a metal plate by using a laser vibrometer and the POD method," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **7**(6), S356-S363 (2005).
14. W. N. Macpherson, M. Reeves, D. P. Towers, A. J. Moore, J. D. Jones, M. Dale, and C. Edwards, "Multipoint laser vibrometer for modal analysis," *Appl. Opt.* **46**(16), 3126-3132 (2007).
15. G. Pedrini, W. Osten, and M. E. Gusev, "High-speed digital holographic interferometry for vibration measurement," *Appl. Opt.* **45**(15), 3456-3462 (2006).
16. C. Perez-Lopez, F. M. Santoyo, D. a. G. Hernandez, and S. M. Solis, "Digital holography for mechanical vibration measurements in rigid body displacement: elimination of the latter by means of a variable focal length adjustment," *Proc. SPIE* **7098**, 1-6 (2008).
17. G. Pedrini, Y. L. Zou, and H. J. Tiziani, "Digital double-pulsed holographic-interferometry for vibration analysis," *J. Modern Opt.* **42**(2), 367-374 (1995).
18. S. Schedin, G. Pedrini, H. J. Tiziani, and F. M. Santoyo, "Simultaneous three-dimensional dynamic deformation measurements with pulsed digital holography," *Appl. Opt.* **38**(34), 7056-7062 (1999).
19. Y. Fu, G. Pedrini, and W. Osten, "Vibration measurement by temporal Fourier analyses of a digital hologram sequence," *Appl. Opt.* **46**(23), 5719-5727 (2007).
20. L. Precision, *Eddy current sensors*, Lion Precision, Editor 2009, Precision Lion.
21. I. Shinkawa Sensor Technology, *Non-contact displacement/vibration transducer*, 2008, Shinkawa Sensor Technology, Inc.
22. S. V. M. Inc. *Eddy current (proximity probe) transducer installation*. 2012 [cited 2012 18/01/12]; Available from: <http://www.stiweb.com/appnotes/radialvibration.htm>.
23. Breuckmann. *Experts in optical measurements, digitising and quality inspection*. 2012 [cited 2011; Available from: <http://www.breuckmann.com/en/industry-technology/products.html>].

-
24. D. Dynamics. *Optical strain/stress and vibration measurements*. 2012 [cited 2012 18/01/12]; Available from: <http://www.dantecdynamics.com/Default.aspx?ID=664>.
 25. M. Inc. *Vibrometers*. 2010 [cited 2011 18/01/2012]; Available from: <http://www.metrolaseridv.com/>.
 26. M. Ltd. *Vibration sensors*. [cited 2011 18/01/12]; Available from: http://www.monitran.com/category_Vibration_Sensors_General_Purpose_Vibration_Analysis_Sensor_Industrial_1.htm.
-

CAPÍTULO 2

Fundamento teórico

En este capítulo se presentan los principios teóricos tanto del método de proyección de franjas como del algoritmo para la recuperación de fase óptica, con el fin de determinar desplazamiento producido por vibración mecánica.

En la Sección 2.1 y 2.2 se describe la técnica de proyección de franjas (FP), la cual se usa en este trabajo de tesis para medir deformación mecánica. Se desarrolla matemáticamente la técnica propuesta y se analiza el proceso de registro de la intensidad del patrón de franjas en la cámara CCD con objeto de ser almacenada digitalmente y ser procesada numéricamente.

La Sección 2.3 describe el método de Fourier, el cual se emplea para la recuperación de la fase óptica.

En el Sección 2.5 se presenta el fundamento matemático del error por divergencia de haz, lo cual permite conocer su influencia en la incertidumbre de FP.

2.1. Teoría de proyección de franjas.

Para describir el método de **proyección de franjas** sobre la superficie de un objeto se hace uso de la **Figura 2-1 [1-10]**.

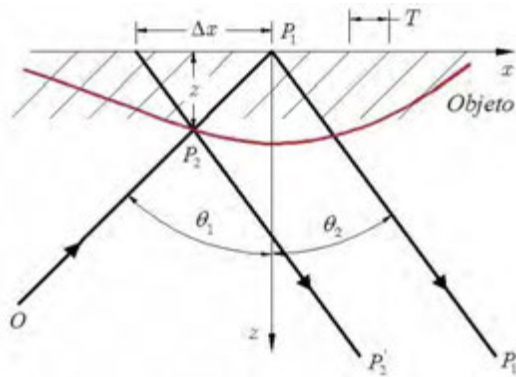


Figura 2-1. Proyección de franjas sobre la superficie de un objeto (en línea roja se representa su superficie). Las líneas paralelas a la dirección OP_1 representan rayos provenientes de la lente telecéntrica de un proyector, los cuales forman el patrón de franjas proyectado.

Considerando que se tiene un patrón paralelo de franjas proyectado con una lente telecéntrica, entonces sobre un plano de referencia, representado en este caso por el eje x , se producirán franjas paralelas espaciadas uniformemente por una distancia T , el cual corresponde al período del patrón proyectado. Antes de colocar un objeto ópticamente rugoso (donde el nivel medio de la rugosidad de la superficie es mayor que el promedio de la longitud de onda de la luz incidente), una de las franjas proyectadas, representada mediante el segmento $\overline{OP_1}$ y con ángulo de incidencia θ_1 con respecto al eje z , es observada a un ángulo θ_2 . Si se coloca el objeto, entonces la franja se reflejará desde P_2 , y la franja sufre un desplazamiento Δx proyectado sobre el plano de referencia debido a la diferencia de altura z entre el objeto y el plano de referencia [11].

Analizando el triángulo formado por P_1 , P_2 y la posición aparente de P_2 , el desplazamiento Δx queda definido por

$$\Delta x = z(\tan \theta_1 + \tan \theta_2). \quad \text{Ecuación 2-1}$$

Cuando $\Delta x = T$, la fase de la franja proyectada cambia en $\Delta\phi = 2\pi$, y por lo tanto el cambio en la fase óptica de las franjas proyectadas (Df) en general se puede expresar como

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \Delta x. \quad \text{Ecuación 2-2}$$

Si se sustituye esta expresión en la Ecuación 2-1, se tiene que el cambio en la fase óptica se expresa por

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} z (\tan\theta_1 + \tan\theta_2). \quad \text{Ecuación 2-3}$$

Es posible considerar al ángulo θ_2 como cero, colocando la cámara CCD al frente del objeto, alineada con el eje z , eliminando de esta manera también errores de perspectiva producidos por ángulo de inclinación en la observación; por lo que el cambio de fase queda,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi z}{T} \tan\theta_1. \quad \text{Ecuación 2-4}$$

También se puede determinar la altura del objeto, si previamente se conoce $\Delta\phi$,

$$z = \frac{\Delta\phi}{2\pi \tan\theta_1} T. \quad \text{Ecuación 2-5}$$

Tomando en cuenta a la [Ecuación 2-3](#), se observa que el ángulo de observación respecto a la vertical, y el ángulo entre la fuente de iluminación y la vertical son equivalentes, cuando de antemano alguno de los dos se asume como cero.

2.2. Registro del patrón de franjas en cámara CCD.

Si se proyectan franjas con perfil cosenoidal, el patrón de intensidad (I_{no} patrón de intensidad sin objeto) que registra el CCD, antes de colocar el objeto, tiene la forma

$$I_{no} = a + b \cos\left(2\pi \frac{x}{T}\right), \quad \text{Ecuación 2-6}$$

donde a es el valor de fondo de iluminación y b es un factor proporcional a la modulación o contraste de las franjas. Como se mencionó en la sección anterior, al colocar un objeto en el plano donde se proyecta el patrón de franjas, cada punto del objeto sufre un desplazamiento aparente Δx . En este caso el objeto no está sometido a ninguna fuerza externa, por lo que el objeto se encuentra libre de deformaciones, por lo cual la intensidad (I_u patrón de intensidad del objeto no deformado) registrada emergente del objeto es

$$I_u = a + b \cos\left(2\pi \frac{x + \Delta x}{T}\right). \quad \text{Ecuación 2-7}$$

La Ecuación 2-7 se puede describir como

$$I_u = a + b \cos\left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_u\right), \quad \text{Ecuación 2-8}$$

donde $\phi_u = 2\pi\Delta x / T$ es la fase óptica producida por colocar el objeto bajo prueba. Esta fase corresponde a la misma variable definida por la Ecuación 2-2, Ecuación 2-3 y Ecuación 2-4.

Ahora, si a este mismo objeto se le aplica una fuerza externa, esto genera un incremento de desplazamiento en las franjas, por lo que también la intensidad del objeto deformado I_d puede ser grabada en la cámara CCD y ser expresada mediante

$$I_d = a + b \cos\left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_d\right), \quad \text{Ecuación 2-9}$$

donde la fase deformada ϕ_d está dada por

$$\phi_d = \phi_u + \Delta\phi, \quad \text{Ecuación 2-10}$$

con $\Delta\phi = 2\pi\delta x / T$ la fase óptica correspondiente a la deformación fuera de plano (en la dirección z) entre dos estados consecutivos del objeto. La deformación correspondiente δx puede ser evaluada mediante una resta de fases ópticas: $\delta x = \phi_d - \phi_u$, punto por punto (o equivalentemente píxel por píxel). Por lo tanto, el desplazamiento en la dirección del eje z se puede calcular por [11, 12]

$$\Delta z = z_d - z_u = \frac{\phi_d - \phi_u}{2\pi} \frac{T}{\tan \theta_1} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \frac{T}{\tan \theta_1}. \quad \text{Ecuación 2-11}$$

2.3. Método de Fourier para obtener la diferencia de fase.

El **método de Fourier** [1, 13-16] considera que la intensidad puede ser modelada en forma general como

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i2\pi n \left(\frac{x}{T} + \frac{\Delta x}{T}\right)}. \quad \text{Ecuación 2-12}$$

Ya que $f_0 = \frac{1}{T}$, la intensidad I puede ser reescrita

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n f_0 x} C_n e^{-i2\pi n f_0 \Delta x}; \quad \text{Ecuación 2-13}$$

asimismo, si se considera $d_n = C_n e^{-i2\pi n f_0 \Delta x}$, la Ecuación 2-13 puede reducirse a

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-i2\pi n f_0 x}.$$

Ecuación 2-14

Entonces se aplica la transformada de Fourier a la intensidad:

$$S_1 = \mathfrak{F}\{I\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-i2\pi n f_0 x}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n (f - n f_0),$$

Ecuación 2-15

donde S_1 es la transformada de Fourier de I y los términos D_n y f corresponden a las transformadas de Fourier de $d_n e^{-i2\pi n f_0 x}$ y a la variable de frecuencia, respectivamente. En la Figura 2-2 se muestra un resultado típico dado por la Ecuación 2-16 (sólo se muestra la parte derecha del resultado total, ya que éste es simétrico respecto al eje vertical).

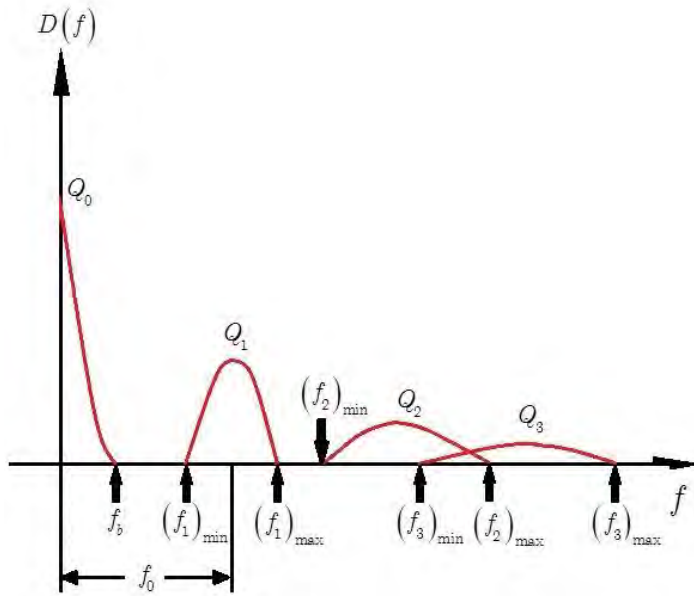


Figura 2-2. Lóbulos de las frecuencias positivas de la transformada de Fourier de la intensidad.

El método de Fourier se basa en filtrar el lóbulo del espectro ubicado en la frecuencia portadora f_0 (primer armónico), el cual debe estar separado de los otros lóbulos. Por lo tanto, la resolución del método se ve limitada si los lóbulos se traslapan [15].

Apoyándose en la Figura 2-2 se tiene que la n -ésima componente del espectro está representada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [2\pi n f_0 x + n \Delta \phi] = n f_0 + \frac{n}{2\pi} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x},$$

Ecuación 2-16

donde $\Delta\phi = 2\pi f_0 \Delta x$, y para fines de recuperar la fase óptica, los lóbulos Q_n no deben de traslaparse, es decir se debe cumplir que

$$(f_1)_{\max} < (f_n)_{\min}, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad \text{Ecuación 2-17}$$

y

$$f_b < (f_1)_{\min}, \quad \text{Ecuación 2-18}$$

donde f_b , $(f_1)_{\max}$ y los primeros ejemplos de $(f_n)_{\min}$ se muestran en la Figura 2-2.

Por lo tanto, combinando la Ecuación 2-16, Ecuación 2-17, y Ecuación 2-18, se obtiene que

$$\left| \frac{\partial \Delta\phi}{\partial x} \right|_{\max} < 2\pi f_0 \left(\frac{n-1}{n+1} \right), \quad (n = 2, 3, \dots). \quad \text{Ecuación 2-19}$$

Para el caso práctico experimental $n=2$, la razón de cambio de la fase queda como

$$\left| \frac{\partial \Delta\phi}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{2\pi f_0}{3}. \quad \text{Ecuación 2-20}$$

Y resolviendo para el término de desplazamiento fuera de plano (usando la Ecuación 2-11)

$$\left| \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{1}{3 \tan \theta_1}, \quad \text{Ecuación 2-21}$$

donde θ_1 es el ángulo de proyección.

Esto significa que el método de Fourier está limitado por cierta pendiente máxima de la superficie y no tanto por la amplitud máxima de la distribución de alturas. En la [Figura 2-3](#) se muestra un espectro típico experimental. En este caso se nota cierto grado de traslape entre lóbulos, lo cual implica que la recuperación de la fase óptica puede resultar ser no adecuada.

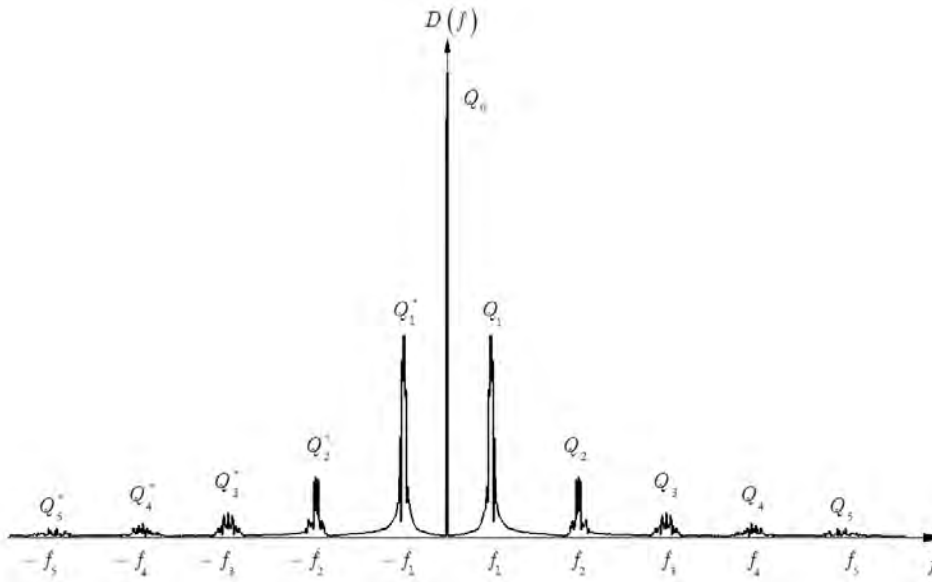


Figura 2-3. Transformada de Fourier de la intensidad.

Entonces, una vez que se obtiene la transformada de Fourier de la intensidad, se aísla al primer lóbulo, ya sea $(Q_1(f - f_0))$ ó $(Q_1^*(f + f_0))$ por medio de la aplicación de un filtro pasabanda. Al resultado de esto, $S_2 = Q_1(f - f_0)$, se le aplica transformada inversa de Fourier,

$$\mathfrak{F}^{-1}\{S_2\} = \mathfrak{F}^{-1}\{Q_1(f - f_0)\} = d_1 = C_1 e^{(-i2\pi f_0 x + i\Delta\phi)}, \tag{Ecuación 2-22}$$

que también puede ser expresada como

$$\mathfrak{F}^{-1}\{S_2\} = C_1 [\cos(2\pi f_0 x + \Delta\phi) + i \sin(2\pi f_0 x + \Delta\phi)] = \text{Re} + i \text{Im}. \tag{Ecuación 2-23}$$

Por lo tanto, para obtener la fase óptica, se tiene que

$$\tan(2\pi f_0 x + \Delta\phi) = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}. \tag{Ecuación 2-24}$$

Y con base en lo anterior, si el objeto es sometido a deformación, la diferencia de fase $\Delta\phi$ se obtiene al restar la fase óptica deformada (ϕ_d) de la no deformada (ϕ_u):

$$\Delta\phi = \phi_d - \phi_u = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}_d}{\text{Re}_d}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}_u}{\text{Re}_u}\right), \tag{Ecuación 2-25}$$

donde Re_d , Im_d , Re_u y Im_u son la parte real e imaginaria de la imagen deformada y no deformada respectivamente. Y aplicando identidades trigonométricas también se concluye en que

$$\Delta\phi = \tan^{-1}\left(\frac{Im_d Re_u - Im_u Re_d}{Re_u Re_d + Im_u Im_d}\right). \quad \text{Ecuación 2-26}$$

Una vez que se recupera la fase óptica [5], se obtiene la distribución de alturas $z(x,y)$ del objeto empleando la Ecuación 2-5.

2.4. Desenvolvimiento de fase.

Al utilizar la Ecuación 2-26 para el cálculo de la fase óptica, un problema relacionado con la periodicidad de la función tangente aparece: $\tan\phi = \tan(\phi + 2\pi n) = w$, donde n es un número entero y $-\pi < \phi \leq \pi$. Así, cuando se aplica la tangente inversa a w , se desconoce qué valor de n debería de tomarse, ya que la fase está siempre acotada dentro del intervalo anteriormente señalado (en este caso se dice que la fase está envuelta, [17-19] tal como lo muestra el ejemplo de la Figura 2-4). Para encontrar el valor de n que le corresponde a cada píxel de una matriz de datos (proceso de desenvolvimiento de fase), se recurre a dos condiciones: (1) que la diferencia de fase entre dos píxeles consecutivos es menor que ρ de acuerdo al teorema de muestreo de Nyquist, (2) que la distribución de fase corresponde a una función matemática suave y continua.



Figura 2-4. Fase envuelta 1D.

Entonces el algoritmo básico de desenvolvimiento de fase en 1D es como sigue: se asigna al primer píxel de un renglón un valor de fase de referencia (generalmente cero). La fase de los píxeles sucesivos toma en cuenta la suma de las diferencias de fase entre píxeles consecutivos anteriores a él. Si la diferencia de fase entre píxeles sucesivos es mayor que ρ entonces a la suma de las diferencias de fases se le resta 2π . Similarmente, si la diferencia de fase entre píxeles sucesivos es menor que $-\rho$ entonces a la suma de las diferencias de fases se le suma 2π . Esto se puede expresar como

$$\phi_{m,n} = \phi_{m,n-1} + \text{atan}\left[\tan(\psi_{m,n} - \phi_{m,n-1})\right],$$
Ecuación 2-27

donde y y f son las fases envueltas y desenvueltas, respectivamente.

La Ecuación 2-27 desenvuelve la fase en una línea de la imagen tal como lo muestra la Figura 2-5. Para un mapa de fase en 2D es necesario desenvolver cada línea de la imagen verticalmente, tomando en cuenta los valores de la línea anteriormente calculada, es decir

$$\phi_{m,n} = \phi_{m-1,n} + \text{atan}\left[\tan(\psi_{m,n} - \phi_{m-1,n})\right].$$
Ecuación 2-28



Figura 2-5. Fase desenvuelta en 1D.

2.5. Error por divergencia del haz.

En la Sección 2.1 se considera que la proyección de las franjas se realiza con una lente telecéntrica, la cual proyecta el patrón de franjas con periodo constante. Si el haz de iluminación no se considera colimado, entonces el período cambia sobre el plano de proyección. Dicha variación se puede encontrar tomando en cuenta la Figura 2-6. El punto A indica la ubicación de una franja en el plano del proyector y B el correspondiente punto proyectado sobre el plano objeto (de referencia).

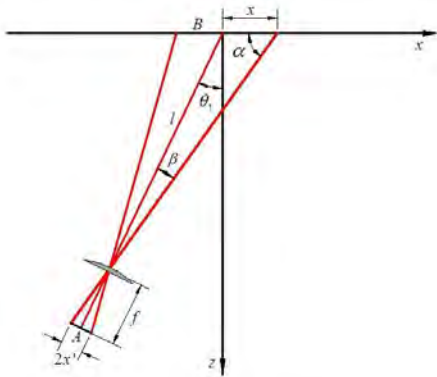


Figura 2-6. Esquema para análisis del error de proyección.

La relación entre las coordenadas en el espacio proyectado x y las coordenadas en el espacio del proyector, x' , puede encontrarse como sigue. De la Figura 2-6, se cumple que

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l}{\cos(\beta + \theta_1)}. \quad \text{Ecuación 2-29}$$

Adicionalmente $\tan \beta = x'/f$, donde f es la distancia focal de la lente de proyección. Como nuestro interés radica en el plano objeto, se despeja x de la Ecuación 2-29 y se tiene

$$x = \frac{lx'}{f \cos \theta_1 - x' \sin \theta_1}. \quad \text{Ecuación 2-30}$$

Ahora, se puede representar matemáticamente el periodo proyectado (T) en función del periodo en el proyector (T') y x' ,

$$T(x) = x(x' + T') - x(x'). \quad \text{Ecuación 2-31}$$

Si se desarrolla la Ecuación 2-31 es posible observar que el período proyectado no es constante debido a la divergencia del haz. El período entonces está dado por

$$T(x) = \frac{lT'f \cos \theta_1}{(f \cos \theta_1 - x' \sin \theta_1)^2 - (f \cos \theta_1 - x' \sin \theta_1)T' \sin \theta_1}. \quad \text{Ecuación 2-32}$$

También se obtiene una expresión aproximada basados en que $\frac{dx}{dx'} \approx \frac{T}{T'}$, por lo cual derivando la Ecuación 2-30 se obtiene que

$$T(x) = \frac{lT'f \cos \theta_1}{(f \cos \theta_1 - x' \sin \theta_1)^2}. \quad \text{Ecuación 2-33}$$

La Figura 2-7 muestra la comparación entre los resultados producidos por la Ecuación 2-32 y la Ecuación 2-33 con ángulos de proyección $\theta_1 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$, donde la línea continua representa al modelo exacto y la punteada al aproximado. Se supone que $l=100 \text{ cm}$, $T'=1 \text{ mm}$ y $f=0.1 \text{ cm}$.

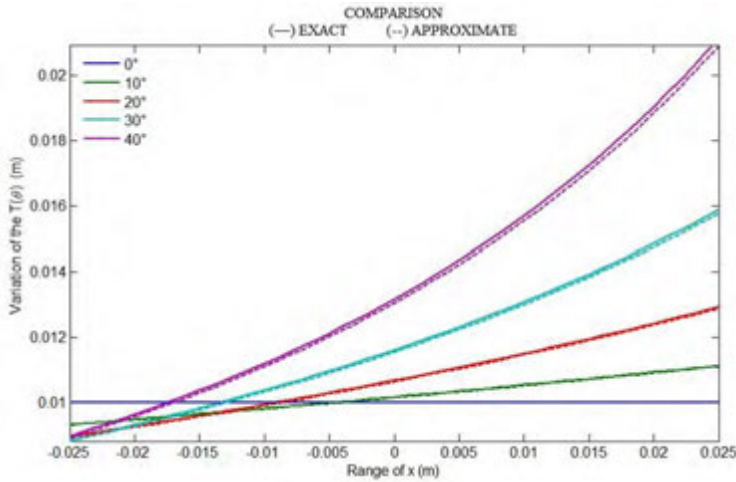


Figura 2-7. Comparación entre las ecuaciones exacta y aproximada, para la variación del periodo proyectado. En esta puede verse que al aumentar el ángulo de proyección, la variación del periodo se incrementa, de la misma manera al ampliar el intervalo x. La variación entre ambas ecuaciones no es realmente significativa.

Y con objeto de obtener una expresión que sea independiente del plano de proyección, despejando de la Ecuación 2-30 a x' ,

$$x' = \frac{xf \cos \theta_1}{l + x \sin \theta_1}; \quad \text{Ecuación 2-34}$$

sustituyendo en la Ecuación 2-33 se obtiene que el periodo proyectado es

$$T = T_0 \left(1 + \frac{x}{l} \sin \theta_1 \right)^2, \quad \text{Ecuación 2-35}$$

donde T_0 corresponde al periodo proyectado sin error de divergencia del haz (en $x=0$). También, el periodo puede ser representado en términos de frecuencia espacial (u), y ya que $u_0 = 1/T_0$,

$$u = \frac{1}{T} = u_0 \left(1 + \frac{x}{l} \sin \theta_1 \right)^{-2}. \quad \text{Ecuación 2-36}$$

Con esto se concluye que las imágenes registradas por la cámara CCD presentan influencia debida al error de divergencia del haz, el cual producirá un cambio en la fase óptica (ϕ_p):

$$\phi_p = 2\pi \frac{x}{T} = 2\pi u_0 \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{l} \sin \theta_1 \right)^2}. \quad \text{Ecuación 2-37}$$

De esta forma, de la **Ecuación 2-8**, la intensidad puede ser representada como

$$I_u = a + b \cos \left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_u + \phi_p \right). \quad \text{Ecuación 2-38}$$

Similarmente, cuando al objeto se le aplica deformación:

$$I_d = a + b \cos \left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_d + \phi_p \right). \quad \text{Ecuación 2-39}$$

El término por proyección o por divergencia del haz, f_p , debe tomarse en cuenta al calcular deformación fuera de plano, ya que como lo predice la **Ecuación 2-40**, el período no es constante a lo largo del plano de proyección.

Referencias

1. J. H. Massig and J. Heppner, "Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method: theory and experimental tests," *Appl. Opt.* **40**(13), 2081-2088 (2001).
2. B. Barrientos, M. Cywiak, W. K. Lee, and P. Bryanston-Cross, "Measurement of dynamic deformation using a superimposed grating," *Rev. Mex. Fis.* **50**(1), 12-18 (2004).
3. J. B. Liu and P. D. Ronney, "Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis," *Appl. Opt.* **36**(25), 6231-6241 (1997).
4. R. Windecker, S. Franz, and H. J. Tiziani, "Optical roughness measurements with fringe projection," *Appl. Opt.* **38**(13), 2837-2842 (1999).
5. C. Quan, W. Chen, and C. J. Tay, "Phase-retrieval techniques in fringe-projection profilometry," *Opt. Lasers Eng.* **48**(2), 235-243 (2010).
6. W. Schreiber and G. Notni, "Theory and arrangements of self-calibrating whole-body three-dimensional measurement systems using fringe projection technique," *Opt. Eng.* **39**(1), 159-169 (2000).
7. C. Reich, R. Ritter, and J. Thesing, "3-D shape measurement of complex objects by combining photogrammetry and fringe projection," *Opt. Eng.* **39**(1), 224-231 (2000).
8. C. Quan, C. J. Tay, H. M. Shang, and P. J. Bryanstoncross, "Contour measurement by fiber optic fringe projection and Fourier-transform analysis," *Opt. Comm.* **118**(5-6), 479-483 (1995).
9. D. Malacara and B. J. Thompson, "Fringe projection," in *Handbook of optical engineering*, (1st Ed., Marcel Dekker Inc., New York 2001).
10. K. J. Gåsvik, "Projected Fringes," in *Optical metrology*, (3rd Ed., John Wiley and Sons, Sussex 2003).
11. B. Barrientos, *Apuntes de clase métodos selectos de metrología óptica*, 2010.
12. F. Zhu, H. Shi, P. Bai, and X. He, "Three-dimensional shape measurement and calibration for fringe projection by considering unequal height of the projector and the camera," *Appl. Opt.* **50**(11), 1575-1583 (2011).

13. M. Takeda, Hideki Ina, Seiji Kobayashi "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," J. Opt. Soc. Am. A **72**(156-160 (1982)).
 14. Donald J. Bone, H.-A. Bachor, and R. J. Sandeman, "Fringe-pattern analysis using a 2-D Fourier transform," Appl. Opt. **25**(10), 1653-1660 (1986).
 15. M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," Appl. Opt. **22**(24), 3977 (1983).
 16. L. Kinell and M. Sjodahl, "Robustness of reduced temporal phase unwrapping in the measurement of shape," Appl. Opt. **40**(14), 2297-2303 (2001).
 17. C. Roddier and F. Roddier, "Interferogram analysis using Fourier transform techniques," Appl. Opt. **26**(9), 1668-1673 (1987).
 18. K. Itoh, "Analysis of the phase unwrapping algorithm," Appl. Opt. **21**(14), 2470 (1982).
 19. A. Blanco, *Comparación de Tres Métodos Ópticos para la Medición de Temperatura en Objetos de Fase*, 2011, Centro de Investigaciones en Óptica A.C.
-

CAPÍTULO 3

Simulaciones numéricas

En este capítulo se presentan los resultados de simulaciones numéricas aplicadas al estudio de la influencia de algunos parámetros en FP. Los parámetros bajo investigación son el periodo del patrón de franjas (T), la forma de las franjas portadoras (senoidales, gaussianas y rectangular), el contraste de las franjas (C), el ciclo de trabajo (p), la resolución de las franjas (número total de píxeles de una imagen) y el grado de complejidad espacial de los desplazamientos. Para esto se modela numéricamente una placa rectangular con diversas portadoras en frecuencia. En particular se analizan varios mapas de deformación generados por diversas funciones conocidas: **paraboloide**, **error de divergencia del haz**, **paraboloide con error de divergencia del haz** y **patrones modales producidos por vibración de una placa rectangular sujeta en las esquinas**, la cual se modela mediante el método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés) [1]. Entonces, los mapas de deformación corresponden a los parámetros de entrada de FP y la fase óptica se recupera con el método de Fourier. Una vez recuperada la fase óptica, se calcula el error entre la fase de entrada y la que se obtiene con el método de Fourier.

Para mostrar la influencia del grado de complejidad del patrón espacial en la exactitud de FP se utilizan dos patrones modales, uno considera que una placa vibra a 2326 Hz y otro que vibra a 3994 Hz.

3.1. Simulación numérica de franjas senoidales con deformación correspondiente a una función paraboloide.

En primer término, se presenta la simulación de una función de deformación tipo paraboloide. Este ejemplo permite describir el uso del método de Fourier. Primero, se inicia con una función de deformación conocida, la cual da origen a una función de fase óptica conocida, de acuerdo a la **Ecuación 2-11**. Luego, se forma el patrón de intensidad correspondiente a dicha deformación. A este patrón de intensidad se le aplica el método de Fourier y se recupera la fase óptica, la cual se compara con la función de fase conocida (original). Las mapas de fases a comparar son los desenvueltos para cada caso (original y recuperado).

Un paraboloides puede ser descrito mediante $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ [2], donde a , b corresponden al radio mayor y menor respectivamente y c a la altura, Figura 3-1.

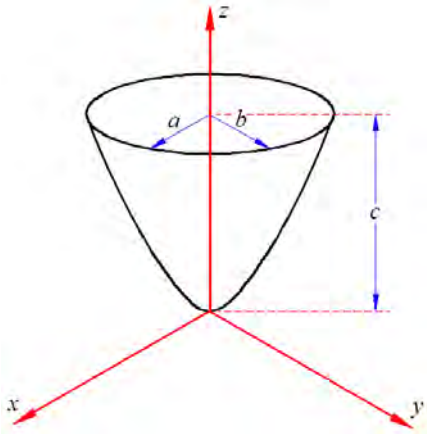


Figura 3-1. Geometría de un paraboloides.

Considerando el modelo de una placa con dimensiones de 35×35 cm², y con $a = b = 0.25$ m, se obtiene un mapa de deformación como el mostrado en la Figura 3-2, donde $c = 43.24$ mm.

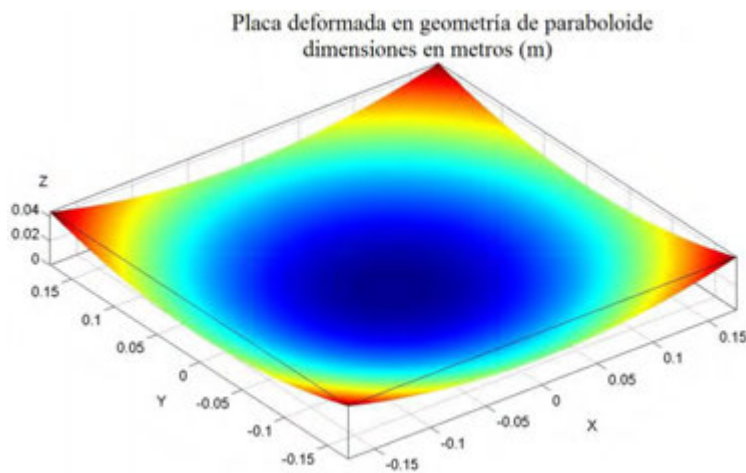


Figura 3-2. Mapa de deformación simulado con Matlab, para entrada al algoritmo de FP, placa de 35 cm \times 35 cm.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la diferencia de fase óptica ($\Delta\phi(x,y)$) está relacionada con el cambio de altura ($\Delta z(x,y)$), periodo y ángulo de proyección (θ),

$$\Delta\phi(x,y) = \frac{2\pi\Delta z(x,y)}{T} \tan\theta,$$

Ecuación 3-1

donde para fines de simulación, el ángulo de proyección se considera de $\theta = 10^\circ$ y el periodo en pixeles (T_{pix}) toma diversos valores tales como $T_{pix} = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ pix .

Entonces el periodo en metros se calcula mediante $T = S_x T_{pix} / M$, donde S_x corresponde a dimensión longitudinal a la placa perpendicular al patrón de franjas proyectado, y M el ancho en pixeles (para el desarrollo de esta tesis M puede tomar valores de 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 pix según sea el análisis). La [Tabla 3-1](#) muestra la equivalencia del periodo a metros.

Tabla 3-1. Equivalencia del periodo de pixeles a metros.

Tpix (pix)	T (m)
4	0.0014
6	0.0021
8	0.0027
10	0.0034
12	0.0041
14	0.0048
16	0.0055
18	0.0062
20	0.0068

Tal como se indicó en el Capítulo 2, es posible representar matemáticamente la proyección de franjas de un objeto, mediante un patrón de intensidad dado por

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \left[\frac{2\pi x}{T} + \Delta\phi(x, y) \right], \quad \text{Ecuación 3-2}$$

donde T [m], x [m], y $\Delta\phi = 0$ rad si no se tiene modulación de fase (o deformación)

[3]. La [Ecuación 3-2](#) sin modulación en fase representa franjas senoidales verticales, ver la [Figura 3-3](#) (todas las imágenes no presentan una relación exacta del tamaño horizontal al tamaño vertical, ampliándose en la dirección horizontal al máximo para una mejor observación de los patrones de franjas).

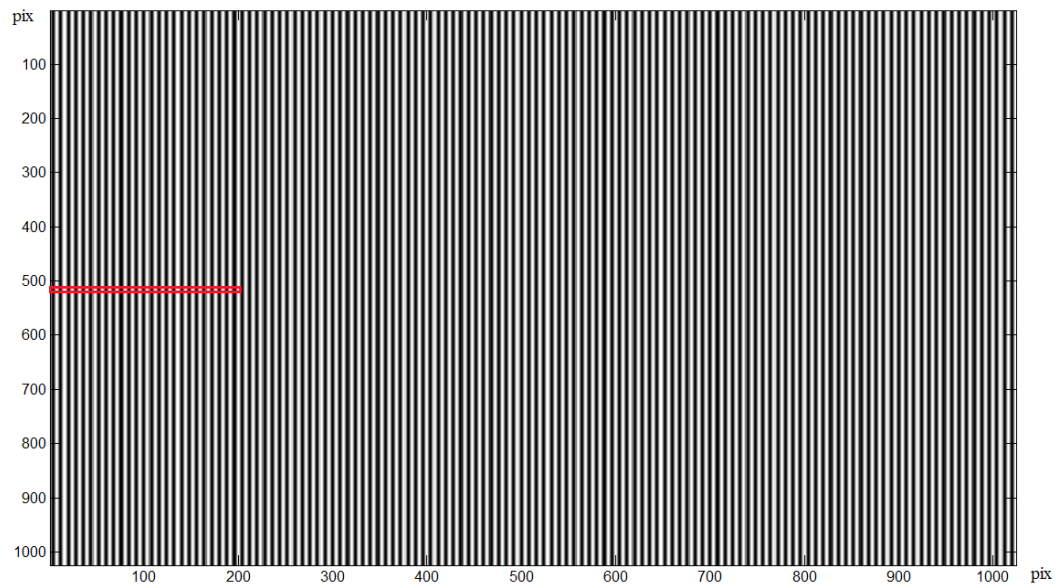


Figura 3-3. Señal portadora con franjas rectas sin modulación de fase con un periodo de 8 pix, en una imagen de 1024×1024 pix². La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

Si al anterior patrón se le incluye el término parabólico de fase empleando la Ecuación 3-1, donde $\Delta z = c \left(\frac{x^2 + y^2}{a} \right)$, entonces las franjas resultantes moduladas en fase mediante el $\Delta\phi$ del paraboloide se ilustran en la Figura 3-4.

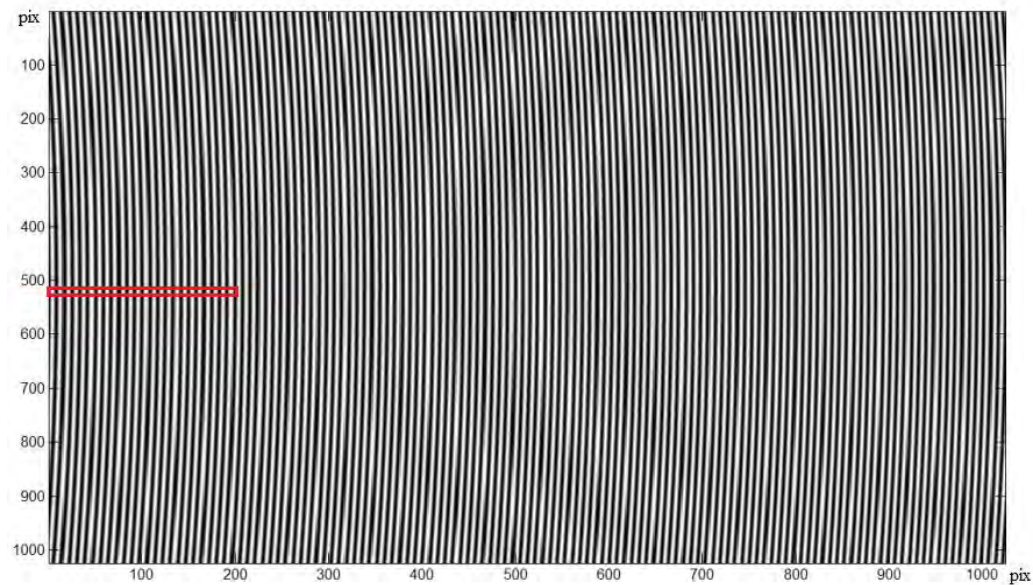


Figura 3-4. Señal portadora con franjas moduladas en fase para un periodo de 8 pix, generado por un término de fase paraboloide, en una imagen de 1024×1024 pix². La región de color rojo corresponde a la región de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

Para las simulaciones e imágenes mostradas se selecciona un periodo de 8 pix, en un área de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$, ya que con este valor, el error entre la fase óptica original y la fase recuperada por el método de Fourier, fue la menor.

