



CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN ÓPTICA, A.C.

“Versión definitiva. Incluye cambios
sugeridos por revisores”

Determinación de las aberraciones de un sistema óptico mediante la integración de pantallas de Hartmann con simetría radial



COMO REQUERIMIENTO PARA LA OBTENCIÓN
DEL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (ÓPTICA)

Asesor: Dr. Zacarías Malacara Hernández

Co-Asesor: Dr. Daniel Malacara Hernández

Estudiante: M. en I. Geovanni Hernández Gómez

Febrero de 2015

León, Guanajuato, México

A Celia Ramírez Barrón

“Los muros existen por alguna razón. No están para dejarnos afuera, sino para darnos la oportunidad de mostrar hasta qué punto deseamos algo. Están para detener a los que no lo desean lo suficiente.”

Dr. Randy Pauch

Agradecimientos

A Dios por haberme permitido llegar a este punto tan importante de mi vida.

A mi esposa Elena por todo su apoyo y comprensión desde el primer día que nos conocimos. A mis padres Rosa Martha e Ignacio gracias por apoyarme y creer en mí. Gracias por ser mis padres y mostrarme con el ejemplo que las cosas se pueden conseguir si te esfuerzas y crees en ti mismo. A mis hermanos Ana Rosa e Iván, por todos los momentos inolvidables que hemos pasado juntos en nuestras vidas.

A mis asesores el Dr. Zacarías y Daniel Malacara Hernández, por brindarme siempre sus consejos y comentarios. Gracias por apoyarme en mi formación. Gracias por creer en mí en todo momento.

A los Drs. Armando Gómez Vieyra y Juan M. Bueno por haberme aceptado como su estudiante en sus instituciones y por haberme enseñado parte de su trabajo.

A mis amigos Sofía, Piero, Daniel, Izcoatl y Alberto por su amistad, ayuda y todo el apoyo que me han brindado.

A todos mis compañeros del CIO por su amistad y apoyo.

Geovanni Hernández Gómez.

Agradecimientos Institucionales

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el soporte económico proporcionado durante los estudios de doctorado a través de la beca 206629.



Al Centro de Investigaciones en Optica por darme la oportunidad de formar parte de esta institución.



A la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco por todo el apoyo brindado.



Resumen

La prueba de Hartmann de sistemas y superficies ópticas ha sido utilizada con éxito durante casi un siglo especialmente en la prueba de superficies ópticas de telescopios grandes. La prueba de Hartmann efectuada en puntos cercanos al foco entrega la magnitud de la aberración transversal, que tras una integración numérica proporcionará las aberraciones del frente de onda. La prueba de Hartmann tal como se ha aplicado tradicionalmente ha resultado de utilidad limitada. En sus primeros años de aparición, existía la dificultad para discriminar y determinar la posición de cada una de las manchas ya que este procedimiento se realizaba de manera manual. Posterior a este proceso, es necesario realizar una integración numérica para obtener el frente de onda lo cual implicó una dificultad adicional que fue aminorada tras la aparición de las primeras computadoras en los años 60. Pese a ello, quedaba pendiente la medición rápida, segura y precisa de los puntos, operación que siempre consumía tiempo.

Con la aparición de las cámaras de video de alta resolución, fue posible realizar la captura de imágenes para ser analizadas por una computadora posteriormente, sin embargo, los algoritmos utilizados requerían de un patrón promedio de una mancha para realizar de forma interactiva la determinación e identificación de las manchas debido a la existencia de ruido en la imagen. Una vez capturado y analizado el patrón de manchas en la computadora, se proseguía a realizar el análisis del frente de onda utilizando los polinomios ortogonales de Zernike.

La precisión en la determinación del frente de onda está ligada a la densidad de puntos muestrales que necesariamente está relacionada a la calidad de la cámara y a la habilidad del software para identificar y medir con precisión las coordenadas del centroide de cada mancha.

En el desarrollo de este trabajo de tesis describimos un método nuevo creado para realizar la localización de las manchas generadas durante la prueba de Hartmann o Hartmann-Shack así como la implementación de un centroide en función de las características de cada una de las manchas realizando este proceso de manera automática y precisa. Además, describimos un nuevo método de integración Modal de pantallas de Hartmann con simetrías radiales, cuadradas y hexagonales a partir de las Aberraciones Transversales (TA 's) obtenidas de la prueba de Hartmann y Hartmann-Shack.

El número de puntos en una pantalla de Hartmann nos proporciona la información para calcular las aberraciones presentes en el sistema óptico que estemos evaluando, es por eso que creamos un nuevo método simple para el cálculo de aberraciones de bajo orden utilizando pantallas de Hartmann de un anillo formada con 3, 4 y 5 puntos únicamente.

Summary

Hartmann's test for optical systems and surfaces has been successfully used for almost a century, especially in testing optical surfaces in large telescopes. When Hartmann's test is done on spots close to the focus, it yields the magnitude of the transversal aberration, which, after a numerical integration, will yield the aberrations of the wave front.

Hartmann's test, as it has been traditionally applied, has turned out to have only limited usefulness. In its first years of existence, there was difficulty to discriminate and determine the position of each spot, since this procedure was carried out by hand. After this process, it is necessary to perform a numerical integration in order to obtain the wave front, which implied an additional difficulty that was later relieved upon the appearance of the first computers in the 60s. Nevertheless, it was still necessary to do a quick, safe and accurate measurement of the spots, which was always time-consuming.

When high resolution video cameras became available, it became possible to capture images to be later analyzed by a computer; however, the algorithms that were used required an average pattern of a spot in order to interactively perform the determination and identification of the spots, due to the presence of noise in the image. Once the spot pattern had been captured and analyzed in a computer, the analysis of the wave front was done using Zemike's orthogonal polynomials.

Accuracy in determining the wave front is linked to the density of sampling points, which is necessarily related to the quality of the camera and the capability of the software to accurately identify and measure the coordinates of the centroid of each spot.

In the development of this work, we describe a new method created to locate the spots generated during the Hartmann or Hartmann-Shack test, as well as the implementation of a centroid as a function of the characteristics of each one of the spots, a process that is carried out in an accurate and automatic fashion. Besides, we describe a new method to perform the Modal integration of Hartmann screens with radial, square and hexagonal symmetries from the Transversal Aberrations (TAs) obtained from the Hartmann and Hartmann-Shack test.

The number of points on a Hartmann screen provides the information needed to calculate the aberrations that are present in the optical system under evaluation. That is why we created a new simple method for the calculation of low order aberrations using single ring Hartmann screens formed only with 3, 4 or 5 points.

Índice.

1. Determinación de las aberraciones de un sistema óptico.	10
1.1 Introducción.	10
1.2 Topógrafo corneal tipo Hartmann.....	12
1.2.1 Sistema biológico-óptico humano.	12
1.2.2 Prueba de Hartmann clásica.....	14
1.2.3 Prueba de Hartmann aplicada al sistema biológico-óptico humano.....	16
2. Cálculo de las Aberraciones Transversales (TA).....	20
2.1 Introducción.....	20
2.2 Análisis de un hartmanngrama.	20
2.2.1 Detección de los puntos.....	23
2.2.2 Segmentación.....	27
2.2.3 Cálculo del Centroide.....	30
2.3 Pruebas y resultados.....	32
3. Integración Modal de las aberraciones transversales en un patrón Hartmann.....	39
3.1 Introducción.	39
3.2 Integración y representación del frente de onda utilizando patrones de Hartmann y Hartmann-Shack.	41
3.3 Definición de polinomios en función de las aberraciones transversales.....	46
3.4 Reconstrucción del frente de onda a partir de las aberraciones transversales.	49
3.5 Ortogonalización de los polinomios en base a puntos de información.....	50
3.6 Distribuciones de puntos en la pupila de salida.....	52
3.7 Obtención de los coeficientes de aberración utilizando el procedimiento de mínimos cuadrados.	66
3.7.1 Representación del frente de onda en coordenadas polares.....	68
3.7.2 Representación del frente de onda en coordenadas cartesianas.....	71
3.7.3 Relación entre la deformación del frente de onda y las aberraciones transversales.....	73
3.7.4 Ajuste de mínimos cuadrados para las funciones de aberraciones transversales.....	75
3.7.4.1 Aplicación del método de ajuste de mínimos cuadrados sobre las funciones de aberraciones transversales en coordenadas cartesianas y polares.	76
3.7.5 Ajuste de mínimos cuadrados utilizando aberraciones transversales radiales.....	78
4. Aplicación de la prueba de Hartmann con 3, 4 y 5 puntos.....	84
4.1 Introducción.	84

4.2 Aplicación de la prueba de Hartmann con tres puntos.	87
4.3 Aplicación de la prueba de Hartmann con cuatro puntos.	90
4.4 Aplicación de la prueba de Hartmann con cinco puntos.	94
4.5 Evaluación de procedimientos encontrados.	98
5. Conclusiones generales.	101
5.1 Aspectos generales.	101
5.2 Localización y cálculo de centroides.	102
5.3 Generación de polinomios ortogonales usando la prueba de Hartmann.	103
5.4 Coeficientes de aberración usando pantallas de Hartmann de 3, 4 y 5 puntos.	106
Apéndice A.	108
Trabajos publicados en revistas indexadas.	108
Trabajos en memorias de congresos.	108
Referencias.	109

1. Determinación de las aberraciones de un sistema óptico.

1.1 Introducción.

Por muchas décadas, la representación del frente de onda ha sido uno de los temas más importantes dentro del campo de la óptica. El desarrollo de nuevas técnicas y teorías para obtener una buena representación de las diferentes superficies ópticas y entre ellas la representación del frente de onda ha ido creciendo debido a la demanda de fabricación de elementos ópticos de mayor precisión.

La importancia de obtener una representación del frente de onda más exacta, ha ido aumentando debido a la exigencia del mercado en fabricar elementos ópticos con un estricto control de calidad así como para realizar pruebas a sistemas ópticos complejos como los utilizados en topografía corneal o en sistemas empleados en observatorios astronómicos. En la actualidad, existen muchas pruebas que nos pueden ayudar a cuantificar las características de una superficie óptica como lo son las pruebas basadas en el análisis geométrico: la prueba de Foucault, la prueba de Ronchi y la prueba de Hartmann [1], por mencionar algunas. Con el paso del tiempo y con la creación de nuevas tecnologías, las pruebas para medir las superficies ópticas han evolucionado a tal grado que ha sido posible la creación de dispositivos diseñados específicamente para realizar estas pruebas, tal es caso del sensor Hartmann-Shack [2].

La prueba de Hartmann fue creada a partir de la prueba de Tscherning en el año de 1900. En la prueba de Tscherning, se utiliza una pantalla de dos puntos, con la es posible obtener una medición de los defectos refractivos del ojo humano. Este principio fue utilizado por Hartmann para crear lo que hoy en día conocemos como la prueba de Hartmann.

La prueba de Hartmann es una técnica sencilla de aplicar, en la cual podemos obtener información de las pendientes de una superficie gracias a un arreglo de puntos proyectados sobre la superficie óptica bajo prueba. Midiendo la diferencia que existe entre la localización de los puntos generados por una superficie base y los creados por la superficie de prueba, es posible obtener la magnitud de la aberración trasversal de varias zonas de la superficie. Con esta información y haciendo uso de técnicas de integración, podemos generar una representación topográfica y analítica de la superficie bajo prueba.

El problema subsiguiente es extrapolar la información obtenida a partir de un número finito de puntos, en una expresión matemática que represente la geometría de toda una superficie, este proceso constituye una integración.

Los métodos de integración se dividen principalmente en dos categorías principales: las integraciones Zonales y las Modales.

Los métodos de integraciones Zonales se basan en la representación de los valores en zonas. El frente de onda es dividido en N sub-aperturas en donde la fase de cada sub-apertura es expresada mediante un valor de intensidad. Debido a esto, el frente de onda estará representado por un conjunto de N sub-aperturas. Como se podría deducir, entre mayor sea el número de sub-aperturas, mejor será la representación obtenida por los métodos de integración zonal.

Por otro lado, la representación modal puede ser representada por cualquier conjunto de polinomios, sin embargo, debido a sus propiedades, la familia de los polinomios ortonormales son los más utilizados ($F_i(x)$) en una apertura circular sobre una pupila. Si representamos el frente de onda (W) como se muestra en la Ec. 1.1, la integración modal se calcula utilizando un vector de coeficientes de tal manera que el frente de onda pueda ser reconstruido en cualquier parte de la pupila Ec. 1.2.

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-x_i^2)} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad 1.1$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N c_i F_i(x) \quad 1.2$$

Donde N es el número de modos utilizados en la base del polinomio, c son los coeficientes del polinomio a determinar y F es la función que representa la forma de la superficie, en donde comúnmente se utilizan los polinomios de Zernike.

Los polinomios de Zernike han sido estandarizados para tener una representación de las aberraciones ópticas presentes en una superficie. Propuestos por Zernike en 1934 [3,4] los polinomios de Zernike son utilizados para describir una función de aberraciones de un sistema con una pupila circular de salida. Los polinomios de Zernike son ortogonales sobre un círculo unitario y se utilizan para describir el frente de onda (W) como se muestra en la ecuación 1.3.

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=-n}^n c_{nl} R_n^{|l|} e^{il\theta} \quad 1.3$$

Donde c_{nl} son los coeficientes que dependen de la localización de los puntos objeto, n y l son enteros positivos que cumplen con la condición $n-l \geq 0$ y es par, R son los polinomios de grado n .

Una manera más de representarlos es utilizando la forma de Rimmer y Wyant [5].

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} R_n^{n-2m} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (n-2m)\theta \quad 1.4$$

Donde, la función seno se emplea para los valores de $n-2m > 0$ y la función coseno para $n-2m \leq 0$ y m está definido como

$$m = \frac{n-l}{2} \quad 1.5$$

1.2 Topógrafo corneal tipo Hartmann

1.2.1 Sistema biológico-óptico humano.

En la actualidad, la fabricación de topógrafos para la medición de superficies ópticas tiene una gran importancia tanto en el campo de la industria como en el de la salud. De igual forma, muchos investigadores han utilizado los polinomios de Zernike para representar la topografía de la córnea mediante una función matemática, entre ellos podemos mencionar a Langenbucher y sus colaboradores [6]. Debido a la necesidad de obtener una correcta medición de la superficie óptica del ojo humano, se ha desarrollado una gran variedad de técnicas para obtener una correcta representación de la primera superficie (anterior) de la córnea [7,8].

Como sabemos, la tarea principal del sistema biológico-óptico humano, es la de formar imágenes para ser capturadas por la retina y ser procesadas posteriormente por el cerebro. Para poder realizar su función de manera correcta, el ojo humano está formado por distintos elementos en el que cada uno, tiene un papel importante dentro del sistema completo.

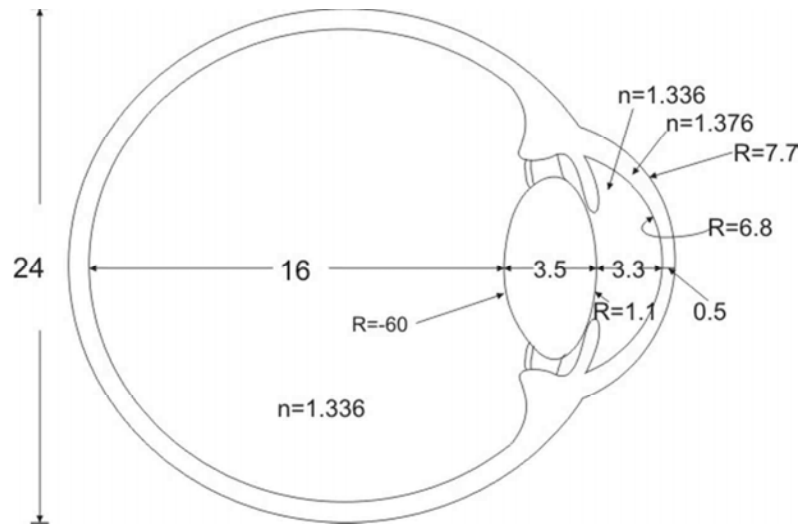


Fig. 1.1. Modelo de Gullstrand del sistema biológico-óptico humano [9].

Como se puede observar en la Fig. 1.1, cada elemento del sistema óptico tiene diferentes características. La córnea es un tejido transparente por donde entra la luz. La córnea tiene dos caras llamadas superficie anterior y superficie posterior. El radio de curvatura de la superficie anterior para un adulto promedio es de 8 mm con un diámetro de 12 mm. Para saber el radio de curvatura de la superficie posterior se suele hacer uso de una correlación lineal entre los radios de curvatura anterior (R_1) y posterior (R_2) descrita por $R_2 = 0.81R_1$.

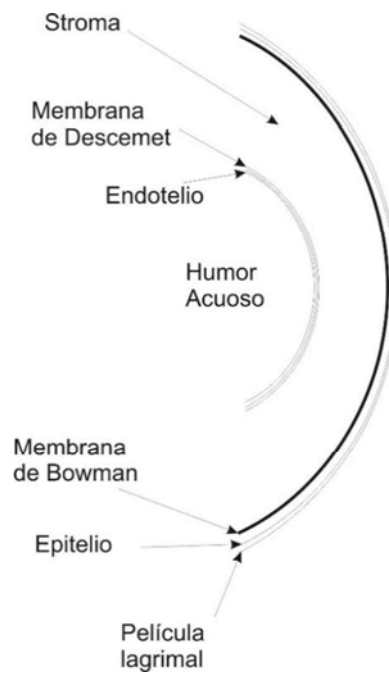


Fig. 1.2.- Estructura de la Córnea.

La córnea es un elemento óptico en forma de menisco convexo-cóncavo con diferentes elementos que la conforman. En la Fig. 1.2 podemos observar que la córnea está formada por la película lagrimal en frente de la superficie externa, el epitelio, la membrana de Bowman, la estroma, la membrana de Descemet y el endotelio. Cada uno de estos elementos contribuye en gran medida a la formación de una imagen en la retina del ojo.

1.2.2 Prueba de Hartmann clásica.

Hoy en día, la prueba de Hartmann se emplea para medir el frente de onda o la geometría de una superficie óptica. La prueba de Hartmann fue inventada por J. Hartmann en 1900 [10,11]. Como se mencionó arriba, tiene su origen a partir de la modificación de la prueba de Tscherning [12]. La prueba de Hartmann emplea una pantalla de huecos distribuidos en diferentes configuraciones. Los huecos pueden estar en un arreglo cuadrado, radial o helicoidal siendo el primero el más común. Como veremos a lo largo del desarrollo de esta tesis, este tipo de arreglos no son los únicos posibles para ser implementados en la prueba de Hartmann.

La configuración básica de la prueba de Hartmann empleada para la prueba de elementos ópticos se muestra en la Fig. 1.3. El frente de onda que proviene de la fuente luminosa se dirige hacia el espejo de prueba, pero solo una parte llega al espejo ya que la pantalla de Hartmann solo permite el paso de unos cuantos rayos previamente seleccionados. Los rayos que pasan, son reflejados en el espejo de prueba pasando nuevamente por la pantalla de Hartmann y llegan a una pantalla de observación donde es registrado el patrón de Hartmann.

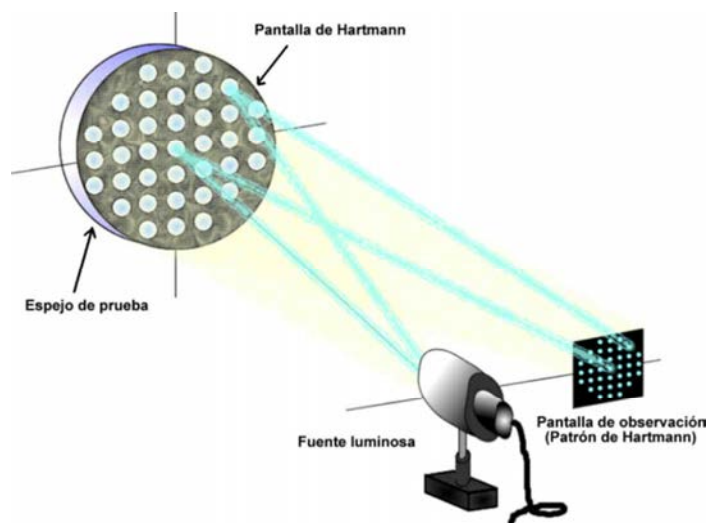


Fig. 1.3. Prueba de Hartmann aplicada a elementos ópticos.

Una vez obtenido el patrón de Hartmann del espejo de prueba, se procede a medir las aberraciones transversales experimentales del frente de onda con respecto a un patrón de referencia (Aberraciones Transversales). El valor de las Aberraciones Transversales se obtienen al comparar las posiciones de cada uno de los puntos experimentales con su similar de un patrón de referencia, obteniendo sus diferencias con respecto a las posiciones teóricas en coordenadas x-y en el sistema cartesiano.

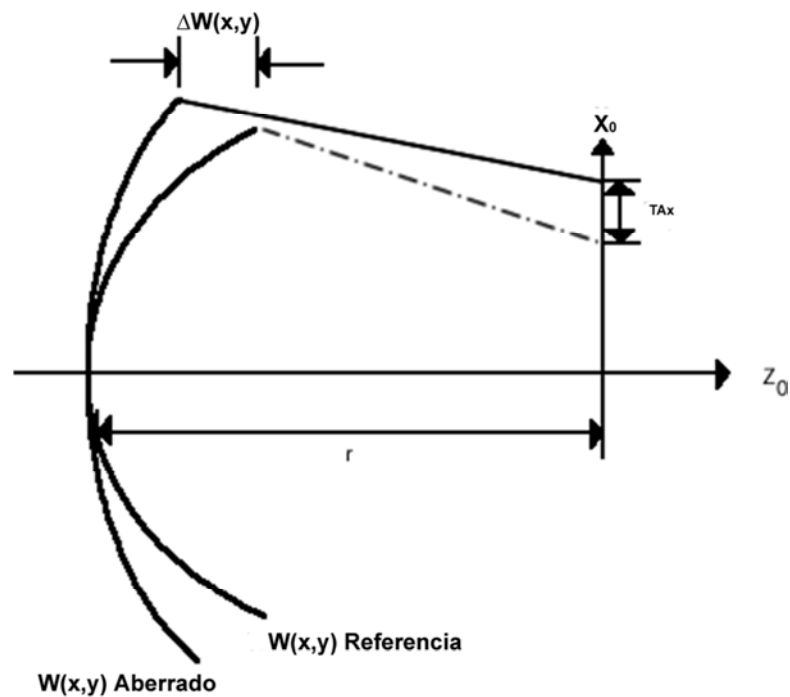


Fig. 1.4. Medición de las aberraciones transversales.

Las aberraciones transversales están relacionadas con el frente de onda como se muestra en las ecuaciones 1.6 y 1.7 [13].

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x,y)}{r} \quad 1.6$$

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = -\frac{TA_y(x,y)}{r} \quad 1.7$$

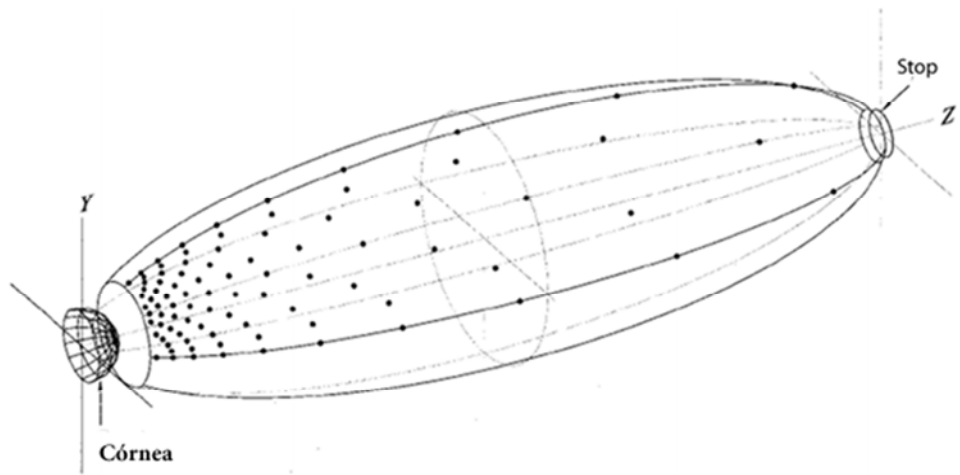
1.2.3 Prueba de Hartmann aplicada al sistema biológico-óptico humano

Una de las primeras pruebas y que actualmente se sigue utilizando para medir la deformación de la córnea humana es la que emplea el sistema conocido como Discos de Placido, la cual consiste de una serie de anillos concéntricos espaciados uniformemente que son proyectados sobre la primera superficie de la córnea a medir [14]. Este sistema es muy comercial y muy popular en el campo de topografía corneal actualmente.

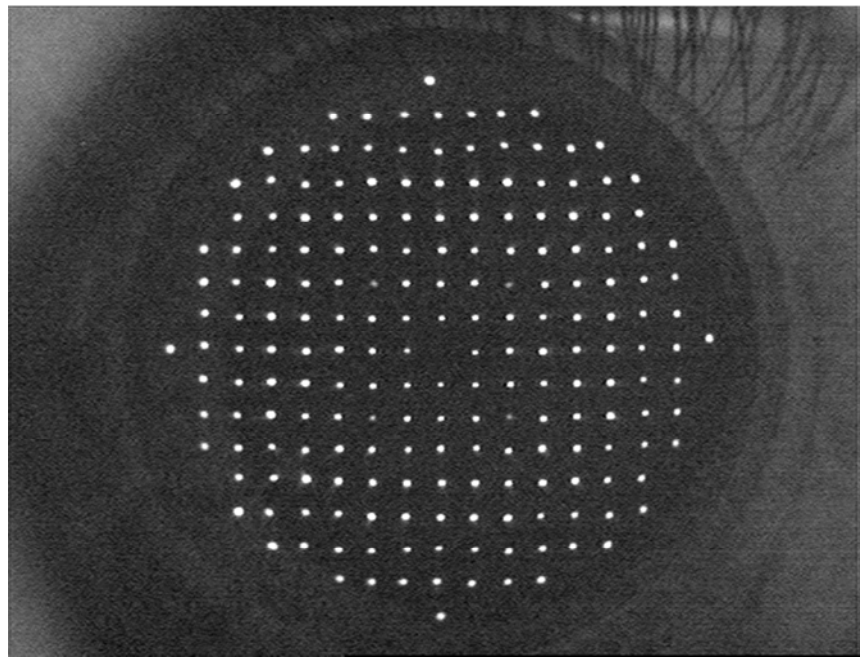
Por otro lado, la prueba de Hartmann ha evolucionado a muchas variantes dependiendo de la aplicación que se le quiera dar. En la ciencia de la visión se han creado variantes para poder ser aplicada a la primera superficie de la córnea. Para esto, es necesario crear una pantalla en forma de elipsoide de revolución, debido a la forma convexa de la córnea.

Una alternativa para la aplicación de la prueba de Hartmann sobre la primera superficie de la córnea fue implementada por Mejía y Malacara [15]. En la Fig. 1.5 se muestra esta prueba de Hartmann modificada, la cual se basa en una pantalla formada por un cascaron elipsoidal con perforaciones. Estas perforaciones son iluminadas con pequeños segmentos de fibra óptica que generan cada una una fuente de luz puntual.

En la Fig. 1.6 se muestra un nuevo mecanismo para aplicar la prueba de Hartmann sobre la primera superficie de la córnea el cual fue desarrollado por Malacara y Malacara. Este diseño fue creado con una nueva configuración de 64 puntos distribuidos a lo largo de 4 anillos de 16 puntos cada anillo. En la Fig. 1.6a, se observa el diseño de un topógrafo corneal basado en esta modificación de la prueba de Hartmann, en donde un arreglo de rayos es posicionado de tal forma que la imagen generada en la primera superficie de la córnea sea un patrón de Hartmann con simetría radial como se observa en la Fig. 1.6b. En este caso el sistema se basa en un arreglo de anillos con perforaciones iluminadas con fuentes de luz tipo LEDs.

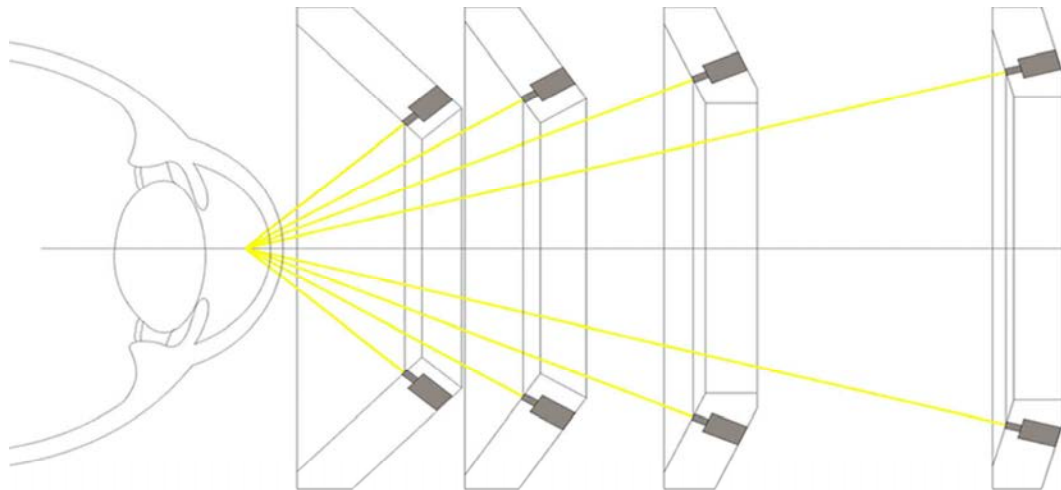


a)

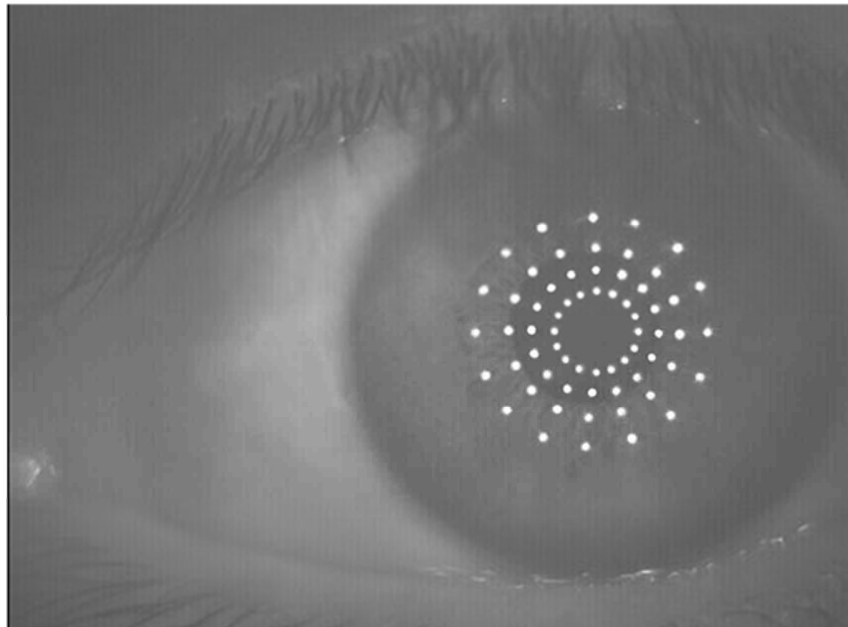


b)

Fig. 1.5. Prueba de Hartmann de Mejía y Malacara [9], a) Diseño de la prueba, b) Hartmanngrama en la primera superficie de la córnea.



a)



b)

Fig. 1.6. a) Prueba de Hartmann aplicada a la primera superficie de la córnea, b) Patrón de Hartmann sobre la primera superficie de la córnea.

Obteniendo las aberraciones transversales de cada uno de los puntos generados y utilizando alguna de las técnicas de integración Modal o Zonal, se reconstruye la forma topográfica de la córnea. En esta tesis nos enfocaremos principalmente en la correcta localización de los puntos de un hartmanngrama y en la integración Modal de las aberraciones transversales calculadas. A lo largo del Capítulo 2, se describe de una manera completa, el

método desarrollado para la localización y el cálculo de los centroides en una imagen generada por un topógrafo corneal tipo Hartmann. Este método varía en muchos aspectos de los métodos tradicionales de cálculo de centroides ya que, como se muestra adelante, ofrece la ventaja de que el cálculo del centroide se realiza a partir de toda la información del hartmanngrama.

Los Capítulos 3 y 4 se enfocan principalmente en la integración Modal de las aberraciones transversales generadas por una prueba de Hartmann. En el Capítulo 3 se explican dos métodos de integración Modal desarrollados en esta investigación. En el primer método se genera una nueva familia de polinomios ortogonales basados en la teoría de la representación del frente de onda descrita por el H. H. Hopkins (1959) [16]. Aquí se podrán observar un conjunto de nuevos polinomios generados por cada una de las pantallas de Hartmann mencionadas. El segundo método se basa en la creación polinomios a partir del método de mínimos cuadrados, en el cual suponemos situaciones que carezcan de aberraciones de alto orden. En este capítulo también se han diseñado nuevos arreglos de pantallas de Hartmann, esto con la finalidad de probar nuestros polinomios para diferentes situaciones y aprovechando las ventajas que cada una nos ofrecen.

