

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ÓPTICA A. C.



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA DE OBJETOS
ESPECULARES POR LA TÉCNICA DE REFLEXIÓN
DE LUZ ESTRUCTURADA

Tesis presentada por:
Ing. Roxana Zaricell Bautista López

Como requisito para obtener el grado de:
Maestría en Optomecatrónica

Dirigida por:
Dra. Amalia Martínez García

LEÓN, GUANAJUATO, MÉXICO, ABRIL 2013

"Cheshire Puss,' she began, rather timidly, as she did not at all know whether it would like the name: however, it only grinned a little wider. 'Come, it's pleased so far,' thought Alice, and she went on. 'Would you tell me, please, which way I ought to go from here?'

'That depends a good deal on where you want to get to,' said the Cat.

'I don't much care where—' said Alice.

'Then it doesn't matter which way you go,' said the Cat.

'—so long as I get SOMEWHERE,' Alice added as an explanation.

'Oh, you're sure to do that,' said the Cat, 'if you only walk long enough.'

— Lewis Carroll, Alice in Wonderland.

"Do you think I've gone round the bend?"

"I'm afraid so. You're mad, bonkers, completely off your head. But I'll tell you a secret.

All the best people are."

— Lewis Carroll, Alice in Wonderland.

Resumen de la tesis de la Ing. Roxana Zaricell Bautista López, presentado como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRÍA EN OPTOMECASTRÓNICA, León, Guanajuato, México, abril de 2013.

MEDICIÓN DE LA TOPOGRAFÍA DE OBJETOS ESPECULARES POR LA TÉCNICA DE REFLEXIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA

En este trabajo se implementó la técnica de reflexión de franjas que es una técnica robusta y no coherente para la caracterización de superficies especulares. La técnica es aplicable donde ya no es posible el uso de la conocida técnica de proyección de franjas, la cual es funcional para objetos cuya superficie sea difusa. En la técnica de reflexión de franjas se evalúa el patrón de franjas que se refleja en la superficie especular y cuya información de fase es asociada a la pendiente de la superficie. La teoría presentada requiere la solución de ecuaciones diferenciales para encontrar la pendiente de la superficie y la distribución de altura en las direcciones x y y , por lo que se implementa un algoritmo de integración numérica para la obtención de la topografía. El desarrollo de esta técnica es importante en la industria automotriz y del vidrio donde se requiere la medición precisa de componentes como visores de velocidad y parabrisas de carros, en el área oftálmica para el caso de la medición de la topografía de lentes, así como otros campos de inspección industrial. En particular el sistema implementado fue probado para evaluar la topografía de lentes con dimensiones máximas de 5 cm de diámetro.

Este proyecto es de interés para “Continental Automotive Guadalajara Mexico” para llevar a cabo la medición del parabrisa y del visor de un carro.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de este trayecto que llamamos vida, por no dejarme desfallecer en los momentos de debilidad y darme la fortaleza necesaria para continuar.

A mi asesora de tesis, la Dra. Amalia Martínez García, por su apoyo incondicional, la confianza y conocimientos brindados a lo largo del desarrollo de la tesis.

A mis sinodales, Dr. Daniel Malacara Hernández y Dr. Bernardino Barrientos García por tomarse el tiempo de revisar este trabajo y brindar sus valiosas sugerencias al presente trabajo de tesis.

Al M.C. David Serrano García, por su apoyo y conocimientos brindados en este trabajo.

Al Ing. Juan Antonio Rayas, por su apoyo técnico en la realización de este trabajo de tesis.

Mis más sinceros agradecimientos a mis compañeros y amigos encontrados en esta institución, especialmente a Gilbert G. y Myriam Jiménez.

A mi querido Alexis F. por el apoyo y cariño brindado siempre.

A CONACYT por el apoyo otorgado mediante la beca, que hizo posible la realización de mis estudios de maestría. Le doy las gracias igualmente al Centro de Investigaciones en Óptica, por brindarme todo lo necesario para la realización de este trabajo, así como a todos aquellos docentes que tuvieron que ver con mi formación.

Finalmente, agradecer a mis padres Jesús del Carmen y José, así como a mis hermanos Anahí, Luis y Alfonso pues gracias a ustedes todo el esfuerzo tiene sentido.

Dedicatoria

Dedico mi trabajo de tesis a:

A mis padres:

Jesús del Carmen López Espinosa y José Bautista Aniceto.

A mis hermanos:

*Anahí del Carmen Bautista López, Luis Alfredo Bautista López y
José Alfonso Bautista López.*

Índice General

Capítulo 1: Planteamiento general del proyecto	1
1.1 Objetivos.....	1
1.2 Justificación.....	1
1.3 Organización de la tesis.....	2
Capítulo 2: Revisión de conceptos básicos	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 Principio de Fermat.....	5
2.3 Ley de reflexión.....	7
2.4 Reflexión especular y difusa.....	10
Capítulo 3: Revisión de algunas técnicas en la medición de superficies especulares	15
3.1 Introducción.....	15
3.2 Discos de Plácido.....	15
3.3 Métodos interferométricos.....	17
3.4 Deflectometría de moiré.....	20
3.5 Reflexión de franjas.....	21
3.5.1 Reflexión de franjas a incidencia normal.....	21
3.5.2 Reflexión de franjas a incidencia oblicua.....	23
3.5.2.1 Obtención de la derivada en dirección x	26
3.5.2.2 Obtención de la derivada en dirección y	27
Capítulo 4: Técnicas en la obtención de fase	33
4.1 Introducción.....	33
4.2 Método utilizado para la recuperación de fase.....	33
4.3 Método utilizado para el desenvolvimiento de fase.....	36
4.3.1 Representación de los residuos y <i>branch cuts</i> en las matrices.....	37
Capítulo 5: Arreglo experimental y mediciones de topografía	39

5.1	Introducción.....	39
5.2	Medición de la topografía de objetos especulares	39
5.2.1	Arreglo experimental.....	39
5.2.2	Objetos de prueba	46
5.3	Reconstrucción de topografía.....	48
5.3.1	Topografía de la lente plana convexa.....	48
5.3.2	Topografía de la lente plana cóncava	62
Capítulo 6:	Conclusiones y trabajo futuro	65
6.1	Conclusiones.....	65
6.2	Trabajo a futuro	65
Apéndice A.	Desarrollo de las ecuaciones diferenciales.....	69

Lista de pies de figuras

Figura 1. 1 Reflexión de superficies especulares.....	2
Figura 2. 1. Principio de Fermat y ley de reflexión.....	7
Figura 2. 2. Ley de reflexión usando el principio de Fermat.	8
Figura 2. 3. Reflexión en una superficie de tipo especular.....	11
Figura 2. 4. Reflexión de un frente de onda que incide sobre una superficie inclinada.....	12
Figura 2. 5. Reflexión difusa.....	13
Figura 3. 1. Anillos de Plácido.	16
Figura 3. 2. Diagrama óptico del principio de los discos o anillos de Plácido.	17
Figura 3. 3. Interferómetro de Twyman - Green para medir superficies especulares.....	19
Figura 3. 4. Sistema óptico para la medición de superficies especulares utilizando la técnica de deflectometría de moiré.....	21
Figura 3. 5. Sistema óptico para la medición de una superficie reflectora cóncava.	22
Figura 3. 6. Geometría del arreglo óptico para la medición de una superficie reflectora, R es la distancia de la cámara al monitor, H la altura del plano de referencia a la cámara y h la altura del objeto de prueba en cierto punto con coordenadas (x,y)	23
Figura 3. 7. Patrón de franjas horizontales y su perfil.....	24
Figura 3. 8. Geometría a lo largo de la dirección x	25
Figura 3. 9. Geometría en la dirección y	26
Figura 3. 10. Superficie esférica	29
Figura 3. 11. Derivada numérica de la superficie esférica, es la misma para ambas direcciones x y y ...29	
Figura 3. 12. Diagrama de bloques que describe el algoritmo de integración para la obtención de la forma 3D del objeto de prueba.	30
Figura 3. 13. Integración numérica de las derivadas de la esfera, utilizando el algoritmo de integración. a) En dirección x , b) En dirección y	32
Figura 4. 1. Patrones de franjas generados por computadora.	35
Figura 4. 2. a) Fase envuelta y b) Perfil de la fase envuelta.	35
Figura 4. 3. . Conexión de dos residuos por medio del <i>branch cut</i> . a) Residuo positivo y negativo, b) El <i>branch cut</i> que une a los residuos se muestra por los pixeles negros, c) El <i>branch cut</i> no necesita incluir el pixel superior izquierdo, ya que solo une los centros de los cuatro pixeles que definen el residuo	37
Figura 4. 4. Funcionamiento del algoritmo de Goldstein. a) Fase Envuelta, b) <i>Branch cuts</i> , c) Residuos encontrados. d) Fase desenvuelta.	38
Figura 5. 1. . Cámara con sensor CMOS PixelINK, modelo PL-B741F.	40
Figura 5. 2. Esquema del montaje para soportar la cámara y su lente.....	40
Figura 5. 3. Lente zoom 7000 de Navitar.	41
Figura 5. 4. Pantalla LCD, LG FLATRON W2043S.	42
Figura 5. 5. Plataforma para la colocación del plano de referencia y el objeto.....	42
Figura 5. 6. Vista lateral del arreglo experimental.....	43
Figura 5. 7. Alineación de PL1 con PL2.	44

Figura 5. 8. Geometría para encontrar α	45
Figura 5. 9. Perfil del arreglo experimental que indica los parámetros utilizados.....	45
Figura 5. 10. Foto del sistema óptico de reflexión de franjas.	46
Figura 5. 11. Esferómetro.....	47
Figura 5. 12. Lente plano convexa.....	47
Figura 5. 13. Lente plano cóncava.....	48
Figura 5. 14. Plano de referencia.....	48
Figura 5. 15. Patrón de franjas. a) Franjas horizontales, b) Franjas verticales.....	49
Figura 5. 16. Patrón de franjas verticales reflejado en el plano de referencia. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $3\pi/2$	50
Figura 5. 17. Patrón de franjas verticales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$	51
Figura 5. 18. Patrón de franjas horizontales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$	52
Figura 5. 19. Patrón de franjas horizontales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$	53
Figura 5. 20. Fase envuelta. a) Fase envuelta del plano (franjas verticales), b) Fase envuelta del objeto (franjas verticales), c) Fase envuelta del plano (franjas horizontales), d) Fase envuelta del objeto (franjas horizontales).	54
Figura 5. 21. Fase desenvuelta. a) Fase desenvuelta del plano (φ_{vr}), b) Fase envuelta del objeto (φ_{vo}), c) Fase desenvuelta del plano (φ_{hr}), d) Fase desenvuelta del plano (φ_{ho}).	55
Figura 5. 22. φ_x	56
Figura 5. 23. φ_y	56
Figura 5. 24. Z_x	57
Figura 5. 25. Z_y	57
Figura 5. 26. Solución final de las ecuaciones diferenciales.....	59
Figura 5. 27. Corrección de perspectiva en la superficie experimental.....	59
Figura 5. 28. Datos experimentales en 3D.....	60
Figura 5. 29. Datos de la lente convexa, medidos con el esferómetro.....	61
Figura 5. 30. Perfil de los datos del esferómetro en $y = 512$	61
Figura 5. 31. Error relativo, a) Corte vertical (error relativo) en $x = 512$, b) Corte horizontal (error relativo) en $y = 512$	62
Figura 5. 32. Z_x para la lente cóncava.....	63
Figura 5. 33. Z_y para la lente cóncava.....	63
Figura 5. 34. Solución final de las ecuaciones diferenciales.....	64
Figura 5. 35. Topografía obtenida para una lente cóncava.....	64
Figura A. 1. Geometría en dirección y	69
Figura A. 2. Geometría en dirección x	70

Capítulo 1: Planteamiento general del proyecto

1.1 Objetivos

Los objetivos generales cubiertos en esta tesis son los siguientes:

- Implementación de un arreglo óptico que nos permita desarrollar la técnica de reflexión de franjas para superficies de tipo especular.
- Obtención de los modelos matemáticos basados en la geometría del arreglo óptico que relacionan la fase con la altura del objeto (topografía).
- Evaluación de la topografía de un objeto de prueba con superficie especular.

1.2 Justificación

Existe la necesidad de medir topografía no solo de superficies difusas sino también de superficies especulares (Figura 1.1), por lo que las técnicas ópticas de recuperación de la forma tridimensional de un objeto, son de gran interés en varios campos de aplicación como por ejemplo en áreas industriales como la automotriz, donde se necesita de conocer las dimensiones y características de las superficies de objetos especulares para la fabricación eficiente de piezas de mejor calidad o en el caso particular de la medicina donde es de sumo interés conocer la topografía de la córnea de manera no invasiva, para fines de investigación. En la actualidad ya se cuenta con varias técnicas ópticas que logran recuperar de manera muy precisa la forma 3D de superficies especulares. Estas técnicas se fundamentan básicamente en principios tales como dispersión de la luz y reflexión especular; sin embargo, estas técnicas no son tan difundidas y conocidas como las técnicas de medición de topografía para superficies difusas.



Figura 1. 1 Reflexión de superficies especulares.

1.3 Organización de la tesis

Capítulo 1. Planteamiento general del proyecto: En este capítulo se da una breve introducción al trabajo realizado y se describe los objetivos que se cubrirán dentro de esta investigación y por último se justifica la misma.

Capítulo 2. Revisión de conceptos básicos: En este capítulo se lleva a cabo una revisión de los conceptos básicos tales como el principio de Fermat, ley de reflexión, reflexión difusa y especular, y por último el comportamiento de la reflexión en una superficie tipo esférica.

Capítulo 3. Revisión de algunas técnicas en la medición de superficies especulares. En este capítulo se realiza una breve revisión de algunas técnicas para la reconstrucción de superficies especulares y por último se describe la teoría utilizada para la técnica de reflexión de franjas

Capítulo 4. Técnicas de obtención de fase. En este capítulo se presenta el método utilizado para obtener la fase envuelta y para el desenvolvimiento de fase.

Capítulo 5. Arreglo final y mediciones de topografía. En este capítulo se presenta y describe el esquema del arreglo utilizado y los resultados obtenidos mediante la aplicación de la teoría de reflexión de franjas.

Capítulo 6. Conclusión y trabajo futuro. En este capítulo se presentan la conclusión y el trabajo futuro de este trabajo.

Capítulo 2: Revisión de conceptos básicos

2.1 Introducción

En este capítulo se hace una revisión de los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de este trabajo, se presentan conceptos como el principio de Fermat el cual se explica brevemente al igual que la ley de reflexión, la reflexión especular y difusa, por último se analiza el fenómeno de reflexión en superficies curvas.

2.2 Principio de Fermat

En óptica geométrica la luz es modelada y representada por medio de rayos individuales propagándose en un medio homogéneo e isotrópico, es decir, que el medio es el mismo en cada punto y en cada dirección, por lo que la luz a una definida longitud de onda, en un medio con estas características, se propaga a una velocidad constante v .

La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente igual a 300 000 km/s y se representa por la letra c ¹. En cualquier medio transparente la velocidad v es menor que c , y su valor depende del medio que se considere, por lo que el índice de refracción n se puede definir en estos términos:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (2.1)$$

Si se supone un rayo luminoso que parte de un punto P y recorre una distancia d_1 en un medio n_1 hasta llegar a un punto P' ; a continuación recorre una distancia d_2 en un medio de índice n_2 y asumiendo cada uno de los medios homogéneos e isotrópicos, por lo que

la velocidad de la luz será constante y se definiría por $v_k = \frac{c_k}{n_k}$, y el tiempo empleado por la luz de ir del punto P a P' se define por:

$$t = \sum_k \frac{d_k}{v_k} = \frac{1}{c} \sum_k n_k d_k. \quad (2.2)$$

A la magnitud de $\sum_k n_k d_k$ se le denomina longitud de camino óptico y se suele representar como \mathcal{L} .

Hacia 1658, Fermat estableció que la trayectoria de un rayo luminoso propagándose de un punto a otro es la correspondiente al tiempo mínimo. En rigor, el tiempo invertido en la trayectoria real es un extremo o estacionario. Por consiguiente, si se modifica ligeramente la trayectoria, la diferencia de tiempo entre la trayectoria real y la modificada es un infinitésimo de orden superior al del desplazamiento entre las trayectorias. En la mayor parte de los casos, la trayectoria real es la del tiempo mínimo².

En la Figura 2.1, el camino óptico por el rayo reflejado es proporcional a $\frac{2}{\cos \alpha}$, donde $\alpha = \alpha'$ es el ángulo incidente y S el punto donde se refleja; para el camino óptico alternativo, donde el punto de reflexión es S_A , el camino óptico para ángulos pequeños es proporcional a $1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

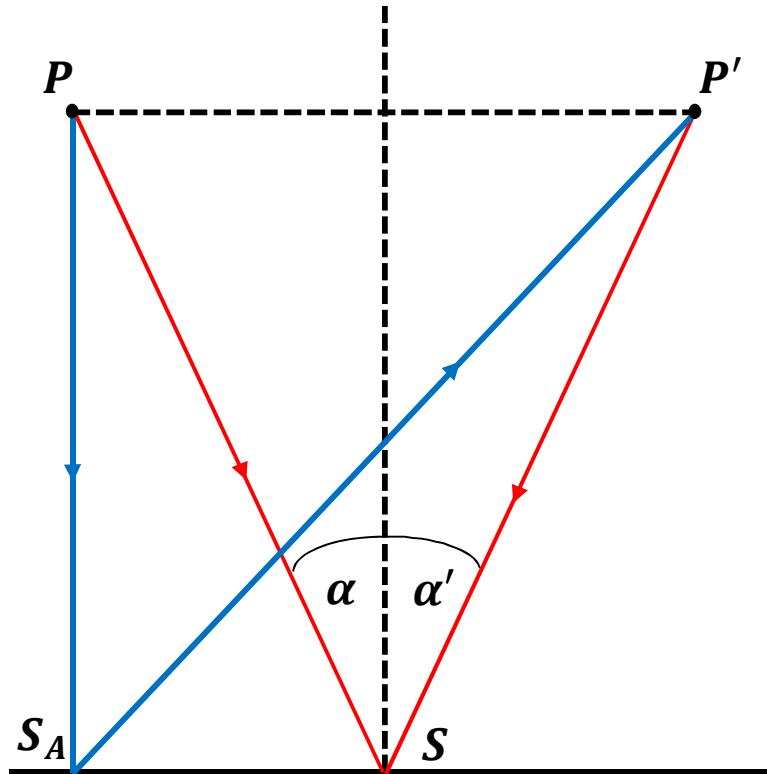


Figura 2. 1. Principio de Fermat y ley de reflexión.

2.3 Ley de reflexión

La reflexión que aquí se va a describir constituye la reflexión especular, que se produce cuando la superficie de separación es ópticamente lisa.

Si se supone un rayo luminoso que parte de un punto P, se refleja en O y sigue hasta llegar a un punto P', teniendo en cuenta que O se puede ubicar en cualquier punto de la superficie y trazando las perpendiculares de P y P', y la normal en O, como se puede observar en la Figura 2.2, los ángulos θ_i y θ_r representarían los ángulos de incidencia y de reflexión. Si se define $d_1 = \overline{PO}$ y $d_2 = \overline{P'O}$, la longitud de la trayectoria sería $d_1 + d_2$, por lo que el tiempo t a lo largo de la misma será $t = \frac{d_1 + d_2}{v}$, lo que se puede observar en la Figura 2.2 que:

$$d_1 = a \sec(\theta_i), \quad d_2 = b \sec(\theta_r). \quad (2.3)$$

Y de la Ecuación (2.2) se deduce que:

$$t = \frac{1}{v} (a \sec(\theta_i) + b \sec(\theta_r)). \quad (2.4)$$

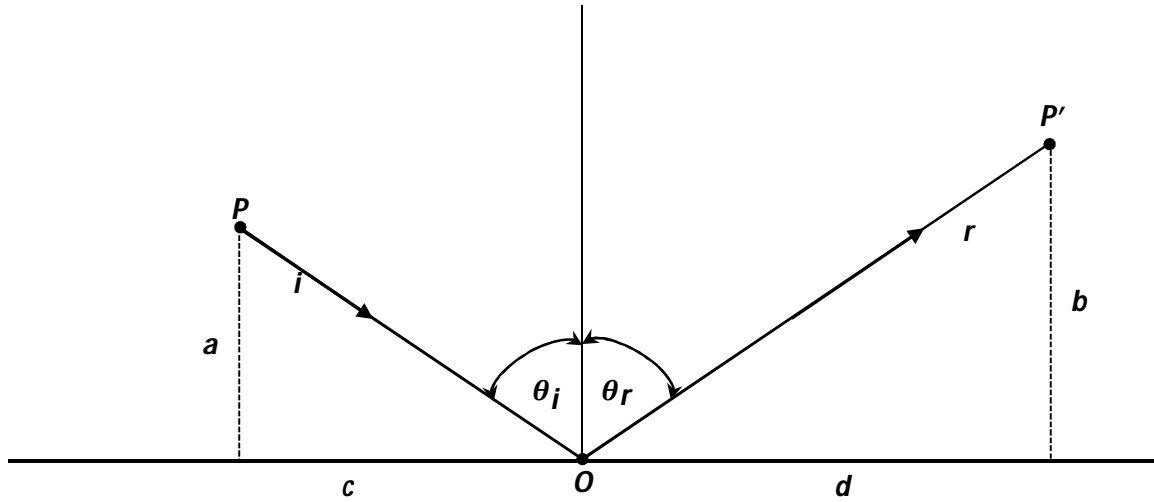


Figura 2. 2. Ley de reflexión usando el principio de Fermat.