En la Figura 3-5a) se muestran secciones transversales de la señal portadora sin modulación de fase y con modulación de fase, correspondientes a las regiones señaladas en rojo de la Figura 3-3 y Figura 3-4, respectivamente. Se observa cierto desfaseamiento entre ambas señales. En b) se observa la sustracción del mapa de intensidades de ambos patrones, sin deformación y deformado, Figura 3-4 y Figura 3-5, respectivamente. El resultado de esta última operación muestra los contornos correspondientes a la función paraboloidal.

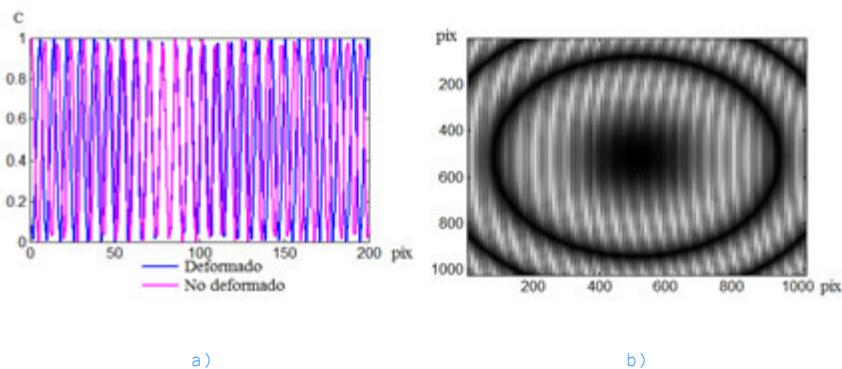


Figura 3-5. a) Franjas sin deformación y con deformación. Se extrae la línea central de las regiones señaladas en rojo de la Figura 3-3 y Figura 3-4. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$.

A los patrones de franjas anteriores se les aplica el método de Fourier para recuperar la fase óptica. Para esto se emplea la transformada rápida de Fourier (FFT), obteniendo el resultado mostrado en la Figura 3-6. La parte a) muestra la transformada de Fourier de la señal portadora; este patrón está compuesto por dos puntos de alto valor de amplitud, los cuales no son percibidos a simple vista, pero al observar el corte transversal en c) estos están representados por dos deltas de Dirac. La parte b) es la transformada de Fourier de la señal portadora con modulación en fase y d) es el corte respectivo [4, 5].

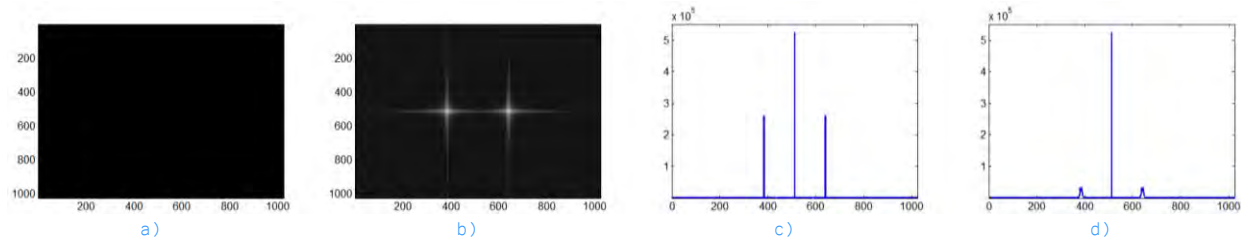


Figura 3-6. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de 1024×1024 pix². Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

En seguida, a las imágenes con las transformadas se les aplica un filtro pasabanda (tomando en cuenta lo planteado en el Capítulo 2). Para la selección del tamaño del filtro, se utilizaron diversas geometrías del filtro, hasta obtener la menor discrepancia en la recuperación de la fase óptica. Al aplicar filtros de tamaño relativamente pequeños, la exactitud del método es relativamente baja. Además, se observa que cuando el periodo no es múltiplo del tamaño horizontal de la imagen, 1024, el error del método tiende a aumentar considerablemente. La Figura 3-7 representa al filtro aplicado sobre las transformadas de Fourier el cual fue de 507×1024 pix², donde a) es la señal portadora sin modulación, b) corresponde a la señal portadora con modulación, y c), d) son los correspondientes cortes transversales.

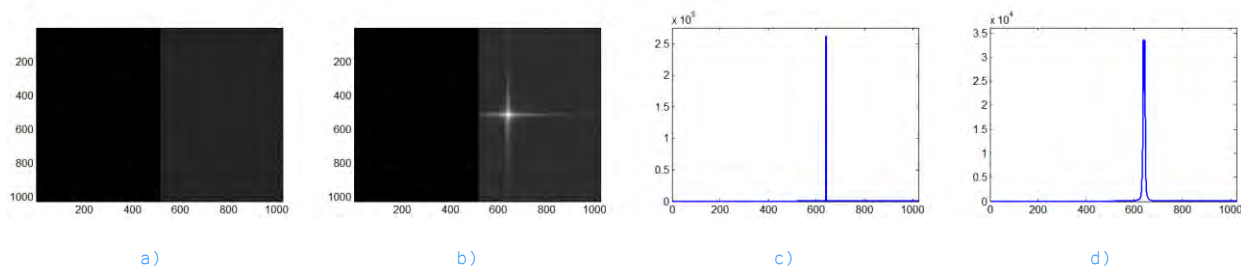


Figura 3-7. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de 1024×1024 pix². Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

A las imágenes filtradas se le aplica la transformada inversa de Fourier (IFFT) con el propósito de recuperar la fase óptica envuelta, la cual se compara con la fase original introducida al algoritmo de proyección de franjas. Con esto, el error cuadrático relativo porcentual puede ser calculado como

$$\%error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(\phi_o)_{ij} - (\phi_r)_{ij}]^2}{M \times N}} \times 100, \quad \max[(\phi_o)_{ij}]$$

Ecuación 3-3

donde $(\phi_o)_{ij}$, $(\phi_r)_{ij}$ son la fase óptica original y recuperada numéricamente, respectivamente, $M \times N$ corresponde al número de total de datos y $\max[(\phi_o)_{ij}]$ es el máximo de la fase óptica original [2].

Las fases original y recuperada se muestran en las Figura 3-8a) y b). El error relativo computado es de $7.46 \times 10^{-3}\%$. Las partes c), d) corresponden a las fases desenvueltas, donde el error corresponde a $2.54 \times 10^{-5}\%$. Estos resultados implican que el error obtenido es mayor para funciones no continuas (comparación de fases envueltas) que para continuas (comparación de fases desenvueltas). Por esta razón, el error se calcula tomando en cuenta mapas de fase desenvueltos.

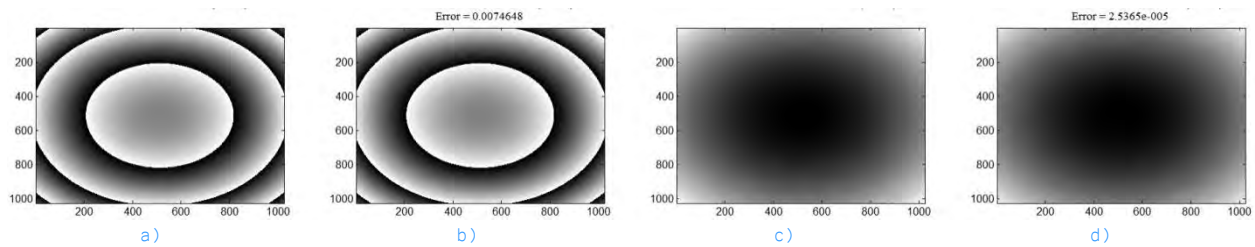


Figura 3-8. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas de fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de 1024×1024 pix².

En la Figura 3-9 se muestra la comparación entre los cortes centrales de la fase original y la fase recuperada: envuelta y desenvuelta, donde el color verde corresponde a la fase óptica original y la negra a la computada, lo que demuestra que el resultado procesado es semejante al valor original.

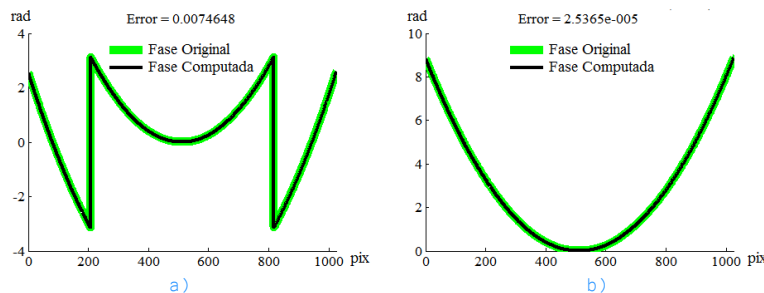


Figura 3-9. Comparación entre la fase original y computada. a) Envuelta, b) desenvuelta. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

3.2. Simulación numérica producida por el error de divergencia del haz.

En el capítulo anterior se hizo referencia al error por divergencia del haz, el cual es producido por el uso de luz de proyección no colimada.

Lo descrito en la Sección 2.4 del Capítulo 2 está relacionado con el error por divergencia del haz sobre FP [3]. Este efecto puede ser simulado computacionalmente por la expresión

$$\phi_p = \frac{2\pi}{T} \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{l} \sin \theta\right)^2}, \tag{Ecuación 3-4}$$

donde T , x , θ [rad] son el período en el centro del plano de proyección, la coordenada sobre el plano de proyección (con su origen en el centro del plano de proyección) y el ángulo de proyección, respectivamente, y l corresponde a la distancia lente-objeto, siendo $l=1\text{ m}$ para estas simulaciones. Entonces, el patrón de intensidad se modela

$$I_d = a + b \cos\left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_p\right). \tag{Ecuación 3-5}$$

El patrón correspondiente se muestra en la Figura 3-3. Para ilustrar el desfaseamiento producido por el error de divergencia del haz se emplea la Figura 3-10a), donde se observa la diferencia de fase entre los patrones de franjas con y sin error de divergencia; la imagen b) muestra la resta de estos patrones de franjas, en la cual se observa que las franjas difieren por el desfaseamiento, produciendo una imagen simétrica. En este análisis no existe deformación física sobre la placa, por lo que se espera recuperar la forma de la fase óptica que se produce por el error de divergencia del haz.

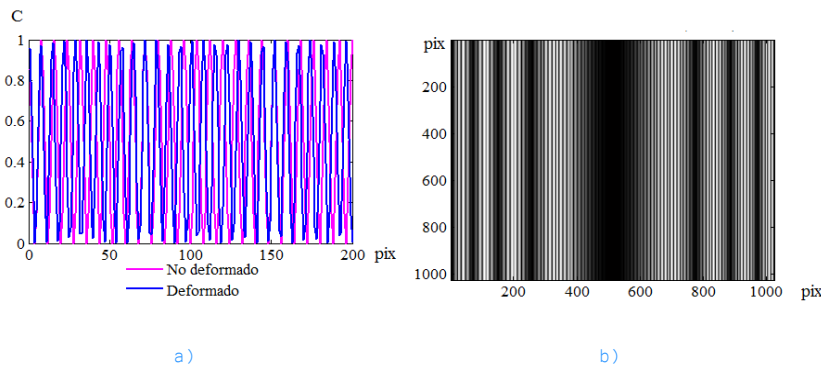


Figura 3-10. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producidas por el error de divergencia del haz. Se extrae la línea central de la región equivalente a la señalada en rojo de la Figura 3-3. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea 512. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1024 \times 1024\text{ pix}^2$.

En la Figura 3-11 se muestran las transformadas de Fourier de este análisis y los correspondientes cortes transversales.

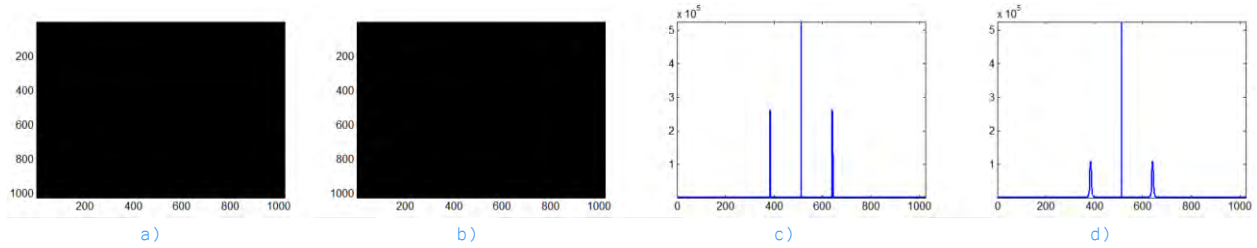


Figura 3-11. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

En la Figura 3-12 por su parte se incluyen los filtros pasabandas aplicados a los resultados anteriores.

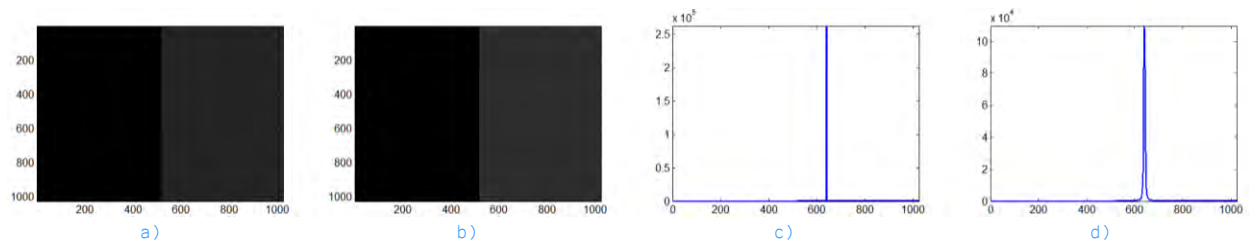


Figura 3-12. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

A partir de aplicar la transformada inversa de Fourier a los resultados de la Figura 3-12, la fase óptica puede ser recuperada. En la Figura 3-13 se muestran la fase original (sin deformación alguna en la placa) y la fase recuperada: envuelta y desenvuelta. El error es de 71273.54% y 8429275.21% respectivamente. El error es muy grande. Este efecto se nota más claramente cuando se comparan los cortes transversales centrales, Figura 3-14.

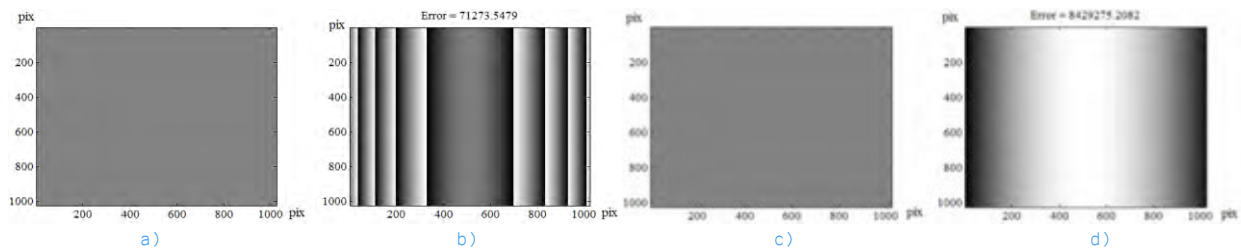


Figura 3-13. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$.

Se observa que la forma de la fase óptica es equivalente a un cilindro con perfil casi-parabólico. El error producido es muy grande debido a que la fase ϕ_p produce una modulación muy alta de las franjas.

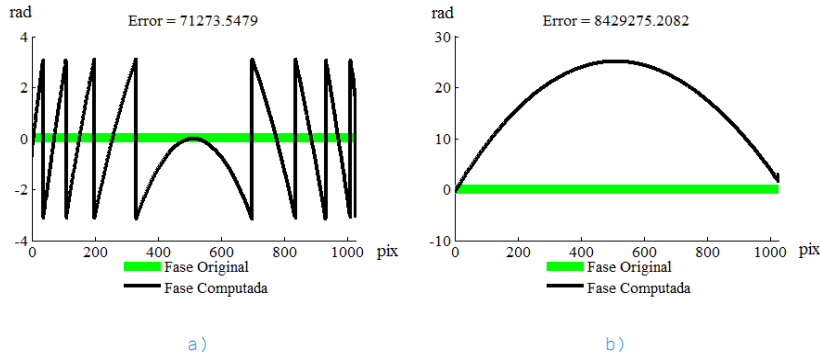


Figura 3-14. Comparación entre la fase original y computada. a) Envuelta, b) desenvuelta. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

3.3. Simulación numérica producida por la combinación del efecto de divergencia del haz y deformación tipo paraboloides.

Cualquier sistema de proyección de franjas está influenciado por el efecto de divergencia del haz. Por lo tanto para cualquier análisis con proyección de franjas, el error de divergencia del haz debe ser incluido.

Para este análisis, el patrón de franjas sin deformación se modela por la Ecuación 3-5, y el resultado se muestra en la Figura 3-15.

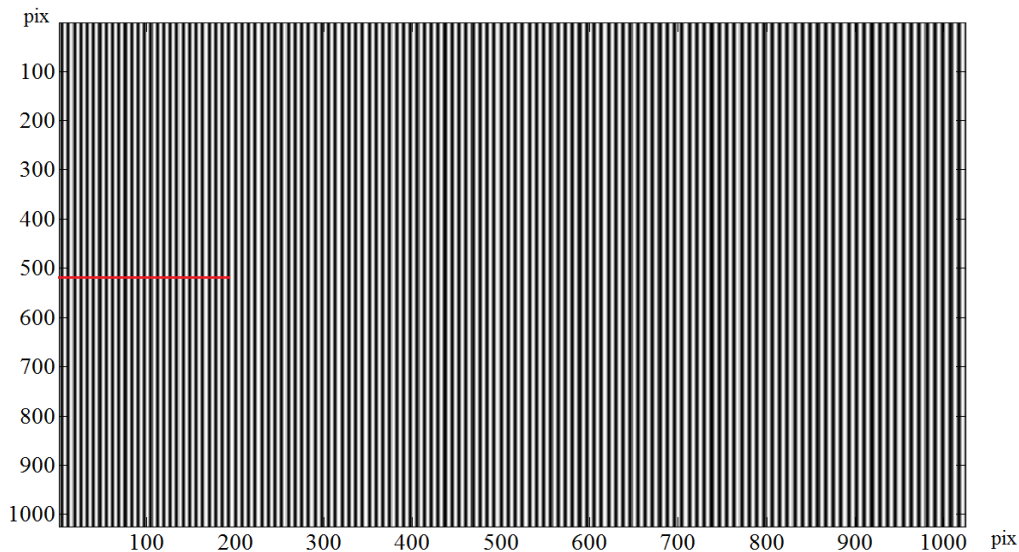


Figura 3-15. Señal portadora con franjas rectas moduladas en fase con un periodo de 8 pix, producido por el error de proyección. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

Entonces el patrón de franjas deformado incluye tanto el efecto de divergencia del haz como la modulación de fase causada por el mapa de deformación (tipo paraboloides), por lo que se enuncia la intensidad como sigue

$$I_d = a + b \cos\left(2\pi \frac{x}{T} + \phi_d + \phi_p\right),$$

Ecuación 3-6

donde ϕ_d es la fase óptica debida a deformación y ϕ_p es la fase óptica por el error de divergencia del haz. Así, el patrón de intensidad resultante se muestra en la Figura 3-16.

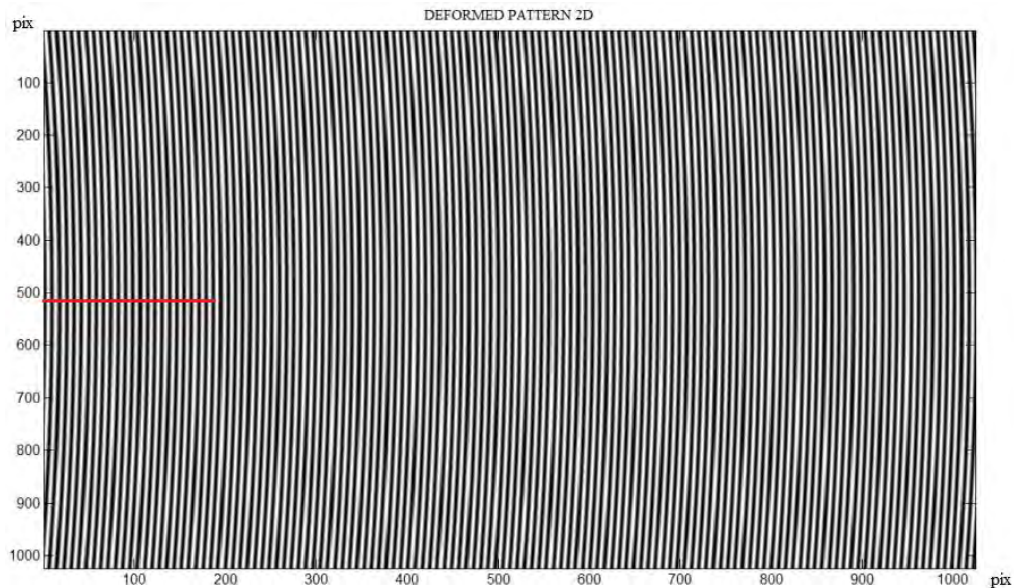
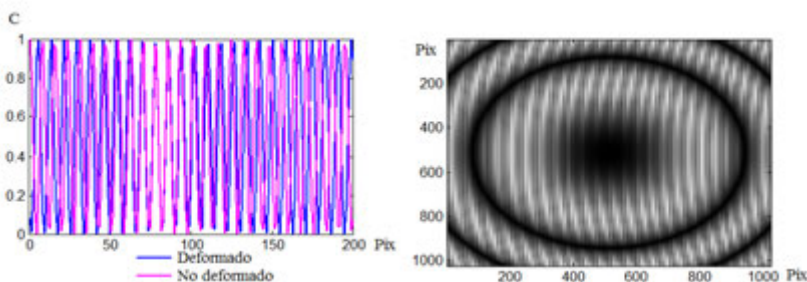


Figura 3-16. Señal portadora con franjas moduladas en fase con un periodo de 8 pix, provocado por el efecto de proyección y por un término de deformación tipo paraboloides. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

En la Figura 3-17a) se observa el desfase entre las franjas con y sin deformación. En b) se muestra la resta de los patrones de franjas, en este análisis se espera que el efecto de divergencia sea eliminado quedando únicamente la diferencia fase producida por el mapa del paraboloides, ya que ambos patrones de franjas contiene la fase producida mediante la Ecuación 3-1. Entonces, al efectuar la resta de fases, el término ϕ_p se elimina.



a)

b)

Figura 3-17. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el error de divergencia del haz. Se extrae la línea central de la región equivalente a la señalada en rojo de la Figura 3-15. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea 512. b) Resta de patrones de franjas.

Aplicando la transformada de Fourier a los mapas de intensidad anteriores, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 3-18. En la Figura 3-19 se muestra el resultado de aplicar un filtro pasabandas.

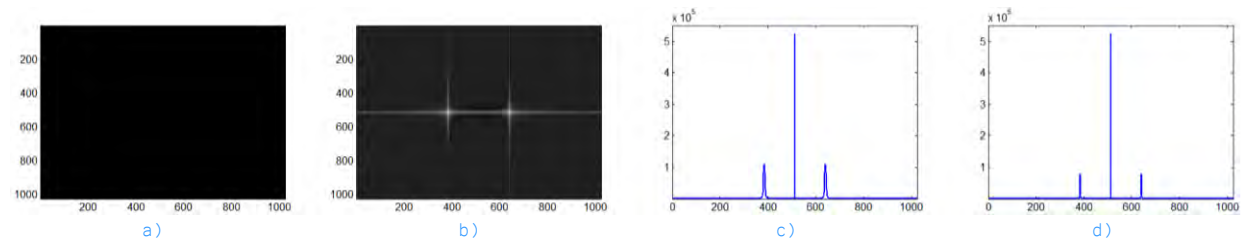


Figura 3-18. Patrón de transformada de Fourier de señales. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de la amplitud de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

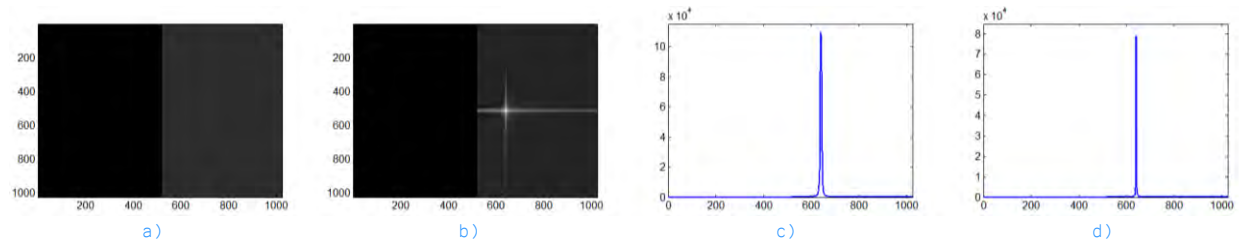


Figura 3-19. Aplicación de un filtro pasabanda. a) Sin modulación de fase. b) Con modulación de fase. Imágenes de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Cortes transversales de la amplitud de las transformadas de Fourier. c) Sin modulación de fase. d) Con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

Si se compara las transformadas de Fourier de la imagen deformada de las secciones anteriores, se observa que al aumentar la cantidad de señales que aportan variación en la fase, los lóbulos disminuyen en amplitud y entonces su ancho aumenta [6]. Lo anterior se observa mediante la Figura 3-20, la cual muestra el traslape de los lóbulos filtrados de la Figura 3-7d y Figura 3-19d de forma ampliada.

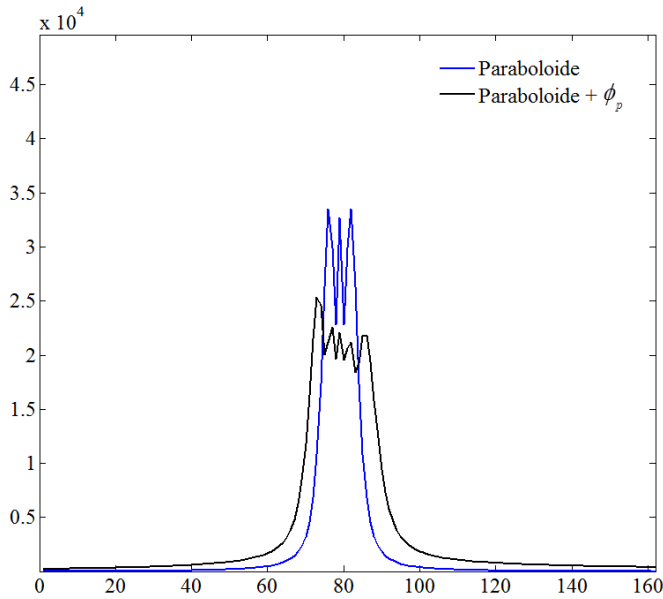


Figura 3-20. Ampliación de los lóbulos filtrados de la Figura 3-7d y Figura 3-19d. Se observa que al aumentar la cantidad de señales que aportan variación en la fase, los lóbulos disminuyen en amplitud y aumenta su ancho.

Al recuperar la fase óptica, mostrada en la Figura 3-21, se observa que el error es ligeramente mayor al detectado en la Sección 2.2 (sin incluir el efecto de divergencia del haz, con error de $5.46 \times 10^{-3}\%$ para fase envuelta y $2.54 \times 10^{-5}\%$ para fase desenvuelta). En este caso, el error calculado es $6.28 \times 10^{-3}\%$ para fase envuelta y $5.20 \times 10^{-5}\%$ para la fase desenvuelta. Se concluye que el error aumenta al incluir el efecto de divergencia del haz.

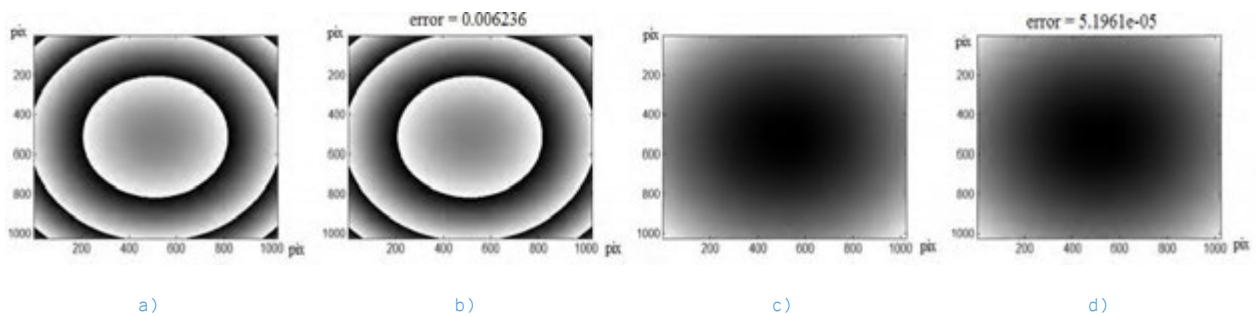


Figura 3-21. Mapas de fase óptica recuperada envuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Mapas fase óptica recuperada desenvuelta. a) Original. b) Recuperada numéricamente. Imágenes de 1024×1024 píx².

3.4. Modelado por resultados obtenidos con el método de elemento finito.

En esta sección se simulan mapas de deformación obtenidos mediante modelado numérico por diferencias finitas de patrones modales de vibración. Estos mapas de deformación son más parecidos a lo que experimentalmente se reporta en el siguiente capítulo. Los valores

de desplazamiento de los patrones de deformación se introducen al algoritmo de FP para su posterior recuperación de fase óptica empleando el método de Fourier.

El método de elementos finitos (FEM), también llamado análisis de elemento finito (FEA), es una técnica computacional empleada para obtener soluciones aproximativas de problemas de valores límite. Un problema de valores límite es un problema matemático en el cual una o más variables dependientes deben satisfacer una ecuación diferencial en todas partes dentro de un dominio conocido de variables independientes, las cuales deben cumplir con condiciones específicas de los límites de frontera. Los problemas de valores límite son también a veces llamado problemas de dominio. El dominio de interés a menudo representa una estructura física y dependiendo de la clase de problema físico a analizar, las variables pueden incluir desplazamientos, vibraciones [7-15], temperatura, flujo de calor y velocidad de fluidos [16-18].

3.4.1. Modelado de placa de aluminio mediante el uso de FEM.

Para obtener los patrones de deformación de una placa de aluminio sujeta a vibraciones es primero necesario llevar a cabo su modelamiento físico.

La simulación numérica de la deformación de una placa de aluminio mediante FEM requiere de los siguientes pasos [19]:

3.4.1.1. Pre-proceso.

En esta sección se definen el dominio del problema (tipo de análisis), tipo de elemento a ser usado, propiedades del material, propiedades geométricas (longitud, área, volumen) y por último se realiza el mallado.

Con base al tipo de deformación requerida, el **tipo de análisis** corresponde al **módulo estructural**, específicamente **análisis modal**.

Los elementos empleados para el modelamiento físico de la placa son **MESH200** y **SOLID185** [19].

El elemento **MESH200**, mostrado en la Figura 3-22, se utiliza para crear la malla y no contribuye en la solución. Puede ser utilizado para operaciones de mallado por extrusión, mallado de líneas en 2D y 3D con espaciado con o sin nodos intermedios, mallado de áreas o volúmenes en espacio de 3D, con triángulos, cuadriláteros, tetraedros o *brick* con o sin nodos intermedios.

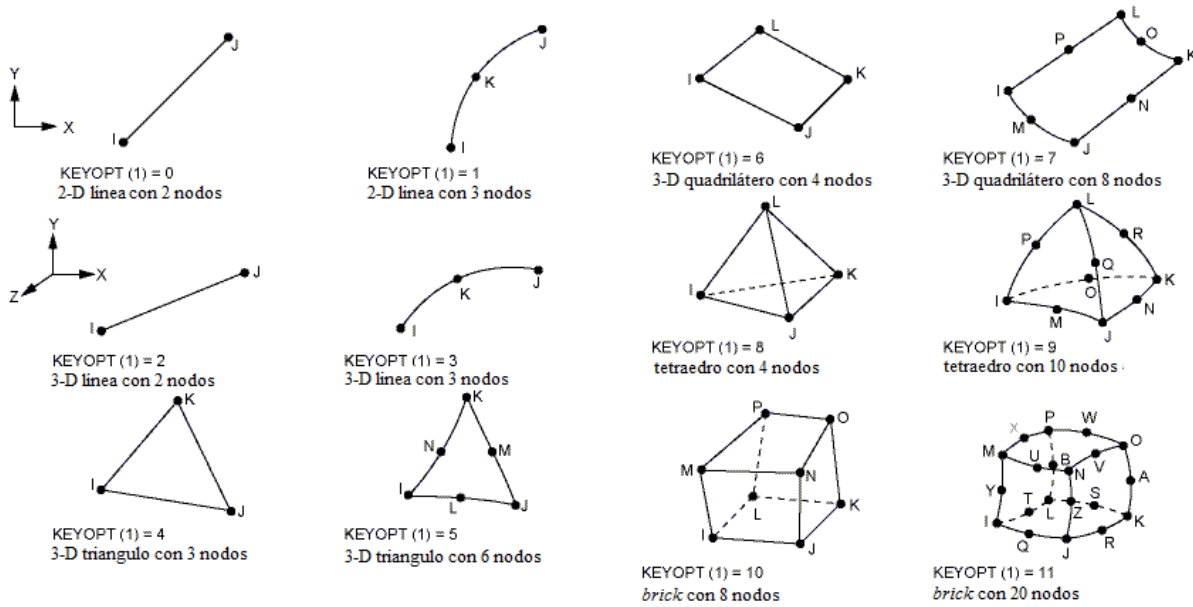


Figura 3-22. Geometría del elemento MESH200 [19].

El elemento **SOLID185** representado en la **Figura 3-23** es usado para modelado en 3D de estructuras sólidas. Se define por 8 nodos y tiene tres grados de libertad en cada nodo: traslaciones en las direcciones x , y , z . El elemento tiene plasticidad, hiperelasticidad, fluencia lenta (*creep*), tolera grandes deflexiones y tiene capacidades de alta deformación. Estas propiedades hacen de este elemento una solución óptima para nuestro modelado.

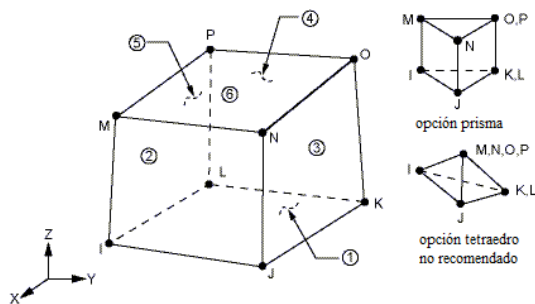


Figura 3-23. Geometría SOLID185.

Para satisfacer las condiciones experimentales, se modela la placa rectangular de aluminio con sus esquinas empotradas con dimensiones de $0.35 \times 0.35 \text{ m}^2$ y 8 mm de espesor. Las propiedades utilizadas son para aluminio 6061-T6, con las siguientes características mecánicas: **módulo de Young** $E = 69 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, **densidad** $\rho = 2,700 \text{ kg/m}^3$, **relación de Poisson** $\nu = 0.33$ [20].

Para el **mallado** es importante considerar el tipo de malla que se desea implementar. Los tipos de mallados posibles son **libre** y **mapeado**. El **mallado libre**, el cual se ilustra en **Figura 3-24**, no tiene restricciones en términos de formas del elemento, y no tiene un patrón específico al aplicarse. Por otro lado el **mallado mapeado**, exhibido en la **Figura 3-**

25, está restringido en términos de la forma del elemento que contiene y el patrón de la malla. Una malla mapeada contiene cierto número de elementos cuadriláteros o sólo triangulares. Una malla mapeada en volumen contiene sólo elementos de hexaedro. Por lo tanto se realizan ambos tipos de mallado. El mapeado se aplica en toda la placa a excepción de las esquinas de empotramiento donde se usó mallado libre, con el objeto de obtener la mayor exactitud en las zonas no restringidas.

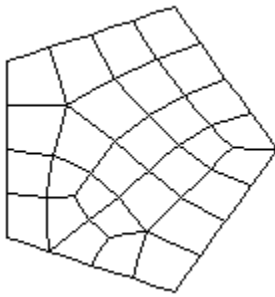


Figura 3-24. Mallado libre.

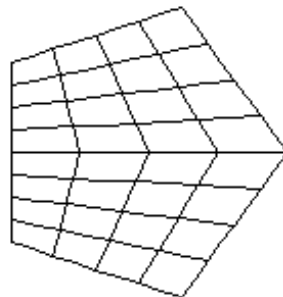


Figura 3-25. Mallado Mapeado.

3.4.1.2. Solución.

En esta sección del modelado se delimitan las **restricciones físicas** (**condiciones de frontera**) y **cargas**. Por lo tanto se restringe el movimiento en las esquinas para tomar en cuenta la presencia de tornillos de sujeción para la placa.

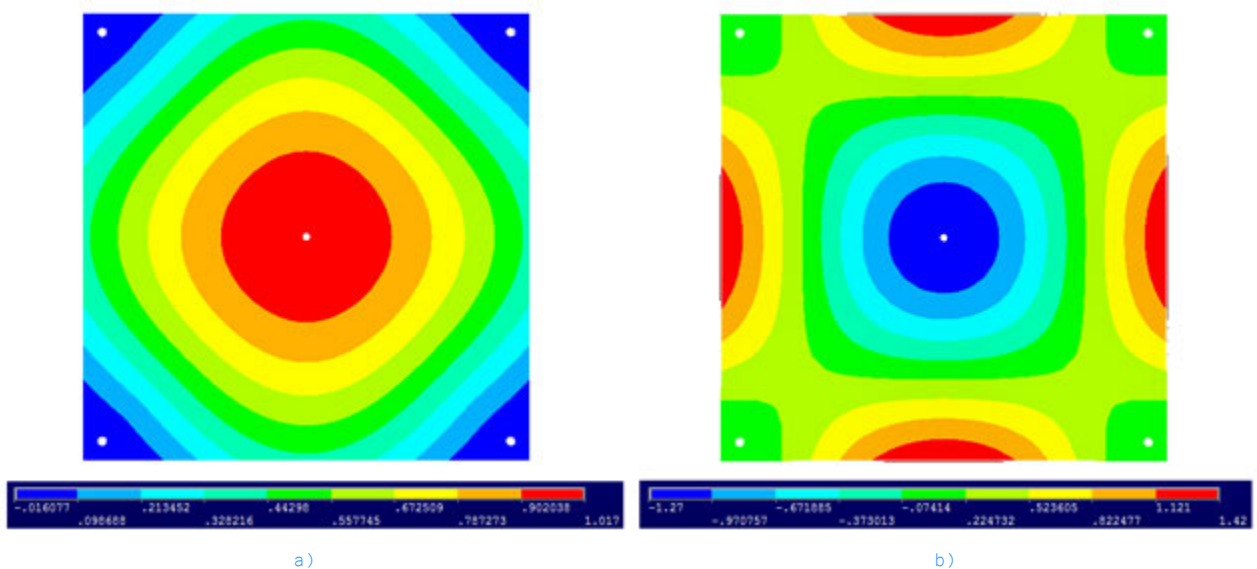
3.4.1.3. Post-proceso.

En este punto se realiza el análisis y evaluación de los resultados. Donde los resultados de interés para nuestro análisis son las **frecuencias de resonancia**, las cuales se muestran en la **Tabla 3-2** y donde PASO indica al número de modo de resonancia, **posición de los nodos** y **desplazamientos de fuera de plano** (**altura z**), los cuales se muestran en el mapa de desplazamientos de la **Figura 3-26**. Estas variables de posición de los nodos y altura se almacenan mediante una tabla y son manipuladas en Matlab para su análisis.