El Capítulo 4 se enfoca en el estudio de situaciones en las que es necesario medir las potencias en pequeñas regiones sin tomar en cuenta las deformaciones de alto orden. Para esto se propone el uso de la prueba de Hartmann con 3, 4 y 5 puntos para el cálculo de las inclinaciones (*tilts*), las curvaturas esféricas y astigmática y la orientación cilíndrica haciendo uso de un análisis matemático de la forma de sistemas de ecuaciones simultáneas y mínimos cuadrados.

En el Capítulo 5 se mostrará un resumen de todos los resultados encontrados a lo largo del desarrollo de esta tesis así como un conjunto de nuevas propuestas de investigación futuras.

2. Cálculo de las Aberraciones Transversales (TA)

2.1 Introducción

Se le nombra Aberración Transversal (TA) a la diferencia que existen entre la localización de un punto generado por una superficie de referencia y una superficie real en una prueba de Hartmann (Fig. 2.1). En otras palabras, estas medidas son obtenidas para cada uno de los puntos generados por la prueba de Hartmann, encontrando la diferencia que existe entre las posiciones ideales y las posiciones reales de los puntos. Las TA 's siempre vienen en pares de puntos ya sea en coordenadas cartesianas (TA_x , TA_y) o coordenadas polares (TA_ρ , TA_θ). La importancia de obtener las TA 's de manera precisa es una de las problemáticas más grandes al momento de realizar el análisis de los datos arrojados de la prueba de Hartmann. A lo largo de este capítulo, se explicará el método desarrollado en esta tesis para obtener las medidas de las TA 's de un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann.

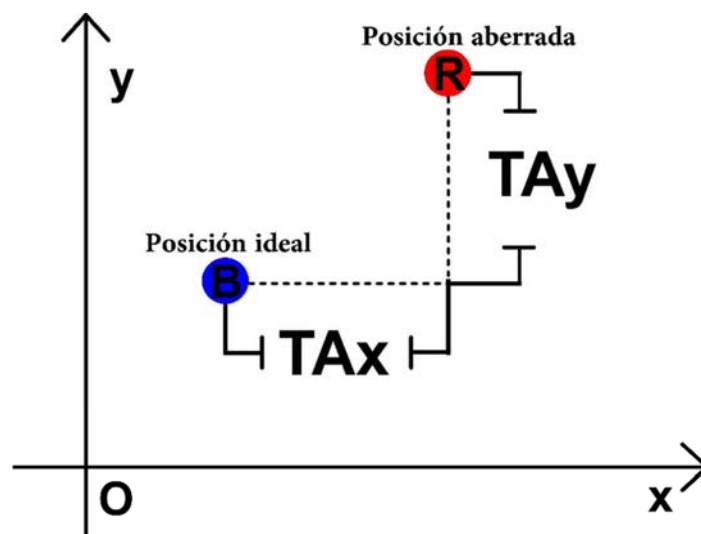


Fig. 2.1.- Aberraciones transversales entre el punto B (Base) y R (Real).

2.2 Análisis de un hartmanngrama.

Un hartmanngrama es la imagen que se obtiene como resultado de realizar la prueba de Hartmann. Los hartmanngramas se clasifican en dos tipos, los obtenidos al realizar la prueba de Hartmann a una superficie patrón de referencia y los que se obtienen al probar una superficie que se desea analizar. En ambos casos, estos hartmanngramas deben obtenerse bajo las mismas condiciones de prueba.

Dependiendo del tipo de tecnología de adquisición de imágenes que se desee utilizar, los hartmanngramas pueden ser almacenados de muchas formas, por ejemplo usando pantallas opacas, películas fotográficas o sensores CCD de cámaras de video [1]. Cada una de estas formas de observar los hartmanngramas tiene sus complicaciones particulares. En este capítulo nos enfocaremos en el análisis de los hartmanngramas en su forma digital describiendo los métodos de procesamiento digital de imágenes que utilizamos para la obtención de las coordenadas cartesianas $x - y$ de los centroides de cada uno de los puntos que nos llevarán al cálculo de las aberraciones transversales (TA_x , TA_y). Es importante mencionar que este método también es aplicable a coordenadas polares.

Las complicaciones que se pueden encontrar dentro del análisis de un hartmanngrama pueden ser descritas de manera general en cuatro categorías:

- a) Problemas para la localización de los puntos.- Antes de la aparición de las cámaras digitales, los hartmanngramas eran registrados en material fotográfico y la localización de cada uno de sus puntos se realizaba de manera manual, haciendo de esta tarea un método simple pero a su vez muy susceptible a errores humanos. En la actualidad, los hartmanngramas son registrados en imágenes digitales y la localización de sus puntos se realiza de manera automática utilizando sistemas de procesamiento de imágenes.
- b) Puntos mal definidos.- Debido a errores o problemas que puedan ocurrir durante la realización de la prueba, puede ocurrir que los puntos no tengan la intensidad adecuada o se encuentren mal definidos y puedan no ser considerados como puntos válidos.
- c) Características diferentes entre los puntos.- Cada uno de los puntos del hartmanngrama cuenta con características que lo hacen único, ya sea su posición, su geometría o su intensidad, esto dependiendo de las condiciones bajo las cuales se haya realizado la prueba. En el caso de tener fuentes de iluminación independientes, genera un valor de intensidad diferente, por lo tanto las intensidades son similares pero no las mismas, esto nos indica que cada uno de los puntos no puede ser analizado de la misma manera que el resto de ellos.
- d) Ruido de fondo.- En la mayoría de los casos en donde se aplica la prueba de Hartmann, existe un ruido de fondo que provoca que el análisis del hartmanngrama sea más complejo.

En la Fig. 2.2 se puede observar una simulación de los problemas que se pueden presentar al momento de analizar las imágenes obtenidas por la prueba de Hartmann.

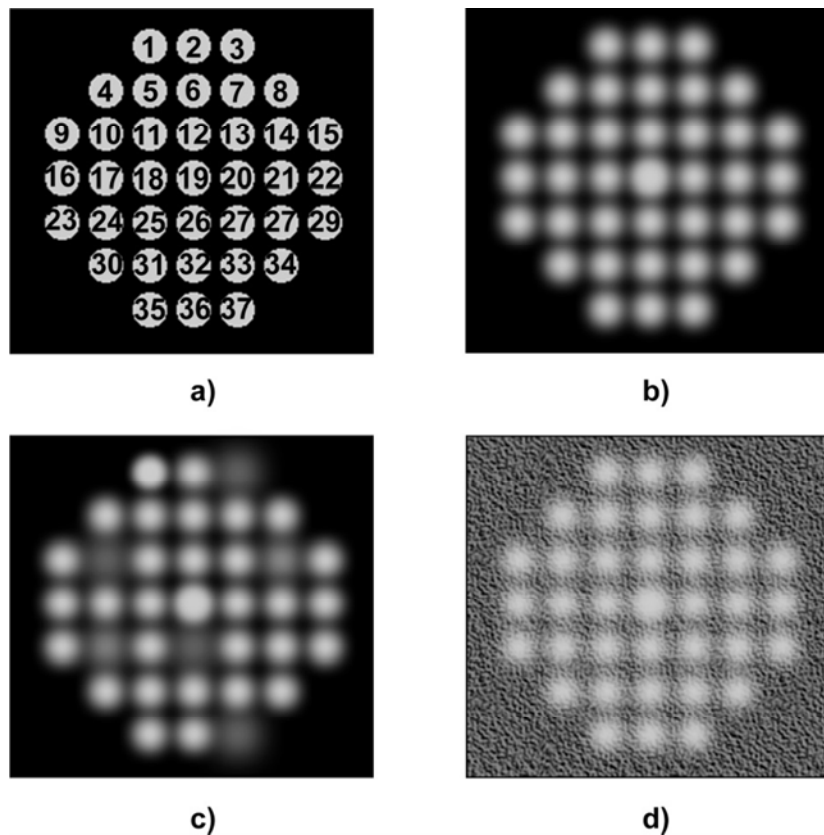


Fig. 2.2.- Complicaciones en el análisis de Hartmannogramas, a) Localización teórica de los puntos, b) Puntos mal definidos, c) Características diferentes entre los puntos y d) Ruido de fondo.

En la literatura existen diferentes técnicas para definir la localización del centroide de una mancha en un hartmanngrama [16–19] cada método tiene sus ventajas y desventajas, pero tratando de tomar en cuenta cada una de las complicaciones que acabamos de mencionar y haciendo uso de las teorías de procesamiento de imágenes, es posible localizar claramente los puntos (centroides de manchas) de un hartmanngrama; creando un algoritmo automático que nos proporcione las coordenadas de los centroides.

Los patrones de Hartmann y Hartmann-Shack son obtenidos con un detector de imágenes que muestra un patrón de arreglo de puntos imagen de fuentes discretas de luz. Ambas pruebas son similares con la diferencia principal de que para generar el patrón de Hartmann (la prueba clásica de Hartmann) se utiliza un haz de luz convergente cercano al foco

de la superficie de prueba, mientras que en la prueba de Hartmann-Shack el patrón de manchas es generado por un haz colimado por un arreglo de lentes [13]. La posición del centroide de cada uno de los puntos está en función de la configuración del sistema óptico con el que se realiza la prueba. En el límite de difracción del sistema, los efectos de difracción aparecen en la imagen y para nuestro análisis los hemos consideramos como ruido al igual que irregularidades provenientes de luces espurias de reflexiones y de otros factores que se presentan durante la adquisición de la imagen. También es necesario tomar en cuenta que los mecanismos de adquisición, como lo son los dispositivos CCD de imágenes, tienen un límite de saturación, el cual, agrega más errores dentro de nuestra prueba [21].

En el presente capítulo, se explicará la manera que se han procesado y analizado las imágenes provenientes de un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann tomando en cuenta cada una de las condiciones ya antes mencionadas para la localización de sus centroides. Para explicar mejor nuestro proceso lo hemos dividido en tres partes principales: a) Detección de las manchas, b) Segmentación y c) Cálculo del centroide.

2.2.1 Detección de los puntos.

La detección de intensidades sobre una CCD genera un arreglo de información $I(x, y)$, cuyos valores son proporcionales a la irradiancia a detectar más el ruido agregado al sistema. En el proceso de análisis de un hartmanngrama, es importante localizar nuestros puntos de interés, en otras palabras, dentro de todo el arreglo de información $I(x, y)$ de resultados, tenemos diferentes elementos presentes, pero lo único que nos interesa hasta ahora es saber dónde o en qué regiones se encuentran nuestros puntos a analizar.

Una manera de obtener la primera aproximación de una localización de estas regiones es utilizando un algoritmo de umbralización de imágenes utilizado por muchos autores [22 – 26] ya que es una de las técnicas más simples para separar elementos presentes en una imagen en dos categorías. El método utilizado en la umbralización está basado en operación de distribución de intensidad $I_{x,y}$ por una transformación no lineal a $Iu_{x,y}$ descrita en la ecuación:

$$Iu_{xy} = \begin{cases} 1 & I_{x,y} \geq U_{x,y} \\ 0 & I_{x,y} < U_{x,y} \end{cases} \quad 2.1$$

donde $U_{x,y}$ es el valor del umbral. Este proceso es muy simple y útil para poder localizar e identificar todos los puntos del hartmanngrama. Con este proceso podemos tener una imagen en la que se muestra una primera aproximación de las regiones en las que se encuentran los puntos de interés o en este caso, en donde debemos enfocar nuestro análisis para calcular las coordenadas de los centroides de cada uno de los puntos del hartmanngrama.

Una de las cuestiones más importantes durante la aplicación de un algoritmo de umbralización en una imagen es determinar el valor del umbral el cual, al aplicarlo, nos arroje la información que deseamos (Fig. 2.3). Debido a los diferentes niveles de ruido que contiene la imagen, podemos llegar a tener una mala elección de un umbral lo cual nos puede provocar dos situaciones. La primera es que además de localizar los elementos del arreglo de puntos del hartmanngrama, nos localice información proveniente de alguno de los factores de ruido. Y la segunda situación es en la que el umbral seleccionado no localice todos los puntos pertenecientes del hartmanngrama.

Para poder obtener un valor de umbral el cual sea el más adecuado para poder localizar el arreglo de puntos hemos utilizado dos técnicas. La primera, descrita por Otsu [26] en la cual el valor de umbral es seleccionado haciendo un análisis del histograma de intensidades de la imagen. Este método es muy conocido y empleado en el área de procesamiento de imágenes. El segundo método es un método muy simple el cual consiste en conocer a priori el número de puntos que componen el arreglo de puntos del hartmanngrama e ir variando el valor del umbral de una manera secuencial hasta encontrar un valor que nos arroje la información que necesitamos.

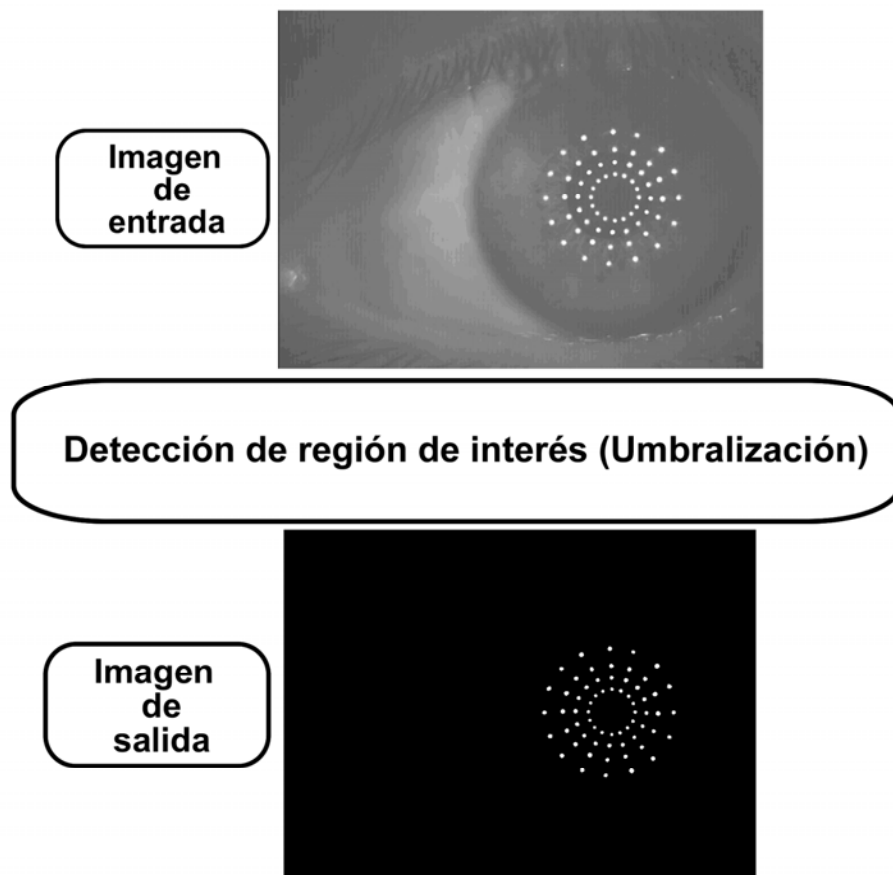


Fig. 2.3.- Proceso de umbralización de un Hartmanngrama.

Este proceso puede resultar simple pero es de vital importancia para la realización de nuestro proceso de localización del centroide. Como se mencionó anteriormente, esta es la primera etapa de nuestro proceso y a continuación es necesario trabajar sobre cada uno de los puntos localizados en nuestra imagen umbralizada.

Debido a que durante el proceso de umbralización se crea una primera aproximación de las regiones en donde se encuentran los puntos a analizar, es necesario ampliar cada una de estas regiones de los puntos encontrados para incrementar el área de análisis y no omitir información que pueda ser descartada por el proceso de umbralización.

Para incrementar la región de análisis de cada punto, aplicamos un proceso de dilatación utilizado comúnmente en procesamiento de imágenes [27–32] utilizando como elemento estructurante una esfera como lo muestra la ecuación:

$$\delta(I_L)(x, y) = \max_{(s,t) \in Y} I_L(x-s, y-t)$$

2.2

Donde $\delta(I_L)(x, y)$ describe el proceso de dilatación y Y es el elemento morfológico estructurante. En general, las imágenes morfológicas trabajan con elementos morfológicos estructurantes sobre la imagen a analizar en una operación similar a la convolución. El elemento morfológico estructurante es una matriz de valores de 0's y 1's que representa una formación específica. En nuestro caso utilizamos un elemento estructurante en forma de esfera.

En la Fig. 2.4a se puede observar que los procesos aplicados al hartmanngrama han creado una máscara sobre todos los elementos del arreglo de puntos, de igual manera, en la Fig. 2.4b se puede observar que existe una variación de intensidades de los puntos a identificar por debajo del nivel del umbral, esta información puede ser tomada como innecesaria pero en nuestro caso será usada para agregar más confiabilidad a nuestros resultados.

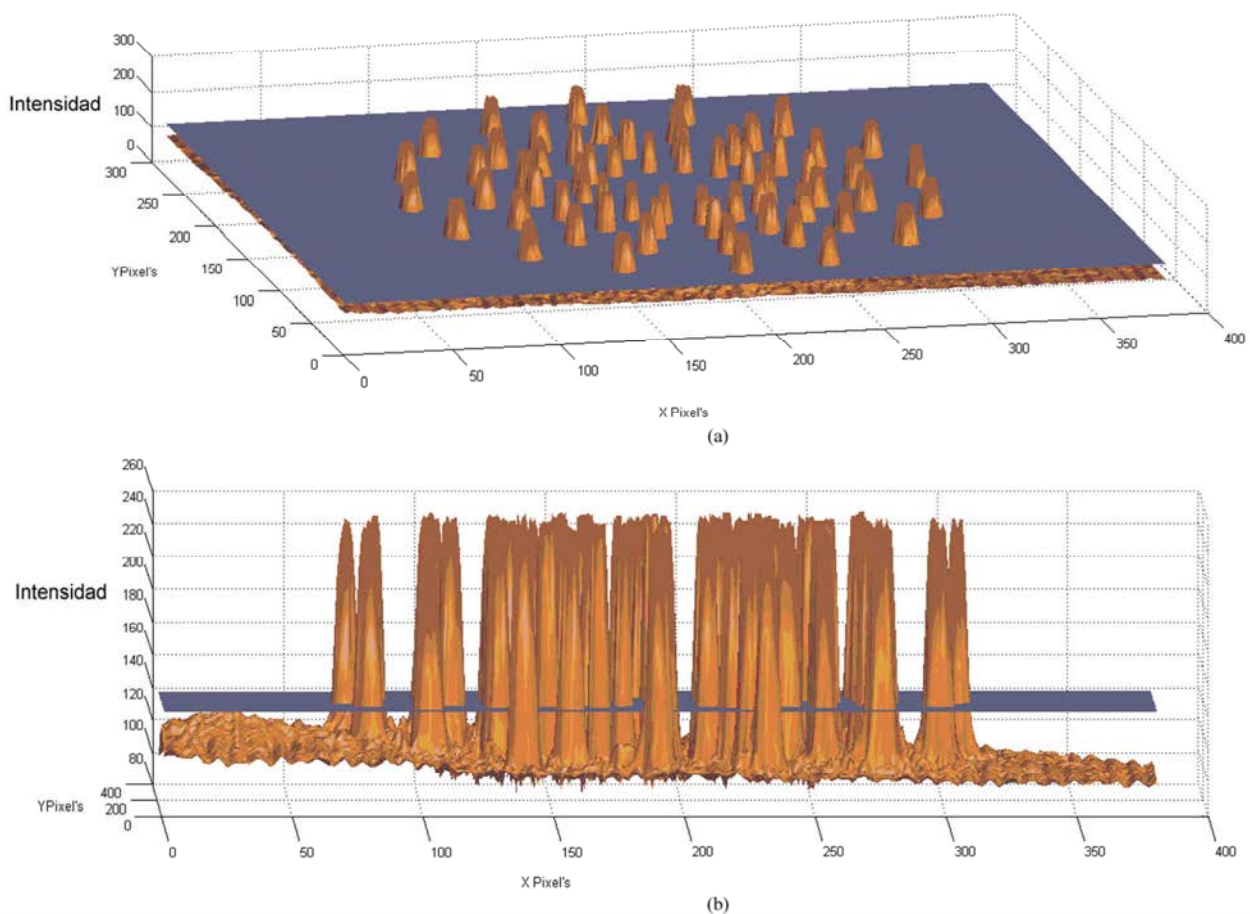


Fig. 2.4.- Proceso de umbralización de la imagen.

2.2.2 Segmentación

Debido a que cada uno de los puntos que forman un hartmanngrama están creados por fuentes de luz independientes, cada uno de los puntos tiene diferentes características de tamaño, forma e intensidad como lo muestra la Fig. 2.5. Por lo tanto, no es posible tener un método universal para calcular el centroide de los puntos de manera general. Debido a esto, es necesario crear un método que se adapte a las características que presenta cada uno de los puntos. Como primera etapa para poder crear un método de cálculo de centroide adaptivo, es necesario identificar por separado cada uno de los puntos. En la etapa de segmentación del hartmanngrama se realiza un etiquetado de manera de que cada uno de los puntos tenga un identificador único que lo distinga del resto de sus similares. Para realizar el proceso de etiquetado, se creó el algoritmo *Flood Index Fill* (FIF). Con este algoritmo podemos crear $n_{spots}+1$ segmentos tomando en cuenta el fondo de la imagen como un segmento.

La tarea principal de este algoritmo es la de etiquetar todos los elementos presentes en la imagen binaria (umbralizada) obtenida por el proceso anterior (Ec. 2.3). En la imagen binaria tenemos dos tipos de regiones que nombramos como “spot” y “no-spot”. El algoritmo *FIF* es un algoritmo que selecciona un grupo de píxeles pertenecientes a un tipo de región y les asigna una etiqueta común. La etiqueta asignada corresponde a un número entero que va desde 0 hasta n_{spots} encontrados.

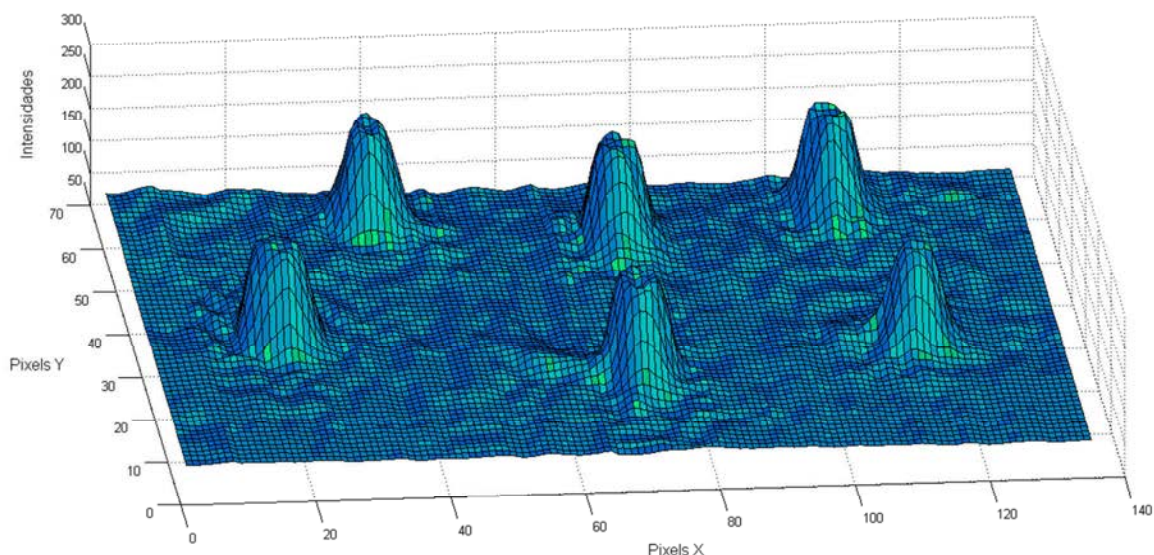


Fig. 2.5. Patrón de intensidad de un segmento de hartmanngrama.

En el programa MatLab existe la función *bwlabel.m* que aplica de una manera similar este proceso, sin embargo, la función no presenta ninguna descripción de su funcionamiento y nosotros hemos realizado la nuestra.

$$I_L = FIF(\delta(I_L)) \quad 2.3$$

El algoritmo comienza analizado un pixel inicial de la imagen binaria sin etiquetar que pertenece a una zona de “spot” o “no-spot”, y le asigna una etiqueta que corresponde al número de elementos encontrados hasta el momento. Cuando ya se le ha asignado una etiqueta, el proceso continúa analizando cada uno de los cuatro pixeles vecinos con el mismo procedimiento que fue analizado el pixel inicial y si pertenece al mismo grupo, le asigna la misma etiqueta, de esta manera, todos los pixeles de un mismo grupo quedan etiquetados con un mismo número de referencia. Para continuar, el número de etiqueta se incrementa en una unidad y enseguida se busca un nuevo pixel inicial sin etiquetar y el proceso se repite sucesivamente. Finalmente, cuando ya no existan pixeles sin etiquetar, el proceso termina. La Fig. 2.6 nos muestra una imagen que representa el resultado de este algoritmo utilizando colores para representar cada una de las etiquetas.

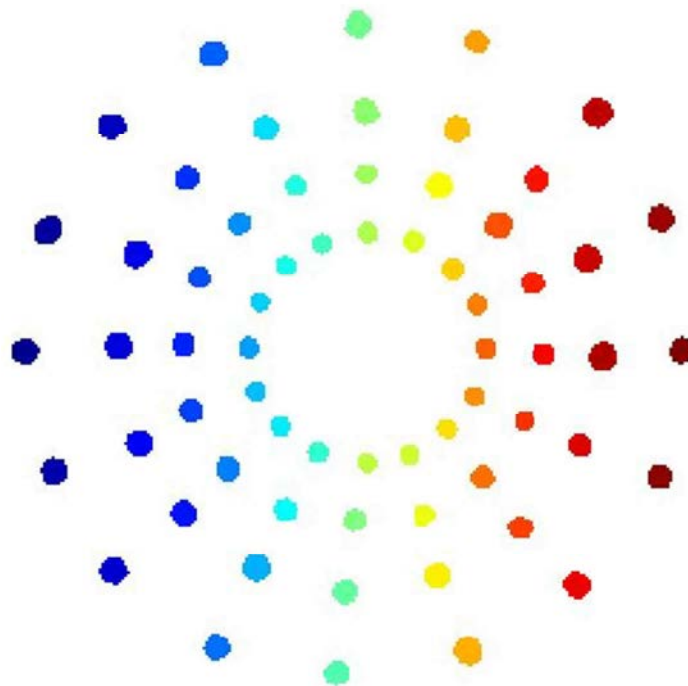


Fig. 2.5 .- Segmentación del hartmanngrama.

El algoritmo puede ser codificado en lenguaje C en una función recursiva de la siguiente manera.

```
for (int i=0;i<Rows;i++)
  for (int j=0;j<Columns;j++)
  {
    ImarResult=FloodIndexFill(i,j,LabelX,Image);
    LabelX++;
  }

ImageType FloodIndexFill (x,y,LabelX,Image) {
  if (Image[x][y]==0)
  {
    Image[x][y]=LabelX;
    Image=FloodIndexFill (x-1,y, LabelX,Image);
    Image=FloodIndexFill (x+1,y, LabelX,Image);
    Image=FloodIndexFill (x,y-1, LabelX,Image);
    Image=FloodIndexFill (x,y+1, LabelX,Image);
  }
}
```

en donde las variables *Rows* y *Columns* corresponde a las dimensiones de la imagen binaria que se está procesando. La variable *LabelX* es la variable de etiquetas e *Image* es la imagen binarizada de entrada. A diferencia de otros métodos de localización de spot que utilizan métodos de ventaneo [17,18,33] nuestro algoritmo realiza una localización evitando la necesidad de una ventana de búsqueda.

Como lo mencionamos anteriormente, durante el proceso de umbralización, la información se separa en dos categorías (“spot” y “no-spot”), en nuestro caso, este proceso fue utilizado únicamente para localizar nuestra región de interés. Posteriormente durante el proceso de segmentación y etiquetado se puede tener una referencia a cada uno de los puntos encontrados. Esto es de mucha utilidad ya que es posible aplicar un análisis diferente para cada punto. Cuando se trabaja con cada uno de los puntos por separado, se puede saber si el punto que se está analizando es realmente un punto generado por la prueba de Hartmann o corresponde a alguna imperfección en la imagen, analizando los datos del punto como lo son el número de pixeles que lo conforman, su posición en la imagen general y sus niveles de intensidades. De la misma manera, conociendo el patrón de Hartmann que se está empleando, tenemos una noción del tipo de patrón que se tiene que generar, con esto podemos agregar

más información a nuestro análisis y darle un grado de inteligencia a nuestro proceso de selección haciendo nuestro algoritmo más resistente a fallos.

2.2.3 Cálculo del Centroide

Hasta este punto del proceso, hemos creado una imagen del tipo mapa de regiones de localización de puntos. Una vez obtenidas las localizaciones de las regiones de cada punto, es posible analizar cada uno de los puntos de manera independiente. En la literatura se considera que los puntos generados por una prueba de Hartmann tienden a tener un patrón similar a un disco de Airy [25], en el caso de nuestra prueba de Hartmann, como ya se ha mencionado anteriormente, los puntos son generados por fuentes de luz tipo LED's lo que provoca que los patrones de intensidad generados no tengan un único valor de máxima intensidad ni speckle. Los patrones intensidad generados por las fuentes de luz LED presentan un patrón de intensidades máximas tipo "alas de murciélago", como se puede observar en la Fig. 2.6, porque sus regiones emisoras son irregulares (tendiendo a rectangulares), con distribución local de emitancia que es producto del proceso de fabricación de cada LED. También es importante mencionar que las propiedades físicas de cada una de las fuentes de luz LED no son exactamente las mismas.

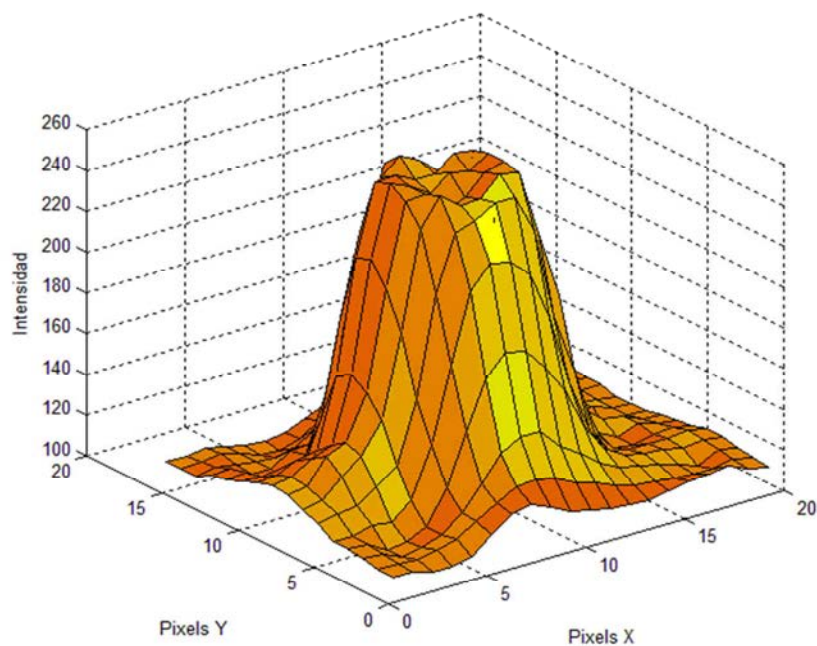


Fig. 2.6.- Patrón de intensidades de una fuente de luz tipo LED.

Además cada uno de los puntos del hartmanngrama cubre diferente cantidad de pixeles que lo conforman, así como sus niveles de intensidades. Estas diferencias son generadas por diferentes variables durante la prueba. De igual manera pueden existir pequeñas imperfecciones en la estructura del topógrafo así como variantes en la alineación durante la prueba que provocan la variación de intensidades de cada uno de los puntos. Esto quiere decir que de una prueba a otra, los niveles de intensidad del mismo punto pueden variar. Esto sin tomar en cuenta las aberraciones presentes en el sistema óptico que adquiere la imagen [34]. En nuestro caso trabajaremos con cada uno de los puntos de manera independiente, con la mayor cantidad de información posible, para poder estimar de manera confiable cada valor de centroide. Para separar la información de cada punto usaremos la máscara de etiquetas de región generada en el proceso de segmentación haciendo referencia de cada uno de los puntos de manera independiente.

$$I_{Spot_i} = I_{L_i} * I_{x,y} \quad 2.4$$

Donde I_{L_i} es la máscara del mapa de localización, i es el número de etiqueta y $I_{x,y}$ son los datos originales del hartmanngrama.