Si se desplaza ligeramente el punto O, los ángulos θ_i y θ_r presentarán pequeñas variaciones $d\theta_i$ y $d\theta_r$, por lo que consecuentemente habrá una variación en el tiempo dt :

$$dt = \frac{1}{v} (a \sec(\theta_i) \tan(\theta_i) d\theta_i + b \sec(\theta_r) \tan(\theta_r) d\theta_r). \quad (2.5)$$

El tiempo estacionario es $dt = 0$, con lo que se obtiene:

$$a \sec(\theta_i) \tan(\theta_i) d\theta_i = -b \sec(\theta_r) \tan(\theta_r) d\theta_r. \quad (2.6)$$

Debido a que las diferencias $d\theta_i$ y $d\theta_r$ no son independientes y observando geoméricamente la Figura 2.2, se obtiene:

$$c + d = a \tan(\theta_i) + b \tan(\theta_r). \quad (2.7)$$

Derivando ambos lados se obtiene:

$$0 = a \sec^2(\theta_i) d\theta_i + b \sec^2(\theta_r) d\theta_r. \quad (2.8)$$

Usando la Ecuación (2.6) y (2.8) se obtiene:

$$\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r), \quad (2.9)$$

entonces,

$$\theta_i = \theta_r.$$

Por lo tanto la trayectoria POP' recorrida en el tiempo mínimo es aquella para la que el ángulo de reflexión es el mismo que el ángulo de incidencia². La ley de reflexión se divide en dos partes:

Primera Parte: *El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie especular se encuentran en un plano en común.*

Segunda Parte: *El ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales en magnitudes.*

Cuando ocurre una reflexión, no toda la energía de la luz incidente pasa al medio de transmisión. Puede demostrarse que si el ángulo de incidencia es nulo (incidencia normal), la relación entre la intensidad incidente I_i y la intensidad reflejada I_r es²:

$$I_r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_i. \quad (2.10)$$

Donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de ambos medios.

2.4 Reflexión especular y difusa

La mayoría de los objetos que se observan no son capaces de emitir luz por sí mismos, sino que cuando una superficie es expuesta a la luz, entonces los átomos de la superficie comienzan a absorber la energía de la onda proveniente del rayo de luz incidente, causando que éstos se vuelvan inestables y que recuperen su estabilidad liberando cierta cantidad de la luz absorbida por las órbitas de los electrones; en otras palabras, la superficie tiende inmediatamente a emitir o reflejar una porción de la energía recibida.

Los objetos deben su color a las características de su superficie para reflejar una específica longitud de onda y absorber las demás longitudes de onda.

La cantidad de luz reflejada en un objeto y la manera en como se refleja, depende en gran medida de la textura de la superficie. Cuando las imperfecciones de la superficie son más pequeñas que la longitud de onda de la luz incidente (como en el caso de un espejo), prácticamente toda la luz se refleja en una sola dirección, de la forma en que se muestra en la Figura 2.3. Sin embargo, en el mundo real la mayoría de los objetos tienen superficies rugosas que exhiben una reflexión difusa, y la luz que incide sobre esas superficies se refleja en todas las direcciones³.

Un rayo de luz que incide en una superficie lisa y bien pulida a cierto ángulo definido y que se refleja al mismo ángulo de incidencia, con respecto a la normal de la superficie, se le conoce como *reflexión especular*, Figura 2.3.

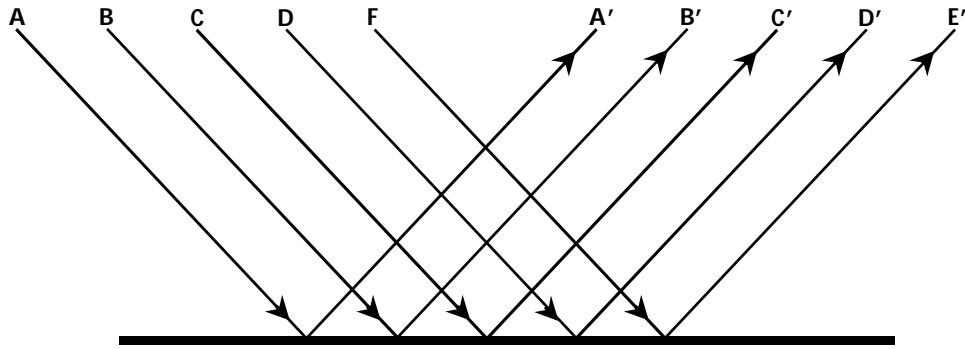


Figura 2. 3. Reflexión en una superficie de tipo especular.

Debido a que la reflexión de la luz se produce de una manera precisa y predecible, se pueden manipular las superficies reflectantes para redirigir un frente de onda, necesario para el propósito de obtención de imágenes. Esto puede ser ilustrado con un arreglo lineal de tres átomos de plata en la superficie de un espejo (Figura 2.4). Con una separación entre los átomos de ~ 1 Angström, el arreglo es esencialmente plano. A medida que el frente de onda incidente barre la superficie del arreglo, los átomos absorben la energía de la onda y emiten la mayor parte de la energía. Sin embargo, si el arreglo está inclinado con respecto al frente de onda incidente, la pendiente de la superficie causa un desplazamiento de fase. Esto a su vez resulta en el cambio de orientación del frente de onda principal, de modo que el ángulo de reflexión es un equivalente negativo del ángulo de incidencia. En otras palabras, el frente de onda se refleja en el ángulo de incidencia, sólo en el lado opuesto de la normal a la superficie³.

En la Figura 2.4 los átomos de plata absorben y re-emiten la energía de la onda en todas direcciones, debido a que la emisión de cada átomo siguiente se retrasa en tiempo, también es retrasado por una fracción de fase δ , lo que causa que la orientación de la línea de punto en fase cambie de pp_1 a $p'p'_1$, tal como se determina por $pp_1p'_1$ y $pp'p'_1$. A consecuencia, la sección de onda reflejada w_r , forma un ángulo $\alpha' = -\alpha$, con respecto a la normal de la superficie, y un ángulo de 2α con respecto a una sección del frente de onda incidente, el plano de reflexión en cualquier punto de la superficie por el rayo incidente y la normal a la superficie, la forma de la onda reflejada es determinada

por el frente de onda incidente y la superficie; la apropiada combinación de ambas producirá un frente de onda reflejado esférico.

Los rayos provenientes de los átomos vecinos son prácticamente paralelos entre sí, pero se unirán e interferirán en la zona focal del espejo. Como la pendiente del espejo cambia gradualmente a lo largo de su superficie, la pendiente del frente de onda reflejado se despliega desde el borde del espejo hasta el centro (Figura 2.4).

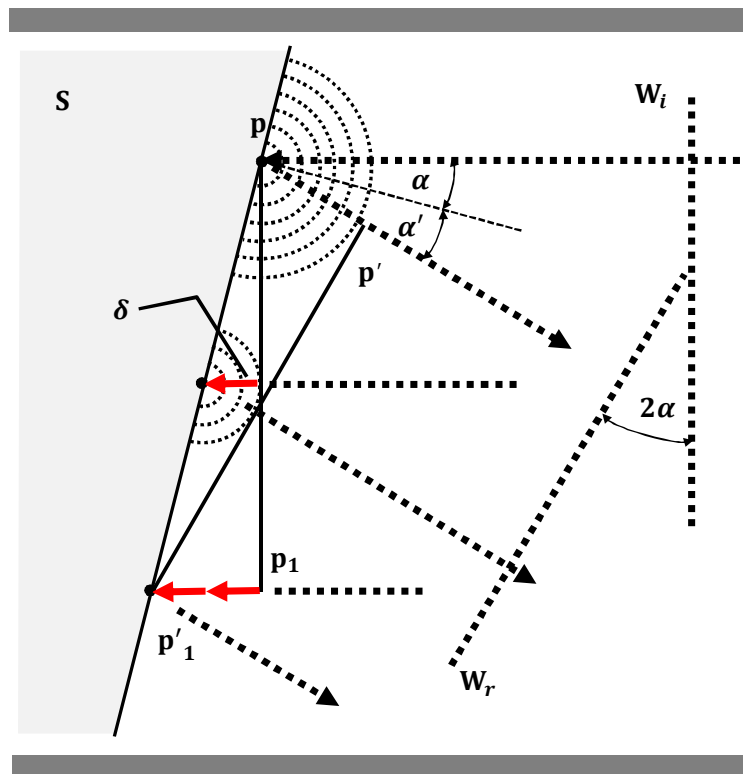


Figura 2. 4. Reflexión de un frente de onda que incide sobre una superficie inclinada.

En la Figura 2.4 se tiene:

w_i es el frente de onda plano incidente, orientado verticalmente.

S superficie reflectora inclinada a un ángulo α .

w_r es el frente de onda reflejado.

Cuando la superficie del objeto es rugosa, es decir, irregular entonces, a la reflexión que produce se le conoce como reflexión difusa: la luz es reflejada en diferentes direcciones. Esto se debe a que aunque se sigue cumpliendo la ley de reflexión, la normal en cada punto difiere al tratarse de una superficie rugosa⁴ (Figura 2.5).

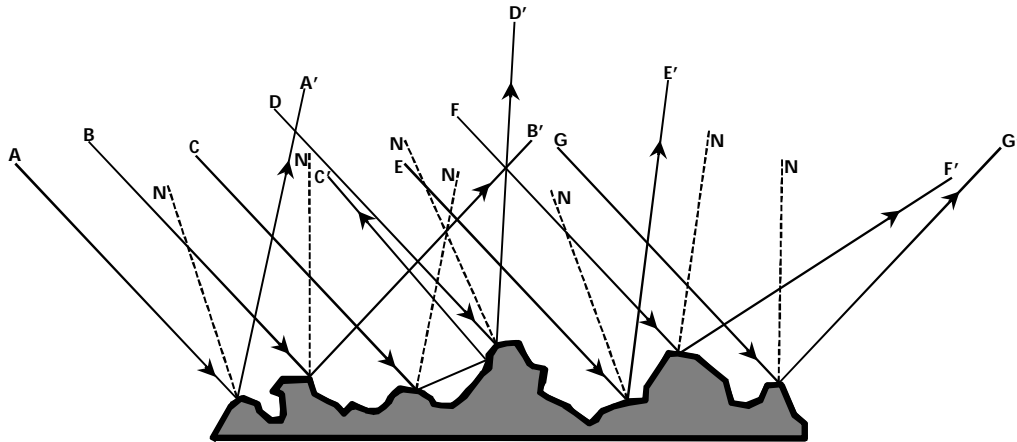


Figura 2. 5. Reflexión difusa.

Capítulo 3: Revisión de algunas técnicas en la medición de superficies especulares

3.1 Introducción

En este capítulo se revisan algunas metodologías para la reconstrucción topográfica de objetos cuya superficie es especular. Existen técnicas para la medición de la topografía de superficies especulares tales como los anillos de Plácido, métodos interferométricos, deflectometría de moiré, y reflexión de franjas. A continuación se da una breve introducción de cada una de las técnicas mencionadas y nos enfocaremos en la última técnica, reflexión de franjas, que es en la que se basa esta tesis.

3.2 Discos de Plácido

El médico portugués Antonio Plácido Da Costa (1848 - 1915) fue el que inventó los discos o anillos de Plácido al fabricar inicialmente un instrumento para medir la curvatura de la córnea, llamado *kerastoscopio*. Los discos de Plácido son una serie de anillos concéntricos iluminados, los cuales son reflejados por la superficie especular, y la imagen reflejada es captada por una cámara (CCD). Los anillos o discos de Plácido (Figura 3.1) se utilizan para medir superficies con curvaturas y su uso inicial y principal está enfocado a la obtención de la topografía de la córnea.

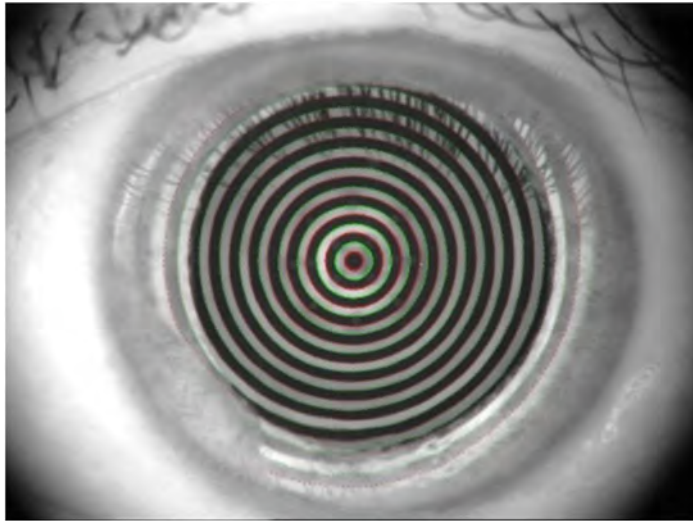


Figura 3. 1. Anillos de Plácido.

Esta técnica consta de 3 etapas básicas:

- Proyección de los anillos concéntricos de Plácido, sobre la córnea o la superficie curva.
- La captura de la reflexión de los anillos, por medio de la cámara CCD.
- Algoritmos de análisis y procesamiento de imágenes, para la obtención de resultados.

Mediante análisis matemáticos y algoritmos se puede conocer la ubicación del punto I (Figura 3.2) y su correspondiente punto P (fuente), lo que permite finalmente conocer la ubicación del punto $S(x, y, z)$ de la superficie de interés y poder representar mediante mapas de colores de altura z en función de la coordenadas (x, y) ⁶.

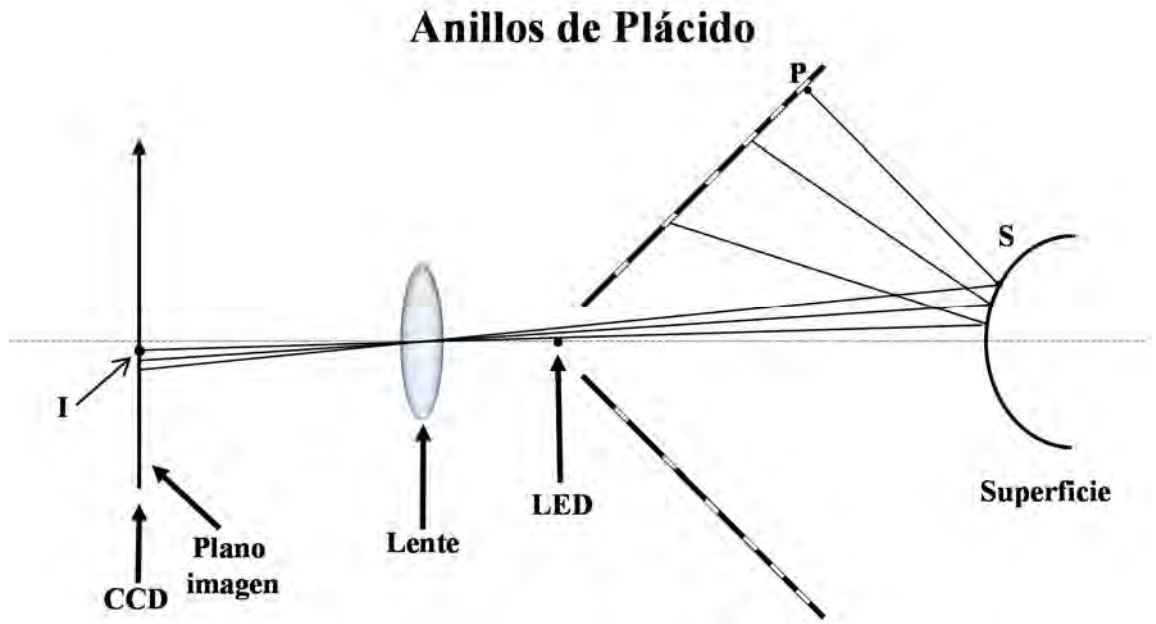


Figura 3. 2. Diagrama óptico del principio de los discos o anillos de Plácido.

3.3 Métodos interferométricos

El fenómeno de interferencia sucede cuando dos fuentes monocromáticas y coherentes se superponen entre sí, por lo que la intensidad en la región de superposición varía de un punto a otro entre un máximo y un mínimo de acuerdo a su fase relativa⁶.

La distribución de amplitud del campo eléctrico de los frentes de onda se pueden definir como:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_{01}(x, y, z; t) \exp[i(\omega t + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \delta_1)], \\
 E_2 &= E_{02}(x, y, z; t) \exp[i(\omega t + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \delta_2)],
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

donde ω es la frecuencia angular, \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 son los vectores de propagación de los dos haces, \mathbf{r} es el vector de posición, δ_1 y δ_2 son cantidades que se introducen para permitir la diferencia de fase ($\delta_1 - \delta_2$).

La distribución de intensidad en un punto (x, y, z) se puede obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 I(x, y, z) &= [\mathbf{E}_1(x, y, z; t) + \mathbf{E}_2(x, y, z; t)][\mathbf{E}_1(x, y, z; t) + \mathbf{E}_2(x, y, z; t)]^* \frac{1}{2} \varepsilon_0 c, \\
 &= \{\mathbf{E}_{01}^2 + \mathbf{E}_{02}^2 + 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} + \varphi]\} \frac{1}{2} \varepsilon_0 c,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

donde ε_0 es la permitividad del vacío, $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} + \varphi$ es la diferencia de fase entre los frentes de onda y $\varphi = \delta_2 - \delta_1$ es la diferencia inicial de fase.

Para lograr la interferencia entre dos frentes de onda provenientes de la misma fuente, se utiliza un arreglo óptico que se denomina “interferómetro”, el cual lo que hace es dividir la luz en dos haces que viajan en caminos diferentes para después superponerse y causar interferencia.

Un interferómetro puede medir deformaciones pequeñas del frente onda con alta precisión $< 0.1 \mu m$, por lo que los interferómetros constituyen una herramienta poderosa para medir superficies ópticas.

Existen dos métodos que son comúnmente usados para obtener dos o más haces del haz principal⁷:

- División por frente de onda.
- División de amplitud.

Un ejemplo de un arreglo interferométrico es el interferómetro Twyman–Green inventado por F. Twyman y A. Green (1916), que inicialmente fue creado para medir la superficie de prismas y objetivos de microscopios y después se adaptó para medir y probar superficies de lentes de cámara⁸.

Si se tiene un espejo convexo como superficie de prueba (Figura 3.3), el cual es colocado en el sistema interferométrico. Iluminado con una fuente puntual

monocromática S , el haz de luz es colimado por una lente (L_c) e incide sobre el divisor de haz BS , para obtener así dos frentes de ondas planos. Uno de los frentes de onda es dirigido a la lente L_2 , y el otro a un espejo M . La lente L_2 transforma el frente de onda plano en un frente de onda esférico convergente. Este frente de onda se refleja en la superficie especular y el frente de onda reflejado se convierte en un frente de onda distorsionado divergente. La deformación del frente de onda (objeto) con respecto al perfecto frente de onda referencia, contiene la información de la forma de la superficie especular⁶.

El frente de onda distorsionado divergente se dirige a la lente L_2 , y después de refractarse se obtiene un frente de onda distorsionado casi plano. Este es el frente de onda de prueba. Mientras tanto el frente de onda plano se dirige al espejo M , donde es reflejado como un frente de onda plano, este frente de onda se le conoce como de referencia.

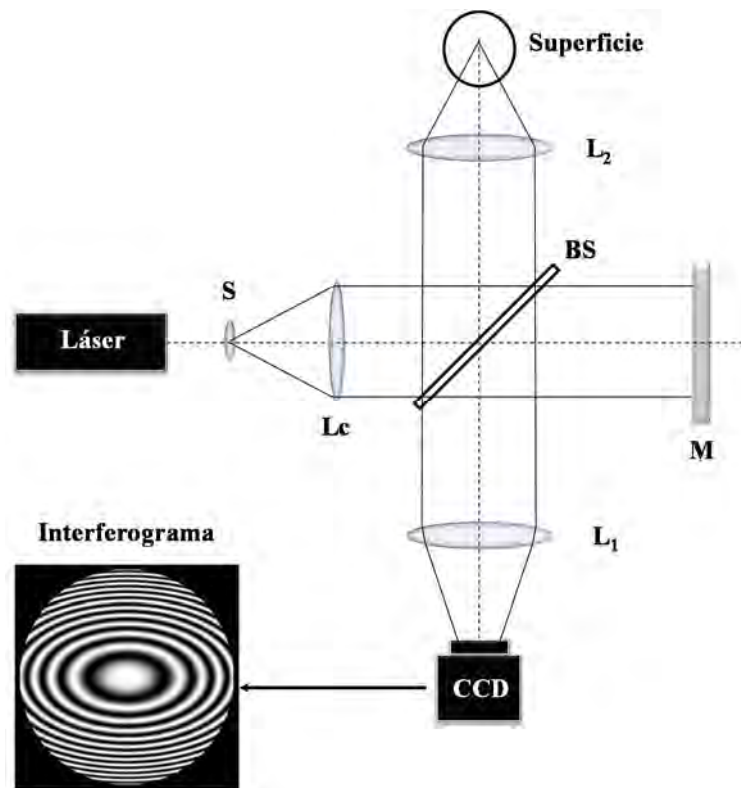


Figura 3. 3. Interferómetro de Twyman - Green para medir superficies especulares.

