

## TÉCNICAS DE MEDICIÓN TRIDIMENSIONAL APLICABLES A ROBÓTICA MÓVIL USANDO PROYECCIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA



## **DOCTORADO EN CIENCIAS**

## Estudiante: M. en C. César Augusto García Isáis

Asesor: Dr. Noé Alcalá Ochoa

Enero de 2015 León, Guanajuato, México Agradecimientos.

A mis hijos, Adrián y Valeria, que me motivan a seguir siempre adelante.

A mi madre, Carmen, que me dio la confianza y apoyo incondicional para emprender este esfuerzo.

A mi esposa Raquel, por hacer entendido la importancia de este trabajo, brindándome todo el tiempo posible para su finalización.

A mi asesor Dr. Noé Alcalá Ochoa por su tiempo, y por su persistente guía en el conocimiento que me compartió

Al Dr. Jean-Bernard Hayet, por siempre estar dispuesto a resolver dudas de un óptico intentando hacer robótica.

A los doctores Francisco Javier Cuevas de la Rosa, y Carlos Pérez López por estar en mis revisiones de tesis, y al aporte de sus invaluables comentarios.

A los doctores Francisco Javier Cuevas de la Rosa, Carlos Pérez López, Daniel Malacara Doblado, Jean-Bernard Hayet y Claudia Esteves por la revisión de este trabajo de tesis, el cual fue mejorado significativamente por sus observaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico en la realización de mis estudios de doctorado.

### Índice General

Resumen				1
Capitulo I.				
Introducción				3
Capítulo II. Localización				
2.1 Percepción				7
2.2 Selección de los sensores.				8
2.2.1 Sensores por tiempo de vuelo				9
2.2.1.1 Sensores ultrasónicos.				9
2.2.1.2 Sensores laser.				11
2.3 Modelo de mediciones				15
2.4 Representación de la posición.				16
2.5 Cinemática del robot				17
2.6 Representación de la incertidumbre en movimiento.				21
2.7 Propagación del error				23
2.8 Algoritmos de localización				25
2.8.1 Filtro de Kalman				26
2.8.2 Filtro de partículas				29
2.8.2.1 Aplicación del filtro de partículas a	la loc	alizació	n	33
2.9 Mapeo del entorno				37
2.10 Mapeo y localización simultáneo				38
2.11 Grid mapping				40
2.12 Alineación de mediciones.				41

2.12.1 Polar	•	•	42
2.13 Aplicación de los algoritmos de mapeo.			45
Referencias del capítulo.	•		52
Capítulo III. Corrección de no linealidad.			
3.1 Corrección de no linealidad por mínimos cuadrados.			59
3.2 Resultados del método			62
3.3 Corrección de no linealidad por transformada de Fourier.			70
3.4 Simulaciones numéricas			72
3.5 Resultados experimentales			75
Referencias del capítulo			82
Capítulo IV. Adquisición de datos 3D			
4.1 Recuperación de fase por método de modulación de amplitu	ud.		85
4.1.1 Resultados experimentales			89
4.2 Recuperación de fase por método de un patrón compuesto.	•	•	93
4.2.1 Resultados experimentales	•	•	100
4.3 Perfilometría utilizando particiones de fase	•		108
4.3.1 Construcción del patrón de franjas compuesto.	•	•	109
4.3.2 Resultados experimentales	•	•	113
4.3.3 Análisis numérico de resultados	•	•	120
Referencia del capítulo	•	•	123
Capítulo V.			
5.1 Conclusiones y trabajo futuro	•	•	125
Referencias del capítulo	•	•	129
Apéndice A: Propiedades de las gaussianas .			131

## Índice de figuras.

### CAPITULO II

Figura 2.1. Respuesta del sensor ultrasónico (modelo SR-510)	•	•	10
Figura 2.2 Desplazamiento de fase entre la señal enviada y la señal recibida.			12
Figura 2.3 - Sensores láser comerciales			13
Figura 2.4 Mediciones de distancia utilizando sensores ultrasónicos y laser.			14
Figura 2.5 Distribución de probabilidad generalizado para un sensor de distar	icias.		15
Figura 2.6 Representación de la posición del robot			17
Figura 2.7 Esquema de la vista superior y lateral del robot diferencial	•		18
Figura 2.8 Representación gaussiana del movimiento del robot sobre un eje			21
Figura 2.9 Distribución gaussiana en dos ejes, describiendo la posición del rob	ot.		23
Figura 2.10 Propagación de la incertidumbre en un eje para el desplazamient	o del ro	bot	24
Figura 2.11 Propagación de la incertidumbre en dos ejes para el desplazamie	nto del ı	robot	25
Figura 2.12 Aplicación del filtro de Kalman a un robot que viaja en una sola di	mensiór	۱.	28
Figura 2.13 Realización del proceso de remuestreo			31
Figura 2.14 Aplicación del muestreo de baja varianza			32
Figura 2.15 Robot utilizado para la localización			33
Figura 2.16 a) Entorno del robot y b) Mapa virtual para la localización del robo	ot.		33
Figura 2.17Distribución uniforme, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posib	les del r	robot en e	el
mapa virtual	•	•	34
Figura 2.18 Posición de las partículas después del primer ciclo, a) Robot en el	entorno	ɔ. b)	
Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.	•		35
Figura 2.19 Posición de las partículas después del segundo ciclo, a) Robot en	el entor	no. b)	25
Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.	•	•	35
Figura 2.20 Posición de las partículas después del tercer ciclo, a) Robot en el Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.	entorno	. b)	36
Figura 2.20 Posición de las partículas después del tercer ciclo, a) Robot en el Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.	entorno	. b)	36

Figura 2.21 Localización global del robot, en el mapa virtual	a) Robot e	en el ento	orno. b)	Posicion	es posib	les del ro	bot 36
Figura 2.22 Robot pioneer							45
Figura 2.23 Mapa al inicio del procedimie	nto						46
Figura 2.24 Construcción del mapa utiliza	ndo la prin	nera meo	dición.				47
Figura 2.25 Construcción del mapa utiliza	ndo 10 me	diciones		•	•		47
Figura 2.26 Construcción del mapa utiliza	ndo 25 me	diciones					48
Figura 2.27 Construcción del mapa utiliza	ndo 50 me	diciones					49
Figura 2.28 Construcción del mapa utiliza	ndo 100 m	edicione	es				49
Figura 2.29 Construcción del mapa utiliza	ndo exclus	ivament	e los dat	os de oc	lometría		50
CAPITULO III							
Figura 3.1. Bosquejo del sistema utilizado.							63
Figura 3.2. Niveles de gris capturados por la	a cámara.						63
Figura 3.3. Aplicación del método de lineali	ización.						64
Figura 3.4. Patrón de franjas capturado.							65
Figura 3.5. Fases experimentales utilizando franjas sin corregir. b) Método de Kreis apli	métodos icado a fra	de Fouri njas corr	er. a) Me regidas. (	étodo de c) Métoc	Kreis ap lo de Tal	olicado a keda. d)	<b>67</b>
Metodo independiente de las no linealidad	les.	•		•	_	•	67
Figura 3.6. Perfiles de los mapas de fase. La	as letras co	rrespon	den a la	figura 3.	5.		68
Figura 3.7. Mapas de fase experimentales o de tres pasos con las imágenes sin corregir	obtenidas ( . b) Algorit	con méto mo de tr	odos de res pasos	cambio o s con las	de fase. a imágene	a) Algoritı es	mo
corregidas. c) Método de cuatro pasos con	franjas sin	corregi	r				69
Figura 3.8. Perfiles de los mapas de fase, la	s letras coi	rrespond	len a la f	igura 3.	7.		70
Figura 3.9. Patrón de franjas simuladas cor	n variacion	es de int	ensidad	•		•	73
Figura 3.10.Resultados simulados antes de (b) Espectro de potencia	la correcci	ón de no	o linealid	lad (a) Po	erfil de la	as franjas	, 73
Figura 3.11.Resultados simulados de la con Espectro de potencia.	rección de	no linea	lidad. (a	) Perfil d	e las fra	njas (b)	74

Figura 3.12. Patrón	de franjas p	proyecta	das sob	ore un o	bjeto de	prueba	•••	•	•	75
Figura 3.13 Espect	tro de Fouri	er para l	a figura	3.12.	•	•		•	•	76
Figura 3.14. Correc	ción del pat	rón de fi	ranjas d	le la figu	ura 46. (a	a) Perfil	de las fra	anjas, (b	) Espectro	D
de potencia										77
Figura 3.15. Fases c imagines sin correg	btenidas ex ir. (b) Méto	kperimer do de Kr	ntalmer eis a im	nte con nágenes	método: corregi	s de Fou das. (c) I	rier. (a) l Vétodoc	Método I de Take	de Kreis a eda. (d)	a
Método in-sensitivo	o a no lineal	lidades.	•	•	•	•	•	·	•	79
Figura 3.16. Perfiles	s de la figura	a 3.15.	•	•					•	79
Figura 3.17. Fases o	btenidas ex	kperimer	ntalmer	nte a tra	ivés de r	nétodos	de phas	e shiftin	g methoo	ls
(a) Método de tres	pasos con f	ranjas si	n corre	gir. (b) I	Vétodo	de tres p	basos co	n franjas	s corregid	as.
(c) Método de cuat	ro pasos.									80
Figura 3.18 Perfiles	de las fases	s mostra	das en	la figura	a 3.17.					80