Utilizando esta nueva área de análisis para cada uno de los puntos definida por la Ec. 2.4, cada uno de los puntos puede ser analizado en detalle para encontrar su centro de masa definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\sum I_{Spot_i} G_i x_i}{\sum I_{Spot_i} G_i} \\ Y_i &= \frac{\sum I_{Spot_i} G_i y_i}{\sum I_{Spot_i} G_i} \end{aligned} \quad 2.5$$

Donde X_i y Y_i son las coordenadas del centroide, G_i es un valor de peso definido por una función Gaussiana descrita por Baker y Moallem [35], Nicole y sus colaboradores [36] y por Fusco y sus colaboradores [37]. El valor de G_i para cada punto depende de sus valores σ_x y σ_y (desviaciones estándar) en las direcciones $x-y$ en coordenadas cartesianas. La función

Gaussiana ($G_i(x, y)$) descrita en la Ec. 2.6 se basa en la distribución de intensidad de cada uno de los puntos independientes en I_L .

$$G_i = A \exp\left(-\left[\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right) \quad 2.6$$

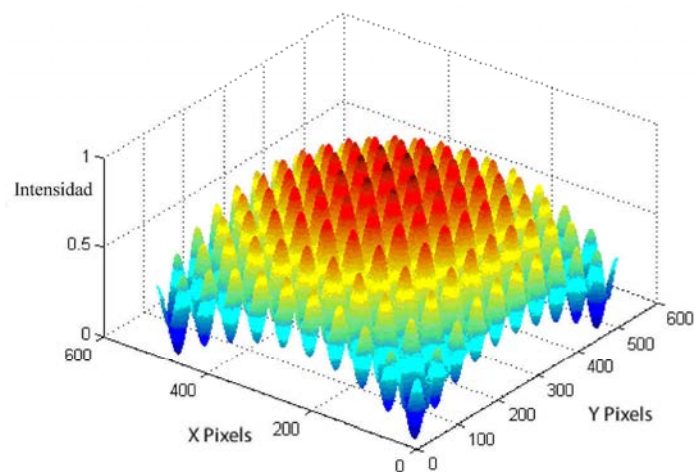
donde A es el valor de intensidad máxima registrada en la región que se analiza y los valores x_0, y_0 son las coordenadas donde las intensidades son máximas (pueden ser varios píxeles con ese mismo valor de intensidad) sobre la región del punto que se está analizando.

En resumen, podemos decir que una de las partes más importantes dentro de nuestro proceso de cálculo del centroide es la determinación de un umbral adecuado para analizar los puntos. En nuestro algoritmo, la umbralización es utilizada únicamente para realizar un proceso de binarización. En la imagen binarizada tenemos dos clasificaciones (spot y no-spot) en la cual solo nos enfocaremos en la región de interés (spot) para las etapas subsiguientes. Utilizando técnicas de segmentación podemos enfocar nuestro análisis únicamente en los puntos que nos importan. Trabajar de manera independiente con cada uno de los puntos nos permite aplicar procesos más adecuados dependiendo de sus características de densidad de puntos, ubicación y niveles de intensidad y aplicar un centroide pesado usando una función Gaussiana G_i generada bajo las condiciones de cada punto.

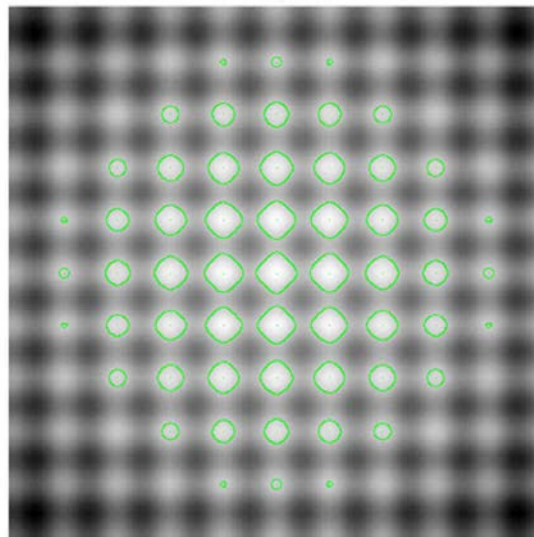
2.3 Pruebas y resultados

Para poner a prueba la eficiencia de nuestro algoritmo, hemos aplicado el proceso completo de cálculo del centroides a tres diferentes tipos de imágenes. El primer tipo de prueba fue bajo imágenes sintéticas en la cuales podemos tener un control de las intensidades y las posiciones de cada uno de los puntos. Para esto se generó un conjunto de imágenes de prueba a partir de imágenes sintéticas o *benchmarks* utilizados comúnmente en algoritmos genéticos (GA) [38]. Las imágenes sintéticas son generadas por funciones que representan diferentes tipos de distribución de intensidad. De esta manera, los puntos y las localizaciones de los centroides pueden ser previamente calculados y por consecuencia evaluar la precisión del algoritmo.

La Fig. 2.7 muestra los resultados obtenidos sobre una imagen sintética generada bajo la función *Rastrigin* bajo unas dimensiones de 501x501 píxeles. De esta manera se sabe que las coordenadas del centroide del punto principal se encuentran en la posición (251,251), así como la de los puntos secundarios que aparecen en la imagen. Esta imagen sintética presenta características de variación de intensidad en cada uno de los puntos secundarios y de igual forma, las coordenadas de los centroides generados computacionalmente fueron calculados. En la Fig. se observa otra imagen sintética generada bajo la función *Bump* en la cual se muestra una variedad de puntos con diferentes intensidades que va disminuyendo de izquierda a derecha y de la parte superior a la inferior. Para cada punto, la intensidad es diferente, dependiendo de su posición. En este caso se puede observar cómo todos los puntos fueron localizados por nuestro algoritmo sin importar que sus características fueran diferentes.



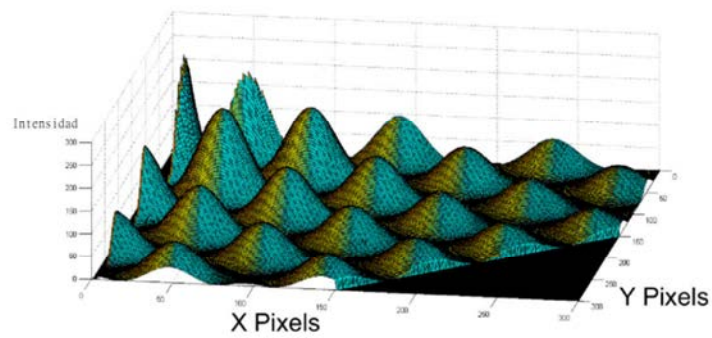
(a)



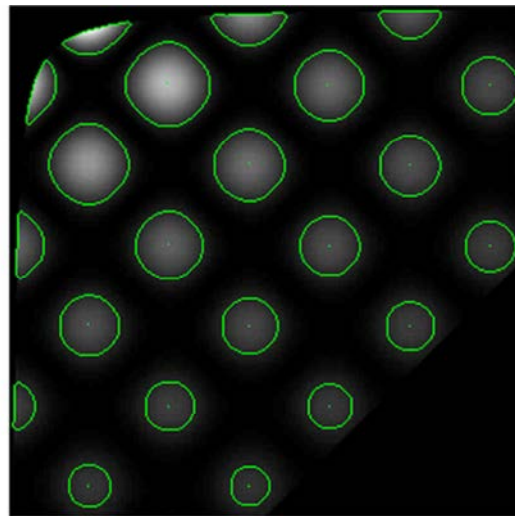
(b)

Fig. 2.7.- Función Rastrigin, a) Diagrama generado de intensidades, b) Imagen procesada.

Como segunda prueba, se analizaron imágenes de un patrón Hartmann-Shack para evaluar de manera más exhaustiva nuestro algoritmo (Fig. 2.9). En esta prueba, los resultados fueron muy buenos, ya que cada uno de los puntos fue detectado y calculado su centroide bajo una nueva definición de centro de masa ponderado con una función Gaussiana formada por un análisis global de intensidades y regiones cercanas.



(a)



(b)

Fig. 2.8.- Función Bump, a) Diagrama generado de intensidades, b) Imagen procesada.

Nuestro siguiente caso de prueba es bajo imágenes reales obtenidas por un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann (Fig. 2.10). Cabe mencionar que esta prueba, a pesar de ser la más importante, es la más difícil de verificar de manera cuantitativa ya que como mencionamos anteriormente, las condiciones bajo las que se realizan las pruebas con un topógrafo corneal real pueden variar de una prueba a otra. En la Fig. 2.10 se observa un patrón con simetría radial de 64 puntos de una prueba de Hartmann sobre la primera superficie de la córnea.

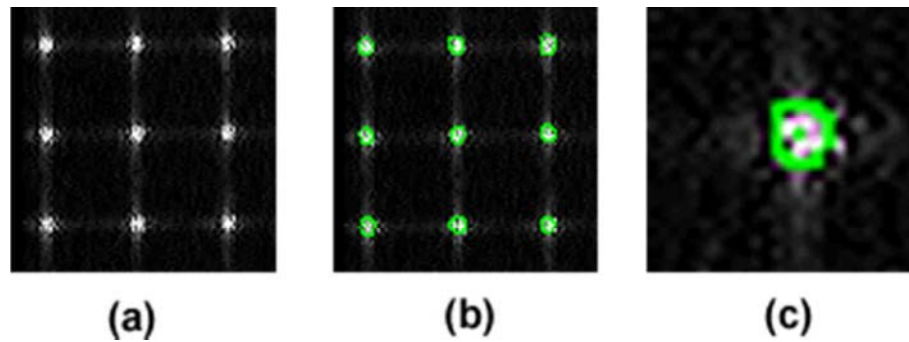


Fig. 2.9.- Shack-Hartmanngrama a) Imagen experimental, b) Imagen de salida del proceso de cálculo de centroide, c) Amplificación.

En la Fig. 2.10a podemos observar con detalle cómo en una imagen de una topografía corneal se pueden encontrar algunos objetos que no son propiamente parte del patrón de Hartmann como el globo ocular, el iris, pestañas superiores e inferiores, etc. A estos objetos los llamamos ruido. Al aplicar el proceso de umbralización, todos estos objetos son removidos, o aislados para no ser interpretados por nuestro algoritmo como puntos del patrón de Hartmann. En la Fig. 2.10b observamos la imagen de salida del proceso completo; como se puede observar, todos los puntos del patrón de Hartmann fueron detectados así como su respectivo centroide pesado utilizando las Ec. 2.5. En la Fig. 2.10c y 2.10d se puede observar con mejor detalle la localización de los centroides haciendo una ampliación del área de interés.

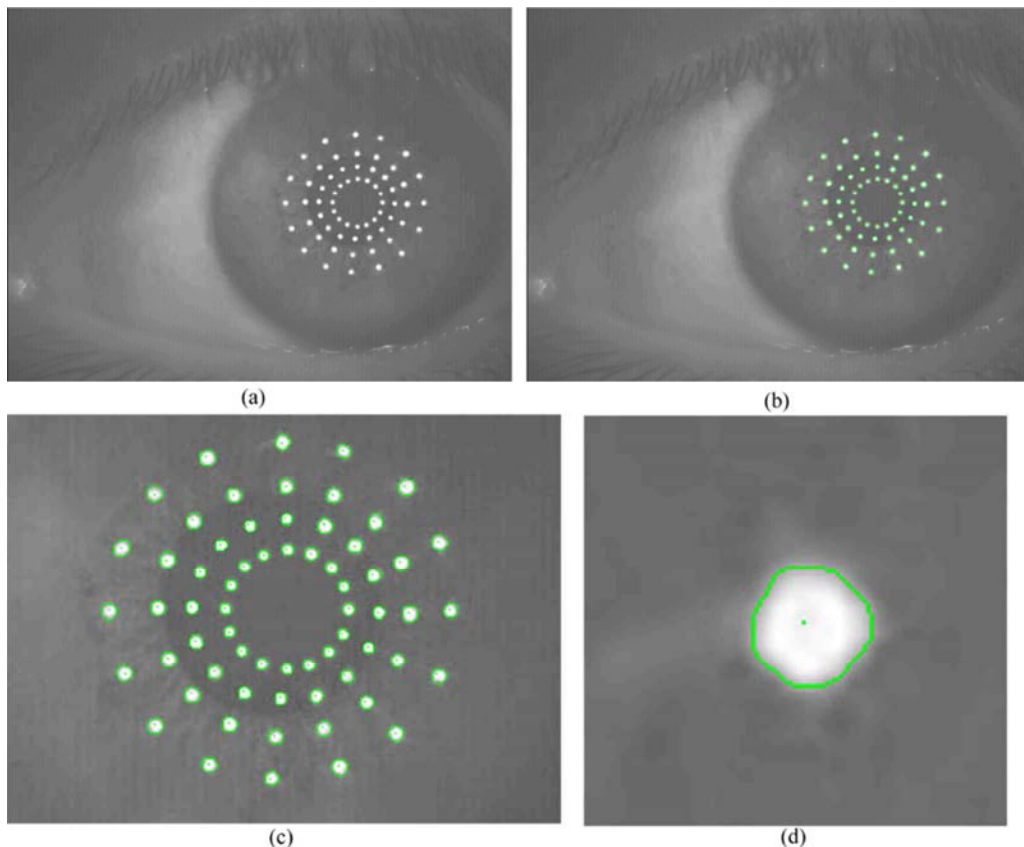


Fig. 2.10.- Hartmanngrama a) Imagen de entrada, b) Imagen de salida del proceso de cálculo de centroide, c) Áreas de análisis y d) Amplificación.

Como prueba final se decidió someter a nuestro algoritmo una imagen con una serie de errores para probar su eficiencia y confiabilidad. En la Fig. 2.11 se observan muchos puntos falsos, puntos que no pertenecen al patrón de Hartmann, que fueron generados por diversas reflexiones dentro del sistema.

Debido a la información que se le adiciona a nuestro algoritmo, como lo es el número total de píxeles, su posición y valores de intensidades estimados, podemos observar que en la Fig. 2.11 únicamente los puntos reales fueron detectados y analizados para el cálculo de su respectivo centroide. Esto nos da la certeza de que a pesar de que existan más objetos muy similares a puntos en la imagen y que no pertenezcan al patrón de Hartmann, únicamente se analizaran los puntos reales.

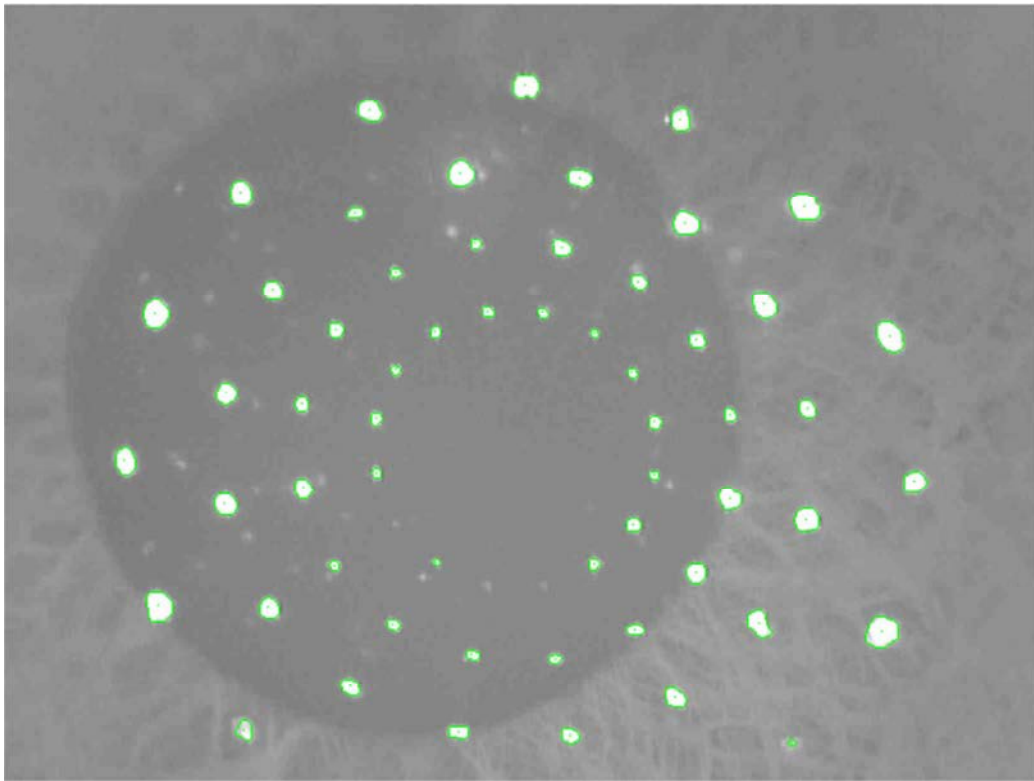


Fig. 2.11.- Imagen con múltiples reflexiones y ruido.

3. Integración Modal de las aberraciones transversales en un patrón Hartmann.

3.1 Introducción.

Gracias a las pruebas de sistemas ópticos tales como la prueba de Hartmann y Hartmann-Shack [10,39] es posible obtener las magnitudes de las pendientes de un frente de onda o dicho de otra manera, obtener sus valores de TA 's (Aberraciones Transversales). Debido a esto, los métodos de integración se convirtieron en una necesidad fundamental para realizar una representación analítica de la deformación del frente de onda. Durante mucho tiempo, se han desarrollado una gran variedad de métodos de integración, los cuales están clasificados en dos principales categorías, los métodos de "Integración Modal" e "Integración Zonal" [1]. En la aplicación de los métodos de integración Zonal, se realiza una integración numérica de todas las desviaciones encontradas (TA 's) en los puntos de la prueba de Hartmann entre una posición ideal (frente de onda no aberrado) y una posición aberrada (frente de onda experimental). Comúnmente, este tipo de integraciones puede realizarse a lo largo del eje horizontal o vertical; incluso es posible realizar diferentes combinaciones que conecten puntos del patrón de Hartmann [13]. El método de integración de Newton [40] es uno de los métodos de integración más empleados en la actualidad, debido a su simplicidad. Con el método de integración "Zonal" es posible lograr una aproximación de la representación tridimensional del frente de onda. De manera similar, otro método de integración muy utilizado es el propuesto por Southwell [41] el cual se basa en la integración de puntos a través de métodos numéricos de mínimos cuadrados y su propagación de error y expresando el frente de onda en forma de polinomios. Como podemos notar, los métodos de integración *Zonal* realizan una integración numérica y su confiabilidad está dada en gran medida por la precisión en la que se ha localizado el centroide de cada uno de los puntos del hartmanngrama.

A diferencia de los métodos de integración *Zonales*, en los métodos *Modales* no se realiza la integración de los datos uno a uno, en este caso, el patrón de puntos es tomado como un todo. Los métodos de integración Modales están basados en la teoría de que la deformación del frente de onda puede ser representada por una combinación lineal de funciones analíticas independientes. Estas funciones son llamadas aberraciones y pueden llegar a ser representadas de diferentes formas. Los métodos de integración del tipo Modales bajo estas teorías son variados y a lo largo del tiempo han sido trabajados por muchos investigadores

desde Cubalchini [42] en el año de 1979, Prieto y sus colaboradores [43], Gavrielides [44], Thibos y sus colaboradores [45], Neal y sus colaboradores [46], Aksenov y sus colaboradores [47] y Acosta y sus colaboradores [48] por mencionar algunos. Una de las características de los métodos Modales es que en ellos se supone que el frente de onda a recuperar tiene una representación analítica que típicamente es una combinación lineal de polinomios de Zernike [1].

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^J a_j Z_j(x, y) \quad 3.1$$

donde $Z(x, y)$ son los ya conocidos polinomios de Zernike.

Una de las maneras de obtener la representación de un frente de onda utilizando polinomios de Zernike a partir de las deformaciones del frente de onda está basada en el hecho de que sus coeficientes describen una combinación lineal de polinomios ortogonales, los cuales pueden ser encontrados utilizando la expresión:

$$a_j = \int Z_j(x, y) W(x, y) dx dy \quad 3.2$$

En la que el valor de frente de onda $W(x, y)$ es conocido sobre toda la apertura circular. En el caso de las pruebas de Hartmann y Hartmann-Shack, es necesario primero integrar los valores medidos de las pendientes para encontrar los valores de los coeficientes del frente de onda. Mahajan en su capítulo de libro “*Zernike Coefficients from Wavefront Slope Data*” [49] menciona que ambas etapas pueden llegar a ser realizadas en solo una, definiendo una función vector $\vec{V}(x, y)$ para los coeficientes a_j dados por:

$$a_j = \int \nabla W(x, y) \cdot \vec{V}(x, y) dx dy \quad 3.3$$

en donde los elementos de esta función vector son dos polinomios y el operador punto (\cdot) representa el producto escalar de ambos vectores. Este método, con algunas pequeñas variaciones, ya ha sido empleado por diferentes autores como Gavrielides [44] y algunos otros [46–48]. Esta técnica resulta ser muy apropiada si las pendientes del frente de onda son analítica o numéricamente conocidas dentro de un arreglo de Hartmann sobre una pupila

completa. En caso contrario, no tiene sentido utilizar los polinomios de Zernike para representar la deformación del frente de onda debido a que los polinomios no serían ortogonales. Otro ejemplo muy popular de integración Modal se encuentra basado en la técnica de Fourier [50,51] el cual evita la necesidad de realizar el proceso de localización de los centroides haciendo uso de procesos de correlación.

Como sabemos, las pendientes medidas de un frente de onda a través de una prueba de Hartmann o Hartmann-Shack son la derivada analítica de funciones polinómicas del frente de onda, esto es, la desviación medida de cada uno de los centroides puede ser sometida al proceso de mínimos cuadrados en conjunto para encontrar las expresiones de las pendientes de la sección de frente de onda correspondiente a cada punto de Hartmann. Finalmente, estas expresiones son numéricamente integradas para recuperar la deformación del frente de onda. A lo largo de este capítulo describiremos cómo realizar una integración de las pantallas de Hartmann y Hartmann-Shack con un método de integración modal en la dirección radial a través de un método alternativo, en donde se cuente con un número limitado o bien definido de puntos.

3.2 Integración y representación del frente de onda utilizando patrones de Hartmann y Hartmann-Shack.

La representación más comúnmente utilizada para describir un frente de onda es mediante los polinomios de Zernike. Este método tiene una gran cantidad de ventajas, las cuales vienen del hecho de que los polinomios de Zernike son ortogonales sobre una base continua dentro de una pupila circular. En nuestro análisis suponemos que los datos medidos son generados por una gran densidad de puntos uniformemente distribuidos sobre la pupila circular de salida. Si estos puntos medidos del frente de onda son sometidos a un procedimiento de mínimos cuadrados, podemos obtener una serie de ventajas tales como:

1.- Dentro del procedimiento de mínimos cuadrados se requiere la inversión de una matriz cuadrada de $L \times L$ elementos, en donde L designa el número de términos del polinomio de Zernike a utilizar. Debido a que los polinomios de Zernike son ortogonales sobre una pupila circular, la matriz que se forma es una matriz diagonal lo cual hace innecesaria la inversión de dicha matriz. Si los polinomios (o monomios) no fuesen ortogonales, la matriz no sería diagonal provocando la generación de muchos errores numéricos durante la inversión de la matriz.

2.- Si un elemento de los polinomios de Zernike es removido después de realizar el procedimiento de mínimos cuadrados, por ejemplo, el término de desenfoque o el de *tilt*, esta acción no afectaría en absoluto al proceso de mínimos cuadrados. En otras palabras, todos los términos de aberraciones que están representados en polinomios de Zernike son independientes unos de otros, por ser ortogonales. Por lo tanto, si un término cualquiera es removido, no afecta a los demás.

3.- Cada término de aberración en una función de polinomio de Zernike representa una minimización de aberración con la cantidad adecuada de *tilt*, defoco y aberraciones de bajo orden. En otras palabras, el valor medio de cada aberración de Zernike es igual a cero.

4.- Los polinomios de Zernike proporcionan una buena representación que ya se encuentra establecida como un estándar de representación de las deformaciones de frente de onda.

Ahora consideraremos el caso en el que un patrón de aberraciones está representado por las pendientes obtenidas de un frente de onda (*TA's*), como es el caso en una prueba de Hartmann o Hartmann-Shack. Si intentáramos representar el frente de onda utilizando polinomios de Zernike, las funciones de las pendientes serían funciones más complejas ya que sus derivadas no son ortogonales. En consecuencia, cualquier resultado proveniente del procedimiento de mínimos cuadrados no produciría una matriz diagonal como ha sido señalado por Rios y sus colaboradores [51]. Por lo tanto la principal ventaja del uso de los polinomios de Zernike se pierde, incluso suponiendo que la densidad y uniformidad de los puntos sea lo suficientemente alta. Si el número de datos o información recabada no es extremadamente grande y uniforme, lo cual es el caso de los patrones de Hartmann, Hartmann-Shack o incluso un patrón de discos de Placido [14], los polinomios de Zernike generados no son ortogonales sobre una base discreta de puntos. Debido a esto, el uso de los polinomios de Zernike en cualquiera de los casos no tendría grandes ventajas.

Por otro lado, en el año de 1950, el Dr. H. H. Hopkins [16] plantea la propuesta de representar el frente de onda a través de una combinación de monomios en coordenadas polares de la forma $\rho^n \cos l\theta$ y $\rho^n \sin l\theta$ bajo las condiciones de que $|l| < n$ y que $(n-l)$ deben ser par. Dicho de otra manera, los valores de n y l deben ser ambos pares o ambos impares. También sugiere que el ángulo θ debe ser medido con respecto al eje x pero frecuentemente, cuando el sistema óptico es centrado, con simetría de rotación, la imagen es

desplazada a lo largo del eje y y el ángulo θ es medido con respecto al eje y . Todas estas medidas pueden ser tomadas en cuenta fácilmente si la función del frente de onda es expresada con una nueva definición de índices como $m = (n-l)/2$ o $l = n - 2m$. De esta forma, el frente de onda es representado por:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nl} \rho^n \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (|n - 2m|) \theta \quad 3.4$$

en donde la función \sin es usada para $(n - 2m) > 0$ y la función \cos para $(n - 2m) \leq 0$ y el subíndice r es definido por:

$$r = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1 \quad 3.5$$

El máximo valor de $|l|$ es igual a la potencia de ρ dado por n . El número total de L términos puede ser calculado por los valores de n y m que es igual a k coeficientes, dados por la expresión:

$$L = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad 3.6$$

Por ejemplo, si el polinomio tiene una potencia de $k = 7$, el número total de coeficientes de L es igual a 36. Así, para encontrar todos los L coeficientes necesitamos por lo menos L puntos en un patrón de Hartmann o Hartmann-Shack. Los nuevos términos monomiales que proponemos en esta tesis bajo esta teoría se presentan en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1.- Términos monomiales de la deformación del frente de onda de potencia 7.

n	m	$n - 2m$	r	Termino	Nombre
0	0	0	1	1	Pistón
1	0	1	2	$\rho \sin \theta$	Tilt sobre el eje x
	1	-1	3	$\rho \cos \theta$	Tilt sobre el eje y
2	0	2	4	$\rho^2 \sin 2\theta$	Astigmatismo a $\pm 45^\circ$

	1	0	5	ρ^2	Desenfoque
	2	-2	6	$\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo a 0° o 90°
3	0	3	7	$\rho^3 \sin 3\theta$	Astigmatismo triangular con picos a $(120^\circ) + 30^\circ$
	1	1	8	$\rho^3 \sin \theta$	Coma primaria a lo largo del eje y
	2	-1	9	$\rho^3 \cos \theta$	Coma primaria a lo largo del eje x
	3	-3	10	$\rho^3 \cos 3\theta$	Astigmatismo triangular con picos a (120°)
4	0	4	11	$\rho^4 \sin 4\theta$	<i>Quatrefoil</i> con picos a $(90^\circ) + 22.5^\circ$
	1	2	12	$\rho^4 \sin 2\theta$	Astigmatismo de 5 th orden $\pm 45^\circ$
	2	0	13	ρ^4	Aberración esférica primaria
	3	-2	14	$\rho^4 \cos 2\theta$	Astigmatismo de 5 th orden 0° o 90°
	4	-4	15	$\rho^4 \cos 4\theta$	<i>Quatrefoil</i> con picos a (90°)
5	0	5	16	$\rho^5 \sin 5\theta$	<i>Pentafoil</i> con picos a $(72^\circ) + 18^\circ$
	1	3	17	$\rho^5 \sin 3\theta$	<i>Trefoil</i> con picos a $(120^\circ) + 30^\circ$
	2	1	18	$\rho^5 \sin \theta$	Coma de 5 th orden a lo largo del eje y
	3	-1	19	$\rho^5 \cos \theta$	Coma de 5 th orden a lo largo del eje x
	4	-3	20	$\rho^5 \cos 3\theta$	<i>Trefoil</i> con picos a (120°)
	5	-5	21	$\rho^5 \cos 5\theta$	<i>Pentafoil</i> con picos a

					(72°)
6	0	6	22	$\rho^6 \sin 6\theta$	<i>Hexafoil</i> de alto orden con picos a (60°) + 15.5°
	1	4	23	$\rho^6 \sin 4\theta$	<i>Quatrefoil</i> de alto orden con picos a (90°) + 22.5°
	2	2	24	$\rho^6 \sin 2\theta$	Astigmatismo terciario a $\pm 45^\circ$
	3	0	25	ρ^6	Aberración esférica de 5 th orden
	4	-2	26	$\rho^6 \cos 2\theta$	Astigmatismo terciario a 0° o 90°
	5	-4	27	$\rho^6 \cos 4\theta$	<i>Quatrefoil</i> de alto orden con picos a (90°)
	6	-6	28	$\rho^6 \cos 6\theta$	<i>Hexafoil</i> de alto orden con picos a (60°)
7	0	7	29	$\rho^7 \sin 7\theta$	<i>Heptafoil</i> de alto orden con picos a (51.4°) + 12.8°
	1	5	30	$\rho^7 \sin 5\theta$	<i>Pentafoil</i> de alto orden con picos a (72°) + 18°
	2	3	31	$\rho^7 \sin 3\theta$	<i>Trefoil</i> de alto orden con picos a (120°) + 30°
	3	1	32	$\rho^7 \sin \theta$	Coma de 7th orden a lo largo del eje y
	4	-1	33	$\rho^7 \cos \theta$	Coma de 7th orden a lo largo del eje x
	5	-3	34	$\rho^7 \cos 3\theta$	<i>Trefoil</i> de alto orden con picos a (120°)
	6	-5	35	$\rho^7 \cos 5\theta$	<i>Pentafoil</i> de alto orden con picos a (72°)

	7	-7	36	$\rho^7 \cos 7\theta$	Heptafoil de alto orden con picos a (51.4°)
--	---	----	----	-----------------------	---

3.3 Definición de polinomios en función de las aberraciones transversales.

Tomando la propuesta de H. H. Hopkins (Ec. 3.4), las derivadas parciales de la función del frente de onda con respecto a su componente radial están definidas por

$$\frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} n \rho^{n-1} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (|n-2m|) \theta \quad 3.7$$

y la derivada parcial del frente de onda con respecto a la coordenada angular θ es:

$$\frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} (n-2m) \rho^n \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (|n-2m|) \theta \quad 3.8$$

El subíndice r ahora está dado por:

$$r = \frac{n(n+1)}{2} + m \quad 3.9$$

A diferencia de la Ec. 3.4, la función *sin* se utiliza cuando $(n-2m) \leq 0$ y la función *cos* cuando $(n-2m) > 0$. También, el primer término, en el que $n=0$, ha sido eliminado de la suma debido a que su valor se hace cero debido a la aplicación de la derivada parcial con respecto a su componente angular. Si $TA_\rho(\rho, \theta)$ y $TA_\theta(\rho, \theta)$ son las aberraciones transversales medidas a lo largo de las direcciones radiales y tangenciales respectivamente podemos ver que:

$$\frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{1}{r_w} TA_\rho(\rho, \theta) \quad 3.10$$

$$\frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\rho}{r_w} TA_\theta(\rho, \theta) \quad 3.11$$

donde ρ es el semidiámetro de la pupila y r_w es el radio de curvatura axial del frente de onda.