Tabla 3-2. Frecuencias de Resonancia

	Frecuencia (Hz)	Paso	Frecuencia (Hz)	Paso	Frecuencia (Hz)	Paso	Frecuencia (Hz)
1	210.10	11	1479.10	21	3137.30	31	4669.80
2	409.42	12	1947.80	22	3137.30	32	4759.60
3	409.42	13	2108.30	23	3456.60	33	5069.30
4	540.04	14	2155.50	24	3456.60	34	5124.20
5	777.49	15	2316.60	25	3458.30	35	5223.40
6	906.67	16	2316.60	26	3841.00	36	5223.40
7	1103.30	17	2326.00	27	3994.00	37	5430.00
8	1103.30	18	2868.10	28	4028.30	38	5430.00
9	1439.10	19	3056.20	29	4028.30	39	5500.20
10	1439.10	20	3056.20	30	4280.10	40	5979.50

En la tabla anterior las frecuencias de resonancia computadas corresponden tanto a desplazamientos axiales (en plano) como a flexionantes (fuera de plano). Sólo se seleccionan los modos de resonancia con su componente fuera de plano, ya que FP no es capaz de resolver los movimientos en plano. Por lo tanto, se eligen los patrones modales de 210.10 Hz, 777.49 Hz, 2326.00 Hz y 3994.00 Hz [15, 21-23]. Estos mapas de desplazamientos para diferentes frecuencias se observan en la Figura 3-26: a) 210.10 Hz, b) 777.49 Hz, c) 2326.00 Hz y d) 3994.00 Hz, donde las zonas en rojo indican desplazamientos relativamente grandes y las en azul, desplazamientos relativamente pequeños. El cian representa sitios sin desplazamiento (zonas nodales); los círculos blancos son las regiones donde se sujetan los tornillos.



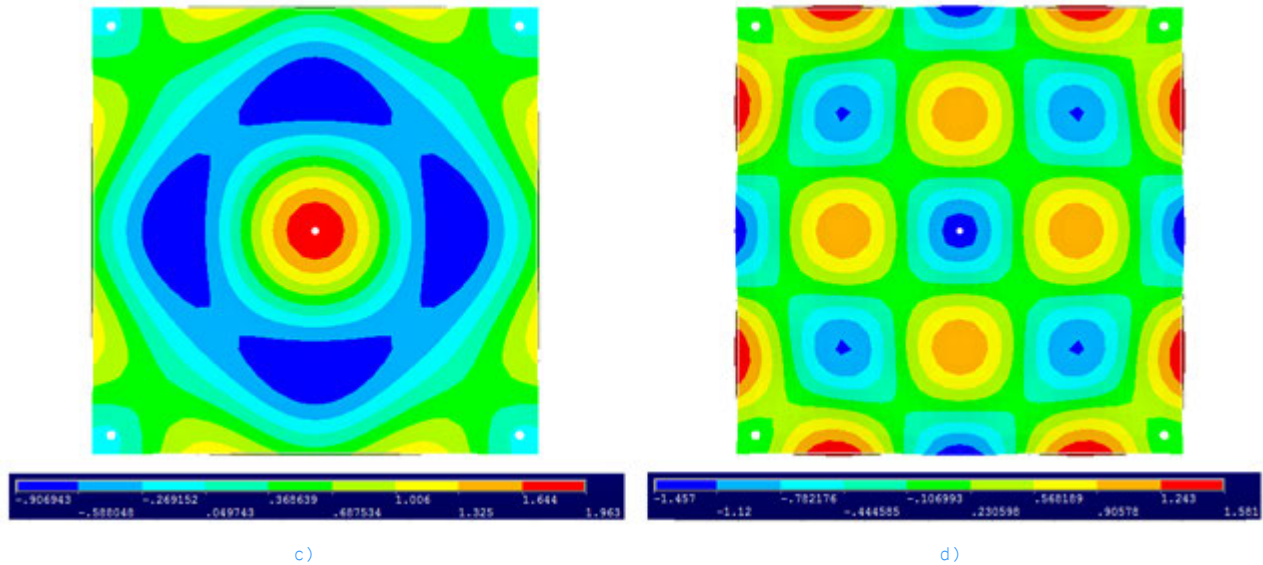


Figura 3-26. Patrones modales obtenidos por software FEM. a) 210 Hz, b) 777.49 Hz, c) 2326 Hz, d) 3994 Hz. La escala de desplazamientos se encuentra en milímetros y tiene que multiplicarse por un factor de 1×10^{-2} ; las dimensiones de la placa son ancho x largo de $0.35 \times 0.35 \text{ m}^2$ y 8 mm de espesor.

Para el análisis presente, se seleccionan los patrones modales de 2326 Hz y 3994 Hz, ya que visualmente representan funciones de deformación relativamente complejas desde el punto de vista espacial. Entonces, obteniendo la derivada de estas funciones y calculando la pendiente máxima, se define cuál de ellas presenta mayor complejidad espacial de acuerdo a FP. La Figura 3-27 ilustra la derivada de los patrones modales de 2326 Hz y 3394 Hz, con pendientes máximas de 24.19° y 32.90° respectivamente, donde se comprueba que el patrón de 3394 Hz presenta la mayor complejidad. Asimismo, la condición analizada en la [Sección 2.3](#) del Capítulo 2, en la cual se tiene que la pendiente máxima debe de cumplir con la condición $\left| \frac{\partial \Delta z}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{1}{3 \tan \theta}$, donde θ corresponde al ángulo de proyección,

que para el caso de estas simulaciones corresponde a 10° , resulta que la pendiente máxima es de 62.12° . Ya que 24.19° y 32.90° son menores que 62.12° , entonces el método de Fourier es factible de aplicar a dichos patrones modales.

Cabe mencionar que en las zonas de los tornillos se realiza una interpolación para producir una función continua. La diferencia de los colores de los patrones de las [Figura 3-26](#) y [Figura 3-27](#) se produce por el entorno gráfico de ANSYS y MATLAB.

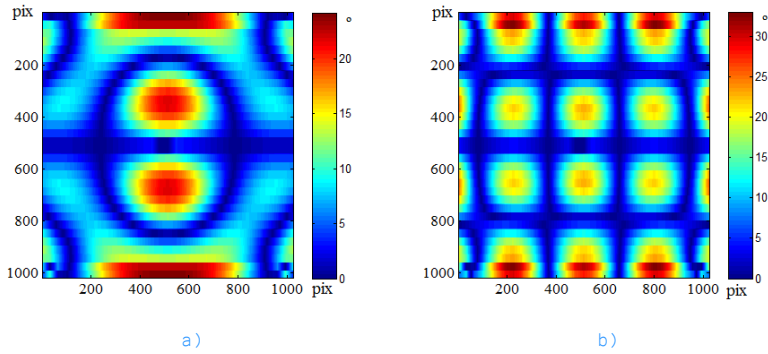


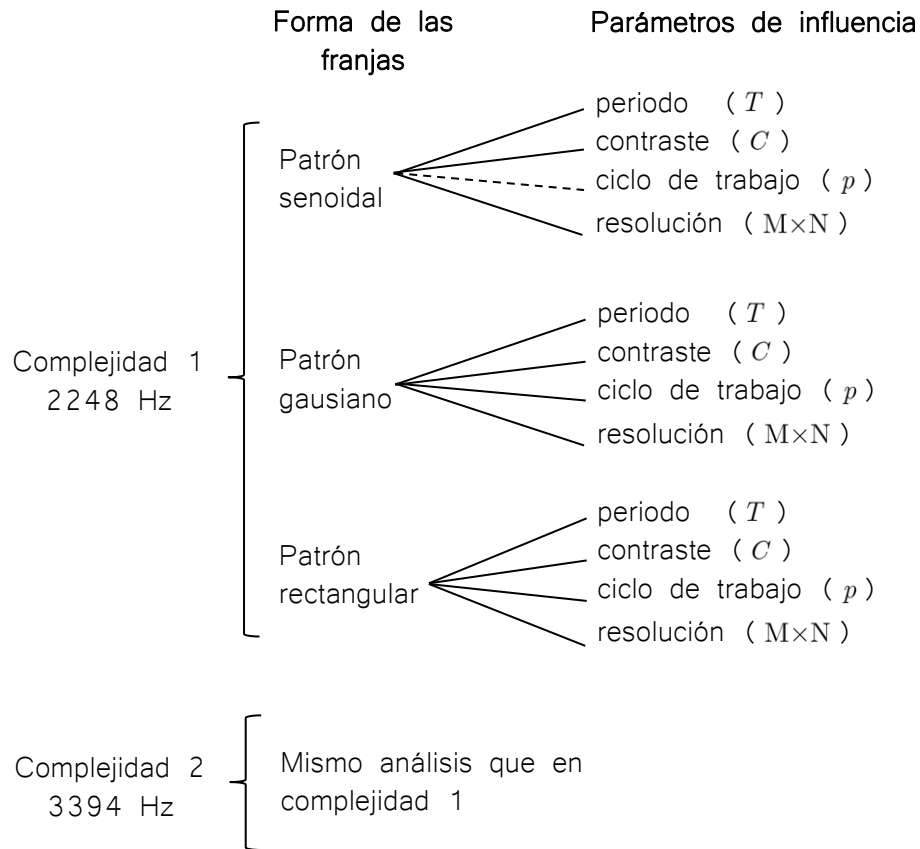
Figura 3-27. Derivada de los patrones modales obtenidos por software FEM y transferidos a MATLAB. a) 2326 Hz con pendiente máxima 24.49°. b) 3994 Hz con pendiente máxima 32.90°. Las dimensiones de la barra son grados.

3.5. Análisis de errores en FP.

En esta sección se analiza la influencia de varios parámetros en la exactitud de FP. Se analizan la forma de las franjas (perfil senoidal, gaussiano y rectangular), el periodo, el contraste, el ciclo de trabajo y la resolución espacial. Como función de deformación, se consideran a los dos patrones modales mostrados en la Figura 3-27.

En la proyección de franjas es deseable proyectar patrones senoidales con el fin de reducir la posible sobreposición de lóbulos en el espacio de Fourier. Sin embargo, cuando se toma en cuenta la función de transferencia de los componentes de un arreglo FP: proyector, lente formadora de imagen y CCD, es prácticamente imposible obtener franjas puramente senoidales. Generalmente, el perfil obtenido se acerca a una función gaussiana. Un caso extremo es en el cual se tiene que el perfil de las franjas registradas por el CCD es rectangular. Con base a esto, se eligieron tres tipos de perfiles: senoidal, gaussiano y rectangular.

El proceso de análisis se realiza siguiendo la secuencia que se describe a continuación.



3.5.1. Modelado de patrones de franjas [2].

3.5.1.1. Franjas senoidales.

Con base a la expresión matemática de la Ecuación 3-2, el patrón de franjas senoidales puede ser modelado bajo los parámetros de variación del contraste, el cual es representado por (ver la Figura 3-28)

$$I(x) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{T} + \Delta\phi \right]. \quad \text{Ecuación 3-7}$$

El **contraste** se define como $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, donde I_{\max} corresponde a la intensidad máxima e I_{\min} es la intensidad mínima; y si se realiza un cambio de variable entonces el contraste se enuncia

$$C = \frac{B - A}{B + A}.$$

Ecuación 3-8

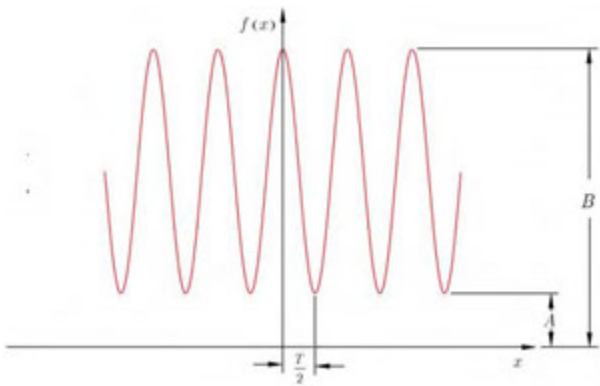


Figura 3-28. Parámetros que definen el contraste de franjas senoidales.

Adicionalmente, si se asume un cierto B , se tiene que

$$A = \frac{1 - C}{1 + C} B.$$

Ecuación 3-9

Para este caso senoidal, no es posible variar el ciclo de trabajo, por lo tanto este parámetro no afecta a la Ecuación 3-7.

3.5.1.2. Franjas gaussianas.

Para simular la portadora gaussiana se desarrolla numéricamente la serie trigonométrica de Fourier, a partir de la expresión $g(x) = e^{-\left(\frac{x}{r_0}\right)^2}$, donde r_0 corresponde a la variable de control del ancho medio del perfil gaussiano. Al ser una función par, la serie de Fourier se enuncia como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right),$$

Ecuación 3-10

donde a_n son los coeficientes de la serie. Para determinar los coeficientes, se integra la expresión matemática

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx,$$

Ecuación 3-11

Por lo tanto, si $m = n = 0$, a_0 se evalúa como sigue

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx,$$

Ecuación 3-12

y a_n , considerando $m = n \neq 0$, queda como

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx.$$

Ecuación 3-13

Los coeficientes de la serie son calculados en el paquete Mathematica.

Para variar el ciclo de trabajo (corresponde a la fracción de espacio donde la señal es positiva) p se requiere modificar r_0 . El ciclo de trabajo se puede calcular mediante

$$p = a_0 / \max[f(x)],$$

Ecuación 3-14

donde la función $\max[f(x)]$ se refiere a tomar el máximo del argumento.

Para modificar el contraste, ver Figura 3-29, es necesario incluir la adición de una constante a la amplitud de la señal.

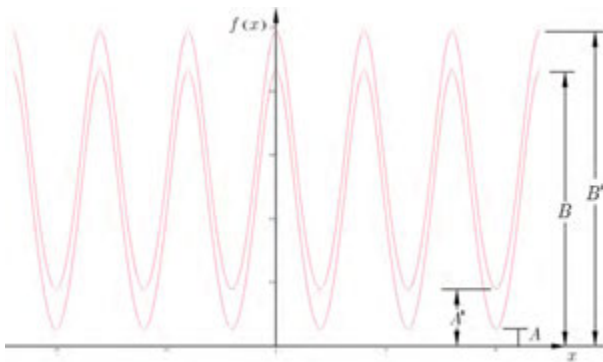


Figura 3-29. Parámetros para definir el contraste en franjas gaussianas.

En base a la Ecuación 3-8, con un nivel A' inicial, el contraste inicial queda definido por

$$C' = \frac{B' - A'}{B' + A'};$$

Ecuación 3-15

así, el contraste modificado toma la siguiente forma, con $B' - A' = B - A$,

$$A = -\frac{(B' - A')(1 + C)}{2C},$$

Ecuación 3-16

siendo C el nuevo contraste.

3.5.1.3. Franjas rectangulares.

Los parámetros para definir franjas rectangulares se muestran en la Figura 3-30.

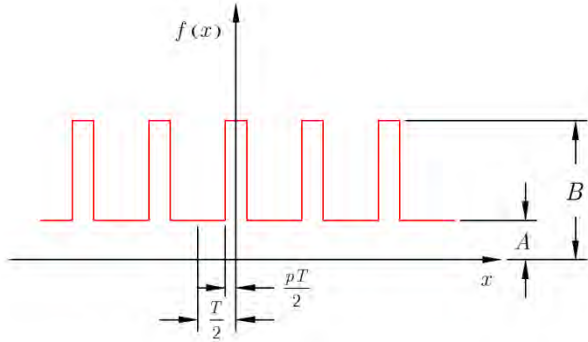


Figura 3-30. Parámetros para definir el contraste en franjas rectangulares.

Aplicando la expansión de Fourier para la forma periódica, se obtiene para a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{-pT/2} A dx + \int_{-pT/2}^{pT/2} B dx + \int_{pT/2}^{T/2} A dx \right) = A(1-p) + Bp. \tag{Ecuación 3-17}$$

Y para a_n ,

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-pT/2} A \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_{-pT/2}^{pT/2} B \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_{pT/2}^{T/2} A \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right] \tag{Ecuación 3-18}$$

$$= \frac{2(B-A) \sin \pi pn}{\pi n}.$$

De la expresión del contraste se calcula $B-A$ como

$$B-A = C(B+A) = \frac{2BC}{1+C}. \tag{Ecuación 3-19}$$

Por lo tanto al sustituir la Ecuación 3-19 en la Ecuación 3-18, a_n se expresa como

$$a_n = \frac{4BC \sin \pi pn}{\pi n(1+C)}. \tag{Ecuación 3-20}$$

Mientras mayor sea el número de términos en la serie de Fourier, mejor es la representación de la señal portadora.

3.5.2. Franjas senoidales con patrón modal de 2326 Hz.

3.5.2.1. Influencia del periodo.

Para este estudio se supone que el contraste del patrón de franjas es del 100% y que el tamaño de las imágenes es de 1024×1024 pix². En este análisis, el ciclo de trabajo no interviene como parámetro. La modulación de fase es producida por los desplazamientos del patrón modal de 2326 Hz.

Se lleva a cabo una serie de simulaciones donde al período de las franjas se le hizo variar desde 4 pix hasta 20 pix. Sólo se muestran dos casos: el caso que dio el menor error (caso mejor) y el caso donde el error fue máximo (caso peor). **Esta forma de presentar los resultados se realiza de igual forma con todos los demás parámetros.**

Caso mejor		Caso peor	
Periodo (pix)	error porcentual	Periodo (pix)	error Porcentual
8	6.53×10^{-5}	10	9.88×10^{-3}

3.5.2.1.1. Caso mejor, periodo de 8 pix.

La Figura 3-31 muestra la señal portadora modulada en fase cuando se usa un periodo de 8 pix.

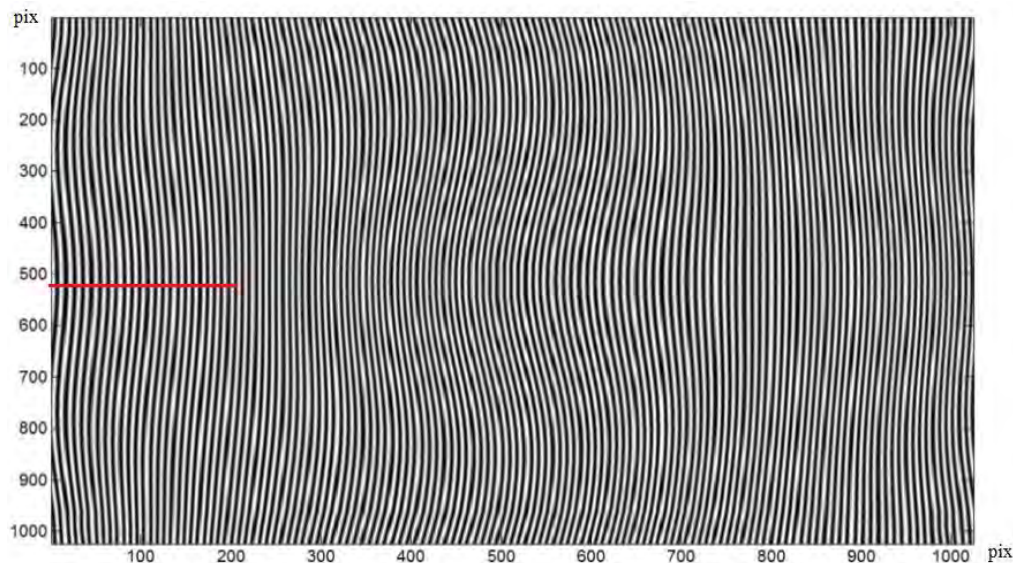


Figura 3-31. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

En la Figura 3-32a) se muestra el desfaseamiento entre los patrones de franjas sin modulación de fase y con modulación de fase; b) corresponde a la resta de los patrones

de franjas, c) y d) muestran la comparación la fase óptica original y recuperada, siendo el error de $6.53 \times 10^{-5} \%$.

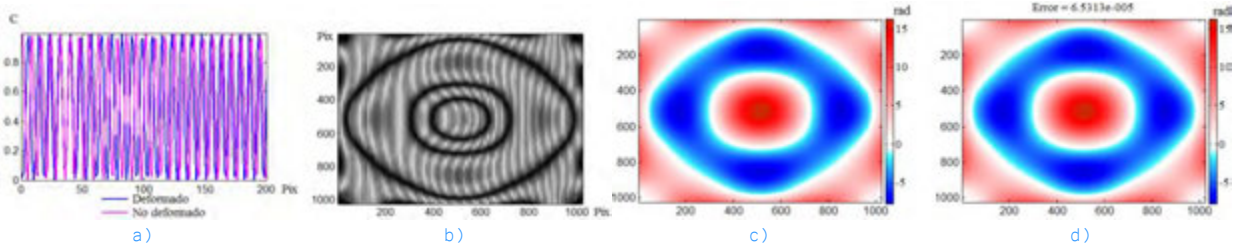


Figura 3-32. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-31. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas. c) Mapa de fase óptica recuperada envuelta. d) Mapa fase óptica recuperada desenvuelta con error de $6.53 \times 10^{-5} \%$.

La Figura 3-33 muestra las transformadas de Fourier de los patrones de intensidad sin y con deformación. Se observa que el tamaño de los lóbulos aumenta con la deformación.

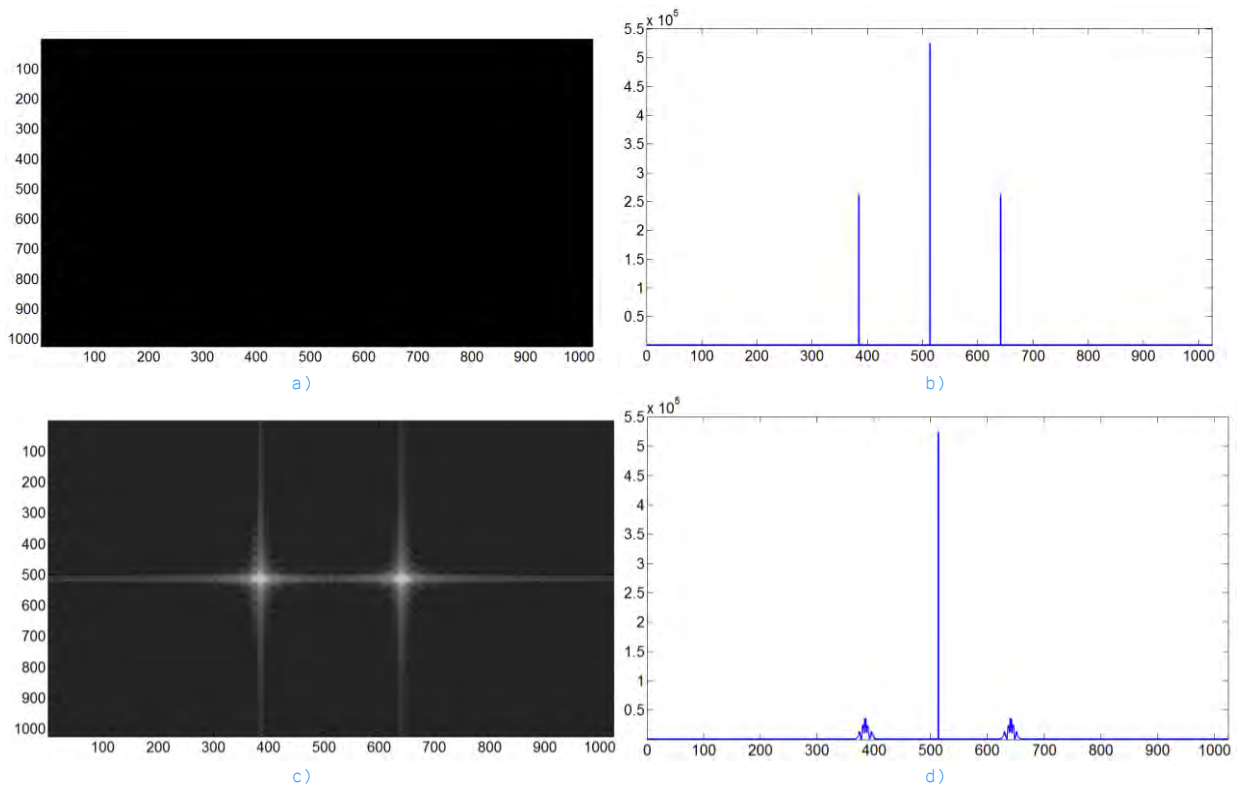


Figura 3-33. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

3.5.2.1.2.Caso peor, periodo de 10 pix.

En este caso el retraso entre las fases de franjas con y sin deformación se observa en la Figura 3-34a); en b) se muestra la resta de los patrones. Se observa que la fase original y recuperada son visualmente equivalente a las mostradas en la Figura 3-32d) y el error es $9.88 \times 10^{-3} \%$. Para fines de comparación, en la Figura 3-35 se muestran cortes transversales de las fases recuperadas para el caso anterior, mejor caso ($T=8$ pix), y para el peor caso, ($T=10$ pix). Visualmente no es perceptible alguna diferencia en la forma de ambos casos.

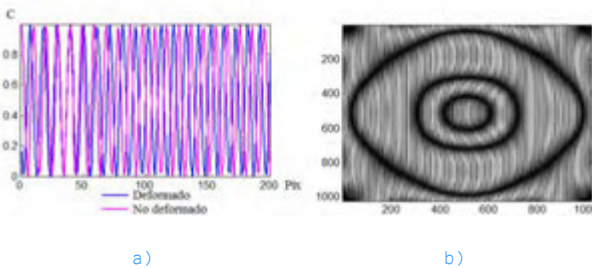


Figura 3-34. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-31. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas.

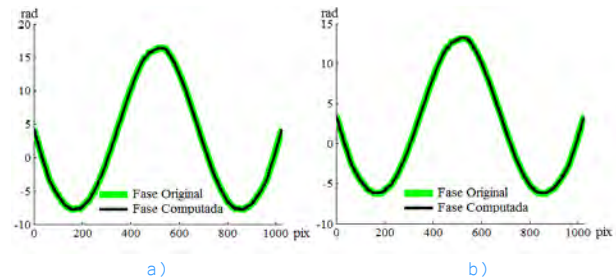


Figura 3-35. Cortes transversales de la fase original (verde) y recuperada (negra) corte de 1024 pix a lo largo de la línea número 512. a) Caso mejor $T=8$ pix. b) Caso peor $T=10$ pix.

3.5.2.2. Influencia del contraste.

Para el análisis del **contraste** se considera el periodo que en el caso anterior produjo el menor error, es decir, el de 8 pix.

El siguiente análisis nos revela que para contrastes que van del 100% (caso ideal) al 5%, el error es prácticamente el mismo. Para valores de contraste menores al 5%, el error aumenta. Entonces, para fines de comparación, el caso mejor considera un contraste del 5% y el caso peor un valor de 1%. Este último valor corresponde al mínimo valor que puede ser captado por una cámara CCD.

Caso mejor		Caso peor	
Contraste %	error porcentual	Contraste %	error porcentual
5	1.26×10^{-4}	1	8.14×10^{-4}

3.5.2.2.1.Caso mejor, contraste del 5%.

En la Figura 3-36 se muestra la señal portadora con modulación de fase para un contraste del 5%. El error corresponde a $1.26 \times 10^{-4} \%$.

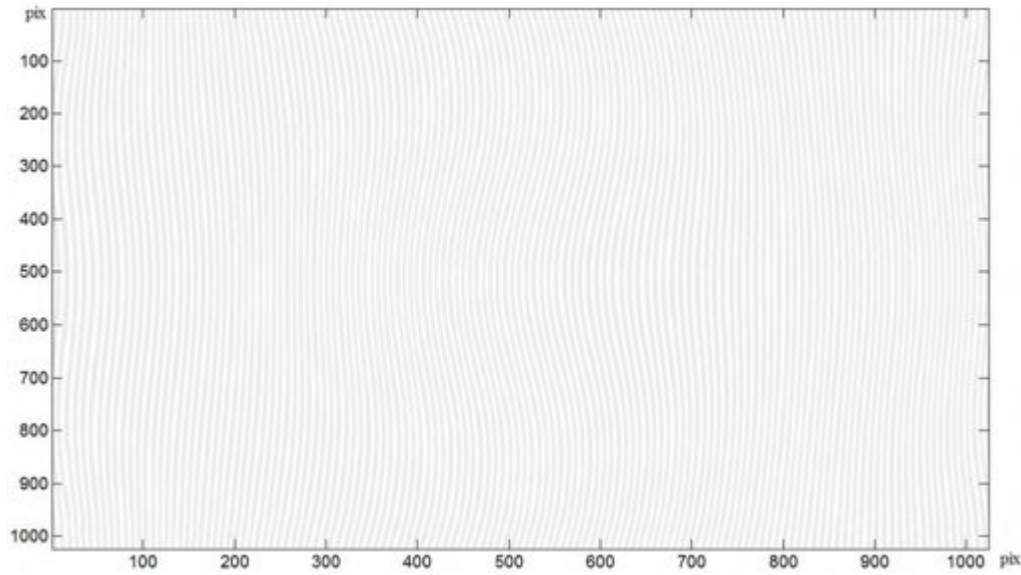


Figura 3-36. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 5%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

3.5.2.2.2.Caso peor, contraste del 1%.

Cuando el contraste disminuye al 1%, se obtiene el patrón de franjas mostrado en la Figura 3-37. En este caso el error es de $8.14 \times 10^{-4}\%$.

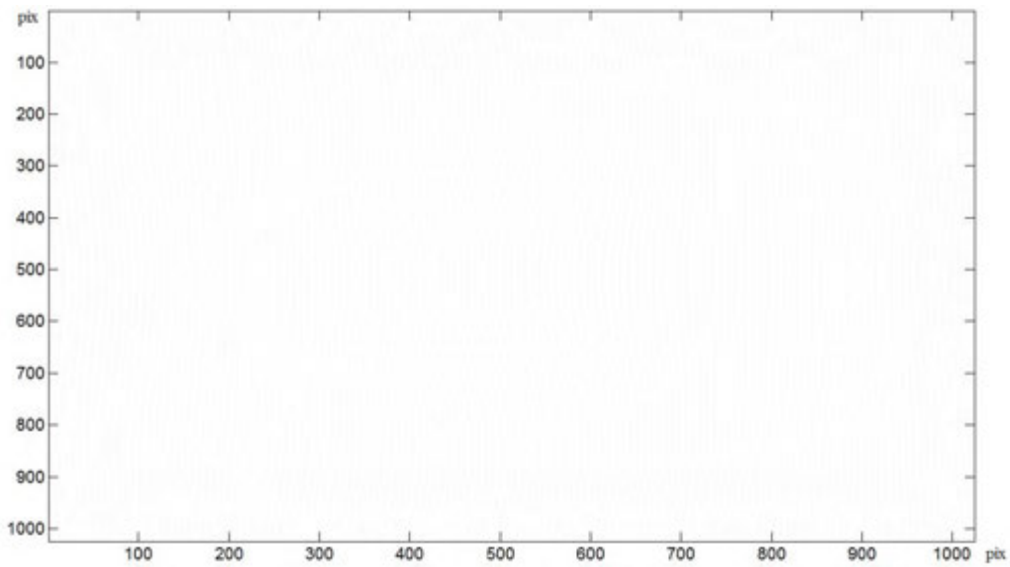


Figura 3-37. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 1%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

Con base a los dos casos anteriores, se concluye que la influencia del contraste sobre la exactitud de FP con franjas senoidales es relativamente insignificante cuando este parámetro es mayor que 5%.

3.5.2.3. Influencia de la resolución.

La influencia de la resolución espacial de la imagen en la exactitud de FP se estima mediante el uso de varios tamaños de imagen. En este análisis se considera que el período es de 8 pix y que el contraste es del 100%.

Caso mejor		Caso peor	
Resolución	error porcentual	Resolución	error Porcentual
4096x4096 pix ²	2.69×10^{-6}	128x128 pix ²	2.42×10^{-3}

3.5.2.3.1. Caso mejor, resolución de 4096x4096 pix².

En la Figura 3-38 se muestra el patrón de franjas resultante para un tamaño de imagen de 4096x4096 pix². Como el período se mantiene fijo e igual a 8 pix, el número de franjas obtenido es relativamente grande. Como se observa, debido a la capacidad limitada de la impresora, se generan franjas tipo moiré. El error calculado es de 2.69×10^{-6} % y es relativamente bajo considerando los resultados anteriores. Al aumentar el número de píxeles, el número de franjas aumenta y el periodo espacial entonces disminuye, lo cual implica tener un incremento en la resolución de FP.

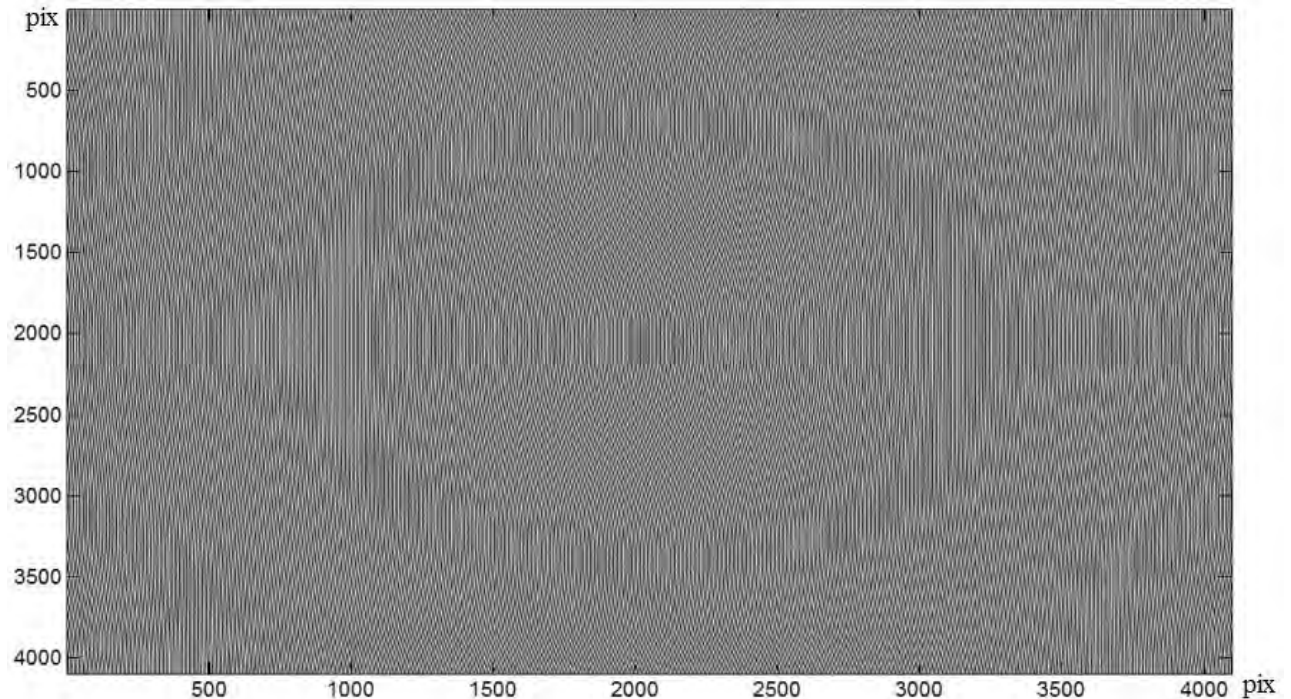


Figura 3-38. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 4096x4096 pix².

3.5.2.3.2. Caso peor resolución de $128 \times 128 \text{ pix}^2$.

La Figura 3-39 muestra el patrón de franjas obtenido para un tamaño de imagen de $128 \times 128 \text{ pix}$. El error aumenta casi 3 órdenes de magnitud (2.42×10^{-3}) en comparación con el caso mejor. Sin embargo, este error es aún aceptable, ya que la fase óptica recuperada es visualmente la misma tal como lo muestra la Figura 3-40.

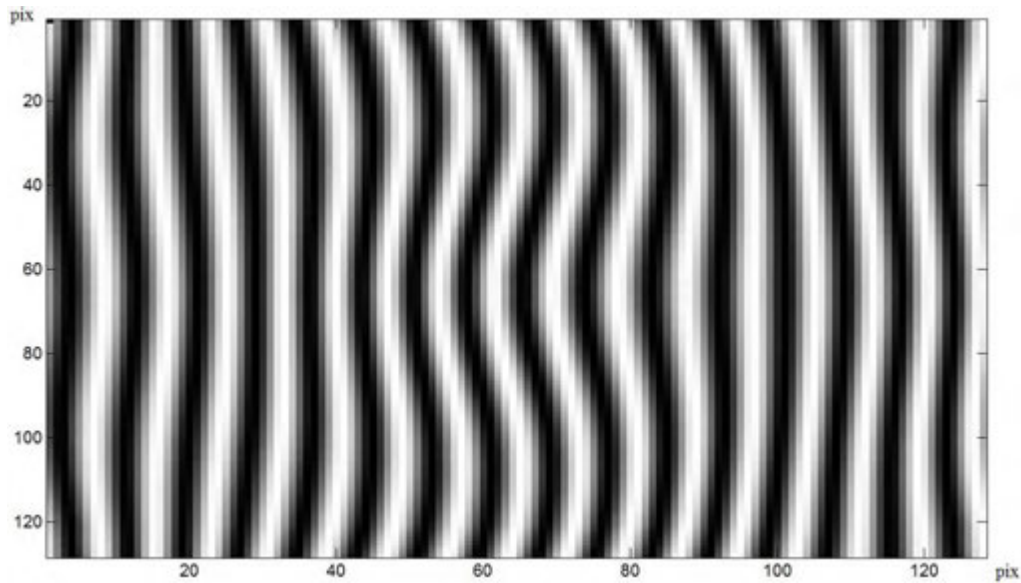


Figura 3-39. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8 \text{ pix}$, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de $128 \times 128 \text{ pix}^2$.

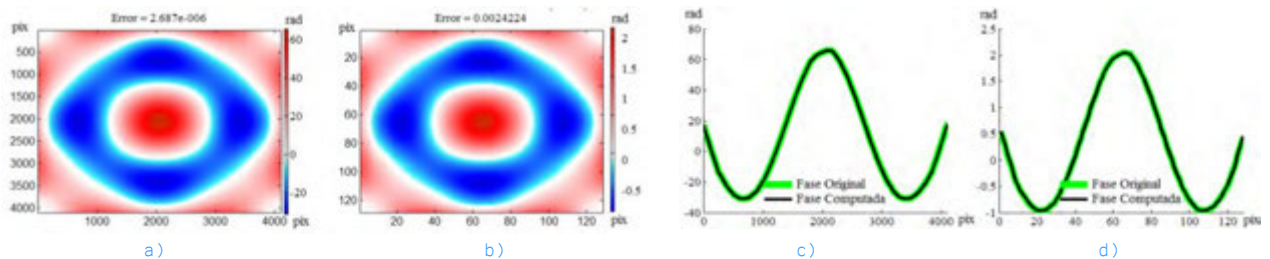


Figura 3-40. a) Mapa de fase desenvuelta con resolución de $4096 \times 4096 \text{ pix}^2$. b) Mapa de fase desenvuelta con resolución de $128 \times 128 \text{ pix}^2$. c) y d) Traslape de cortes transversales de la fase original (verde) y recuperada (negra). c) Caso mejor $T=8 \text{ pix}$, $C=100\%$ y $4096 \times 4096 \text{ pix}^2$. Corte de 4096 pix a lo largo de la línea 2048. d) Caso peor $T=8 \text{ pix}$, $C=100\%$ y $128 \times 128 \text{ pix}^2$. Corte de 128 pix a lo largo de la línea 64.

3.5.3. Franjas gaussianas con patrón modal de 2326 Hz.

Franjas con perfil gaussiano se obtienen en algunos casos, en forma práctica, cuando se proyectan franjas senoidales, esto debido a la función de transferencia del sistema FP. En esta sección se realiza el mismo análisis que en la Sección 3.5.2, agregándose la influencia del ciclo de trabajo.

3.5.3.1. Influencia del periodo.

Para este estudio se asume que el contraste del patrón de franjas es del 100%, con una resolución de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$ y un ciclo de trabajo de 50%.