### CAPITULO IV

Figura 4.1. Perfiles de la proyección de franjas. A) Función de modulación $N(x, y)$ . B) Función senoidal con modulación de amplitud. C) Función senoidal sin modulación de amplitud .											
Figura 4.2. Proceso de simulación. a) Franjas proyectadas. b) Fase envuelta calculada con la ecuación 5. c) amplitud calculada con la ecuación 4.6	89										
Figura 4.3. Sistema experimental usado para la provección	90										
Figura 4.4 Franjas experimentales con variación de amplitud	91										
Figura 4.5. Resultados experimentales. a) Fase envuelta. b) Ordenes de las franjas	91										
Figura 4.6. Segmentación del orden de las franjas de la figura 4.5. a) franja de orden 0. b) pri	mer										
orden c) segundo orden. d) Tercer orden	92										
Figura 4.7. Fase desenvuelta en radianes    .    .    .    .    .	93										
Figura 4.8. Franjas experimentales. a) Patrón compuesto, b) espectro de potencia de la FFT c	le a).										
	100										
Figura 4.9 Componentes de la fase envuelta obtenidas a traves del filtraje de Fourier. a) Horizontal, b)Vertical, c)inclinada y d) Diferencia desenvuelta.	101										
Figura 4.10 Imágenes utilizadas para desenvolver $\Phi^x$ . a) Ordenes de las franjas. b) El orden obtenido de a). c) Mascara de calidad $N^D$	cero 102										

Figura 4.11 F	ase dese	nvuelta	de la f	igura 4.9	•••	•	•	•	•	•	103
Figura 4.12 I Fase envuelta	mágenes vertical.	para el c) Difere	seguno encia e	do objeto quivalen	o. a) Pat te de fa	rón com se. d) Or	puesto p den de l	oroyecta las franja	do en el as	cilindro	. b) 104
Figura 4.13. A	ltura de l	a fase re	ecupera	ada $\Phi^x_u(x)$	x, y) usa	ando la f	igura 4.1	12			105
Figura 4.14. A	ltura de l	a fase re	ecupera	ada $\Phi^x_{0u}($	(x,y), p	ara el m	étodo tr	adiciona	l de un j	patrón.	•
•	•	•	•	•	•					•	105
Figura 4.15. D	iferencia	de altur	a entre	e las figu	ras 4.13	y 4.14		•			106
Figura 4.16. P El círculo desc	erfiles tra ribe al pe	ansversa erfil calc	les de ulado o	altura pa del tubo (	ra la fig de PVC	ura 4.13	(continu	ua) y figu	ura 4.14	(puntea	da). 106
Figura 4.17 F	Perfiles lo	ngitudir	nales d	e la figura	a 4.13 (	continua	) y figur	a 4.14 (p	ounteada	a).	107
Figura 4.18. a de a).	Patrón o	de franja	is comj	puesto pa	ara alta	frecuen	cia (49 fr	ranjas) b	) Espect	ro de Fo	urier 110
Figura 4.19. a el patrón de n	) Fase en nediana f	vuelta p recuenc	ara el p ia (7 po	oatrón de eriodos).	e alta fre c) Fase	ecuencia desenvu	(49 peri Ielta calo	iodos). b culada p	) Fase e ara una	nvuelta j sola fran	oara Ija 111
·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
Figura 4.20. a frecuencia (lír	) Umbral lea punte	es obtei eada) b)	nidos p Orden	oara la fas es genera	se de ba ados.	ija frecu	encia (lír	nea cont	inua) y r	nediana	112
Figura 4.21. Fa	ase deser	nvuelta d	obtenio	da con el	método	o propue	sto.				113
Figura 4.22. E	squema d	del arma	do exp	perimenta	əl.			•			113
Figura 4.23. a	Patrón d	compues	sto pro	yectado	sobre e	l tubo de	e PVC. b)	Espectr	o de Foi	urier de a	a)
	•				•	•	•	•	•	•	114
Figura 4.24. L 23. a) Para la	as fases ( alta frecu	envuelta Iencia (8	is obte 0 perio	nidas a ti odos). b)	ravés de para la	el filtrado mediana	o del esp i frecuer	ectro de ncia (20 j	e Fouriei periodos	r de la fig s). c) Para	gura a la
baja frecuenc	ia (solam	ente un	period	lo).	•				•	•	115
Figura 4.25. a	perfil de	e la fila 2	.00 de .	N(x,y).	b) Orde	nes de la	as franja	s N(x,y	<i>י</i> ).	•	116
Fig. 4.26. Reco	onstrucci	ón tridin	nensio	nal del tu	ıbo de F	VC.					117
Figura 4.27. R Fourier tradic	esultado: ional (c y	s para lo d).	s métc	odos de p	hase sh	ifting (a	y b). Res	sultados	para el	método	de 118
Figura 4.28. E el objeto 1 a)	kperimer y el objet	itos con :o 2 c), la	objeto a fase e	s aislado envuelta	s y com para el	plejos. I objeto 1	El patrór b) y par	n compue a el obje	esto pro eto 2 d).	yectado	en 119

Fig. 4.29.	Resultados utilizando	o el méto	odo prop	ouesto: a	a) Para l	os botes	s, b) Para	a el man	iquí.	120
Fig. 4.30.	Perfiles de los botes	en la dir	ección x	a) y en	la direcc	ción y b),	, c) acer	camient	o de la	
ventana r	resaltada en b).	•							•	121

#### Resumen

Las técnicas de percepción aplicadas a robótica móvil utilizan desde sensores básicos como los sensores de impacto, los cuales se activan cuando el robot colisiona con obstáculos y así cambiar de trayectoria. Posteriormente se encuentran los sensores ultrasónicos que miden las distancias presentes entre el robot y los obstáculos con el fin de evitarlos recalculando la trayectoria a seguir antes de chocar. Otro tipo de sistemas son los sensores laser los cuales brindan una mayor resolución tanto en el rango de medición como en la cantidad de datos por escaneo. Otro tipo de sensado del entorno es a través de visión por computadora, la cual dependiendo de la aplicación puede ser pasiva (por ejemplo visión monocular o estéreo), o activa con la proyección de luz para detectar las diferentes dimensiones en el espacio de movimiento. En este sentido se tiene entre otros, la proyección de puntos o líneas proyectados con láseres, las cuales requieren de un proceso de escaneo o bien utilizando proyectores, obteniendo la información a partir de una o varias imágenes.

El objetivo de este trabajo es la adquisición de datos del entorno a través de técnicas de luz estructurada novedosas a partir de una sola imagen, ya que el movimiento del robot restringe el uso de técnicas convencionales como el cambio de fase o técnicas de Fourier, en las primeras, se requeriría que los objetos estuvieran en reposo y en la segunda no se podrían detectar alturas de los objetos en donde se tuvieran uno o más brincos de fase de  $2\pi$ . Esto con la motivación de proveer la mayor cantidad de información posible para realizar el mapeo en tres dimensiones lo más apegado a la realidad.

Las técnicas propuestas por nosotros en este trabajo son: a) la proyección de varios patrones de franjas, los cuales tienen la ventaja de obtener la información de tres dimensiones a partir de un conjunto de imágenes sin importar la altura del objeto. Y b) se hace uso de una sola imagen empleando técnicas de Fourier, las cuales proporcionan

información suficiente para un robot en movimiento para un rango de profundidad considerable.

Una de las principales causas de error en la proyección de luz estructurada es la no linealidad del sistema cámara-proyector, por lo que adicionalmente proponemos una solución para corregirla, a través de algoritmos simples.

# Capítulo I

# Introducción

En el campo de la robótica, existen dos tipos de elementos: Los brazos robóticos y los robots móviles. El trabajo que se desarrolla se centra en los sensores de percepción de estos últimos.

Los robots móviles, se pueden categorizar en robots controlados ya sea por radio control o cualquier otro tipo de sistema de manipulación llevada a cabo por algún operador. Y los robots móviles autónomos. Los robots autónomos presentan diversos retos a resolver, debido a que se requieren diferentes tipos de información para llevar a cabo la correcta navegación en un entorno que puede ser conocido o desconocido.

En el capítulo II, se presentarán los retos a los que este tipo de sistemas se enfrentan, en donde destacan los problemas de localización, el mapeo. En este sentido se realiza la solución al problema de localización de un robot de ruedas, aunque no es limitado a este tipo de robots ya que de la misma manera se pueden aplicar a robots humanoides o de patas en un entorno conocido. Los algoritmos a implementar son expuestos para modelar matemáticamente todos los errores producidos al efectuar el movimiento del robot. Adicionalmente, se describe el problema de la creación del mapa del entorno, ya que para poder localizar al robot es necesario este último, pero si éste no se conoce, no se puede determinar la posición correcta del robot, por lo tanto, se tiene que crear un mapa. En este capítulo solamente se realiza de manera práctica los algoritmos de localización y mapeo existentes, y se mencionan los métodos actuales para la digitalización de objetos y construcción de mapas en 3D.

Por otra parte, en el capítulo III, se presenta la justificación del uso de luz estructurada en los sistemas de visión para robots, en comparación con los sistemas comunes de percepción en robótica, ya sea por visión monocular, o con sistemas estéreo así como sus ventajas y desventajas, además del porqué es necesario tener un sistema de rápida adquisición de datos de información en 2D o 3D.

Debido a que el algoritmo debe de ser de cálculo rápido, es necesario recurrir al mínimo de imágenes posibles, lo que hace necesario efectuar la calibración de varios parámetros del sistema de luz estructurada previamente, entre ellos la gamma del proyector. En este capítulo, nosotros proponemos un algoritmo que hace uso de dos imágenes para corregirlo, lo que es una ventaja en comparación con métodos tradicionales en donde se hace uso de 255 imágenes o hasta 1024.

En el capítulo IV, se muestran dos métodos novedosos en cuanto a proyección de luz estructurada aplicables a robótica móvil propuestos por nosotros, en donde se hace la adquisición de la información de profundidad del entorno a través de una imagen, independientemente de que en la profundidad existan cambios de fase mayores a  $2\pi$ . Finalmente, en el capítulo V, se realiza el planteamiento de futuras investigaciones, así como las conclusiones de este trabajo. Adicionalmente en el apéndice A se presentan algunos de los fundamentos matemáticos para el capítulo II. Las publicaciones en revistas internacionales arbitradas que fueron resultado de esta investigación, se presentan en el apéndice B.