Si las medidas tomadas son las pendientes (TA 's), el frente de onda puede ser calculado utilizando las integrales de las Ec. 3.7 y 3.8 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 W(\rho, \theta) &= \int \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \rho} d\rho + a_{00} \\
 &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} \rho^n \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (|n - 2m|) \theta + a_{00}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 W(\rho, \theta) &= \int \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} d\theta + \sum_{n=0}^k a_{n0} \rho^n \\
 &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} \rho^n \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (|n - 2m|) \theta + \sum_{n=0}^k a_{n0} \rho^n
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Los términos monomiales $P(\rho, \theta)$ de las pendientes radiales del frente de onda obtenidos bajo esta propuesta de potencia 7 se muestran en la Tabla 3.2:

Tabla 3.2.- Términos monomiales de un frente de onda utilizando las pendientes radiales con un potencia igual a 7.

n	m	$n - 2m$	r	Términos
1	0	1	1	$\sin \theta$
	1	-1	2	$\cos \theta$
2	0	2	3	$2\rho \sin 2\theta$
	1	0	4	2ρ
	2	-2	5	$2\rho \cos 2\theta$
3	0	3	6	$3\rho^2 \sin 3\theta$
	1	1	7	$3\rho^2 \sin \theta$
	2	-1	8	$3\rho^2 \cos \theta$
	3	-3	9	$3\rho^2 \cos 3\theta$
4	0	4	10	$4\rho^3 \sin 4\theta$
	1	2	11	$4\rho^3 \sin 2\theta$

	2	0	12	$4\rho^3$
	3	-2	13	$4\rho^3 \cos 2\theta$
	4	-4	14	$4\rho^3 \cos 4\theta$
5	0	5	15	$5\rho^4 \sin 5\theta$
	1	3	16	$5\rho^4 \sin 3\theta$
	2	1	17	$5\rho^4 \sin \theta$
	3	-1	18	$5\rho^4 \cos \theta$
	4	-3	19	$5\rho^4 \cos 3\theta$
	5	-5	20	$5\rho^4 \cos 5\theta$
6	0	6	21	$6\rho^5 \sin 6\theta$
	1	4	22	$6\rho^5 \sin 4\theta$
	2	2	23	$6\rho^5 \sin 2\theta$
	3	0	24	$6\rho^5$
	4	-2	25	$6\rho^5 \cos 2\theta$
	5	-4	26	$6\rho^5 \cos 4\theta$
	6	-6	27	$6\rho^5 \cos 6\theta$
7	0	7	28	$7\rho^6 \sin 7\theta$
	1	5	29	$7\rho^6 \sin 5\theta$
	2	3	30	$7\rho^6 \sin 3\theta$
	3	1	31	$7\rho^6 \sin \theta$
	4	-1	32	$7\rho^6 \cos \theta$
	5	-3	33	$7\rho^6 \cos 3\theta$
	6	-5	34	$7\rho^6 \cos 5\theta$
	7	-7	35	$7\rho^6 \cos 7\theta$

3.4 Reconstrucción del frente de onda a partir de las aberraciones transversales.

Durante el proceso de reconstrucción de un frente de onda es recomendado recabar la mayor cantidad de información que sea posible, pero en ocasiones esto no es muy necesario ya que la deformación de un frente de onda puede ser obtenida realizando la integración de las pendientes radiales únicamente de la siguiente manera:

$$W(\rho, \theta) = \int \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} d\theta \quad 3.14$$

excluyendo al termino pistón ya que ha sido eliminado al obtener la derivada parcial con respecto a la información angular ($TA_{\theta}(\rho, \theta)$). Como podemos notar, únicamente es necesario realizar una integración y no dos como en muchos otros casos [15,52,53]. En otras palabras, las pendientes radiales son suficientes para realizar el proceso de integración y las pendientes tangenciales pueden ser omitidas. Es importante mencionar también, que si se desea realizar la integración con respecto a las componentes angulares, aumentaría la cantidad de información, provocando una mayor precisión en los valores de los coeficientes de aberración. Para el objetivo propuesto para esta tesis, se consideró suficiente precisión los coeficientes obtenidos a partir de la integración radial.

Bajo esta conclusión, podríamos llegar a decir que las medidas de las deformaciones radiales que se obtienen en un sistema tipo disco de Placido [53] son suficientes para recuperar completamente el frente de onda. Sin embargo esto solo sería posible si la pendiente radial de cierto punto medido sobre el disco de Placido se encuentra correctamente asociado a su punto correspondiente sobre la pupila de salida de la cual la medida del frente de onda ha sido originada. Ya que este punto solo puede ser determinado de una manera aproximada, los resultados de la integración en base a datos obtenidos con discos de Placido son únicamente una aproximación. Un patrón circular produce resultados precisos únicamente si el frente de onda tiene simetría de rotación, en otras palabras, si todos los rayos son meridionales y no son rayos oblicuos [15,52,53]. Sin embargo, Klein [52] ha demostrado que un patrón circular como el producido por los anillos de Placido tiene suficiente información para reconstruir el frente de onda con gran precisión.

Como lo mencionamos anteriormente, para poder utilizar una única integración es necesario tener una correcta correspondencia entre un punto en el frente de onda y su

correspondiente en un anillo o disco de Placido inicialmente empleado, suponiendo que no existe la presencia de rayos oblicuos. Este procedimiento puede ser evitado si en lugar de utilizar anillos de Placido se utilizaran arreglos circulares de puntos como en una pantalla de Hartmann con simetría radial o con alguna simetría especial como se muestra en la Fig. 3.1. Por lo tanto, la posición de cada punto correspondiente sobre la pupila de salida estaría bien determinada.

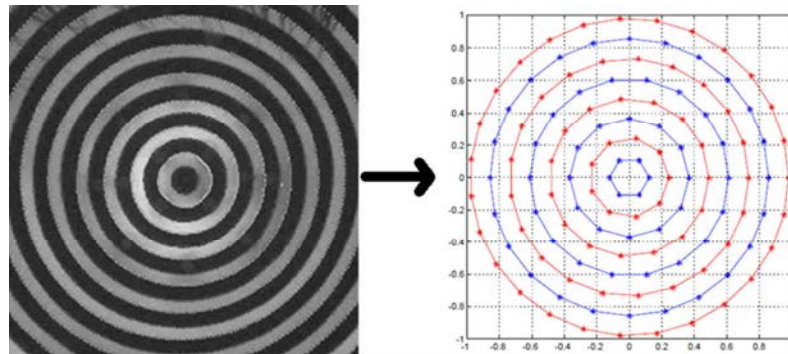


Fig. 3.1. – Equivalencia entre un sistema de anillos de Placido y un patrón de Hartmann con simetría radial.

Cabe aclarar que este procedimiento no es exclusivo para ser utilizado con pantallas de Hartmann o Hartmann-Shack con simetría radial. De hecho, el arreglo típico cuadrado de un patrón de Hartmann puede ser integrado utilizando únicamente las medidas de las pendientes radiales ignorando sus pendientes tangenciales con la única condición de que la densidad de puntos sea lo suficientemente alta [54].

3.5 Ortogonalización de los polinomios en base a puntos de información.

Suponiendo el caso en el que se está utilizando la prueba de Hartmann con una gran cantidad de puntos, debido a la forma circular de la pupila, las deformaciones angulares del frente de onda tienen una distribución circular que puede ser representada por una función periódica. El número máximo de componentes armónicas de esta función periódica sobre el anillo formado por J puntos es igual a l_{\max} el cual es posible definirlo como:

$$l_{\max} = \text{int} \left(\frac{J - 1}{2} \right) \quad 3.15$$

Si el valor de k de los polinomios es igual a 5, el valor máximo que toma l es también 5 y con esto el valor de J es igual a 11 o 12 bajo las condiciones de la Ec. 3.15. Por lo tanto el número de puntos en el último anillo tiene que ser de ese mismo orden.

Ahora consideremos que tenemos un conjunto de polinomios $H(\rho, \theta)$ que forma una base completa y las aberraciones transversales en la dirección radial pueden ser descritas como:

$$\begin{aligned} TA(\rho, \theta) &= r_w \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} n \rho^{n-1} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (|n - 2m|) \theta \\ &= \sum_{r=1}^L A_r H_r(\rho, \theta) \end{aligned} \quad 3.16$$

donde los polinomios $H(\rho, \theta)$ pueden ser descritos por una combinación lineal de monomios $P(\rho, \theta)$. Para poder realizar este cálculo, es necesario que los polinomios sean ortogonales sobre la base de puntos [55] y esto se logra si definimos la expresión:

$$\sum_{i=1}^N H_r(\rho_i, \theta_i) H_p(\rho_i, \theta_i) = \delta_{rp} \quad 3.17$$

en donde δ_{rp} es igual a 1 si $r = p$ e igual a 0 si $r \neq p$. Con esta condición de ortogonalidad, la matriz obtenida durante el proceso de mínimos cuadrados será diagonal haciendo innecesario el proceso de invertir la matriz, incrementando así la precisión de los resultados. Esta condición se puede cumplir si realizamos el proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt.

$$\begin{aligned} H_1(\rho, \theta) &= P_1(\rho, \theta) \\ H_2(\rho, \theta) &= P_2(\rho, \theta) + D_{21} H_1(\rho, \theta) \\ H_3(\rho, \theta) &= P_3(\rho, \theta) + D_{31} H_1(\rho, \theta) + D_{32} H_2(\rho, \theta) \\ &\dots\dots\dots \\ H_j(\rho, \theta) &= P_j(\rho, \theta) + D_{j1} H_1(\rho, \theta) + D_{j2} H_2(\rho, \theta) + \dots\dots + D_{j,j-1} H_{j-1}(\rho, \theta) \end{aligned} \quad 3.18$$

con $j = 1, \dots, L$. De una forma más simple podemos escribir esta expresión como:

$$H_r(\rho, \theta) = P_r(\rho, \theta) + \sum_{s=1}^{r-1} D_{rs} H_s(\rho, \theta) \quad 3.19$$

donde $r = 2, 3, 4, \dots, L$. Si ahora multiplicamos por $H(\rho, \theta)$ con p diferente para r

$$H_r(\rho, \theta)H_p(\rho, \theta) = P_r(\rho, \theta)H_p(\rho, \theta) + H_p(\rho, \theta) \sum_{s=1}^{r-1} D_{rs} H_s(\rho, \theta) \quad 3.20$$

En seguida, sumamos para todos los N puntos. Con esto obtenemos el primer y último de los términos usando la condición de ortogonalidad.

$$\sum_{i=1}^N H_r(\rho_i, \theta_i)H_p(\rho_i, \theta_i) = \sum_{i=1}^N P_r(\rho_i, \theta_i)H_p(\rho_i, \theta_i) + D_{rp} \sum_{i=1}^N H_p^2(\rho_i, \theta_i) = 0 \quad 3.21$$

A continuación, intercambiando los índices r y p , los coeficientes D_{pr} para la expresión 3.20 se describen como:

$$D_{pr} = -\frac{\sum_{i=1}^N P_p(\rho_i, \theta_i)H_r(\rho_i, \theta_i)}{\sum_{i=1}^N H_r^2(\rho_i, \theta_i)} \quad 3.22$$

y

$$H_p(\rho, \theta) = P_p(\rho, \theta) + \sum_{r=1}^{p-1} D_{pr} H_r(\rho, \theta) \quad 3.23$$

Ambas expresiones pueden ser usadas en un procedimiento recursivo después de definir que:

$$H_1(\rho, \theta) = P_1(\rho, \theta) \quad 3.24$$

Usando los polinomios $P_p(\rho, \theta)$ en la Tabla 3.2 y con $p = 2, 3, \dots, L$

3.6 Distribuciones de puntos en la pupila de salida.

Todo el trabajo numérico necesario para generar los nuevos polinomios ortogonales sobre la base discreta de puntos se realiza en una sola ocasión por cada configuración de un

instrumento a utilizar. Después de esto, la matriz generada por el proceso de mínimos cuadrados es siempre diagonal y no es necesario invertir la matriz en cada medición. Como podemos imaginar, podemos definir una gran cantidad de geometrías de muestreo de puntos sobre una pupila de salida. Para ejemplificar esto, en este trabajo nos enfocamos a cuatro casos particulares que se muestran en las Figs 3.2-3.5. Dichos patrones fueron diseñados con las conclusiones que se obtuvieron de realizar una revisión bibliográfica de las pantallas más comúnmente utilizadas en las pruebas de Hartmann y Hartmann-Shack [15,56–59].

La elección de un número de puntos así como su distribución dentro de una pantalla de Hartmann es de vital importancia para el análisis de la información y depende en gran medida del tipo de sistema óptico a estudiar. También debemos tener presente que la densidad de los puntos muestrales incrementa la cantidad de datos que podemos recabar. En la Fig. 3.2, se muestra el arreglo más común de una pantalla de Hartmann la cual es una pantalla con una simetría cuadrada de puntos, en la que los puntos se encuentran uniformemente distribuidos. Esta pantalla está formada por 89 puntos distribuidos de manera equiespaciada. La gran ventaja de este tipo de arreglo es que tiene un tipo de distribución muy simple y fácil de construir. Sin embargo, su principal desventaja es que la densidad de puntos a lo largo de un radio es variable con cuatro máximos a lo largo de los ejes $x - y$.

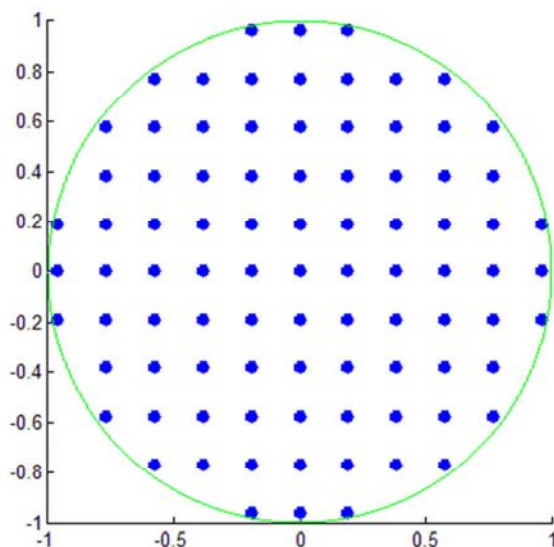


Fig. 3.2.- Pantalla de Hartmann para un arreglo cuadrado de puntos.

El arreglo hexagonal que se muestra en la Fig 3.3 tiene una distribución de 84 puntos, muy similar a la cantidad de puntos de la pantalla anterior, pero en este caso la densidad de los puntos a lo largo del radio es el mismo para cada 60°, generando una distribución más uniforme. La desventaja de este tipo de arreglo es que el análisis del frente de onda es más complicado al igual que su fabricación ya que los puntos deben estar correctamente localizados y espaciados.

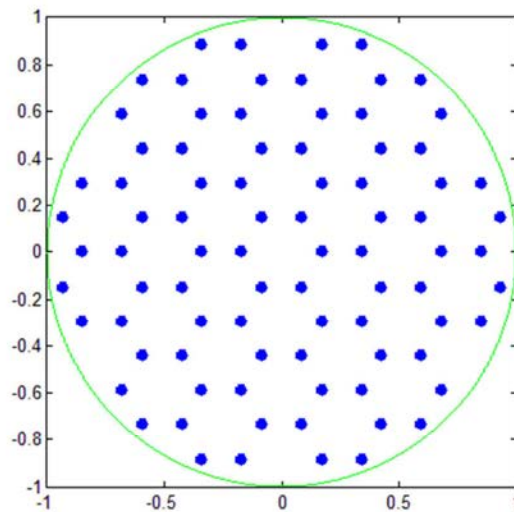


Fig. 3.3.- Pantalla de Hartmann para un arreglo hexagonal de puntos.

El arreglo mostrado por la Fig 3.4 está basado en un diseño tradicional de un arreglo de puntos con una distribución radial, con la modificación de que cada uno de los anillos tiene una cantidad diferente de puntos que se incrementa en función del radio del anillo. Esta pantalla está formada con un total de 64 puntos distribuidos a lo largo de 8 anillos en los que cada anillo tiene 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10 y 12 puntos respectivamente. La variación de la cantidad de puntos por anillo se debe a la idea de crear una densidad más uniforme a lo largo de toda la pantalla.

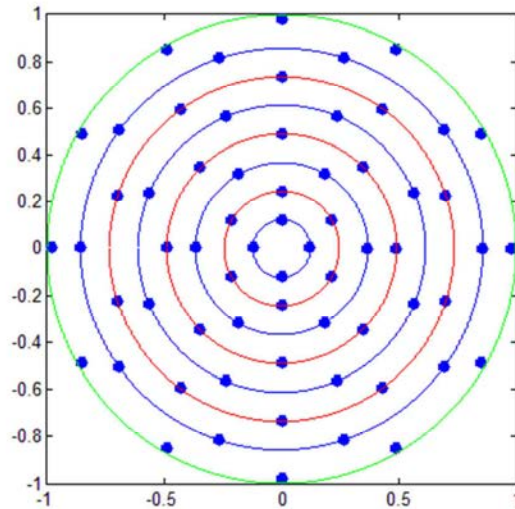


Fig. 3.4.- Pantalla de Hartmann para un arreglo con simetría radial de radios equiespaciados.

Finalmente en la Fig 4.5 se muestra un patrón de anillos espaciados de manera no uniforme la cual se basa en una distribución del estilo de anillos de Newton lo que ocasiona que la distribución de puntos en los bordes de la pupila sea más grande. Esto con la finalidad de muestrear aberraciones de alto orden en las zonas más alejadas del centro de la pupila. De la misma manera que en la pantalla anterior, esta pantalla también consta de 64 puntos distribuidos en 8 anillos con la misma cantidad de puntos que el caso anterior (4, 6, 6, 8, 8, 10, 10 y 12 puntos).

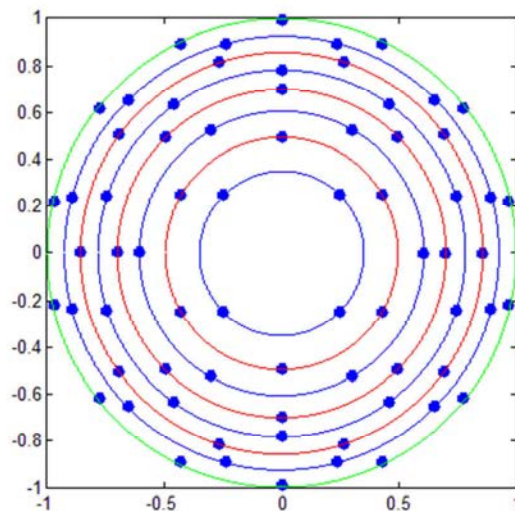


Fig. 3.5.- Pantalla de Hartmann para un arreglo con simetría radial de radios no equiespaciados.

Los monomios generados bajo el análisis propuesto en este trabajo de tesis para cada una de estas pantallas se muestran en las Tablas 3.3 – 3.6. En cada una de estas tablas podemos observar que los polinomios (H) tienen una estructura muy similar a los monomios de Zernike con la excepción de algunos términos adicionales. Para ejemplificar esto veremos el caso de la Tabla 3.3 en el que se muestran los resultados para una pantalla cuadrada y en donde notamos que para el polinomio $H3$, aparece un término *sin* adicional para el astigmatismo a $\pm 45^\circ$. De la misma manera se puede notar que a manera que avanza el término de aberración, se incrementa el número de términos adicionales. También podemos notar en las Tablas 3.3 y 3.4 que los términos adicionales que aparecen son los mismos para el caso de la pantalla con simetría cuadrada y con simetría hexagonal, esto debido a su similitud, número de puntos y su tipo de distribución. En las Tablas 3.5 y 3.6, podemos ver este mismo caso en el que los términos adicionales son los mismos para ambas pantallas y solo las distingue su magnitud. De igual manera que en el caso de la pantalla cuadrada con la pantalla hexagonal, las dos pantallas con simetría radial tienen exactamente el mismo número de puntos. Además, en este caso en particular, las componentes angulares de los puntos correspondientes de ambas pantallas son las mismas.

Tabla 3.3.- Polinomios de aberración generados para una Pantalla de Hartmann con simetría Cuadrada

H1	$\sin \theta$
H2	$\cos \theta$
H3	$2 \rho \sin 2\theta - 1.103 \sin \theta$
H4	$2 \rho - 1.728 \cos \theta$
H5	$2 \rho \cos 2\theta - 2.1341 \cos \theta + 1.7467 \rho$
H6	$3 \rho^2 \sin 3\theta - 3.3694 \rho \sin 2\theta + 1.9270 \sin \theta$
H7	$3 \rho^2 \sin \theta + 1.8385 \rho^2 \sin 3\theta - 2.8303 \rho \sin 2\theta + 0.0196 \sin \theta$

$$\begin{aligned}
\text{H8} & \quad 3 \rho^2 \cos \theta - 1.4854 \rho \cos 2\theta + 0.7123 \cos \theta - 2.1199 \rho \\
\text{H9} & \quad 3 \rho^3 \cos 3\theta + 8.0367 \rho^2 \cos \theta - 6.4359 \rho \cos 2\theta + 3.0891 \cos \theta - 6.2368 \rho \\
\text{H10} & \quad 4 \rho^3 \sin 4\theta - 3.3483 \rho^2 \sin \theta - 6.3228 \rho^2 \sin 3\theta + 6.5325 \rho \sin 2\theta - 1.4623 \sin \theta \\
\text{H11} & \quad 4 \rho^3 \sin 2\theta + 1.4806 \rho^3 \sin 4\theta - 4.0220 \rho^2 \sin \theta - 3.6224 \rho^2 \sin 3\theta + 1.4959 \rho \sin 2\theta \\
& \quad + 0.0373 \sin \theta \\
\text{H12} & \quad -0.5752 \rho^3 \cos 3\theta - 5.3259 \rho^2 \cos \theta + 1.9356 \rho \cos 2\theta + 0.5754 \cos \theta + 4 \rho^3 \\
& \quad - 0.6009 \rho \\
\text{H13} & \quad 4 \rho^3 \cos 2\theta - 2.0358 \rho^3 \cos 3\theta - 10.6236 \rho^2 \cos \theta + 2.5292 \rho \cos 2\theta - 0.5742 \cos \theta \\
& \quad + 3.7666 \rho^3 + 3.0172 \rho \\
\text{H14} & \quad 14.75 \rho^3 \cos 2\theta - 13.2587 \rho^3 \cos 3\theta + 4 \rho^3 \cos 4\theta - 38.2849 \rho^2 \cos \theta \\
& \quad + 13.4296 \rho \cos 2\theta - 3.8770 \cos \theta + 10.8755 \rho^3 + 13.2406 \rho \\
\text{H15} & \quad 5 \rho^4 \sin 5\theta - 9.7004 \rho^3 \sin 2\theta - 12.2999 \rho^3 \sin 4\theta + 10.9475 \rho^2 \sin \theta + 17.9201 \rho^2 \sin 3\theta \\
& \quad - 9.6163 \rho \sin 2\theta + 1.5440 \sin \theta \\
\text{H16} & \quad 5 \rho^4 \sin 3\theta + 2.0298 \rho^4 \sin 5\theta - 10.0800 \rho^3 \sin 2\theta - 6.1248 \rho^3 \sin 4\theta + 8.7904 \rho^2 \sin \theta \\
& \quad + 6.1310 \rho^2 \sin 3\theta - 2.7557 \rho \sin 2\theta - 0.2512 \sin \theta \\
\text{H17} & \quad 5 \rho^4 \sin \theta + 6.082 \rho^4 \sin 3\theta + 1.6824 \rho^4 \sin 5\theta - 12.8811 \rho^3 \sin 2\theta - 5.8479 \rho^3 \sin 4\theta \\
& \quad + 5.0123 \rho^2 \sin \theta + 5.4439 \rho^2 \sin 3\theta - 1.1577 \rho \sin 2\theta + 0.0404 \sin \theta \\
\text{H18} & \quad 5 \rho^4 \cos \theta - 4.1973 \rho^3 \cos 2\theta + 1.5088 \rho^3 \cos 3\theta - 0.2776 \rho^3 \cos 4\theta + 2.8223 \rho^2 \cos \theta \\
& \quad - 0.2440 \rho \cos 2\theta - 0.1147 \cos \theta - 4.7402 \rho^3 + 0.2606 \rho \\
\text{H19} & \quad 13.5064 \rho^4 \cos \theta + 5 \rho^4 \cos 3\theta - 19.5239 \rho^3 \cos 2\theta + 5.4786 \rho^3 \cos 3\theta \\
& \quad - 2.6952 \rho^3 \cos 4\theta + 21.2041 \rho^2 \cos \theta - 3.2738 \rho \cos 2\theta \\
& \quad + 0.4694 \cos \theta - 16.6687 \rho^3 - 3.4571 \rho \\
\text{H20} & \quad 48.7130 \rho^4 \cos \theta + 24.6885 \rho^4 \cos 3\theta + 5 \rho^4 \cos 5\theta - 90.9424 \rho^3 \cos 2\theta \\
& \quad + 36.5296 \rho^3 \cos 3\theta - 22.9665 \rho^3 \cos 4\theta + 109.3130 \rho^2 \cos \theta \\
& \quad - 23.3788 \rho \cos 2\theta + 4.8610 \cos \theta - 67.9522 \rho^3 - 23.3780 \rho \\
\text{H21} & \quad 6 \rho^5 \sin 6\theta - 7.3045 \rho^4 \sin \theta - 20.7271 \rho^4 \sin 3\theta - 18.5639 \rho^4 \sin 5\theta \\
& \quad + 39.5496 \rho^3 \sin 2\theta + 34.8922 \rho^3 \sin 4\theta - 23.7184 \rho^2 \sin \theta \\
& \quad - 29.0512 \rho^2 \sin 3\theta + 10.8290 \rho \sin 2\theta - 0.8141 \sin \theta \\
\text{H22} & \quad 6 \rho^5 \sin 4\theta + 2.163 \rho^5 \sin 6\theta - 8.8982 \rho^4 \sin \theta - 19.6797 \rho^4 \sin 3\theta - 8.9644 \rho^4 \sin 5\theta \\
& \quad + 31.4107 \rho^3 \sin 2\theta + 14.6595 \rho^3 \sin 4\theta - 13.9049 \rho^2 \sin \theta \\
& \quad - 12.2907 \rho^2 \sin 3\theta + 2.7483 \rho \sin 2\theta + 0.1678 \sin \theta
\end{aligned}$$

H23	$6 \rho^5 \sin 2\theta + 4.4299 \rho^5 \sin 4\theta + 0.9179 \rho^5 \sin 6\theta - 10.1906 \rho^4 \sin \theta$ $- 14.6174 \rho^4 \sin 3\theta - 4.4472 \rho^4 \sin 5\theta + 14.2913 \rho^3 \sin 2\theta$ $+ 6.8629 \rho^3 \sin 4\theta - 4.0213 \rho^2 \sin \theta - 4.0300 \rho^2 \sin 3\theta$ $+ 0.7319 \rho \sin 2\theta + 0.0004 \sin \theta$
H24	$-15.4781 \rho^4 \cos \theta - 3.7120 \rho^4 \cos 3\theta - 0.3084 \rho^4 \cos 5\theta + 14.9338 \rho^3 \cos 2\theta$ $- 3.9985 \rho^3 \cos 3\theta + 2.3519 \rho^3 \cos 4\theta - 8.4754 \rho^2 \cos \theta$ $+ 1.0768 \rho \cos 2\theta - 0.6171 \cos \theta + 6 \rho^5 + 5.6206 \rho^3 + 2.5959 \rho$
H25	$6 \rho^5 \cos 2\theta - 21.1546 \rho^4 \cos \theta - 5.9988 \rho^4 \cos 3\theta - 0.4382 \rho^4 \cos 5\theta$ $+ 10.2438 \rho^3 \cos 2\theta - 2.0657 \rho^3 \cos 3\theta + 2.5386 \rho^3 \cos 4\theta$ $- 3.5074 \rho^2 \cos \theta + 0.3061 \rho \cos 2\theta - 0.0197 \cos \theta + 5.8511 \rho^5$ $+ 8.1821 \rho^3 + 0.0712 \rho$
H26	$23.16 \rho^5 \cos 2\theta + 6 \rho^5 \cos 4\theta - 84.9650 \rho^4 \cos \theta - 34.3058 \rho^4 \cos 3\theta$ $- 3.3804 \rho^4 \cos 5\theta + 59.0707 \rho^3 \cos 2\theta - 11.4670 \rho^3 \cos 3\theta$ $+ 10.8027 \rho^3 \cos 4\theta - 38.9913 \rho^2 \cos \theta + 4.6347 \rho \cos 2\theta$ $- 0.5912 \cos \theta + 17.3481 \rho^5 + 47.9832 \rho^3 + 4.7359 \rho$
H27	$90. \rho^5 \cos 2\theta + 36 \rho^5 \cos 4\theta + 6 \rho^5 \cos 6\theta - 345.6064 \rho^4 \cos \theta - 172.8038 \rho^4 \cos 3\theta$ $- 34.5600 \rho^4 \cos 5\theta + 300.8283 \rho^3 \cos 2\theta - 76.4499 \rho^3 \cos 3\theta$ $+ 75.2048 \rho^3 \cos 4\theta - 229.3398 \rho^2 \cos \theta + 35.7451 \rho \cos 2\theta$ $- 6.0076 \cos \theta + 60.0003 \rho^5 + 225.6175 \rho^3 + 35.7454 \rho$

Tabla 3.4.- Polinomios de aberración generados para una Pantalla de Hartmann con simetría Hexagonal

H1	$\sin \theta$
H2	$\cos \theta$
H3	$2 \rho \sin 2\theta - 1.1725 \sin \theta$
H4	$2 \rho - 1.7161 \cos \theta$
H5	$1.7752 \rho + 2 \rho \cos 2\theta - 2.0669 \cos \theta$
H6	$3 \rho^2 \sin 3\theta - 3.2802 \rho \sin 2\theta + 1.9230 \sin \theta$
H7	$3 \rho^2 \sin \theta + 2.0208 \rho^2 \sin 3\theta - 3.3407 \rho \sin 2\theta + 0.4598 \sin \theta$
H8	$3 \rho^2 \cos \theta - 1.3857 \rho \cos 2\theta + 0.7625 \cos \theta - 2.1961 \rho$
H9	$3 \rho^3 \cos 3\theta + 7.8195 \rho^2 \cos \theta - 6.0032 \rho \cos 2\theta + 2.5981 \cos \theta - 5.6782 \rho$
H10	$4 \rho^3 \sin 4\theta - 3.3953 \rho^2 \sin \theta - 7.2972 \rho^2 \sin 3\theta + 7.7937 \rho \sin 2\theta - 2.1481 \sin \theta$

$$\begin{aligned}
\text{H11} \quad & 4 \rho^3 \sin 2\theta + 1.5390 \rho^3 \sin 4\theta - 4.6667 \rho^2 \sin \theta - 4.1602 \rho^2 \sin 3\theta + 2.5438 \rho \sin 2\theta - 0.2878 \sin \theta \\
\text{H12} \quad & -0.2304 \rho^3 \cos 3\theta - 5.9602 \rho^2 \cos \theta + 1.8961 \rho \cos 2\theta + 0.3503 \cos \theta + 4 \rho^3 + 0.0680 \rho \\
\text{H13} \quad & 4 \rho^3 \cos 2\theta - 1.9027 \rho^3 \cos 3\theta - 11.2308 \rho^2 \cos \theta + 2.6457 \rho \cos 2\theta - 0.6518 \cos \theta + 4.0812 \rho^3 \\
& \quad + 3.2647 \rho \\
\text{H14} \quad & 12.9672 \rho^3 \cos 2\theta - 11.3096 \rho^3 \cos 3\theta + 4 \rho^3 \cos 4\theta - 29.1812 \rho^2 \cos \theta + 9.5159 \rho \cos 2\theta \\
& \quad - 2.3753 \cos \theta + 8.4476 \rho^3 + 9.2862 \rho \\
\text{H15} \quad & 5 \rho^4 \sin 5\theta - 14.074 \rho^3 \sin 2\theta - 14.8011 \rho^3 \sin 4\theta + 16.9801 \rho^2 \sin \theta + 24.4812 \rho^2 \sin 3\theta \\
& \quad - 15.2051 \rho \sin 2\theta + 2.9444 \sin \theta \\
\text{H16} \quad & 5 \rho^4 \sin 3\theta + 2.4220 \rho^4 \sin 5\theta - 11.3659 \rho^3 \sin 2\theta - 7.9263 \rho^3 \sin 4\theta + 10.5845 \rho^2 \sin \theta \\
& \quad + 9.4771 \rho^2 \sin 3\theta - 5.4115 \rho \sin 2\theta + 0.5645 \sin \theta \\
\text{H17} \quad & 5 \rho^4 \sin \theta + 5.705 \rho^4 \sin 3\theta + 1.3679 \rho^4 \sin 5\theta - 13.5689 \rho^3 \sin 2\theta - 5.5309 \rho^3 \sin 4\theta \\
& \quad + 6.4530 \rho^2 \sin \theta + 6.3755 \rho^2 \sin 3\theta - 2.1842 \rho \sin 2\theta + 0.2390 \sin \theta \\
\text{H18} \quad & 5 \rho^4 \cos \theta - 4.1962 \rho^3 \cos 2\theta + 1.3956 \rho^3 \cos 3\theta - 0.1836 \rho^3 \cos 4\theta + 3.8783 \rho^2 \cos \theta \\
& \quad - 0.4993 \rho \cos 2\theta - 0.0911 \cos \theta - 5.2579 \rho^3 + 0.0126 \rho \\
\text{H19} \quad & 15.16 \rho^4 \cos \theta + 5 \rho^4 \cos 3\theta - 21.0536 \rho^3 \cos 2\theta + 5.5842 \rho^3 \cos 3\theta - 2.4529 \rho^3 \cos 4\theta \\
& \quad + 23.7225 \rho^2 \cos \theta - 3.5645 \rho \cos 2\theta + 0.5697 \cos \theta - 18.7026 \rho^3 - 4.0611 \rho \\
\text{H20} \quad & 27.0548 \rho^4 \cos \theta + 18.2925 \rho^4 \cos 3\theta + 5 \rho^4 \cos 5\theta - 53.5217 \rho^3 \cos 2\theta + 21.2427 \rho^3 \cos 3\theta \\
& \quad - 17.4585 \rho^3 \cos 4\theta + 55.0679 \rho^2 \cos \theta - 10.8030 \rho \cos 2\theta + 1.8342 \cos \theta \\
& \quad - 35.1096 \rho^3 - 10.5836 \rho \\
\text{H21} \quad & 6 \rho^5 \sin 6\theta - 8.837 \rho^4 \sin \theta - 22.2170 \rho^4 \sin 3\theta - 20.5319 \rho^4 \sin 5\theta + 44.7839 \rho^3 \sin 2\theta \\
& \quad + 40.5924 \rho^3 \sin 4\theta - 29.0007 \rho^2 \sin \theta - 37.7212 \rho^2 \sin 3\theta + 17.2844 \rho \sin 2\theta \\
& \quad - 2.5269 \sin \theta \\
\text{H22} \quad & 6 \rho^5 \sin 4\theta + 2.8903 \rho^5 \sin 6\theta - 6.2812 \rho^4 \sin \theta - 19.1102 \rho^4 \sin 3\theta - 10.9387 \rho^4 \sin 5\theta \\
& \quad + 28.6939 \rho^3 \sin 2\theta + 17.3276 \rho^3 \sin 4\theta - 14.9739 \rho^2 \sin \theta - 14.8465 \rho^2 \sin 3\theta \\
& \quad + 5.5221 \rho \sin 2\theta - 0.5450 \sin \theta \\
\text{H23} \quad & 6 \rho^5 \sin 2\theta + 3.7698 \rho^5 \sin 4\theta + 0.6564 \rho^5 \sin 6\theta - 9.8005 \rho^4 \sin \theta - 12.8687 \rho^4 \sin 3\theta \\
& \quad - 3.3571 \rho^4 \sin 5\theta + 12.3886 \rho^3 \sin 2\theta + 5.4500 \rho^3 \sin 4\theta - 3.3617 \rho^2 \sin \theta \\
& \quad - 3.2893 \rho^2 \sin 3\theta + 0.6892 \rho \sin 2\theta - 0.0512 \sin \theta \\
\text{H24} \quad & -24.0958 \rho^4 \cos \theta - 3.8254 \rho^4 \cos 3\theta + 0.2790 \rho^4 \cos 5\theta + 22.8072 \rho^3 \cos 2\theta - 5.2535 \rho^3 \cos 3\theta \\
& \quad + 1.2935 \rho^3 \cos 4\theta - 20.0923 \rho^2 \cos \theta + 2.6600 \rho \cos 2\theta - 0.6924 \cos \theta + 6 \rho^5 \\
& \quad + 16.8405 \rho^3 + 4.0341 \rho \\
\text{H25} \quad & 6 \rho^5 \cos 2\theta - 23.6781 \rho^4 \cos \theta - 5.8808 \rho^4 \cos 3\theta - 0.3751 \rho^4 \cos 5\theta + 12.1152 \rho^3 \cos 2\theta \\
& \quad - 2.5010 \rho^3 \cos 3\theta + 2.3674 \rho^3 \cos 4\theta - 5.4160 \rho^2 \cos \theta + 0.5156 \rho \cos 2\theta \\
& \quad + 0.0072 \cos \theta + 6.3228 \rho^5 + 10.3624 \rho^3 + 0.2022 \rho
\end{aligned}$$