Finalmente, el frente de onda de prueba y el de referencia son superpuestos a lo largo de un camino común por medio del divisor de haz BS, y así conforman un patrón de interferencia. Las franjas de interferencia son proyectadas a través de la lente L_1 hacia el sensor CCD. La interferencia del patrón de franjas puede ser interpretada como un mapa de contornos de elevaciones de la superficie, donde la diferencia entre dos franjas consecutivas es igual a una diferencia de elevación de la mitad de la longitud de onda de la luz. La forma de la superficie especular se encuentra agregando la información obtenida por el mapa de contornos de elevación a los datos de la esfera de referencia.

3.4 Deflectometría de moiré

El método de deflectometría de moiré proporciona información acerca de la pendiente y de la curvatura del objeto. Este método consiste en superponer la imagen distorsionada de una rejilla sobre otra rejilla de referencia como se muestra en la Figura 3.4, las cuales se encuentran a una distancia d una de la otra. El haz de luz colimado es enfocado por la lente L_1 de manera que se proyecta hacia la superficie especular C . Si la superficie C es completamente esférica y el foco del haz convergente coincide con el centro de la superficie C , entonces el haz dirigido a la rejilla G_1 será colimado (frente de onda plano); si la superficie no fuera completamente esférica, entonces el haz dirigido a la rejilla G_1 será distorsionado. Con un frente de onda plano iluminando la rejilla G_1 , una perfecta imagen de esta rejilla se genera, incluso si todos los órdenes de difracción están presentes en el plano de la imagen, en un múltiplo entero de la distancia d . Esta distancia se conoce como la distancia de Rayleigh y su magnitud depende de la longitud de onda y el período de la rejilla. Este fenómeno es conocido como el efecto Talbot. Entonces una imagen bien definida de la rejilla G_1 se genera cerca de G_2 en comparación con la distancia de Rayleigh o en múltiplos enteros muy cercanos a la distancia de Rayleigh. Sin embargo, si el frente de onda no es plano entonces una imagen distorsionada de la rejilla se genera. Una segunda rejilla G_2 , se superpone sobre la imagen de la rejilla G_1 , produciendo así un patrón de moiré, cuya imagen es formada mediante la lente L_2 en la cámara CCD. Este patrón contiene información acerca de la dirección de los rayos reflejados sobre la superficie C con respecto a la esfera de referencia, es decir, sobre las

pendientes de la superficie en dirección perpendicular a las líneas de la rejilla. Sin embargo si la superficie no es esférica, las franjas de moiré se distorsionan con respecto a las franjas de referencia⁶.

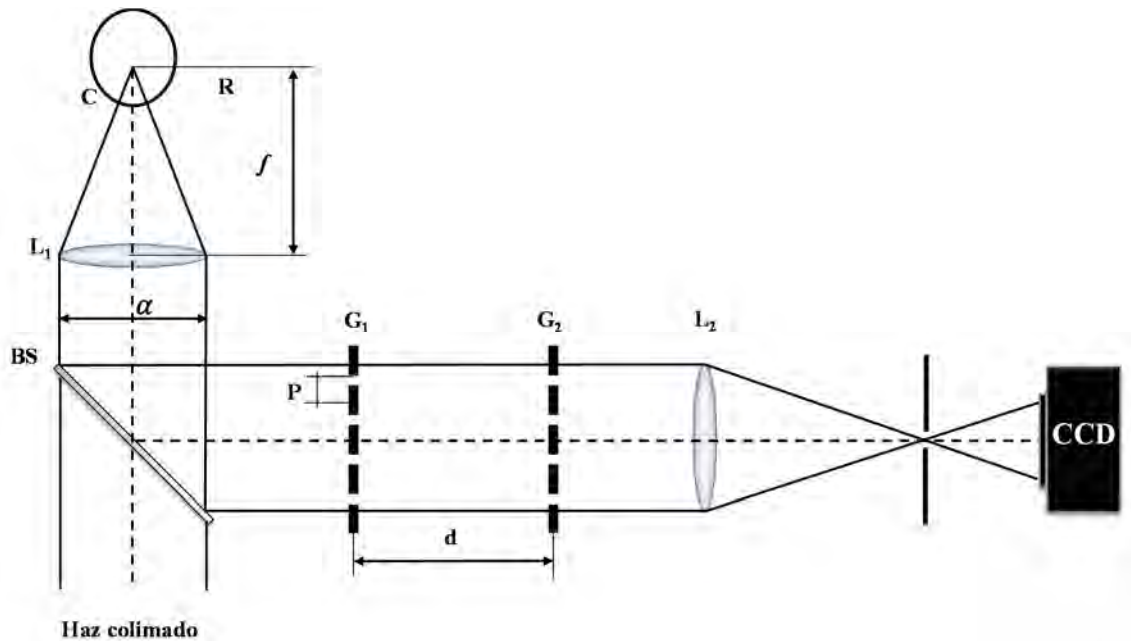


Figura 3. 4. Sistema óptico para la medición de superficies especulares utilizando la técnica de deflectometría de moiré.

3.5 Reflexión de franjas

3.5.1 Reflexión de franjas a incidencia normal

La técnica de reflexión de franjas se basa en la ley de la reflexión. El método consiste en tener un patrón de franjas en una pantalla plana la cual debe estar cerca del área de medición; este patrón se refleja en la superficie especular, la reflexión del patrón de franjas es captada por una cámara CCD. En el caso de que la superficie sea plana y sin imperfecciones el patrón observado será uniforme, en caso contrario, si la superficie tiene algunos cambios de altura, el patrón de franjas observado será distorsionado de acuerdo a la topografía de la superficie⁹.

Existen diferentes métodos para aplicar la técnica de reflexión de franjas. A continuación se dará una breve descripción de uno de los métodos experimentales de reflexión de franjas y en el subtema 3.5.2 se describirá el método usado en este trabajo.

En el arreglo óptico (Figura 3.5) se tiene una pantalla LCD 1 que se encuentra situada a cierta distancia de la superficie. Se genera un patrón de franjas en la pantalla LCD 1, el cual será reflejado mediante el objeto de prueba hacia la cámara CCD. Dependiendo de la forma topográfica del objeto de prueba, las franjas reflejadas aparecerán distorsionadas y una cámara CCD capta el patrón deformado debido a la reflexión en el objeto de prueba¹⁰. Se utiliza un divisor de haz para tener un sistema en línea¹¹.

Dos patrones de franjas son capturados, los cuales corresponden a dos posiciones diferentes de la pantalla LCD 1. Para obtener información de la fase de cada una de las dos posiciones se utiliza la técnica de desplazamiento de fase de cuatro pasos para cada posición.

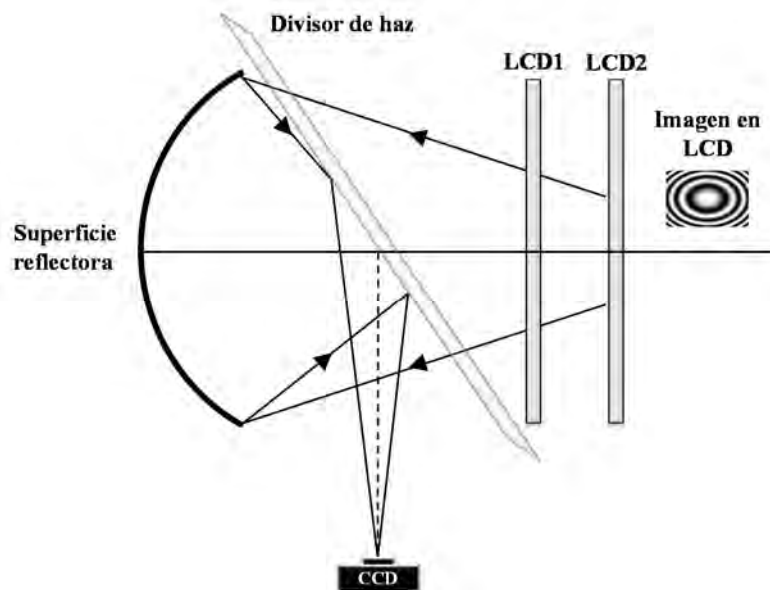


Figura 3. 5. Sistema óptico para la medición de una superficie reflectora cóncava.

Las fases son utilizadas para asociar los pares de puntos que son correspondientes y así realizar el trazo de rayos incidentes en la superficie reflectora.

Lo que se busca con el desplazamiento de LCD es obtener el vector incidente a partir de los patrones de fase, mientras que el vector reflejado se obtiene a través de los parámetros de la cámara. Este método utiliza un patrón de franjas cerradas (anillos concéntricos) con perfil senoidal. Con este método se calcula la pendiente de la superficie en cada punto y mediante la integración de una derivada radial obtenida en base a la geometría del arreglo¹⁰ se genera la reconstrucción de la superficie.

3.5.2 Reflexión de franjas a incidencia oblicua

En la Figura 3.6 se observa la geometría del arreglo óptico a incidencia oblicua, para la medición de la topografía de una superficie especular, donde se tiene una pantalla LCD que está a 90° con respecto al plano de referencia.

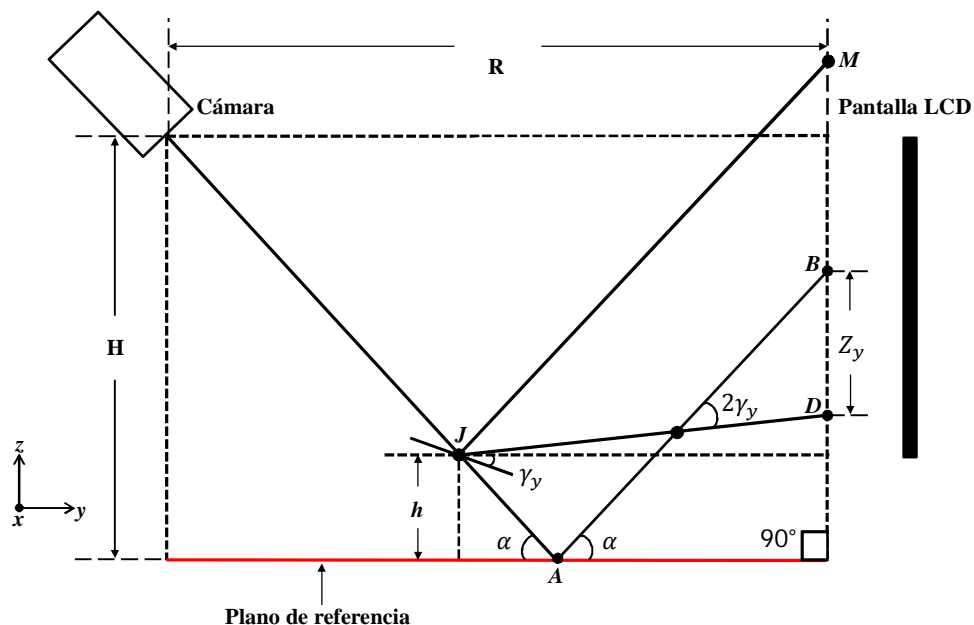


Figura 3. 6. Geometría del arreglo óptico para la medición de una superficie reflectora, R es la distancia de la cámara al monitor, H la altura del plano de referencia a la cámara y h la altura del objeto de prueba en cierto punto con coordenadas (x,y) .

En la pantalla LCD se despliega un patrón de franjas verticales y un patrón de franjas horizontales con perfil cosenoidal (Figura 3.7). Esto se debe a que se necesita medir el desplazamiento de las pendientes en dirección del eje x y del eje y , respectivamente⁹.

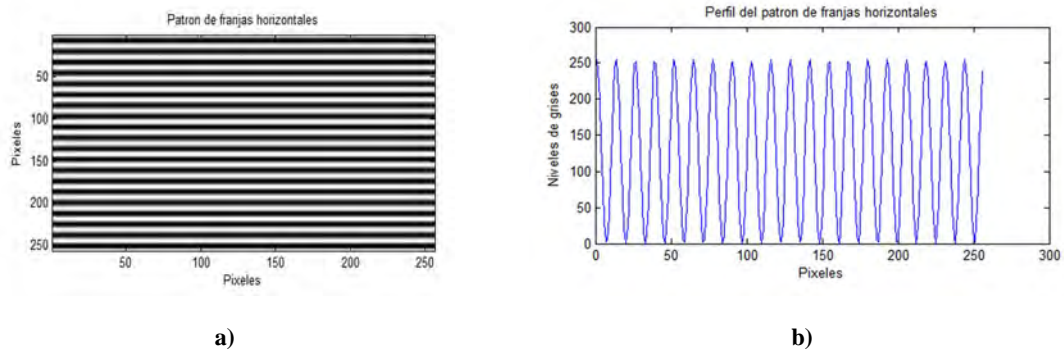


Figura 3. 7. Patrón de franjas horizontales y su perfil.

Analizando la geometría del arreglo experimental a lo largo de la dirección y , si se coloca una superficie plana en la escena de medición, se puede observar de la Figura 3.6 que la cámara ve el punto B en la pantalla (patrón de franjas) a través del punto reflectivo A. Si se coloca un objeto con un valor de altura h y que tiene una inclinación con un ángulo γ_y a lo largo de la dirección y , el punto J refleja el punto D del patrón de franjas visualizado en la pantalla LCD. Se observa de la geometría que la diferencia de distancias del punto B que se refleja en el plano de referencia y el punto D que se refleja en la superficie del objeto de prueba es proporcional a la altura h del objeto y la pendiente en ese punto⁹. Esta diferencia puede ser medida en términos de la fase. Teniendo en cuenta que la superficie tiene pendientes en la dirección x y y , la distribución del desplazamiento de fase, se obtiene en ambas direcciones. Estos términos de desplazamiento, causados por los ángulos γ_x y γ_y , respectivamente, son Z_x (Ecuación 3.3) y Z_y (Ecuación 3.4):

$$Z_x = \frac{T_x}{2\pi} \varphi_x, \quad (3.3)$$

$$Z_y = \frac{T_y}{2\pi} \varphi_y, \quad (3.4)$$

donde T_x y T_y son los períodos de la franjas (verticales y horizontales respectivamente) y φ_x y φ_y , son las fases correspondientes a cada desplazamiento.

Los términos de fase φ_x y φ_y , se calculan utilizando un algoritmo (ver capítulo 4) de cuatro pasos con un desplazamiento de $\omega_0 = \frac{\pi^{12}}{2}$:

$$\arg = I_1 - (1 + e^{-i\omega_0} + e^{-2i\omega_0})I_2 + (e^{-i\omega_0} + e^{-2i\omega_0} + e^{-3i\omega_0})I_3 - e^{-3i\omega_0}I_4, \quad (3.5)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Imag}\{\arg\}}{\text{Real}\{\arg\}} \right), \quad (3.6)$$

donde $\text{Imag}\{\arg\}$ y $\text{Real}\{\arg\}$, denotan a las operaciones de tomar la parte imaginaria y real respectivamente del argumento dentro de las llaves.

La Figura 3.8 muestra la configuración óptica a lo largo de la dirección x .

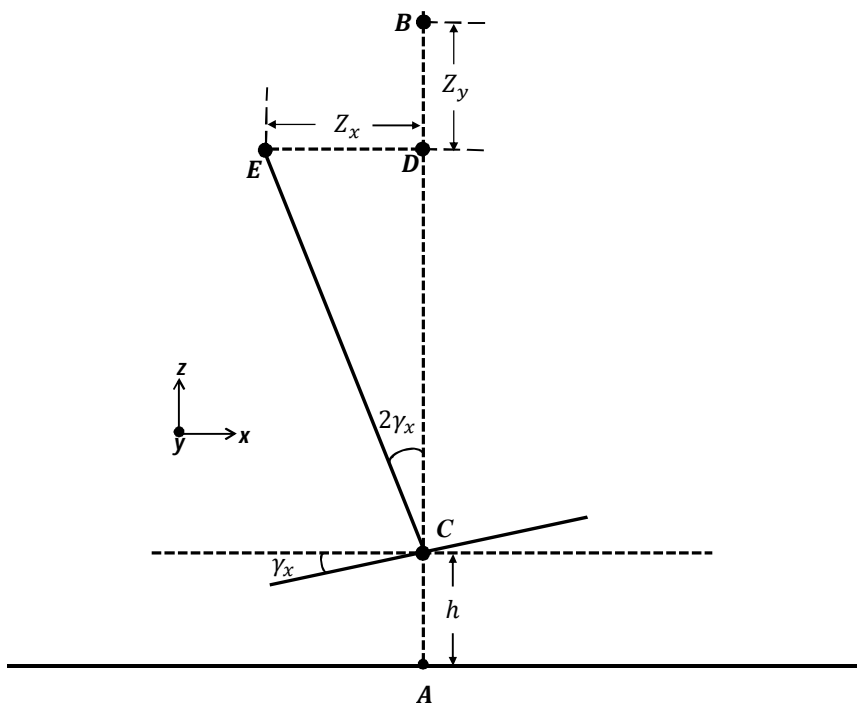


Figura 3. 8. Geometría a lo largo de la dirección x .

De relaciones trigonométricas, a partir de la configuración geométrica del arreglo óptico que se muestran en las Figuras 3.8 y 3.9, se obtiene las ecuaciones que hacen posible la reconstrucción de la superficie especular. El análisis se presenta en las siguientes secciones.

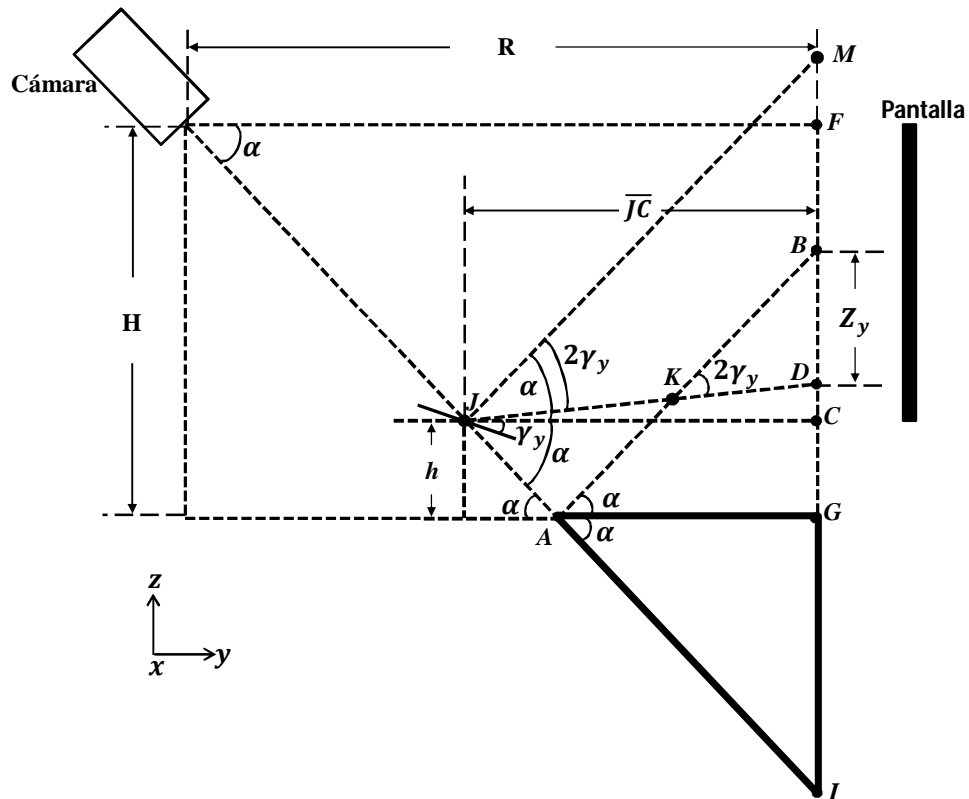


Figura 3.9. Geometría en la dirección y.

3.5.2.1 Obtención de la derivada en la dirección x

En base a la geometría de la Figura 3.8, obtenemos la Ecuación 3.7 (desarrollo completo Apéndice A).

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{Z_x}{R \tan \alpha - H - h - Z_y} \right). \quad (3.7)$$

$$\tan \gamma_x = \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Aplicando la función tangente al ángulo $2\gamma_x$ (Ecuación 3.7), se obtiene la ecuación diferencial,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{R \tan \alpha - H - h - Z_y}{Z_x}\right) - 1 = 0, \quad (3.9)$$

donde se usó: $\tan 2\gamma_x = \frac{\tan 2\gamma_x}{1 - \tan^2 \gamma_x}$.

Resolviendo la Ecuación 3.9 como una ecuación cuadrática obtenemos el término $\frac{\partial h}{\partial x}$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (3.10)$$

donde:

$$A = 1; \quad B = 2\left(\frac{R \tan \alpha - H - h - Z_y}{Z_x}\right); \quad C = -1.$$

Integrando la Ecuación 3.10 en la dirección x , nos da la solución para encontrar la distribución de alturas h en la dirección x .

3.5.2.2 Obtención de la derivada en la dirección y

En base a la geometría de la Figura 3.9, obtenemos la Ecuación 3.11 (desarrollo completo Apéndice A).

$$\gamma_y = -\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\tan \alpha \frac{R \tan \alpha - H - h - Z_y}{R \tan \alpha - H + h}\right) - \alpha\right]. \quad (3.11)$$

$$\tan \gamma_y = \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Similarmente,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h)}{\tan \alpha (2h + z_y)} \right) - 1 = 0. \quad (3.13)$$

La Ecuación 3.13 nos da la solución para encontrar la h en la dirección y , integrando en esa dirección.

3.5.2.3 Algoritmo

Para calcular el parámetro h que nos modela la topografía del objeto es necesario encontrar la solución a las Ecuaciones 3.9 y 3.13 y se utiliza un método rectangular simple iterativo, en el cual se propone un valor inicial $h = 0$. Utilizando integración numérica primero en una dirección x , se obtienen valores estimados de h para cierto renglón. Luego se repite el algoritmo en la otra dirección (para todas las columnas), usando como valor inicial para h los valores obtenidos de la primera integración.