# Capítulo II

# Localización

#### Introducción.

Con el fin de conocer profundamente la problemática en cuanto a robots móviles y las necesidades de sus sensores, en este capítulo se implementan las soluciones para los problemas de localización y mapeo a partir de algoritmos existentes.

Para la manipulación de un robot móvil, es necesario conocer su ubicación en un mapa del entorno en el que se desarrolla el movimiento. Con el fin de resolver el problema de la localización, se supone que el mapa es conocido, por esta razón, la complejidad del problema disminuye.

Debido a la dificultad que un robot experimenta cuando se requiere realizar un movimiento en cuanto a la localización, se aplica la técnica divide y conquistarás, en la cual la tarea completa se divide en pequeños problemas para facilitar la solución, estos se definen como

- ~ Percepción.
- ~ Localización.
- ~ Razonamiento.
- ~ Control de movimiento

#### 2.1 Percepción.

En el campo de la percepción del entorno se cuentan con diferentes tipos de sensores que de acuerdo a las variables que miden se categorizan en *proprioceptivos* y *exteroceptivos*. Los primeros de ellos miden las variables internas del robot, tal como la velocidad de los motores, velocidad de las llantas, nivel de voltaje de la batería, entre otros. Los exteroceptivos realizan mediciones sobre el entorno del robot, es decir, la distancia existente entre obstáculos y el robot, desniveles en el piso, o sensores táctiles, radares y láseres [2.1 - 2.4]. Un ejemplo adicional de un

sensor del tipo exteroceptivo es el sistema de posicionamiento global o GPS, el cual se puede aplicar a robots autónomos bajo ciertas limitaciones. La principal es que tienen una precisión de decenas de metros, lo que imposibilita su uso en aplicaciones de escalas pequeñas tal como entornos de oficina, además de que no se puede utilizar en zonas techadas. Una alternativa, es colocar una serie de cámaras en donde el robot realizará las tareas pero esto incrementaría el costo sobre todo cuando se tiene que cubrir un área extensa, o bien, que independientemente de la localización de las cámaras, eventualmente un objeto el cual pudiera ser incluso una persona, bloqueará por un momento la visión de las cámaras provocando que por ese tiempo la localización del robot sea errónea pudiendo provocar un accidente. Debido a esto, la solución que debe ser empleada por costos, simplicidad y funcionalidad, es utilizar todos los sensores necesarios dentro del robot, incluyendo sensores proprioceptivos y exteroceptivos para lograr la correcta localización del sistema.

#### 2.2 Selección de los sensores.

Para llevar a cabo el proceso de localización, se utilizan los dos tipos de sensores, exteroceptivos y propioceptivos. Los más comunes en la odometría son los encoders ya sea colocados en los motores o bien en cada rueda, estos sistemas pueden ser:

- ~ Encoders ópticos
- ~ Encoders magnéticos
- ~ Encoders capacitivos
- ~ Encoders inductivos

Esos encoders proporcionan pulsos en niveles de voltaje digitales dependiendo de la posición del elemento a donde van sujetos pudiendo ser en las llantas, ejes o motores, y determinando de esta manera no sólo la posición sino además la velocidad. En algunos casos pueden ser útiles los

potenciómetros, que dependiendo del valor de resistencia pueden determinar tanto la posición del sistema como la velocidad de rotación. Adicionalmente se pueden utilizar brújulas electrónicas, giroscopios, e inclinómetros para determinar la correcta orientación del robot, y combinados con los encoders, obtener una aproximación de la posición del robot.

Para hacer mediciones sobre el entorno, se utilizan medidores de rango. Estos elementos activos son sensores que envían energía al entorno de diferentes maneras para posteriormente medir las variaciones que esta energía genera. Pueden ser sensores de reflectividad o los más usados sensores de rango ya sean laser o ultrasónicos que entran en la categoría de sensores de tiempo de vuelo, los cuales serán analizados en la siguiente sección. Al momento de medir velocidad, la mejor opción es utilizar sensores que utilicen el efecto Doppler.

Otros elementos recurrentes en los sistemas robóticos son los que utilizan visión, ya sea monocular, estéreo o con múltiples vistas [2.5 - 2.7] en donde se obtiene información de distancia, localización de objetos, localización de objetos fácilmente reconocibles y de posiciones definidas (landmarks), entre otros. Para la implementación de los algoritmos de localización y mapeo se utilizarán sensores por tiempo de vuelo por lo que se describen en la siguiente sección.

#### 2.2.1 Sensores por tiempo de vuelo.

#### 2.2.1.1 Sensores ultrasónicos.

Son sensores que utilizan piezoeléctricos con el fin de generar perturbaciones en el aire en frecuencias mayores a las del sonido audible, de tal manera que son imperceptibles al oído humano, en general de 40 y 180 KHz. Basan la medición de distancia en el tiempo en que la onda viaja para encontrar el objeto, mientras que este la hace regresar a otro piezoeléctrico que

convierte la señal de sonido en señal eléctrica. La distancia se puede determinar fácilmente utilizando la siguiente ecuación.

$$d = c * t, \tag{2.1}$$

en donde d es la distancia recorrida por la onda de sonido desde que sale del piezoeléctrico hasta que es nuevamente recibida por el piezoeléctrico, c es la velocidad de la onda que depende de diversos factores, y finalmente, t es el tiempo transcurrido. Finalmente la distancia del sensor al objeto se define como:

$$d = \frac{c * t}{2}, \qquad (2.2)$$

en donde *c* es la velocidad del sonido, la cual está en función de la temperatura en grados Kelvin *T*, de la constante del gas *R* y de la relación de calor especifico  $\gamma$ , y está definida como:

$$c = \sqrt{\gamma RT}.$$
(2.3)

Para trabajar con sensores ultrasónicos se deben de tomar en cuenta algunas consideraciones, la principal de ellas es que el sonido no viaja de forma directa sino que se propaga en forma de cono, generalmente a 30° en los dos sentidos, por lo que un solo sensor detecta objetos localizados dentro de un cono de apertura de 60°, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Figura 2.1. Respuesta del sensor ultrasónico modelo SRF-05. [2.24].

Se puede apreciar, además de que se tiene un cono de respuesta, que las lecturas son extremadamente ruidosas, es decir, poco precisas. También se tiene otro fenómeno a considerar, las reflexiones especulares, ya que si la onda de sonido llega a una superficie en un ángulo específico donde se tenga reflexión total, la onda nunca regresará y por lo tanto se generará una medición errónea, por lo que hay que modelar matemáticamente todos estos generadores de error en las mediciones. Finalmente en el manejo de estos sensores hay que tomar en cuenta que al emitir una señal, ésta probablemente pueda recibirse en dos o más sensores, por lo que se tendrían evidentemente datos erróneos.

#### 2.2.1.2 Sensores Laser.

Su funcionamiento es similar al de los sensores ultrasónicos, solamente que en este caso, se substituye la onda sonora por una onda de luz colimada y un receptor que pueda detectar la luz. Existen básicamente tres maneras de detectar el haz de luz. La primera basa su funcionamiento en el mismo principio que el ultrasonido: a través de un rayo pulsado se mide directamente el tiempo transcurrido desde que se emite la luz hasta que se mide. Evidentemente los tiempos de respuesta son muy pequeños, del orden de los picosegundos por lo que estos elementos están compuestos por electrónica muy específica, incrementando altamente los costos. Otro método utiliza la modulación de frecuencia. Finalmente el menos costoso y más fácil de utilizar, emplea el desplazamiento de fase para determinar la distancia.



Figura 2.2.- Desplazamiento de fase entre la señal enviada y la señal recibida.[2.23]

Generalmente, se utiliza un láser infrarrojo con longitud de onda de 824 *nm*. Esta luz se modula a una frecuencia de 5 MHz, y siendo *c* la velocidad de la luz se tiene que la longitud de la onda modulada es:

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$
(2.4)

Finalmente la distancia total recorrida por la luz, está dada por la siguiente ecuación

$$2D = \frac{\lambda}{4\pi}\theta , \qquad (2.5)$$

En donde el desfasamiento  $\theta$ , es obtenido electrónicamente. Con este método se pueden tener dos o más lecturas similares para objetos localizados a diferentes distancias puesto que la distancia depende de la fase, pero tomando en cuenta la atenuación presente a estas dos distancias se puede determinar cuál es la correcta. En la siguiente imagen se pueden observar algunos sensores laser comerciales, uno de la marca Hokuyo® con rango de medición de hasta 5 metros y un Sick®, el cual puede llegar a medir distancias de hasta 100 metros.



Figura 2.3.- Sensores láser comerciales.[2.25, 2.26]

Al igual que el sensor de ultrasonido, la distancia medida no es exacta sino que además de la medición se tiene que modelar las variaciones en la lectura con respecto al valor real, siendo por lo general proporcional a la distancia. Eso significa que se tiene una incertidumbre de medición pequeña para distancias cortas y cuando la distancia se incrementa también lo el error en las mediciones. Este sistema, sin embargo, ofrece una ventaja importante con respecto al sensor ultrasónico: la cantidad de mediciones, puesto que para cubrir los 360° alrededor del robot se tendrían como máximo 6 sensores de ultrasonido, ya que como se menciona anteriormente, cada uno de ellos cubre un rango de 60°. Para el caso de los sensores láser se tiene como manera general resoluciones de 1 o 0.5 grados. Adicionalmente la lectura ofrece una incertidumbre en varios ordenes menos de la de un sensor ultrasónico. En la siguiente figura se observan 10000 mediciones utilizando tanto el sensor ultrasónico como el sensor laser a una distancia fija de 300 centímetros, en un entorno de interiores de un edificio [2.22].