H26	$24.7926 \rho^5 \cos 2\theta + 6 \rho^5 \cos 4\theta - 92.3843 \rho^4 \cos \theta - 35.2855 \rho^4 \cos 3\theta - 3.0885 \rho^4 \cos 5\theta$ $+ 62.6995 \rho^3 \cos 2\theta - 11.3876 \rho^3 \cos 3\theta + 10.2506 \rho^3 \cos 4\theta - 42.2621 \rho^2 \cos \theta$ $+ 4.7080 \rho \cos 2\theta - 0.6245 \cos \theta + 19.3290 \rho^5 + 52.1701 \rho^3 + 5.2531 \rho$
H27	$42.7110 \rho^5 \cos 2\theta + 26.3393 \rho^5 \cos 4\theta + 6 \rho^5 \cos 6\theta - 140.8427 \rho^4 \cos \theta - 94.8019 \rho^4 \cos 3\theta$ $- 26.1148 \rho^4 \cos 5\theta + 134.0850 \rho^3 \cos 2\theta - 33.7482 \rho^3 \cos 3\theta + 42.5452 \rho^3 \cos 4\theta$ $- 91.8379 \rho^2 \cos \theta + 13.1408 \rho \cos 2\theta - 1.8091 \cos \theta + 21.3465 \rho^5 + 90.7829 \rho^3$ $+ 12.9169 \rho$

Tabla 3.5.- Polinomios de aberración generados para una Pantalla de Hartmann con simetría Radial y ρ uniformemente espaciada

H1	$\sin \theta$
H2	$\cos \theta$
H3	$2 \rho \sin 2\theta - 1.0278 \sin \theta$
H4	$0.7851 \rho \sin 2\theta - 0.7250 \sin \theta - 1.595 \cos \theta + 2 \rho$
H5	$-0.2717 \rho \sin 2\theta + 2 \rho \cos 2\theta + 0.2509 \sin \theta - 1.6100 \cos \theta + 1.3077 \rho$
H6	$3 \rho^2 \sin 3\theta - 2.9047 \rho \sin 2\theta - 0.0473 \rho \cos 2\theta + 1.4734 \sin \theta - 0.0586 \cos \theta + 0.0904 \rho$
H7	$3 \rho^2 \sin \theta + 1.6809 \rho^2 \sin 3\theta - 2.8905 \rho \sin 2\theta + 0.1741 \rho \cos 2\theta + 0.1420 \sin \theta$ $+ 0.2160 \cos \theta - 0.3328 \rho$
H8	$0.9417 \rho^2 \sin \theta + 0.4623 \rho^2 \sin 3\theta + 3 \rho^2 \cos \theta - 1.1488 \rho \sin 2\theta - 1.3277 \rho \cos 2\theta$ $+ 0.2938 \sin \theta + 0.7572 \cos \theta - 2.2661 \rho$
H9	$3 \rho^3 \cos 3\theta - 1.4940 \rho^2 \sin \theta - 0.7334 \rho^2 \sin 3\theta + 5.1336 \rho^2 \cos \theta + 1.8223 \rho \sin 2\theta$ $- 4.8578 \rho \cos 2\theta - 0.4661 \sin \theta + 1.6209 \cos \theta - 3.3694 \rho$
H10	$4 \rho^3 \sin 4\theta - 0.786 \rho^3 \cos 3\theta - 1.7626 \rho^2 \sin \theta - 5.6238 \rho^2 \sin 3\theta + 1.7164 \rho^2 \cos \theta$ $+ 4.4313 \rho \sin 2\theta + 0.0470 \rho \cos 2\theta - 0.7281 \sin \theta + 0.5084 \cos \theta$ $- 1.6767 \rho$
H11	$4 \rho^3 \sin 2\theta + 1.5088 \rho^3 \sin 4\theta + 0.1937 \rho^3 \cos 3\theta - 4.3719 \rho^2 \sin \theta - 3.9397 \rho^2 \sin 3\theta$ $- 0.4231 \rho^2 \cos \theta + 1.9903 \rho \sin 2\theta - 0.0115 \rho \cos 2\theta - 0.1178 \sin \theta$ $- 0.1253 \cos \theta + 0.4133 \rho$
H12	$3.2164 \rho^3 \sin 2\theta - 0.0822 \rho^3 \sin 4\theta - 0.0603 \rho^3 \cos 3\theta - 4.1838 \rho^2 \sin \theta$ $- 1.4105 \rho^2 \sin 3\theta - 7.3082 \rho^2 \cos \theta + 0.8057 \rho \sin 2\theta + 2.3292 \rho \cos 2\theta$ $+ 0.3394 \sin \theta - 0.1869 \cos \theta + 4 \rho^3 + 1.3229 \rho$

$$\begin{aligned}
\text{H13} \quad & 1.6942 \rho^3 \sin 2\theta + 0.3800 \rho^3 \sin 4\theta + 4 \rho^3 \cos 2\theta - 1.8432 \rho^3 \cos 3\theta - 2.4387 \rho^2 \sin \theta \\
& - 1.6433 \rho^2 \sin 3\theta - 11.7905 \rho^2 \cos \theta + 1.4028 \rho \sin 2\theta + 2.7410 \rho \cos 2\theta \\
& - 0.2158 \sin \theta - 0.7650 \cos \theta + 4.0388 \rho^3 + 3.7009 \rho \\
\text{H14} \quad & -3.5171 \rho^3 \sin 2\theta - 0.7461 \rho^3 \sin 4\theta + 11.602 \rho^3 \cos 2\theta - 11.5383 \rho^3 \cos 3\theta + 4 \rho^3 \cos 4\theta \\
& + 5.0397 \rho^2 \sin \theta + 3.3209 \rho^2 \sin 3\theta - 25.3801 \rho^2 \cos \theta - 2.8140 \rho \sin 2\theta \\
& + 9.4608 \rho \cos 2\theta + 0.4082 \sin \theta - 2.0582 \cos \theta + 7.3125 \rho^3 + 7.6188 \rho \\
\text{H15} \quad & 5 \rho^4 \sin 5\theta + 0.9210 \rho^3 \sin 2\theta - 7.4063 \rho^3 \sin 4\theta + 1.4919 \rho^3 \cos 2\theta + 1.6765 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 1.2807 \rho^3 \cos 4\theta - 2.9095 \rho^2 \sin \theta + 5.0529 \rho^2 \sin 3\theta - 8.9902 \rho^2 \cos \theta \\
& - 0.5821 \rho \sin 2\theta + 0.8085 \rho \cos 2\theta + 0.1173 \sin \theta - 0.6119 \cos \theta \\
& + 3.4192 \rho^3 + 3.3741 \rho \\
\text{H16} \quad & 5 \rho^4 \sin 3\theta + 2.7537 \rho^4 \sin 5\theta - 8.9136 \rho^3 \sin 2\theta - 7.1111 \rho^3 \sin 4\theta + 0.0896 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 0.4924 \rho^3 \cos 3\theta - 0.3133 \rho^3 \cos 4\theta + 6.8741 \rho^2 \sin \theta + 6.3237 \rho^2 \sin 3\theta \\
& - 3.3140 \rho^2 \cos \theta - 2.4755 \rho \sin 2\theta + 0.6442 \rho \cos 2\theta - 0.0935 \sin \theta \\
& - 0.1295 \cos \theta + 1.6465 \rho^3 + 0.8702 \rho \\
\text{H17} \quad & 5 \rho^4 \sin \theta + 6.652 \rho^4 \sin 3\theta + 1.8826 \rho^4 \sin 5\theta - 15.2173 \rho^3 \sin 2\theta - 6.7180 \rho^3 \sin 4\theta \\
& - 0.1589 \rho^3 \cos 2\theta - 0.2428 \rho^3 \cos 3\theta + 0.1751 \rho^3 \cos 4\theta + 7.3937 \rho^2 \sin \theta \\
& + 7.0932 \rho^2 \sin 3\theta + 1.4122 \rho^2 \cos \theta - 2.0774 \rho \sin 2\theta - 0.1837 \rho \cos 2\theta \\
& + 0.0666 \sin \theta + 0.0804 \cos \theta - 0.6002 \rho^3 - 0.4689 \rho \\
\text{H18} \quad & 1.9828 \rho^4 \sin \theta + 0.7712 \rho^4 \sin 3\theta - 0.2913 \rho^4 \sin 5\theta + 5\rho^4 \cos \theta - 3.2038 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 0.1222 \rho^3 \sin 4\theta - 5.2424 \rho^3 \cos 2\theta + 1.9321 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 0.2017 \rho^3 \cos 4\theta + 0.9574 \rho^2 \sin \theta + 0.4373 \rho^2 \sin 3\theta + 7.8146 \rho^2 \cos \theta \\
& + 0.2186 \rho \sin 2\theta - 1.5484 \rho \cos 2\theta - 0.0883 \sin \theta + 0.2128 \cos \theta \\
& - 6.7369 \rho^3 - 1.2290 \rho \\
\text{H19} \quad & 2.5980 \rho^4 \sin \theta + 2.4799 \rho^4 \sin 3\theta - 0.2101 \rho^4 \sin 5\theta + 16.814 \rho^4 \cos \theta + 5 \rho^4 \cos 3\theta \\
& - 7.7329 \rho^3 \sin 2\theta - 1.4027 \rho^3 \sin 4\theta - 24.0414 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 6.1627 \rho^3 \cos 3\theta - 2.1629 \rho^3 \cos 4\theta + 4.9269 \rho^2 \sin \theta + 3.0688 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 30.6899 \rho^2 \cos \theta - 1.5791 \rho \sin 2\theta - 4.7327 \rho \cos 2\theta + 0.1659 \sin \theta \\
& + 0.9074 \cos \theta - 22.6700 \rho^3 - 5.8670 \rho \\
\text{H20} \quad & -7.9597 \rho^4 \sin \theta - 7.7305 \rho^4 \sin 3\theta + 0.6290 \rho^4 \sin 5\theta + 15.3724 \rho^4 \cos \theta \\
& + 15.4465 \rho^4 \cos 3\theta + 5 \rho^4 \cos 5\theta + 24.0136 \rho^3 \sin 2\theta + 4.4383 \rho^3 \sin 4\theta \\
& - 38.5967 \rho^3 \cos 2\theta + 21.2187 \rho^3 \cos 3\theta - 18.6669 \rho^3 \cos 4\theta \\
& - 15.4328 \rho^2 \sin \theta - 9.6300 \rho^2 \sin 3\theta + 31.5833 \rho^2 \cos \theta + 5.0108 \rho \sin 2\theta \\
& - 9.1065 \rho \cos 2\theta - 0.5345 \sin \theta + 1.2777 \cos \theta - 17.6330 \rho^3 - 5.4880 \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{H21} \quad & 6 \rho^5 \sin 6\theta + 17.6297 \rho^4 \sin \theta + 16.3854 \rho^4 \sin 3\theta - 9.9833 \rho^4 \sin 5\theta + 12.3814 \rho^4 \cos \theta \\
& - 4.6786 \rho^4 \cos 3\theta - 5.472 \rho^4 \cos 5\theta - 50.5564 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 0.4065 \rho^3 \sin 4\theta - 5.2128 \rho^3 \cos 2\theta - 13.7784 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 16.4468 \rho^3 \cos 4\theta + 31.2383 \rho^2 \sin \theta + 14.4364 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 26.8917 \rho^2 \cos \theta - 8.3409 \rho \sin 2\theta + 1.8695 \rho \cos 2\theta + 0.9944 \sin \theta \\
& + 0.7219 \cos \theta - 21.7338 \rho^3 - 7.5575 \rho \\
\text{H22} \quad & 6 \rho^5 \sin 4\theta + 3.2168 \rho^5 \sin 6\theta - 3.1155 \rho^4 \sin \theta - 12.7258 \rho^4 \sin 3\theta - 9.0698 \rho^4 \sin 5\theta \\
& + 3.3489 \rho^4 \cos \theta - 0.1648 \rho^4 \cos 3\theta - 0.2915 \rho^4 \cos 5\theta \\
& + 15.3933 \rho^3 \sin 2\theta + 10.5956 \rho^3 \sin 4\theta - 3.1448 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 0.3141 \rho^3 \cos 3\theta + 0.7229 \rho^3 \cos 4\theta - 6.3528 \rho^2 \sin \theta - 7.0514 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 5.7247 \rho^2 \cos \theta + 1.5153 \rho \sin 2\theta - 0.7741 \rho \cos 2\theta + 0.0337 \sin \theta \\
& + 0.1439 \cos \theta - 4.8403 \rho^3 - 1.0469 \rho \\
\text{H23} \quad & 6 \rho^5 \sin 2\theta + 4.3894 \rho^5 \sin 4\theta + 0.9161 \rho^5 \sin 6\theta - 10.2009 \rho^4 \sin \theta - 14.5938 \rho^4 \sin 3\theta \\
& - 4.3738 \rho^4 \sin 5\theta - 0.1384 \rho^4 \cos \theta + 0.0257 \rho^4 \cos 3\theta + 0.0327 \rho^4 \cos 5\theta \\
& + 14.4867 \rho^3 \sin 2\theta + 6.8463 \rho^3 \sin 4\theta + 0.1001 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 0.0572 \rho^3 \cos 3\theta - 0.0945 \rho^3 \cos 4\theta - 4.2494 \rho^2 \sin \theta - 4.1641 \rho^2 \sin 3\theta \\
& - 0.2637 \rho^2 \cos \theta + 0.8327 \rho \sin 2\theta + 0.0097 \rho \cos 2\theta - 0.0072 \sin \theta \\
& - 0.0068 \cos \theta + 0.2181 \rho^3 + 0.0606 \rho \\
\text{H24} \quad & 0.0876 \rho^5 \sin 2\theta - 7.3866 \rho^5 \sin 4\theta - 2.4946 \rho^5 \sin 6\theta + 1.0354 \rho^4 \sin \theta \\
& + 15.4426 \rho^4 \sin 3\theta + 8.6606 \rho^4 \sin 5\theta - 14.5951 \rho^4 \cos \theta \\
& + 0.7507 \rho^4 \cos 3\theta + 0.0794 \rho^4 \cos 5\theta - 16.5872 \rho^3 \sin 2\theta \\
& - 10.1222 \rho^3 \sin 4\theta + 6.3641 \rho^3 \cos 2\theta - 1.0886 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 0.4979 \rho^3 \cos 4\theta + 8.7292 \rho^2 \sin \theta + 6.5301 \rho^2 \sin 3\theta - 1.1664 \rho^2 \cos \theta \\
& - 1.9421 \rho \sin 2\theta - 0.2284 \rho \cos 2\theta - 0.0882 \sin \theta + 0.0235 \cos \theta + 6 \rho^5 \\
& + 4.4374 \rho^3 - 0.0473 \rho \\
\text{H25} \quad & 2.1523 \rho^5 \sin 2\theta - 0.3355 \rho^5 \sin 4\theta - 0.7174 \rho^5 \sin 6\theta + 6 \rho^5 \cos 2\theta - 4.9312 \rho^4 \sin \theta \\
& - 2.7655 \rho^4 \sin 3\theta + 1.6257 \rho^4 \sin 5\theta - 27.3628 \rho^4 \cos \theta \\
& - 5.5984 \rho^4 \cos 3\theta + 0.3103 \rho^4 \cos 5\theta + 5.6398 \rho^3 \sin 2\theta \\
& - 0.3926 \rho^3 \sin 4\theta + 15.6320 \rho^3 \cos 2\theta - 2.0393 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 0.6912 \rho^3 \cos 4\theta - 2.3499 \rho^2 \sin \theta - 0.8718 \rho^2 \sin 3\theta - 12.9396 \rho^2 \cos \theta \\
& + 0.4251 \rho \sin 2\theta + 1.2605 \rho \cos 2\theta - 0.0376 \sin \theta - 0.1951 \cos \theta \\
& + 5.8352 \rho^5 + 16.7176 \rho^3 + 1.7010 \rho \\
\text{H26} \quad & -4.7115 \rho^5 \sin 2\theta + 2.2698 \rho^5 \sin 4\theta + 2.2076 \rho^5 \sin 6\theta + 6.141 \rho^5 \cos 2\theta + 6 \rho^5 \cos 4\theta \\
& + 10.7650 \rho^4 \sin \theta + 2.9531 \rho^4 \sin 3\theta - 5.7270 \rho^4 \sin 5\theta - 10.7939 \rho^4 \cos \theta \\
& - 19.0964 \rho^4 \cos 3\theta - 3.9268 \rho^4 \cos 5\theta - 9.3298 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 3.4419 \rho^3 \sin 4\theta + 19.4029 \rho^3 \cos 2\theta - 6.3382 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 8.5119 \rho^3 \cos 4\theta + 3.5642 \rho^2 \sin \theta + 0.2421 \rho^2 \sin 3\theta - 9.0303 \rho^2 \cos \theta \\
& - 0.3546 \rho \sin 2\theta + 1.8810 \rho \cos 2\theta + 0.0385 \sin \theta - 0.2019 \cos \theta \\
& + 0.3774 \rho^5 + 5.9500 \rho^3 + 1.1497 \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{H27} \quad & -29.2223 \rho^5 \sin 2\theta - 1.1459 \rho^5 \sin 4\theta + 7.1243 \rho^5 \sin 6\theta + 9.7402 \rho^5 \cos 2\theta \\
& + 29.1264 \rho^5 \cos 4\theta + 6 \rho^5 \cos 6\theta + 66.5934 \rho^4 \sin \theta + 48.7640 \rho^4 \sin 3\theta \\
& - 13.2645 \rho^4 \sin 5\theta + 28.5405 \rho^4 \cos \theta - 76.6064 \rho^4 \cos 3\theta \\
& - 34.2212 \rho^4 \cos 5\theta - 86.7574 \rho^3 \sin 2\theta - 5.2061 \rho^3 \sin 4\theta \\
& + 48.1814 \rho^3 \cos 2\theta - 32.7972 \rho^3 \cos 3\theta + 54.5567 \rho^3 \cos 4\theta \\
& + 37.2411 \rho^2 \sin \theta + 18.6185 \rho^2 \sin 3\theta - 2.7931 \rho^2 \cos \theta - 8.2603 \rho \sin 2\theta \\
& + 7.3802 \rho \cos 2\theta + 0.8059 \sin \theta - 0.5649 \cos \theta - 12.9677 \rho^5 - 23.4162 \rho^3 \\
& - 0.0272 \rho
\end{aligned}$$

Tabla 3.6.- Polinomios de aberración generados para una Pantalla de Hartmann con simetría Radial y ρ con relación a una distribución de anillos de Newton.

H1	$\sin \theta$
H2	$\cos \theta$
H3	$2 \rho \sin 2\theta - 1.3099 \sin \theta$
H4	$0.9698 \rho \sin 2\theta - 0.9743 \sin \theta - 1.9832 \cos \theta + 2\rho$
H5	$0.0618 \rho \sin 2\theta + 2 \rho \cos 2\theta - 0.0621 \sin \theta - 2.7830 \cos \theta + 2.1276\rho$
H6	$3 \rho^2 \sin 3\theta - 4.0372 \rho \sin 2\theta - 0.0334 \rho \cos 2\theta + 2.6917 \sin \theta + 0.4454 \cos \theta - 0.4378 \rho$
H7	$3 \rho^2 \sin \theta + 1.5419 \rho^2 \sin 3\theta - 2.6880 \rho \sin 2\theta - 0.0358 \rho \cos 2\theta - 0.1298 \sin \theta + 0.4768 \cos \theta - 0.4687\rho$
H8	$0.8785 \rho^2 \sin \theta + 0.7099 \rho^2 \sin 3\theta + 3 \rho^2 \cos \theta - 1.5609 \rho \sin 2\theta - 1.4891 \rho \cos 2\theta + 0.6218 \sin \theta + 1.0564 \cos \theta - 2.5293\rho$
H9	$3 \rho^3 \cos 3\theta + 0.0283 \rho^2 \sin \theta + 0.0229 \rho^2 \sin 3\theta + 8.7846 \rho^2 \cos \theta - 0.0505 \rho \sin 2\theta - 7.3502 \rho \cos 2\theta + 0.0201 \sin \theta + 4.0986 \cos \theta - 7.3840 \rho$
H10	$4 \rho^3 \sin 4\theta + 0.0040 \rho^3 \cos 3\theta - 3.2609 \rho^2 \sin \theta - 7.3811 \rho^2 \sin 3\theta + 0.6358 \rho^2 \cos \theta + 8.0672 \rho \sin 2\theta - 0.3245 \rho \cos 2\theta - 2.3945 \sin \theta + 0.2902 \cos \theta - 0.5999 \rho$
H11	$4 \rho^3 \sin 2\theta + 1.4017 \rho^3 \sin 4\theta - 0.0076 \rho^3 \cos 3\theta - 4.5991 \rho^2 \sin \theta - 3.9095 \rho^2 \sin 3\theta - 1.2071 \rho^2 \cos \theta + 2.0778 \rho \sin 2\theta + 0.6161 \rho \cos 2\theta - 0.0534 \sin \theta - 0.5510 \cos \theta + 1.139 \rho$
H12	$1.7888 \rho^3 \sin 2\theta - 0.4632 \rho^3 \sin 4\theta - 0.3652 \rho^3 \cos 3\theta - 1.3000 \rho^2 \sin \theta + 0.7985 \rho^2 \sin 3\theta - 4.8681 \rho^2 \cos \theta - 2.2293 \rho \sin 2\theta + 1.3671 \rho \cos 2\theta + 1.4433 \sin \theta + 1.3799 \cos \theta + 4 \rho^3 - 1.5153 \rho$

$$\begin{aligned}
\text{H13} \quad & 2.4310 \rho^3 \sin 2\theta + 0.8674 \rho^3 \sin 4\theta + 4 \rho^3 \cos 2\theta - 1.9728 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 3.6242 \rho^2 \sin \theta - 3.1130 \rho^2 \sin 3\theta - 12.7565 \rho^2 \cos \theta \\
& + 2.8351 \rho \sin 2\theta + 3.4751 \rho \cos 2\theta - 0.6883 \sin \theta - 1.4337 \cos \theta \\
& + 3.6974 \rho^3 + 5.0117 \rho \\
\text{H14} \quad & -0.2697 \rho^3 \sin 2\theta - 0.1639 \rho^3 \sin 4\theta + 15.016 \rho^3 \cos 2\theta - 14.3562 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 4 \rho^3 \cos 4\theta + 0.4863 \rho^2 \sin \theta + 0.5353 \rho^2 \sin 3\theta - 41.9065 \rho^2 \cos \theta \\
& - 0.5800 \rho \sin 2\theta + 16.2013 \rho \cos 2\theta + 0.1963 \sin \theta - 5.5635 \cos \theta \\
& + 11.3089 \rho^3 + 15.7839 \rho \\
\text{H15} \quad & 5 \rho^4 \sin 5\theta - 10.1644 \rho^3 \sin 2\theta - 13.8046 \rho^3 \sin 4\theta + 3.2586 \rho^3 \cos 2\theta \\
& - 1.9847 \rho^3 \cos 3\theta + 0.1198 \rho^3 \cos 4\theta + 12.0534 \rho^2 \sin \theta \\
& + 21.4209 \rho^2 \sin 3\theta - 13.1731 \rho^2 \cos \theta - 12.7594 \rho \sin 2\theta \\
& + 3.9330 \rho \cos 2\theta + 2.6245 \sin \theta - 0.9022 \cos \theta + 4.7367 \rho^3 \\
& + 4.0337 \rho \\
\text{H16} \quad & 5 \rho^4 \sin 3\theta + 1.4483 \rho^4 \sin 5\theta - 9.7901 \rho^3 \sin 2\theta - 5.1665 \rho^3 \sin 4\theta \\
& + 0.0572 \rho^3 \cos 2\theta - 0.2852 \rho^3 \cos 3\theta + 0.1015 \rho^3 \cos 4\theta \\
& + 8.6165 \rho^2 \sin \theta + 5.0625 \rho^2 \sin 3\theta - 1.1678 \rho^2 \cos \theta \\
& - 2.1935 \rho \sin 2\theta + 0.4648 \rho \cos 2\theta - 0.4880 \sin \theta + 0.2464 \cos \theta \\
& + 0.8655 \rho^3 - 0.2730 \rho \\
\text{H17} \quad & 5 \rho^4 \sin \theta + 6.2905 \rho^4 \sin 3\theta + 1.5526 \rho^4 \sin 5\theta - 15.3059 \rho^3 \sin 2\theta \\
& - 6.4563 \rho^3 \sin 4\theta - 1.9673 \rho^3 \cos 2\theta + 0.9752 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 0.0167 \rho^3 \cos 4\theta + 8.0882 \rho^2 \sin \theta + 7.6314 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 7.1176 \rho^2 \cos \theta - 2.8440 \rho \sin 2\theta - 2.0229 \rho \cos 2\theta + 0.2588 \sin \theta \\
& + 0.7812 \cos \theta - 2.1589 \rho^3 - 2.7462 \rho \\
\text{H18} \quad & 1.946 \rho^4 \sin \theta + 1.1734 \rho^4 \sin 3\theta - 0.0455 \rho^4 \sin 5\theta + 5 \rho^4 \cos \theta - 3.1962 \rho^3 \sin 2\theta \\
& - 0.1280 \rho^3 \sin 4\theta - 3.9907 \rho^3 \cos 2\theta + 1.4619 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 0.2479 \rho^3 \cos 4\theta + 0.2315 \rho^2 \sin \theta - 0.2584 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 3.6068 \rho^2 \cos \theta + 1.3866 \rho \sin 2\theta - 0.4932 \rho \cos 2\theta - 0.5470 \sin \theta \\
& - 0.3615 \cos \theta - 5.6352 \rho^3 + 0.6789 \rho \\
\text{H19} \quad & 2.5262 \rho^4 \sin \theta + 3.6123 \rho^4 \sin 3\theta + 0.8943 \rho^4 \sin 5\theta + 13.248 \rho^4 \cos \theta + 5 \rho^4 \cos 3\theta \\
& - 10.3189 \rho^3 \sin 2\theta - 4.4058 \rho^3 \sin 4\theta - 23.1922 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 6.9591 \rho^3 \cos 3\theta - 2.5109 \rho^3 \cos 4\theta + 7.5660 \rho^2 \sin \theta \\
& + 6.7944 \rho^2 \sin 3\theta + 33.3600 \rho^2 \cos \theta - 4.0718 \rho \sin 2\theta \\
& - 6.3381 \rho \cos 2\theta + 0.7718 \sin \theta + 1.9465 \cos \theta - 20.0614 \rho^3 \\
& - 8.2788 \rho
\end{aligned}$$

H20
$$\begin{aligned}
& -1.6672 \rho^4 \sin \theta - 2.8342 \rho^4 \sin 3\theta - 0.7956 \rho^4 \sin 5\theta + 36.3916 \rho^4 \cos \theta \\
& + 19.6415 \rho^4 \cos 3\theta + 5 \rho^4 \cos 5\theta + 8.1381 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 3.8208 \rho^3 \sin 4\theta - 73.8503 \rho^3 \cos 2\theta + 34.9250 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 21.6540 \rho^3 \cos 4\theta - 6.5580 \rho^2 \sin \theta - 6.0193 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 93.2221 \rho^2 \cos \theta + 3.9538 \rho \sin 2\theta - 23.6932 \rho \cos 2\theta \\
& - 0.8300 \sin \theta + 6.6078 \cos \theta - 53.2684 \rho^3 - 21.6635 \rho
\end{aligned}$$

H21
$$\begin{aligned}
& 6 \rho^5 \sin 6\theta + 12.1162 \rho^4 \sin \theta + 10.7955 \rho^4 \sin 3\theta - 14.5751 \rho^4 \sin 5\theta \\
& + 51.6109 \rho^4 \cos \theta + 12.4658 \rho^4 \cos 3\theta - 6.7895 \rho^4 \cos 5\theta \\
& - 45.7727 \rho^3 \sin 2\theta + 5.8322 \rho^3 \sin 4\theta - 84.3003 \rho^3 \cos 2\theta \\
& + 8.5850 \rho^3 \cos 3\theta + 10.0228 \rho^3 \cos 4\theta + 40.3443 \rho^2 \sin \theta \\
& + 18.5684 \rho^2 \sin 3\theta + 150.4193 \rho^2 \cos \theta - 19.31252 \rho \sin 2\theta \\
& - 22.1017 \rho \cos 2\theta + 4.7792 \sin \theta + 8.7603 \cos \theta - 86.6089 \rho^3 \\
& - 43.2962 \rho
\end{aligned}$$

H22
$$\begin{aligned}
& 6 \rho^5 \sin 4\theta + 2.0400 \rho^5 \sin 6\theta - 9.1024 \rho^4 \sin \theta - 22.3527 \rho^4 \sin 3\theta \\
& - 9.9280 \rho^4 \sin 5\theta + 3.6633 \rho^4 \cos \theta + 0.8660 \rho^4 \cos 3\theta \\
& + 1.3200 \rho^4 \cos 5\theta + 40.8758 \rho^3 \sin 2\theta + 19.7358 \rho^3 \sin 4\theta \\
& - 3.8101 \rho^3 \cos 2\theta + 4.8944 \rho^3 \cos 3\theta - 3.8605 \rho^3 \cos 4\theta \\
& - 24.1301 \rho^2 \sin \theta - 21.3076 \rho^2 \sin 3\theta - 0.0217 \rho^2 \cos \theta \\
& + 9.1354 \rho \sin 2\theta - 1.4331 \rho \cos 2\theta - 0.9916 \sin \theta - 0.4587 \cos \theta \\
& - 3.1988 \rho^3 + 2.3797 \rho
\end{aligned}$$

H23
$$\begin{aligned}
& 6 \rho^5 \sin 2\theta + 4.3414 \rho^5 \sin 4\theta + 0.9139 \rho^5 \sin 6\theta - 11.3748 \rho^4 \sin \theta \\
& - 16.2346 \rho^4 \sin 3\theta - 4.7969 \rho^4 \sin 5\theta - 2.3715 \rho^4 \cos \theta \\
& - 0.5710 \rho^4 \cos 3\theta + 0.1452 \rho^4 \cos 5\theta + 18.7553 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 8.6964 \rho^3 \sin 4\theta + 3.6724 \rho^3 \cos 2\theta - 0.7937 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 0.0374 \rho^3 \cos 4\theta - 6.9867 \rho^2 \sin \theta - 6.5873 \rho^2 \sin 3\theta \\
& - 5.9295 \rho^2 \cos \theta + 2.0016 \rho \sin 2\theta + 1.0096 \rho \cos 2\theta - 0.1498 \sin \theta \\
& - 0.3062 \cos \theta + 3.7067 \rho^3 + 1.4914 \rho
\end{aligned}$$