El algoritmo se describe a continuación, utilizando una superficie curva para simular una semiesfera, Figura 3.10.

La superficie esférica se deriva numéricamente en ambas direcciones (x y y , Figura 3.11) y enseguida se le aplica el algoritmo de integración recuperándose la forma original de la semiesfera.

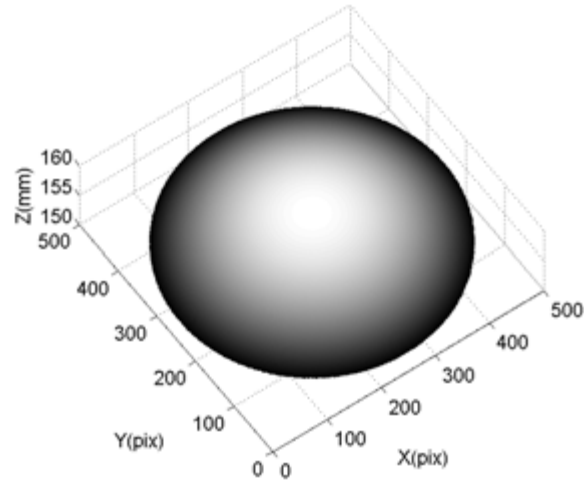


Figura 3. 10. Superficie esférica

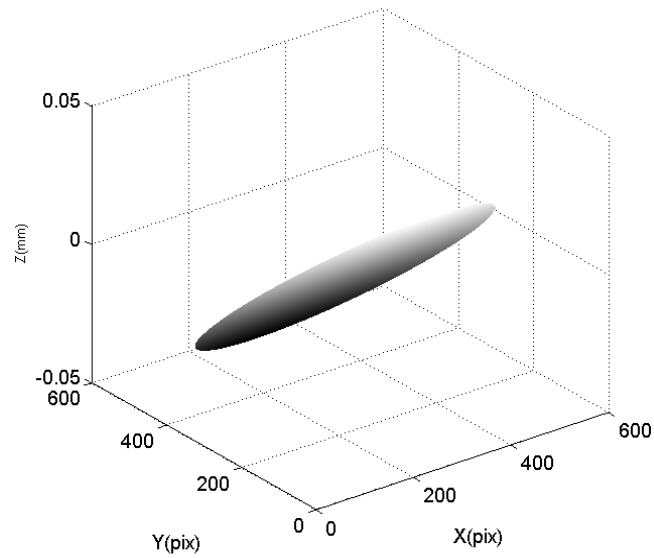


Figura 3. 11. Derivada numérica de la superficie esférica, es la misma para ambas direcciones x y y .

Primero se explica el algoritmo mediante el diagrama de bloques presentado en la Figura 3.12.

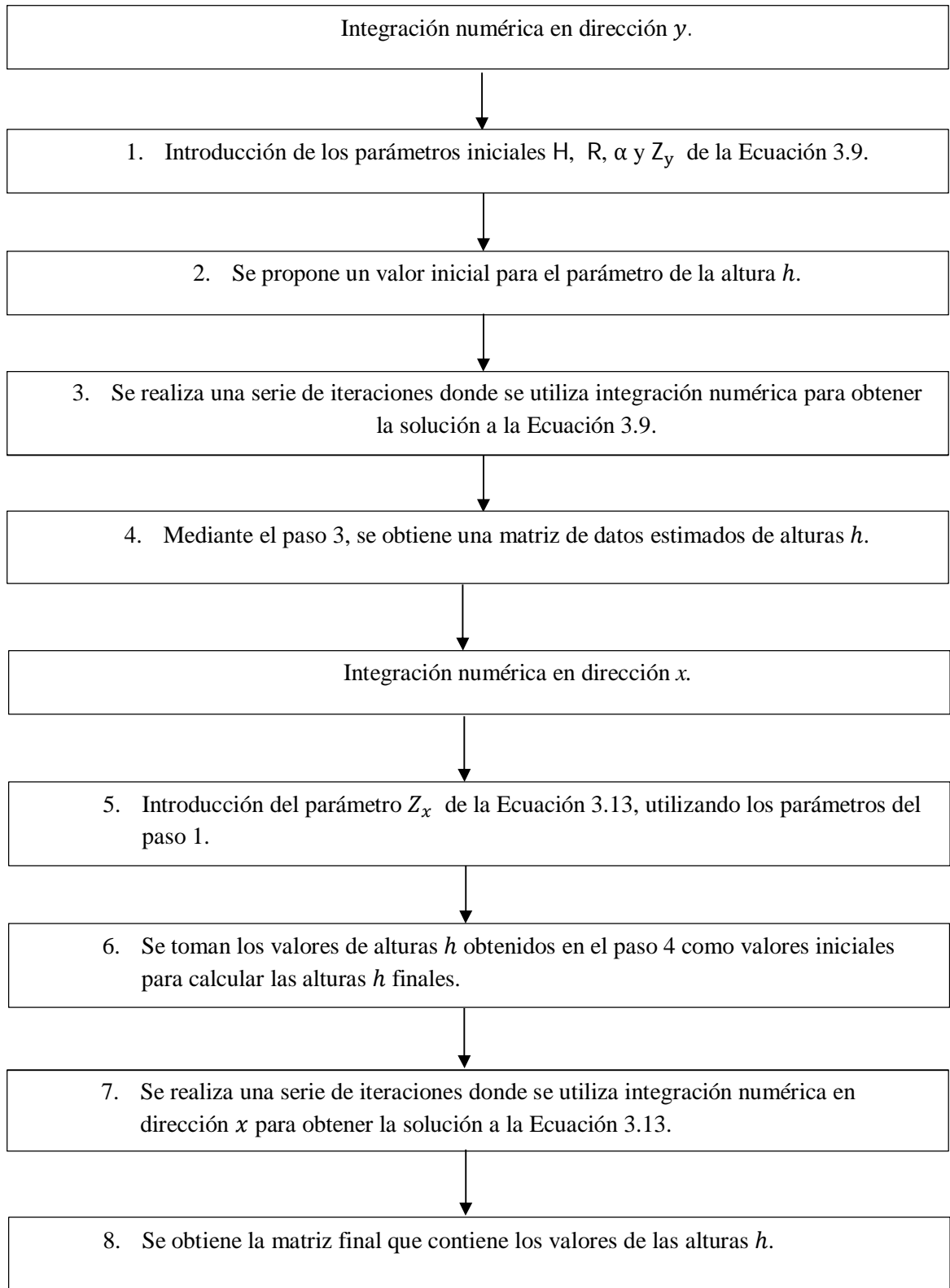


Figura 3. 12. Diagrama de bloques que describe el algoritmo de integración para la obtención de la forma 3D del objeto de prueba.

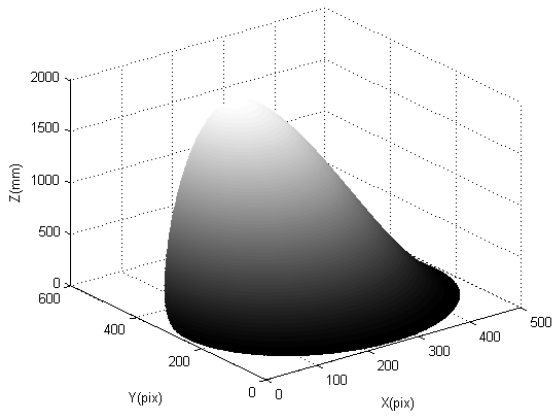
Integración numérica en dirección y .

1. Se introducen los parámetros H , R , α y Z_y , donde H es la altura de la cámara a al plano de referencia, R la distancia de la cámara a la pantalla LCD, α es el ángulo de inclinación de la cámara y Z_y es la matriz de desplazamiento de las pendientes en la dirección y .
2. Los valores iniciales que se proponen para las alturas h es cero.
3. Se resuelve la Ecuación 3.9 realizando 30 iteraciones y utilizando integración numérica.
4. Mediante el paso 3 se obtiene una matriz que contiene los primeros datos estimados de las alturas h .
5. Se introduce el parámetro Z_x (desplazamientos de las pendientes en dirección x).
6. Los valores iniciales h para las alturas se toman de la primera estimación del paso 4.
7. Se resuelve la Ecuación 3.13 realizando 30 iteraciones y utilizando integración numérica, tal como se hizo en el paso 3.
8. Mediante el paso anterior se obtiene el valor final de las alturas h .

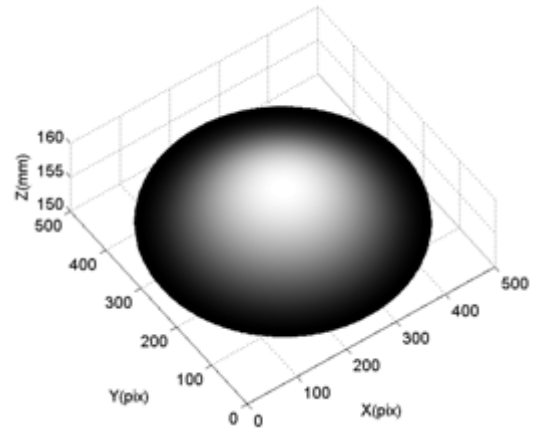
A continuación se utiliza la superficie de la semiesfera para aplicar el algoritmo.

1. Se deriva la superficie de la Figura 3.10 en ambas direcciones (x y y), Figura 3.11(a) y 3.11(b).
2. Se aplica el algoritmo de integración.

En la Figura 3.13 se muestran los resultados del algoritmo de integración de la Figura 3.12.



a)



b)

Figura 3. 13. Integración numérica de las derivadas de la esfera, utilizando el algoritmo de integración. a) En dirección x , b) En dirección y .

Capítulo 4: Técnicas en la obtención de fase

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los métodos utilizados para obtener la fase envuelta y la fase desenvuelta, mediante un algoritmo de desplazamiento de fase de 4 pasos. El método que se utiliza para obtener la fase envuelta se basa en algoritmo de mínimos cuadrados. Por su parte, para la fase desenvuelta se usa el algoritmo de Goldstein.

4.2 Método utilizado para la recuperación de fase

Para el cálculo de la fase envuelta se utilizó un algoritmo de mínimos cuadrados de desplazamiento de fase de 4 pasos, basado en el análisis lineal del algoritmo de Carré de desplazamiento de fase de 4 pasos¹².

$$H_4(\omega) = (1 - e^{-i\omega})(1 - e^{-i(\omega+\omega_0)})(1 - e^{-i(\omega+\pi)}), \quad (4.1)$$

donde ω es frecuencia en radianes, ω_0 es la frecuencia portadora temporal en radianes por interferograma y H es la función de transferencia.

Desarrollando la Ecuación 4.1:

$$H_4(\omega) = (1 - e^{-i(\omega+\omega_0)} - e^{-i\omega} + e^{-i(2\omega+\omega_0)})(1 - e^{-i(\omega+\pi)}). \quad (4.2)$$

$$H_4(\omega) = 1 - e^{-i(\omega+\pi)} - e^{-i(\omega+\omega_0)} + e^{-i(2\omega+\omega_0+\pi)} - e^{-i\omega} + e^{-i(2\omega+\pi)} + e^{-i(2\omega+\omega_0)} - e^{-i(3\omega+\omega_0+\pi)}. \quad (4.3)$$

Encontrando $F^{-1}(H_4(\omega))$, donde F^{-1} representa la operación de transformada inversa de Fourier, la respuesta al impulso de la Ecuación 4.3, se tiene:

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-1)e^{-i\pi} - \delta(t-1)e^{-i\omega_0} + \delta(t-2)e^{-i(\omega_0+\pi)} - \delta(t-1) + \delta(t-2)e^{-i\pi} + \delta(t-2)e^{-i\omega_0} - \delta(t-3)e^{-i(\omega_0+\pi)}. \quad (4.4)$$

La señal de entrada es:

$$s(t) = I_1\delta(t) + I_2\delta(t-1) + I_3\delta(t-2) + I_4\delta(t-3). \quad (4.5)$$

Realizando la convolución entre $h(t)$ y $s(t)$, obtenemos:

$$h(t) * s(t) = I_1 - (1 + e^{-i\omega_0} + e^{-2i\omega_0})I_2 + (e^{-i\omega_0} + e^{-2i\omega_0} + e^{-3i\omega_0})I_3 - e^{-3i\omega_0}I_4. \quad (4.6)$$

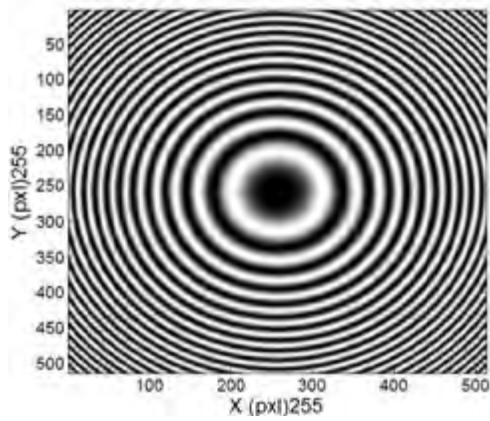
Tomando la parte real y la parte imaginaria del resultado de la convolución, calculamos la fase:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I(h(t)*s(t))}{R(h(t)*s(t))} \right). \quad (4.7)$$

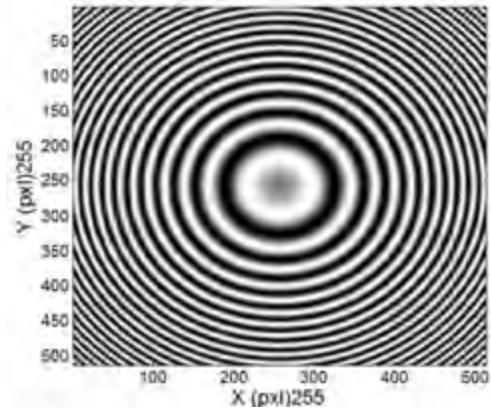
Se utilizó este método debido a que es un algoritmo robusto con rechazo a armónicos.

En la Figura 4.1 se muestran 4 patrones de franjas generados por computadora, con un

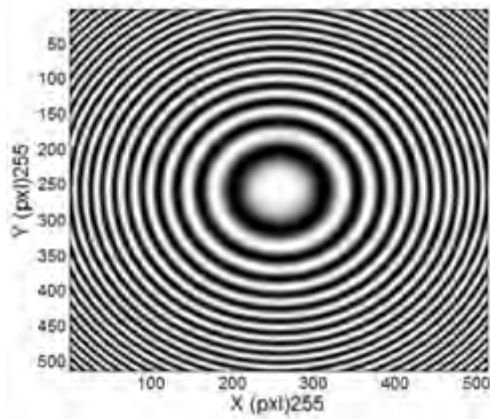
desplazamiento de $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.



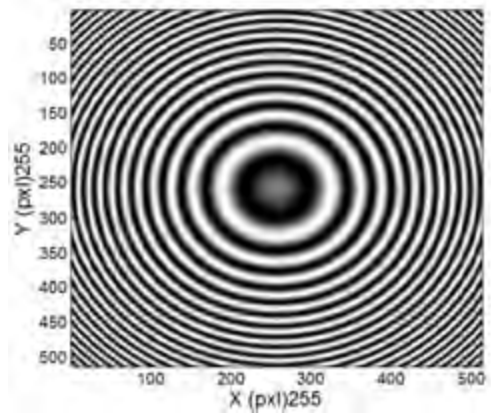
c) Paso 1



d) Paso 2



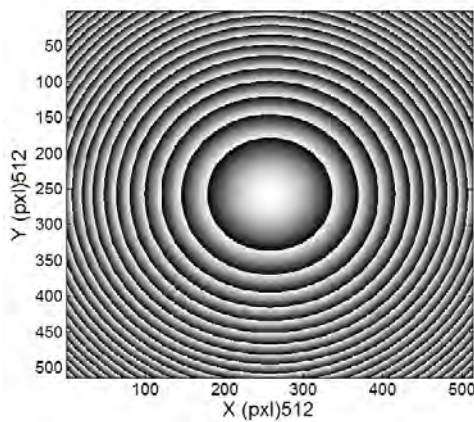
e) Paso 3



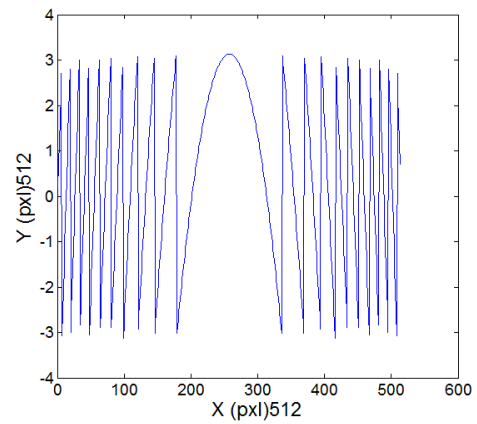
f) Paso 3

Figura 4. 1. Patrones de franjas generados por computadora.

Utilizando la Ecuación 4.7, se calcula la fase envuelta (Figura 4.2).



a)



b)

Figura 4. 2. a) Fase envuelta y b) Perfil de la fase envuelta.

4.3 Método utilizado para el desenvolvimiento de fase

El algoritmo de Goldstein es óptimo al generar un tipo de ramificación llamado “*branch cuts*” que sirve para enlazar residuos además de que es muy rápido; el término de residuo se utiliza para describir las discontinuidades o inconsistencias que se puedan encontrar en la fase. La base de este algoritmo es conectar los residuos más cercanos con *branch cuts* así los residuos son balanceados, es decir, conectados en pares de polaridad opuesta o grupos que contienen múltiples pares. Polaridad se le llama al signo del residuo, también se le conoce como carga del residuo. Los residuos también pueden ser balanceados conectándolos por medio de *branch cuts* al borde de la imagen. Los cortes son generados por un método que intenta minimizar la suma de las longitudes de los cortes.

El algoritmo de Goldstein¹³ opera de la siguiente manera, la imagen de la fase es escaneada pixel por pixel, hasta que un residuo es detectado. Una ventana de 3x3 pixeles es entonces colocada alrededor del residuo y se busca otro residuo. Si se encuentra un residuo, se coloca un *branch cut*, entre ambos residuos, incluso si el residuo tiene la misma polaridad. Si el residuo tiene polaridad opuesta, se designa como “balanceado” por el *branch cut*. Si el residuo tiene la misma polaridad, la búsqueda de la ventana de 3x3 continua. Cada vez que un nuevo residuo se encuentra es conectado por un *branch cut* al residuo en el centro de la máscara. Este residuo es conectado incluso si el residuo ha sido conectado anteriormente con otro. Si el residuo no ha sido conectado con otro residuo, su polaridad (1 o -1) se añade a la suma de polaridades de los otros residuos. Si el residuo se ha conectado ya con otros residuos, su polaridad no se añade, debido a que ya ha sido añadido anteriormente. Cuando la “carga” acumulativa llega a cero, los residuos se designan como balanceados. El teorema de los residuos asegura que estos residuos balanceados harán que el desenvolvimiento de fase sea independiente de la elección del camino de integración.

Si la carga acumulativa no es cero cuando la ventana de 3x3 termine su búsqueda, la máscara se centra en cada uno de los otros residuos encontrados. Si la carga

acumulativa sigue siendo diferente de cero, entonces la ventana se extiende (por un factor de 2) a una ventana de 5x5 píxeles que conecta cada uno de los residuos a su vez. Este proceso de ampliación y reubicación de la ventana continúa hasta que la carga acumulativa llegue a cero o hasta que alcance el borde de la imagen. En el último caso un *branch cut* es colocado en el borde de la misma. Los residuos son entonces designados como balanceados debido a que este *branch cut* prevendrá cualquier ruta que rodee a los residuos.

4.3.1 Representación de los residuos y *branch cuts* en las matrices

El residuo está definido por 4 píxeles y se adopta la convención de que el píxel superior izquierdo se marca como el residuo. También se toma la convención habitual en el procesamiento de imágenes, donde el píxel de la derecha se le coloca el índice mayor i , y el píxel de abajo se coloca el índice j . Entonces cuando se dice que hay un residuo en (i, j) , se hace referencia a los 4 píxeles: (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$ y $(i, j + 1)$ los cuales conforman el residuo. Debido a este convenio el *branch cut* que conecta dos residuos, Figura 4.3(a), se puede definir como en la Figura 4.3(b). No se tiene que incluir el píxel para el residuo en la parte superior izquierda, ya que sólo se necesita unir el centro de los cuatro píxeles, que está asociado actualmente con el residuo situado en la Figura 4.3(c).

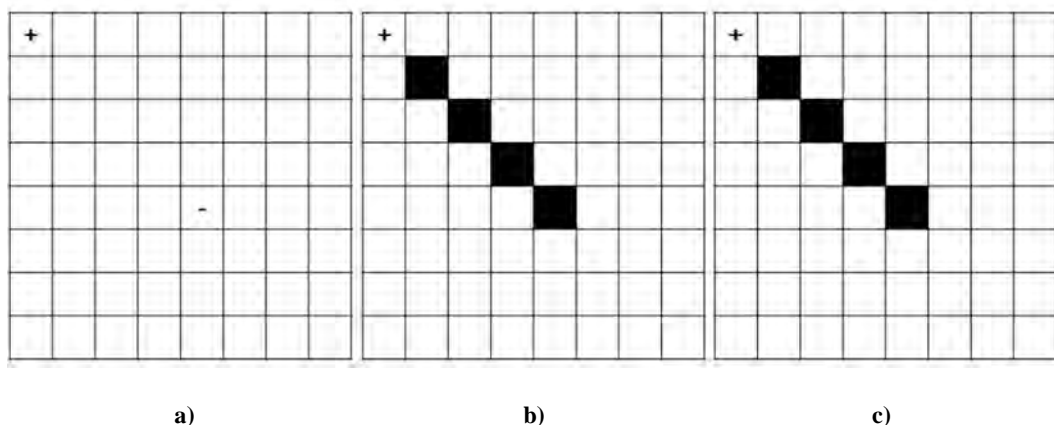


Figura 4. 3. . Conexión de dos residuos por medio del *branch cut*. a) Residuo positivo y negativo, b) El *branch cut* que une a los residuos se muestra por los píxeles negros, c) El *branch cut* no necesita incluir el píxel superior izquierdo, ya que solo une los centros de los cuatro píxeles que definen el residuo

El pseudocódigo consta de 3 pasos:

Paso 1. Identificar los residuos.