Caso mejor		Caso peor	
Periodo (pix)	error porcentual	Periodo (pix)	error Porcentual
8	1.64×10^{-4}	10	8.32×10^{-3}

3.5.3.1.1. Caso mejor, periodo de 8 pix.

La Figura 3-41 exhibe el patrón de franjas portadoras moduladas en fase. El error fue de $1.64 \times 10^{-4}\%$.

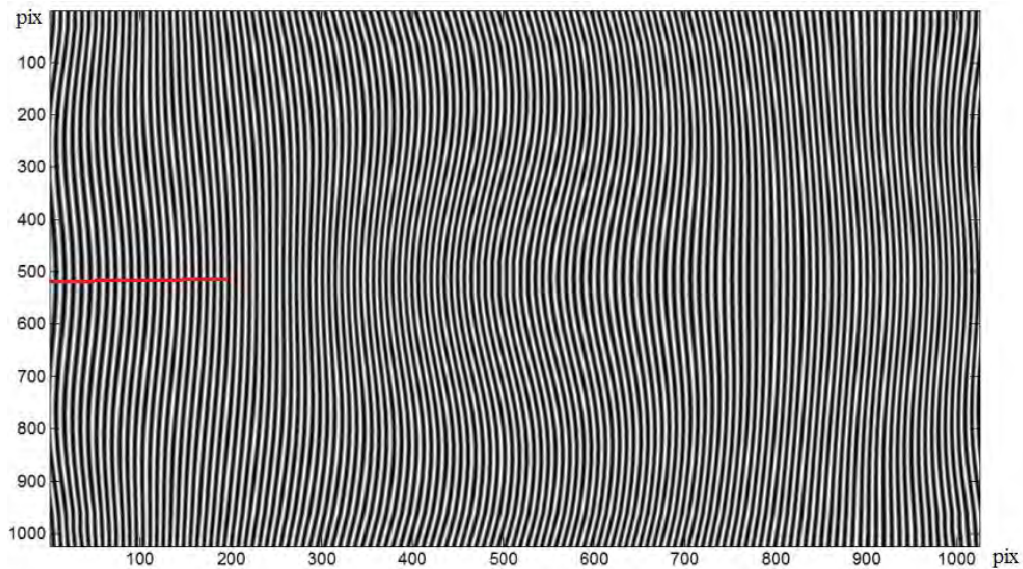


Figura 3-41. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8 \text{ pix}$, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

En la Figura 3-42 se muestra un corte transversal del patrón de intensidad y la substracción entre los patrones con y sin modulación.

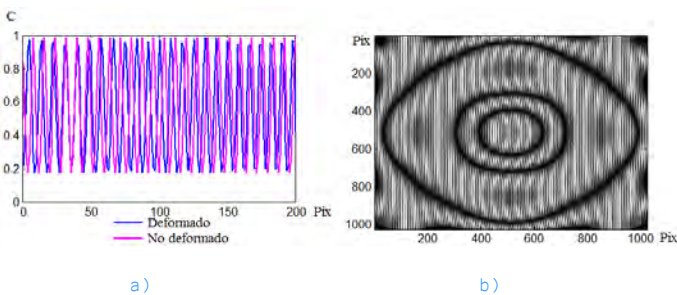


Figura 3-42. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-41. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas.

En la Figura 3-43 se muestra la transformada de Fourier de los patrones de intensidad. Primeramente se observa que a partir del mapa correspondiente al caso sin deformación, aparecen armónicos en las líneas 768 y 896. Esto también se observa para el caso con deformación, donde adicionalmente se nota que el tamaño de los lóbulos son menores que en el caso senoidal (ver la Figura 3-33). Entonces, como la energía se redistribuye entre los armónicos, la magnitud del primer lóbulo (primer armónico) disminuye y su ancho aumenta, lo cual implica tener un mayor traslape entre lóbulos vecinos, lo cual disminuye la exactitud del método.

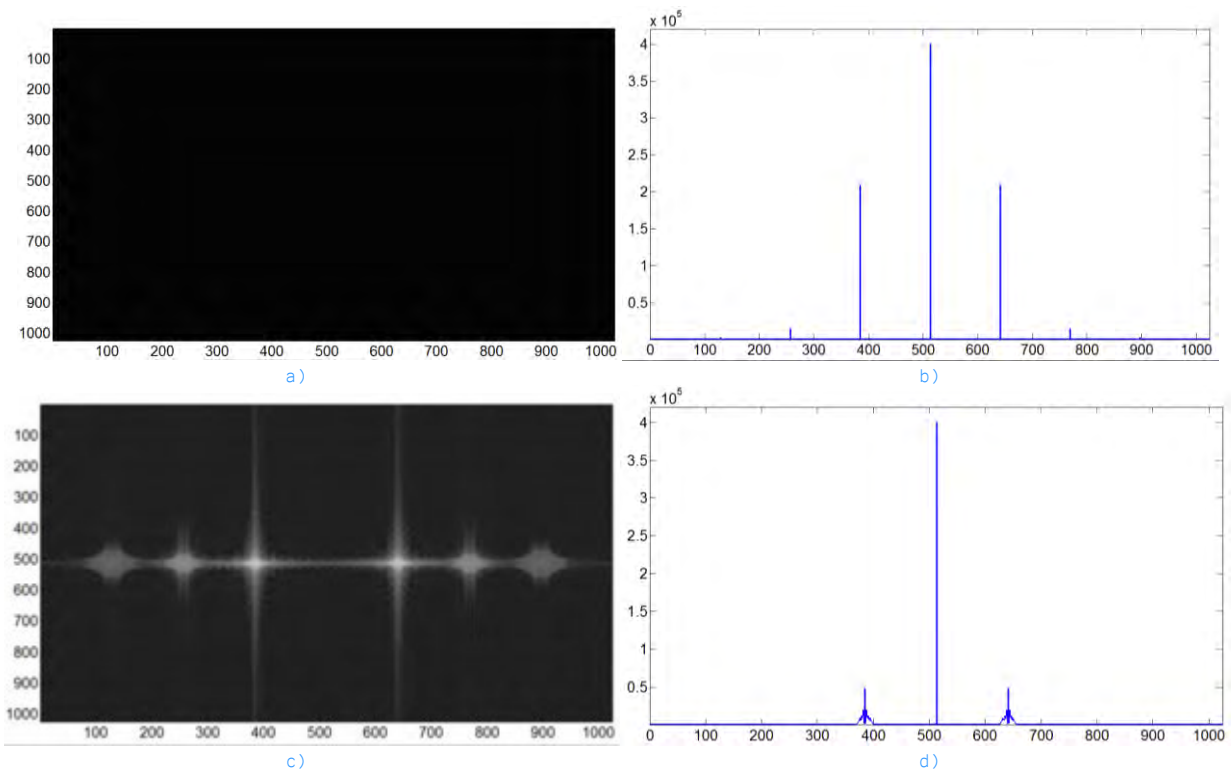


Figura 3-43. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier con modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

3.5.3.1.2. Caso peor, periodo de 10 pix.

El error es de $8.32 \times 10^{-3}\%$.

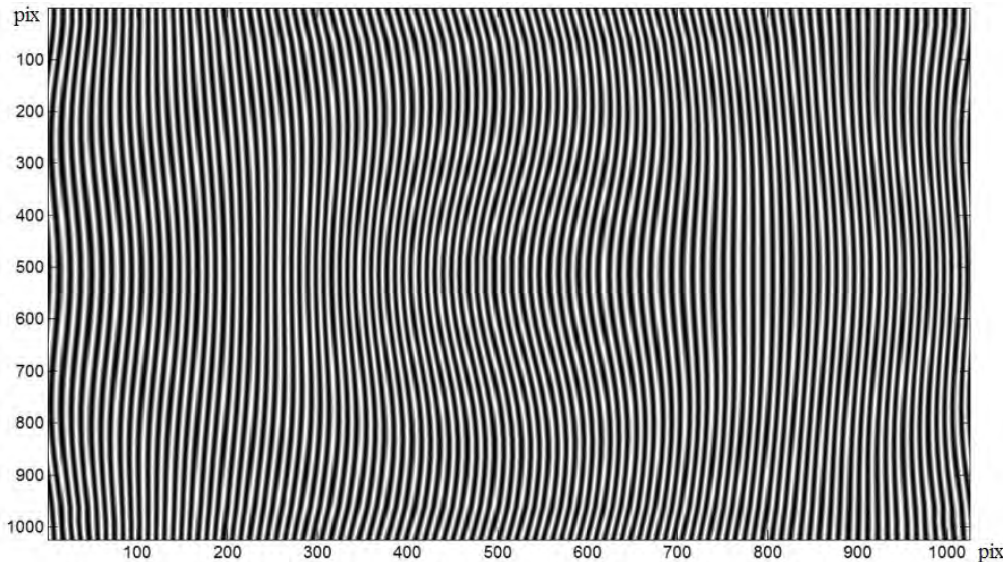


Figura 3-44. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=10$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

3.5.3.2. Influencia del contraste.

Para este estudio consideramos un periodo de 8 pix, una resolución de 1024×1024 pix² y un ciclo de trabajo del 50%.

En este punto se encontró el mismo comportamiento indicado en la Sección 3.5.2.2. Entonces, se asumen los casos mejor y peor como 5% y 1%, respectivamente.

Caso mejor		Caso peor	
Contraste %	error porcentual	Contraste %	error porcentual
5	2.66×10^{-4}	1	9.29×10^{-4}

3.5.3.3. Influencia del ciclo de trabajo.

Para el estudio se supone que el periodo es de 8 pix, contraste del 100% y resolución 1024×1024 pix².

Caso mejor		Caso peor	
Ciclo de trabajo %	error porcentual	Ciclo de trabajo %	error porcentual
50	1.64×10^{-4}	10	8.09×10^{-4}

3.5.3.3.1. Caso mejor, ciclo de trabajo de 50%.

Este caso fue el presentado en la Sección 3.5.3.1.1, con una error del 1.64×10^{-4} %.

3.5.3.3.2. Caso peor, ciclo de trabajo de 10%.

La Figura 3-45 representa el patrón de intensidad resultante con un ciclo de trabajo del 10%. Se observa un adelgazamiento de la parte blanca de las franjas. El error es de 8.09×10^{-4} %.

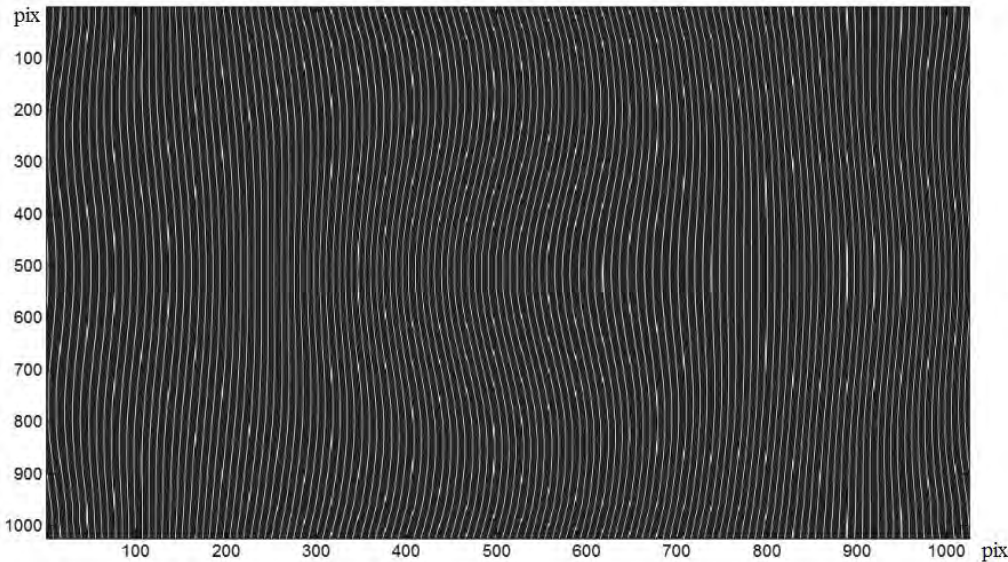


Figura 3-45. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, y $p=10\%$ producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

3.5.3.4. Influencia de la resolución.

Para este punto se asumen los mejores valores para el periodo, el contraste y el ciclo de trabajo: 8 pix, 100% y 50%, respectivamente.

Caso mejor		Caso peor	
Resolución	error porcentual	Resolución	error Porcentual
4096×4096 pix ²	9.44×10^{-6}	128×128 pix ²	8.23×10^{-3}

3.5.3.4.1. Caso mejor resolución de $4096 \times 4096 \text{ pix}^2$.

El error corresponde a $9.44 \times 10^{-6} \%$.

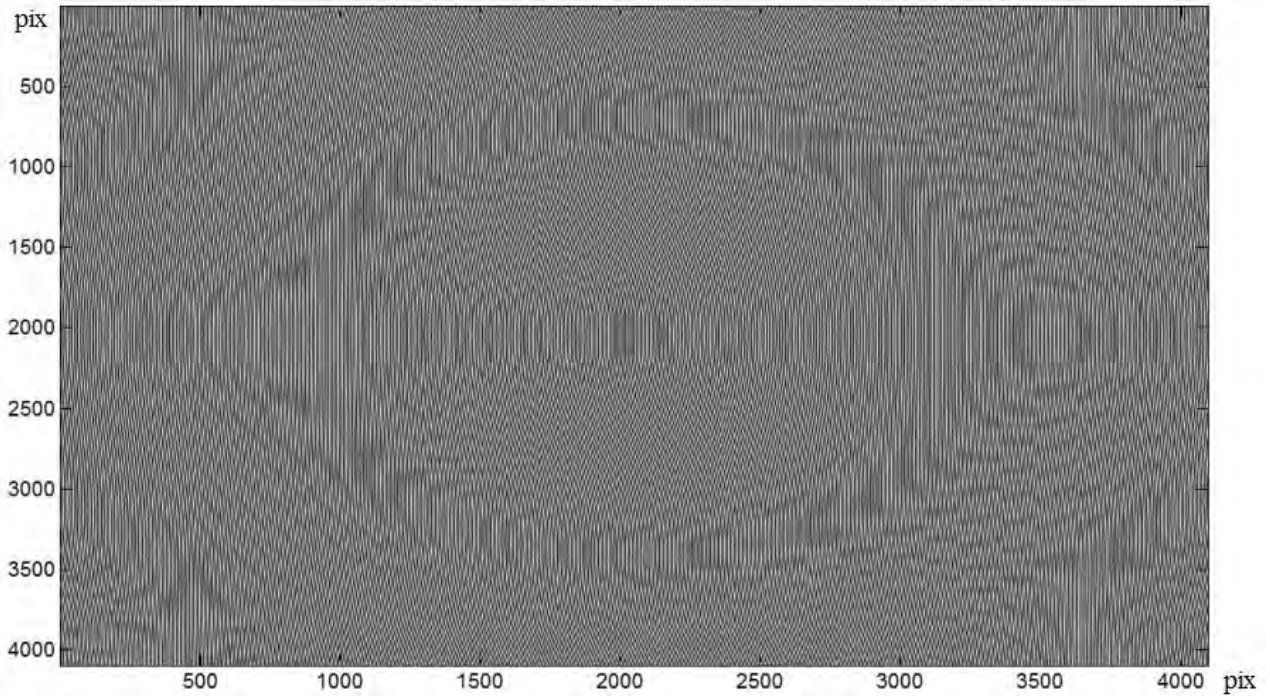


Figura 3-46. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8 \text{ pix}$, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de $4096 \times 4096 \text{ pix}^2$.

3.5.3.4.2. Caso peor, resolución de $128 \times 128 \text{ pix}^2$.

El error aumentó a $8.23 \times 10^{-3} \%$.

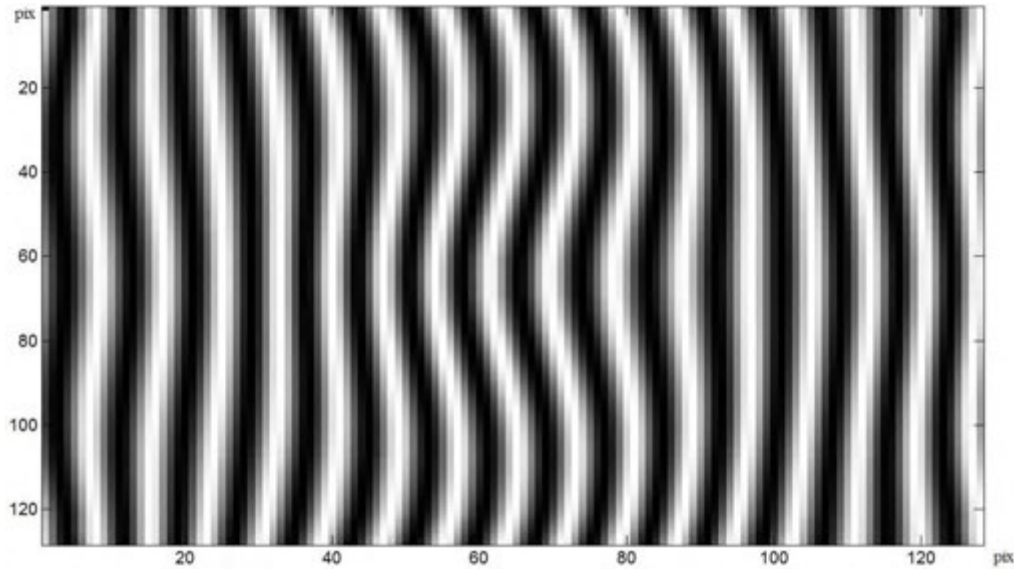


Figura 3-47. Señal portadora gaussiana con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 128×128 pix².

3.5.4. Franjas rectangulares con patrón modal de 2326 Hz.

Un patrón de intensidad con franjas rectangulares representa un caso límite de respuesta del sistema, es decir, aquel en el cual se proyectan franjas rectangulares y se considera que el sistema responde en forma ideal. A continuación se presenta un estudio de la influencia de diversos parámetros en FP, similar al presentado para franjas gaussianas y senoidales.

3.5.4.1. Influencia del periodo.

Se asume que el contraste del patrón de franjas es del 100% con una resolución de 1024×1024 pix² y ciclo de trabajo 50%.

Caso mejor		Caso peor	
Periodo (pix)	error porcentual	Periodo (pix)	error Porcentual
16	3.02×10^{-4}	18	3.56×10^{-3}

3.5.4.1.1. Caso mejor, periodo de 16 pix.

La Figura 3-48 exhibe la señal portadora modulada en fase. El error obtenido es de 3.02×10^{-4} %.

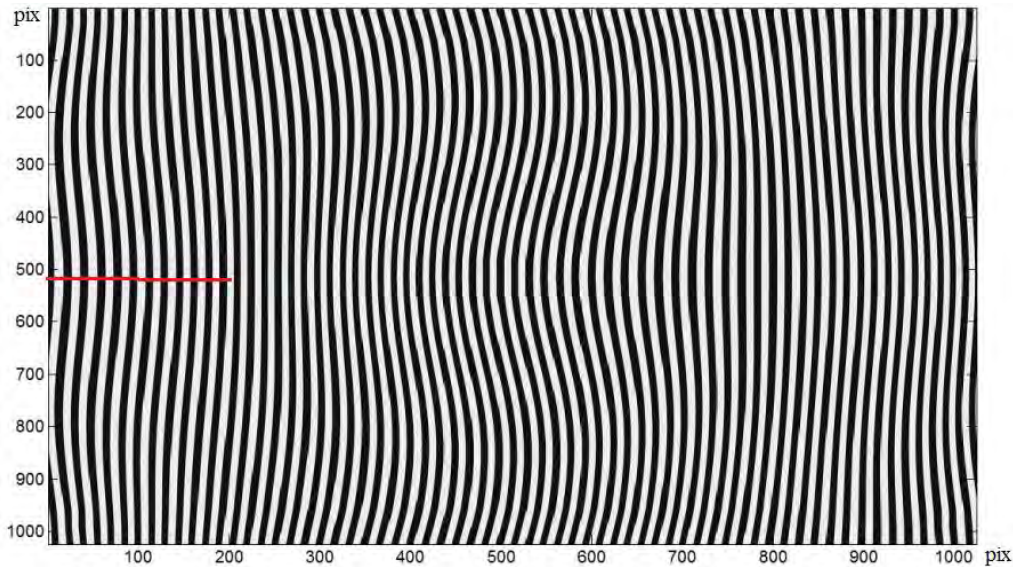


Figura 3-48. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

En la siguiente figura se muestra el corte transversal del patrón de intensidad y la substracción entre imágenes con y sin deformación.

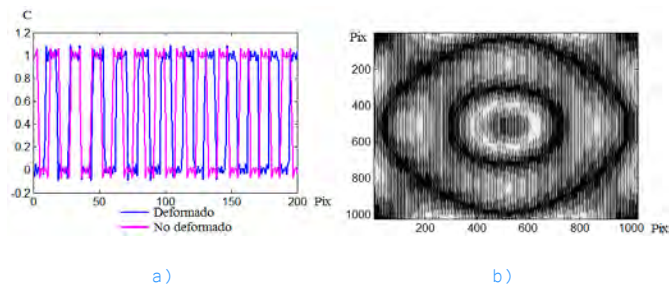


Figura 3-49. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 2326 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-48. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas.

A partir de la Figura 3-50d, la cual contiene la transformada de Fourier de las intensidades, se observa la aparición de varios lóbulos. Si se toma en cuenta que la portadora está a $512+64=576$ pix, entonces el segundo armónico debería estar a $512+128=640$ pix y el tercero a $512+192=704$ pix. Sin embargo, de la Ecuación 3-20 se nota que los armónicos pares no deben aparecer, como se comprueba en la Figura 3-50b. En este caso también existe una redistribución de energía entre todos los lóbulos, lo cual implica una fuente de error en la recuperación de la fase óptica. Por esto se espera que este sea el peor considerando solamente la forma de la franja.

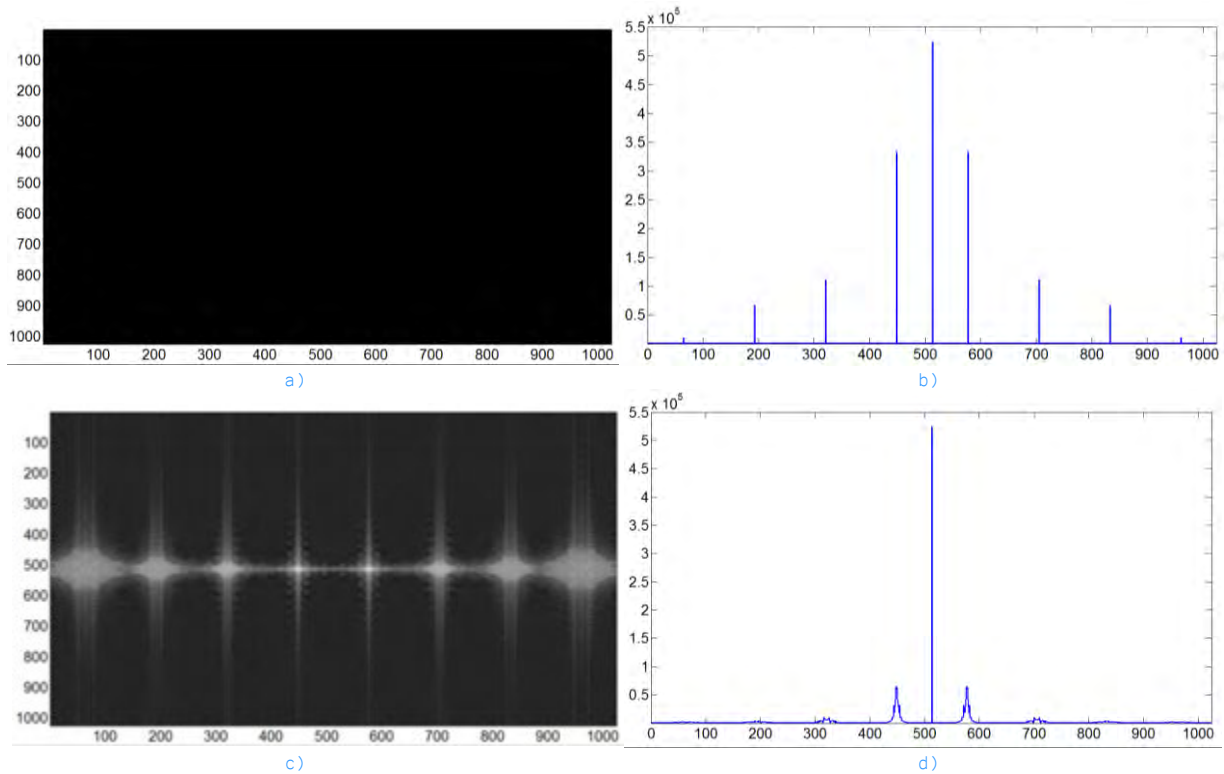


Figura 3-50. a) Transformada de Fourier señal portadora sin modulación de fase. b) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512. c) Transformada de Fourier señal portadora con modulación de fase. d) Corte de la transformada de Fourier sin modulación de fase. Corte transversal de 1024 pix a lo largo de la línea 512.

3.5.4.1.2. Caso peor, periodo de 18 pix.

El error calculado es de $3.56 \times 10^{-3}\%$. Este caso es un ejemplo donde el número de franjas no corresponde a un número entero y por ello aparecen errores por la no periodicidad de la señal al usar transformada de Fourier. Esto se describe más detalladamente en la Sección de Conclusiones.

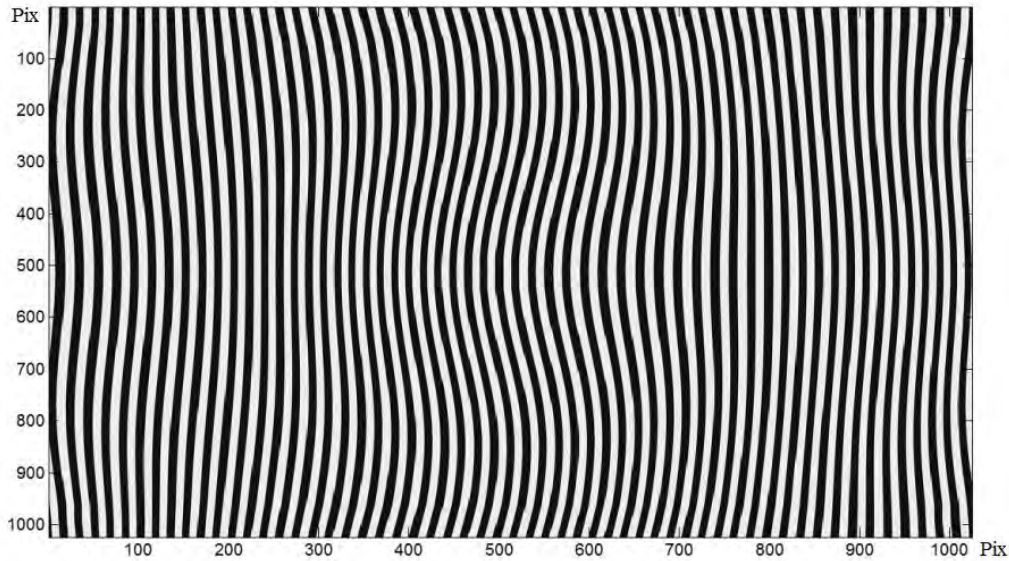


Figura 3-51. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=18$ pix, contraste de 100%, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

3.5.4.2. Influencia del contraste.

Para este estudio se fija el periodo en 16 pix, con una resolución de 1024×1024 pix² y un ciclo de trabajo del 50%.

En este punto se encuentra el mismo comportamiento indicado en 3.5.2.2. Similarmente, se asumen los casos mejor y peor como 5% y 1%, respectivamente.

Caso mejor		Caso peor	
Contraste %	error porcentual	Contraste %	error porcentual
5	5.80×10^{-4}	1	1.01×10^{-3}

3.5.4.3. Influencia del ciclo de trabajo.

Para este estudio se eligen los siguientes parámetros óptimos: periodo de 16 pix, contraste de 100% y resolución de 1024×1024 pix².

Caso mejor		Caso peor	
Ciclo de trabajo %	error porcentual	Ciclo de trabajo %	error porcentual
50	4.63×10^{-4}	10	2.91×10^{-3}

3.5.4.3.1. Caso mejor, ciclo de trabajo de 50%.

Este caso fue el presentado Sección 3.5.4.1.1, con error del $4.63 \times 10^{-4}\%$.

3.5.4.3.2. Caso peor, ciclo de trabajo de 90%.

Es notorio que la parte oscura de las franjas se adelgaza. Este caso se parece al de 10% de contraste, pero con una inversión de contraste. Se obtiene un error de $2.91 \times 10^{-3}\%$.

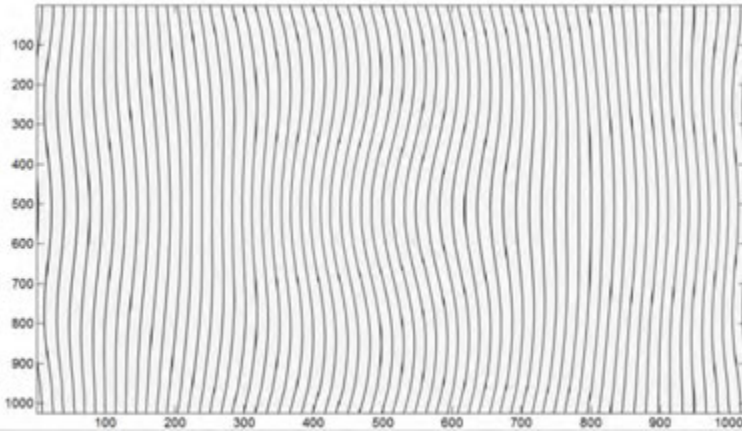


Figura 3-52. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, $C=100\%$, y $p=10\%$ producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz.

3.5.4.4. Influencia de la resolución.

Se asumen los mejores valores de los parámetros: periodo 16 pix, contraste 100% y ciclo de trabajo de 50%.

Caso mejor		Caso peor	
Resolución	error porcentual	Resolución	error Porcentual
4096x4096 pix ²	2.93×10^{-5}	128x128 pix ²	19.97×10^{-3}

3.5.4.4.1. Caso mejor, resolución de 4096x4096 pix².

Se obtiene un error de $2.93 \times 10^{-5}\%$.

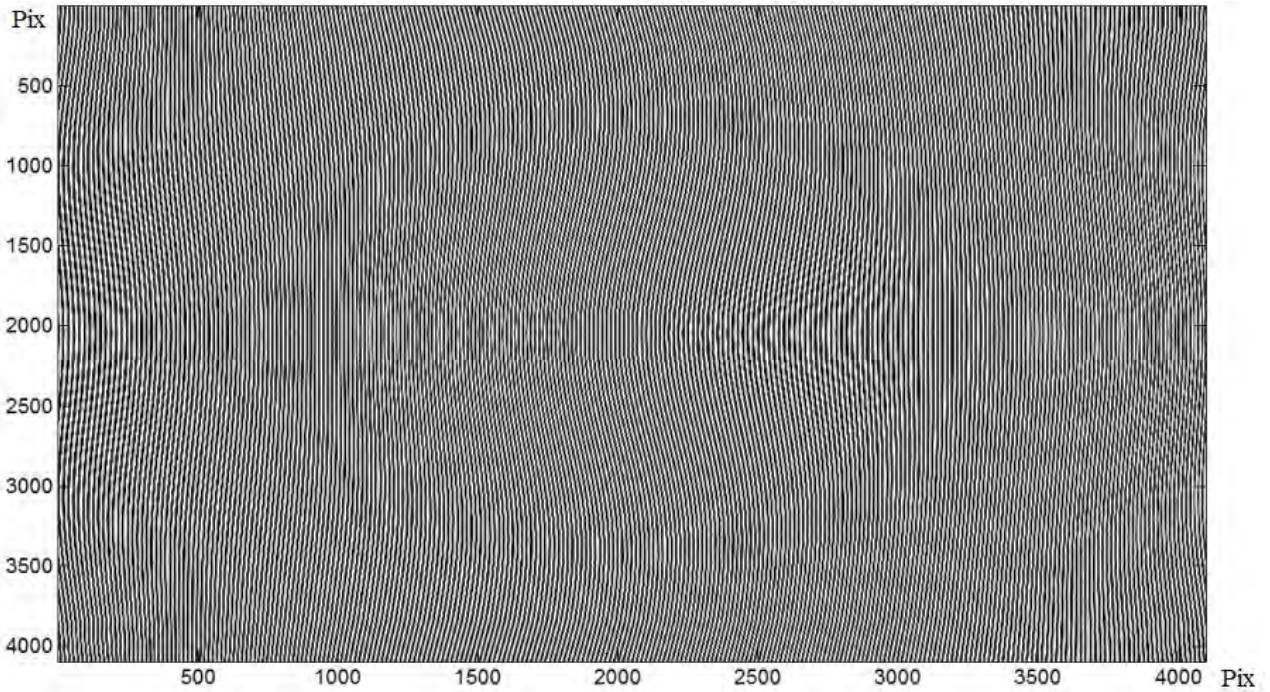


Figura 3-53. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, $p=50\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 4096×4096 pix².

3.5.4.4.2. Caso peor, resolución de 128×128 pix².

El error es de $19.97 \times 10^{-3}\%$.

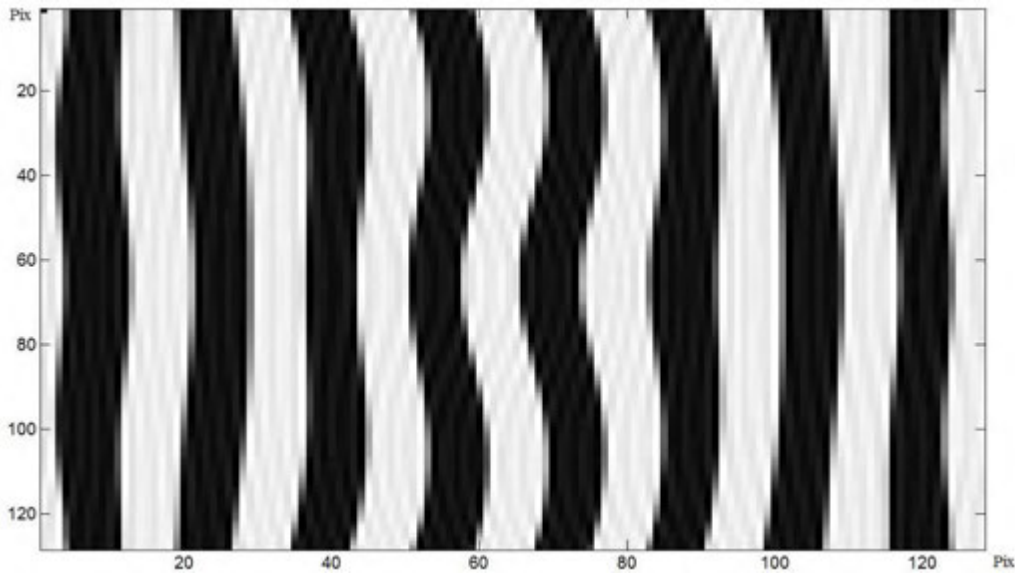


Figura 3-54. Señal portadora rectangular con franjas moduladas en fase con $T=16$ pix, $C=100\%$, $p=50\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 2326 Hz con resolución de 128×128 pix².

3.5.5. Franjas senoidales con patrón modal de 3994 Hz.

A continuación se presenta el mismo análisis realizado anteriormente con el patrón modal de 2326 Hz. Sin embargo, debido a que los resultados son parecidos a los resultados anteriores, sólo se presenta un caso. Los demás casos se presentan en la siguiente Sección 3.6, donde se incluyen los errores obtenidos para todos los casos, no solamente peor y mejor.

3.5.5.1. Influencia del periodo.

Se asume que el contraste del patrón de franjas es del 100% y que la resolución espacial es de 1024×1024 pix²; en este caso no interviene el ciclo de trabajo.

Caso mejor		Caso peor	
Periodo (pix)	error porcentual	Periodo (pix)	error Porcentual
8	1.23×10^{-4}	18	2.35×10^{-3}

3.5.5.1.1. Caso mejor, periodo de 8 pix.

La señal portadora modulada en fase se muestra en la [Figura 3-55](#). En esta imagen se observa el aumento en la complejidad en el patrón de franjas, ya que la variación de pendiente es mayor que en el de 2326 Hz.

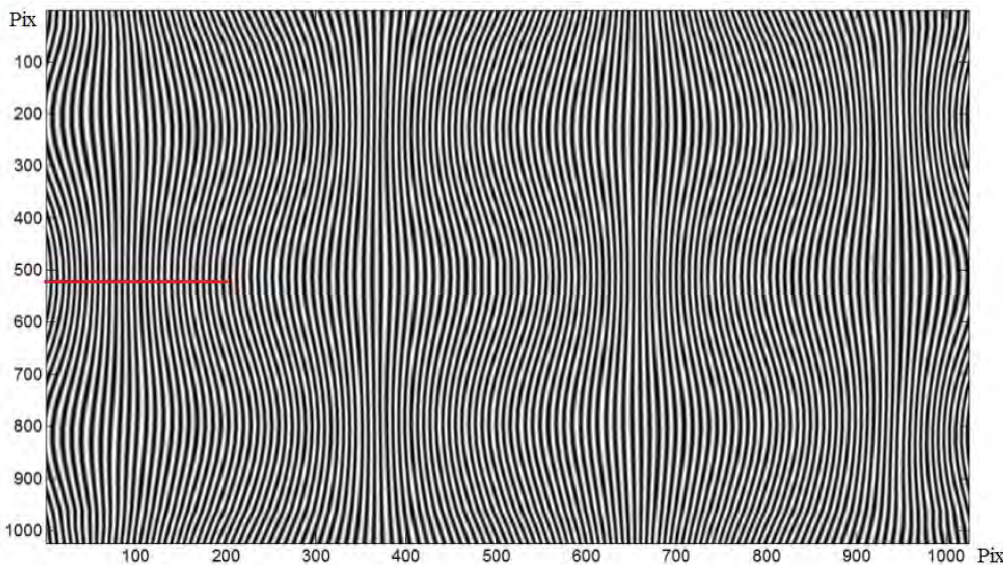


Figura 3-55. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=8$ pix, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 3394 Hz. La región de color rojo corresponde a la sección de la cual se extraen 200 pix de la línea número 512.

El error obtenido es de $1.23 \times 10^{-4}\%$. En la siguiente figura se indica la distribución espacial del patrón modal.

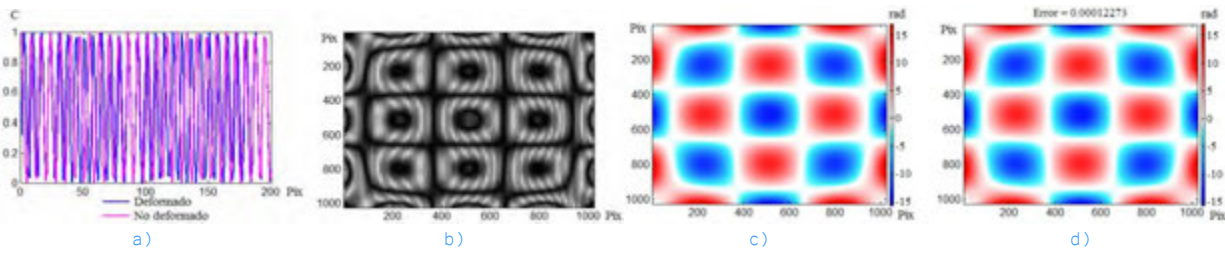


Figura 3-56. a) Franjas sin modulación de fase y con modulación en fase producida por el patrón modal de 3394 Hz. Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 3-55. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 512. b) Resta de patrones de franjas. c) Mapa de fase óptica recuperada envuelta. d) Mapa fase óptica recuperada desenvuelta con error de $1.23 \times 10^{-4}\%$.

3.5.5.1.2.Caso peor, periodo de 18 pix.