H24
$$\begin{aligned}
& 19.8384 \rho^5 \sin 2\theta + 11.7858 \rho^5 \sin 4\theta + 2.9191 \rho^5 \sin 6\theta - 38.1313 \rho^4 \sin \theta \\
& - 49.8631 \rho^4 \sin 3\theta - 15.4774 \rho^4 \sin 5\theta - 8.3376 \rho^4 \cos \theta \\
& + 2.1680 \rho^4 \cos 3\theta + 1.3554 \rho^4 \cos 5\theta + 60.5992 \rho^3 \sin 2\theta \\
& + 30.7569 \rho^3 \sin 4\theta - 1.7150 \rho^3 \cos 2\theta + 4.9837 \rho^3 \cos 3\theta \\
& - 4.5834 \rho^3 \cos 4\theta - 23.3955 \rho^2 \sin \theta - 25.9087 \rho^2 \sin 3\theta \\
& + 7.4424 \rho^2 \cos \theta + 9.8093 \rho \sin 2\theta - 3.2225 \rho \cos 2\theta - 1.5634 \sin \theta \\
& - 0.2256 \cos \theta + 6 \rho^5 - 4.0063 \rho^3 + 0.4970 \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{H25} \quad & 5.4665 \rho^5 \sin 2\theta + 2.6242 \rho^5 \sin 4\theta + 0.3211 \rho^5 \sin 6\theta + 6 \rho^5 \cos 2\theta \\
& - 9.4414 \rho^4 \sin \theta - 10.4280 \rho^4 \sin 3\theta - 1.9146 \rho^4 \sin 5\theta \\
& - 26.5750 \rho^4 \cos \theta - 6.4059 \rho^4 \cos 3\theta - 0.4318 \rho^4 \cos 5\theta \\
& + 9.6442 \rho^3 \sin 2\theta + 3.1787 \rho^3 \sin 4\theta + 15.9749 \rho^3 \cos 2\theta \\
& - 4.2671 \rho^3 \cos 3\theta + 3.0693 \rho^3 \cos 4\theta - 0.9537 \rho^2 \sin \theta \\
& - 0.6376 \rho^2 \sin 3\theta - 10.3130 \rho^2 \cos \theta - 1.3030 \rho \sin 2\theta \\
& + 1.5897 \rho \cos 2\theta + 0.4845 \sin \theta - 0.0665 \cos \theta + 5.5203 \rho^5 \\
& + 15.4337 \rho^3 + 0.2986 \rho \\
\text{H26} \quad & 5.7865 \rho^5 \sin 2\theta + 4.1982 \rho^5 \sin 4\theta + 0.3298 \rho^5 \sin 6\theta + 22.878 \rho^5 \cos 2\theta \\
& + 6 \rho^5 \cos 4\theta - 13.1834 \rho^4 \sin \theta - 17.9993 \rho^4 \sin 3\theta \\
& - 3.5472 \rho^4 \sin 5\theta - 102.9058 \rho^4 \cos \theta - 40.5804 \rho^4 \cos 3\theta \\
& - 3.2595 \rho^4 \cos 5\theta + 26.0258 \rho^3 \sin 2\theta + 9.1924 \rho^3 \sin 4\theta \\
& + 90.4721 \rho^3 \cos 2\theta - 20.4132 \rho^3 \cos 3\theta + 13.5702 \rho^3 \cos 4\theta \\
& - 12.8018 \rho^2 \sin \theta - 10.0186 \rho^2 \sin 3\theta - 85.0185 \rho^2 \cos \theta \\
& + 4.6436 \rho \sin 2\theta + 13.0642 \rho \cos 2\theta - 0.6968 \sin \theta - 3.6566 \cos \theta \\
& + 16.6297 \rho^5 + 76.6695 \rho^3 + 15.7572 \rho \\
\text{H27} \quad & -3.8515 \rho^5 \sin 2\theta - 3.9839 \rho^5 \sin 4\theta - 0.3779 \rho^5 \sin 6\theta + 61.8881 \rho^5 \cos 2\theta \\
& + 27.7704 \rho^5 \cos 4\theta + 6\rho^5 \cos 6\theta + 11.3379 \rho^4 \sin \theta \\
& + 17.9039 \rho^4 \sin 3\theta + 4.2105 \rho^4 \sin 5\theta - 252.8980 \rho^4 \cos \theta \\
& - 137.0490 \rho^4 \cos 3\theta - 33.5958 \rho^4 \cos 5\theta - 30.6184 \rho^3 \sin 2\theta \\
& - 11.9389 \rho^3 \sin 4\theta + 252.4233 \rho^3 \cos 2\theta - 80.4996 \rho^3 \cos 3\theta \\
& + 74.8023 \rho^3 \cos 4\theta + 18.5110 \rho^2 \sin \theta + 15.3169 \rho^2 \sin 3\theta \\
& - 207.8504 \rho^2 \cos \theta - 8.6071 \rho \sin 2\theta + 40.5467 \rho \cos 2\theta \\
& + 1.6120 \sin \theta - 11.2585 \cos \theta + 39.3742 \rho^5 + 181.2877 \rho^3 \\
& + 35.1608 \rho
\end{aligned}$$

3.7 Obtención de los coeficientes de aberración utilizando el procedimiento de mínimos cuadrados.

Continuando bajo la misma teoría de representación del frente de onda en función de una nueva definición de polinomios de aberración, podemos ver también que es posible utilizar un procedimiento de mínimos cuadrados simple para obtener los coeficientes de aberración del frente de onda en función de las aberraciones transversales generadas por el sistema óptico mediante la prueba de Hartmann.

Tomando nuevamente la definición de frente de onda descrita por H. H. Hopkins [17], bajo una nueva definición de funciones en coordenadas polares con un nuevo índice m para definir un conjunto de aberraciones de la misma potencia que ρ dados por n donde $m=0,1,2,3,\dots,n$ obtenemos que:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n a_{nm} \rho^n \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} l(n, m) \theta \quad 3.25$$

Donde la función *sin* es usada si la operación $n + m$ nos genera un número impar y por consiguiente, la función *cos* en el caso de la operación $n + m$ nos genere un número par. Para satisfacer esta condición, hemos definido la función l como:

$$l(n, m) = 2 \text{int} \left\{ \frac{n + m + 1}{2} \right\} - n \quad 3.26$$

En otras palabras, l está en función de las variables n y m , en donde el máximo valor de m es n , por lo tanto, el valor máximo que puede obtener la función l va a estar dado por n .

Definiremos j como el número de monomio del grupo de aberraciones de la siguiente forma:

$$j = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1 \quad 3.27$$

Como podemos notar, bajo esta nueva definición de términos para cada valor de n , el orden es tal que el valor de l va incrementando con j , generando así que las funciones *sin* estén antes de las funciones *cos*. Este tipo de orden tiene la ventaja de que con los primeros 22 términos que generemos, incluiremos las aberraciones esféricas de quinto orden y en el caso de generar 37 términos, incluimos las aberraciones esféricas de séptimo orden.

Podemos calcular también el número de términos L para una potencia dada n , estableciendo los valores de n y m , definiendo una potencia k bajo la siguiente ecuación:

$$L = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad 3.28$$

Por ejemplo, si el monomio tiene un valor de orden $n = 6$, el número total de términos que tiene este orden o inferiores son 28 expresiones de aberración. Además, como ya sabemos, para encontrar un total de L coeficientes, necesitamos un mínimo de L puntos en el patrón de Hartmann o Hartmann-Shack.

3.7.1 Representación del frente de onda en coordenadas polares

Podemos comenzar la descripción del frente de onda en su forma simple como:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^L a_j g_j(\rho, \theta) \quad 3.29$$

En donde

$$g_j(\rho, \theta) = \rho^{n(j)} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} l(j)\theta \quad 3.30$$

Y de las ecuaciones 3.27 y 3.28 podemos obtener que

$$n = \text{int} \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(j-1)}}{2} \right\} \quad 3.31$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. 3.26, obtenemos que

$$l(j) = 2 \text{int} \left\{ \frac{2j - n(n-1)}{4} \right\} - n \quad 3.32$$

Para determinar el valor superior (*sin*) o inferior (*cos*) que corresponde al monomio a definir, necesitamos ver si el valor de la suma $(n+m)$ es par o impar. Este valor puede ser calculado de la siguiente manera:

$$(n + m) = j - \frac{n(n-1)}{2} - 1 \quad 3.33$$

Los monomios de séptimo orden que pueden ser generados bajo la definición de la Ec. 3.25 se muestran en la Tabla 3.7 en donde los términos de $l = 0$ tienen simetría de rotación, es

decir son aberraciones esféricas, los términos de $l = 1$ representan las aberraciones tipo coma de diferentes órdenes y los términos con $l = 2$ representan aberraciones de astigmatismo para diferentes órdenes. En los casos en los que $l \geq 3$ representamos las aberraciones de frente de onda de la formas definidas como *ashtray* con n canales (n picos) conocidas comúnmente como *trefoils*, *quatrefoils*, *pentafoils*, *hexafoils* y *heptafoils* para $n = 3, 4, 5, 6$ y 7 respectivamente.

Tabla 3.7.- Monomios de deformaciones de frente de onda $g(\rho, \theta)$ en coordenadas polares de orden 7.

n	m	l	j	Monomios de aberración $g_j(\rho, \theta)$	Nombre
0	0	0	1	1	Piston
1	0	1	2	$\rho \sin \theta$	Tilt sobre el eje x
	1	1	3	$\rho \cos \theta$	Tilt sobre el eje y
2	0	0	4	ρ^2	Defoco
	1	2	5	$\rho^2 \sin 2\theta$	Astigmatismo a $\pm 45^\circ$
	2	2	6	$\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo a 0° or 90°
3	0	1	7	$\rho^3 \sin \theta$	Coma primaria en el eje y
	1	1	8	$\rho^3 \cos \theta$	Coma primaria en el eje x
	2	3	9	$\rho^3 \sin 3\theta$	Astigmatismo triangular con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
	3	3	10	$\rho^3 \cos 3\theta$	Astigmatismo triangular con picos a $s(120^\circ)$
4	0	0	11	ρ^4	Aberración primaria esférica
	1	2	12	$\rho^4 \sin 2\theta$	Astigmatismo de 5 th orden a $\pm 45^\circ$
	2	2	13	$\rho^4 \cos 2\theta$	Astigmatismo de 5 th orden a 0° o 90°
	3	4	14	$\rho^4 \sin 4\theta$	Quatrefoil con picos a $s(90^\circ) + 22.5^\circ$
	4	4	15	$\rho^4 \cos 4\theta$	Quatrefoil con picos a $s(90^\circ)$

5	0	1	16	$\rho^5 \sin \theta$	Coma de 5 th orden a lo largo del eje y
	1	1	17	$\rho^5 \cos \theta$	Coma de 5 th orden a lo largo del eje x
	2	3	18	$\rho^5 \sin 3\theta$	Trefoil con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
	3	3	19	$\rho^5 \cos 3\theta$	Trefoil con picos a $s(120^\circ)$
	4	5	20	$\rho^5 \sin 5\theta$	Pentafoil con picos a $s(72^\circ) + 18^\circ$
	5	5	21	$\rho^5 \cos 5\theta$	Pentafoil con picos a $s(72^\circ)$
6	0	0	22	ρ^6	Aberración esférica 5th orden
	1	2	23	$\rho^6 \sin 2\theta$	Astigmatismo terciario a $\pm 45^\circ$
	2	2	24	$\rho^6 \cos 2\theta$	Astigmatismo terciario a 0° o 90°
	3	4	25	$\rho^6 \sin 4\theta$	Quatrefoil de alto orden con picos a $s(90^\circ) + 22.5^\circ$
	4	4	26	$\rho^6 \cos 4\theta$	Quatrefoil de alto orden con picos a $s(90^\circ)$
	5	6	27	$\rho^6 \sin 6\theta$	Hexafoil de alto orden con picos a $s(60^\circ) + 15.5^\circ$
	6	6	28	$\rho^6 \cos 6\theta$	Hexafoil de alto orden con picos a $s(60^\circ)$
7	0	1	29	$\rho^7 \sin \theta$	Coma de 7 th orden a lo largo del eje y
	1	1	30	$\rho^7 \cos \theta$	Coma 7 th orden a lo largo del eje x
	2	3	31	$\rho^7 \sin 3\theta$	Trefoil de alto orden con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
	3	3	32	$\rho^7 \cos 3\theta$	Trefoil de alto orden con picos a $s(120^\circ)$
	4	5	33	$\rho^7 \sin 5\theta$	Pentafoil de alto orden con picos a $s(72^\circ) + 18^\circ$
	5	5	34	$\rho^7 \cos 5\theta$	Pentafoil de alto orden con picos a $s(72^\circ)$
	6	7	35	$\rho^7 \sin 7\theta$	Heptafoil de alto orden con picos a $s(51.4^\circ) + 12.8^\circ$
	7	7	36	$\rho^7 \cos 7\theta$	Heptafoil de alto orden con picos a $s(51.4^\circ)$
8	0	0	37	ρ^8	Aberración esférica de 7th orden

3.7.2 Representación del frente de onda en coordenadas cartesianas

De la misma manera en la que representamos el frente de onda en coordenadas polares, el frente onda $W(x,y)$ puede ser representado en coordenadas cartesianas con una combinación lineal de polinomios lineales independientes $g(x,y)$:

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^L a_j g_j(x, y) \quad 3.34$$

La tabla equivalente a la Tabla 3.7, bajo esta nueva definición de frente de onda en coordenadas cartesianas, la podemos ver en la Tabla 3.8:

Tabla 3.8.- Monomios de deformaciones de frente de onda $g(x, y)$ en coordenadas cartesianas de orden 7.

n	j	Polinomio de aberración $g_j(x, y)$	Nombre
0	1	1	Pistón
1	2	y	Tilt sobre el eje x
	3	x	Tilt sobre el eje y
2	4	$x^2 + y^2$	Defoco
	5	2xy	Astigmatismo a $\pm 45^\circ$
	6	$x^2 - y^2$	Astigmatismo a 0° or 90°
3	7	$y(x^2 + y^2)$	Coma primaria en el eje y
	8	$x(x^2 + y^2)$	Coma primaria en el eje x
	9	$y(3x^2 - y^2)$	Astigmatismo triangular con picos a $s(120^\circ)$
	10	$x(x^2 - 3y^2)$	Astigmatismo triangular con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
4	11	$(x^2 + y^2)^2$	Aberración primaria esférica

	12	$2xy(y^2 + x^2)$	Astigmatismo de 5 ^m orden a $\pm 45^\circ$
	13	$x^4 - y^4$	Astigmatismo de 5 ^m orden a 0° o 90°
	14	$4xy(x^2 - y^2)$	Quatrefoil con picos a $s(90^\circ) + 22.5^\circ$
	15	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	Quatrefoil con picos a $s(90^\circ)$
5	16	$y(x^2 + y^2)^2$	Coma de 5 ^m orden a lo largo del eje y
	17	$x(x^2 + y^2)^2$	Coma de 5 ^m orden a lo largo del eje x
	18	$y(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)$	Trefoil con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
	19	$x(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)$	Trefoil con picos a $s(120^\circ)$
	20	$y(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$	Pentafoil con picos a $s(72^\circ) + 18^\circ$
	21	$x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)$	Pentafoil con picos a $s(72^\circ)$
6	22	$(x^2 + y^2)^3$	Aberración esférica 5th orden
	23	$xy(x^2 + y^2)^2$	Astigmatismo terciario a $\pm 45^\circ$
	24	$(x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2)$	Astigmatismo terciario a 0° o 90°
	25	$2xy(x^4 - y^4)$	Quatrefoil de alto orden con picos a $s(90^\circ) + 22.5^\circ$
	26	$(x^2 + y^2)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$	Quatrefoil de alto orden con picos a $s(90^\circ)$
	27	$2xy(3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4)$	Hexafoil de alto orden con picos a $s(60^\circ) + 15.5^\circ$
	28	$x^6 - 15x^2y^2(x^2 - y^2) - y^6$	Hexafoil de alto orden con picos a $s(60^\circ)$
7	29	$y(x^2 + y^2)^3$	Coma de 7 ^m orden a lo largo del eje y
	30	$x(x^2 + y^2)^3$	Coma 7 ^m orden a lo largo del eje x

	31	$y(x^2 + y^2)^2(3x^2 - y^2)$	Trefoil de alto orden con picos a $s(120^\circ) + 30^\circ$
	32	$x(x^2 + y^2)^2(x^2 - 3y^2)$	Trefoil de alto orden con picos a $s(120^\circ)$
	33	$y(x^2 + y^2)(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$	Pentafoil de alto orden con picos a $s(72^\circ) + 18^\circ$
	34	$x(x^2 + y^2)(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)$	Pentafoil de alto orden con picos a $s(72^\circ)$
	35	$y(7x^6 - 35x^4y^2 + 21x^2y^4 - y^6)$	Heptafoil de alto orden con picos a $s(51.4^\circ) + 12.8^\circ$
	36	$x(x^6 + 35x^2y^4 - 21x^4y^2 - 7y^6)$	Heptafoil de alto orden con picos a $s(51.4^\circ)$
8	37	$(x^2 + y^2)^4$	Aberración esférica de 7th orden

3.7.3 Relación entre la deformación del frente de onda y las aberraciones transversales

Utilizando la representación del frente de onda descrita en la Ec. 3.29, podemos definir ahora las pendientes radiales y tangenciales del frente de onda, ya que como sabemos las aberraciones transversales se obtienen a partir de:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x, y)}{r_w} ;$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -\frac{TA_y(x, y)}{r_w} \quad 3.35$$

en donde la variable r_w es la distancia desde la pupila de salida hasta el punto de observación.

Usando la expresión del frente de onda descrita por la Ec. 3.34 y la definición de aberraciones transversales de las Ec. 3.35 obtenemos que:

$$TA_x(x, y) = -r_w \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} \quad 3.36$$

y

$$TA_y(x, y) = -r_w \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \quad 3.37$$

Si realizamos este mismo procedimiento para las expresiones en coordenadas polares obtenemos que:

$$TA_{\rho}(\rho, \theta) = -r_w \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \rho} = -r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} \quad 3.38$$

y

$$TA_{\theta}(\rho, \theta) = -\frac{r_w}{TA_0} \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{r_w}{TA_0} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} \quad 3.39$$

donde A_0 es la distancia desde el centro de la pantalla de Hartmann (eje óptico) al centroide de la mancha aberrada. Definiendo ahora las aberraciones transversales de frente de onda como las derivadas parciales con respecto a las componentes ρ y θ como:

$$\frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} = n(j) \rho^{n(j)-1} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(j) \theta \quad 3.40$$

y

$$\frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} = l(j) \rho^{n(j)} \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} l(j) \theta \quad 3.41$$

En donde las funciones trigonométricas superiores de las Ecs. 3.40 y 3.41 son utilizadas cuando el número que se obtiene de la operación $(n + m)$ es impar y la función trigonométrica inferior cuando $(n + m)$ es par. El término pistón ha sido eliminado de nuestra representación del frente de onda debido a la aplicación de las derivadas parciales, porque es constante sobre toda la pupila.

Si deseamos escalar la imagen de huecos generada por el patrón de puntos de Hartmann o Hartmann-Shack correspondientes sobre la pupila de entrada, sustituiremos las coordenadas de TA_{0x} y TA_{0y} (aberraciones transversales) por la posición ideal de un punto de tal manera que:

$$TA_{0x} = Kx \quad y \quad TA_{0y} = Ky$$

en donde x e y son las coordenadas de los huecos o de las lentes en el caso de la prueba tipo Hartmann-Shack sobre la pupila de entrada y la variable K es un factor de escala desconocido. Para encontrar el valor de escala K , podemos utilizar la función de minimización de error:

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \left[(TA_{cx} - Kx)^2 + (TA_{cy} - Ky)^2 \right] \quad 3.43$$

en donde TA_{cx} y TA_{cy} son las variables de las aberraciones transversales medidas con respecto al centro de la pantalla de Hartmann. Para minimizar la función de error σ obtenemos su derivada con respecto a K igual a cero obteniendo:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^N (TA_{cx} x + TA_{cy} y)}{\sum_{i=1}^N (x^2 + y^2)} \quad 3.44$$

Por lo tanto, las aberraciones transversales medidas con respecto a su posición ideal están dadas por:

$$TA_x = TA_{cx} - Kx \quad y \quad TA_y = TA_{cy} - Ky \quad 3.45$$

3.7.4 Ajuste de mínimos cuadrados para las funciones de aberraciones transversales

Aplicar el procedimiento de mínimos cuadrados utilizando la nueva definición de las aberraciones transversales es relativamente simple, ya que el procedimiento prácticamente se puede describir como la minimización de la suma de los cuadrados de las diferencias que existen entre la posición de un punto calculado mediante una expresión analítica y la posición del centroide correspondiente obtenida experimentalmente y optimizada por la técnica descrita en el Capítulo 2 (ΔTA) obteniendo así la expresión de error a ser minimizada en cada ciclo de cálculos. Este procedimiento debe ser aplicado para las expresiones dadas tanto en coordenadas polares como en coordenadas cartesianas.

3.7.4.1 Aplicación del método de ajuste de mínimos cuadrados sobre las funciones de aberraciones transversales en coordenadas cartesianas y polares.

Como lo mencionamos anteriormente, con el ajuste de mínimos cuadrados, podemos minimizar las aberraciones transversales medidas a través de la función de error descrita como:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N [\Delta TA^2] = \sum_{i=1}^N \left[\left(r_w \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} - TA_x \right)^2 + \left(r_w \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} - TA_y \right)^2 \right] \quad 3.46$$

Aplicando esto en función de las aberraciones transversales tenemos que:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \left[\left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} - TA_x \right)^2 + \left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} - TA_y \right)^2 \right] \quad 3.47$$

Por lo tanto, la función de minimización del error está definida como:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} = 2r_w \sum_{i=1}^N \left[\left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} - TA_x \right) \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} + \left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} - TA_y \right) \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial y} \right] = 0 \quad 3.48$$

con $k=2, \dots, L$. Para esta expresión podemos obtener que:

$$\sum_{j=2}^L \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial y} \right) \right\} a_j = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} + TA_y \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial y} \right) \quad 3.49$$

Con esta definición podemos obtener un total de $L-1$ ecuaciones, con valores de k desde 2 hasta L .

Aplicando este mismo procedimiento en conjunto con la definición de frente de onda y aberraciones transversales en coordenadas polares podemos obtener que:

$$\Delta TA^2 = \left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} - TA_\rho \right)^2 + \left(\frac{r_w}{TA_\rho} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} - TA_\theta \right)^2 \quad 3.50$$

Al minimizar la función de error de las aberraciones transversales obtenemos:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N [\Delta TA^2] = \sum_{i=1}^N \left[\left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} - TA_\rho \right)^2 + \left(\frac{r_w}{TA_\rho} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} - TA_\theta \right)^2 \right] \quad 3.51$$

donde el frente de onda es representado analíticamente por una combinación lineal de funciones independientes $g(\rho, \theta)$. Para tener el mejor ajuste aplicamos la derivada parcial de ε con respecto a cada uno de los coeficientes a_k igualando esto a cero.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^N \left[\left(r_w \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} - TA_\rho \right) \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{TA_\rho} \left(\frac{r_w}{TA_\rho} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} - TA_\theta \right) \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad 3.52$$

Reescribiendo esta expresión de una forma más simple tenemos que:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \rho} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{TA_\rho^2} \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \theta} \sum_{j=2}^L a_j \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_\rho \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{TA_\theta}{TA_\rho} \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) \quad 3.53$$

Reordenando estos términos obtenemos:

$$\sum_{j=2}^L \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{TA_\rho^2} \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial g_j(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) \right\} a_j = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_\rho \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{TA_\theta}{TA_\rho} \frac{\partial g_k(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) \quad 3.54$$

De la misma manera, al aplicar el ajuste de mínimos cuadrados en coordenadas cartesianas, obtenemos un conjunto de $L-1$ ecuaciones en donde en ambos casos tenemos a_k incógnitas. Por lo tanto, utilizando las ecuaciones 3.36 y 3.37, podemos obtener que:

$$\sum_{j=2}^L \left\{ \sum_{i=1}^N \left(n(k)n(j)\rho^{n(k)+n(j)-2} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(k)\theta \bullet \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(j)\theta + \frac{l(k)l(j)}{TA_p^2} \rho^{n(k)+n(j)} \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} l(k)\theta \bullet \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} l(j)\theta \right) \right\} a_j$$

$$= \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_p n(k)\rho^{n(k)-1} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(k)\theta + \frac{TA_\theta}{TA_p} l(k)\rho^{n(k)} \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} l(k)\theta \right)$$

3.55

Como vemos, en ambos casos podemos generar sistemas de ecuaciones lineales de $L-1$ ecuaciones, uno para cada valor de k , con $L-1$ incógnitas, que son nuestros coeficientes de aberración de nuestra definición de frente de onda. Por lo tanto, resolviendo este sistema de ecuaciones, podemos obtener todos los coeficientes de aberración de nuestro frente de onda que se encuentra definido por los monomios que hemos descrito en nuestra Tabla 3.7.

3.7.5 Ajuste de mínimos cuadrados utilizando aberraciones transversales radiales

Si el frente de onda que analizamos se encuentra dentro de una superficie con simetría de rotación, las pendientes en la dirección radial son más pequeñas que las pendientes en su dirección tangencial. Si únicamente aplicamos el ajuste de mínimos cuadrados a las pendientes radiales podemos utilizar la siguiente representación:

$$\sum_{j=2}^L \left\{ \sum_{i=1}^N n(k)n(j)\rho^{n(k)+n(j)-2} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(k)\theta \bullet \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(j)\theta \right\} a_j = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N TA_p n(k)\rho^{n(k)-1} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} l(k)\theta$$

3.56

Como vemos, resulta innecesario realizar el ajuste de mínimos cuadrados para las componentes angulares, así que podemos ignorarlas. Con el procedimiento de mínimos cuadrados se minimiza la suma de los cuadrados de las aberraciones transversales radiales y no tomamos en cuenta la existencia de aberraciones transversales angulares. Cabe aclarar que si existe la posibilidad de obtener

las aberraciones transversales angulares, se puede aplicar el ajuste de mínimos cuadrados de la misma manera, lo cual también nos proporcionara más información sobre los coeficientes del frente de onda, adicionando más precisión a nuestros cálculos.

Para explicar mejor esto podemos usar un caso particular de una pantalla de Hartmann, en la cual, sus puntos se encuentran sobre un anillo cercano del borde de entrada o salida de la pupila. En este caso, la variable ρ es una constante igual a ρ_0 (semidiámetro de la pupila), esto es posible cuando necesitamos medir aberraciones como curvatura, astigmatismo y astigmatismo con orientación en eje sobre una superficie esfero- cilíndrica o toroidal. Bajo estas condiciones podemos reformular la ecuación de ajuste de mínimos cuadrados en coordenadas cartesianas como:

$$\sum_{j=2}^6 \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_j(x,y)}{\partial x} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_j(x,y)}{\partial y} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \right) \right\} a_j = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} + TA_y \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \right) \quad 3.57$$

En este caso, es necesaria la resolución de las ecuaciones para cinco variables, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6 , las cuales son los coeficientes de un polinomio de segundo orden, en nuestro caso, para obtener las aberraciones de curvatura, astigmatismo y astigmatismo con orientación en eje. Como sabemos, cada uno de los puntos nos proporciona dos medidas, las pendientes en el sentido radial y angular de las aberraciones del frente de onda. Por lo tanto, necesitamos tener un mínimo de tres puntos, con los cuales obtenemos seis medidas. Estas nuevas ecuaciones pueden ser escritas usando los valores de las funciones $g_j(x,y)$ de la Tabla 3.7. Para el primer caso cuando $k=2$ obtenemos la ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} \right) a_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} \right) a_3 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_4(x,y)}{\partial y} \right) a_4 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y} \right) a_5 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_6(x,y)}{\partial y} \right) a_6 = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N TA_y \quad 3.58$$

La segunda ecuación cuando $k=3$ es:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} \right) a_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} \right) a_3 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_4(x,y)}{\partial x} \right) a_4 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x} \right) a_5 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_6(x,y)}{\partial x} \right) a_6 = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N TA_x \quad 3.59$$

La tercera ecuación cuando $k=4$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} y \right) a_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} y \right) a_3 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_4(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial g_4(x,y)}{\partial y} y \right) a_4 \\ + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y} y \right) a_5 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_6(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial g_6(x,y)}{\partial y} y \right) a_6 = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N (TA_x x + TA_y y) \end{aligned} \quad 3.60$$

La cuarta ecuación cuando $k = 5$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} y + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} x \right) a_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} y + \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} x \right) a_3 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_4(x,y)}{\partial x} y + \frac{\partial g_4(x,y)}{\partial y} x \right) a_4 \\ + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x} y + \frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y} x \right) a_5 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_6(x,y)}{\partial x} y + \frac{\partial g_6(x,y)}{\partial y} x \right) a_6 = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N (TA_x y + TA_y x) \end{aligned} \quad 3.61$$

Y por último, la quinta ecuación cuando $k = 6$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} x - \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} y \right) a_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} x - \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} y \right) a_3 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_4(x,y)}{\partial x} x - \frac{\partial g_4(x,y)}{\partial y} y \right) a_4 \\ + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x} x - \frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y} y \right) a_5 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g_6(x,y)}{\partial x} x - \frac{\partial g_6(x,y)}{\partial y} y \right) a_6 = \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^N (TA_x x - TA_y y) \end{aligned} \quad 3.62$$

Si utilizamos una pantalla con una distribución de puntos simétrica sobre la pupila de entrada, definimos que:

$$\sum_{i=1}^N x = \sum_{i=1}^N y = 0 \quad 3.63$$

Aplicando estas condiciones y haciendo uso de los términos $g_2(x,y)$, $g_3(x,y)$, $g_4(x,y)$, $g_5(x,y)$, $g_6(x,y)$ de la Tabla 3.8 podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$a_2 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_y \quad 3.64$$

$$a_3 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_x \quad 3.65$$

$$\begin{aligned}
& N a_4 + \left(\sum_{i=1}^N \sin 2\theta \right) a_5 + \sum_{i=1}^N (\cos 2\theta) a_6 \\
& = \frac{1}{2\rho_0^2 r_w} \sum_{i=1}^N (xTA_x + yTA_y)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\left(\sum_{i=1}^N (\sin 2\theta) \right) a_4 + N a_5 = \frac{1}{2\rho_0^2 r_w} \sum_{i=1}^N (xTA_y + yTA_x) \tag{3.67}$$

y

$$\sum_{i=1}^N (\cos 2\theta) a_4 + N a_6 = \frac{1}{2\rho_0^2 r_w} \sum_{i=1}^N (xTA_x - yTA_y) \tag{3.68}$$

Debido a que tenemos un arreglo circular de puntos simétricos separados por un ángulo constante sobre la pupila de entrada como los descritos en las Figs. 3.2 a 3.5 tenemos que:

$$\sum_{i=1}^N (\sin 2\theta) = \sum_{i=1}^N (\cos 2\theta) = 0 \tag{3.69}$$

Realizando las operaciones matemáticas pertinentes y tomando en cuenta las condiciones establecidas de nuestro sistema de simetría mencionadas, obtenemos finalmente que los valores de los coeficientes de aberración están dados por:

$$a_2 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_y \tag{3.70}$$

$$a_3 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_x \tag{3.71}$$

$$a_4 = \frac{1}{2Nr_w\rho_0^2} \sum_{i=1}^N (xTA_x + yTA_y) \quad 3.72$$

$$a_5 = \frac{1}{2Nr_w\rho_0^2} \sum_{i=1}^N (xTA_y + yTA_x) \quad 3.73$$

y

$$a_6 = \frac{1}{2Nr_w\rho_0^2} \sum_{i=1}^N (xTA_x - yTA_y) \quad 3.74$$

De esta misma manera podemos encontrar que los coeficientes de aberración también pueden ser obtenidos en coordenadas polares utilizando una transformación de coordenadas de manera que $x = \rho_0 \cos \theta$ y $y = \rho_0 \sin \theta$, definiendo el ángulo θ como:

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N} \quad 3.75$$

donde θ_0 es el ángulo en radianes del primer punto, sobre el eje x. Con esto, definimos nuestras nuevas expresiones como:

$$a_2 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_y \quad 3.76$$

$$a_3 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_x \quad 3.77$$

$$a_4 = \frac{1}{2N\rho_0r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) + TA_y \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad 3.78$$

$$a_5 = \frac{1}{2N\rho_0 r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_y \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) + TA_x \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad 3.79$$

y

$$a_6 = \frac{1}{2N\rho_0 r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) - TA_y \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad 3.80$$

4. Aplicación de la prueba de Hartmann con 3, 4 y 5 puntos.

4.1 Introducción.

Frecuentemente, en algunas pruebas a elementos ópticos o a un frente de onda es necesario medir las curvaturas (potencias) en pequeñas regiones sin tomar en cuenta las deformaciones de alto orden. Sabemos que las aberraciones de bajo y alto orden pueden estar presentes en conjunto pero en ocasiones especiales solo nos importan las de bajo orden. Por otro lado, también es interesante notar que la prueba de Hartmann se ha utilizado de una manera más simple cuando la pantalla está conformada únicamente por tres [60,61], cuatro [62,63] o incluso más puntos [64–68]. En algunos instrumentos el uso de pocos puntos es una gran ventaja ya que los instrumentos basados en la prueba de Hartmann- Shack en lugar de tener un arreglo con un gran número de lentes, implementan un diafragma con pocos agujeros o un arreglo pequeño de huecos. Una aplicación que se le ha dado a este tipo de la prueba de Hartmann modificada se puede apreciar en los instrumentos oftálmicos que son utilizados para medir las potencias de las lentes, la potencia en el vértice de la córnea o la curvatura local en una superficie esférica.