Paso 2. Generar el *branch cut*.

Paso 3. Camino de integración entorno del *branch cut*.

En la Figura 4.4 se muestra el desenvolvimiento de fase del algoritmo de Goldstein. Se tiene una fase con un conjunto de residuos, aplicando el algoritmo de Goldstein a la fase, éste genera los *branch cuts* (Figura 4.4).

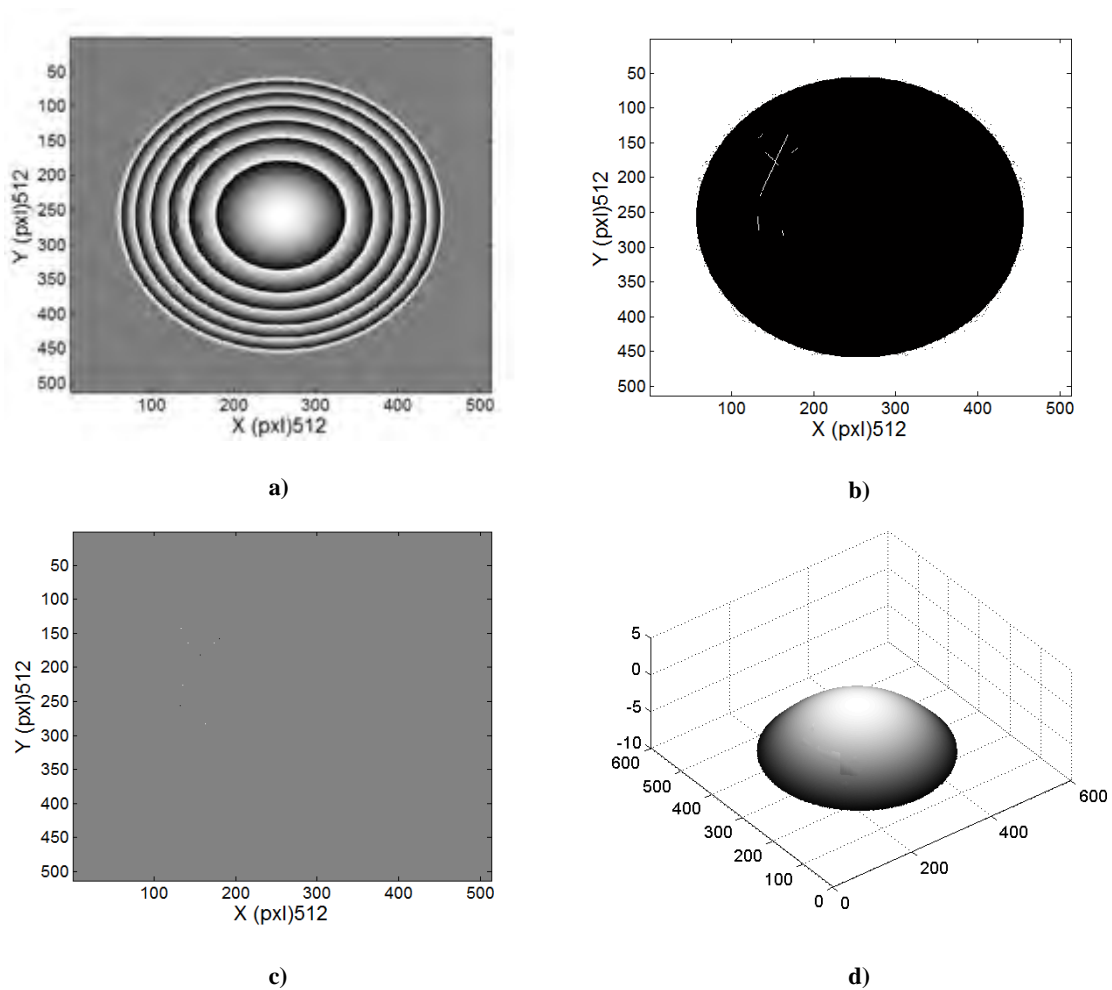


Figura 4. 4. Funcionamiento del algoritmo de Goldstein. a) Fase Envuelta, b) *Branch cuts*, c) Residuos encontrados. d) Fase desenvuelta.

Capítulo 5: Arreglo experimental y mediciones de topografía

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la evaluación y análisis de la topografía de objetos de tipo especular mediante la técnica de reflexión de franjas, los resultados obtenidos con esta técnica se comparan con los resultados obtenidos mediante un esferómetro. El esferómetro mide el radio de curvatura y la sagita de la superficie curva. Con el radio de curvatura se puede simular una superficie mediante MATLAB, la cual se toma como referencia y se hace la comparación con la superficie obtenida por medio de la técnica de reflexión de franjas. Se analizan dos tipos de superficies: convexa y cóncava.

5.2 Medición de la topografía de objetos especulares

5.2.1 Arreglo experimental

El arreglo experimental utilizado para la reconstrucción de la topografía de un objeto especular, se basa en el arreglo geométrico presentado en la sección 3.5.2 (Figura 3.6).

El equipo y componentes utilizados corresponden a:

Cámara con sensor CMOS (Pixelink)

Es una cámara monocromática (Figura 5.1) con un sensor CMOS, el obturador global del sensor CMOS es un obturador electrónico asíncrono que permite congelar el movimiento a alta velocidad. Cuenta con una resolución de 1.3 megapíxeles (1280x1024). El tamaño del píxel de la cámara es de $6.7 \mu\text{m} \times 6.7 \mu\text{m}$, la cámara opera a

27 cuadros por segundo (fps). El tamaño del sensor es de 8.57 mm x 6.86 mm - 11.01 mm diagonal. Tiene una profundidad de 8 bits.



Figura 5. 1. . Cámara con sensor CMOS PixeLINK, modelo PL-B741F.

La cámara fue colocada en una montura que le permitiera girar 360° sobre su eje horizontal. A la montura se le añadió un soporte metálico para poderla fijarla a la mesa holográfica (Figura 5.2).



Figura 5. 2. Esquema del montaje para soportar la cámara y su lente.

Lente Zoom 7000. (Navitar)

La Zoom 7000 (Figura 5.3) es una lente de enfoque cercano que permite fotografiar objetos con un diámetro de más de una pulgada. Esta lente tiene una relación de zoom de 6:1 con un aumento de 6x y un rango de distancias focales de 18 mm – 108 mm. Cuenta con una distancia focal posterior de 24.28 mm, un diámetro de filtro igual a $\varnothing 52$ P=0.50 y posición de la pupila para el plano imagen 238.60 mm.



Figura 5. 3. Lente zoom 7000 de Navitar.

Pantalla de LCD

La pantalla de LCD (Figura 5.4) es de la marca LG, modelo FLATRON W2043S. La pantalla mide diagonalmente 50.8 cm, con un tamaño de pixel de 0.2766 x0.2766 mm, resolución de 1600x900 @60Hz. A la pantalla se le quitó el soporte de fábrica y se le colocaron 2 soportes metálicos de manera que se pudiera fijar firmemente a la mesa holográfica.

Las dimensiones de la pantalla son:

- Ancho: 48.36 cm.
- Altura: 31.40 cm.
- Profundidad: 6.30 cm.



Figura 5. 4. Pantalla LCD, LG FLATRON W2043S.

Plataforma para el plano de referencia y objeto

El objeto de prueba y el plano de referencia fueron colocados en una plataforma la cual es mostrada en la Figura 5.5. La plataforma es sujeta a la mesa holográfica mediante componentes mecánicas mostradas en la misma figura.



Figura 5. 5. Plataforma para la colocación del plano de referencia y el objeto.

La plataforma cuenta con las siguientes características:

- Largo: 27.94 cm.
- Ancho: 20.5 cm.
- Altura: 14.3 cm. (De la base de la mesa holográfica a la plataforma.)

En la Figura 5.6 se muestra una vista lateral del arreglo experimental.

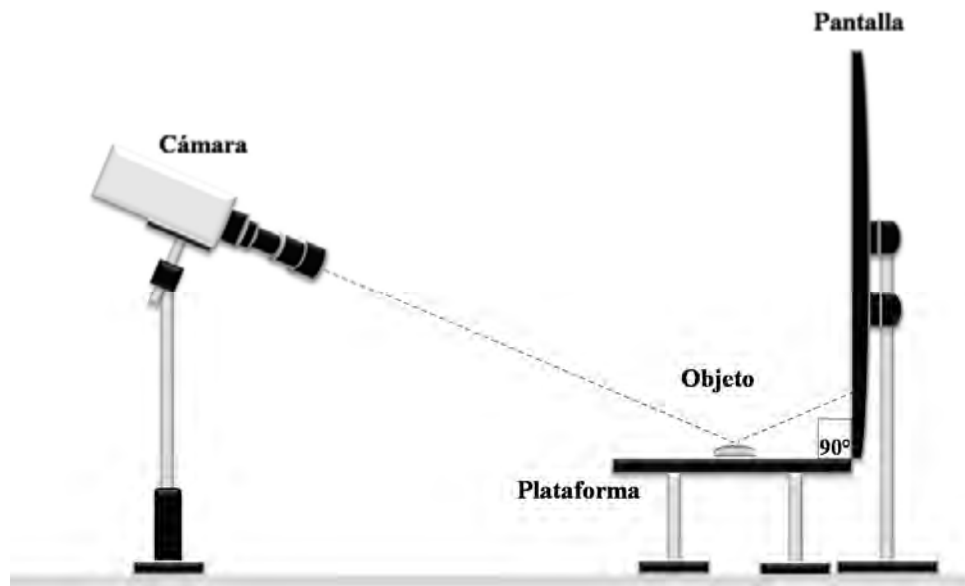


Figura 5. 6. Vista lateral del arreglo experimental.

La pantalla del LCD (donde se observa el patrón de franjas) y la plataforma forman un ángulo de 90^0 de acuerdo a la geometría propuesta en el desarrollo de la teoría de la técnica de reflexión de franjas.

La cámara se alineó de manera que el plano de referencia se encontrara en el centro de su campo de visión. Para esto se diseñó un software en MATLAB para el alineamiento y captura de las imágenes. Por medio del software se generaron un par de líneas perpendiculares entre sí, que formaban una cruz.

La cruz denotada como PL_1 se sobre puso a las imágenes que son capturadas por la cámara en tiempo real; por otro lado se dibujó el mismo patrón de líneas sobre la plataforma de referencia, este patrón se designó como PL_2 . Para lograr alinear el plano de referencia con el campo de visión de la cámara se hizo coincidir PL_1 con PL_2 .

En la Figura 5.7 se muestra el patrón PL_1 sobre puesto en el patrón PL_2 , de esta manera el plano de referencia queda aproximadamente en el centro del campo de visión de la cámara.

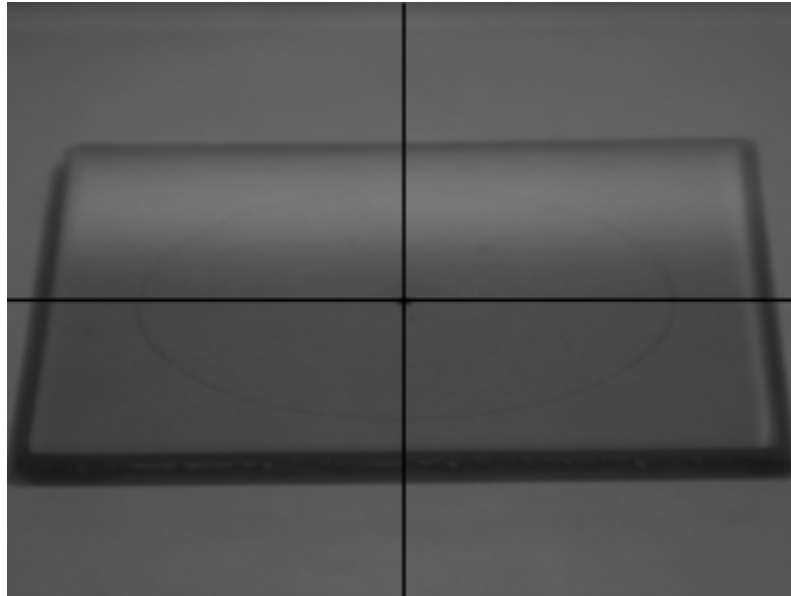


Figura 5. 7. Alineación de PL1 con PL2.

El cálculo de los parámetros H y α se realizó de la siguiente manera:

Para calcular el parámetro H se midió la distancia de la mesa holográfica a la cámara, la cual fue de 28.5 cm; y se midió la distancia de la mesa holográfica a la plataforma, la cual fue de 14.3 cm. Restando estas dos distancia encontramos H .

Para el cálculo del parámetro α , se midió la distancia de la cámara a la pantalla (R), la cual fue de 41 cm; luego se midió la distancia del monitor al centro del plano de

referencia, la cual fue de 7.9 cm. Restando la primera distancia (R) de la segunda medida, se obtuvo d con un valor de 33.1 cm (Figura 5.8).

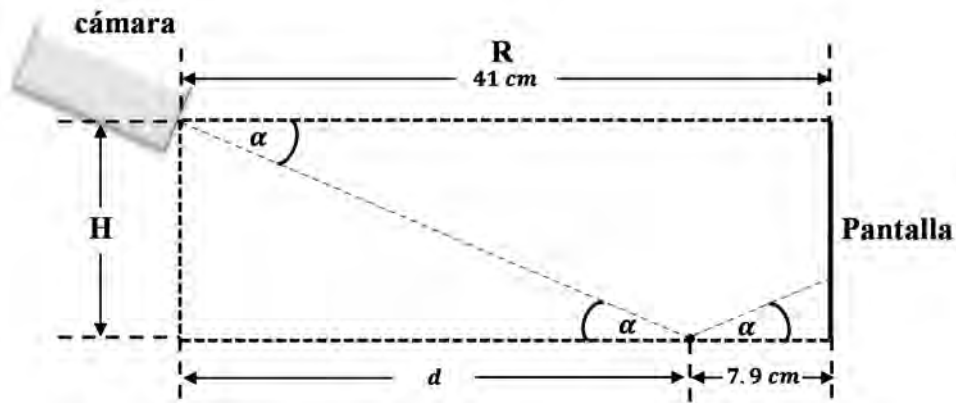


Figura 5. 8. Geometría para encontrar α .

Calculamos α de la siguiente manera, mediante la función tangente:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{H}{d}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{14.2 \text{ cm}}{7.9 \text{ cm}}\right) = 23.2194^\circ. \quad (5.1)$$

A continuación se muestran los parámetros y dimensiones del arreglo que son necesarios para la solución de las Ecuaciones 3.9 y 3.13 de la sección 3.5.2. H, R y α :

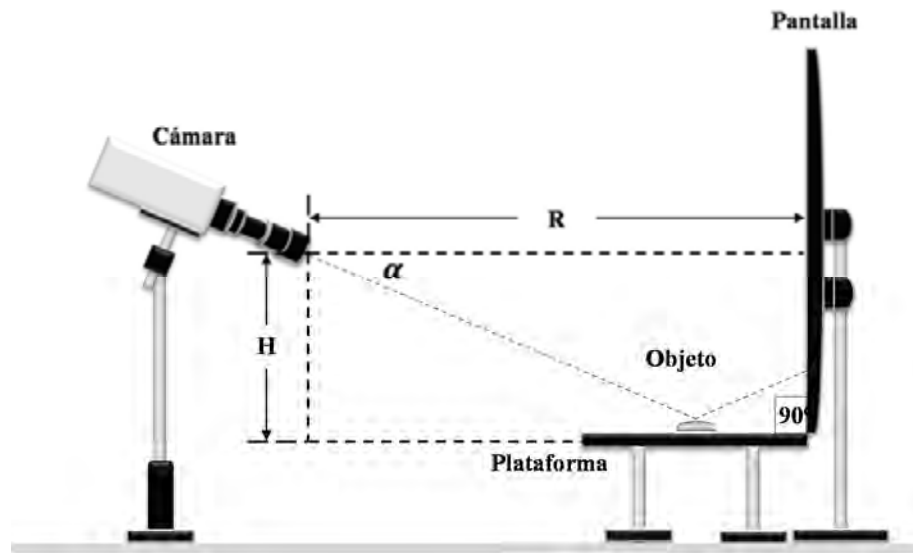


Figura 5. 9. Perfil del arreglo experimental que indica los parámetros utilizados.

La Figura 5.10 muestra una foto del sistema óptico implementado.

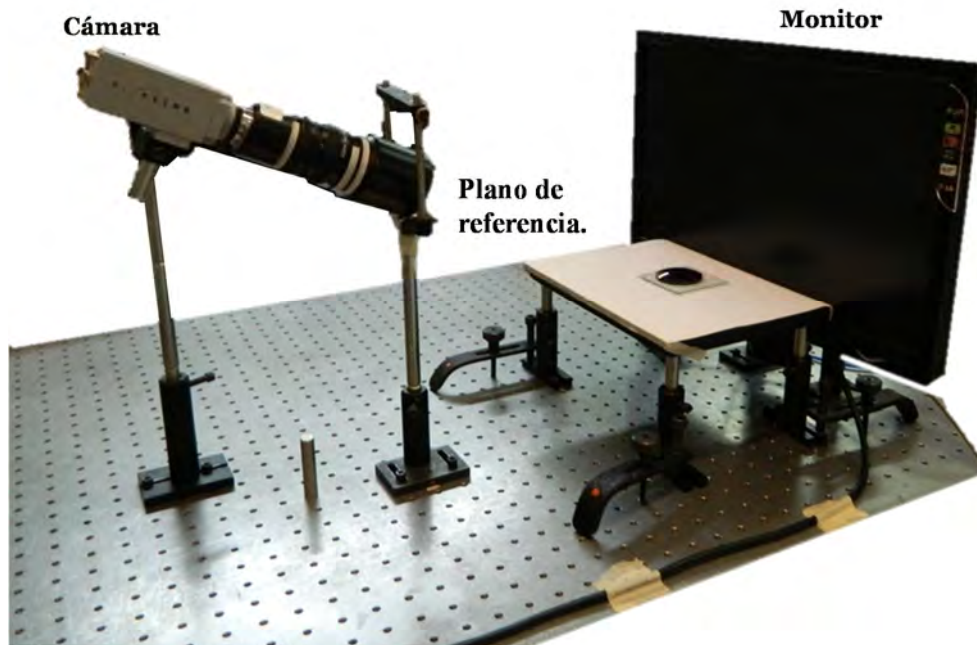


Figura 5. 10. Foto del sistema óptico de reflexión de franjas.

5.2.2 Objetos de prueba

Se utilizaron dos objetos especulares de prueba correspondiente a un par de lentes correspondientes a una convexa y una cóncava.

Lente convexa

El radio de curvatura de las lentes convexa y cóncava fueron medidos mediante un esferómetro Figura 5.11. Para el caso de la lente convexa la sagita (s) es de 0.383 mm. Utilizando la Ecuación 5.2¹⁴ se tiene que el radio de curvatura es de 202.240 mm.

$$r = \frac{a^2}{6s} + \frac{s}{2}, \quad (5.2)$$

donde $a = \sqrt{2\rho}$ y ρ es el radio circunscrito alrededor de las puntas del esferómetro siendo s la sagita.

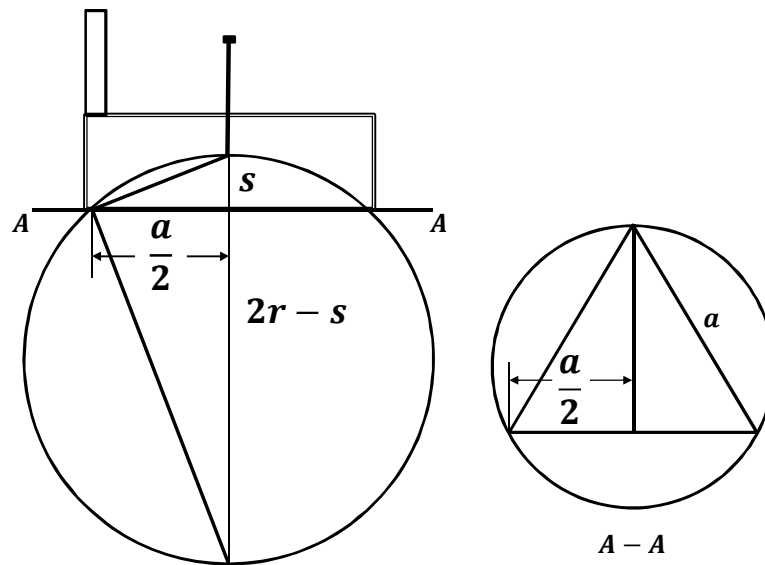


Figura 5. 11. Esferómetro.

Utilizando el radio de curvatura se genera una superficie sintética que representa la topografía de la lente convexa y con la cual se puede comparar la topografía obtenida ópticamente.