Figura 2.4.- Mediciones de distancia utilizando sensores ultrasónicos y laser[2.22].

En la primera gráfica se puede ver que es muy frecuente que por reflexiones especulares la señal emitida del sensor ultrasónico se pierda y como consecuencia se tenga el valor máximo de la medición, en este caso 500 centímetros. También se puede ver que es más frecuente que se tenga una medición menor a la real. En cambio es menos probable tener una medición de distancia mayor a la real. Finalmente se puede ver que se tiene cerca del valor de 300 centímetros la mayor cantidad de datos. Las conclusiones son, que para modelar estos datos es necesario proponer una distribución de probabilidad, la cual, se explica más ampliamente en la siguiente sección. Por otro lado, en los sensores laser, se tiene claramente la mayor cantidad de los datos cerca del valor real, pero de nueva cuenta existen datos o valores de distancia presentes en valores que no son los correctos. Nuevamente se aprecia que se tiene una mayor cantidad de datos a distancias menores que objetos localizados a distancias mayores, y casi no se tienen mediciones en la lectura de distancia máxima, es decir es mucho más insensible a las reflexiones especulares.

#### 2.3 Modelo de mediciones

Debido a la distribución de las mediciones mostradas en la figura 2.4, se deben de considerar cuatro distribuciones de probabilidad [2.22]. Las cuales se definen a continuación:

- Probabilidad de la medición correcta desde el robot.
- Probabilidad de objetos entre el robot y los obstáculos. Estos pueden ser personas en un entorno real.
- Probabilidad para una reflexión especular que de la lectura máxima.
- Distribución uniforme, modelando errores aleatorios.

Generando finalmente la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(z|x,m) = \begin{bmatrix} \alpha_{hit} \\ \alpha_{unexp} \\ \alpha_{max} \\ \alpha_{rand} \end{bmatrix}^{T} * \begin{bmatrix} P_{hit}(z|x,m) \\ P_{unexp}(z|x,m) \\ P_{max}(z|x,m) \\ P_{rand}(z|x,m) \end{bmatrix}.$$
(2.6)

Visto de manera gráfica.



Figura 2.5.- Distribución de probabilidad generalizada para un sensor de distancias[2.22].

Para cada medición del sensor se debe de utilizar la función de probabilidad mostrada en la figura 2.5 con el fin de determinar su validez, independientemente si las mediciones son obtenidas con sensores laser o bien, ultrasonidos. La única diferencia es que los valores constantes que multiplican a cada sub-distribución (mostrados en la ecuación 2.6) serán diferentes, y determinados por un proceso de calibración.

Adicionalmente a este tipo de sensores, los sistemas de visión son usados para diversas aplicaciones; uno de ellos, es que se modifica la distancia focal de la cámara tomando la misma imagen del suelo, y dependiendo de la distancia a la cual se encuentre el piso, se tendrán varias imagenes con distinta nitidez, la cual se determina a través de la detección de bordes, sabiendo a qué distancia focal corresponde la mejor imagen se puede determinar la distancia al suelo[2.23]. Existen además trabajos donde se utiliza visión monocular para obtener los datos de profundidad, utilizando el movimiento del robot para triangular distancias. Otro sistema de medición utilizando cámaras es el de visión estéreo en donde se tiene la profundidad del entorno a través de dos imágenes. Este método falla cuando no se tiene las suficiente textura para relacionar las dos imágenes, por ejemplo cuando se tiene una pared completamente blanca sin ningún objeto, estás técnicas se discutirán en mayor detalle en el capítulo V. En esta etapa del proyecto solamente se utilizan sensores de ultrasonido aplicando el modelo presentado anteriormente [2.8].

#### 2.4 Representación de la posición.

Como el robot móvil puede estar compuesto de ruedas en el caso de un vehículo, patas en el uso de un robot con morfología animal o bien, piernas en el caso de un humanoide, es importante que los algoritmos generados se puedan aplicar a diferentes sistemas, y que proporcionen una solución lo más general posible. Independientemente de su morfología, es sencillo representar la posición de un robot móvil con sus coordenadas (x, y), y además un ángulo de orientación  $(\theta)$ ,

tal y como se aprecia en la figura 2.6, tomando como marco de referencia el origen de un mapa definido. Esto es solamente para el caso en donde el robot se mueve en un entorno de dos dimensiones, es decir, en un plano, sin movimientos de elevación, como podría ser el caso de un helicóptero, cuadróptero, entre otros.



Fig. 2.6. Representación de la configuración del robot.

Con lo anterior se puede incluir la información de configuración del robot como un solo vector dado por la ecuación 2.7.

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

#### 2.5 Cinemática del robot.

La cinemática depende evidentemente de la configuración del robot, incluso del tipo de ruedas empleadas, ya que se pueden tener del tipo estándar con un solo grado de libertad (rotación solo en el eje de la llanta), ruedas locas que cuentan con 2 grados de libertad(rotación de la base y rotación en el eje de la llanta), las ruedas esféricas, las cuales permiten el movimiento en cualquier dirección sin poder aplicarle alguna fuerza de tracción, o bien ruedas mecanum, las cuales incluyen rodillos a una orientación de 45° o 90° lo que permite realizar deslizamientos en cualquier dirección, independientemente de la orientación del cuerpo principal de la rueda.

Empleando ruedas estándar, se pueden tener variadas configuraciones de geometría de la rueda en el robot, dependiendo del número de llantas a emplear, estas pueden ser:

- ~ De dos ruedas: Bicicleta, sistema diferencial.
- ~ De tres ruedas: el usado en triciclos y montacargas.
- ~ De cuatro ruedas: Sistema casi-diferencial, dirección Ackerman.

Para el desarrollo de este trabajo se utiliza el robot diferencial que consta de dos llantas dispuestas de forma paralela, y una rueda loca en la parte posterior, para permitir el giro del robot, tal y como se esquematiza en la siguiente figura.



Fig. 2.7. Esquema de la vista superior y lateral del robot diferencial.

Existen varios modelos cinemáticos para el robot diferencial, el primero de ellos utiliza la información de los sensores proprioceptivos, que son los que miden las variables internas del robot, tales como la orientación a través de brújulas, o bien encoders ópticos que permiten medir la velocidad de cada rueda. Con esta última información, el desplazamiento del robot está descrito por las siguientes ecuaciones.

$$\dot{x} = \frac{R}{2}(v_R + v_L)\cos\theta,$$
(2.8)

$$\dot{y} = \frac{R}{2}(v_R + v_L)\sin\theta,$$
(2.9)

$$\dot{\theta} = \frac{R}{L}(v_R - v_L), \tag{2.10}$$

en donde  $v_R \neq v_L$ , son las velocidades de las ruedas derecha e izquierda respectivamente, R es el radio de las llantas, L es la distancia entre las llantas, que generan los desplazamientos  $\dot{x} \neq \dot{y}$ , además de una rotación  $\dot{\theta}$ . Las ecuaciones anteriores pueden dar muy buena información de los desplazamientos y de las orientaciones a partir de la información de las llantas, sin embargo, para el cálculo de los controles necesarios para efectuar el movimiento se emplea el modelo basado en la velocidad lineal y la velocidad angular del robot, las cuales determinan los desplazamientos con las ecuaciones siguientes.

$$\dot{x} = v \cos \theta, \tag{2.11}$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \tag{2.12}$$

$$\dot{\theta} = \omega,$$
 (2.13)

donde v es la velocidad y  $\omega$  es la velocidad angular. Una vez que se conoce la trayectoria a seguir, se calculan las velocidades para cada rueda que generarán la trayectoria, utilizando las ecuaciones 2.14 y 2.15 para la rueda derecha e izquierda respectivamente.

$$v_R = \frac{2\nu + \omega L}{2R},\tag{2.14}$$

$$v_L = \frac{2v - \omega L}{2R}.$$
(2.15)

La información proporcionada por los encoders de cada rueda es de desplazamiento, por lo que para evitar hacer el cálculo de la velocidad se utiliza esta variable para generar el estado (posición), aplicando lo siguiente.

$$D_c = \frac{D_L + D_R}{2},\tag{2.16}$$

$$x' = x + D_c \cos(\theta), \tag{2.17}$$

$$y' = y + D_c \sin(\theta), \tag{2.18}$$

$$\theta' = \theta + \frac{D_R - D_L}{L},\tag{2.19}$$

donde  $D_C$  es el centro del robot,  $D_R$  y  $D_L$  son las distancias desde el centro del robot a la rueda derecha y a la rueda izquierda respectivamente, que pueden ser fácilmente calculadas a partir de la lectura de los encoders, utilizando las siguientes ecuaciones.

$$D_L = 2\pi R \frac{C_{EL}}{N},\tag{2.20}$$

$$D_R = 2\pi R \frac{C_{ER}}{N},\tag{2.21}$$

donde *C<sub>EL</sub>* y *C<sub>ER</sub>* son los conteos de los encoders izquierdo y derecho, *N* es el número de pulsos generados en una la rotación completa de la llanta. Sin embargo, a pesar de tener definida la velocidad lineal, la velocidad angular, y la distancia que viaja cada rueda, los cálculos no dejan de ser una aproximación del movimiento del robot. El principal problema es que existen deslizamientos de las ruedas al inicio del movimiento del sistema, y movimientos impredecibles al momento de terminar la trayectoria debido a la inercia, mientras que cuando la velocidad del robot es prácticamente constante se mantiene una buena aproximación de los resultados. Cuando se tiene en el robot llantas con aire, incluso la presión en cada una de ellas afecta el movimiento, ya no se tiene una posición correcta para el inicio del siguiente movimiento, y al modificar nuevamente la posición del robot, se tiene de nueva cuenta un error y por mínimo que este sea, la posición calculada después del segundo desplazamiento será nuevamente errónea, por lo tanto el error es acumulativo y difícil de calcular por todos los aspectos que interfieren en una correcta definición de la posición. La manera de encarar este problema es definir matemáticamente un modelo aplicable a todos los errores generados.