El error obtenido es de $2.35 \times 10^{-3}\%$.

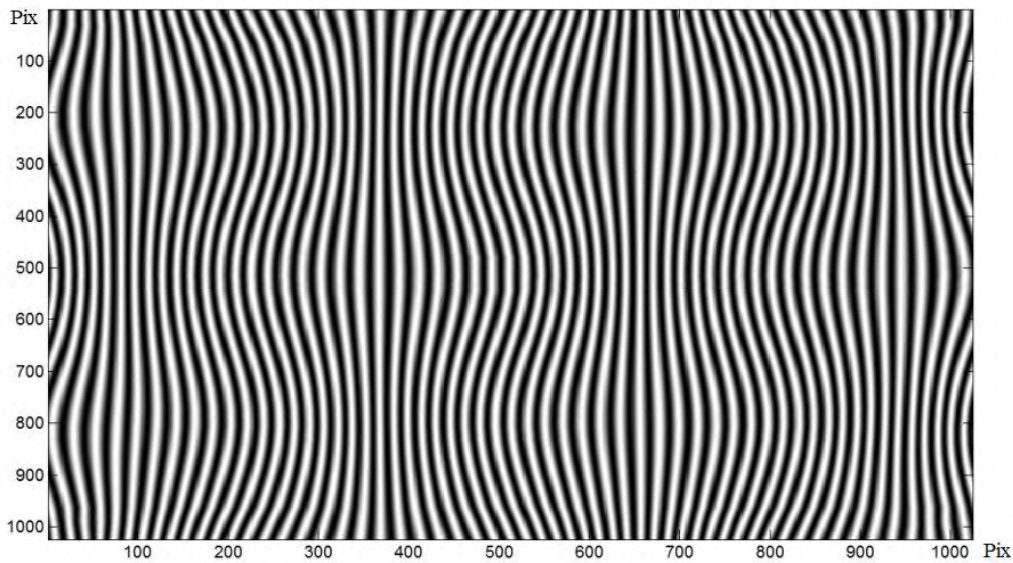


Figura 3-57. Señal portadora senoidal con franjas moduladas en fase con $T=18$ pix, $C=100\%$, producidas por el mapa de deformación del patrón modal de 3394 Hz.

Se realiza un análisis similar al del patrón modal de 2326 Hz, por lo que se opta por no colocar todo el análisis en este patrón modal, solamente los resultados que se analizan en la siguiente sección.

3.6. Resultados de simulaciones.

En esta sección se presentan los resultados completos correspondientes al análisis de la influencia de diversos parámetros en la exactitud de FP: forma de las franjas, periodo espacial, contraste, ciclo de trabajo y resolución espacial. Se consideran dos patrones modales: de 2326 Hz y 3994 Hz con el fin de variar la distribución de pendientes

locales, lo cual se ve reflejado en el ensanchamiento de los lóbulos en el plano de Fourier [24].

3.6.1. Influencia del periodo.

Para este estudio se supone contraste a 100%, así como el uso de dos resoluciones espaciales $512 \times 512 \text{ pix}^2$ y $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. En el caso de franjas gaussianas y rectangulares, se seleccionó un ciclo de trabajo de 50%.

Los periodos analizados son: $T = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \text{ pix}$. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3-3 y Tabla 3-4.

Tabla 3-3

Análisis de influencia del periodo con resolución de $512 \times 512 \text{ pix}^2$						
Periodo (pix)	errores porcentuales: modo 2326 Hz			errores porcentuales: modo 3994 Hz		
	Senoidal	Gausiano	Rectangular	Senoidal	Gausiano	Rectangular
4	1.81E-04	7.24E-04	2.48E-01	4.19E-04	1.44E-03	1.24E-01
6	6.79E-03	6.72E-03	1.19E-01	1.06E-02	1.11E-02	6.57E-02
8	2.16E-04	6.69E-04	7.25E-02	4.83E-04	2.23E-03	3.43E-02
10	6.19E-03	5.88E-03	3.48E-02	7.24E-03	7.88E-03	3.31E-02
12	2.69E-02	4.13E-02	4.21E-02	4.10E-02	5.73E-02	1.21E-01
14	6.95E-02	2.01E-01	2.31E-01	6.79E-02	1.44E-01	2.45E-01
16	6.14E-04	2.46E-03	2.17E-03	1.43E-03	7.39E-03	6.05E-02
18	1.91E-01	1.65E-01	3.40E-01	1.73E-01	1.24E-01	2.80E-01
20	8.44E-02	2.63E-01	2.89E-01	9.86E-02	2.48E-01	3.91E-01

Tabla 3-4

Análisis de influencia del periodo con resolución de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$						
Periodo (pix)	errores porcentuales: modo 2326 Hz			errores porcentuales: modo 3994 Hz		
	Senoidal	Gausiano	Rectangular	Senoidal	Gausiano	Rectangular
4	3.90E-05	2.97E-04	1.18E-01	8.65E-05	4.90E-04	6.00E-02
6	2.52E-03	4.68E-03	5.52E-02	3.05E-03	4.79E-03	2.89E-02
8	6.53E-05	1.09E-04	3.05E-02	1.23E-04	6.70E-04	1.82E-02
10	9.88E-03	8.31E-03	2.42E-02	1.07E-02	8.27E-03	2.27E-02
12	5.89E-03	5.01E-03	5.69E-03	8.88E-03	7.04E-03	4.40E-02
14	1.74E-03	1.84E-03	2.73E-03	2.41E-03	2.69E-03	4.04E-02
16	1.23E-04	6.75E-04	4.63E-04	3.06E-04	2.20E-03	1.15E-02
18	2.15E-03	2.39E-03	3.56E-03	2.35E-03	4.71E-03	2.47E-02
20	5.68E-03	5.36E-03	8.56E-03	7.36E-03	7.68E-03	3.59E-02

Los resultados se muestran en la Figura 3-58 y la Figura 3-59. Se muestra el error relativo porcentual contra el periodo, para los patrones modales de 2326 Hz y 3994 Hz, respectivamente. Los valores reales de las ordenadas se obtienen multiplicando el valor que

aparece en las gráficas por el factor FC que se incluye en los pies de imagen. Este factor se aplica con objeto de agrupar los resultados en un solo gráfico.

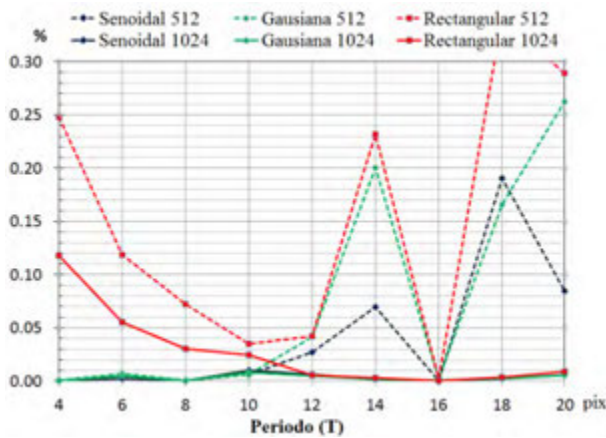


Figura 3-58. Error vs Período. Todos los casos FC=1. Error mínimo $6.53 \times 10^{-5}\%$, para el caso senoidal con período de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz.

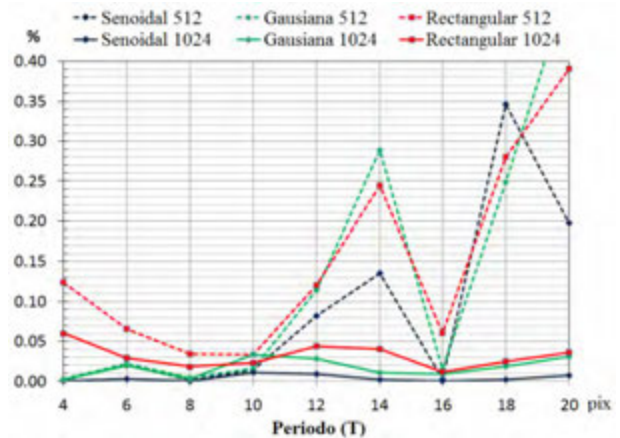


Figura 3-59. Error vs Período. Senoidal 512 (FC=2), Gaussiana 512 (FC=2), Gaussiana 1024 (FC=4), otro caso FC=1. Error mínimo $1.23 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal con período de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz.

Se puede observar que en el caso de franjas senoidales, el error porcentual obtenido es el menor, siguiendo el caso de franjas gaussianas y luego el caso de franjas rectangulares. El error mínimo, tanto para el modo de 2326 Hz como para el modo de 3994 Hz, se obtuvo para un período de 8 pix, siendo de $6.53 \times 10^{-5}\%$ y $1.23 \times 10^{-4}\%$, respectivamente. Como era de esperarse, los errores para el caso 3994 Hz son mayores que para el caso 2326 Hz, lo cual se debe a la complejidad de la distribución de pendientes de deformación.

El error es mínimo para períodos que son múltiplo de las dimensiones de la imagen, esto debido a la periodicidad de la transformada de Fourier discreta. Debido al carácter periódico de la transformada de Fourier discreta, esto se traduce como una discontinuidad en la señal y por lo tanto la información en el plano de Fourier tiende a distribirse sobre todo el plano de Fourier, produciendo sobreposición de lóbulos [6]. En períodos como 14 y 18 pix se observan errores relativamente altos. Esto se debe a que el período no es múltiplo del tamaño de la imagen, en este caso, 512 pix o 1024 pix. La exactitud también decrece para períodos relativamente pequeños y grandes. El menor período que se puede emplear en FP es, de acuerdo al límite de Nyquist, de 2 pix. Para valores cercanos a este valor, el muestreo de las señales empieza a no ser suficiente, y esto origina cierto grado de no-suavidad en las señales. Para períodos relativamente grandes, la frecuencia de la portadora no es suficientemente grande para que el primer lóbulo del espectro de Fourier se separe del espectro de frecuencias cercanas a cero, y por lo tanto ocurre sobreposición de información, lo cual favorece a aumentar el error del método de Fourier.

3.6.2. Influencia del contraste [25, 26].

Se suponen valores que pueden dar los mejores resultados: ciclo de trabajo de 50% en franjas gaussianas y rectangulares con periodo espacial de 8 pix. Se consideran dos tamaños de imagen: $512 \times 512 \text{ pix}^2$ y $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. La Tabla 3-5 y la Tabla 3-6 contienen los resultados obtenidos para este análisis.

Tabla 3-5

Análisis de influencia del contraste con resolución de $512 \times 512 \text{ pix}^2$						
Contraste	errores porcentuales: modo 2326 Hz			errores porcentuales: modo 3994 Hz		
%	Senoidal	Gausiano	Rectangular	Senoidal	Gausiano	Rectangular
1	6.17E-03	7.74E-03	1.17E-02	6.26E-03	8.22E-03	1.48E-02
2	2.22E-03	2.88E-03	4.71E-03	2.78E-03	4.72E-03	6.26E-03
3	1.13E-03	1.99E-03	3.33E-03	1.60E-03	3.67E-03	4.37E-03
4	7.99E-04	1.43E-03	2.86E-03	1.20E-03	3.13E-03	3.71E-03
5	5.27E-04	1.16E-03	2.66E-03	9.10E-04	2.91E-03	3.46E-03
10	2.96E-04	8.91E-04	2.40E-03	5.94E-04	2.59E-03	3.06E-03
20	3.27E-04	8.50E-04	2.22E-03	5.38E-04	2.50E-03	2.93E-03
30	3.23E-04	8.50E-04	2.20E-03	5.48E-04	2.64E-03	2.80E-03
40	2.32E-04	8.67E-04	2.18E-03	5.14E-04	2.54E-03	2.78E-03
50	2.22E-04	8.65E-04	2.18E-03	4.97E-04	2.53E-03	2.77E-03
60	2.22E-04	7.93E-04	2.17E-03	4.96E-04	2.51E-03	2.76E-03
70	2.25E-04	8.03E-04	2.17E-03	4.98E-04	2.52E-03	2.75E-03
80	2.27E-04	7.97E-04	2.17E-03	5.00E-04	2.53E-03	2.75E-03
90	2.26E-04	7.89E-04	2.17E-03	4.96E-04	2.53E-03	2.75E-03
100	2.16E-04	6.69E-04	2.17E-03	4.83E-04	2.54E-03	2.75E-03

Tabla 3-6

Análisis de influencia del contraste con resolución de 1024×1024 pix ²						
Contraste %	errores porcentuales: modo 2326 Hz			errores porcentuales: modo 3994 Hz		
	Senoidal	Gausiano	Rectangular	Senoidal	Gausiano	Rectangular
1	8.13E-04	9.29E-04	1.01E-03	1.05E-03	1.58E-03	1.89E-03
2	3.19E-04	4.40E-04	6.59E-04	5.02E-04	1.01E-03	1.01E-03
3	2.19E-04	3.32E-04	5.93E-04	3.58E-04	8.91E-04	8.74E-04
4	1.68E-04	2.77E-04	5.60E-04	2.91E-04	8.50E-04	8.32E-04
5	1.26E-04	2.66E-04	5.80E-04	2.52E-04	8.28E-04	8.24E-04
10	9.50E-05	2.39E-04	6.02E-04	1.91E-04	7.88E-04	8.16E-04
20	6.91E-05	2.31E-04	5.34E-04	1.58E-04	7.32E-04	7.75E-04
30	7.39E-05	2.35E-04	4.84E-04	1.57E-04	7.06E-04	7.45E-04
40	7.30E-05	2.26E-04	4.72E-04	1.51E-04	6.98E-04	6.88E-04
50	7.02E-05	2.23E-04	4.68E-04	1.43E-04	6.88E-04	6.73E-04
60	6.95E-05	2.20E-04	4.66E-04	1.38E-04	6.74E-04	6.66E-04
70	6.92E-05	2.19E-04	4.65E-04	1.35E-04	6.71E-04	6.63E-04
80	6.83E-05	2.18E-04	4.64E-04	1.33E-04	6.72E-04	6.61E-04
90	6.75E-05	2.18E-04	4.64E-04	1.29E-04	6.73E-04	6.60E-04
100	6.53E-05	1.79E-04	4.63E-04	1.23E-04	6.76E-04	6.59E-04

Los resultados se muestran en la Figura 3-60 y Figura 3-61. Se nota que el error es relativamente bajo y constante para contrastes mayores que 5% y menores que 95%, tanto para el patrón modal de 2326 Hz como para el de 3994 Hz (nuevamente, los errores son ligeramente mayores para el caso de 3994 Hz). En cambio para contrastes menores que 5% y mayores que 95%, el error aumenta progresivamente, ver Figura 3-62 y Figura 3-63.

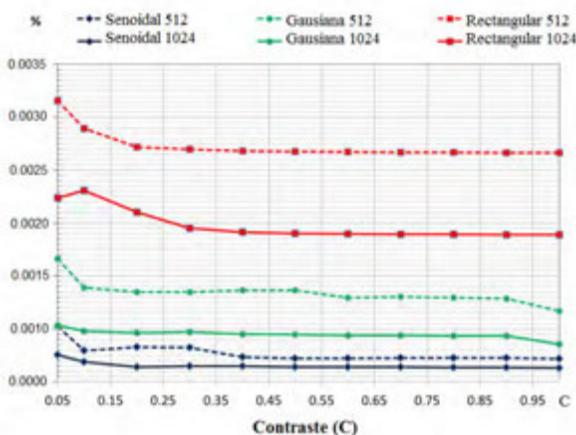


Figura 3-60. Error vs Contraste. Senoidal 1024 (FC=2), Gausiana 1024 (FC=2), Rectangular 1024 (FC=3), otro caso FC=1. Error mínimo porcentual $6.53 \times 10^{-5}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz.

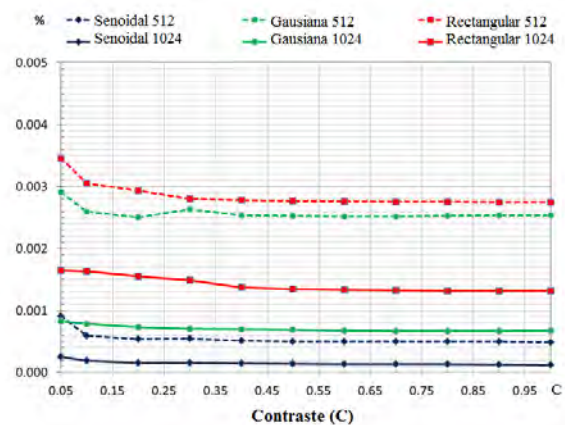


Figura 3-61. Error vs Contraste. Rectangular 1024 (FC=2), otro caso FC=1. Error mínimo porcentual $1.23 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal con periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz.

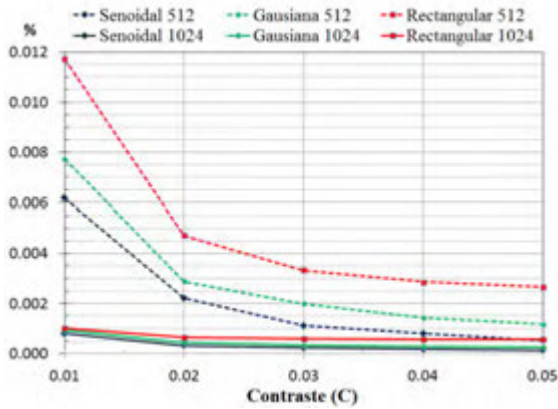


Figura 3-62. Error vs Contraste. Todos los casos FC=1. Error máximo porcentual $8.10 \times 10^{-4}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz.

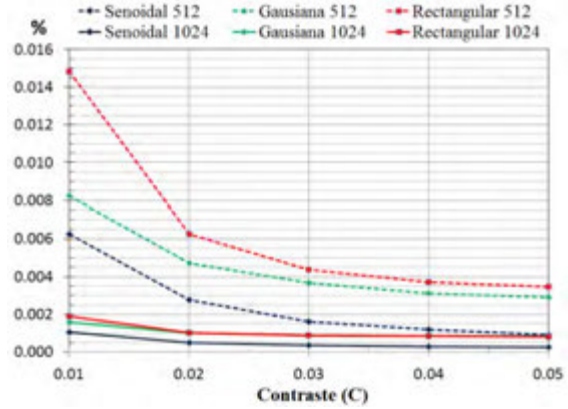


Figura 3-63. Error vs Contraste. Todos los casos FC=1. Error máximo porcentual $1.05 \times 10^{-3}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz.

La intensidad relativa del primer lóbulo en el plano de Fourier respecto a la intensidad de los demás se desea que sea alta. Esto no se cumple cuando el contraste de las franjas toma valores relativamente bajos, y el nivel de la información del primer lóbulo puede ser tan bajo que puede llegar a ser comparable al nivel del ruido de las imágenes.

Como en el caso de la influencia del periodo, el error porcentual más baja corresponde a las franjas senoidales. Por lo cual se concluye que para contrastes mayores al 5% y menores que el 95%, el error se considera bajo y relativamente constante. El mejor caso es el 100%.

3.6.3. Influencia del ciclo de trabajo.

Se asume un contraste de 100% y un periodo de 8 pix. Considerando dos valores para la resolución espacial: $512 \times 512 \text{ pix}^2$ y $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$. Para este análisis, no se considera a las franjas senoidales. En la Tabla 3-7 y la Tabla 3-8 se muestran los resultados.

Tabla 3-7

Análisis de influencia del ciclo de trabajo con resolución de $512 \times 512 \text{ pix}^2$				
Ciclo de trabajo	errores porcentuales:		errores porcentuales:	
	modo 2326 Hz		modo 3994 Hz	
%	Gausiano	Rectangular	Gausiano	Rectangular
10	3.52E-03	9.66E-03	1.25E-02	2.29E-02
20	2.13E-03	8.40E-03	6.80E-03	1.85E-02
30	1.62E-03	6.40E-03	4.80E-03	1.50E-02
40	1.35E-03	4.86E-03	3.38E-03	1.00E-02
50	9.07E-04	2.35E-03	2.62E-03	2.65E-03
60	8.83E-04	4.95E-03	2.14E-03	7.77E-03
70	9.90E-04	6.44E-03	2.91E-03	1.64E-02
80	9.21E-04	8.82E-03	3.25E-03	2.39E-02
90	1.05E-03	9.28E-03	3.55E-03	3.21E-02

Tabla 3-8

Análisis de influencia del ciclo de trabajo con resolución de $1024 \times 1024 \text{ pix}^2$				
Ciclo de trabajo	errores porcentuales:		errores porcentuales:	
	modo 2326 Hz		modo 3994 Hz	
%	Gausiano	Rectangular	Gausiano	Rectangular
10	8.09E-04	2.81E-03	2.62E-03	6.22E-03
20	4.76E-04	2.49E-03	1.67E-03	4.78E-03
30	3.37E-04	1.93E-03	1.20E-03	3.18E-03
40	2.11E-04	1.32E-03	8.98E-04	2.07E-03
50	1.64E-04	4.63E-04	5.58E-04	6.59E-04
60	1.94E-04	9.85E-04	6.37E-04	2.57E-03
70	1.85E-04	1.65E-03	6.91E-04	3.01E-03
80	3.27E-04	2.44E-03	8.27E-04	4.71E-03
90	3.43E-04	2.91E-03	1.03E-03	7.18E-03

Los datos anteriores se muestran en la [Figura 3-65](#) y la [Figura 3-66](#), donde el comportamiento del error para franjas rectangulares es aproximadamente simétrico alrededor del valor de 50% para el ciclo de trabajo. A diferencia de esto, para el caso de franjas gaussianas, el comportamiento es aproximadamente exponencial decreciente. La falta de simetría en este caso, se debe a que a diferencia del caso rectangular, para un cierto ciclo de trabajo X y para otro ciclo de trabajo $X-1$, los perfiles resultantes de las franjas no resultan ser complementarios, como se observa en la [Figura 3-64](#).

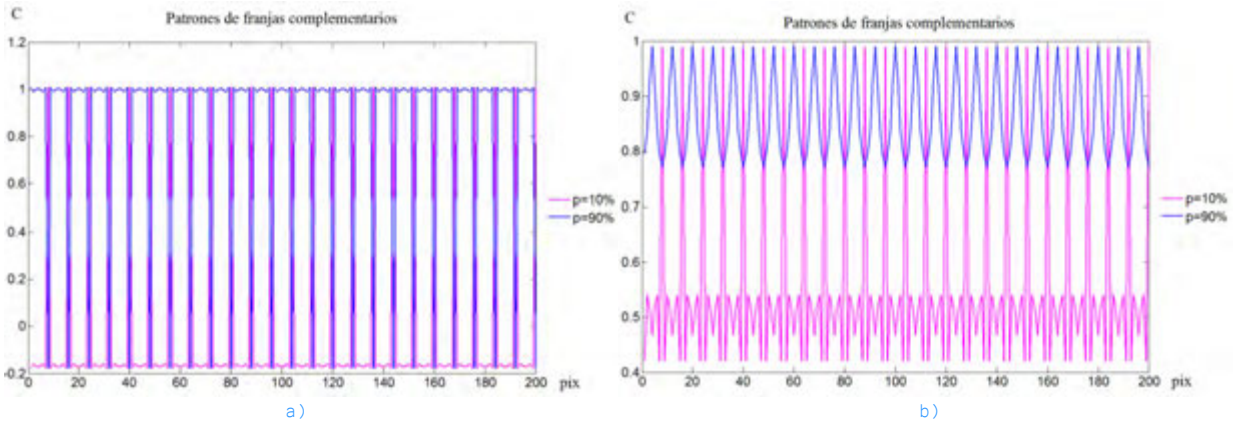


Figura 3-64. Perfiles de franjas con ciclo de trabajo de 10% (violeta) y 90% (azul). a) Perfil cuadrado (perfiles complementarios). b) Perfil gaussiano (perfiles no complementarios).

El error relativo porcentual más bajo corresponde a las franjas gaussianas. Al igual que en los dos análisis previos, los errores resultantes son mayores para el caso 3994 Hz. Entonces se tiene que para franjas rectangulares el mejor caso corresponde a un valor del 50%. En el caso de franjas gaussianas, el error decrece al aumentar el ciclo de trabajo.

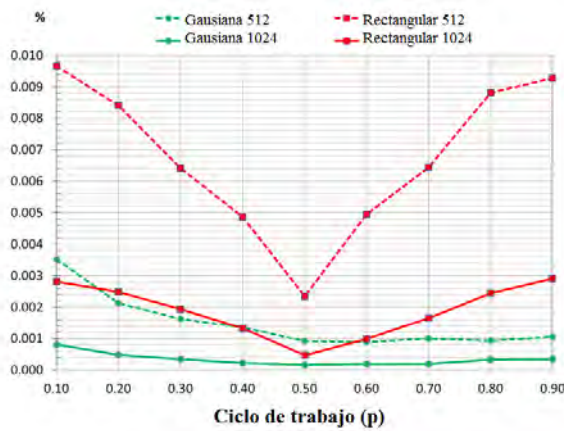


Figura 3-65. Error vs Ciclo de trabajo. Error mínimo porcentual $1.64 \times 10^{-4}\%$, para el caso franjas Gaussianas en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz.

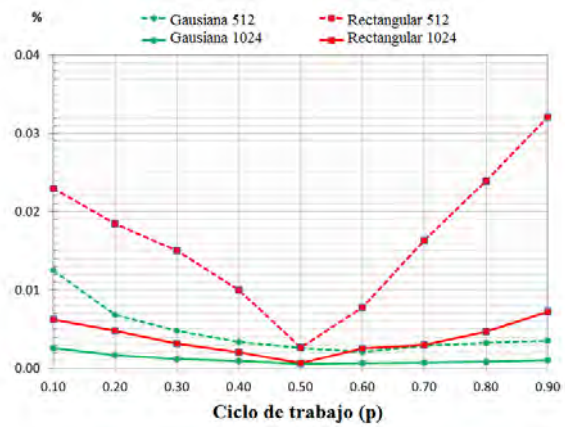


Figura 3-66. Error vs Ciclo de trabajo. Error mínimo porcentual $5.60 \times 10^{-4}\%$, para el caso franjas Gaussianas en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz.

3.6.4. Influencia de la resolución espacial (tamaño de imagen).

Se considera un valor de contraste del 100%, un período de 8 pix y un valor para el ciclo de trabajo de 50%. Los resultados se indican en la Tabla 3-9 y empleando la Figura 3-67 y Figura 3-68 es observable el comportamiento decreciente del error conforme aumenta el número de pixeles de la imagen. Esto se debe a que al aumentar el número de pixeles el muestreo de las señales se incrementa. Adicionalmente, la separación entre lóbulos vecinos aumenta.

Tabla 3-9

Análisis de influencia de la resolución espacial						
Resolución (pix × pix)	errores porcentuales: modo 2326 Hz			errores porcentuales: modo 3994 Hz		
	Senoidal	Gausiano	Rectangular	Senoidal	Gausiano	Rectangular
128 × 128	2.42E-03	8.24E-03	2.00E-02	5.15E-03	1.35E-02	3.56E-02
256 × 256	8.64E-04	2.66E-03	7.53E-03	1.50E-03	5.19E-03	8.69E-03
512 × 512	2.16E-04	6.69E-04	2.35E-03	4.83E-04	2.23E-03	2.75E-03
1024 × 1024	6.53E-05	1.64E-04	4.63E-04	1.23E-04	6.76E-04	6.59E-04
2048 × 2048	1.30E-05	4.81E-05	1.03E-04	1.87E-05	9.42E-05	1.82E-04
4096 × 4096	2.69E-06	9.45E-06	2.93E-05	4.23E-06	2.37E-05	4.48E-05

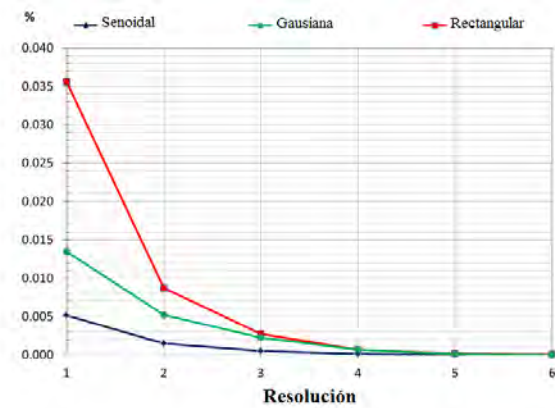
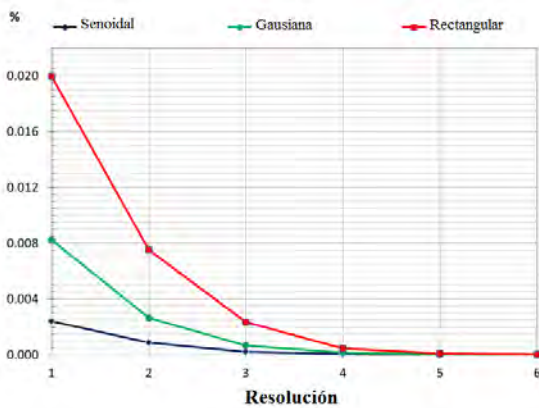


Figura 3-67. Error vs Resolución. Error mínimo porcentual $2.69 \times 10^{-6}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 2326 Hz. Los números corresponden a: 1: 128x128, 2: 256x256, 3: 512x512, 4: 1024x1024, 5: 2048x2048, 6: 4096x4096 pix².

Figura 3-68. Error vs Resolución. Error mínimo porcentual $4.23 \times 10^{-6}\%$, para el caso senoidal en periodo de 8 pix, patrón modal de 3994 Hz. Los números corresponden a: 1: 128x128, 2: 256x256, 3: 512x512, 4: 1024x1024, 5: 2048x2048, 6: 4096x4096 pix².

Entonces el error puede considerarse inversamente proporcional al número total de pixeles de una imagen.

La razón de cambio promedio del error entre dos resoluciones consecutivas corresponde a 3.90, lo cual se muestra mediante la Figura 3-69 y Figura 3-70. Este número corresponde aproximadamente a la razón de cambio del número total de pixeles de resoluciones consecutivas. Es decir que tanto cambia el error de una resolución, comparado con su inmediato inferior.

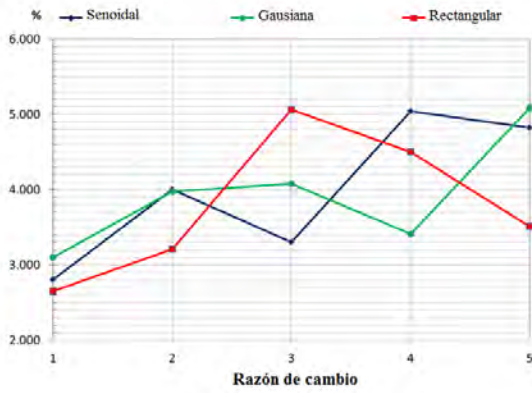


Figura 3-69. Razón de cambio del error vs resolución. Cambio de: 1:128x128 a 256x256, 2:256x256 a 512x512, 3:512x512 a 1024x1024, 4:1024x1024 a 2048x2048, 5:2048x2048 a 4096x4096 pix². T=8, C=100%, p=50%, patrón modal de 2326 Hz.

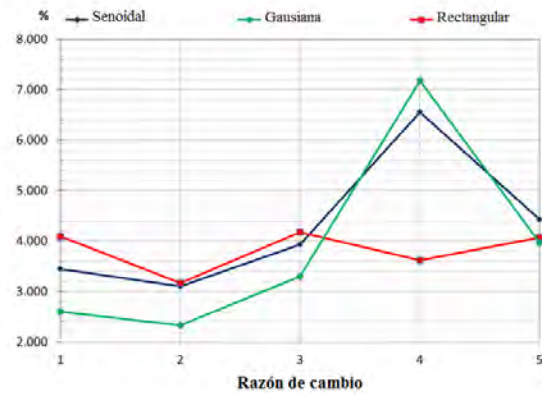


Figura 3-70. Razón de cambio del error vs resolución. Cambio de: 1:128x128 a 256x256, 2:256x256 a 512x512, 3:512x512 a 1024x1024, 4:1024x1024 a 2048x2048, 5:2048x2048 a 4096x4096 pix². T=8, C=100%, p=50%, patrón modal de 3994 Hz.

3.7. Conclusiones.

A continuación se enumeran varios factores que influyen sobre el error en FP.

- a) Número de armónicos para producir las franjas mediante la serie de Fourier, los cuales se relacionan directamente con la velocidad de procesamiento del equipo de cómputo, y por tanto, un bajo número de armónicos se traduce como una función no suave desde el punto de vista matemático. En el caso de franjas rectangulares se utilizaron 5 términos mientras que en franjas gaussianas se usaron 3.
- b) La forma de las franjas. El número de lóbulos en el plano de Fourier y su ancho dependen de las condiciones de continuidad y suavidad de la señal. Ya que el primer lóbulo contiene la información del patrón modal, si este se solapa con otro lóbulo, esto producirá una recuperación de la fase óptica no óptima. Esto aparece en los casos de patrones con franjas gaussianas y rectangulares [6]. En estos dos casos se obtiene el mismo comportamiento (aumento tanto en el grado de discontinuidad como de no-suavidad de las franjas) cuando el ciclo de trabajo toma valores menores que 5% o equivalentemente mayores que el 95%. Lo mismo sucede con la resolución espacial: cuando el número de píxeles es relativamente bajo, las señales se vuelven pixeladas, es decir, adquieren cierto grado de no suavidad, tal como se observó en el análisis de resolución a $128 \times 128 \text{ pix}^2$ con franjas senoidales, gaussianas y rectangulares. El tipo de la forma de las franjas influye sobre el error de FP en el siguiente orden: rectangulares, gaussianas y senoidales.
- c) Complejidad del patrón espacial. Como se describió en la Sección 2.3, FP está limitado por el valor máximo en la pendiente local de la distribución de alturas. Es decir, mientras mayor sea la complejidad de la distribución espacial de desplazamientos, mayor es el ancho de los lóbulos en el plano de Fourier, lo cual también tiende a provocar sobreposición de información. En el caso presente, la estructura espacial del patrón modal de 2326 Hz es menos complejo que el de 3994 Hz. Mientras mayor sea la complejidad de la forma espacial del patrón de intensidad, los valores de las pendientes locales tienden a aumentar y por lo tanto se origina empalme entre lóbulos, lo cual baja la exactitud del método de Fourier.
- d) Periodo. El error es mínimo para periodos que son múltiplo de las dimensiones de la imagen, esto debido a la periodicidad de la transformada de Fourier discreta. La exactitud también decrece para periodos relativamente pequeños y grandes. Para periodos pequeños, el muestreo de la señal se acerca al límite de Nyquist y la señal no se muestrea adecuadamente. Caso contrario, para periodos grandes, existe sobreposición entre el lóbulo primario y el de frecuencias bajas o DC.
- e) Contraste. Para contrastes mayores al 5% y menores que el 95%, el error se considera bajo y relativamente constante. El mejor caso de contraste es el 100%. El comportamiento del error se debe principalmente a que la amplitud del lóbulo primario es del orden de la amplitud del espectro del término de DC y por lo tanto al aplicar

un filtro pasabajas al espectro de frecuencias, el resultado lleva consigo tanto información del lóbulo primario como del término de DC.

- f) Ciclo de trabajo (solo franjas gaussianas y rectangulares). Para franjas rectangulares, el mejor caso se obtiene para un valor del 50%. En el caso de franjas gaussianas, el error decrece al aumentar el ciclo de trabajo. Para ciclos de trabajo relativamente grandes y pequeños, la estructura espacial de la señal también se acerca al límite de Nyquist en las regiones más angostas de la franja.
- g) Resolución espacial. El error puede considerarse inversamente proporcional al número total de píxeles de una imagen.

La combinación óptima es emplear franjas senoidales con $T=8$ pix y $C=100\%$. Luego le sigue usar franjas gaussianas con $T=16$ pix, $C=100\%$ y $p=90\%$. Y por último, usar franjas rectangulares con $T=8$ pix, $C=100\%$ y $p=50\%$. En todos los casos la mejor resolución es a 4096×4096 pix, viéndose estos valores limitados por la capacidad de cómputo del equipo empleado.

La combinación menos adecuada corresponde a la rectangular con periodos no múltiplos de 1024, contraste menor a 5% y ciclo de trabajo de 10% o su complementario 90%. Le siguen las franjas gaussianas con las mismas consideraciones del periodo y contraste, y $p=10\%$.

De estos resultados numéricos, se puede decir que las imágenes FP deseables son aquellas que contienen un número entero de franjas de portadora, que tienen contraste entre 5% y 95%, que el ciclo de trabajo sea de alrededor de 50% y que tenga una resolución espacial (número de píxeles) mayor que 1024×1024 pix². Y por supuesto, tratar de que las franjas registradas por el CCD sean del tipo senoidal.

Referencias

1. F. A. Ramírez Díaz and B. Barrientos García, "Influence of some parameters on the performance of fringe projection," presented at the 22nd General Congress of the International Commission for Optics (ICO) Puebla, Mexico, 15-19 August 2011.
2. B. Barrientos, *Apuntes de clase métodos selectos de metrología óptica*, 2010.
3. K. J. Gåsvik, "Projected Fringes," in *Optical metrology*, (3rd Ed., John Wiley and Sons, Sussex 2003).
4. M. Takeda, Hideki Ina, Seiji Kobayashi "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **72**(156-160 (1982)).
5. Donald J. Bone, H.-A. Bachor, and R. J. Sandeman, "Fringe-pattern analysis using a 2-D Fourier transform," *Appl. Opt.* **25**(10), 1653-1660 (1986).
6. W. J. Chen, H. Yang, X. Y. Su, and S. X. Tan, "Error caused by sampling in Fourier transform profilometry," *Opt. Eng.* **38**(6), 1029-1034 (1999).
7. C. S. Huang, A. W. Leissa, and R. S. Li, "Accurate vibration analysis of thick, cracked rectangular plates," *J. Sound Vib.* **330**(9), 2079-2093 (2011).
8. G. Pedrini, Y. L. Zou, and H. J. Tiziani, "Digital double-pulsed holographic-interferometry for vibration analysis," *J. Modern Opt.* **42**(2), 367-374 (1995).
9. C. Perez-Lopez, F. M. Santoyo, D. a. G. Hernandez, and S. M. Solis, "Digital holography for mechanical vibration measurements in rigid body displacement: elimination of the latter by means of a variable focal length adjustment," *Proc. SPIE* **7098**, 1-6 (2008).
10. W. L. Li, X. F. Zhang, J. T. Du, and Z. G. Liu, "An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports," *J. Sound Vib.* **321**(1-2), 254-269 (2009).
11. G. Pedrini, W. Osten, and M. E. Gusev, "High-speed digital holographic interferometry for vibration measurement," *Appl. Opt.* **45**(15), 3456-3462 (2006).
12. D. Moreno-Hernandez, B. Barrientos-Garcia, H. J. Puga-Soberanes, C. Perez-Lopez, and F. Mendoza-Santoyo, "Low order modeling of a metal plate under vibrations," *Exp. Mech.* **46**(4), 491-502 (2006).