En la actualidad, existen muchos tipos de instrumentos que han sido fabricados para medir los parámetros de primer orden en frentes de onda, superficies ópticas o lentes oftálmicas. Algunos de estos instrumentos han sido fabricados bajo el principio de la prueba de Hartmann o Hartmann-Shack utilizando procedimientos modales para analizar los patrones convencionales existentes [41,42,51,69]. Suponiendo el caso en el que no todas las deformaciones del frente de onda [70] son de nuestro interés, el procedimiento se volvería más simple al reducir el número de puntos a analizar. Por ejemplo en el caso en donde solo nos interesan las aberraciones de *tilt* y las curvaturas.

Es por eso que a lo largo de este capítulo describiremos un procedimiento muy simple basado en la prueba de Hartmann que puede ser usado para únicamente realizar los pasos matemáticos necesarios con una cantidad de puntos suficientes (no más de cinco). Como comprobaremos más adelante, el procedimiento provee buenos resultados incluso cuando existe la presencia de aberraciones de alto orden.

En una lente sencilla, tal como una lente oftálmica, existen cinco parámetros que determinan completamente su forma, los cuales son dos *tilts* en la dirección ortogonal, las

curvaturas esféricas y astigmáticas y la orientación cilíndrica. En coordenadas cartesianas esto puede ser descrito de la siguiente manera:

$$W(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad 4.1$$

Como podemos notar, no es necesario incorporar términos adicionales si se supone que a) el frente de onda está libre de aberraciones con una forma esfero-cilíndrica o b) que la abertura inicial medida es pequeña comparada con el radio de curvatura medido desde el vértice. Dado esto, podemos decir que una aproximación paraxial es suficientemente precisa. En coordenadas polares, con el ángulo θ medido a partir del eje x, este frente de onda puede ser escrito también como:

$$W(\rho, \theta) = b_0 + b_1\rho \cos \theta + b_2\rho \sin \theta + b_3\rho^2 + b_4\rho^2 \sin 2\theta + b_5\rho^2 \cos 2\theta \quad 4.2$$

en donde:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 \\ b_3 &= \frac{a_3 + a_5}{2} \\ b_4 &= \frac{a_4}{2} \\ b_5 &= \frac{a_3 - a_5}{2} \end{aligned} \quad 4.3$$

Para aplicaciones optométricas u oftálmicas es conveniente expresar el frente de onda como:

$$\begin{aligned} W(\rho, \theta) &= b_0 + b_1\rho \cos \theta + b_2\rho \sin \theta + b_3\rho^2 + (b_4^2 + b_5^2)^{1/2} \rho^2 \cos(2\theta + \phi) \\ &= b_0 + b_1\rho \cos \theta + b_2\rho \sin \theta + c_s \frac{\rho^2}{2} + c_c \frac{\rho^2}{2} (1 + \cos(2\theta + \phi)) \end{aligned} \quad 4.4$$

en donde

$$\begin{aligned}
c_s &= 2 \left[b_3 - (b_4^2 + b_5^2)^{1/2} \right] \\
c_c &= 2 (b_4^2 + b_5^2)^{1/2} \\
\phi &= \frac{b_5}{b_4}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

y en donde c_s es la curvatura esférica, c_c la curvatura cilíndrica y ϕ eje de orientación cilíndrico, con respecto al eje x respectivamente.

A partir de la Ec. 4.1, si obtenemos la derivada de $W(x, y)$ con respecto a x e y , podemos obtener las expresiones para las aberraciones transversales TA_x y TA_y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{TA_x}{r} = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = a_1 + 2a_3x + a_4y
\tag{4.6}$$

y

$$\frac{TA_y}{r} = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = a_2 + a_4x + 2a_5y
\tag{4.7}$$

De la misma manera, las aberraciones transversales TA_ρ y TA_θ en coordenadas polares son:

$$\frac{TA_\rho}{r} = \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \rho} = b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 2b_3\rho + 2b_4\rho \sin 2\theta + 2b_5\rho \cos 2\theta
\tag{4.8}$$

y

$$\frac{TA_\theta}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial W(\rho, \theta)}{\partial \theta} = -b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta - 2b_4\rho \cos 2\theta + 2b_5\rho \sin 2\theta
\tag{4.9}$$

Para medir las deformaciones del frente de onda de una manera directa es posible utilizar un sensor de frente de onda como un sensor Hartmann-Shack o un interferómetro. Sin embargo una opción más simple y sencilla es utilizando los principios de la prueba de Hartmann o Hartmann-Shack de una forma reducida, en otras palabras, utilizar un patrón de Hartmann con pocos puntos. En nuestro caso proponemos el uso de un mínimo de tres puntos para

obtener cinco parámetros de aberración desconocidos. Ya que cada punto cuenta con dos pendientes en dos direcciones ortogonales, cada uno de los puntos de un patrón nos proporciona dos medidas de aberración transversal. Entonces, con dos puntos obtenemos cuatro medidas y por lo tanto, los cinco parámetros desconocidos no pueden ser calculados. Por otra parte, si tenemos tres puntos tenemos seis medidas dándonos suficiente información para calcular nuestros parámetros de aberración. También debemos tener en cuenta que estas medidas no son independientes y en el caso de utilizar más de tres puntos existe información redundante (suponiendo que no existen aberraciones de alto orden presentes).

4.2 Aplicación de la prueba de Hartmann con tres puntos.

Como una primera etapa de nuestro estudio analizaremos el caso de la prueba de Hartmann en la que únicamente tenemos tres puntos en nuestro patrón. Para realizar el análisis, etiquetamos como a , b y c cada uno de los puntos, de esta forma podemos llegar a las siguientes expresiones de las aberraciones transversales a partir de las Ecs 4.6 y 4.7:

$$\begin{aligned}
 \frac{TA_{xa}}{r} &= a_1 + 2a_3x_a + a_4y_a \\
 \frac{TA_{xb}}{r} &= a_1 + 2a_3x_b + a_4y_b \\
 \frac{TA_{xc}}{r} &= a_1 + 2a_3x_c + a_4y_c \\
 \frac{TA_{ya}}{r} &= a_2 + a_4x_a + 2a_5y_a \\
 \frac{TA_{yb}}{r} &= a_2 + a_4x_b + 2a_5y_b \\
 \frac{TA_{yc}}{r} &= a_2 + a_4x_c + 2a_5y_c
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

De las ecuaciones 4.10 podemos ver que tenemos cinco parámetros desconocidos, los cuales son los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 pero contamos con un total de seis ecuaciones, una por cada medida. Con las primeras tres ecuaciones podemos obtener los valores de a_1 , a_3 y a_4 ya que forman un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Para las tres últimas ecuaciones obtenemos los valores de los coeficientes para a_2 , a_4 y a_5 de la misma forma. Como vemos, el valor para el coeficiente a_4 es obtenido en ambos sistemas. Debemos aclarar que el

valor para el coeficiente a_4 puede ser el mismo solo en el caso de que no existiera la presencia de aberraciones de alto orden debido a que la presencia de más aberraciones altera nuestra representación. Por lo tanto, la mejor estimación para un valor más correcto del coeficiente a_4 se obtiene utilizando el promedio de ambos resultados. Entonces, resolviendo el primer sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$a_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xa}y_b - TA_{xb}y_a)(x_b y_c - x_c y_b) - (TA_{xb}y_c - TA_{xc}y_b)(x_a y_b - x_b y_a)}{(y_b - y_a)(x_b y_c - x_c y_b) - (y_c - y_b)(x_a y_b - x_b y_a)} \right] \quad 4.11$$

$$a_3 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{xa}y_b - TA_{xb}y_a)(y_c - y_b) - (TA_{xb}y_c - TA_{xc}y_b)(y_b - y_a)}{(x_a y_b - x_b y_a)(y_c - y_b) - (x_b y_c - x_c y_b)(y_b - y_a)} \right] \quad 4.12$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xa} - TA_{xb})(x_b - x_c) - (TA_{xb} - TA_{xc})(x_a - x_b)}{(x_b - x_c)(y_a - y_b) - (x_a - x_b)(y_b - y_c)} \right] \quad 4.13$$

De la misma forma, los resultados para los coeficientes a_2 , a_4 y a_5 de las últimas tres ecuaciones son:

$$a_2 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{ya}x_b - TA_{yb}x_a)(y_b x_c - y_c x_b) - (TA_{yb}x_c - TA_{yc}x_b)(y_a x_b - y_b x_a)}{(x_b - x_a)(y_b x_c - y_c x_b) - (x_c - x_b)(y_a x_b - y_b x_a)} \right] \quad 4.14$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{ya} - TA_{yb})(y_b - y_c) - (TA_{yb} - TA_{yc})(y_a - y_b)}{(x_a - x_b)(y_b - y_c) - (x_b - x_c)(y_a - y_b)} \right] \quad 4.15$$

$$a_5 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{ya}x_b - TA_{yb}x_a)(x_c - x_b) - (TA_{yb}x_c - TA_{yc}x_b)(x_b - x_a)}{(y_a x_b - y_b x_a)(x_c - x_b) - (y_b x_c - y_c x_b)(x_b - x_a)} \right] \quad 4.16$$

Como lo mencionamos anteriormente, hemos obtenido dos ecuaciones para el coeficiente a_4 y para aumentar su precisión realizaremos el promedio de las Ecs 4.13 y 4.15 de manera que tengamos que tomar en cuenta el máximo de información posible bajo nuestro arreglo de pocos puntos.

Si definimos las posiciones de los tres puntos como los vértices de un triángulo equilátero como se muestra en la Fig 4.1, las coordenadas de los puntos están definidas como:

$$\begin{aligned}
 x_a &= 0 & ; & & y_a &= \rho_0 \\
 x_b &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\rho_0 & ; & & y_b &= -\frac{1}{2}\rho_0 \\
 x_c &= \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_0 & ; & & y_c &= -\frac{1}{2}\rho_0
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

en donde ρ_0 es la distancia del origen a cada uno de los tres puntos.

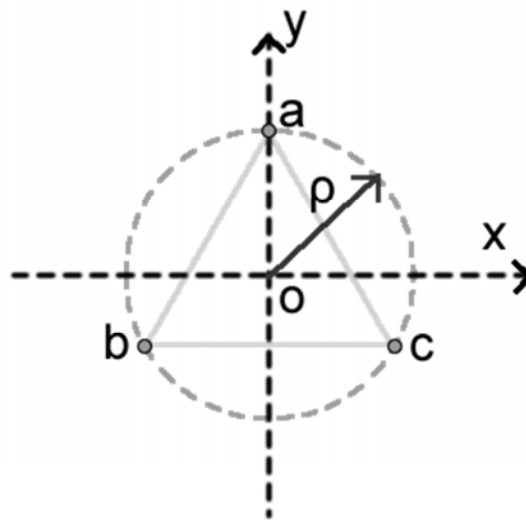


Fig. 4.1. Distribución de tres puntos en una pupila de entrada de una prueba de Hartmann o Hartmann-Shack.

Debemos aclarar que es posible también elegir otro tipo de distribución de puntos pero en nuestro caso, hemos elegido este diseño debido a su simplicidad.

Tomando las coordenadas definidas en las Ecs 4.17 y el promedio de las Ecs 4.13 y 4.15 para calcular el valor del coeficiente a_4 , podemos encontrar que los valores de nuestros coeficientes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 son:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{3r} [TA_{xa} + TA_{xb} + TA_{xc}] \\
a_2 &= \frac{1}{3r} [TA_{ya} + TA_{yb} + TA_{yc}] \\
a_3 &= \frac{1}{2\sqrt{3}r\rho_0} [TA_{xc} - TA_{xb}] \\
a_4 &= \frac{1}{2r\rho_0} \left[\frac{2TA_{xa} - TA_{xb} - TA_{xc}}{3} - \frac{TA_{yb} - TA_{yc}}{\sqrt{3}} \right] \\
a_5 &= \frac{1}{6r\rho_0} [2TA_{ya} - TA_{yb} - TA_{yc}]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.3 Aplicación de la prueba de Hartmann con cuatro puntos.

Ahora pasaremos al siguiente de los casos, en el cual aumentaremos el número de puntos en uno, lo que significa que tendremos una prueba de Hartmann de cuatro puntos. Este tipo de situaciones de tener un hartmanngrama de cuatro puntos ya había sido trabajado por Malacara [20] pero además se consideraba la presencia de aberración esférica y algunas de alto orden. En nuestro caso particular, si analizamos el caso de tener cuatro puntos, podemos notar que es posible dividir este caso en cuatro casos de tres puntos. Esto es, si utilizamos los resultados de las Ecs. 4.11 a 4.16 para los tres puntos a , b y c de nuestro conjunto de cuatro puntos obtenemos las mismas ecuaciones Ecs. 4.11 a 4.16 utilizadas anteriormente en el caso de tres puntos. Ahora, si utilizamos las mismas expresiones para el conjunto de puntos b , c y d del mismo conjunto de 4 puntos, podemos simplemente sustituir los puntos como a por b , b por c y c por d de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xb}y_c - TA_{xc}y_b)(x_cy_d - x_dy_c) - (TA_{xc}y_d - TA_{xd}y_c)(x_by_c - x_cy_b)}{(y_c - y_b)(x_cy_d - x_dy_c) - (y_d - y_c)(x_by_c - x_cy_b)} \right] \tag{4.19}$$

$$a_3 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{xb}y_c - TA_{xc}y_b)(y_d - y_c) - (TA_{xc}y_d - TA_{xd}y_c)(y_c - y_b)}{(x_by_c - x_cy_b)(y_d - y_c) - (x_cy_d - x_dy_c)(y_c - y_b)} \right] \tag{4.20}$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xb} - TA_{xc})(x_c - x_d) - (TA_{xc} - TA_{xd})(x_b - x_c)}{(x_c - x_d)(y_b - y_c) - (x_b - x_c)(y_c - y_d)} \right] \tag{4.21}$$

$$a_2 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yb}x_c - TA_{yc}x_b)(y_cx_d - y_dx_c) - (TA_{yc}x_d - TA_{yd}x_c)(y_bx_c - y_cx_b)}{(x_c - x_b)(y_cx_d - y_dx_c) - (x_d - x_c)(y_bx_c - y_cx_b)} \right] \quad 4.22$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yb} - TA_{yc})(y_c - y_d) - (TA_{yc} - TA_{yd})(y_b - y_c)}{(x_b - x_c)(y_c - y_d) - (x_c - x_d)(y_b - y_c)} \right] \quad 4.23$$

$$a_5 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{yb}x_c - TA_{yc}x_b)(x_d - x_c) - (TA_{yc}x_d - TA_{yd}x_c)(x_c - x_b)}{(y_bx_c - y_cx_b)(x_d - x_c) - (y_cx_d - y_dx_c)(x_c - x_b)} \right] \quad 4.24$$

De la misma forma, para tener la tercera combinación usamos ahora el conjunto c, d y a , para obtener:

$$a_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xc}y_d - TA_{xd}y_c)(x_dy_a - x_ay_d) - (TA_{xd}y_a - TA_{xa}y_d)(x_cy_d - x_dy_c)}{(y_d - y_c)(x_dy_a - x_ay_d) - (y_a - y_d)(x_cy_d - x_dy_c)} \right] \quad 4.25$$

$$a_3 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{xc}y_d - TA_{xd}y_c)(y_a - y_d) - (TA_{xd}y_a - TA_{xa}y_d)(y_d - y_c)}{(x_cy_d - x_dy_c)(y_a - y_d) - (x_dy_a - x_ay_d)(y_d - y_a)} \right] \quad 4.26$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xc} - TA_{xd})(x_d - x_a) - (TA_{xd} - TA_{xa})(x_c - x_d)}{(x_d - x_a)(y_c - y_d) - (x_c - x_d)(y_d - y_a)} \right] \quad 4.27$$

$$a_2 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yc}x_d - TA_{yd}x_c)(y_dx_a - y_ax_d) - (TA_{yd}x_a - TA_{ya}x_d)(y_cx_d - y_dx_c)}{(x_d - x_c)(y_dx_a - y_ax_d) - (x_a - x_d)(y_cx_d - y_dx_c)} \right] \quad 4.28$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yc} - TA_{yd})(y_d - y_a) - (TA_{yd} - TA_{ya})(y_c - y_d)}{(x_c - x_d)(y_d - y_a) - (x_d - x_a)(y_c - y_d)} \right] \quad 4.29$$

$$a_5 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{yc}x_d - TA_{yd}x_c)(x_a - x_d) - (TA_{yd}x_a - TA_{ya}x_d)(x_d - x_c)}{(y_cx_d - y_dx_c)(x_a - x_d) - (y_dx_a - y_ax_d)(x_d - x_c)} \right] \quad 4.30$$

Y por último la cuarta combinación para los puntos d, a y b obtenemos:

$$a_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xd}y_a - TA_{xa}y_d)(x_a y_b - x_b y_a) - (TA_{xa}y_b - TA_{xb}y_a)(x_d y_a - x_a y_d)}{(y_a - y_d)(x_a y_b - x_b y_a) - (y_b - y_a)(x_d y_a - x_a y_d)} \right] \quad 4.31$$

$$a_3 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{xd}y_a - TA_{xa}y_d)(y_b - y_a) - (TA_{xa}y_b - TA_{xb}y_a)(y_a - y_d)}{(x_d y_a - x_a y_d)(y_b - y_a) - (x_a y_b - x_b y_a)(y_a - y_b)} \right] \quad 4.32$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{xd} - TA_{xa})(x_a - x_b) - (TA_{xa} - TA_{xb})(x_d - x_a)}{(x_a - x_b)(y_d - y_a) - (x_d - x_a)(y_a - y_b)} \right] \quad 4.33$$

$$a_2 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yd}x_a - TA_{ya}x_d)(y_a x_b - y_b x_a) - (TA_{ya}x_b - TA_{yb}x_a)(y_d x_a - y_a x_d)}{(x_a - x_d)(y_a x_b - y_b x_a) - (x_b - x_a)(y_d x_a - y_a x_d)} \right] \quad 4.34$$

$$a_4 = \frac{1}{r} \left[\frac{(TA_{yd} - TA_{ya})(y_a - y_b) - (TA_{ya} - TA_{yb})(y_d - y_a)}{(x_d - x_a)(y_a - y_b) - (x_a - x_b)(y_d - y_a)} \right] \quad 4.35$$

$$a_5 = \frac{1}{2r} \left[\frac{(TA_{yd}x_a - TA_{ya}x_d)(x_b - x_a) - (TA_{ya}x_b - TA_{yb}x_a)(x_a - x_d)}{(y_d x_a - y_a x_d)(x_b - x_a) - (y_a x_b - y_b x_a)(x_a - x_d)} \right] \quad 4.36$$

Como lo podemos notar, ahora contamos con un conjunto de cuatro diferentes valores para a_1 , a_2 , a_3 y a_5 . Para poder obtener un valor final más preciso, tomaremos de nuevo el valor promedio de los cuatro diferentes resultados encontrados para cada uno de nuestros coeficientes. También contamos con ocho diferentes valores para el coeficiente a_4 , dos por cada una de las combinaciones de tres puntos, así que de nuevo tomaremos el promedio de los resultados. Debemos aclarar que teóricamente, los diferentes valores para cada uno de los parámetros a_i para el mismo i deberían ser idénticos únicamente si a) el frente de onda no tiene aberraciones de alto orden o b) los puntos muestreados se encuentran dentro de un círculo relativamente pequeño donde la óptica paraxial es suficientemente precisa. Si los puntos se encuentran lo suficientemente cerca para satisfacer las condiciones antes mencionadas, la precisión de nuestros resultados para la aberración esférica se incrementa al momento de utilizar información redundante.

En la Fig. 4.2 las coordenadas cartesianas para estos cuatro puntos están definidas como:

$$\begin{aligned}
 x_a &= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} & ; & & y_a &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \\
 x_b &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} & ; & & y_b &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \\
 x_c &= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} & ; & & y_c &= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \\
 x_d &= \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} & ; & & y_d &= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

4.37

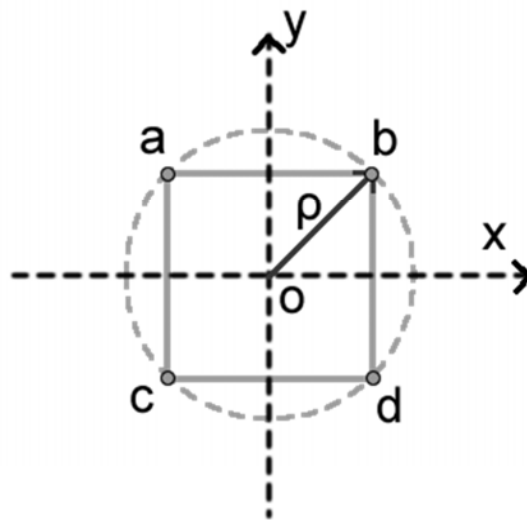


Fig. 4.2. Distribución de cuatro puntos en una pupila de entrada de una prueba de Hartmann o Hartmann-Shack.

Para estas cuatro posiciones, después de realizar los procesos matemáticos necesarios, los cuales fueron comprobados con el software *Mathematica de Wolfran*, obtenemos los siguientes resultados para nuestros cinco coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2r} [TA_{xa} + TA_{xb} + TA_{xc} + TA_{xd}] \\
a_2 &= \frac{1}{2r} [TA_{ya} + TA_{yb} + TA_{yc} + TA_{yd}] \\
a_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}r\rho_0} [-TA_{xa} + TA_{xb} - TA_{xc} + TA_{xd}] \\
a_4 &= \frac{1}{4\sqrt{2}r\rho_0} [TA_{xa} - TA_{xc} + TA_{xb} - TA_{xd} - TA_{ya} + TA_{yb} - TA_{yc} + TA_{yd}] \\
a_5 &= \frac{1}{4\sqrt{2}r\rho_0} [TA_{ya} - TA_{yc} + TA_{yb} - TA_{yd}]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

4.4 Aplicación de la prueba de Hartmann con cinco puntos.

Ahora pasamos al siguiente y último caso, una prueba de Hartmann con cinco puntos. En este caso los procesos matemáticos se vuelven más complicados si las aberraciones transversales se continúan expresando en coordenadas cartesianas como lo hemos hecho hasta el momento. Debido a esto, notamos que es más simple usar coordenadas polares definidas por las Ecs. 4.8 y 4.9 en lugar de coordenadas cartesianas. Como podemos notar en las Ecs. 4.39, las expresiones de las aberraciones transversales radiales contienen cinco parámetros desconocidos: b_1 , b_2 , b_3 , b_4 y b_5 . Las cinco medidas de aberraciones transversales radiales producen un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

$$\begin{aligned}
\frac{TA_{\rho a}}{r} &= b_1 \cos \theta_a + b_2 \sin \theta_a + 2b_3 \rho_a + 2b_4 \rho_a \sin 2\theta_a + 2b_5 \rho_a \cos 2\theta_a \\
\frac{TA_{\rho b}}{r} &= b_1 \cos \theta_b + b_2 \sin \theta_b + 2b_3 \rho_b + 2b_4 \rho_b \sin 2\theta_b + 2b_5 \rho_b \cos 2\theta_b \\
\frac{TA_{\rho c}}{r} &= b_1 \cos \theta_c + b_2 \sin \theta_c + 2b_3 \rho_c + 2b_4 \rho_c \sin 2\theta_c + 2b_5 \rho_c \cos 2\theta_c \\
\frac{TA_{\rho d}}{r} &= b_1 \cos \theta_d + b_2 \sin \theta_d + 2b_3 \rho_d + 2b_4 \rho_d \sin 2\theta_d + 2b_5 \rho_d \cos 2\theta_d \\
\frac{TA_{\rho e}}{r} &= b_1 \cos \theta_e + b_2 \sin \theta_e + 2b_3 \rho_e + 2b_4 \rho_e \sin 2\theta_e + 2b_5 \rho_e \cos 2\theta_e
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Como vemos, para resolver este sistema de ecuaciones son necesarios los valores de ρ_i y θ_i . En un sistema del tipo disco de Placido se pueden considerar un infinito número de muestras a lo largo de uno de sus anillos. Si únicamente tomamos cinco muestras de un anillo, los valores necesarios de θ_i no son conocidos precisamente, debido a la presencia de las aberraciones transversales TA_θ . Este tipo de problema se le conoce con el nombre de *skew ray error* y ha sido trabajado ya por varios autores como por ejemplo Klein [52,53], Mejía-Barbosa y Malacara-Hernández [15].

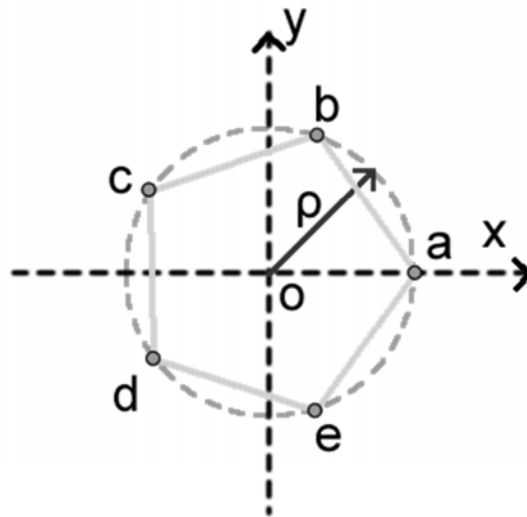


Fig. 4.3. Distribución de cinco puntos en una pupila de entrada de una prueba de Hartmann o Hartmann-Shack.

Para el caso particular de la Fig. 4.3 de cinco puntos en un círculo con un radio de R_0 , con el sistema de ecuaciones podemos definir una matriz de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 0^\circ & 2\rho_0 \cos 0^\circ \\ \cos 72^\circ & \sin 72^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 144^\circ & 2\rho_0 \cos 144^\circ \\ \cos 144^\circ & \sin 144^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 288^\circ & 2\rho_0 \cos 288^\circ \\ \cos 216^\circ & \sin 216^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 432^\circ & 2\rho_0 \cos 432^\circ \\ \cos 288^\circ & \sin 288^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 576^\circ & 2\rho_0 \cos 576^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} TA_{\rho a} \\ TA_{\rho b} \\ TA_{\rho c} \\ TA_{\rho d} \\ TA_{\rho e} \end{bmatrix} \quad 4.40$$

Expresando el mismo sistema de ecuaciones pero en términos de su ángulo más pequeño, podemos obtener un nuevo sistema de ecuaciones más simple.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\rho_0 & 0 & 2\rho_0 \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \sin 36^\circ & -2\rho_0 \cos 36^\circ \\ -\cos 36^\circ & \sin 36^\circ & 2\rho_0 & -2\rho_0 \cos 18^\circ & 2\rho_0 \sin 18^\circ \\ -\cos 36^\circ & -\sin 36^\circ & 2\rho_0 & 2\rho_0 \cos 18^\circ & 2\rho_0 \sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & -\cos 18^\circ & 2\rho_0 & -2\rho_0 \sin 36^\circ & -2\rho_0 \cos 36^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} TA_{\rho a} \\ TA_{\rho b} \\ TA_{\rho c} \\ TA_{\rho d} \\ TA_{\rho e} \end{bmatrix} \quad 4.41$$

Los valores de los coeficientes b_i obtenidos gracias a este sistema son:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{20r} \left[8TA_{\rho a} - (1 + \sqrt{5})((-3 + \sqrt{5})TA_{\rho b} + 2(TA_{\rho c} + TA_{\rho d}) + (-3 + \sqrt{5})TA_{\rho e}) \right] \\ b_2 &= \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}(TA_{\rho c} - TA_{\rho d}) + \sqrt{5 + \sqrt{5}}(TA_{\rho b} - TA_{\rho e})}{5\sqrt{2}r} \\ b_3 &= \frac{TA_{\rho a} + TA_{\rho b} + TA_{\rho c} + TA_{\rho d} + TA_{\rho e}}{10r\rho_0} \\ b_4 &= \frac{(-1 + \sqrt{5})TA_{\rho b} - 2TA_{\rho c} + 2TA_{\rho d} + (1 - \sqrt{5})TA_{\rho e}}{2\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}r\rho_0} \\ b_5 &= \frac{1}{20r\rho_0} \left[4TA_{\rho a} - (1 + \sqrt{5})TA_{\rho b} + (-1 + \sqrt{5})TA_{\rho c} + (-1 + \sqrt{5})TA_{\rho d} - (1 + \sqrt{5})TA_{\rho e} \right] \end{aligned}$$

4.42

También es posible incrementar la precisión de nuestros resultados si de igual forma utilizamos las expresiones de las aberraciones transversales tangenciales utilizando

únicamente cuatro puntos de la misma muestra, ya que estas expresiones solo contienen cuatro parámetros. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
 \frac{TA_{\theta a}}{r} &= -b_1 \sin \theta_a + b_2 \cos \theta_a - 2b_4 \rho_a \cos 2\theta_a + 2b_5 \rho_a \sin 2\theta_a \\
 \frac{TA_{\theta b}}{r} &= -b_1 \sin \theta_b + b_2 \cos \theta_b - 2b_4 \rho_b \cos 2\theta_b + 2b_5 \rho_b \sin 2\theta_b \\
 \frac{TA_{\theta c}}{r} &= -b_1 \sin \theta_c + b_2 \cos \theta_c - 2b_4 \rho_c \cos 2\theta_c + 2b_5 \rho_c \sin 2\theta_c \\
 \frac{TA_{\theta d}}{r} &= -b_1 \sin \theta_d + b_2 \cos \theta_d - 2b_4 \rho_d \cos 2\theta_d + 2b_5 \rho_d \sin 2\theta_d
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Y las definimos en una matriz como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\rho_0 & 0 \\ -\cos 18^\circ & \sin 18^\circ & 2\rho_0 \cos 36^\circ & 2\rho_0 \sin 36^\circ \\ -\sin 36^\circ & -\cos 36^\circ & -2\rho_0 \sin 18^\circ & -2\rho_0 \cos 18^\circ \\ \sin 36^\circ & -\cos 36^\circ & -2\rho_0 \sin 18^\circ & 2\rho_0 \cos 18^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} TA_{\theta a} \\ TA_{\theta b} \\ TA_{\theta d} \\ TA_{\theta e} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Cuya solución produce los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{TA_{\theta a} + TA_{\theta b}}{\sqrt{2}r} \\
 b_2 &= -\frac{TA_{\theta b} + TA_{\theta c}}{\sqrt{2}r} \\
 b_4 &= -\frac{(1 + \sqrt{2})TA_{\theta a} + 2\sqrt{2}TA_{\theta b} + (1 + \sqrt{2})TA_{\theta c} + 2\sqrt{2}TA_{\theta d}}{4r\rho_0} \\
 b_5 &= -\frac{-TA_{\theta a} - TA_{\theta c}}{4r\rho_0}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Para obtener un valor final, se toma el promedio de los valores redundantes que en este caso son los valores de b_1 , b_2 , b_4 y b_5 .

Es interesante señalar que al utilizar cinco puntos, podemos descartar todas las medidas tangenciales (angular) y únicamente es posible utilizar las medidas radiales, pero también se puede utilizar el promedio de los coeficientes redundantes para aumentar la precisión como lo

señalamos anteriormente, con la desventaja de que las expresiones se vuelven muy complicadas.