#### 2.6 Representación de la incertidumbre en movimiento.

Para simplificar la descripción del modelo se utiliza como caso especial un robot que viaja en una sola dirección. Considerando que al inicio del movimiento se conoce la posición precisa del robot, se puede aplicar la cinemática expuesta en la sección anterior para realizar la predicción de donde finalizará el movimiento el robot, tomando en cuenta que ese movimiento provocará un error. Si se repite el experimento, el robot terminará en una posición generalmente diferente a la anterior. Si se realizan *n* experimentos, la distribución de probabilidad Gaussiana, captará la media y la varianza de todos los experimentos realizados, determinando así de manera matemática un modelo de movimiento. Lo anterior se aprecia en la siguiente figura.



Figura 2.8.- Representación Gaussiana del movimiento del robot sobre un eje [2.22].

La media (50 m, en la figura anterior) se puede determinar fácilmente con los valores de entrada o bien los controles proporcionados a las ruedas. También se pueden utilizar los elementos de medición proprioceptivos tales como encoders en las ruedas, algún otro tipo de sensor o bien si se utilizan motores a pasos para el movimiento, se puede conocer de manera precisa ese dato. La varianza específica para cada robot bajo ciertas circunstancias se puede calcular de manera experimental haciendo *n* experimentos en donde el robot repita los mismos desplazamientos, midiendo la posición final para cada uno. Se puede calcular la varianza, utilizando la siguiente ecuación.

$$\sigma^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \mu)^{2}, \qquad (2.22)$$

en donde  $\mu$  es la media,  $x_i$  es cada dato obtenido en el eje x, y n es el número de experimentos realizados.

Se puede generalizar este modelo [2.9 - 2.11], cuando se trata de un robot que se desplaza en dos direcciones. De la misma manera, se tienen que realizar experimentos para poder obtener el valor de la media, para esta ocasión en dos dimensiones. Además es necesario calcular probabilidad de que el robot no llegue a la posición deseada por medio de la matriz de covarianza, la cual es la contraparte de la varianza para el caso de dos dimensiones. La ecuación para determinar la covarianza cuando se utilizan las variables (x, y) se muestra a continuación.

$$\sigma(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)], \qquad (2.23)$$

que genera una matriz de covarianza, de 2 X 2, conteniendo una varianza para x, otra para y, además de otro valor que define la relación de x y y. Con esto se pueden describir diferentes tipos de incertidumbres en los movimientos del robot, tal y como se muestra en la figura 2.9.



Figura 2.9.- Distribución gaussiana en dos ejes, describiendo la posición del robot.

#### 2.7 Propagación del error

La incertidumbre sobre la posición del robot se incrementa en cada movimiento [2.12], de tal manera que, para el robot que viaja en un solo eje y después de realizar cuatro movimientos, las densidades de probabilidad serán se aprecian en la figura 2.10. En la posición 0, donde se inicia la secuencia de movimientos, se tiene de manera muy precisa y exacta la posición del robot razón por la cual la varianza de esta primera distribución es pequeña. Cuando el robot avanza 30 metros, por los parámetros definidos anteriormente, se tiene que la incertidumbre aumenta, de esta manera, el máximo de probabilidad disminuye en el valor esperado. En el siguiente desplazamiento del robot se esperaría que llegara a 60 metros, sin embargo, el valor de incertidumbre se incrementa achatando la función Gaussiana y así sucesivamente. Más adelante se describen los algoritmos y la teoría necesaria para volver a reducir la incertidumbre del movimiento a un valor razonable, en donde se tenga finalmente la plena conciencia de la ubicación del robot en cualquier momento.



Fig. 2.10. Propagación de la incertidumbre en un eje para el desplazamiento del robot [2.22]

Esto se puede extrapolar al caso en dos dimensiones, en donde dependiendo de la matriz de covarianza para cada robot en particular, se puede propagar el error en distintas proporciones para los ejes x y y.

La manera de que se propaga el error en dos dimensiones, se puede determinar con la siguiente ecuación:

$$\Sigma_t = F \Sigma_{t-1} F^T, \tag{2.23}$$

en donde  $\Sigma_t y \Sigma_{t-1}$  representan las covarianzas para el nuevo estado y para el previo respectivamente, y *F* depende del robot y es la matriz que describe como se propaga linealmente el error. En el caso de que se tenga un sistema no lineal como es generalmente en robótica, esta matriz está dada por el Jacobiano. La propagación del error en dos dimensiones se aprecia en la figura 2.12.



Fig. 2.11. Propagación de la incertidumbre en dos dimensiones para el desplazamiento del robot.

#### 2.8 Algoritmo de localización.

Una vez que se han descrito tanto los modelos de sensores como los modelos aplicados a la propagación del error en la realización de movimientos del robot, ahora se describirán los pasos necesarios para inducir la reducción de la incertidumbre de la posición del robot. Esto se logra aplicando el filtro de Bayes [2.11 - 2.13].

El funcionamiento de este tipo de filtros requiere principalmente de dos pasos, la predicción y corrección. El primero de ellos determina bajo un rango de incertidumbre la posición que teóricamente debe de tener el robot, incluyendo el modelo de movimiento descrito previamente. El proceso de corrección utiliza los modelos de mediciones para reducir la incertidumbre. La predicción está definida como sigue:

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1},$$
(2.24)

en donde se definen "beliefs" o bien distribuciones de probabilidad sobre la posición en donde debe de estar el robot. La función  $\overline{bel}(x_t)$  representa el nuevo estado es decir la nueva posición del robot basado en el modelo de movimiento, esto es igual a la integral de la probabilidad de un nuevo estado dados los controles en el tiempo t,  $u_t$ , y dada la posición del estado anterior  $x_{t-1}$ . Mientras que el proceso de corrección está dado de la siguiente manera:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t) .$$
(2.25)

Cuando se tiene una predicción de acuerdo a la ecuación 2.24, solamente es necesario incorporar el modelo de mediciones dado por la función de probabilidad  $p(z_t|x_t)$ , para obtener la nueva posición o "belief" del robot pero ahora con una disminución en la incertidumbre en su posición,  $\eta$ solamente es una constante de proporcionalidad, esto se demuestra aplicando las propiedades A1. 7 y A1.15, del apéndice I.

#### 2.8.1 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman proporciona una solución práctica del filtro de Bayes. Determina la estimación del estado del robot con Gaussianas, definiendo el primer y segundo momento. Existe además el filtro de Kalman extendido, el cual es el filtro de Kalman agregando la corrección en las no linealidades del sistema tanto en el robot como en las mediciones. Existe además el filtro de información el cual utiliza la representación canónica de las Gaussianas. Más adelante se describe el filtro de partículas, éste último, es catalogado como un filtro no paramétrico.

El filtro de Kalman se describe como:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t U_t + \varepsilon_t, \tag{2.26}$$

en donde  $A_t$  es una matriz  $n \times n$ , donde n es la dimensión del vector de estados, la cual describe cómo evoluciona el estado de t - 1 a t sin controles o ruido.  $B_t$  es una matriz  $n \times m$ , donde m es
la dimensión del vector de control, y define como los controles afectan el estado de t - 1 a t, y finalmente  $\varepsilon_t$  es el ruido que depende del sistema analizado.

Para las mediciones se tiene:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t , \qquad (2.27)$$

en donde,  $C_t$  es una matriz  $k \times n$ , donde k es la dimensión del vector de mediciones, ésta condiciona las mediciones al estado o posición t.

La aplicación del filtro de Kalman al problema de la localización de un robot que se mueve en una sola dimensión se muestra en la siguiente figura en donde la línea roja corresponde a la posición inicial del robot, es decir un valor determinado en x = 8 y con una incertidumbre dada por la desviación estándar de 4, lo que indica que anteriormente se realizó un movimiento del robot que incrementó su incertidumbre. Adicionalmente se tiene una distribución de probabilidad de medición dada por la línea verde. En las ecuaciones A1.7 para una distribución univariada, y A1.15 para una distribución multivariada, se puede ver que si se multiplican estas dos funciones de probabilidad, la desviación estándar se ve reducida. En este caso, se genera la línea azul, la cual tiene una incertidumbre final de 2 al aplicar el filtro de Kalman, lo que produce una reducción de la incertidumbre a la mitad.



Figura 2.12. Aplicación del filtro de Kalman a un robot que viaja en una sola dimensión[2.22].

La figura anterior, muestra el caso de un robot que viaja en una dimensión, pero el proceso es aplicado de la misma manera para dos dimensiones, es decir, cuando el robot viaja en un plano.

Con el fin de reducir finalmente la incertidumbre se debe aplicar el filtro, esto es, calcular a través del proceso de predicción la posición tentativa del robot después de efectuar el movimiento dada por la media y la incertidumbre dada por la desviación estándar. Posteriormente, se efectúa el paso de la corrección utilizando la distribución de probabilidad de las mediciones, lo que reduce la incertidumbre de la posición. Finalmente, el algoritmo para realizar este procedimiento se concentra en los siguientes pasos:

Filtro de Kalman  $(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$ Predicción:  $\overline{\mu_t} = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$   $\overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$ Corrección:  $K_t = \overline{\Sigma_t} C_t^T (C_t \overline{\Sigma_t} C_t^T + Q_t)^{-1}$   $\mu_t = \overline{\mu_t} + K_t (Z_t - C_t \overline{\mu_t})$   $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \overline{\Sigma_t}$ return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

Tabla 2.1 Implementación del filtro de Kalman[2.22].