La altura o grosor de la lente es de aproximadamente 7 mm, y mide 5 cm de ancho.



Figura 5. 12. Lente plano convexa.

Lente cóncava

En el caso de la lente plano cóncava, la sagita es de 2.037 mm y el radio de curvatura calculado es de 157.457 mm.

El grosor de la lente es de aproximadamente 1.1 mm, y mide 8 cm de diámetro.



Figura 5. 13. Lente plano cóncava.

Como plano de referencia se utiliza un vidrio plano rectangular cuyas dimensiones corresponden a 7.1 cm x 6.85 cm x 0.2 cm.

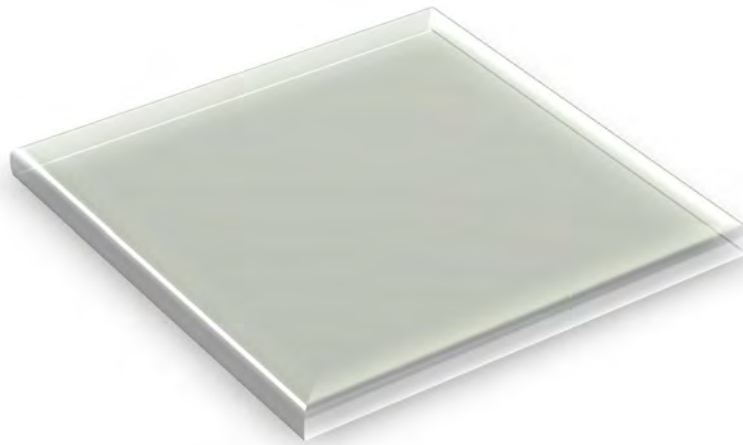


Figura 5. 14. Plano de referencia.

5.3 Reconstrucción de topografía

5.3.1 Topografía de la lente plana convexa

Como se comentó en la sección 3.5.2, la técnica de reflexión de franjas básicamente realiza una evaluación del patrón de franjas reflejado en el objeto especular con respecto

al reflejado por un plano de referencia; esta evaluación la lleva a cabo mediante la cuantificación de las pendientes en cada punto del objeto para la dirección x y la dirección y .

La cámara CMOS capta la imagen virtual que se forma por la reflexión de una superficie convexa y la convierte en una imagen real mediante el sistema de lentes que contiene, es decir que lo que el sensor CMOS ve es un punto de la pantalla LCD. En el caso del plano de referencia, las franjas reflejadas no sufren una distorsión apreciable, por lo que la cámara captura el patrón de franjas reflejado sin deformación apreciable. En cambio al colocar una superficie con cierta curvatura, el patrón de franjas reflejado sufre una distorsión apreciable.

Para el plano de referencia, el sensor CMOS capta un punto B de la pantalla, tal como se muestra en la Figura 2.12 de la sección 2.5. Al colocar un objeto especular de altura h y con cierta curvatura, el punto B sufre un desplazamiento debido a la pendiente del objeto; ahora la cámara observa el punto D. Este desplazamiento se cuantifica en términos de fase en ambas direcciones (φ_x y φ_y).

Para poder calcular los desplazamientos Z_x y Z_y , es necesario proyectar franjas cosenoidales, verticales (para la dirección x) y horizontales (para la dirección y), como las que se muestran en la Figura 5.15.

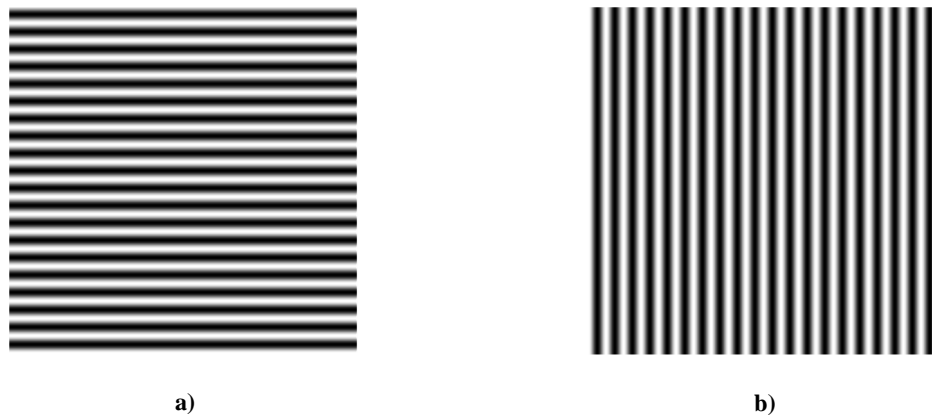


Figura 5. 15. Patrón de franjas. a) Franjas horizontales, b) Franjas verticales.

Para este experimento se utilizó una frecuencia de 20 líneas/imagen y el periodo para cada dirección fue de $T_x = 2.225$ cm y $T_y = 2.2909$ cm.

En la Figura 5.16 se observan el patrón de franjas verticales reflejadas por el plano de referencia, y debido a que se utiliza un algoritmo de 4 pasos, se muestra también los desplazamientos de $\frac{\pi}{2}$, que hay entre cada imagen capturada.

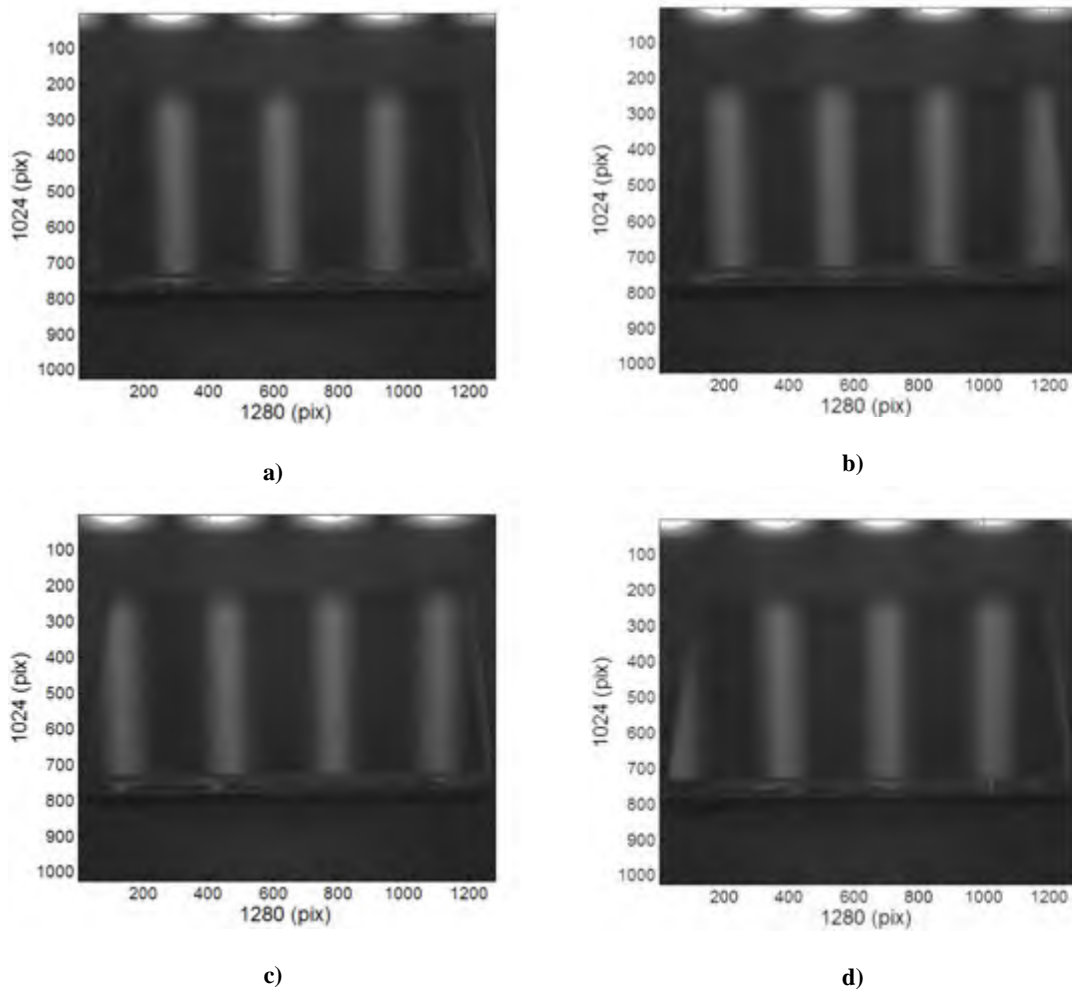


Figura 5. 16. Patrón de franjas verticales reflejado en el plano de referencia. a) Paso 1 desplazamiento 0 , b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$.

El plano de referencia se coloca sobre la plataforma descrita en esta sección, y mostrada en la Figura 5.5. El objeto de prueba, en este caso la lente plano – convexa, se coloca sobre el plano de referencia (Figura 5.17).

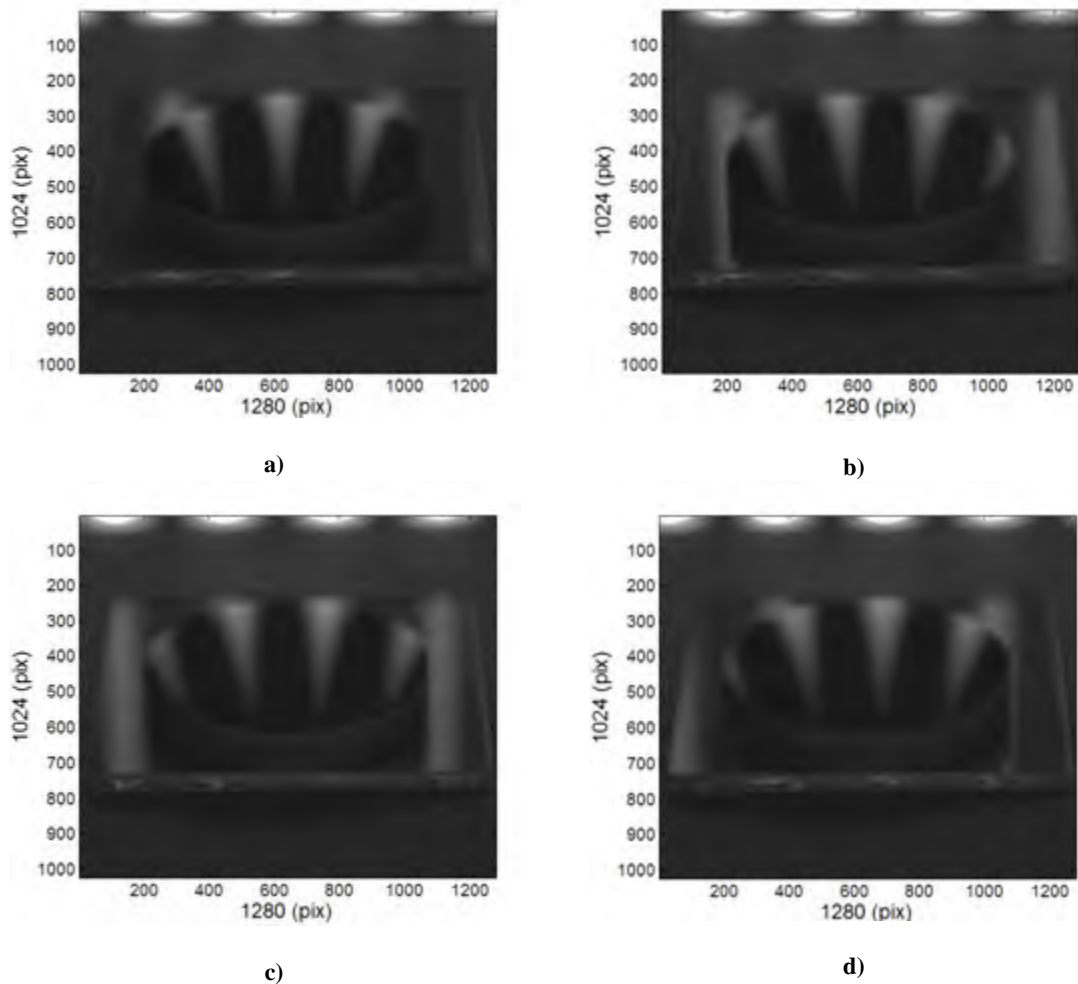


Figura 5. 17. Patrón de franjas verticales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$.

En la Figura 5.17 se puede apreciar la deformación del patrón de franjas sobre el objeto con respecto al plano de referencia.

La reflexión del patrón de franjas verticales nos da el desplazamiento Z_x en dirección x (Figura 5.17) y la reflexión del patrón de franjas horizontales nos da el desplazamiento Z_y en dirección y (Figura 5.18).

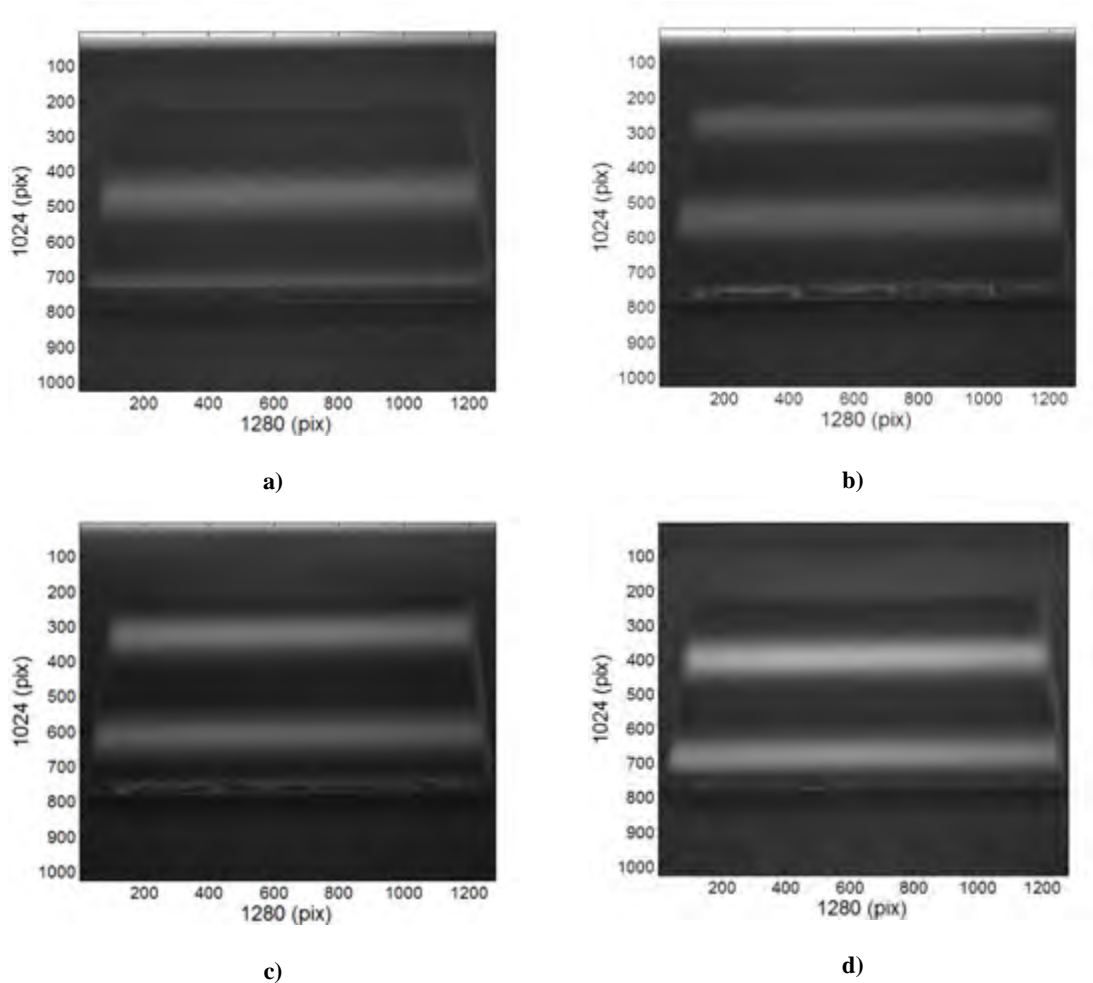


Figura 5. 18. Patrón de franjas horizontales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$.

En la Figura 5.19 se muestra la deformación del patrón de franjas horizontales reflejado con respecto al del plano de referencia. Se puede observar también que el patrón de franjas horizontal se refleja con franjas del mismo ancho, mientras que el patrón de franjas vertical reflejado, se observan franjas más gruesas en la parte superior y se van haciendo más angostas conforme nos acercamos a la parte inferior.

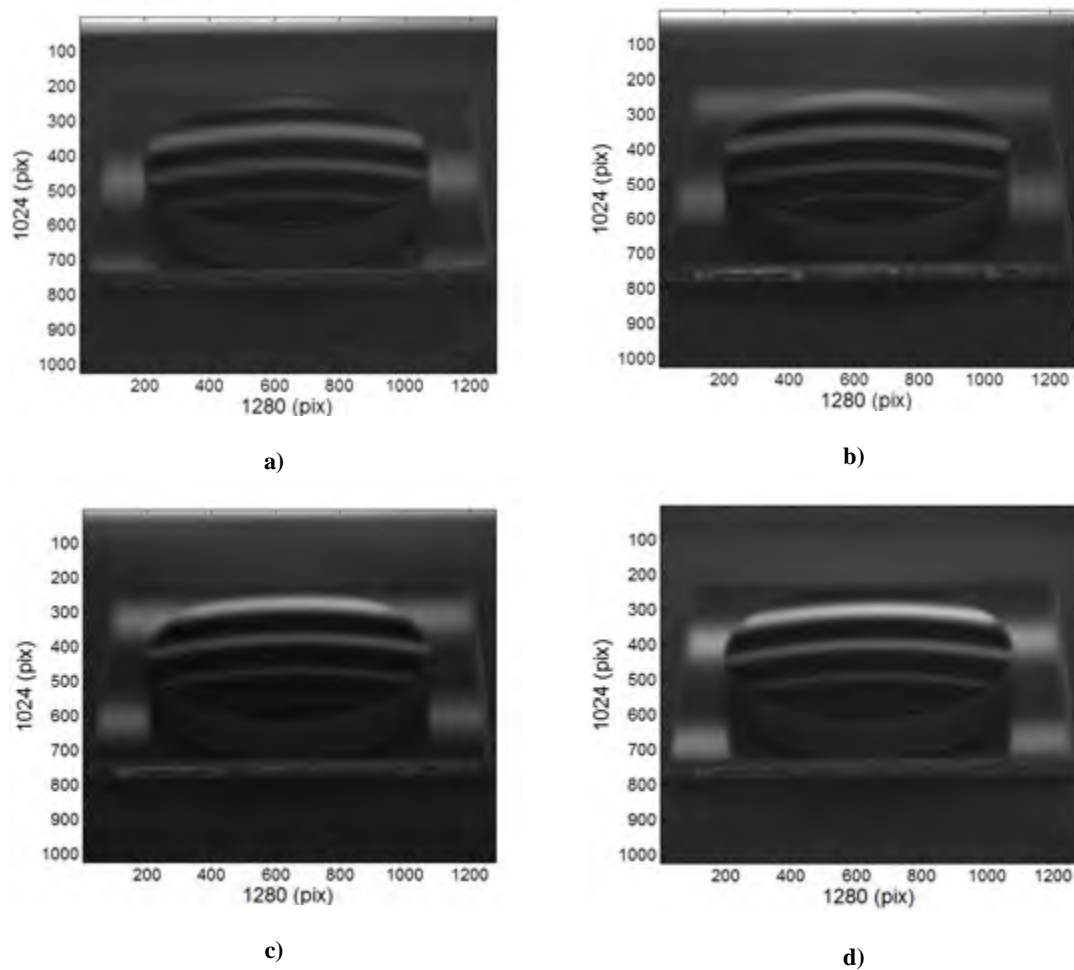


Figura 5. 19. Patrón de franjas horizontales reflejado en el objeto. a) Paso 1 desplazamiento 0, b) Paso desplazamiento $\frac{\pi}{2}$, c) Paso desplazamiento π , d) Paso desplazamiento $\frac{3\pi}{2}$.

Mediante el algoritmo de la Ecuación 3.6 de la sección 3.5.2, obtenemos las fases φ_v y φ_h .

En la Figura 5.20 se muestran las fases Objeto – Referencia, de franjas verticales y horizontales respectivamente.