13. B. Barrientos, M. Cywiak, W. K. Lee, and P. Bryanston-Cross, "Measurement of dynamic deformation using a superimposed grating," *Rev. Mex. Fis.* **50**(1), 12-18 (2004).
14. W. H. Duan, C. M. Wang, and C. Y. Wang, "Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges," *J. Sound Vib.* **317**(3-5), 709-715 (2008).
15. C. H. Huang and C. C. Ma, "Vibration of cracked circular plates at resonance frequencies," *J. Sound Vib.* **236**(4), 637-656 (2000).
16. D. V. Hutton, "Basic concepts of the finite element method," in *Fundamentals of finite element analysis*, (1st Ed., Mc Graw Hill, New York 2004).
17. D. Moreno, B. Barrientos, C. Perez-Lopez, and F. M. Santoyo, "Modal vibration analysis of a metal plate by using a laser vibrometer and the POD method," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **7**(6), S356-S363 (2005).
18. S. Mirza, P. Singh, R. Kumar, A. L. Vyas, and C. Shakher, "Measurement of transverse vibrations/visualization of mode shapes in square plate by using digital speckle pattern interferometry and wavelet transform," *Opt. Lasers Eng.* **44**(1), 41-55 (2006).
19. Ansys, *Guide to the ANSYS Documentation*, ANSYS, Editor 2007.
20. A. Committee, "Properties of Wrought Aluminum and Aluminum Alloys," in *Properties and selection: Nonferrous alloys and special-purpose materials*, (10 Ed., ASM International, 1990).
21. Y. F. Xing and B. Liu, "Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates," *Int J. Mech. Sciences* **51**(3), 246-255 (2009).
22. J. H. Wu, A. Q. Liu, and H. L. Chen, "Exact solutions for free-vibration analysis of rectangular plates using Bessel functions," *ASME J. Appl. Mech.* **74**(6), 1247-1251 (2007).
23. B. Manzanares-Martinez, J. Flores, L. Gutierrez, R. A. Mendez-Sanchez, G. Monsivais, A. Morales, and F. Ramos-Mendieta, "Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes," *J. Sound Vib.* **329**(24), 5105-5115 (2010).
24. M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," *Appl. Opt.* **22**(24), 3977 (1983).
25. L. Kinell and M. Sjodahl, "Robustness of reduced temporal phase unwrapping in the measurement of shape," *Appl. Opt.* **40**(14), 2297-2303 (2001).

26. C. P. Brophy, "Effect of intensity error correlation on the computed phase of phase-shifting interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* 7(4), 537-541 (1990).

CAPÍTULO 4

Resultados experimentales

En este capítulo se describen resultados experimentales aplicando la técnica FP. Esto muestra la factibilidad de aplicar FP en la medición de vibraciones mecánicas utilizando un arreglo que no necesita sincronización electrónica entre componentes. Las imágenes registradas incluyen valores cercanos a los recomendados en el capítulo anterior.

4.1. Arreglo experimental de la técnica de FP.

Como se mencionó en el Capítulo 2, FP consiste en comparar dos estados de deformación: con y sin deformación (imagen de referencia e imagen deformada, respectivamente). Mediante el método Fourier se recupera la fase óptica y consecuentemente el desplazamiento producido por vibración [1-3]. Para facilitar el análisis, θ_1 o θ_2 pueden ser considerados como cero, por separado. La Figura 4-1 muestra el arreglo resultante, donde se indican los diferentes componentes: el objeto bajo análisis en la parte inferior de la figura, la cámara CCD con ángulo de inclinación θ con respecto al eje z y la fuente de iluminación, paralela a la vertical.

Para implementar esta técnica en el laboratorio, se coloca una placa rectangular de aluminio 6061-T6, con sus esquinas empotradas sobre una mesa holográfica; se pega una hoja de papel con franjas senoidales; la parte central de la placa se acopla a un martillo oscilador (*shaker*), para excitar diversas frecuencias en la placa, las cuales producen patrones modales. Mediante el uso de una cámara CCD se registran imágenes de referencia y deformada para su procesamiento [4-6]. En la Figura 4-2 se muestra el esquema del arreglo experimental de FP.

Es notable que la cámara se coloque a un ángulo respecto a la vertical, lo que provoca errores de perspectiva. Sin embargo, debido a que la frecuencia de los proyectores comerciales es menor que las frecuencias de resonancia analizadas, éstos no son adecuados para este tipo de análisis. Así, una opción es imprimir la rejilla sobre el objeto. Por lo tanto, la sensibilidad para fuera de plano, en este caso, se logra dando un ángulo a la cámara respecto a la vertical. De hecho, el valor del ángulo de iluminación en este caso no es importante ya que la iluminación es uniforme y sólo sirve para iluminar a la rejilla impresa. De cualquier forma, el ángulo de la cámara respecto a la vertical es equivalente al ángulo del proyector de iluminación estructurada respecto a la vertical. El ángulo de

inclinación θ se refiere por lo tanto al ángulo entre el eje óptico de la cámara CCD y la dirección de la deformación fuera de plano.

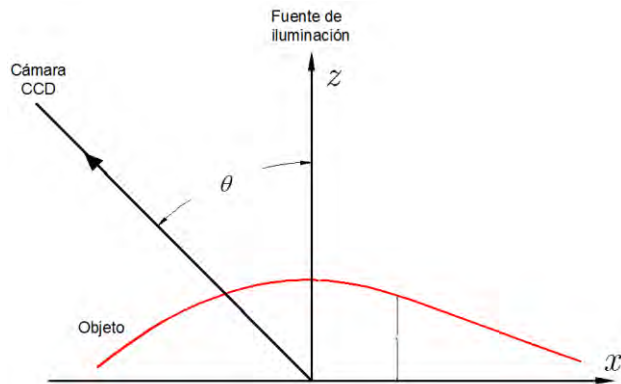


Figura 4-1. Esquema del arreglo FP con ángulo θ .

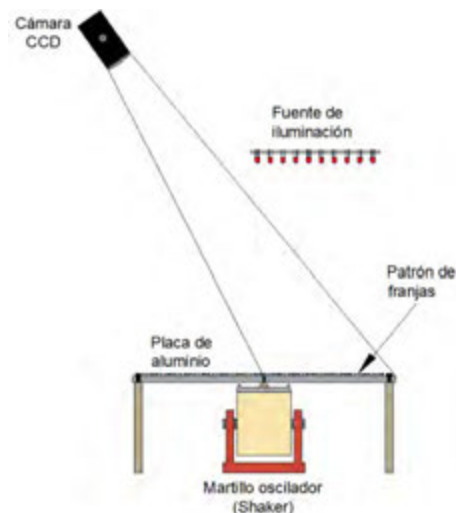


Figura 4-2. Esquema del arreglo experimental FP.

Los componentes empleados en el sistema de FP son:

- Fuente de iluminación a base de LEDs.** Está compuesta por una matriz de **400 LEDs**, que producen luz roja, con potencia total de **16 W**. Esta fuente se emplea para iluminar el patrón de franjas. Cabe mencionar que la fuente de luz puede ser de cualquier tipo de luz visible. Se emplea luz roja porque el sensor del CCD presenta su mayor mayor sensibilidad a este rango de longitudes de onda.
- Cámara CCD.** Es el medio de registro de imágenes. **Es marca IDT, sensor SONY IC285 de escaneo progresivo, tamaño del sensor 2/3", número de pixeles: 1360x1036, 8 bits de niveles de gris, protocolo de comunicación FireWire, tiempo mínimo de exposición de 0.5 ms y lente de distancia focal 45 mm.**
- Patrón de franjas.** Consta de franjas sinusoidales con **periodo de 1 mm y 0.5 mm**, las cuales son impresas en papel bond. Dicho patrón se pega a la placa mediante el uso de cinta de doble cara de 1 cm de grosor. Se asume que el papel bond responde fielmente a las deformaciones de la placa.
- Placa rectangular de aluminio 6061-T6.** Corresponde al objeto bajo análisis con **dimensiones de 35x35 cm² y 8 mm de espesor**. Se le sujeta a una mesa holográfica mediante barras de acero atornilladas en las esquinas. Las propiedades mecánicas del aluminio 6061-T6 son: **módulo de Young $E = 69 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, densidad $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ y relación de Poisson $\nu = 0.33$ [7].**

e) **Martillo oscilador (*shaker*)**. Consta de un martillo electromagnético y un amplificador de potencia. El martillo se usa para inducir resonancia en la placa de aluminio. El principio de funcionamiento del tornillo electromagnético es parecido al de las bocinas. Al pasar una corriente eléctrica a través de una bobina, se genera un campo magnético que a su vez mueve cierta masa. Por su parte, el amplificador incrementa la corriente proveniente de un generador de funciones, hasta valores de unos cuantos amperes. Con el generador de funciones, así como con la ayuda de un osciloscopio, se puede controlar y monitorear la frecuencia y el voltaje de la señal de entrada al amplificador. Las especificaciones del *shaker* son: **martillo de imán permanente, modelo LDS V201 con fuerza sinusoidal pico de 17.8 N, con amplificador de potencia PA25E de la marca Brüel&Kjaer**. El voltaje de suministro al generador de funciones es de **2 V (rms)**. En este desarrollo experimental se emplea un generador de funciones **marca EZ, modelo FG-8002**. Por su parte, el osciloscopio es **marca Tektronix, modelo TDS 220**.

El arreglo experimental se describe en la **Figura 4-3**, donde 1) fuente de iluminación, 2) cámara CCD, 3) placa de aluminio y plantilla de franjas, 4) *shaker*, 5) amplificador de señal de excitación, 6) generador de funciones y 7) osciloscopio. La distancia fuente-objeto corresponde a 43 cm y cámara-objeto a 120 cm; el ángulo de registro de la cámara es de 35° con respecto a la vertical, donde se asume que la vertical es la dirección de deformación de la placa.

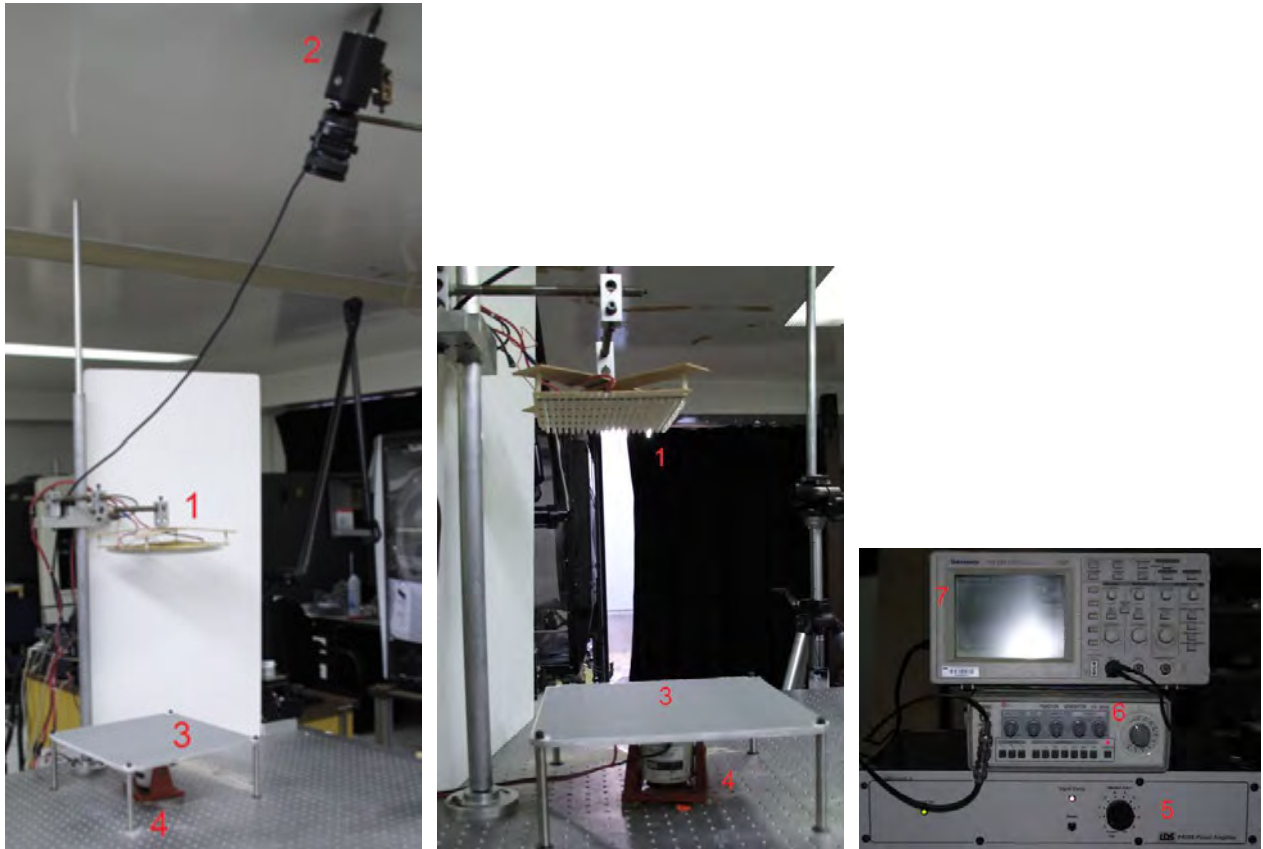


Figura 4-3. Arreglo experimental del sistema FP. 1 fuente de iluminación, 2 cámara CCD, 3 placa rectangular de aluminio y en parte superior patrón de franjas, 4 *Shaker*, 5 amplificador de potencia, 6 generador de funciones y 7 osciloscopio.

4.2. Patrones modales experimentales.

Mediante el generador de funciones se realiza un barrido de frecuencias, desde 50 Hz hasta 5000 Hz. Se comienza en 50 Hz ya que a frecuencias inferiores el control de amplificación se protege desconectándose del sistema. Y a frecuencias mayores de 5000 Hz, no se observan desplazamientos que formen patrones modales, esto debido a que los desplazamientos producidos son muy pequeños.

Una forma de revelar los patrones modales es esparciendo arena fina sobre la placa [8]. Los patrones se forman gracias a que la arena se desplaza hacia las zonas que tienen desplazamiento nulo, es decir hacia los nodos. Los primeros modos de resonancia se muestran en la Figura 4-4. Como resultado de este barrido en frecuencia, se detectan desplazamientos modales a las frecuencias: 152 Hz, 772 Hz, 2222 Hz y 4217 Hz. Estas fotografías se toman utilizando una cámara Sigma SD15 con un sensor de imagen Foveon X3, con tamaño de sensor $20.7 \times 13.8 \text{ mm}^2$ y resolución espacial de $1760 \times 2640 \text{ pix}^2$.

Estos resultados difieren en cierto grado con los obtenidos en la Sección 3.4.1.3 mediante FEM, tal como lo señala la Tabla 4-1. Estas diferencias se deben a las aproximaciones

que se toman en el modelo numérico de elemento finito: Las condiciones de carga (el contacto entre el *shaker* y la placa es mediante un tornillo cuya superficie de contacto con la placa corresponde solamente a la superficie de contacto superior de la placa, es decir, la superficie de contacto con el cuerpo de la placa se descarta), las condiciones de frontera (las superficies de contacto entre los tornillos de sujeción y la placa se asume que tienen nulo desplazamiento) y la estructura del mallado (es importante seleccionar el tipo de elemento y el número de elementos).

Para este análisis se supone que el papel que contiene la rejilla impresa y que se sobrepone sobre la placa sigue fielmente los desplazamientos de la placa. Debido a que se requería el uso de diferentes rejillas, se decidió a no imprimir directamente las franjas sobre la placa. Cabe mencionar que un análisis riguroso de los desplazamientos del papel pegado a la placa no ha sido aún realizado.

Tabla 4-1

Frecuencias de resonancia	
FEM	Experimental
210 Hz	152 Hz
777 Hz	772 Hz
2326 Hz	2222 Hz
3994 Hz	4217 Hz

Con respecto al patrón modal de 152 Hz, la arena se mueve hacia fuera de la placa y por lo tanto no forma visualmente modo alguno.

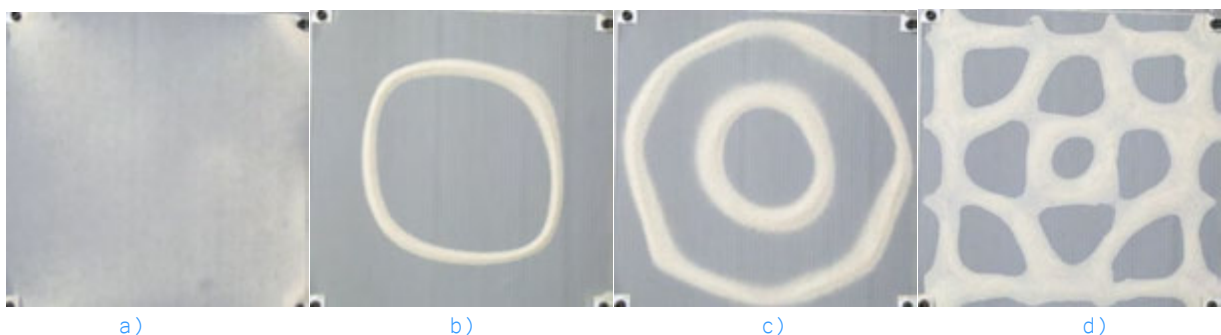


Figura 4-4. Patrones modales; a) 152 Hz; b) 772 Hz; c) 2222 Hz; d) 4217 Hz.

4.3. Medición de patrones modales.

En esta sección se muestran los resultados de deformación producidos por las frecuencias de resonancia a 152 Hz y 772 Hz. Modos a frecuencias mayores no fueron analizados debido a lo corto de los tiempos de exposición que implicaban. Tiempos cortos de exposición a su vez implican el uso de fuentes de iluminación con una alta potencia, de las cuales no se disponía.

Se usaron patrones de franjas senoidales con periodos de 1 mm y 0.5 mm pegados a la placa. Ya que la aplicación de carga a la placa es simétrica, sólo se analiza la cuarta parte de ésta, siendo seleccionada la esquina inferior derecha con dimensiones de $18.6 \times 19.4 \text{ cm}^2$ (ver Figura 4-5).

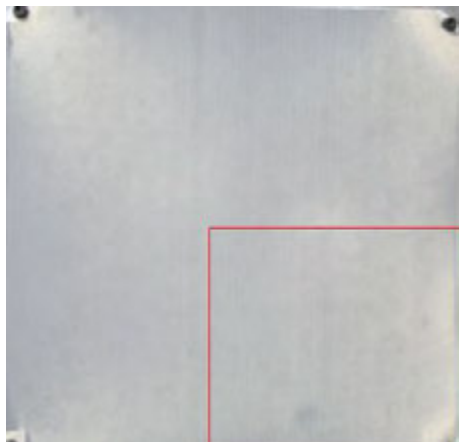


Figura 4-5. Zona de análisis de la placa.

4.3.1. Periodo de 1 mm.

Este valor de periodo corresponde a la condición de 8 pix por franja.

4.3.1.1. Patrón modal de 152 Hz.

Se registran imágenes mediante la cámara IDT, con tiempo de exposición de 10 ms y formato de 8 bits. Mediante una tarjeta de salida de datos se activa a la fuente de iluminación; se envían varios pulsos de luz mientras la cámara graba imágenes en el modo automático, de tal forma que a cada una de las imágenes le corresponda un solo pulso de luz. Debido a que no existe sincronización de la cámara y la fuente de iluminación (ni con el martillo electromagnético), la fase del ciclo de deformación de la placa que captura la cámara es aleatoria. Entonces, del grupo de imágenes registradas se seleccionan a 5 que permitan reconstruir en forma completa el ciclo de deformación para cierta frecuencia de resonancia. La Figura 4-6 muestra imágenes de referencia y deformada, para una frecuencia de resonancia de 152 Hz, a) y b), respectivamente. También con el objetivo de eliminar zonas espurias que no contienen información, se recortan las imágenes en zonas que no contienen señal portadora o que presentan baja resolución espacial, quedando imágenes con un tamaño de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$ ($18.6 \times 14.8 \text{ cm}^2$).

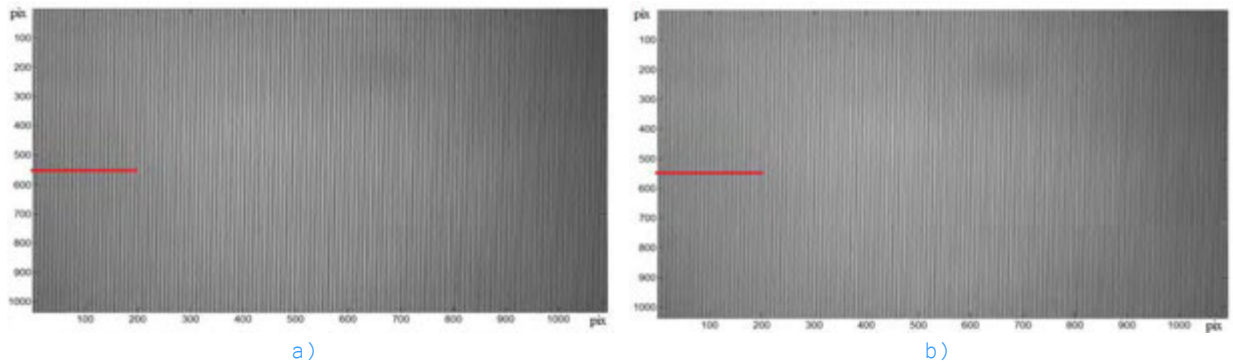


Figura 4-6. Fotografías de señal portadora senoidal con $T=1$ mm. a) Señal portadora sin modulación de fase (referencia). b) Señal portadora con modulación de fase (deformada). Fotografías de 1092×1036 pix^2 . Patrón modal 152 Hz.

La Figura 4-7a) muestra el desfase entre las imágenes de referencia (en violeta) y deformada (en azul) para 152 Hz; en b) se observa su resta, donde se notan zonas claras (mayor intensidad) y oscuras (menor intensidad) producidas por el cambio de posición de las franjas en la imagen.

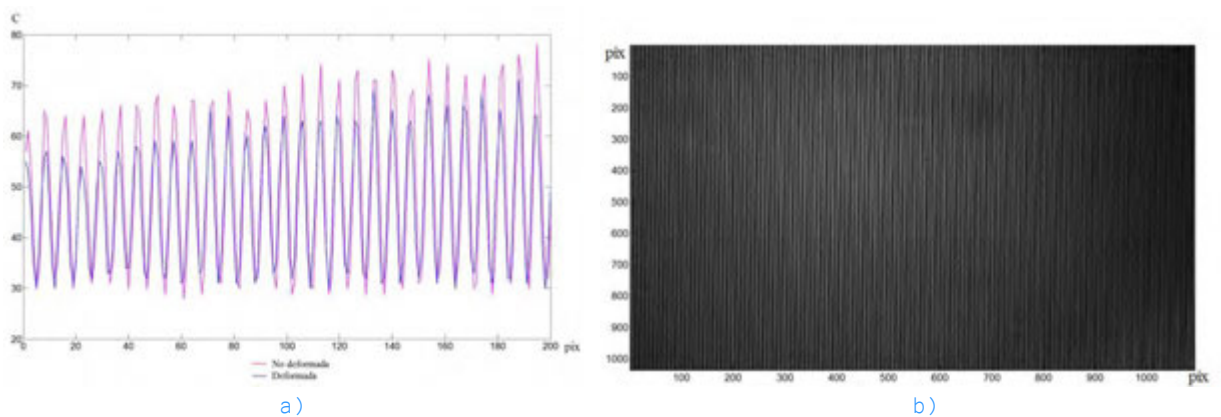


Figura 4-7. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 4-6. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1092×1036 pix^2 .

En la Figura 4-8 se observa en a) la transformada de Fourier de la imagen deformada, que visualmente se parece a la asociada a la imagen de referencia. En b) se muestra el filtro pasabanda aplicado, con dimensiones de 94×44 pix^2 . En c) se muestra un corte transversal de b).

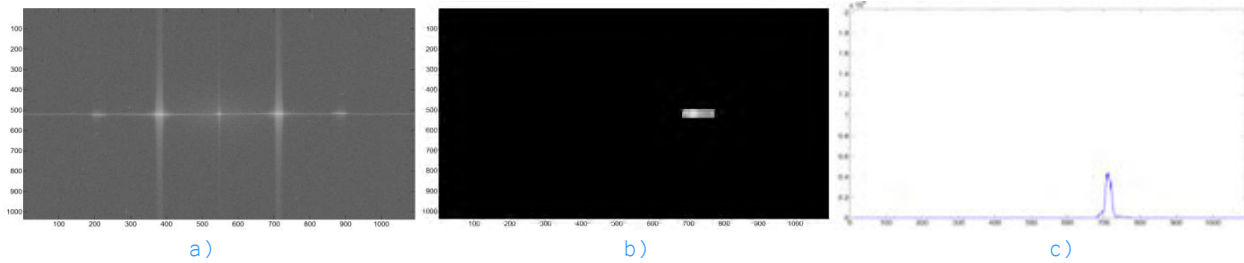


Figura 4-8. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen 1092×1036 pix².

Al aplicar la transformada inversa de Fourier al resultado anterior, se obtiene el mapa de desplazamiento mostrado en la Figura 4-9a). El mapa en b) es otro ejemplo de mapa de deformación, pero en este caso es negativo. En los mapas de deformación (desplazamiento) se observan algunas frecuencias residuales y datos inconsistentes en las orillas (recuadros en color rojo).

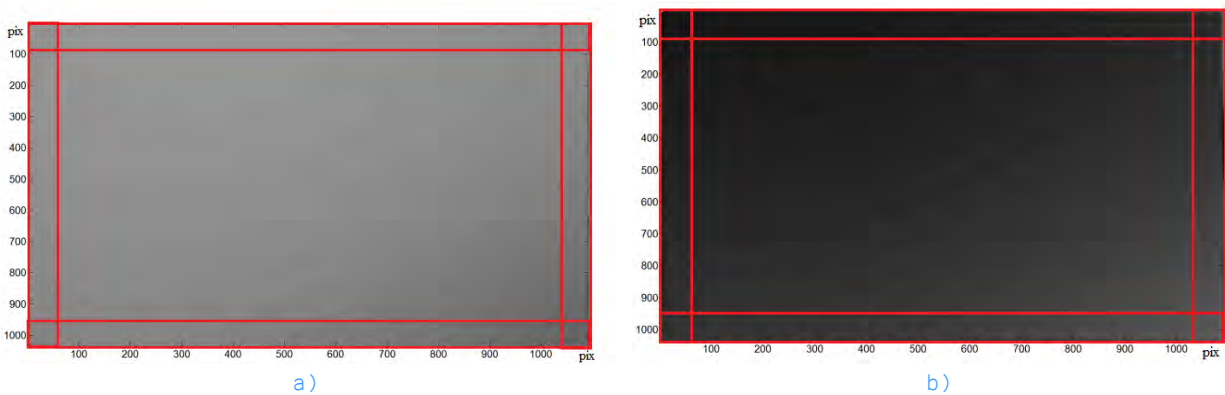


Figura 4-9. Fase óptica recuperada. a) Desplazamiento en dirección positiva (arriba). b) Desplazamiento en dirección negativa (abajo). Imágenes 1092×1036 pix². Los recuadros rojos corresponden a zonas que se descartan por contener errores originados por el método de Fourier: esencialmente aquellos originados por la falta de periodicidad de la estructura espacial bajo análisis.

Por lo tanto, se realiza el recorte en los extremos de la imagen, eliminando zonas con ruido producidas por la aplicación de la transformada rápida de Fourier (FFT) y con esto se revela una mejor distribución de los mapas de la fase óptica, los cuales se ilustran en la Figura 4-10.

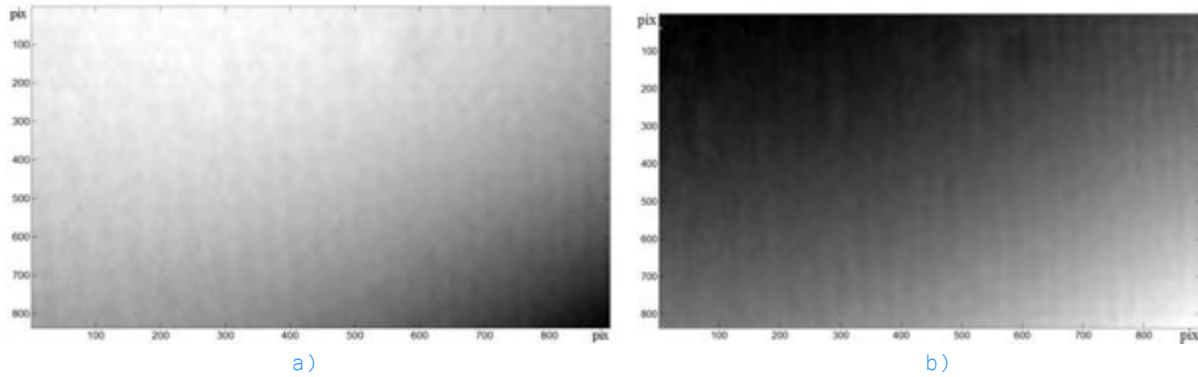


Figura 4-10. Fase óptica recuperada corregida. a) En dirección positiva (arriba). b) En dirección negativa (abajo). Imágenes de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$).

Luego, a los mapas de fase mejorados se les aplica un ajuste polinomial de segundo grado, renglón por renglón, si se trata del primer modo a 152 Hz o de tercer grado si es el segundo modo a 772 Hz:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{Ecuación 4-1}$$

donde $a_0, a_1, a_2,$ y a_3 son los coeficientes del polinomio. La selección del tipo de polinomio tiene que ver con la forma esperada del patrón resultante. Para el modo de 152 Hz se espera una distribución de desplazamientos tipo parabólica y para el de 772 Hz una distribución un poco más complicada, pero que puede modelarse con un polinomio de tercer grado.

En la Figura 4-11a) se presentan los cortes de la fase óptica sin (línea quebrada) y con ajuste polinomial (línea continua), para los cortes de $50, M/4, M/2, 3M/4, M-50 \text{ pix}$, con $M = 837 \text{ pix}$ (ver Tabla 4-2). El valor máximo de la fase en este caso corresponde a 1.005 rad.

Tabla 4-2

Línea de corte (pix)	Color
50	Magenta
M/4	Verde
M/2	Negro
3M/4	Rojo
M-50	Azul

Finalmente, el mapa de desplazamientos en altura se obtiene mediante la expresión

$$\Delta z(x) = \frac{\Delta\phi T \tan\theta}{2\pi} \left(1 + \frac{x \sin\theta}{l} \right)^2,$$

Ecuación 4-2

donde Δz es el desplazamiento fuera de plano, T corresponde al periodo proyectado, θ al ángulo de registro de la cámara, l es la distancia lente-objeto y x es la posición de interés. En la Ecuación 4-2 se incluye la compensación por divergencia del haz, la cual se analizó en la Sección 2.5 del Capítulo 2.

En la Figura 4-11b) se muestran los cortes transversales (50, $M/4$, $M/2$, $3M/5$, $M-50$ pix definidos en la Tabla 4-2) del mapa de desplazamientos recuperados.

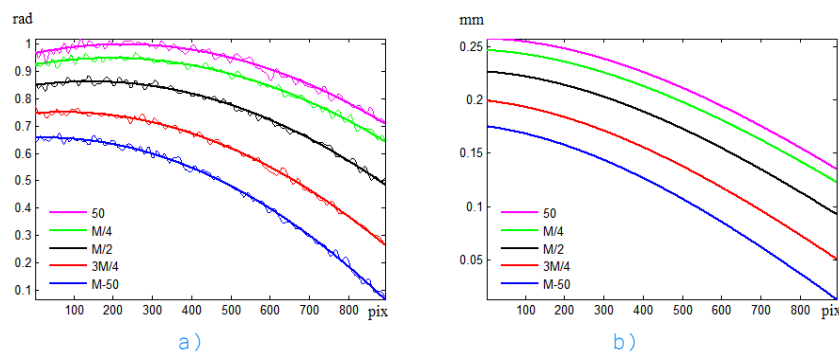


Figura 4-11. Patrón modal de 152 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 2. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-10a. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$.

La Figura 4-12 corresponde al mapa de desplazamientos, donde el color rojo representa zonas de desplazamientos relativamente grandes, el azul, desplazamientos relativamente pequeños, y el blanco, valores de desplazamiento nulo (zona donde se empotra la placa a la mesa). El desplazamiento máximo es de 0.26 mm. Este resultado concuerda visualmente con aquél obtenido por simulación numérica con FEM en el Capítulo 3 [9]. Cabe mencionar que los resultados obtenidos en este capítulo no pueden ser comparados a los numéricamente obtenidos con FEM, ya que los instantes de fase espacial experimentales no corresponden a los simulados con FEM.

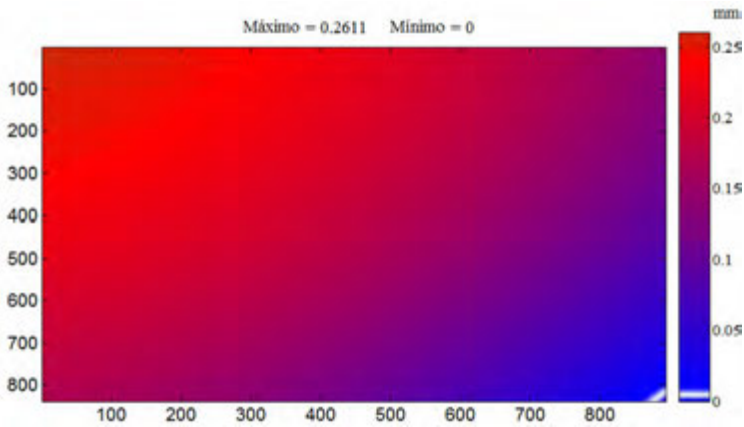


Figura 4-12. Mapa de desplazamientos. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$. Patrón modal 152 Hz. Desplazamiento máximo 0.26 mm. Área de observación $15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$.

4.3.1.2. Patrón modal de 772 Hz.

En esta sección se presentan los mapas de desplazamiento para una frecuencia de excitación de 772 Hz. La Figura 4-13a) muestra un corte seccional de las imágenes con y sin deformación. La resta de estas imágenes se incluye en la Figura 4-13b). Al comparar esta figura con la Figura 4-7 se nota la existencia de una distribución espacial más compleja.

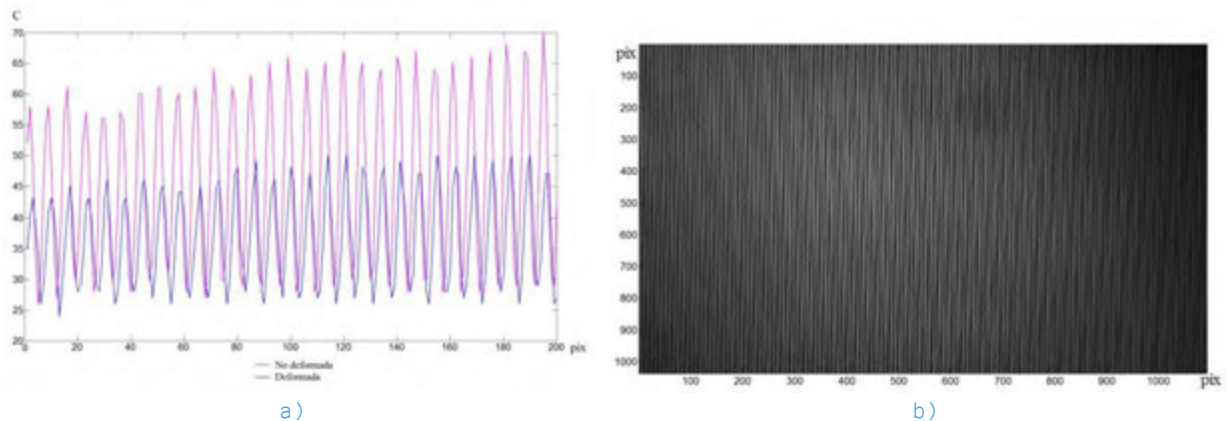


Figura 4-13. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo equivalente de la Figura 4-6. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$.

Al aplicar el método de Fourier se obtiene la transformada de Fourier de los patrones de intensidad, lo cual se ilustra en la Figura 4-14.

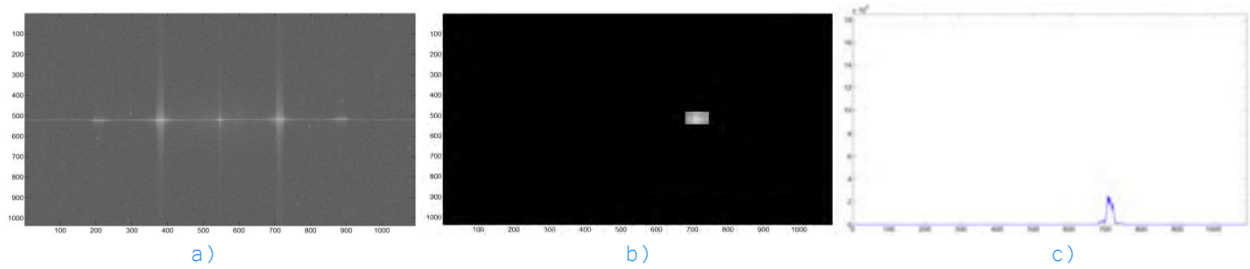


Figura 4-14. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen 1092×1036 pix².

Si se comparan los cortes de los lóbulos de 152 Hz y 772 Hz, los cuales se muestran en la Figura 4-15, se observa que el ancho del primero es ligeramente mayor que el del segundo, lo cual es producido por la diferencia en la complejidad de la estructura espacial de las distribuciones de desplazamiento.

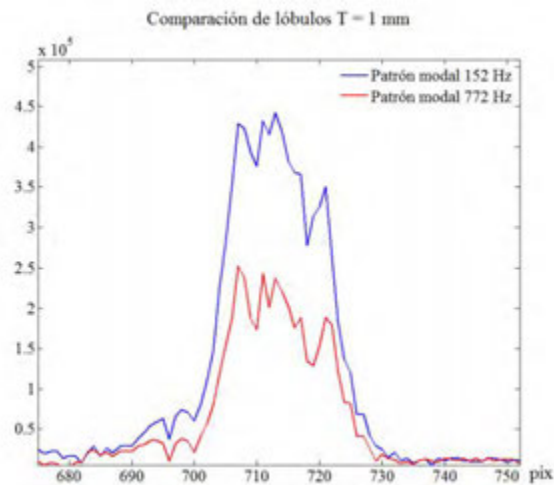


Figura 4-15. Lóbulos filtrados amplificados de la transformada de Fourier del patrón modal de 152 Hz y 772 Hz con periodo de 1 mm. Estos se extraen del intervalo de 675 pix hasta 752 pix de la Figura 4-8 y Figura 4-14.

La Figura 4-16 muestra a) la fase óptica recuperada y b) su versión mejorada, como se describió en la Sección 4.3.1.1.

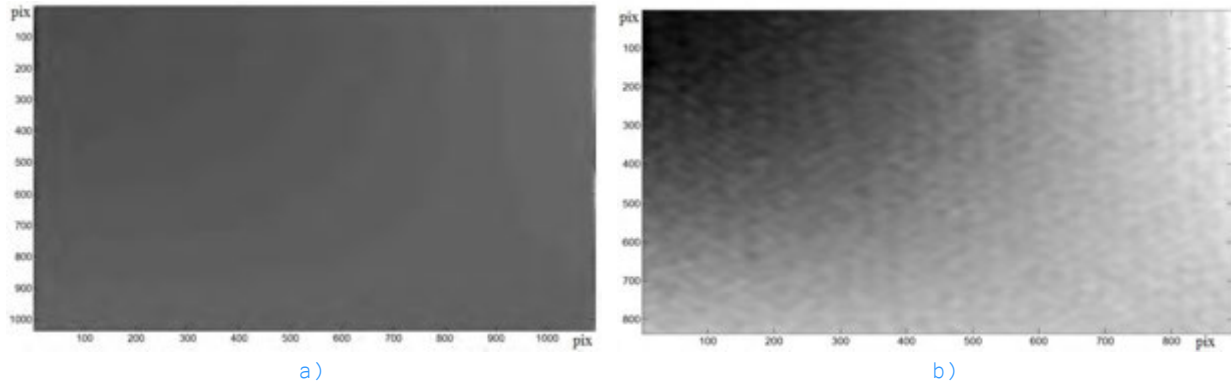


Figura 4-16. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$).

Finalmente, en la Figura 4-17a) se muestra la fase óptica recuperada con y sin ajuste polinomial (de tercer grado en este caso). El mínimo corresponde a -0.48554 rad y el máximo a 0.1274 rad . En la parte b) se incluye cortes de desplazamiento correspondientes al mapa de desplazamiento de acuerdo al ya presentado, el cual incluye corrección por divergencia de haz. En ambas figuras se aprecia un punto de intersección de las líneas. Este punto representa un punto nodal, es decir, un punto donde el desplazamiento es nulo.