En el algoritmo de la tabla 2.1  $\mu_{t-1}$  es la media de la posición anterior,  $\Sigma_{t-1}$  es la matriz de covarianza describiendo la incertidumbre de la posición,  $u_t$  son los controles enviados al robot para moverlo y  $z_t$  son las mediciones obtenidas en la nueva posición. En el paso de la predicción  $\overline{\mu_t}$  es la media de la nueva posición,  $\overline{\Sigma}_t$  es la matriz de covarianza describiendo la incertidumbre también de la nueva posición, finalmente  $\mu_t$  es la media para la nueva posición y  $\Sigma_t$  es la covarianza reducida. Este procedimiento se aplica en cada movimiento del robot.

# 2.8.2 Filtro de partículas.

El movimiento de un robot viajando en círculos, describe una trayectoria evidentemente no lineal. Como se menciona anteriormente en la propagación del error, si se tienen distribuciones Gaussianas, los cálculos se basan en sistemas lineales (Filtro de Kalman), y si no lo son, se linealizan a través de aproximaciones (Filtro de Kalman Extendido). El modelo de mediciones, también es no lineal por lo que esto se debe de tomar en cuenta al momento de realizar la programación de los algoritmos.

El filtro de partículas es una manera de aplicar el filtro de Bayes de manera práctica a través del método de Montecarlo, utilizando muestras aleatorias de las distribuciones de probabilidad.

Además, esta técnica tiene una alta exactitud, mostrando alta eficiencia computacional. Adicionalmente, se pueden tener distribuciones de probabilidad que no son estrictamente Gaussianas, lo que es aplicable a sistemas no lineales.

Para la implementación de este tipo de filtro se definen las partículas, las cuales, aplicadas al problema de localización, son las posiciones posibles del robot. Se tiene un número finito de partículas, y estas, en su conjunto describen la aproximación de la distribución de probabilidad. El estado  $X_t$  compuesto por M partículas, está dado de la siguiente manera:

$$X_t \coloneqq x_t^{[1]}, x_t^{[2]}, \dots, x_t^{[M]},$$
(2.26)

En donde el superíndice determina el número de partícula y cada una de ellas contiene el vector de posición del robot.  $x_t^{[1]} = [x_1, y_1, \theta_1]^T$ . La posición de las partículas está dictaminada por la distribución de probabilidad, es decir, en donde se tiene una probabilidad alta, habrá mayor cantidad de partículas, en el otro sentido, cuando se tiene una probabilidad baja, se tendrá un número muy pequeño de partículas.

De manera general el filtro de partículas se describe en los siguientes puntos:

- Paso I. Se genera la predicción del nuevo estado a partir del conjunto de partículas del estado anterior y los controles, con lo que se tiene de manera general la distribución de probabilidad p(x<sub>t</sub>|u<sub>t</sub>, x<sub>t-1</sub>).
- Paso II. Se calcula para cada partícula el factor de importancia o también llamado el peso para cada partícula, a través de la inclusión de la información de las mediciones, y está dada por  $w_t^{[m]} = p(z_t | x_t^{[m]})$ .
- Paso III. Se realiza el proceso de re-muestreo, el cual reemplazará con las partículas de mayor peso aquellas cuyo peso es muy pequeño, es decir, dándole

prioridad a las partículas que le dan soporte a las mediciones adquiridas y aquellas que no, eliminarlas.

Con esto se tienen prácticamente dos distribuciones de probabilidad, una es la propuesta y la otra es la distribución objetivo, y la manera de llegar de una a otra es a partir de los pesos de importancia.

Una vez que se tienen los pesos de importancia para cada una de las partículas, se lleva a cabo el proceso de re muestreo (re-sampling) [2.15], en el cual las partículas que tienen pesos muy pequeños se eliminan y se sustituyen por partículas con un mayor peso. Las distribuciones propuesta y objetivo, se muestran en la figura 2.14, además se indican los pesos para cada partícula.





azul. [2.22].

31

En la figura 2.14 se muestra una distribución objetivo f (mostrada en rojo), así como la distribución de muestreo dada por la función g (mostrada en verde). Se pueden apreciar las particulas en azul en donde la mayor cantidad se sitúan en el pico de la distribución g, por lo que es necesario colocar un peso en cada una de ellas (ilustrado como la longitud de la barra azul). Tomando en cuenta el peso de cada una de ellas se lleva a cabo el proceso del muestreo, generando como resultado final que las partículas se coloquen en de acuerdo a la función objetivo.

Utilizando la técnica de remuestreo de baja varianza ilustrada en la figura 2.15, las partículas se agrupan en línea incluyendo la información de su peso, para realizar un procedimiento de remuestreo utilizando una distribucion uniforme, de tal manera que si se tiene una partícula con muy poco peso comparado con la sumatoria de pesos de todas las partículas, es muy poco probable que en el proceso de remuestreo se seleccione. Sin embargo, si una partícula tiene un peso relativo muy grande, en el proceso de remuestreo se generan varias muestras de esa sola partícula, dando como resultado que la nueva distribución obedece a la distribución objetivo, de la misma manera que se muestra en la figura 2.14.



Figura 2.14. Aplicación del muestreo de baja varianza[2.22].

# 2.8.2.1 Aplicación del filtro de partículas a la localización.

Para la aplicación del filtro de particulas se emplea un robot de tipo diferencial que cumple con las ecuaciones de movimiento descritas al inicio de este capítulo.



Figura 2.15.- Robot utilizado para la localización.

Para la localización, es necesario un mapa del entorno, en la siguiente figura se muestra tanto el robot colocado dentro del entorno, como el mapa creado.



Figura 2.16.- a) Entorno del robot y b) Mapa virtual para la localización del robot

Inicialmente como la posición del robot es desconocida, la distribución que describe esta situación es la distribución uniforme, la cual se muestra a continuación.



Figura 2.17.-Distribución uniforme, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.

Cada partícula es mostrada en la posición (x, y), a través de un círculo rojo, mientras que la orientación  $\theta$ , es representada por la línea azul correspondiente. Se tienen 500 muestras, las cuales entre más sean se tiene una mayor posibilidad de que alguna esté en la posición real del robot, sin embargo esto incrementa el tiempo de procesamiento computacional. En cambio, si se tienen menos muestras se tiene un tiempo de procesamiento menor pero evidentemente sacrificando la posibilidad de calcular la posición correcta. Una vez que finaliza el primer ciclo completo de movimiento, toma de mediciones y re-muestreo, se tiene que los valores posibles de localización del robot se ven reducidos considerablemente, como se puede apreciar en la siguiente figura, en donde se tienen la misma cantidad de partículas (500), solamente que varias tienen la misma posición y orientación simplificadas por el re-muestreo.

34



Figura 2.18.- Posición de las partículas después del primer ciclo, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posibles del robot en el mapa virtual

Para el segundo ciclo de re-muestreo, se tiene la siguiente figura, en donde se aprecian dos distribuciones de probabilidad que contienen la mayor cantidad de partículas. Estas sin embargo,

no corresponden a la posición real del robot.



Figura 2.19.- Posición de las partículas después del segundo ciclo, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.

En el tercer ciclo se obtienen nuevamente dos distribuciones principales y adicionalmente unas partículas que por el mismo proceso de re-muestreo siguen apareciendo aunque su peso relativo sea muy pequeño. Una de las distribuciones de probabilidad está ubicada en la posición correcta del robot sobre el mapa, mientras que la otra sigue presente porque las mediciones que se tomaron en esa posición le dan soporte a esa estimación. En este caso el número de las partículas presentes en esta segunda distribución son menores.



Figura 2.20.- Posición de las partículas después del tercer ciclo, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.

Para el quinto ciclo se tienen todas las partículas en la posición correcta del robot. Este resultado se aprecia en la figura 2.22, con lo que se resuelve el problema de la localización global. Se aprecia que las partículas forman una distribución gaussiana, y la totalidad de ellas tienen la orientación correcta.



Figura 2.21.- Localización global del robot, a) Robot en el entorno. b) Posiciones posibles del robot en el mapa virtual.

Adicionalmente se puede reducir la cantidad de partículas una vez que el robot está localizado, esto con el fin de reducir el tiempo en los cálculos, y cuando no existan partículas que le den soporte a las mediciones obtenidas se debe de incrementar el nuevamente el número de partículas. Esto también se aplica al problema de kiddnaping, es decir, cuando se tiene al robot localizado a través de algún esfuerzo externo, éste cambia de posición, se vuelve a reiniciar el algoritmo con una distribución uniforme para volver a realizar la localización.

# 2.9 Mapeo del entorno.

El resultado del anterior se pudo llevar a cabo tomando en consideración un mapa del entorno, este último realizado a través de mediciones prácticas que particularmente en este caso, y por la simplicidad del espacio, no representa ninguna dificultad [2.1 - 2.3]. Sin embargo, cuando se tiene un entorno grande en donde se va a localizar el robot esta tarea se complica [2.4] y es poco práctico realizar las mediciones manualmente. También, la complejidad se incrementa cuando se tiene un espacio completamente desconocido, por lo que es necesario implementar algoritmos de mapeo [2.5] que, a partir de mediciones del entorno generen el mapa virtual. Esto conlleva al problema de que si no se tiene la posición precisa del robot con referencia al entorno es imposible añadir nuevas mediciones e incrementar el tamaño del mapa, pero adicionalmente, para poder localizar el robot es necesario contar con el mapa, por lo que se genera un problema recurrente, es decir, se precisa del mapa para localizar el robot, pero se debe de tener la correcta localización del robot para realizar el mapa. A este problema se le conoce como Mapeo y Localización Simultáneo [2.5, 2.7] (Simultaneous Localization and Mapping). Solamente se tienen los controles del robot, y las observaciones del entorno a través, nuevamente, de distintos tipos de sensores tales como ultrasónicos o sensores láser de distancia, para de esta manera determinar tanto el mapa como la trayectoria del robot en ese mapa creado. El mapeo y localización simultaneo se puede utilizar para crear mapas en distintos ambientes desconocidos ya sea en edificios, medios submarinos, minas o incluso en planetas como Marte en donde el entorno es indudablemente inexplorado.