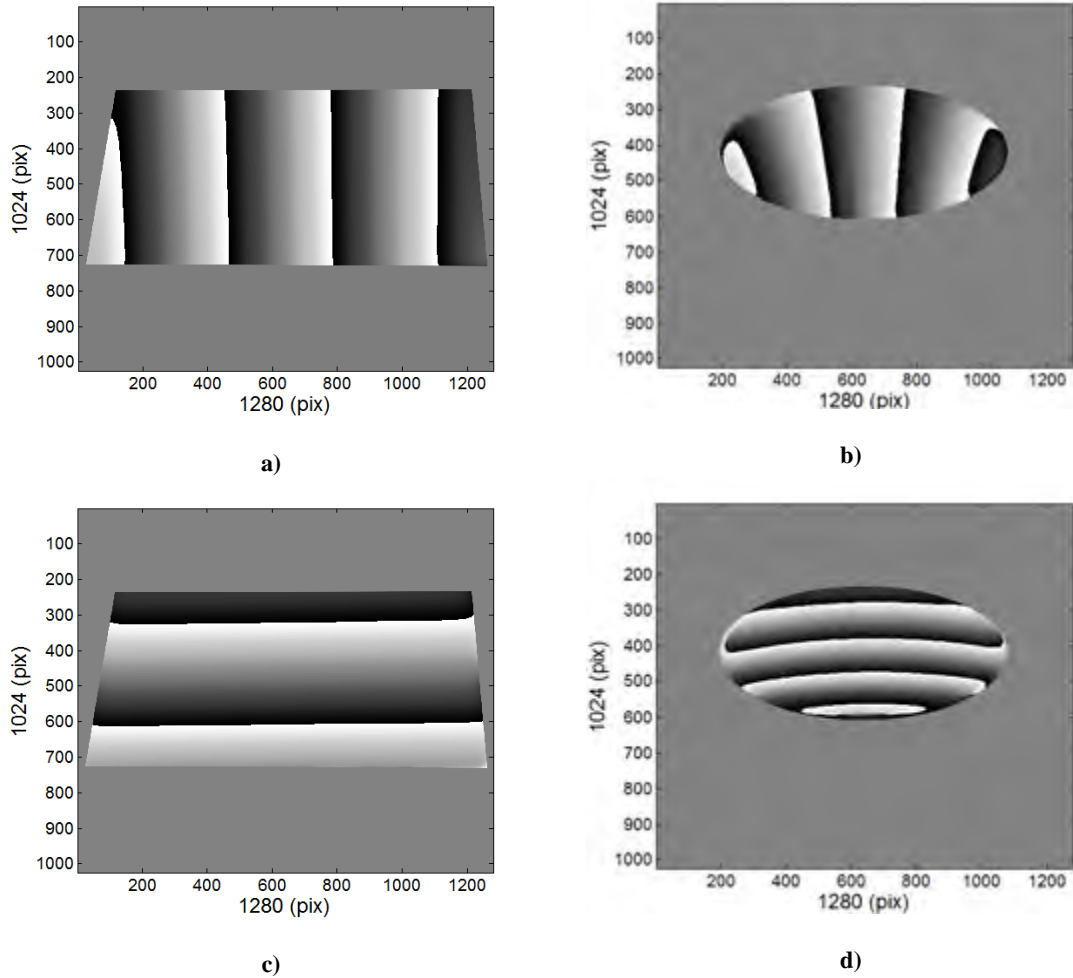


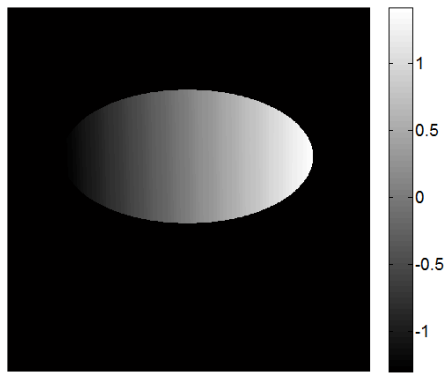
Figura 5. 20. Fase envuelta. a) Fase envuelta del plano (franjas verticales), b) Fase envuelta del objeto (franjas verticales), c) Fase envuelta del plano (franjas horizontales), d) Fase envuelta del objeto (franjas horizontales).

Restando la fase desenvuelta del plano de referencia y la fase desenvuelta del objeto, se obtiene φ_x o φ_y , según sea el caso:

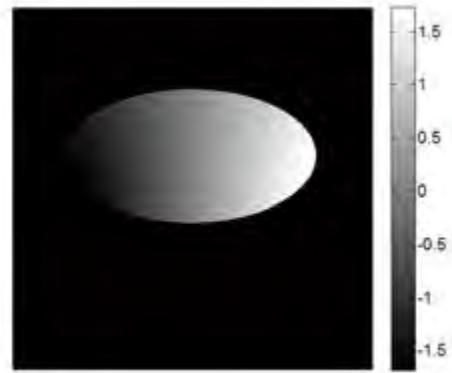
$$\varphi_{vr} - \varphi_{vo} = \varphi_x, \quad (5.3)$$

$$\varphi_{hr} - \varphi_{ho} = \varphi_y. \quad (5.4)$$

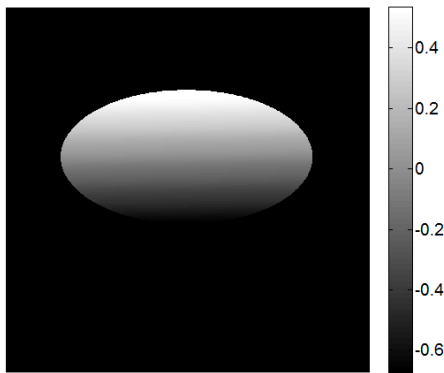
En la Figura 5.21 se muestran los mapas de fase desenvuelta correspondientes a los mapas de fase envueltos de la Figura 5.20. Utilizando las Ecuaciones 5.3 y 5.4 encontramos φ_x y φ_y , respectivamente, Figura 5.22.



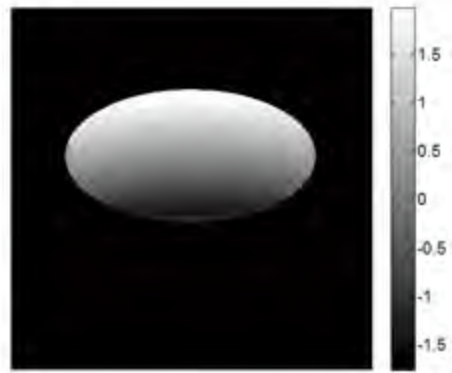
a) Fase desenvuelta del plano de referencia para franjas verticales



b) Fase desenvuelta del objeto para franjas verticales



c) Fase desenvuelta del plano de referencia para franjas horizontales



d) Fase desenvuelta del plano de referencia para franjas horizontales

Figura 5. 21. Fase desenvuelta. a) Fase desenvuelta del plano (φ_{vr}), b) Fase envuelta del objeto (φ_{vo}), c) Fase desenvuelta del plano (φ_{hr}), d) Fase desenvuelta del plano (φ_{ho}).

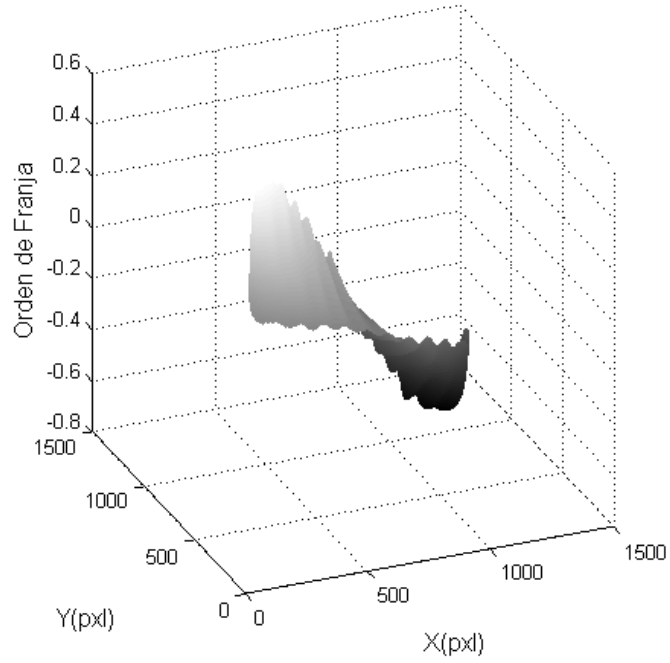


Figura 5. 22. φ_x

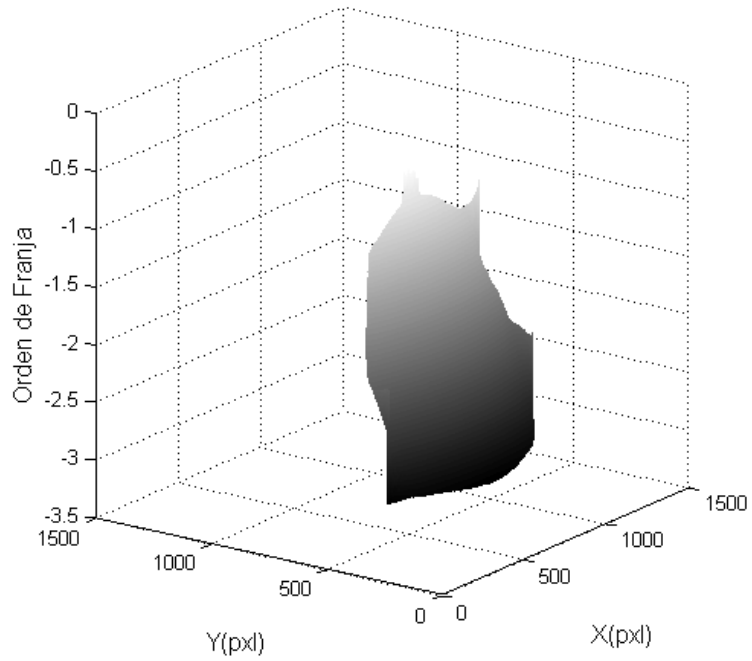


Figura 5. 23. φ_y

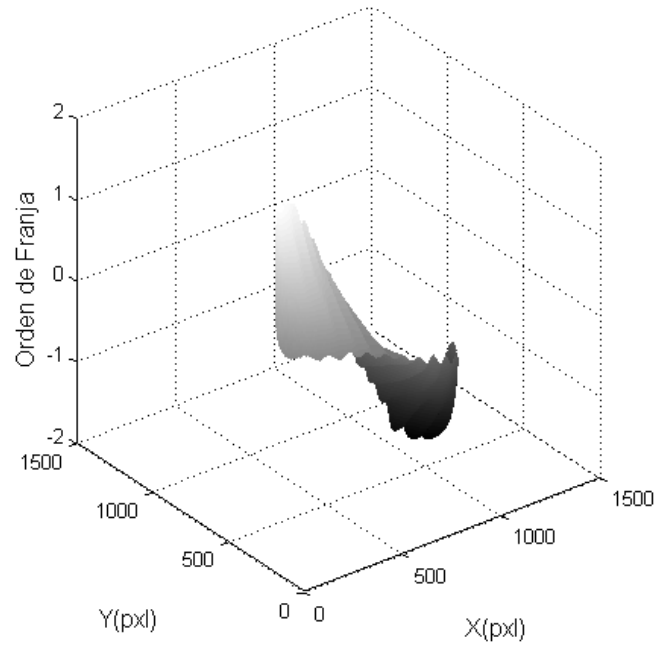


Figura 5. 24. Z_x .

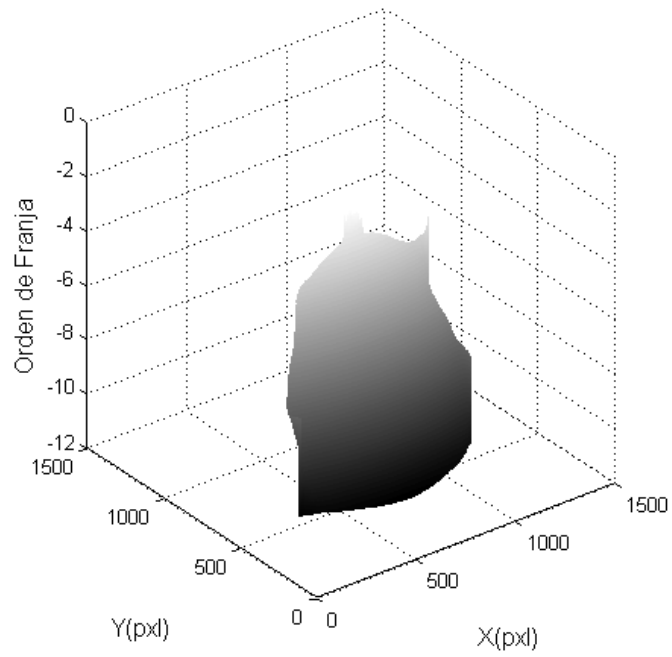


Figura 5. 25. Z_y .

Estos términos de fase se utilizan para calcular Z_x y Z_y como lo muestran las Ecuaciones 5.5 y 5.6, ver Figuras 5.24 y 5.25.

$$Z_x = \frac{T_x}{2\pi} \varphi_x, \quad (5.5)$$

$$Z_y = \frac{T_y}{2\pi} \varphi_y. \quad (5.6)$$

Z_x y Z_y contienen la información de los desplazamientos de las pendientes en cada punto del objeto, en ambas direcciones, y se utilizan como parámetros de entrada de las Ecuaciones 3.9 y 3.13 de la sección 3.5.2.

Como se mencionó en la sección 3.5.2 se desarrolló un algoritmo para resolver las ecuaciones diferenciales y ahora que se tienen todos los parámetros de entrada (H , R , α , Z_x y Z_y), se le da un valor inicial a $h=0$, y se ejecuta el programa, el cual nos da como resultado la topografía de la lente plano – convexa. El único inconveniente es que se genera un error de perspectiva debido al ángulo α de inclinación de la cámara.

En la Figura 5.26 se muestra la solución final de las ecuaciones diferenciales 3.9 y 3.13, esta solución final es la topografía del objeto especular. En la Figura 5.26, se puede observar fácilmente el error de perspectiva causado por el ángulo de inclinación de la cámara.

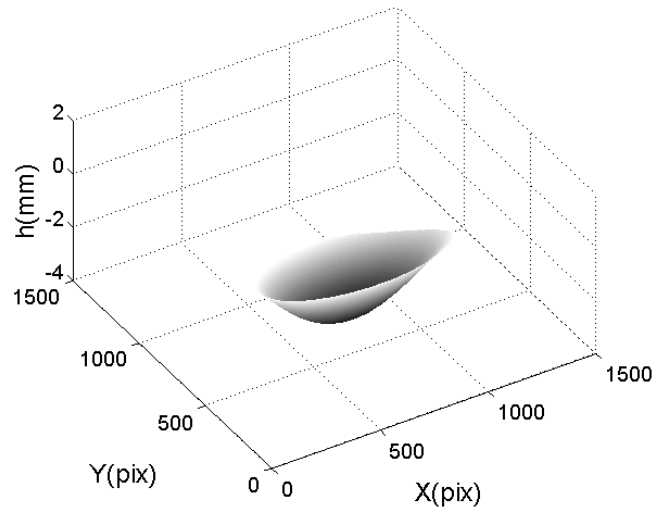


Figura 5. 26. Solución final de las ecuaciones diferenciales.

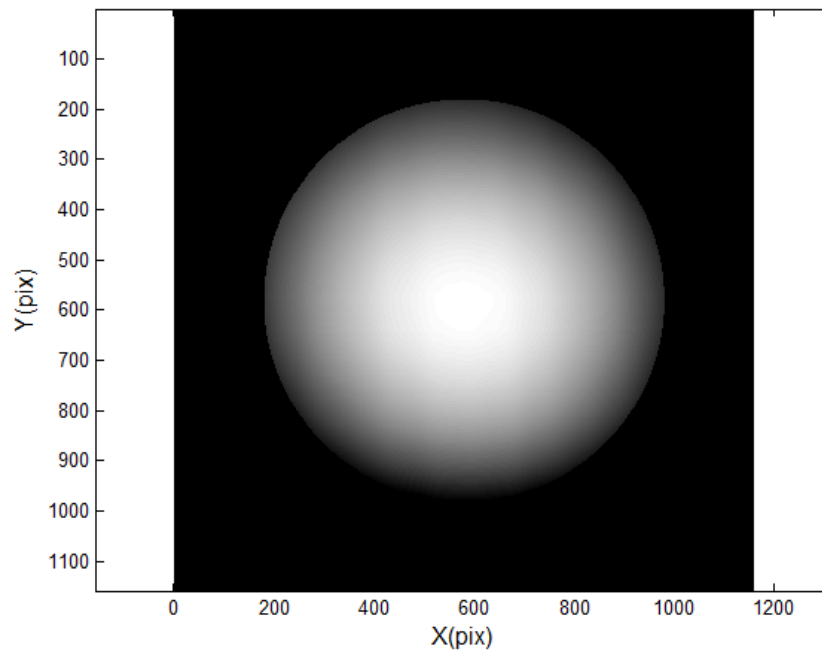


Figura 5. 27. Corrección de perspectiva en la superficie experimental.

En las Figuras 5.27 y 5.28 se puede ver la corrección del error de perspectiva mediante una herramienta implementada en MATLAB¹⁵.

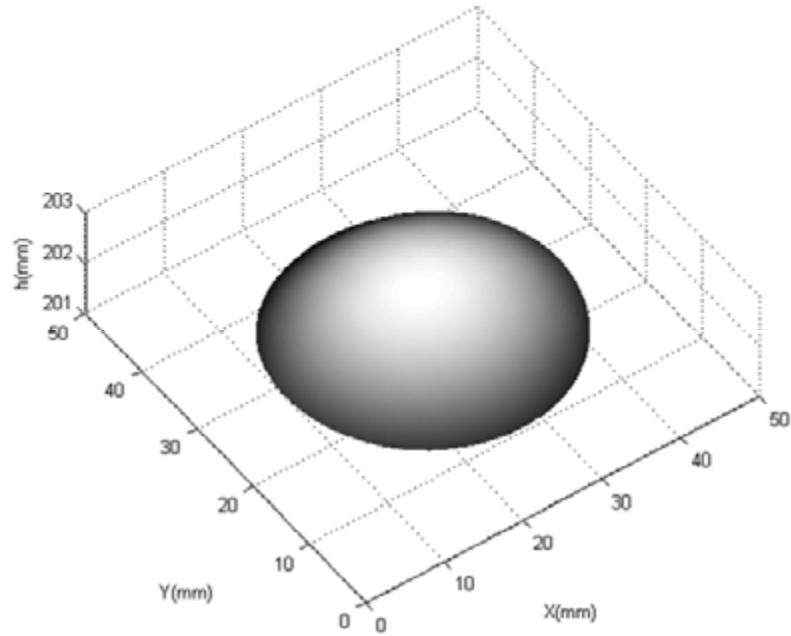


Figura 5. 28. Datos experimentales en 3D.

Con los datos calculados con el esferómetro se simuló la curvatura de la lente convexa, tomando estos datos como referencia, se realiza una comparación entre los datos experimentales y los datos obtenidos con el esferómetro.

En las Figuras 5.29 y 5.30 se muestran los datos calculados con el esferómetro.

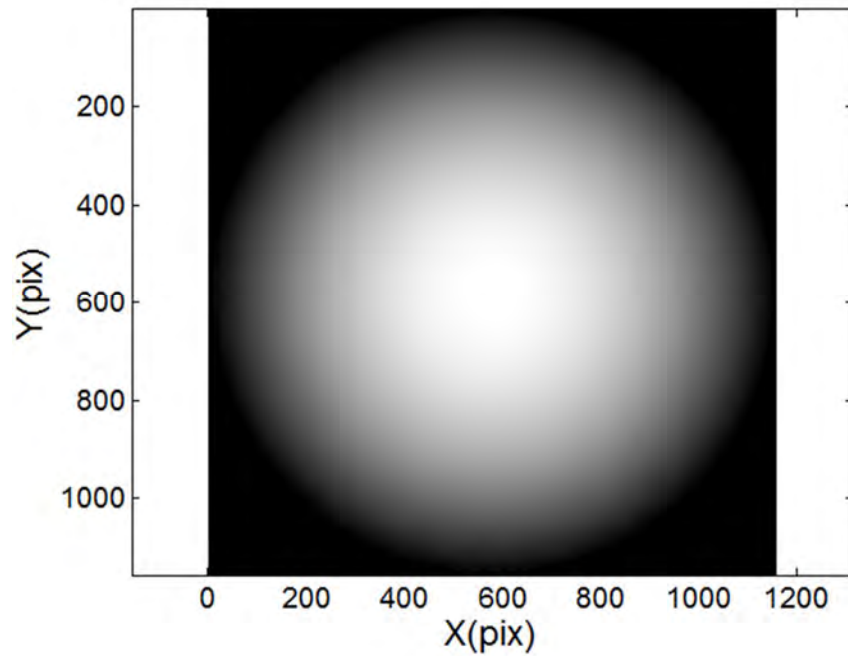
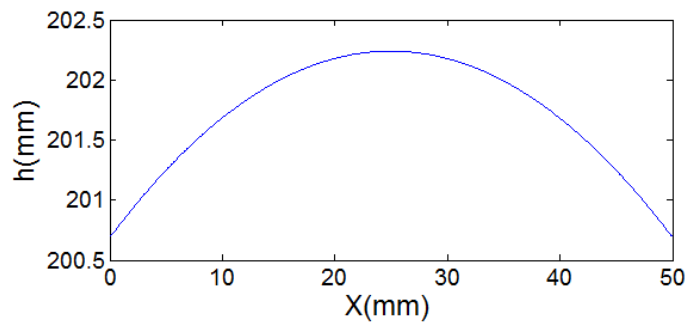


Figura 5. 29. Datos de la lente convexa, medidos con el esferómetro.



a)

Figura 5. 30. Perfil de los datos del esferómetro en $y = 512$.

Calculando el error relativo $\left(\text{Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \right)$ se encontró que tiene un error de:

- Eje horizontal $\approx 3\%$
- Eje vertical $\approx 15\%$

El error es mayor en el eje vertical debido a error de perspectiva, ver Figura 5.31.