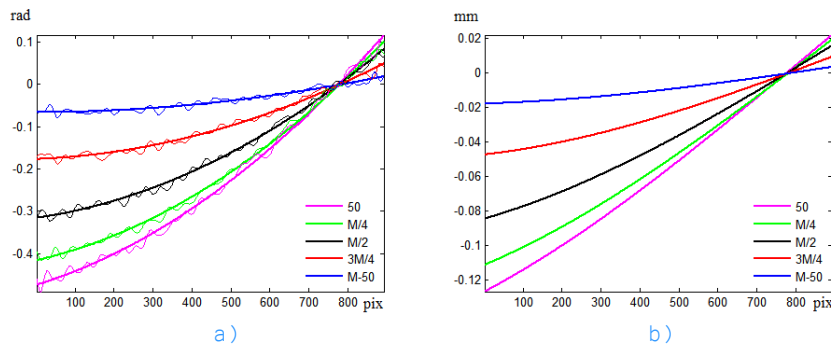


Figura 4-17. Patrón modal de 772 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-16b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$.

En la **Figura 4-18 se muestra el mapa de desplazamiento**, donde el mínimo de desplazamiento es de -0.129 mm y el máximo de $24.31 \mu\text{m}$. El color blanco del mapa representa la zona nodal del modo. A partir de este resultado, se aprecia que el mapa representa adecuadamente al obtenido numéricamente. En este mapa, a diferencia del obtenido en la anterior sección, la región de empotramiento de la placa corresponde a la esquina inferior derecha de la imagen.

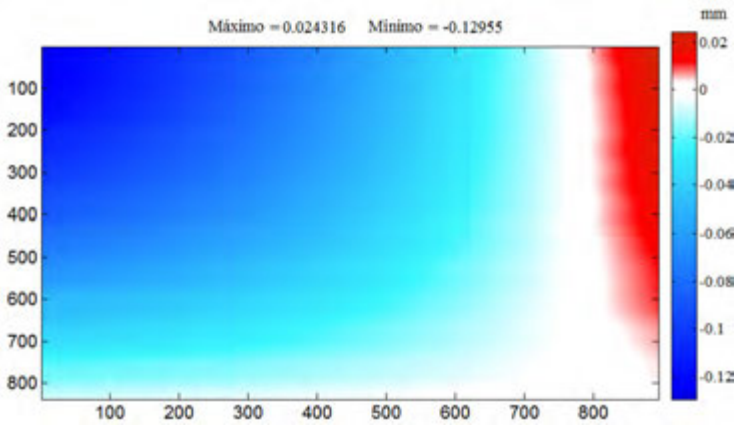


Figura 4-18. Mapa de desplazamientos. Imagen de 893×837 pix². Patrón modal 772 Hz. Mínimo desplazamiento es -0.129 mm y el máximo de 24.31 μ m. Área de observación 15.03×12.10 cm².

4.3.2. Periodo de 0.5 mm.

En esta sección se realiza un análisis semejante al de la Sección 4.3.1, pero usando un periodo de 0.5 mm para la rejilla impresa. Este valor de periodo representa al valor límite práctico de resolución espacial del arreglo y corresponde a la condición de 4 pix por franja.

4.3.2.1. Patrón modal de 152 Hz.

En la Figura 4-19 se muestran los patrones de franjas de referencia y deformado, respectivamente.

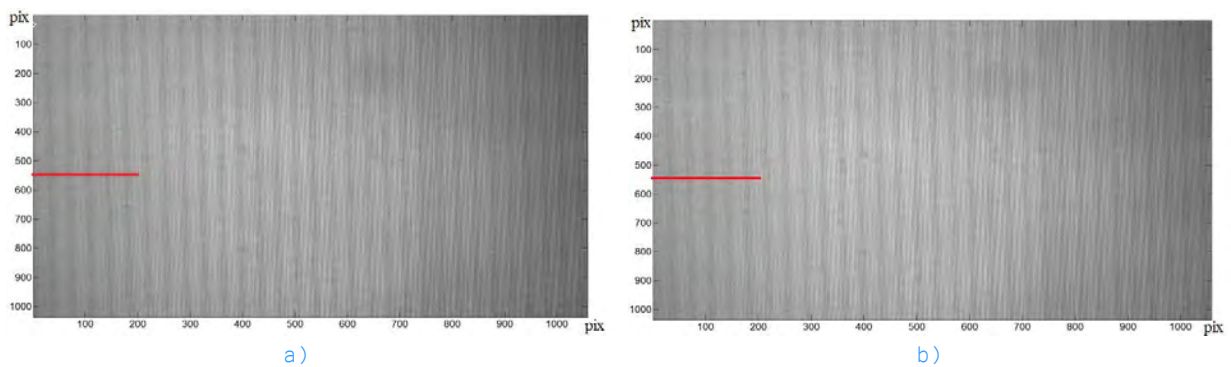


Figura 4-19. Fotografías de señal portadora senoidal con $T=0.5$ mm. a) Señal portadora sin modulación de fase (referencia). b) Señal portadora con modulación de fase (deformada). Fotografías de 1092×1036 pix². Patrón modal 152 Hz.

En los cortes de la Figura 4-20 se aprecia un mayor grado de desfase en comparación con el caso de periodo de 1 mm, debido a la disminución del periodo. En la parte b) se

incluye la sustracción de los patrones de franjas, en la cual no se visualiza adecuadamente la forma del modo, por la presencia de franjas de moiré.

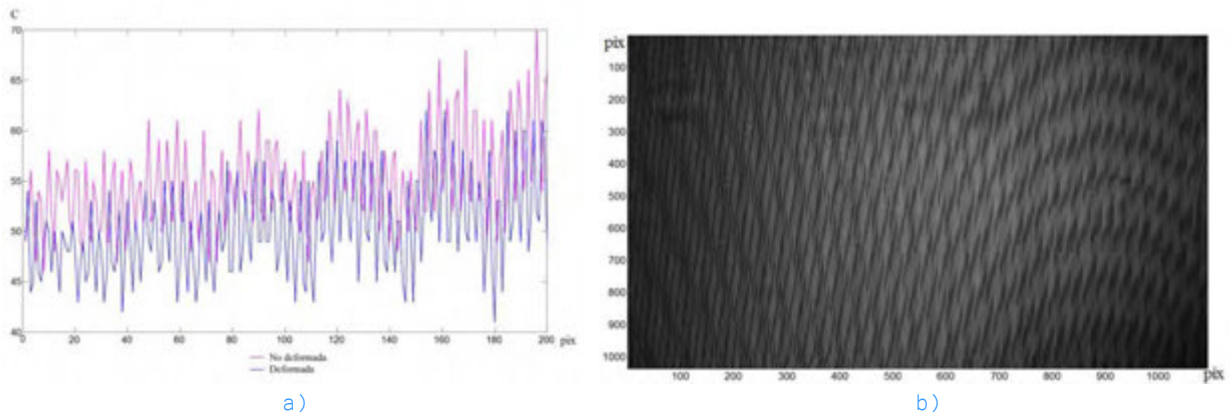


Figura 4-20. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo de la Figura 4-19. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1092×1036 pix².

La Figura 4-21 ilustra resultados de diferentes etapas del método de Fourier. Se observa que el ancho de los lóbulos es ligeramente mayor que en el caso de 1 mm de periodo.

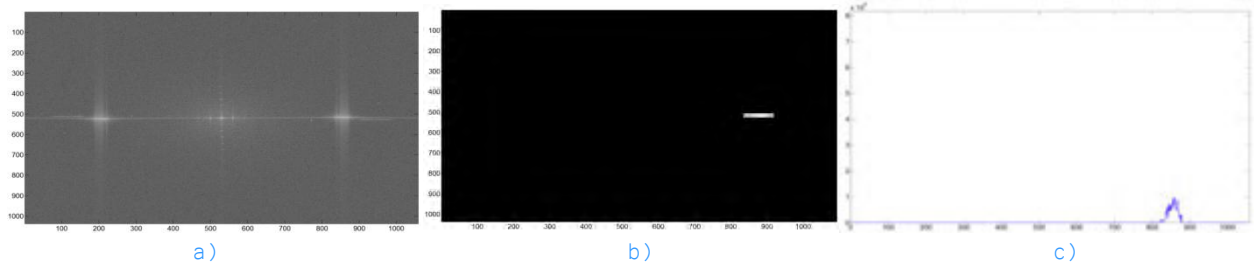


Figura 4-21. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen 1092×1036 pix².

En la Figura 4-22 se muestra la fase óptica recuperada, antes y después del proceso de mejoramiento.

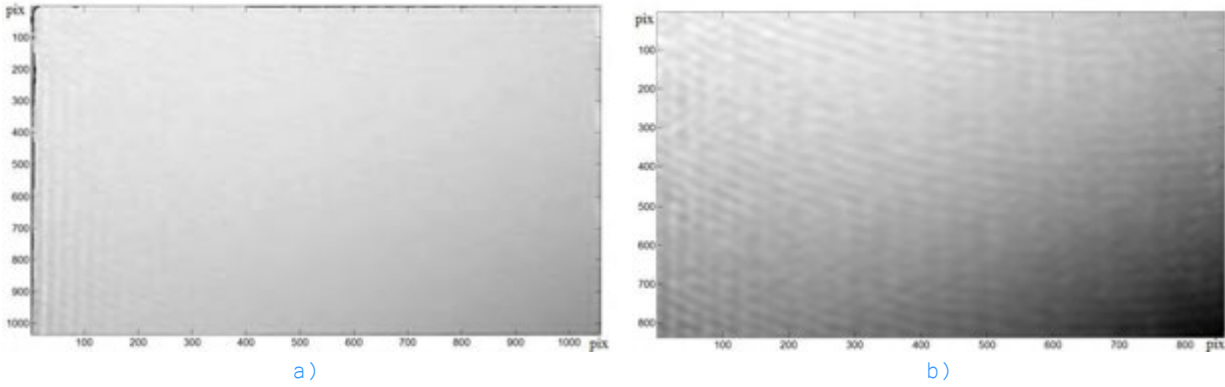


Figura 4-22. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$).

Los cortes transversales de la fase óptica recuperada corregida, así como los desplazamientos resultantes de la excitación dinámica se muestran en la Figura 4-23.

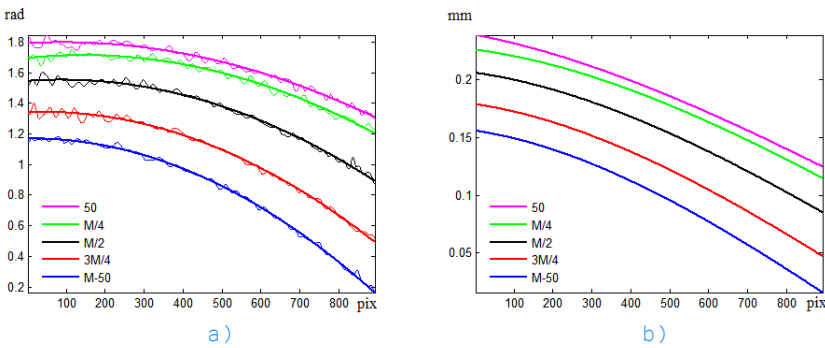


Figura 4-23. Patrón modal de 152 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-22b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$.

Finalmente, el mapa de desplazamientos se indica en la Figura 4-24. El desplazamiento máximo es de 0.25 mm.

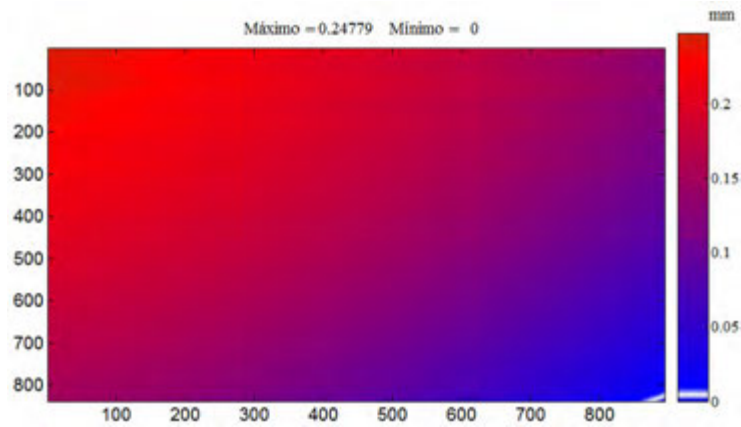


Figura 4-24. Mapa de desplazamientos. Imagen de 893×837 pix^2 . Patrón modal 152 Hz. Desplazamiento máximo 0.25 mm.

Área de observación 15.03×12.10 cm^2 .

4.3.2.2. Patrón modal de 772 Hz.

En este caso los patrones de franjas de referencia y deformado son visualmente equivalentes a la Figura 4-19, respectivamente, de la Sección 4.3.2.1.

En la Figura 4-25a) se muestran cortes transversales de los patrones de intensidad (referencia y deformado); en este se observan diferencia amplias en la modulación y el contraste comparados con el caso de periodo de 1 mm. También se observa en b) la resta de imágenes.

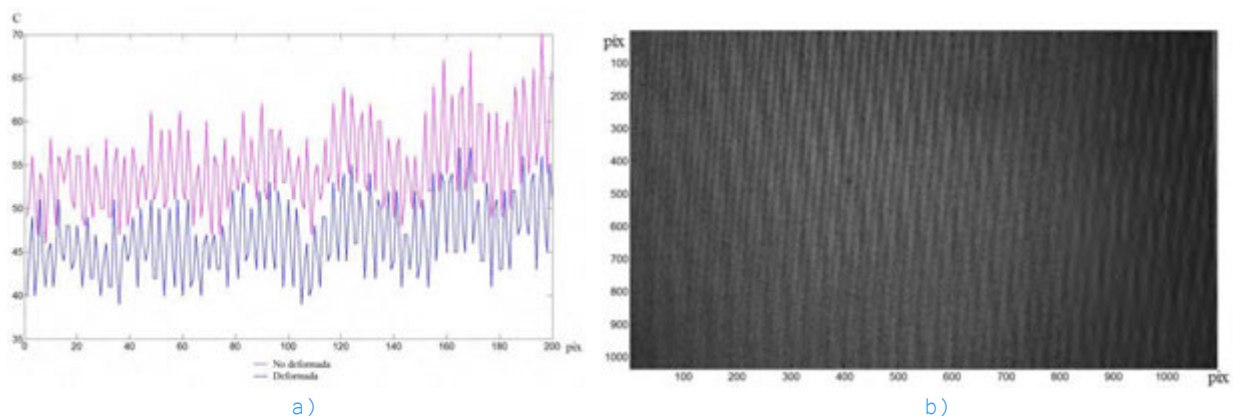


Figura 4-25. a) Franjas sin deformación (magenta) y con deformación (azul). Se extrae la línea central de la región señalada en rojo equivalente de la Figura 4-19. Corte transversal de 200 pix a lo largo de la línea número 546. b) Resta de patrones de franjas, imagen de 1092×1036 pix^2 .

La Figura 4-26 muestra la transformada de Fourier de la señal deformada, filtro empleado y el corte a lo largo de la parte central del filtro.

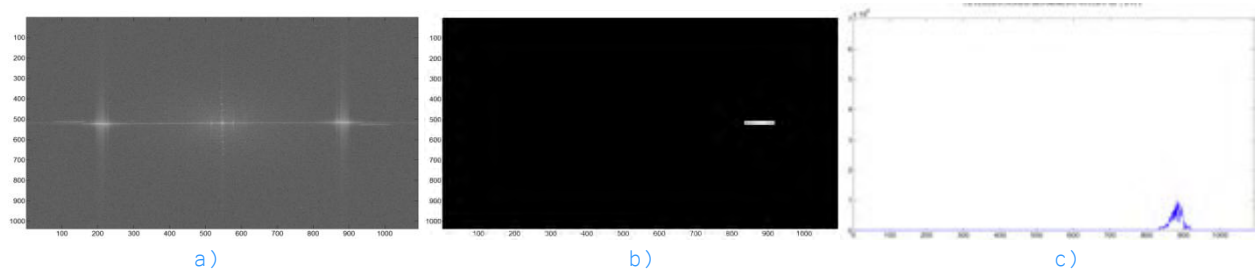


Figura 4-26. a) Transformada de Fourier de imagen deformada; b) Filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada; c) Corte de filtro aplicado a transformada de Fourier de imagen deformada. Corte transversal de 1092 pix a lo largo de la línea número 518. Imagen 1092×1036 pix².

Comparando los cortes de los lóbulos de 152 Hz y 772 Hz, los cuales se ilustran en la Figura 4-27 se observa un comportamiento equivalente a lo mencionado en la Sección 4.3.1.

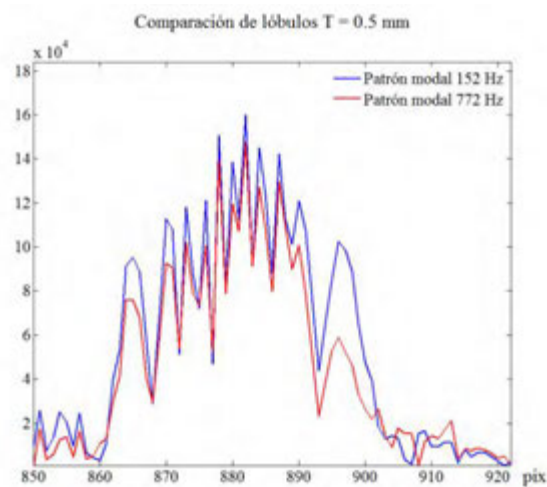


Figura 4-27. Traslapo de los lóbulos filtrados amplificados de la transformada de Fourier del patrón modal de 152 Hz y 772 Hz con periodo de 0.5 mm. Estos se extraen del intervalo de 850 pix hasta 922 pix de la Figura 4-21 y Figura 4-26.

La Figura 4-28a) muestra la fase óptica recuperada, donde se indican con naranja las regiones que son recortadas, y entonces se obtiene el resultado mostrado en b).

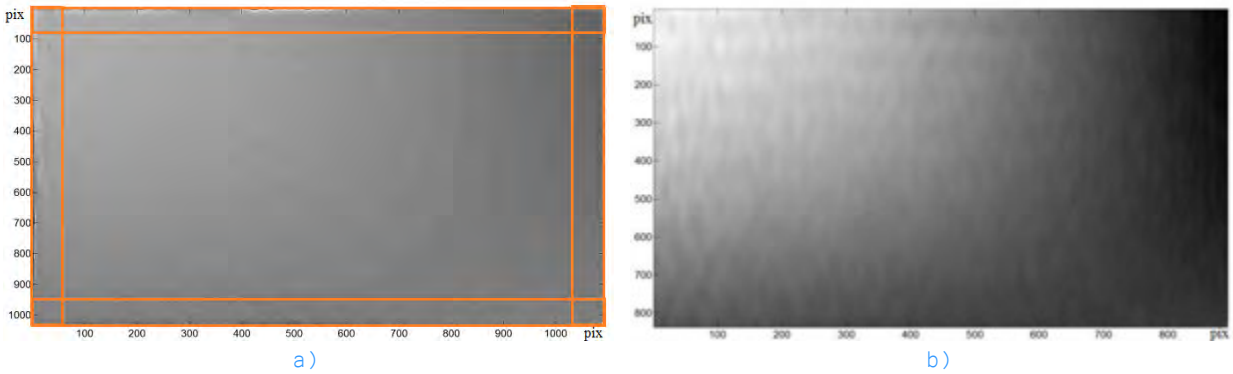


Figura 4-28. a) Fase óptica recuperada. Imagen de $1092 \times 1036 \text{ pix}^2$. b) Fase óptica recuperada corregida. Imagen de $893 \times 837 \text{ pix}^2$ ($15.03 \times 12.10 \text{ cm}^2$).

A su vez, la **Figura 4-29** muestra los cortes de fase recuperada corregida con ajuste a polinomio de tercer grado en el inciso a) y en el inciso b) los desplazamientos resultantes. El valor de máximo de la fase óptica es 1.2095 rad y el menor es -0.36429 rad . Es notable el punto nodal en ambos gráficos.

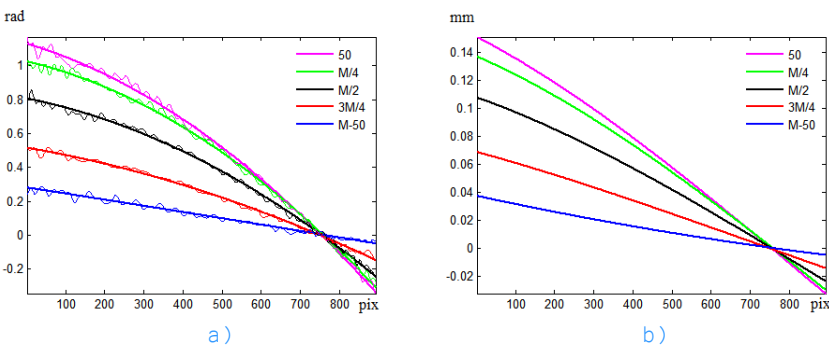


Figura 4-29. Patrón modal de 772 Hz. a) Fase óptica recuperada, línea quebrada. Línea continua fase óptica recuperada con ajuste a curva de grado 3. b) Desplazamientos producidos por excitación dinámica. Se extraen las líneas de la Figura 4-28b. Cortes transversales de 893 pix para $M=837$.

La **Figura 4-30** presenta el mapa de deformación resultante, donde el máximo desplazamiento positivo corresponde a 0.16 mm y el negativo a $34 \mu\text{m}$.

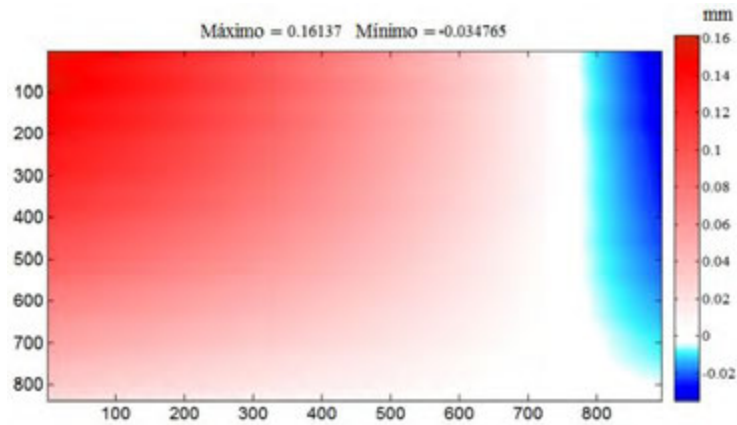


Figura 4-30. Mapa de desplazamientos. Imagen de 893×837 pix². Patrón modal 772 Hz. Máximo desplazamiento positivo corresponde a 0.16 mm y el negativo a $34 \mu\text{m}$. Área de observación 15.03×12.10 cm².

4.4. Reconstrucción del ciclo de deformación con franjas de periodo de 1 mm.

En esta sección se efectúa la reconstrucción del ciclo de deformación para 152 Hz y 772 Hz. Para ello, del primer modo de resonancia se seleccionaron 5 estados de fase representativos y para el segundo, sólo 2.

4.4.1. Patrón modal de 152 Hz.

4.4.1.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.

En esta sección se muestra la reconstrucción del ciclo de deformación en cinco diferentes instantes de fase óptica. De cada instante de fase se obtiene los cortes transversales en diferentes líneas del mapa de deformación ($50, M/4, M/2, 3M/4, M-50$ pix, para $M=837$ pix); se emplea para su interpretación lo ya definido de la [Tabla 4-2](#).

La [Figura 4-31](#) muestra cinco instantes de fase, de acuerdo a su evolución durante un ciclo completo, producido por la resonancia partiendo del máximo positivo al mínimo negativo, donde los valores límites del desplazamiento son: a) 0.2611 mm; b) 0.20978 mm; c) 0.07743 mm; d) -0.25812 mm; e) -0.35007 mm.

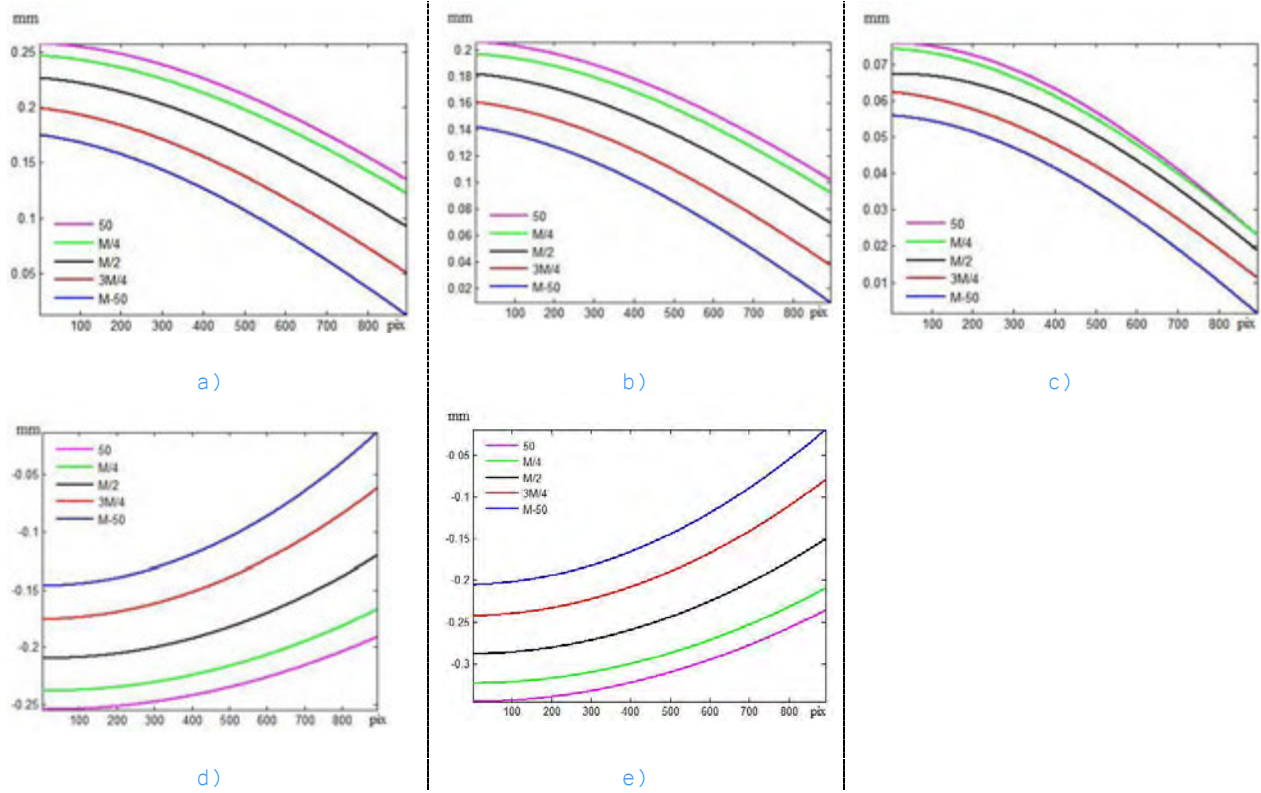
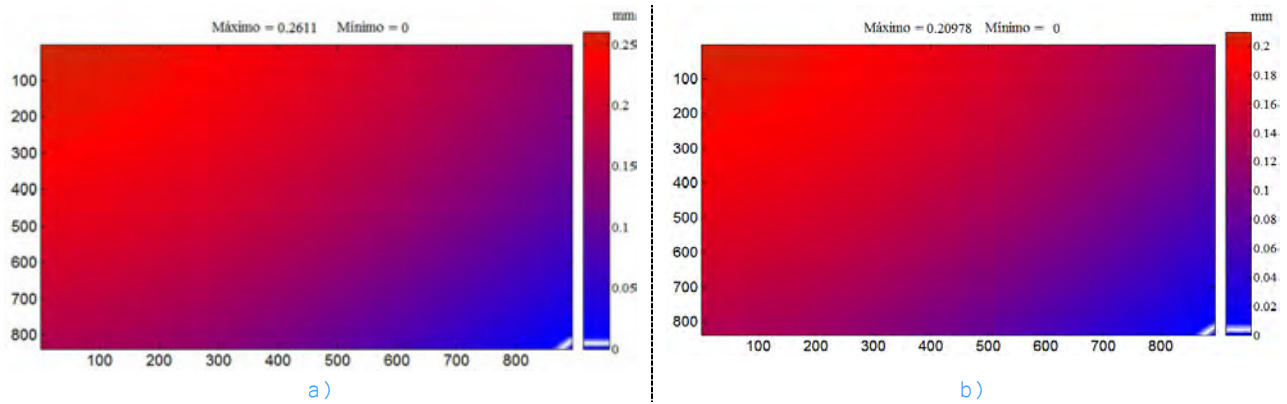


Figura 4-31. Evolución del ciclo de vibración a 152 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.2611 mm. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.20978 mm. c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.07743 mm. d) Instante de fase 4, desplazamiento límite -0.25812 mm. e) Instante de fase 5, desplazamiento límite -0.35007 mm.

En la Figura 4-32 se observan los mapas de deformación correspondientes a los cinco instantes de fase.



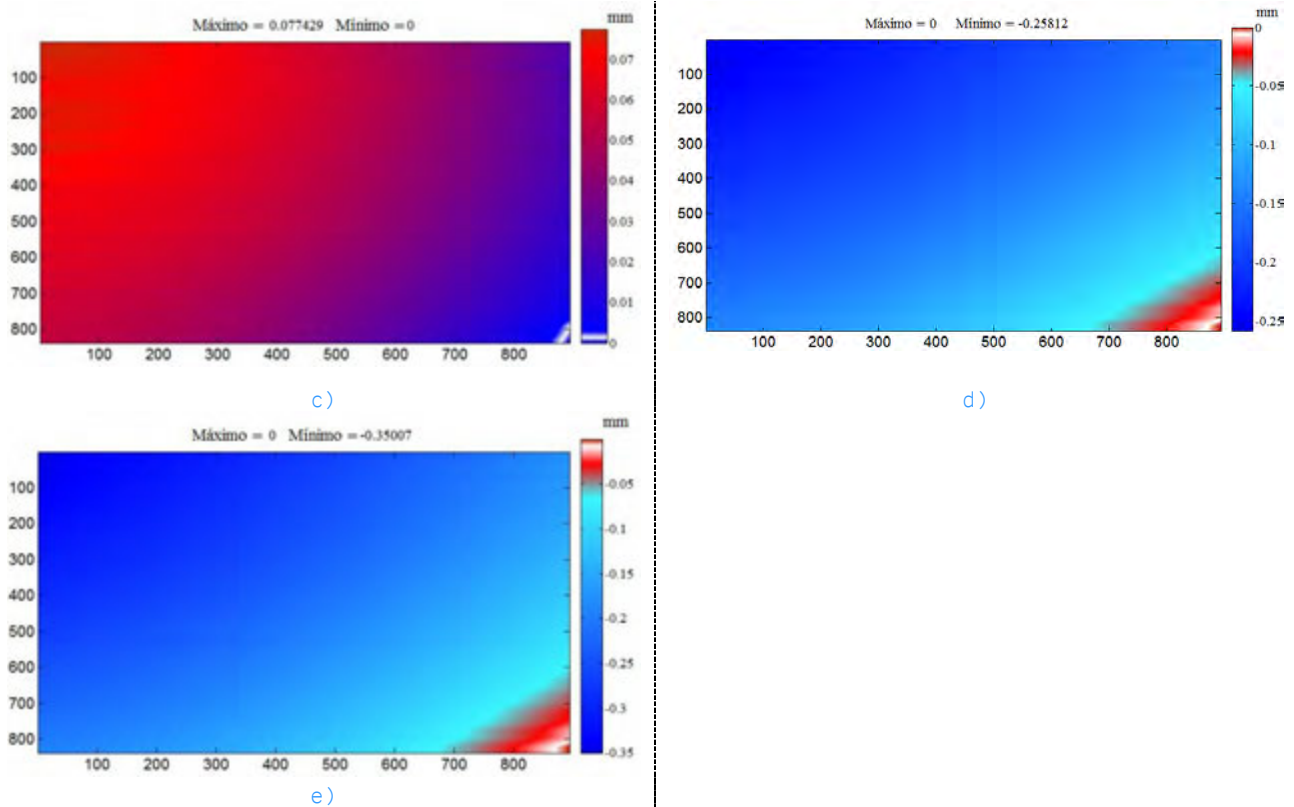


Figura 4-32. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5. .

4.4.1.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.

Si se considera a cada una de las líneas de $50, M/4, M/2, 3M/4, M-50$ pix, de cada diferente fase del ciclo de vibración, es posible construir una representación temporal de cada uno de los modos de vibración. Para facilitar la interpretación, se definen los colores empleados para su análisis mediante la **Tabla 4-3**, para cada grafica de líneas de pixeles.

Tabla 4-3

Instante de fase	Color
IF 1	Magenta 
IF 2	Verde 
IF 3	Negro 
IF 4	Rojo 
IF 5	Azul 

Entonces la **Figura 4-33** presenta la reconstrucción temporal, donde cada inciso refleja el progreso de la deformación de cada línea de los diferentes estados de fase.

El límite máximo de desplazamiento se ubica sobre la línea 50, ya que corresponde a la más próxima al centro de la placa. También se nota que el desplazamiento converge a un punto (nodo) para las deformaciones a lo largo de la línea más cercana a una orilla (M-50). Se esperaría una situación simétrica en la deformación, por ejemplo que la deformación para la línea 50 fuera igual que para la línea M-50, sin embargo el campo de visión no coincidió con el centro de simetría del cuarto de placa analizado.

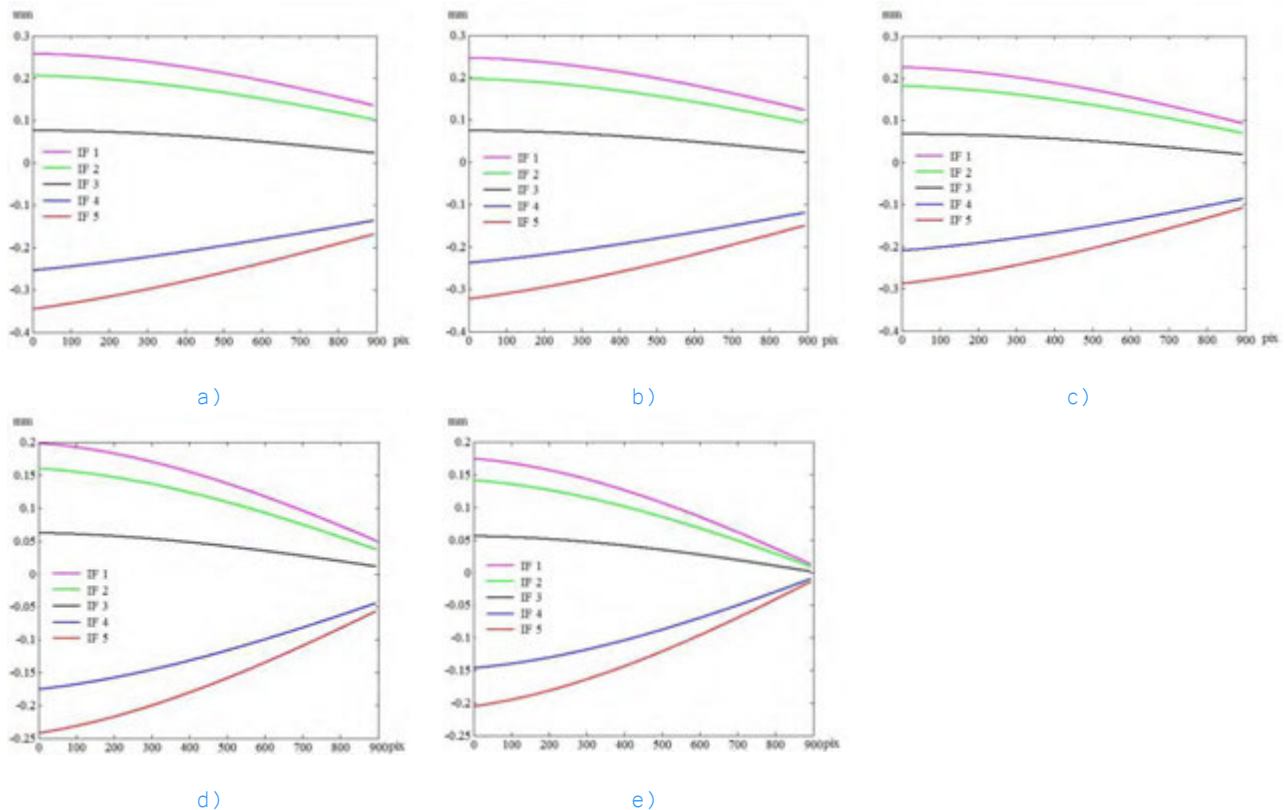


Figura 4-33. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix.

4.4.2. Patrón modal de 772 Hz.

En esta sección se realiza el mismo análisis que en la Sección 4.4.1. El modo bajo análisis corresponde a 772 Hz y solamente se utilizan 2 instantes de fase. No se obtuvieron más mediciones, como en el caso anterior, ya que a 772 Hz el sistema FP fue llevado a su condición límite: como el ciclo de vibración ($1/772 = 1.3$ ms) es relativamente corto, entonces el nivel de iluminación registrado por el CCD baja a valores comparables con el nivel de ruido de la cámara (también se debe de considerar que las deformaciones son menores que en el caso de 152 Hz).

4.4.2.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.

La Figura 4-34 ilustra los cortes de desplazamientos a $50, M/4, M/2, 3M/4, M-50$ pix de acuerdo a lo mencionado. Los valores límites son para: a) $24.32 \mu\text{m}, -0.1296 \text{mm}$; b) $24.28 \mu\text{m}, -0.1339 \text{mm}$. También se observa que todas las líneas convergen en el punto nodal, región en la cual no existe desplazamiento.

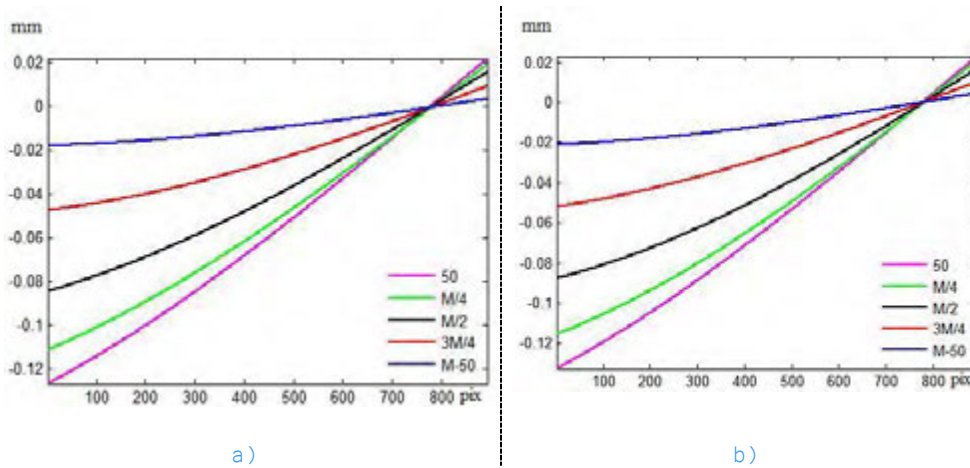


Figura 4-34. Evolución del ciclo de vibración 772 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite $24.32 \mu\text{m}, -0.1296 \text{mm}$. b) Instante de fase 2, desplazamiento límite $24.28 \mu\text{m}, -0.1339 \text{mm}$.

Los mapas de deformación se visualizan mediante la Figura 4-35. La zona nodal en estas figuras no se observa completamente debido a los recortes producidos durante el procesamiento.