Existen principalmente dos vertientes en cuanto al SLAM, la primera de ellas es utilizando algunas características específicas dentro del mapa próximas al robot [2.31, 2.33], y perfectamente distinguibles unas de otras, llamadas *landmarks*. El otro tipo, es de mapas de celdas o *grid maps*, en los cuales se tienen la totalidad de las mediciones obtenidas y datos completos en cuanto a muros, y objetos, lo que por supuesto, incrementa el consumo computacional pero evidentemente incrementa la precisión.

#### 2.10 Mapeo y localización simultáneo

De la misma manera que en el proceso de mapeo se trabaja con distribuciones de probabilidad para la solución a este problema, tanto para la posición del robot como para el mapa. Existen dos maneras de llevar a cabo este procedimiento: SLAM completo y SLAM on-line, los cuales se describen por las distribuciones de probabilidad, mostradas en 2.27 y 2.28:

$$p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{1:t}),$$
 (2.27)

$$p(x_t, m | z_{1:t}, u_{1:t}).$$
 (2.28)

En la ecuación 2.27, se modela tanto la trayectoria completa  $x_{1:t}$ , dada por la totalidad de los estados del robot, como el mapa m, a través de las mediciones obtenidas en todos los estados del robot  $z_{1:t}$  y la inclusión de los controles  $u_{t:1}$  desde el tiempo t = 1, hasta t. Por lo tanto, computacionalmente hablando, se requieren mucho mayores recursos en comparación con la ecuación 2.28, en donde solamente se calcula el último estado  $x_t$ , y el mapa m, tomando de la misma manera la totalidad de mediciones y controles.

Para llevar a cabo el procedimiento se pueden utilizar las siguientes técnicas:

- Alineación de mediciones.
- Filtro de Kalman Extendido.
- Fast-SLAM
- Graph-SLAM

Como se describe anteriormente, se debe de encontrar la distribución de probabilidad  $p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{1:t})$ , y el filtro de partículas hace uso de la siguiente factorización:

$$p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{1:t-1}) = p(m | x_{1:t}, z_{1:t}) \cdot p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{1:t-1}).$$
(2.30)

A esta factorización se le conoce como Rao-Blackwellization [2.32], y FastSLAM usa esta factorización [2.33, 2.34]. FastSLAM por sus siglas en inglés, significa solución factorizada al problema de mapeo y localización simultánea. Para tener la posición del robot, como se menciona anteriormente, se trabajan con distribuciones de probabilidad, y para simplificar los cálculos se utilizan las técnicas Montecarlo, usando partículas que describen la posición del robot, donde cada una de ellas tiene su propio mapa, por lo que para realizar la implementación de este algoritmo se tienen que seguir los siguientes pasos:

Actualizar la posición de las partículas.

Incorporando los controles enviados al robot se puede predecir a través del modelado del robot, la posición de cada una de las partículas después de efectuado el movimiento.

Añadir las mediciones.

Tomando en cuenta la posición de cada partícula de la posición del robot, se predice a través del trazado de rayos, en donde van a estar los landmarks y se hace una comparación de la posición predicha con la real y con esto se asignan pesos a las partículas.

# Re-muestreo.

Con el peso de cada una de las partículas se realiza el paso de re-muestreo con el fin de eliminar las partículas que no le dan soporte a las mediciones obtenidas lo que indica una posición errónea de la partícula con respecto a la posición real del robot, y conservar aquellas que están cerca de la posición real del robot.

El problema que se puede presentar cuando se trabaja con landmarks, es que, debido a la incertidumbre en la posición del robot [2.28], un obstáculo puede darle soporte a las mediciones de dos partículas ubicadas en distinta posición, por lo que hay que tener en cuenta el problema de la asociación de datos, es decir, tomar la medición en el landmark correcto, lo cual le proporcionará al algoritmo mayor robustez.

# 2.11 Grid mapping

Lo expuesto en la sección anterior se puede ampliar para determinar el mapa mediante una rejilla o grid mapping, en donde la función de probabilidad a obtener está definida por:

$$p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(m | x_{1:t}, z_{1:t}).$$
(2.31)

Para el primer término de la factorización, o bien, la trayectoria del robot se puede calcular fácilmente a través del método de localización a través de Montecarlo, el cual utiliza métodos de generación de números aleatorios para obtener soluciones a problemas complejos, tal como se describirá más adelante en el desarrollo del filtro de partículas. Para la obtención del mapa en el segundo término, se puede hacer mediante el mapeo con posiciones conocidas o "known poses mapping", el cual es un problema trivial. De la misma manera que en el caso del mapeo utilizando

landmarks, cada partícula contiene su propio mapa, y se realiza el re-muestreo en cada ciclo utilizando su verosimilitud ayudándose de su propio mapa como referencia de orientación, lo que ocasiona que se tenga un consumo computacional alto, y un desperdicio de recursos ya que se tienen partículas que no representan la posición del robot, por lo que es necesario incluir algún medio para disminuir la incertidumbre de la predicción del movimiento, el método más utilizado para realizar esta función es el de alineación de mediciones o "scan matching" [2.38], el cual por medio de mínimos cuadrados encuentra la posición del robot más cercana tomando en cuenta las mediciones con respecto del mapa. En términos generales la alineación de datos se realiza maximizando la verosimilitud de la posición del robot y el mapa, relativos a la posición y mapa del estado anterior, esto se describe en la siguiente ecuación.

$$\widehat{x}_{t} = \frac{\arg\max}{x_{t}} \{ p(z_{t} | x_{t}, \widehat{m}^{[t-1]}) \cdot p(x_{t} | u_{t-1}, \widehat{x}_{t-1}) \},$$
(2.32)

en donde el término  $p(z_t|x_t, \hat{m}^{[t-1]})$  representa las mediciones dada la posición actual y el mapa creado hasta el estado anterior, y el término  $p(x_t|u_{t-1}, \hat{x}_{t-1})$  indica la posición del robot en el mapa dados los controles y la posición del robot en el estado anterior. Utilizando los algoritmos de scan matching, se puede obtener el mapa representando los resultados por una rejilla de los lugares libres y ocupados por los obstáculos.

# 2.12 Alineación de mediciones

Existen diferentes métodos para efectuar la alineación de mediciones [2.41 – 2.51], entre los que figuran: De punto a punto, o utilizando patrones distinguibles como líneas, esquinas a puntos, o finalmente utilizar los puntos de las mediciones para obtener nuevas líneas, o esquinas y con ellas realizar la alineación de mediciones con las obtenidas previamente. Uno de los primeros trabajos es el algoritmo iterativo del punto más cercano o ICP por sus siglas en inglés, posteriormente se incluyeron modificaciones y se obtuvieron el IMRP [2.38] y el IDC [2.52] (Iterative matching range

point e Iterative dual correspondence respectivamente), entre otros. También existe la posibilidad de trabajar los algoritmos en coordenadas cartesianas o bien, en coordenadas polares, que para el caso que se analiza, es la más adecuada ya que las mediciones que proporciona el sensor laser se encuentran en estas últimas, es decir, un rango de distancia para cada ángulo dentro del rango, por lo que utilizar el alineación de mediciones de manera polar, es la decisión más acertada.

# 2.12.1 Polar (PSM)

Para la aplicación de la alineación de datos de manera polar [2.46] se debe de pre-procesar los datos, para lo cual es necesario seguir los siguientes pasos:

- PASO I: Llevar a cabo un filtraje de los datos para así evitar el uso de datos que hayan sido causados por un error en la medición, por ejemplo cuando se tiene un reflejo especular se genera el rango máximo de la medición.
- PASO II: Realizar una segmentación de datos con el fin de prevenir la interpolación de dos objetos diferentes y por lo tanto generar un error. La segmentación se hace por medio de agrupar dos datos y calcular una ecuación de recta con ellos, la distancia de esta recta hacia el siguiente punto determina si es colineal con los anteriores, si el punto está a una distancia pequeña se agrupan estos tres datos, y se vuelve a recalcular la recta, para realizar el análisis de distancia con el siguiente dato, y así sucesivamente, etiquetando a todos los puntos que son colineales. Si un dato no es colineal se agrupa con el siguiente para de nueva cuenta iniciar el proceso pero ya etiquetado con un número de segmento distinto.

Una vez que se tienen los datos pre-procesados, es necesario realizar un procedimiento para calcular la traslación y la orientación. Para el primero de ellos, se lleva a cabo la proyección de los datos adquiridos en el marco de referencia utilizando las siguientes ecuaciones:

42

$$r'_{ci} = \sqrt{(r_{ci}\cos(\theta_c + \phi_{ci}) + x_c)^2 + (r_{ci}\sin(\theta_c + \phi_{ci}) + y_c)^2},$$
(2.33)

$$\phi'_{ci} = atan2 (r_{ci} \sin(\theta_c + \phi_{ci}) + y_c, r_{ci} \cos(\theta_c + \phi_{ci}) + x_c).$$
 (2.34)

Posteriormente se recalculan los datos utilizando interpolación para obtener el conjunto de datos  $r''_{ci}$ , vistos desde la posición del robot. Con ellos se realiza el cálculo de la traslación obteniendo los nuevos valores de la ubicación del robot ( $x_c$ ,  $y_c$ ) tratando de minimizar el cuadrado de la diferencia entre  $r_{ri} - r''_{ci}$ . Se utiliza además un parámetro de peso para reducir las contribuciones de asociaciones erróneas.