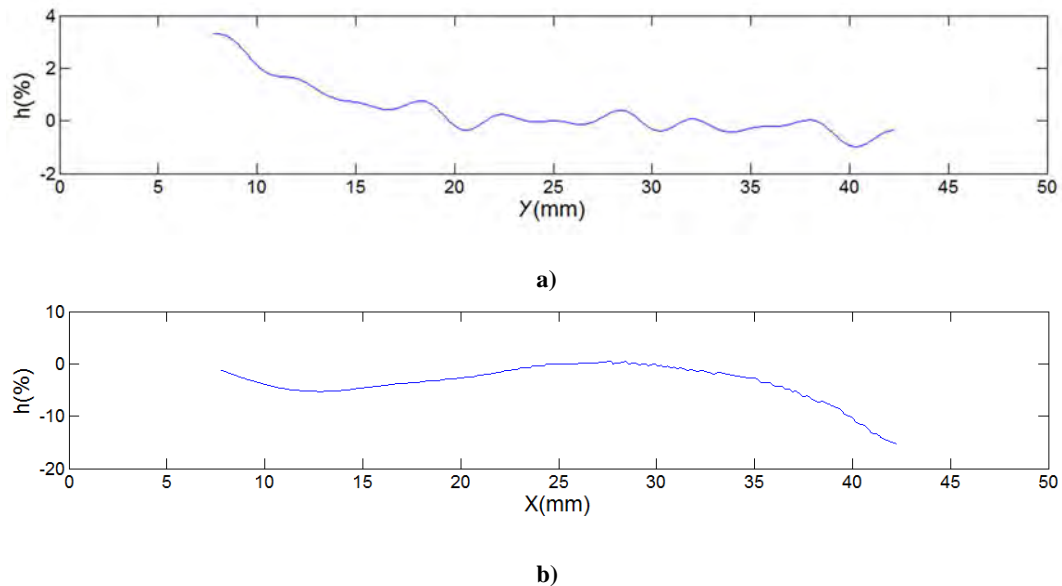


Figura 5. 31. Error relativo, a) Corte vertical (error relativo) en $x = 512$, b) Corte horizontal (error relativo) en $y = 512$.

5.3.2 Topografía de la lente plana cóncava

Para la medición de la topografía de la lente cóncava se utilizó el mismo procedimiento que para el de la lente convexa. Debido a que la lente cóncava tiene dimensiones mayores que la lente convexa, el grosor de la lente es de aproximadamente 1.1 mm, y mide 8 cm de diámetro, solo se midió cierta región del centro de la lente. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

En las Figuras 5.32 y 5.33 se muestran Z_x y Z_y respectivamente, que son como ya se había mencionado, los desplazamientos de los patrones reflejados (Objeto - Referencia), en cada punto de la superficie especular, y están dados en términos de fase (φ_x y φ_y).

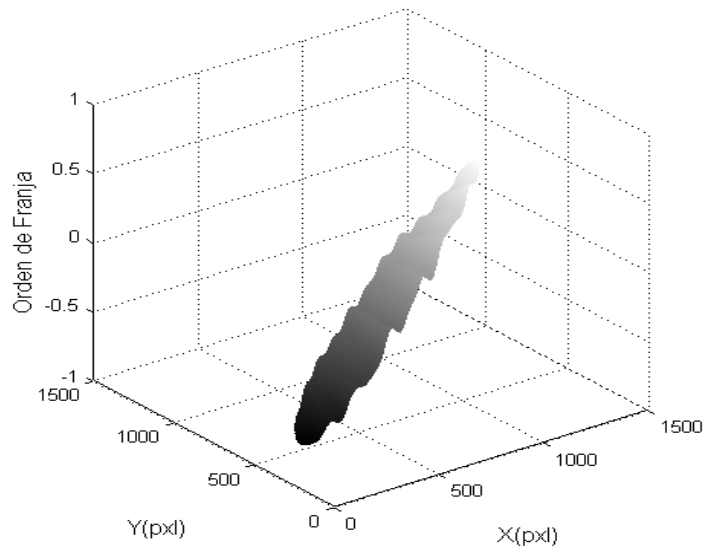


Figura 5. 32. Z_x para la lente cóncava

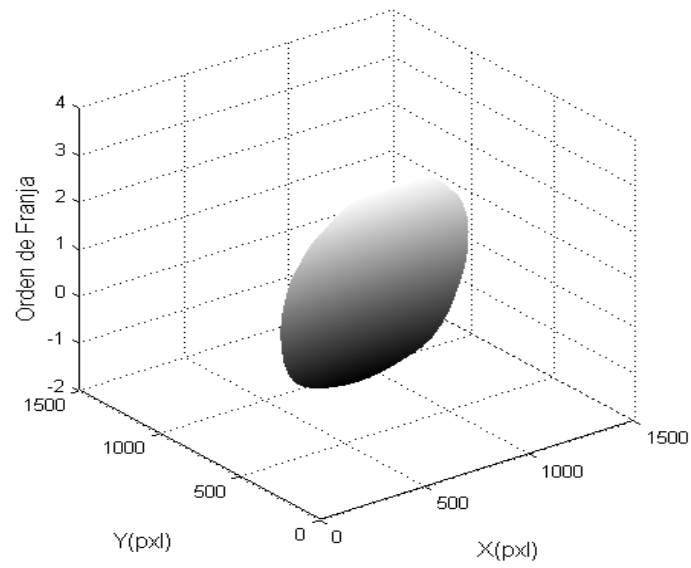


Figura 5. 33. Z_y para la lente cóncava.

Conociendo los parámetros Z_x y Z_y y los relacionados con el arreglo experimental H , R y α , se calcula la topografía de la superficie, de la misma manera que como se hizo con la lente convexa.

El resultado obtenido se muestra en la Figura 5.34.

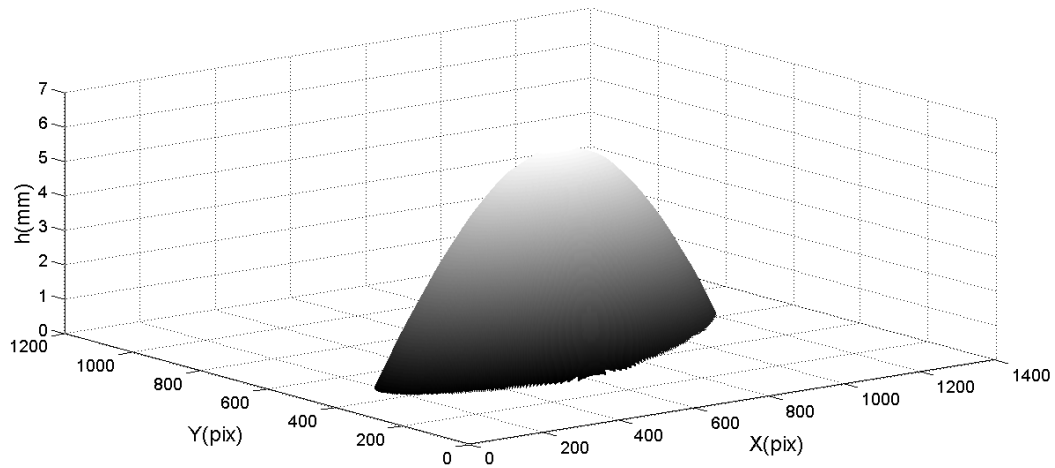


Figura 5. 34. Solución final de las ecuaciones diferenciales.

Corrigiendo la perspectiva obtenemos la superficie final, en la Figura 5.35.

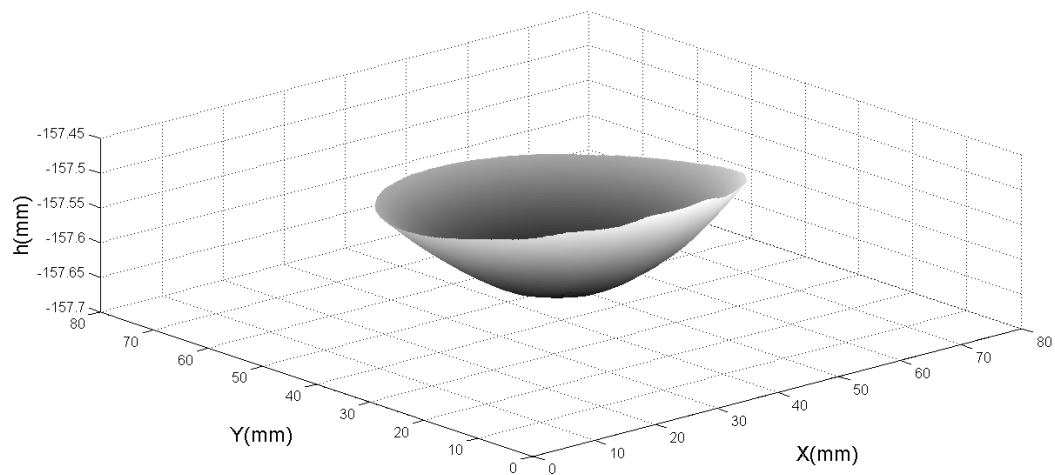


Figura 5. 35. Topografía obtenida para una lente cóncava.

Capítulo 6: Conclusiones y trabajo futuro

6.1 Conclusiones

Se implementó la técnica de reflexión de franjas para la obtención de la topografía de objetos cuya superficie es especular. El diseño del sistema permite el estudio de objetos de un diámetro máximo de alrededor de 5 cm. Sin embargo, el sistema se puede implementar para la medición de objetos de mayores dimensiones. El arreglo es relativamente fácil de implementar tanto para objetos pequeños como de grandes dimensiones. La dificultad de la técnica está en la visualización de la geometría para la obtención de las ecuaciones que dan información de las pendientes en ambas direcciones de la superficie de interés, así como en la implementación de los algoritmos de esas ecuaciones.

La aportación de este trabajo es la presentación de fe de erratas en algunas de las ecuaciones del trabajo de O. A. Skydan et al.⁹ en el cual se basa la presente investigación.

Entre las desventajas de la presente técnica podemos mencionar la necesidad de hacer una corrección de perspectiva dado que la dirección de la pantalla donde se despliega el patrón de franjas y la dirección de observación son oblicuas con respecto al eje óptico formado con la normal a la superficie de prueba.

6.2 Trabajo a futuro

- Automatización del sistema óptico diseñado.

- Implementación de un arreglo óptico en línea para evitar el problema de perspectiva.
- Modificación del arreglo para el estudio de objetos de mayores dimensiones (entre 1 y 1.5 m en direcciones x y y), lo cual es útil en la medición de parabrisas de carros.
- Implementación de un arreglo basado en los anillos de Plácido para la evaluación topográfica de la córnea.

Referencias

1. D. Malacara, *Óptica básica*, 2^a ed., Fondo de Cultura Económica, pp. 31-32, ISBN 9681673131, 2004.
2. L. Font, *Óptica geométrica*, EUETIT, Terrassa, pp. 13, 2003.
3. <http://www.telescope-optics.net/reflection.htm>, *1.2. Reflection and refraction*, julio 2006.
4. <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/reflection/specular/index.html>, *Specular and diffuse reflection*, junio 1998.
5. E. P. Lavin, *Specular reflection*, 2^a ed., American Elsevier Publishing Company, pp. 22, ISBN: o 85274174X, 1971.
6. Y. Mejía, D. Malacara, *A review of methods for measuring corneal topography*, *Optometry and vision science*, Vol. 78, pp. 240–253. 2001
7. D. Malacara, *Optical shop testing*, 3^{era} ed., John Wiley & Sons, Inc, pp. 51. ISBN: 0471522325, 2007.
8. R. S. Sirohi, *Optical method of measurement wholefield techniques*, Taylor & Francis, pp.19, ISBN: 978 1 57444 697 5, 2009.
9. O. A. Skydan, M. J. Lalor and D. R. Burton, *3D shape measurement of automotive glass by using a fringe reflection technique*, *Meas. Sci. Technol.*, Vol. 18, pp. 106–114, 2007.

10. D. Serrano, *Medición de topografía de superficies difusas y especulares por técnicas de proyección y reflexión de franjas*, Tesis de maestría, pp. 18, 2011.
11. W. Zhao, X. Su, *Testing an aspheric mirror based on phase measuring Deflectometry*, Opt. Eng., Vol. 48, pp. 1036031-1 1036031-5, 2009.
12. M. Servin and A. González, *Linear analysis of the 4-step Carré phase shifting algorithm: spectrum, signal-to-noise ratio, and harmonics response*, [arXiv:1203.1947v1](https://arxiv.org/abs/1203.1947v1) [physics.optics], 2012.
13. D. C. Ghiglia, M. D. Pritt, *Two phase- dimensional unwrapping theory algorithms and software*, John Wiley & Sons, Inc, pp. 103. ISBN 0 – 471 – 24935 – 1. 1998.
14. “The Spherometer”.
http://www.vias.org/glazebrook_practphys/glazebrook_practical_physics_022.html, marzo 2011.
15. M. Chan JT. Perspective Control/ Correction.
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35531-perspective-control-correction>, marzo 2012.

Apéndice A. Desarrollo de las ecuaciones diferenciales.

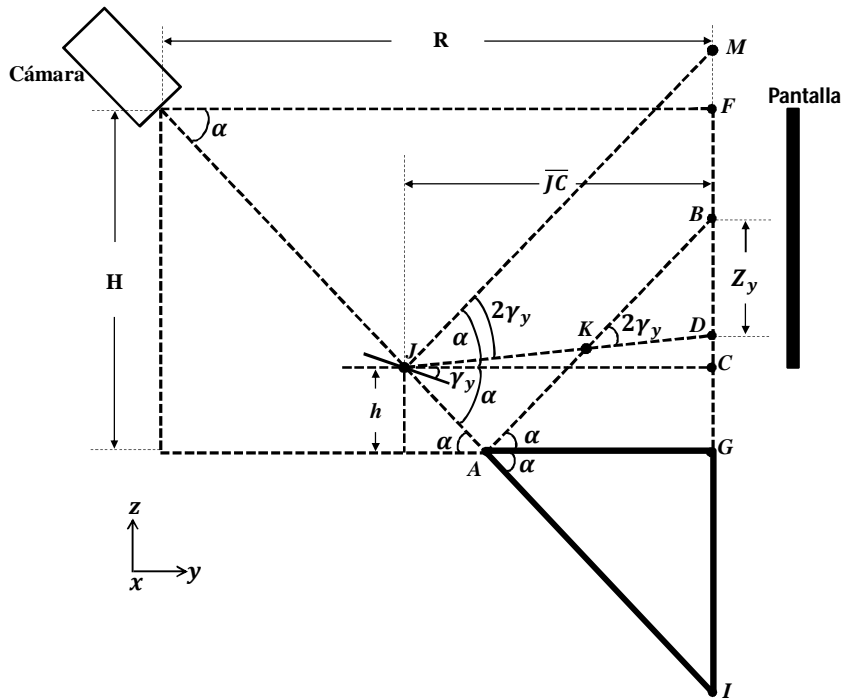


Figura A. 1. Geometría en dirección y .

Obtención de la ecuación diferencial para la dirección x :

Inicialmente tenemos que (Figura A.1):

$$\overline{FI} = R \tan \alpha. \quad (\text{A.1})$$

Y que la $\tan 2\gamma_x$ (Figura A.2) es igual a:

$$\tan 2\gamma_x = \frac{Z_x}{CD}. \quad (\text{A.2})$$

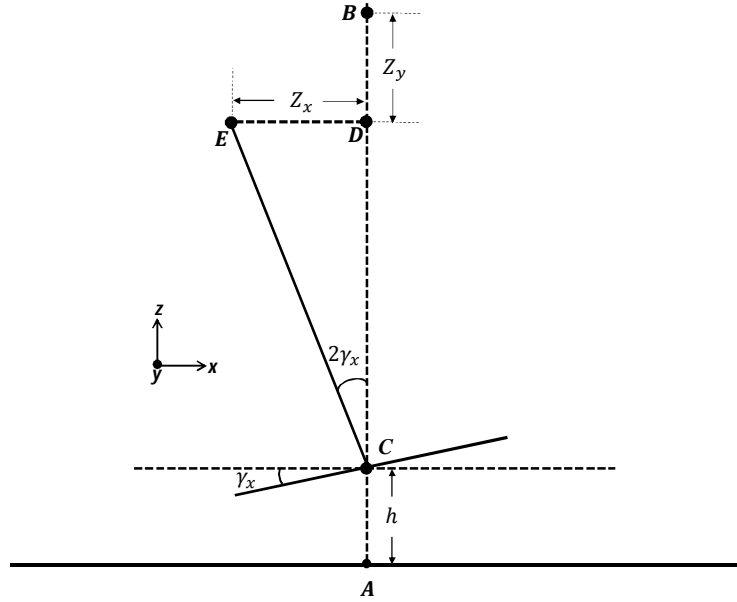


Figura A. 2. Geometría en dirección x .

Calculamos el segmento de recta \overline{CD} (Figura A1):

$$\overline{GI} = \overline{FI} - H, \quad (\text{A.3})$$

$$\overline{GI} = R \tan \alpha - H. \quad (\text{A.4})$$

Por otra parte, de los triángulos semejantes AGB y AGI :

$$\overline{GI} = h + \overline{CD} + Z_y. \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto

$$R \tan \alpha - H = h + \overline{CD} + Z_y. \quad (\text{A.6})$$

Y entonces,

$$\overline{CD} = R \tan \alpha - H - h - Z_y. \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo \overline{CD} en la Ecuación A.2 tenemos:

$$\tan 2\gamma_x = \frac{z_x}{R \tan \alpha - H - h - z_y} \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z_x}{R \tan \alpha - H - h - z_y} \right). \quad (\text{A.9})$$

Con la Ecuación A.9 obtenemos el ángulo de la superficie en dirección x en cada punto en (x, y) de la superficie. Utilizando la identidad trigonométrica $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ sobre A.9, se puede obtener la derivada de la altura h , con respecto a la dirección x (con $\tan \gamma_x = \frac{\partial h}{\partial x}$),

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{R \tan \alpha - H - h - z_y}{z_x} \right) - 1 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Resolviendo la Ecuación A.10 como una ecuación cuadrática encontramos el término $\frac{\partial h}{\partial x}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{z_y - R \tan \alpha + H + h \pm \sqrt{(R \tan \alpha - H - h - z_y)^2 + z_x^2}}{z_x}. \quad (\text{A.11})$$

Obtención de la ecuación diferencial para la dirección y :

Del triángulo JCI (Figura A.1),

$$\overline{JC} = \frac{\overline{GI} + h}{\tan \alpha} = \frac{R \tan \alpha - H + h}{\tan \alpha}. \quad (\text{A.12})$$

Adicionalmente, de los triángulos JKA y JDC $\tan(\alpha - 2\gamma_y)$ es igual a:

$$\tan(\alpha - 2\gamma_y) = \frac{\overline{CD}}{\overline{JC}}. \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo \overline{CD} (Ecuación A.7) y \overline{JC} (Ecuación A.12) en la Ecuación A.13, tenemos:

$$\tan(\alpha - 2\gamma_y) = \frac{R \tan \alpha - H - h - z_y}{\frac{R \tan \alpha - H + h}{\tan \alpha}}, \quad (\text{A.14})$$

$$\tan(\alpha - 2\gamma_y) = \left(\frac{R \tan \alpha - H - h - z_y}{R \tan \alpha - H + h} \right) \tan \alpha. \quad (\text{A.15})$$

Así obtenemos el ángulo γ_y que es de nuestro interés:

$$\gamma_y = -\frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\tan \alpha \frac{R \tan \alpha - H - h - z_y}{R \tan \alpha - H + h} \right) - \alpha \right]. \quad (\text{A.16})$$

Con la Ecuación A.16 obtenemos el ángulo en dirección y de la superficie en cada punto en (x, y) de la superficie. Utilizando la identidad trigonométrica $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ en la Ecuación A.15, se puede obtener la derivada de la altura h , con respecto a la dirección y :

$$\frac{\tan \alpha - \tan 2\gamma_y}{1 + \tan \alpha \cdot \tan 2\gamma_y} = \tan \alpha \frac{R \tan \alpha - H - h - z_y}{R \tan \alpha - H + h}, \quad (\text{A.17})$$

$$\tan \alpha - \tan 2\gamma_y = \frac{[\tan \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y)][1 + \tan \alpha \cdot \tan 2\gamma_y]}{R \tan \alpha - H + h}, \quad (\text{A.18})$$

$$\tan \alpha (R \tan \alpha - H + h) - \tan 2\gamma_y (R \tan \alpha - H + h) = [\tan \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y)] + [\tan 2\gamma_y \cdot \tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y)], \quad (\text{A.19})$$

$$[\tan^2 \alpha \cdot \tan 2\gamma_y (R \tan \alpha - H - h - z_y)] + \tan 2\gamma_y (R \tan \alpha - H + h) = [\tan \alpha (R \tan \alpha - H + h)] - \tan \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y), \quad (\text{A.20})$$

$$\tan 2\gamma_y [\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h)] = \quad (\text{A.21})$$

$$\tan \alpha (\cancel{R \tan \alpha - H} + h - \cancel{R \tan \alpha + H} + h + z_y),$$

$$\tan 2\gamma_y = \frac{\tan \alpha (2h+z_y)}{\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h)}. \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo la identidad trigonométrica del doble ángulo, obtenemos:

$$\frac{2 \tan \gamma_y}{1 - \tan^2 \gamma_y} = \frac{\tan \alpha (2h+z_y)}{\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h)}. \quad (\text{A.23})$$

Y usando $\tan \gamma_y = \frac{dh}{dy}$:

$$2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{(\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h))}{\tan \alpha (2h+z_y)} = 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2, \quad (\text{A.24})$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\tan^2 \alpha (R \tan \alpha - H - h - z_y) + (R \tan \alpha - H + h)}{\tan \alpha (2h+z_y)}\right) - 1 = 0. \quad (\text{A.25})$$

Resolviendo la Ecuación A.40 como una ecuación cuadrática, encontramos el término

$$\frac{\partial h}{\partial y}.$$