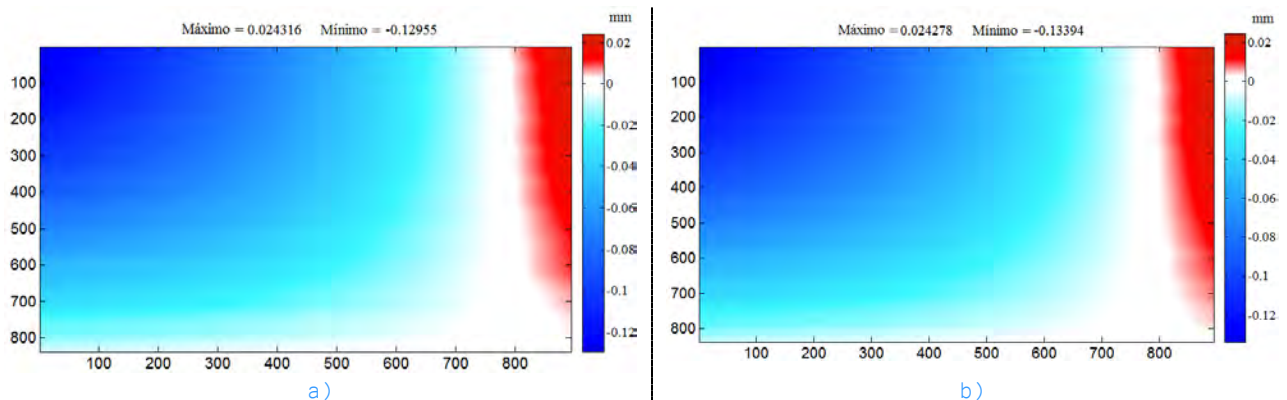


Figura 4-35. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2.

4.4.2.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.

La reconstrucción temporal del modo de vibración, se efectúa tal como se mencionó en la Sección 4.4.1.2, empleando la Figura 4-36 se observa el punto de intersección que corresponde al punto nodal.

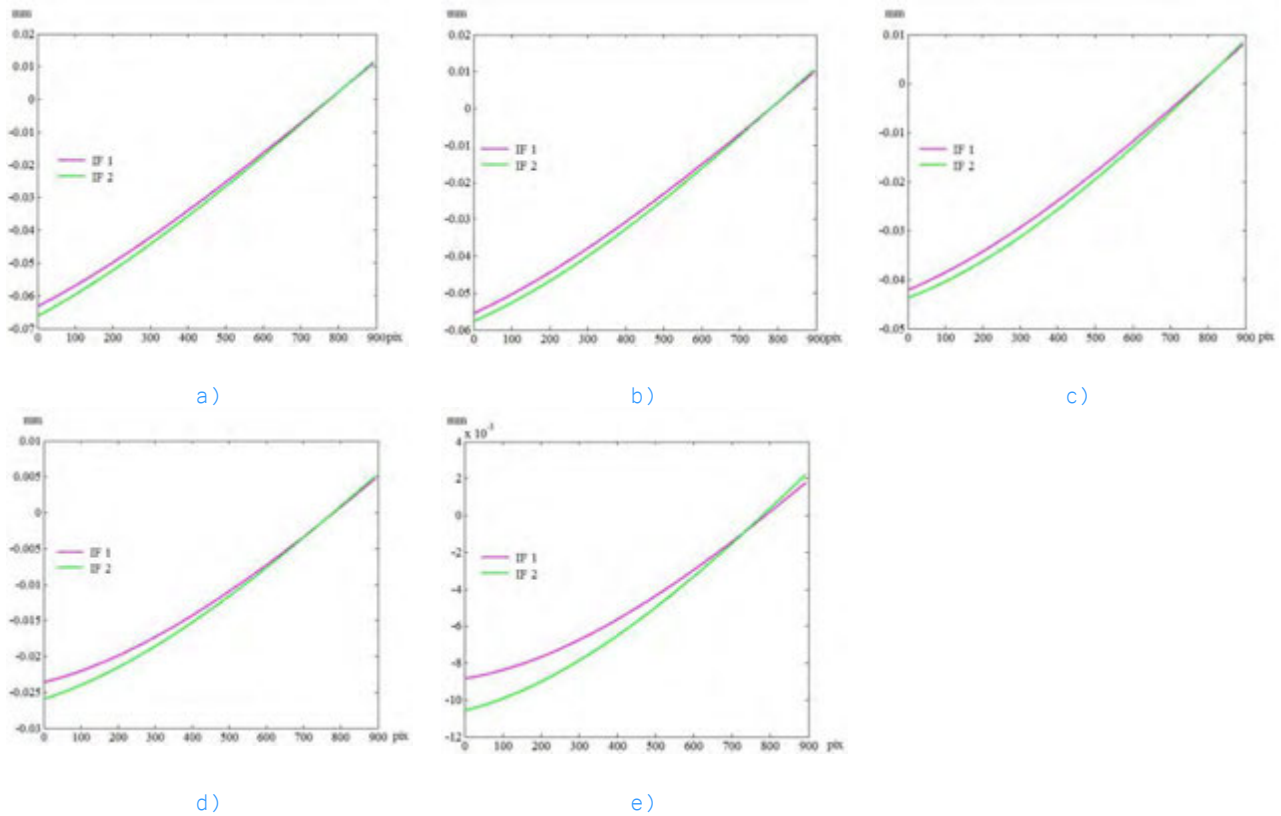


Figura 4-36. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix.

4.5. Comparación entre imágenes procesadas con periodo de 0.5 mm.

En esta sección se hace un estudio semejante al de la Sección 4.4, considerando 5 instantes de fase en el ciclo de vibración.

4.5.1. Patrón modal de 152 Hz.

4.5.1.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.

La Figura 4-37 presenta las gráficas de desplazamiento; los valores límites son: a) 0.24779mm; b) 0.17724mm; c) 0.07635 mm; d) -0.17114mm; e) -0.30094mm. Aquí es interesante notar que el patrón modal reconstruido en d) presenta una ligera protuberancia que es la zona más próxima a la condición estática de la placa.

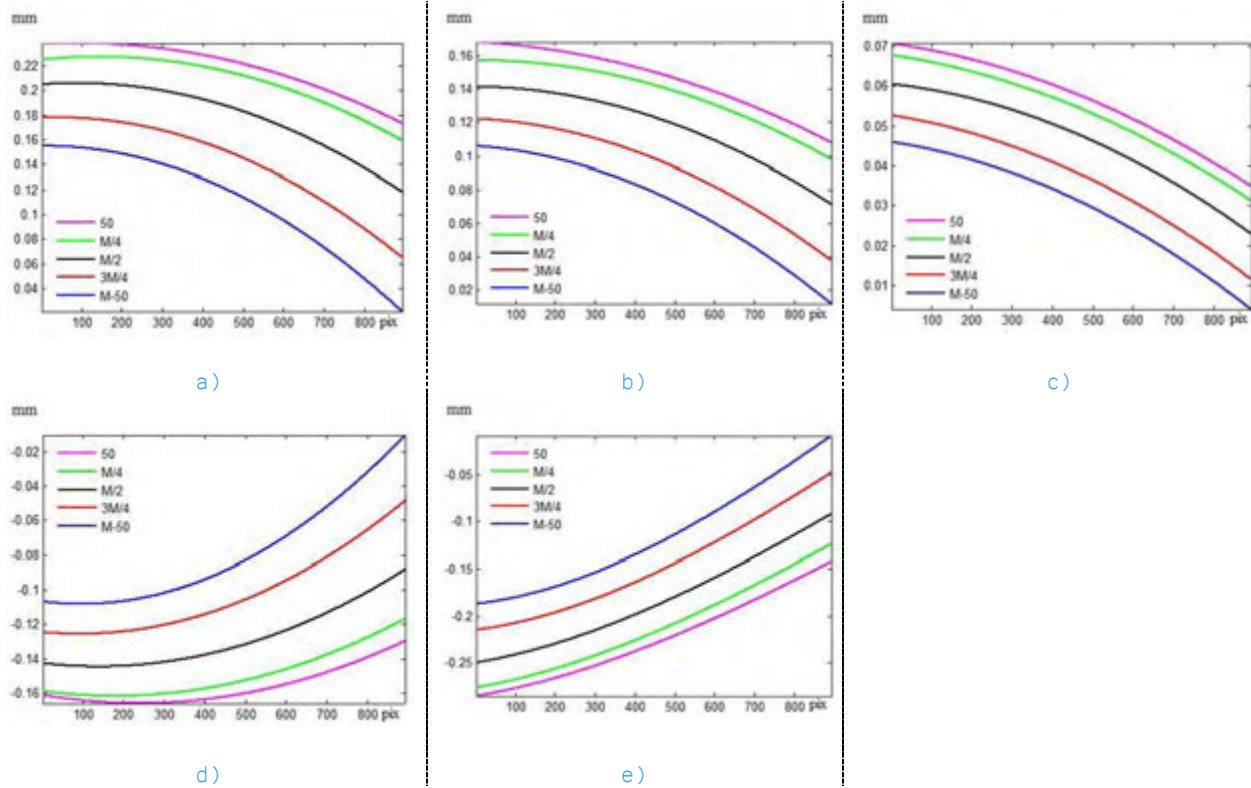
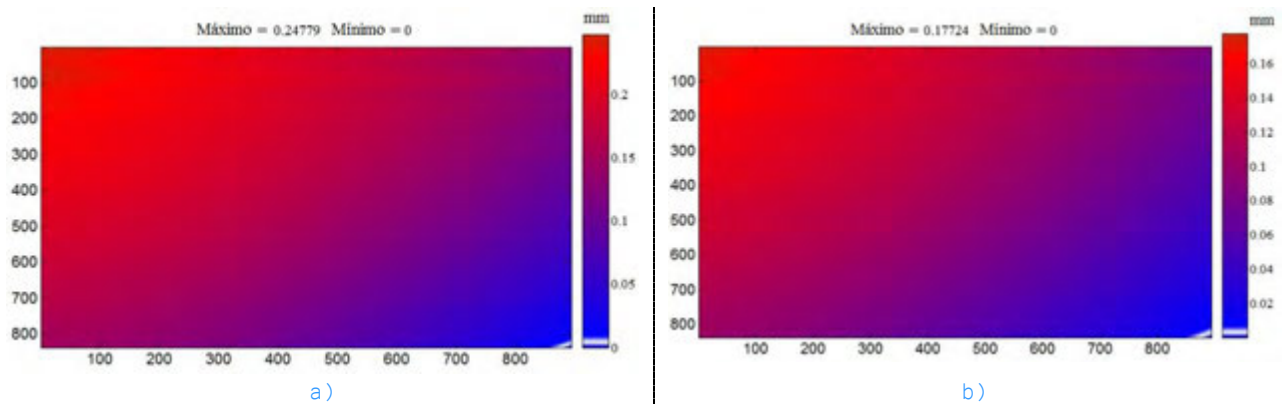


Figura 4-37. Evolución del ciclo de vibración 152 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.24779 mm . b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.17724 mm . c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.07635 mm . d) Instante de fase 4, desplazamiento límite -0.17114 mm . e) Instante de fase 5, desplazamiento límite -0.30094 mm .

La Figura 4-38 muestra los mapas de deformación del análisis en cuestión.



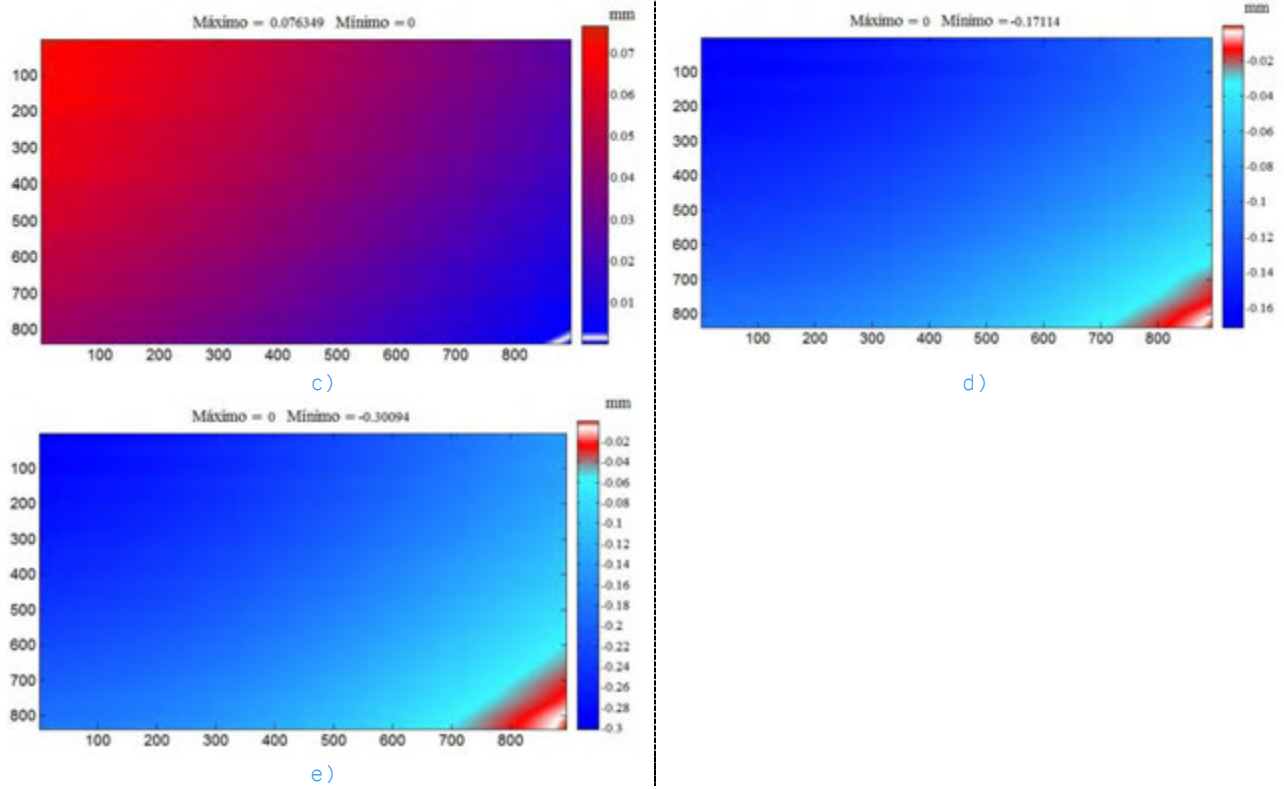
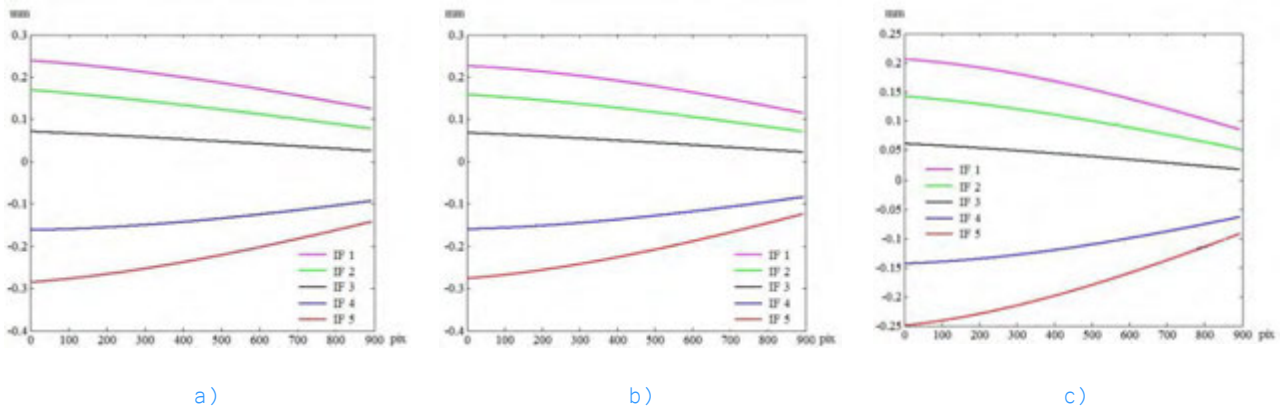


Figura 4-38. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5. .

4.5.1.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.

La Figura 4-39 reproduce el patrón modal temporalmente con los cinco valores de fase del ciclo de deformación. Esta forma obtenida del modo es comparable al obtenido mediante el periodo de 1 mm.



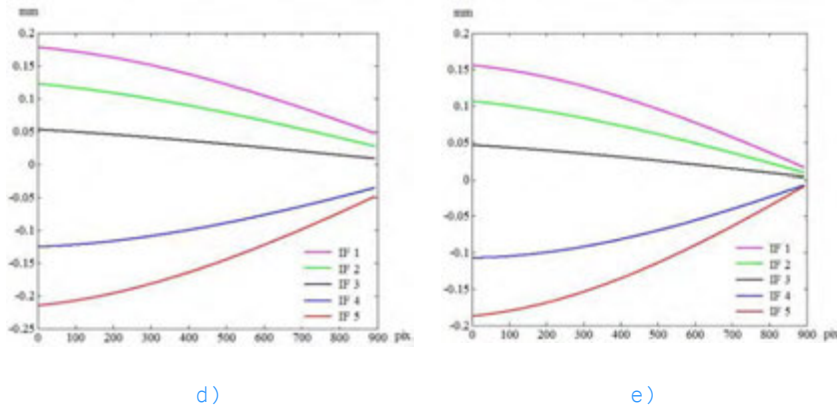


Figura 4-39. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 152 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix.

4.5.2. Patrón modal de 772 Hz.

4.5.2.1. Cortes transversales a diferente fase del ciclo de deformación.

La Figura 4-40 muestra cortes de desplazamiento. Para cada caso, los valores límites son: a) 0.16137 mm, - 34.77 μm ; b) 0.12918 mm, - 32.82 μm ; c) 0.10387 mm, - 28.76 μm ; d) 0.08898 mm, - 19.17 μm ; e) 0.04511mm, - 0.11669mm. Al igual que en los resultados anteriores con periodo de 1 mm, claramente se observa un punto de convergencia que corresponde al punto nodal.

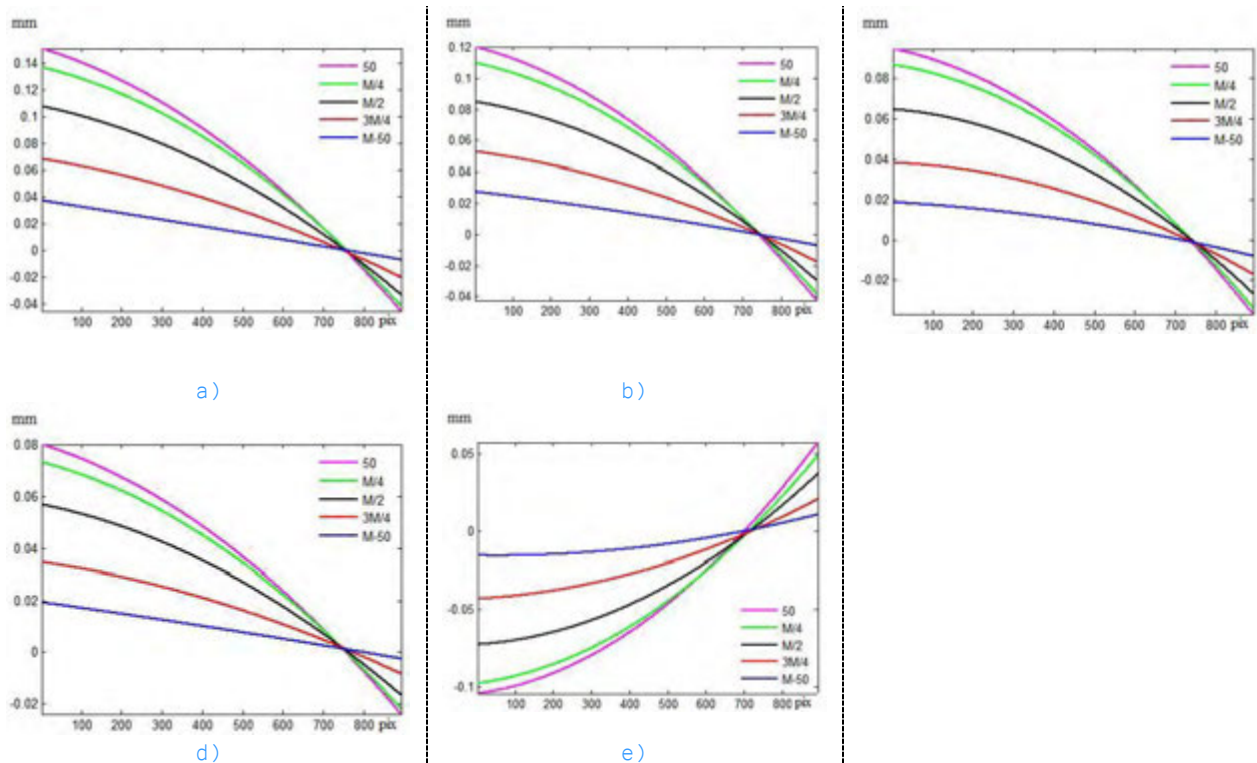


Figura 4-40. Evolución del ciclo de vibración 772 Hz. a) Instante de fase 1, desplazamiento límite 0.16137 mm , -34.77 μm . b) Instante de fase 2, desplazamiento límite 0.12918 mm , -32.82 μm . c) Instante de fase 3, desplazamiento límite 0.10387 mm , -28.76 μm . d) Instante de fase 4, desplazamiento límite 0.08898 mm , -19.17 μm . e) Instante de fase 5, desplazamiento límite 0.04511 mm , -0.11669 mm .

Los mapas de desplazamiento correspondientes al análisis en cuestión se muestran en la Figura 4-41.

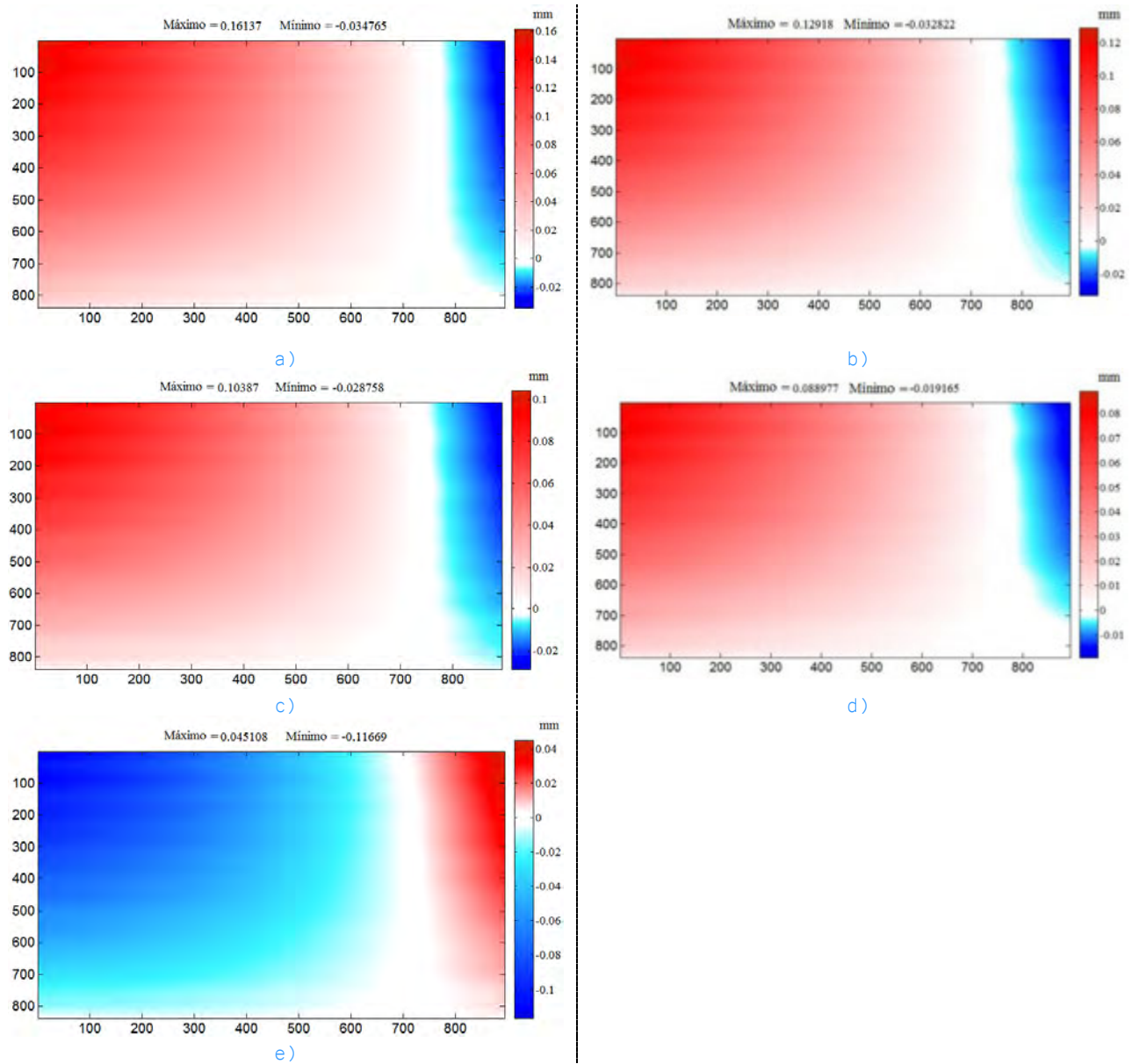


Figura 4-41. Mapas de deformación de la evolución del ciclo de vibración. a) Instante de fase 1. b) Instante de fase 2. c) Instante de fase 3. d) Instante de fase 4. e) Instante de fase 5.

4.5.2.2. Reconstrucción del ciclo de deformación por línea.

En la [Figura 4-42](#) se muestra la reconstrucción temporal del patrón modal para cada una de las líneas que se han venido analizando. En este caso, a diferencia del obtenido en la Sección 4.5.1.2, la localización del punto de cruce no es tan exacta, ya que el error en las mediciones es relativamente grande. Esto se debe a que, como se comentó anteriormente, el CCD trabaja en su límite de sensibilidad de iluminación.

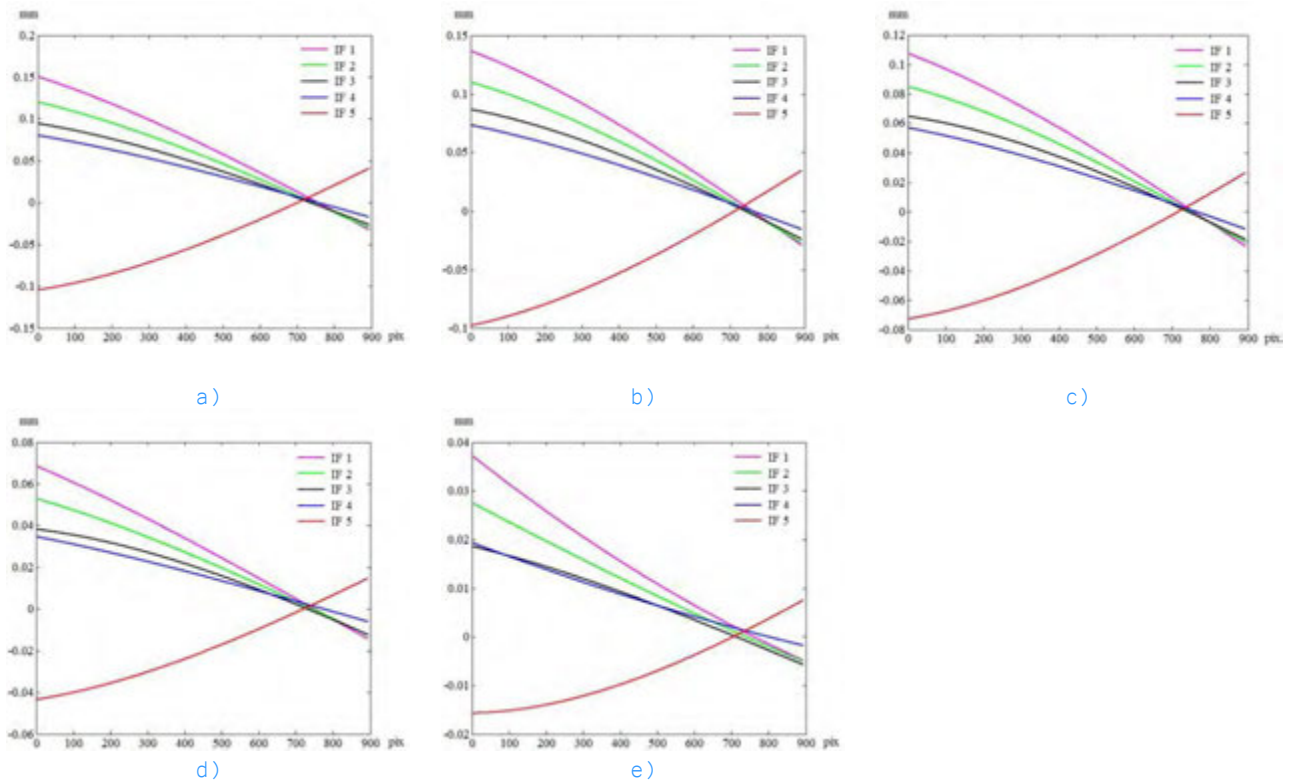


Figura 4-42. Reconstrucción temporal del modo de vibración a 772 Hz, a lo largo de las líneas: a) 50 pix, b) M/4 pix, c) M/2 pix, d) 3M/4 pix y e) M-50 pix. Para M=837 pix.

4.6. Conclusiones.

La técnica de proyección de franjas resultó ser adecuada para la medición de vibraciones mecánicas, con las siguientes consideraciones:

a) Resolución de la cámara.

Se hicieron pruebas con diversas cámaras, tales como: Olympus CAMEDIA E-20N a color, Panasonic HDC-TM700 a color, Lumenera LW11057M monocromática, Lumenera LU075M, LU075C monocromática y color respectivamente, las cuales no tuvieron la resolución espacial necesaria para el registro del tipo de deformación analizada. Adicionalmente, la mayoría de las cámaras presentan un mínimo de sensibilidad de iluminación relativamente alto de tal forma que no fue posible registrar resonancias a frecuencias relativamente grandes (la mayoría de las cámaras no pudieron registrar el primer modo correctamente, produciendo imágenes borrosas o sin información de las franjas). Esto último se podría compensar mediante el uso de una fuente de iluminación de mayor potencia, la cual debe ser de tipo pulsada. El aspecto relacionado con el nivel de iluminación resultó ser más crítico que la limitante en resolución espacial del sensor.

b) Proyector.

Se emplearon dos proyectores diferentes para la proyección de franjas; estos fueron: Samsung SP-P410M con resolución SVGA (800×600) con formato de pantalla 4:3 y Panasonic PT-AE2000U con resolución HD de 1920×1080 pix.

El uso de los dos proyectores fue descartado debido a su baja frecuencia de proyección, la cual fue de 60 Hz para el primer modelo y de 120 Hz para el segundo. Debido a las altas frecuencias de resonancia, las imágenes contenían un alto grado de barrido. Por lo tanto, se optó por grabar el patrón sobre la placa e iluminar con una fuente de LEDs, la cual puede soportar frecuencias hasta de MHz.

c) Periodo del patrón de franjas.

Se encontró que a menor periodo, mayor resolución espacial del método, esto debido a la relación fase-altura existente en FP [6]. Sin embargo, para periodos cercanos al límite de Nyquist, el contraste de las franjas registradas baja drásticamente y las mediciones dejan de ser confiables. Adicionalmente, se tuvo cuidado en cortar las imágenes de tal forma que el número de franjas en las imágenes correspondiera a un número entero y así evitar problemas de discontinuidades que pudieran afectar el desempeño de la transformada rápida de Fourier.

d) Contraste de las franjas.

El contraste de las franjas registradas por la cámara depende del nivel de iluminación y de la resolución de la cámara. Si estos parámetros no son adecuados, el sistema produce resultados erróneos [10, 11]. Esto fue la causa para no haber obtenido mediciones a frecuencias mayores que 1000 Hz y tampoco en la placa completa. Aunque al tomar en cuenta la simetría de los modos de resonancia, esto último no resultó ser un problema.

e) Patrones modales.

Se observó que la distribución espacial de los patrones modales medidos fueron similares a los obtenidos mediante FEM, con ciertas diferencias producidas por el método de simulación.

El arreglo experimental resultó ser adecuado para la medición de vibraciones mecánicas en una placa de aluminio empleando frecuencias de hasta 1000 Hz. Si se empleara un sistema de iluminación de mayor potencia o si se usara sincronización entre la cámara y una fuente de luz pulsada sería posible la medición mediante FP de modos de mayor frecuencia.

Por ultimo, en aplicaciones relacionadas con el diseño de elementos mecánicos, es posible obtener mediante FEM los patrones modales y verificarlos mediante FP. Así, si se hace vibrar al elemento a determinada frecuencia de resonancia y si se detectan cambios en la forma del patrón modal, esto podría conducir a contar con una forma de detección de defectos mecánicos de elementos mecánicos [12-14].

Referencias

1. B. Barrientos, *Apuntes de clase métodos selectos de metrología óptica*, 2010.
2. W. Schreiber and G. Notni, "Theory and arrangements of self-calibrating whole-body three-dimensional measurement systems using fringe projection technique," *Opt. Eng.* **39**(1), 159-169 (2000).
3. F. Zhu, H. Shi, P. Bai, and X. He, "Three-dimensional shape measurement and calibration for fringe projection by considering unequal height of the projector and the camera," *Appl. Opt.* **50**(11), 1575-1583 (2011).
4. M. Takeda, Hideki Ina, Seiji Kobayashi "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **72**(156-160 (1982)).
5. Donald J. Bone, H.-A. Bachor, and R. J. Sandeman, "Fringe-pattern analysis using a 2-D Fourier transform," *Appl. Opt.* **25**(10), 1653-1660 (1986).
6. M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," *Appl. Opt.* **22**(24), 3977 (1983).
7. A. Committee, "Properties of Wrought Aluminum and Aluminum Alloys," in *Properties and selection: Nonferrous alloys and special-purpose materials*, (10 Ed., ASM International, 1990).
8. B. Barrientos, M. Cywiak, W. K. Lee, and P. Bryanston-Cross, "Measurement of dynamic deformation using a superimposed grating," *Rev. Mex. Fis.* **50**(1), 12-18 (2004).
9. F. A. Ramírez Díaz and B. Barrientos García, "Influence of some parameters on the performance of fringe projection," presented at the 22nd General Congress of the International Commission for Optics (ICO) Puebla, Mexico, 15-19 August 2011.
10. C. P. Brophy, "Effect of intensity error correlation on the computed phase of phase-shifting interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**(4), 537-541 (1990).
11. W. J. Chen, H. Yang, X. Y. Su, and S. X. Tan, "Error caused by sampling in Fourier transform profilometry," *Opt. Eng.* **38**(6), 1029-1034 (1999).
12. C. S. Huang, A. W. Leissa, and R. S. Li, "Accurate vibration analysis of thick, cracked rectangular plates," *J. Sound Vib.* **330**(9), 2079-2093 (2011).

13. C. H. Huang and C. C. Ma, "Vibration of cracked circular plates at resonance frequencies," *J. Sound Vib.* **236**(4), 637-656 (2000).
 14. B. Manzanares-Martinez, J. Flores, L. Gutierrez, R. A. Mendez-Sanchez, G. Monsivais, A. Morales, and F. Ramos-Mendieta, "Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes," *J. Sound Vib.* **329**(24), 5105-5115 (2010).
-

C A P Í T U L O 5

Conclusiones y trabajo futuro

Se analizó en forma extensiva la factibilidad de la técnica de proyección de franjas en la medición de vibraciones mecánicas. En primer término se estudió la teoría para el análisis, identificando los principales parámetros que intervienen en FP y como segunda parte se realizaron simulaciones numéricas para evaluar la influencia de varios parámetros: el tipo de perfil de las franjas, el periodo, el contraste, el ciclo de trabajo, la resolución espacial y la complejidad en la distribución espacial de las patrones de deformación. Posteriormente, se implementó el arreglo óptico para FP, ya con sus parámetros optimizados, y se realizaron varias mediciones de vibración en una placa de aluminio 6061-T6.

Como resultados relevantes podemos destacar lo siguiente:

La exactitud de FP es afectada tanto por los parámetros que afectan al método de Fourier como los parámetros que definen el patrón de franjas generadas:

Periodo. El error es mínimo para periodos que son múltiplo de las dimensiones de la imagen, esto debido a la periodicidad de la transformada de Fourier discreta. La exactitud también decrece para periodos relativamente pequeños ya que estos se aproximan al mínimo de 2 pix, que corresponde al límite de Nyquist y similarmente para periodos grandes por el traslape entre el primer lóbulo y las componentes frecuenciales relacionadas con el término de la iluminación de fondo.

Experimentalmente, se tuvo cuidado que el número de franjas en las imágenes fuera un número entero y así evitar problemas de discontinuidades que pudieran afectar el desempeño de la transformada rápida de Fourier. Con periodos de 0.5 mm y 1.0 mm, la exactitud de las mediciones se encuentra por $T/20$, donde T es el periodo.

Contraste. Para contrastes mayores al 5% y menores que el 95%, el error se considera bajo y relativamente constante.

Experimentalmente el contraste de las franjas registradas por la cámara depende del nivel de iluminación y de la resolución de la cámara. Si estos parámetros no son adecuados, el sistema produce resultados erróneos.

Resolución espacial. El error puede considerarse inversamente proporcional al número total de píxeles de una imagen.

Grado de complejidad de la distribución espacial de los desplazamientos. A mayor complejidad de la forma espacial de la distribución de desplazamientos, mayor los valores de las pendientes locales, y por lo tanto mayor el grado de empalme entre lóbulos, y menor la exactitud del método de Fourier. El grado de complejidad de la distribución espacial de los desplazamientos puede ser recuperado si la pendiente máxima local es menor que $1/3 \tan \theta$, donde θ es el ángulo de iluminación.

Forma de las franjas. El caso ideal es tener franjas registradas con perfil senoidal para de esa forma eliminar cualquier lóbulo armónico. Aún en ese caso, faltaría eliminar el contenido frecuencial del término de DC. A partir de las simulaciones, se pudo mostrar que los perfiles registrados mostraron perfiles que van desde senoidal a gaussiano. Las franjas gaussianas tienden a producir tanto armónicos pares como impares y las franjas rectangulares solamente los armónicos impares. Sin embargo, la amplitud del tercer armónico es mayor para las rectangulares que el segundo armónico de las gaussianas. Esto sugiere que la proyección de franjas gaussianas sea un camino a explorar en un trabajo futuro.

Ciclo de trabajo. Otra ventaja de tener franjas gaussianas es que para ciclos de trabajo relativamente grandes el error en el método decrece. En general, este parámetro es uno de los que mostró la mayor contribución al error de FP, excepto cuando su valor era de 50%.

FP no es influenciada por ruido externo. La fuente de iluminación puede ser fabricada con lámparas LED, que son relativamente económicas y fáciles de conseguir. La cámara CCD, según el nivel de exactitud, puede ser seleccionada considerando el valor mínimo de sensibilidad y la resolución como parámetros fundamentales del sistema.

El procesamiento de imágenes se basa en el método de Fourier por lo que es indispensable el desarrollo de software eficiente y eficaz. Adicionalmente, el dispositivo de medición puede ser utilizado en otras aplicaciones, como reconstrucción de forma y análisis en tiempo real de las frecuencias de resonancia de objetos mecánicos.

El arreglo experimental resulta sencillo para su implementación, lo cual hace de FP una técnica aprovechable en el sector industrial. Así, FP es una técnica con un amplio potencial de ser aplicada en diversos sectores, especialmente en el análisis de vibraciones mecánicas.

Como trabajo futuro se pretende evaluar la pertinencia de la aplicación de FP en elementos mecánicos con geometrías más complicadas que la de una placa, así como analizar más a fondo el fenómeno de vibración y de ser posible aplicar los conocimientos adquiridos al análisis de balanceo de rotores. También es indispensable realizar una comparación cuantitativa con los diversos métodos puntuales actualmente utilizados en la industria.