4.5 Evaluación de procedimientos encontrados.

Hasta este momento, hemos encontrado tres formas diferentes representadas en las Ecs. 4.18, 4.38, 4.42 y 4.45 para encontrar los coeficientes aberración para un frente de onda $W(x, y)$ descrito en la Ec 4.1. Bajo esta teoría que desarrollamos en este trabajo de tesis, podemos notar que el grado de complejidad aumenta al incrementar el número de puntos en el patrón de Hartmann. Es por eso que en esta sección realizaremos una comparación entre los procedimientos, aplicándolos a un mismo problema para percibir así las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Para poder evaluar cada uno de los casos, simulamos un frente de onda con aberración esférica, curvaturas astigmáticas y esféricas y con algunas aberraciones de alto orden cúbico descrito en la Ec. 4.46, de la cual calculamos sus aberraciones transversales correspondientes. A partir de las aberraciones transversales calculadas, encontraremos los coeficientes de aberración a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 utilizando los tres casos presentados anteriormente (3, 4 y 5 puntos) para dos diferentes tamaños de arreglos ($\rho_0 = 1r_x$ y $\rho_0 = 0.1r_x$). Los resultados de esta prueba se muestran en la Tabla 4.1.

$$W(x, y) = 2.5x^2 + 0.5xy + 3y^2 - 0.4xy^2 + 0.5y^3 \quad 4.46$$

De la Ec. 4.46 notamos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 2.5 \\ a_4 &= 0.5 \\ a_5 &= 3 \end{aligned} \quad 4.47$$

Tabla 4.1. Cálculo de tilt, astigmatismo y curvatura con tres, cuatro y cinco puntos

Coeficientes	$w(x, y) = 2.5x^2 + 0.5xy + 3y^2 - 0.4xy^2 + 0.5y^3$					
	Tres puntos		Cuatro puntos		Cinco puntos	
	$\rho_0/r_x = 1.0$	$\rho_0/r_x = 0.1$	$\rho_0/r_x = 1.0$	$\rho_0/r_x = 0.1$	$\rho_0/r_x = 1.0$	$\rho_0/r_x = 0.1$
a_1	-0.08	-8.00×10^{-5}	-0.008	-8.00×10^{-5}	-8.88×10^{-17}	-1.11×10^{-17}
a_2	0.03	0.0003	0.014	1.40×10^{-4}	0.0450	4.50×10^{-4}
a_3	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
a_4	0.52	0.502	0.5	0.5	0.5	0.5
a_5	3.075	3.0075	3	3	3	3

De los resultados mostrados en la Tabla 4.1 podemos notar características importantes como:

- La precisión de los resultados es más alta cuando existe un número grande de puntos. En otras palabras, utilizar cuatro puntos nos dan mejores resultados que solo usar tres y cuando usamos cinco puntos, mejoran los resultados que cuando utilizamos solo cuatro cuando el tamaño del arreglo es grande ($\rho_0 = r_x$).
- Si el tamaño del arreglo es pequeño, los resultados pueden considerarse correctos para cualquier número de puntos.
- Cuando existe la presencia de aberraciones cúbicas, los resultados mejoran gracias al promedio realizado de los datos redundantes.

Podemos deducir entonces que, si la superficie o el frente de onda que están siendo medidos contienen aberraciones de alto orden, la curvatura tiene que ser medida dentro de un círculo pequeño, en donde las aberraciones de alto orden no sean tan notables. Por otro lado, para incrementar la sensibilidad de las medidas, es conveniente tener una gran cantidad de puntos. Cuanto más grande sea el número de puntos en nuestra prueba, mayor será la precisión del cálculo de las aberraciones.

Por lo tanto, cuando deseamos tener una buena precisión en nuestros resultados y nuestro tamaño del arreglo es pequeño ($\rho_0 \leq 0.1r_x$), se recomienda usar la prueba de tres puntos. En caso contrario, cuando tenemos un tamaño del arreglo de puntos grande ($\rho_0 \geq 0.1r_x$) es más recomendable utilizar la prueba con cinco puntos. Y en el caso en donde el frente de

onda que se está analizando tiene aberraciones de alto orden, es recomendable utilizar un arreglo pequeño ($\rho_0 \leq 0.1r_x$) y una pantalla de cinco de puntos.

A manera de aplicación de nuestras expresiones encontradas en el desarrollo de este capítulo, es posible utilizarlas en el diseño de instrumentos como lensómetros optométricos o keratómetros corneales cuyo objetivo sea el de medir la potencia esférica, el astigmatismo y la orientación de los ejes. De igual forma, también pueden ser utilizados para medir el astigmatismo fuera de eje de superficies esféricas por ejemplo en un espejo hiperboloide simétrico.

Otra posible aplicación es la producción de un mapa de potencia esférica, astigmática y orientación de los ejes en lentes oftálmicas progresivas. En este caso se puede utilizar un arreglo de puntos el cual forme un patrón de celdas cuadradas o hexagonales como se ilustra en la Fig 4.4. En el caso de utilizar el arreglo cuadrado de la Fig 4.4a se recomienda utilizar las expresiones definidas para cuatro puntos descritas en las Ecs 4.38. En el caso de utilizar el arreglo hexagonal (Fig 4.4b), es más simple utilizar las expresiones definidas para pruebas con tres puntos (Ec. 4.16).

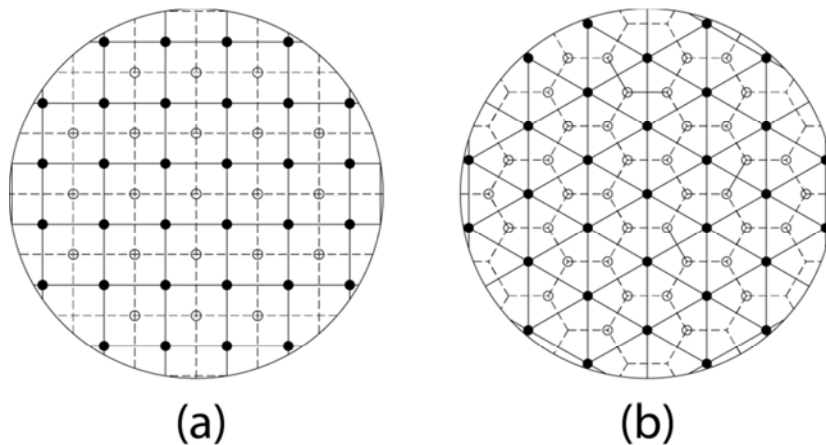


Fig. 4.4.- Ejemplo de distribuciones de puntos de una pantalla de Hartmann, a) arreglo cuadrado de puntos, b) arreglo hexagonal de puntos.

5. Conclusiones generales.

5.1 Aspectos generales

Por muchos años, la prueba de Hartmann ha sido una de las pruebas ópticas más sencillas y fáciles de aplicar. Con el tiempo y con el desarrollo de nuevas tecnologías, la prueba de Hartmann se ha ido modificando y evolucionando creando así nuevas versiones de ella, claro ejemplo de esto es la prueba de Hartmann-Shack o su versión tecnológica ya muy comúnmente utilizado en los laboratorios, el sensor de frente de onda Hartmann-Shack.

Para el desarrollo de este trabajo de tesis comenzamos a trabajar a partir de los fundamentos de la prueba de Hartmann analizado primero los problemas para la localización de los puntos en un hartmanngrama. Debido a esto, generamos un algoritmo fácil de aplicar para encontrar una correcta localización de los centroides de los puntos el cual nos permite trabajar de manera individual con cada uno de ellos. Gracias a esto fue posible generar una función especial para cada punto de manera que el centroide calculado sea el más adecuado según las características obtenidas del mismo.

Conociendo las coordenadas de los centroides de cada uno de los puntos generados por una prueba de Hartmann, podemos trabajar con las aberraciones transversales generadas por un frente de onda o una superficie. En nuestro caso, realizamos una nueva representación de los polinomios de aberración con el principal objetivo de que tuviera las mismas ventajas que la representación mundialmente utilizada conocida como los polinomios de *Zernike*, produciendo así una nueva generación de polinomios ortogonales adaptados para cualquier tipo de configuración de pantallas de Hartmann.

Durante el desarrollo de esta tesis, analizamos los datos que nos proporcionaba cada uno de los puntos de una prueba de Hartmann. Con esto llegamos a generar un conjunto de ecuaciones para calcular aberraciones de bajo orden con las configuraciones de pantallas de Hartmann conformadas por tres, cuatro y cinco puntos.

A lo largo de este capítulo comentaremos un conjunto de conclusiones que hemos obtenido a lo largo de este trabajo de investigación.

5.2 Localización y cálculo de centroides.

Una de las partes más importantes de la prueba de Hartmann es la localización de los puntos generados por la prueba de Hartmann. Como lo mencionamos en el Capítulo 2, este proceso puede ser realizado de diferentes formas. En nuestro caso desarrollamos un método muy sencillo que facilita la localización de los puntos (centroides) de una pantalla de Hartmann o Hartmann-Shack realizando este proceso de manera automática e inteligente. Además, el proceso demostró ser seguro y robusto con ventajas como:

- Uso de un nivel de umbral ajustable. Este aspecto puede ser muy controversial ya que al umbralizar una imagen se puede mal interpretar como una eliminación de información. En nuestro caso, el nivel de umbral únicamente es utilizado para la localización de regiones donde se encuentran los puntos generados por la prueba de Hartmann o Hartmann-Shack. Es decir que el nivel de umbral fue utilizado para realizar una primera aproximación de la localización de los puntos de interés sin eliminar ningún tipo de información. Esto nos da la ventaja de enfocar nuestro análisis a una única región de interés.
- El procedimiento de segmentación de los puntos de la pantalla de Hartmann resulta ser de gran utilidad en los casos de tener mucho ruido de fondo, ya que identifica cada uno de los puntos para trabajar con ellos de forma individual. De igual forma, en este procedimiento, al detectar que un punto no fue generado por la prueba por no encontrarse en una posición pre-estimada, se omite, tomando esta información como ruido. Esta etapa es muy importante ya que en ella se deciden cuáles son los puntos de los que debemos obtener su centroide o en otras palabras, cuáles son puntos válidos de la prueba. También en esta etapa es posible agregar más información a nuestro algoritmo, de tal manera de que sea inteligente e identifique puntos específicos adicionándole técnicas de reconocimiento de patrones.
- Una vez que las regiones han sido etiquetadas como contenedoras de puntos válidos de la prueba, se procede a realizar el cálculo de su centro de masa. Este proceso se realizó mediante la implementación de una función Gaussiana generada bajo los parámetros recabados de cada uno de los puntos, haciendo que el centro de masa a calcular fuese el ideal para cada punto.

El proceso de detección y cálculo de centroides resulta ser uno de los procesos más simples de describir pero a la vez más complicados de realizar debido a las diferentes características que pueden presentar las diferentes versiones de una prueba de Hartmann. En nuestro caso, se probó este procedimiento en diferentes tipos de imágenes como las generadas por funciones especiales utilizadas como benchmark en AG, imágenes reales obtenidas mediante un topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann e imágenes obtenidas por un sensor Hartmann-Shack, teniendo como resultados la correcta detección de todos los puntos así como un correcto cálculo de sus centroides de manera automática e inteligente en cada uno de los diferentes casos. Con esto demostramos que nuestro proceso es simple, eficiente y robusto. Además como pudimos comprobar, este procedimiento puede ser aplicado para diferentes configuraciones de la prueba de Hartmann.

5.3 Generación de polinomios ortogonales usando la prueba de Hartmann.

Debido a la evolución de la prueba de Hartmann, los métodos de integración se convirtieron en una necesidad fundamental para realizar una representación analítica de la deformación del frente de onda. Durante mucho tiempo, se han ido desarrollado una gran variedad de métodos de integración los cuales están clasificados en dos principales categorías, los métodos de integración "Modal" y "Zonal" [1].

Los métodos de integración Modales están basados en la teoría de que la deformación del frente de onda puede ser representada por una combinación lineal de funciones analíticas independientes. Los métodos de integración Modal son variados y a lo largo del tiempo han sido trabajados por muchos investigadores desde Cubalchini [42] en el año de 1979, Prieto y sus colaboradores [43], Gavrielides [44], Thibos y sus colaboradores [45], Neal y sus colaboradores [46], Aksenov y sus colaboradores [47] y Acosta y sus colaboradores [48] por mencionar algunos. En los métodos Modales se supone que el frente de onda a recuperar tiene una representación analítica que típicamente es una combinación lineal de polinomios de Zernike [1].

Una de las conclusiones más importantes a las que llegamos con el desarrollo de este trabajo de tesis es que las pendientes radiales son suficientes para realizar un proceso completo de integración. Por lo tanto, las pendientes tangenciales pueden ser omitidas. Es importante aclarar que si se desea realizar la integración con respecto a las componentes

angulares se puede realizar sin ningún problema, logrando con esto un aumento en la cantidad de información a analizar, provocando una mayor precisión en los cálculos de los coeficientes de aberración.

Bajo esta teoría podemos decir que las deformaciones radiales que se obtienen en un sistema tipo disco de Placido [9] nos proporcionan suficiente información para realizar una recuperación completa de un frente de onda si y solo si la pendiente radial de cierto punto medido en el disco de Placido está correctamente asociada a su punto correspondiente en la pupila de salida de la cual la medida del frente de onda ha sido originada. Ya que en el método de Placido este punto solo puede ser determinado de una manera aproximada, los resultados de la integración son únicamente una aproximación.

Como lo demostramos en el Capítulo 3, las funciones de las pendientes del frente de onda se pueden representar por una combinación de polinomios ortogonales. Con esto obtenemos muchas ventajas como por ejemplo, al aplicar el método de mínimos cuadrados de una matriz diagonal, la inversión de la matriz ya no es necesaria, evitando muchos cálculos y errores que se pueden generar durante este proceso.

También, este análisis puede ser empleado para el diseño de pantallas ideales generando con esto una distribución de puntos óptima, dependiendo el tipo de frente de onda o superficie a estudiar.

Como partimos de los fundamentos de la prueba de Hartmann, estas teorías pueden ser aplicadas para diferentes superficies utilizando pruebas tanto de Hartmann como de Hartmann-Shack. Aplicar un procedimiento de mínimos cuadrados utilizando la nueva definición de las aberraciones transversales es relativamente simple ya que el procedimiento prácticamente se puede describir como la suma de los cuadrados de las diferencias que existen entre la posición de un punto calculado con la expresión analítica y la posición medida (ΔTA) obteniendo así la expresión de error a ser minimizada. Este proceso es relativamente simple y fácil de procesar con la gran ventaja que puede ser aplicado a las ecuaciones que se encuentran en función de las TA 's dadas tanto en coordenadas polares como en coordenadas cartesianas.

También desarrollamos un procedimiento completo en el que aplicamos un proceso de mínimos cuadrados simple a la información que nos proporcionaban las aberraciones transversales usando una muestra de N puntos distribuidos a lo largo de un anillo sobre la

pupila de entrada o de salida. También, se describió un método de integración Modal para integrar las aberraciones transversales de los patrones de Hartmann y Hartmann-Shack. Realizando las operaciones pertinentes y tomando en cuenta las condiciones establecidas de nuestro sistema obtenemos finalmente las expresiones para encontrar los valores de los coeficientes de las aberraciones de curvatura, astigmatismo y orientación de eje. Las expresiones encontradas fueron:

$$a_2 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_y \quad (5.1)$$

$$a_3 = \frac{1}{Nr_w} \sum_{i=1}^N TA_x \quad (5.2)$$

$$a_4 = \frac{1}{2N\rho_0r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) + TA_y \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad (5.3)$$

$$a_5 = \frac{1}{2N\rho_0r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_y \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) + TA_x \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad (5.4)$$

y

$$a_6 = \frac{1}{2N\rho_0r_w} \sum_{i=1}^N \left(TA_x \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) - TA_y \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi(i-1)}{N}\right) \right) \quad (5.5)$$

Como se puede observar, las expresiones son relativamente simples, haciendo con esto que los cálculos sean más precisos.

Como aplicaciones para este estudio podemos decir que utilizando estas expresiones se pueden crear dispositivos de nueva generación para las áreas de diagnóstico de problemas corneales así como sistemas de topografía corneal o medición de lentes progresivas por mencionar algunos.

En general, la aplicación de estas nuevas expresiones es simple, rápida y muy precisa. Con el método descrito además de poder realizar la medición de frentes de onda, podemos analizar diferentes configuraciones de pantallas de Hartmann para medir su eficiencia y facilidad en el manejo de los datos.

5.4 Coeficientes de aberración usando pantallas de Hartmann de 3, 4 y 5 puntos

Las aberraciones de bajo y alto orden pueden estar presentes de forma conjunta pero en algunas ocasiones únicamente nos importa medir las de aberraciones de bajo orden. Como pudimos probar, la prueba de Hartmann puede ser modificada en una forma más simple en donde la pantalla puede estar conformada únicamente por tres, cuatro y cinco puntos. Con esta condición, el procedimiento de análisis de los datos se vuelve más fácil ya que al reducir el número de puntos a analizar, simplificamos los procesos matemáticos obteniendo así un método sencillo y simple.

Las ecuaciones obtenidas bajo estas nuevas configuraciones de pantallas se muestran en las Ecs. 4.18, 4.38 y 4.42. Estas ecuaciones presentan la característica de que son fáciles de interpretar e implementar. En cada una de estas ecuaciones se presentan procesos matemáticos relativamente simples ya que todas se encuentran en función de las aberraciones transversales obtenidas de las tres configuraciones analizadas (tres, cuatro y cinco puntos), pero también, este análisis puede ser expandido para encontrar coeficientes de aberración de alto orden siendo el mismo proceso el que se tiene que seguir pero con la variante de que se producirá más redundancia de datos y que las expresiones se volverán más complejas.

Con este método pudimos notar que obtuvimos una alta precisión de los resultados cuando teníamos más cantidad de puntos, esto es, realizar un análisis de una pantalla de Hartmann que tiene cuatro puntos genera mejores resultados que una pantalla con tres puntos y de igual manera, una pantalla de cinco puntos nos proporciona mejores resultados que una pantalla con cuatro puntos.

Como pudimos constatar, cuando existe la presencia de aberraciones de alto orden, la precisión de los resultados aumenta gracias a la redundancia de datos. En cada uno de los tres casos, la redundancia de información fue una parte muy importante del método ya que ayuda a que los resultados de estas expresiones tengan una confianza de acierto más alta. Bajo esta misma hipótesis podemos decir que entre más puntos de medición existan, aumentamos la redundancia de información incrementando así la sensibilidad a las aberraciones.

También, es recomendable utilizar una configuración de tres puntos en los casos en los que se presenta un tamaño de arreglo pequeño para tener mejor precisión ya que en estos

casos se descarta la presencia de aberraciones de alto orden. Por otro lado, recomendamos utilizar una configuración de cinco puntos cuando se tiene un tamaño de arreglo grande, ya que aumentamos la cantidad de información y así reducir el impacto que puede tener la presencia de aberraciones de alto orden. Debemos aclarar que las tres configuraciones mostradas en este trabajo funcionan para detectar los coeficientes de aberración de bajo orden en un frente de onda o en una superficie variando en ellas únicamente la precisión de los resultados.

Todas las expresiones generadas durante el desarrollo de esta tesis pueden ser utilizadas e implementadas para el diseño de nuevos dispositivos ópticos tales como lensómetros, keratómetros corneales o autorefractores de nueva generación cuyo principal objetivo es el de medir aberraciones de *tilts* en la dirección ortogonal, las curvaturas esféricas y astigmáticas y la orientación cilíndrica.

El utilizar pantallas de Hartmann con configuraciones de pocos puntos puede llevar a la problemática de crear pantallas especiales para implementar las técnicas aquí mostradas, sin embargo es posible extender este análisis si se aplican estos mismos procedimientos en pantallas cuya configuración de puntos se extienda a más de cinco realizando múltiples procesos similares. Por ejemplo podemos utilizar pantallas existentes con configuraciones cuadradas o hexagonales como los que se muestran en la Fig. 4.4 para generar mapas topográficos de aberraciones de bajo orden. En el caso de utilizar un arreglo cuadrado de puntos, se aplican las expresiones generadas para cuatro puntos extendiendo este análisis a lo largo de distintas combinaciones de cuatro puntos. En el caso del hacer uso de un arreglo hexagonal es posible aplicar las ecuaciones obtenidas para el caso estudiado con tres puntos en el que cada uno de los puntos del arreglo hexagonal son los vértices de un triángulo y los centros de mismo son los puntos a ser evaluados.

Apéndice A

Durante el desarrollo de este trabajo de tesis se generaron diferentes productos científicos que fueron presentados en diferentes instituciones del país así como del mundo. Entre estos productos podemos destacar tres publicaciones que fueron publicadas en dos revistas indexadas así como tres trabajos presentados de en congresos en formato de presentación oral.

Trabajos publicados en revistas indexadas.

Geovanni Hernández-Gómez ; Daniel Malacara-Doblado; Zacarías Malacara-Hernández ; Daniel Malacara-Hernández; “*Modal Processing of Hartmann and Shack-Hartmann Patterns by Means of a Least Squares Fitting of the Transverse Aberrations*” Applied Optics 53 no. 31(2014) 7422-7434.

Geovanni Hernández-Gómez ; Zacarías Malacara-Hernández ; Rufino Díaz-Uribe ; Daniel Malacara-Doblado; Daniel Malacara Hernández; “*Modal Integration of Hartmann and Shack-Hartmann Patterns*”, J. Opt. Soc. Am. A 31 no. 4 (2014) 846-851.

Geovanni Hernández-Gómez ; Zacarías Malacara-Hernández ; Daniel Malacara-Hernández; “*Hartmann Tests to Measure the Spherical and Cylindrical Curvatures and the Axis Orientation of Astigmatic Lenses or Optical Surfaces*” Applied Optics 53 no. 6(2014) 1191-1199.

Trabajos en memorias de congresos.

Geovanni Hernández-Gómez ; Daniel Malacara-Doblado ; Zacarías Malacara-Hernández ; Rufino Díaz-Uribe ; Daniel Malacara-Hernández; “*Some considerations on the integration methods for Hartmann and Hartmann-Shack patterns*”. Proc. SPIE 8785, 8th Iberoamerican Optics Meeting and 11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications, 878503 (November 18, 2013);

Rangel-Fonseca, Piero, Armando Gómez-Vieyra, Daniel Malacara-Hernández, Julio C. Estrada-Rico, and Geovanni Hernández-Gómez. “*Identification of retinal cells in in-vivo high resolution images*.” Proc. SPIE 8785, 8th Iberoamerican Optics Meeting and 11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications, 87855X-1. (November 18, 2013);

Geovanni Hernández-Gómez ; Zacarías Malacara-Hernández ; Daniel Malacara-Hernández; Armando Gómez-Vieyra; “*Hartmann and Hartmann-Shack spot identification and centroid evaluation by a new efficient segmentation and thresholding algorithm*”. Proc. SPIE 8785, 8th Iberoamerican Optics Meeting and 11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications, 87855Y (November 18, 2013);

Referencias.

- [1] D. Malacara, *Optical Shop Testing (Wiley Series in Pure and Applied Optics)*. Wiley-Interscience, 2007.
- [2] B. C. Platt and R. Shack, "History and Principles of Shack-Hartmann Wavefront Sensing," *J. Refract. Surg.*, vol. 17, no. 5, pp. S573–S577, 2001.
- [3] Z. F., "Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 94, pp. 377–384, 1934.
- [4] Z. F., "Biegungstheorie des Schneidenvereahrens und seiner verbesserten Form der Phasenkontrastmethods," *Physica*, vol. 1: 689, 1934.
- [5] M. P. Rimmer and J. C. Wyant, "Evaluation of large aberrations using a lateral-shear interferometer having variable shear," *Appl. Opt.*, vol. 14, no. 1, pp. 142–150, 1975.
- [6] A. Langenbacher, T. Sauer, and B. Seitz, "Wavelet analysis for corneal topographic surface characterization," *Curr. Eye Res.*, vol. 24, no. 6, pp. 409–421, 2002.
- [7] J. W. Warnicki, P. G. Rehkopf, D. Y. Curtin, S. a Burns, R. C. Arffa, and J. C. Stuart, "Corneal topography using computer analyzed rasterstereographic images.," *Appl. Opt.*, vol. 27, no. 6, pp. 1135–40, Mar. 1988.
- [8] F. H. M. Jongsma, J. De Brabander, and F. Hendrikse, "Review and Classification of Corneal Topographers," pp. 2–19, 1999.
- [9] D. A. Atchison and G. Smith, "Optics of the human eye," 2000.
- [10] J. Hartmann, "Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen," *Zt. Instrumentenk*, vol. 20, pp. 47–58, 1900.
- [11] J. Hartmann, "Objektuvuntersuchungen," *Zt. Instrumentenk*, vol. 24, 1904.
- [12] M. Tscherning, *Die monochromatischen Aberrationen des menschlichen Auges*. 1893.
- [13] D. Malacara, *Optical Shop Testing, 2nd Edition*. 1992.
- [14] M. A. Szmigiel, A. Baryluk, and H. Kasprzak, "Analysis of images of the Placido rings reflected from the cornea of the eye," *Opt. J. Light Electron Opt.*, vol. 124, no. 14, pp. 1841–1844, 2013.
- [15] Y. Mejía-Barbosa and D. Malacara-Hernández, "Object Surface for Applying a Modified Hartmann Test to Measure Corneal Topography," *Appl. Opt.*, vol. 40, no. 31, pp. 5778–5786, Nov. 2001.
- [16] H. H. Hopkins, *Wave theory of aberrations*. Clarendon Press, 1950.

- [17] C. Leroux and C. Dainty, "Estimation of centroid positions with a matched-filter algorithm: relevance for aberrometry of the eye," *Opt. Express*, vol. 18, no. 2, pp. 1197–1206, 2010.
- [18] X. Yin, X. Li, L. Zhao, and Z. Fang, "Adaptive thresholding and dynamic windowing method for automatic centroid detection of digital Shack-Hartmann wavefront sensor," *Appl. Opt.*, vol. 48, no. 32, pp. 6088–6098, Nov. 2009.
- [19] S.-H. Baik, S.-K. Park, C.-J. Kim, and B. Cha, "A center detection algorithm for Shack Hartmann wavefront sensor," *Opt. Laser Technol.*, vol. 39, no. 2, pp. 262–267, 2007.
- [20] H. Li, H. Song, C. Rao, and X. Rao, "Accuracy analysis of centroid calculated by a modified center detection algorithm for Shack Hartmann wavefront sensor," *Opt. Commun.*, vol. 281, no. 4, pp. 750–755, 2008.
- [21] B. M. Welsh and C. S. Gardner, "Performance analysis of adaptive-optics systems using laser guide stars and slope sensors," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, no. 12, pp. 1913–1923, 1989.
- [22] J. Ares and J. Arines, "Effective noise in thresholded intensity distribution: influence on centroid statistics," *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 23, pp. 1831–1833, 2001.
- [23] J. Arines and J. Ares, "Minimum variance centroid thresholding," *Opt. Lett.*, vol. 27, no. 7, pp. 497–499, 2002.
- [24] J. Arines and J. Ares, "Significance of thresholding processing in centroid based gradient wavefront sensors: effective modulation of the wavefront derivative," *Opt. Commun.*, vol. 237, no. 4–6, pp. 257–266, 2004.
- [25] O. E. Olarte and Y. Mejía, "A morphological based method to calculate the centroid spots of Hartmann patterns," *Opt. Commun.*, vol. 260, no. 1, pp. 87–90, 2006.
- [26] N. Ostu, "A threshold selection method from gray-level histogram," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979.
- [27] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, 2nd ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [28] J. Serra, *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, 1982.
- [29] J. Serra, "Introduction to mathematical morphology," *Comput. vision, Graph. image Process.*, vol. 35, no. 3, pp. 283–305, 1986.
- [30] C. R. Giardina and E. R. Dougherty, "Morphological methods in image and signal processing," *Engelwood Cliffs Prentice Hall*, 1988, vol. 1, 1988.
- [31] F. Meyer and S. Beucher, "Morphological segmentation," *J. Vis. Commun. Image Represent.*, vol. 1, no. 1, pp. 21–46, 1990.

- [32] E. R. Dougherty, "An introduction to morphological image processing," *Tutor. texts Opt. Eng.*, 1992.
- [33] S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, and G. Rousset, "Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 371, no. 1, pp. 323–336, 2006.
- [34] G. Holst, *CCD arrays, cameras and displays*. JCD publishing, 1998.
- [35] K. L. Baker and M. M. Moallem, "Iteratively weighted centroiding for Shack- Hartmann wave-front sensors," *Opt. Express*, vol. 15, no. 8, pp. 5147–5159, 2007.
- [36] M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, and V. Michau, "Improvement of Shack-Hartmann wave-frontsensor measurement for extreme adaptive optics," *Opt. Lett.*, vol. 29, no. 23, pp. 2743–2745, 2004.
- [37] T. Fusco, M. Nicolle, G. Rousset, V. Michau, J.-L. Beuzit, and D. Mouillet, "Optimization of a Shack-Hartmann-based wavefront sensor for XAO systems," *Int. Soc. Opt. photonics*, pp. 1155–1166, 2004.
- [38] K. A. De Jong, "An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems," University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, 1975.
- [39] B. Platt and R. V Shack, "Lenticular hartmann screen," *Newsletter*, vol. 5, p. 15, 1971.
- [40] I. Ghozeil and J. E. Simmons, "Screen test for large mirrors," *Appl. Opt.*, vol. 13, no. 8, pp. 1773–1777, 1974.
- [41] W. Southwell, "Wave-front estimation from wave-front slope measurements," *JOSA*, vol. 70, no. 8, pp. 998–1006, 1980.
- [42] R. Cubalchini, "Modal wave-front estimation from phase derivative measurements," *JOSA*, vol. 69, no. 7, pp. 972–977, 1979.
- [43] P. M. Prieto, F. Vargas-martin, F. Goelz, and P. Artal, "Analysis of the performance of the Hartmann–Shack sensor in the human eye," *JOSA A*, vol. 17, no. 8, pp. 1388–1398, 2000.
- [44] A. Gavrielides, "Vector polynomials orthogonal to the gradient of Zernike polynomials," *Opt. Lett.*, vol. 7, no. 11, pp. 526–528, 1982.
- [45] L. N. Thibos, A. Bradley, and X. Hong, "A statistical model of the aberration structure of normal, well-corrected eyes," *Ophthalmic Physiol. Opt.*, vol. 22, no. 5, pp. 427–433, 2002.
- [46] D. R. Neal, J. Copland, and D. A. Neal, "Shack-Hartmann wavefront sensor precision and accuracy," in *International Symposium on Optical Science and Technology*, 2002, pp. 148–160.

- [47] V. P. Aksenov and Y. N. Isaev, "Analytical representation of the phase and its mode components reconstructed according to the wave-front slopes," *Opt. Lett.*, vol. 17, no. 17, pp. 1180–1182, 1992.
- [48] E. Acosta, S. Bará, M. A. Rama, and S. Rios, "Determination of phase mode components in terms of local wave-front slopes: an analytical approach," *Opt. Lett.*, vol. 20, no. 10, pp. 1083–1085, 1995.
- [49] V. Mahajan, "Zernike Coefficients from Wavefront Slope Data," in *Optical Imaging and Aberrations, Part III: Wavefront Analysis*, 2013, p. 448.
- [50] K. R. Freischlad and C. L. Koliopoulos, "Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 3, no. 11, pp. 1852–1861, 1986.
- [51] S. Ríos, E. Acosta, and S. Bará, "Hartmann sensing with Albrecht grids," *Opt. Commun.*, vol. 133, no. 1, pp. 443–453, 1997.
- [52] S. A. Klein, "Corneal topography reconstruction algorithm that avoids the skew ray ambiguity and the skew ray error," *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 945–962, 1997.
- [53] S. A. Klein, "Axial curvature and the skew ray error in corneal topography," *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 931–944, 1997.
- [54] M. Avendaño-Alejo and D. González-Utrera, "Null Ronchi-Hartmann test for a lens," *Opt. ...*, vol. 18, no. 20, pp. 21131–21137, 2010.
- [55] D. Malacara-Hernández, "Interferogram evaluation and wavefront fitting," in *Optical Shop Testing, 2nd ed.*, 1992.
- [56] Y. Mejía and J. C. Galeano, "Corneal topographer based on the Hartmann test," *Optom. Vis. Sci.*, vol. 86, no. 4, pp. 370–381, 2009.
- [57] Y. Mejía-barbosa, "Hartmann test of small F /# convex mirrors : cornea or aspherical contact lens," pp. 2–4.
- [58] Y. Mejia-Barbosa, "Hartmann test of small F/# convex mirrors," *Opt. Commun.*, vol. 263, pp. 17–24, 2006.
- [59] F. Zhou, X. Hong, D. T. Miller, L. N. Thibos, and A. Bradley, "Validation of a combined corneal topographer and aberrometer based on Shack-Hartmann wave-front sensing," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, no. 5, p. 683, 2004.
- [60] S. Imaizumi, "Lens meter," EP 1 679 499 A2, 2006.
- [61] K. Yoshimi, "Keratometer," 5,325,134, 1994.
- [62] T. Iwane, "Automatic lens meter," 4,779,979, 1988.

- [63] A. Hayashi, "Lens measurement apparatus providing measurements of multiple lens characteristics," 5,432,596, 1995.
- [64] Y. Ikezawa, K. Takeyuki, and Y. Eiichi, "Lens meter," EP 0 977 026, 2010.
- [65] R. K. Snook, "Surgical keratometer system for measuring surface topography of a cornea during surgery," 5,735,283, 1998.
- [66] Y. Fukuma, K. Matsumoto, Y. Ikezawa, E. Yanagi, and T. Kato, "Layout judgment apparatus and layout judgment system," 5,973,772, 1999.
- [67] M. Abitbol, E. Tederry, and E. Meimoun, "Methods and apparatus for measuring and mapping ophthalmic elements," 1999.
- [68] M. Abitbol, A. Blum, A. Halimi, and E. Meimoun, "Apparatus for mapping optical elements," 5,825,476, 1998.
- [69] S. K. Mishra, A. K. Gupta, and A. Sharma, "An ocular wavefront sensor based on binary phase element: design and analysis," *J. Mod. Opt.*, vol. 59, no. 12, pp. 1034–1048, 2012.
- [70] G. Hernández-Gómez, Z. Malacara-Hernández, and D. Malacara-Hernández, "Hartmann tests to measure the spherical and cylindrical curvatures and the axis orientation of astigmatic lenses or optical surfaces," vol. 53, no. 6, pp. 1191–1199, 2014.