Para minimizar la sumatoria de los residuos, se aplica regresión lineal a la ecuación 2.33, una vez linealizada.

$$\Delta_{ri} \approx \frac{\partial r''_{ci}}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial r''_{ci}}{\partial y_c} \Delta y_c = \cos(\phi_{ri}) \Delta x_c + \sin(\phi_{ri}) \Delta y_c.$$
(2.35)

Las diferencias se pueden modelar de la siguiente manera:

$$(r_c^{\prime\prime} - r_r) = H \begin{bmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \end{bmatrix} + v , \qquad (2.36)$$

donde v, es el vector de ruido y H, se describe como:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial r''_{c1}}{\partial x_c} & \frac{\partial r''_{c1}}{\partial y_c} \\ \frac{\partial r''_{c2}}{\partial x_c} & \frac{\partial r''_{c2}}{\partial y_c} \end{bmatrix},$$
(2.37)

donde los puntos suspensivos representan el total de mediciones. Con eso se puede realizar la corrección de las posiciones, tanto en x, como en y, utilizando el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \end{bmatrix} = (H^T W H)^{-1} H^T W (r''_c - r_r),$$
(2.38)

donde *W*, es una matriz diagonal que contiene los pesos de cada dato, los cuales son calculados de la siguiente manera.

$$w_i = 1 - \frac{d_i^m}{d_i^m + c^{m'}}$$
(2.39)

у

$$d_i = r''_{ci} - r_{ri} \,. \tag{2.40}$$

La estimación de la orientación del robot toma ventaja de que se tienen los datos en forma polar y una rotación de los datos tanto a la izquierda como a la derecha. Esta rotación generará un cambio de un grado en alguna dirección por lo que solamente será necesario evaluar el error generado cuando se aplican estas rotaciones para poder deducir la orientación correcta.

Con este método se puede disminuir drásticamente la cantidad de partículas para representar la posición del robot, y por lo tanto los cálculos serán más rápidos ya que se tendrán por supuesto, menor cantidad de mapas asociados a las partículas.

Incluyendo este método [2.35] para generar la distribución de probabilidad de la predicción, el algoritmo de mapeo se puede dividir en cuatro pasos [2.36 – 2.37].

- Muestreo: Se puede calcular la nueva distribución de partículas a partir de la odometría. Sin embargo, utilizando el planteamiento de alineación de mediciones se genera una distribución optimizada π, con covarianza menor.
- Cálculo de pesos: Para poder realizar el proceso de re-muestreo y seleccionar las partículas que le dan mayor soporte a las mediciones es necesario implementar la siguiente ecuación, para cada una de las partículas.

$$w_t^{(i)} = \frac{p(x_{1:t}^{(i)}|z_{1:t}, u_{1:t-1})}{\pi(x_{i:t}^{(i)}|z_{1:t}, u_{1:t-1})} = \frac{p(z_t|m_{t-1}^{(i)}, x_t^{(i)})(p(x_t^{(i)}|x_{t-1}^{(i)}, u_{t-1}))}{\pi(x_t|x_{1:t-1}^{(i)}, z_{1:t}, u_{t-1})} \cdot w_{t-1}^{(i)}.$$
(3.15)

- Re-Muestreo: Dependiendo del peso que tiene cada partícula después de proceso anterior, se realiza el re-muestreo, utilizando la técnica del muestreo de baja varianza, descrita en el capítulo anterior.
- Estimación del mapa: Una vez que se tienen las nuevas partículas, se incluyen las nuevas mediciones al mapa para cada partícula, esto se realiza a través del trazado de rayos.
   Debido a que la posición de las partículas está optimizada, la inclusión de las mediciones al mapa es trivial.

# 2.13 Aplicación de los algoritmos de mapeo.

Para la aplicación de los algoritmos anteriores se hace uso de un robot pioneer 3-AT, del fabricante Mobile Robots, equipado con un sensor laser Hokuyo modelo URG-04LX-UG01, el cual se aprecia en la figura 2.26.



Figura 2.22.- Robot pioneer [2-58].

Los resultados del mapeo para el laboratorio en donde se realizó la toma de datos se muestran en la siguiente secuencia de imágenes. En la figura 2.27, se aprecia el mapa antes de iniciar el proceso

de mapeo. Se puede apreciar la imagen completamente gris en todo el entorno, lo que indica que todas las localidades contienen la probabilidad de ocupación de 0.5, lo que claramente indica que no se sabe si el espació está ocupado por algún obstáculo o si está libre para que el robot pueda moverse a través de él.



Figura 2.23. Mapa al inicio del procedimiento.

En la figura 2.28, el mapa de ocupación, se construye con la primera medición. En este ciclo no es necesario el remuestreo de las partículas ya que todas son colocadas en la posición  $(0,0,0)^T$ , lo que indica el origen del mapa en x = 0, y = 0 y  $\theta = 0$ , en las imágenes 2.29 a 2.32 se muestra el mapa de la partícula que tiene mayor peso.



Figura 2.24.- Construcción del mapa utilizando la primera medición.

Se aprecia que ya se tienen diferentes probabilidades en el mapa debido a las mediciones, en donde las partes blancas corresponden a probabilidades de 1 representando los obstáculos y las partes más obscuras indican que la probabilidad se va acercando a cero, indicando que es un espacio libre.



Figura 2.25.- Construcción del mapa utilizando 10 mediciones.

En la figura anterior se aprecia que la probabilidad de los espacios libres próximos al robot se acerca a cero, mostrándose un color más obscuro, en las siguientes figuras se muestran los mapas de ocupación para 25, 50 y 100 mediciones, en donde se aprecia cómo se añaden las nuevas mediciones al mapa.



Figura 2.26.- Construcción del mapa utilizando 25 mediciones.



Figura 2.27.- Construcción del mapa utilizando 50 mediciones.



Figura 2.28.- Construcción del mapa utilizando 100 mediciones.

La imagen 2.33, muestra los resultados del mapa de ocupación solamente utilizando los datos provenientes de la odometría del robot obtenidos a través de los sensores proprioceptivos para la posición del robot y las mediciones del sensor laser. Debido a los errores propios de la odometría, como se menciona anteriormente, el mapeo resulta erróneo puesto que no se tiene de manera definida ninguna pared del entorno. En cambio con el método expuesto, cuyo resultado final se muestra en la figura 2.32, se aprecia que el error entre el entorno y el mapa generado, disminuye considerablemente. Este mapa, aún contiene errores, sin embargo, su resolución es suficiente para que un robot móvil pueda realizar su localización, tal y como se menciona en el proceso de localización.



Figura 2.29.- Construcción del mapa utilizando exclusivamente los datos de odometría.

Para realizar el mapeo en tres dimensiones se pueden utilizar diversas técnicas. Una de ellas es con dos sensores laser apuntando en distintos planos, [2-53, 2-54, 2-55]. Sin embargo el estado del arte en técnicas de mapeo involucra cámaras RGB-D [2-56, 2-57, 2-58], las cuales además de

proporcionar información de profundidad proveen información en cuanto al color de los objetos, lo cual es imposible a partir de sensores laser de proximidad.

La idea de los algoritmos que se presentan en los siguientes capítulos es tener una cámara RGB-D a partir de proyección de luz estructurada, con el fin de que los datos obtenidos se puedan utilizar en el mapeo 3D del entorno.

En el capítulo III, se describen soluciones a una de las principales fuentes de error cuando se trabaja con luz estructurada, el parámetro gamma. Este, representa la no linealidad en un sistema de adquisición cuando se utiliza un proyector y una cámara. Posteriormente proponemos un método para eliminar los errores producidos debido a esta causa, con el fin de que los resultados de la adquisición de datos en 3D sean correctos independientemente del método que se utilice, ya sea por métodos tradicionales como cambio de fase o Fourier.

51

# Referencias.

[2.1] F. Lu and E. Milios, "Robot pose estimation in unknown environments by matching 2d range scans", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. **18**, pp. 249 – 275, 1997.

[2.2] D. Fox, W. Burgard, F. Dellaert, and S. Thrun, "Monte Carlo localization: Efficient position estimation for mobile robots", in *Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence* (AAAI'99), July 1999.

[2.3] S. Thrun, D. Fox, and W. Burgard, "A probabilistic approach to concurrent mapping and localization for mobile robots", *Machine Learning*, vol. **31**, pp. 29–53, 1998.

[2.4] Lingemann, K., Surmann, H., Nuchter, A., and Hertzberg, J. (2005). "High-speed laser localization for mobile robots", *Journal of Robotics & Autonomous Systems*, **51**(4):275–296.

[2.5] H.-M. Gross, A. Koenig, C. Schroeter, and H.-J. Boehme, "Omnivision-based probabilistic selflocalization for a mobile shopping assistant continued", *in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst.*, Las Vegas, NV, Oct. 2003, pp. 1505–1511.

[2.6] F. Hundelschausen, S. Behnke, and R. Rojas, "An omnidirectional vision system that finds and tracks color edges and blobs", *in Proc. RoboCup-2001: Robot Soccer World Cup V*, A. Birk, S. Coradeschi, and S. Tadokoro, Eds., pp. 374–379.

[2.7] S. Lenser and M. Veloso, "Visual sonar: Fast obstacle avoidance using monocular vision", in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst.*, Las Vegas, NV, Oct. 2003, pp. 886–891.

[2.8] Rees, W.G, "Physical principles or remote sensing", Cambridge, UK. Cambridge Univ. Press.

[2.9] F. Lu, and E. Milios, "Globally consistent range scan alignment for environment mapping", *Autonomous Robots*, vol. **43**, pp. 333-349, 1997.

[2.10] Olson, C. "Probabilistic self-localization for mobile robots", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **16**, pp. 55–66, 2000.

52

[2.11] D. Fox, W. Burgard, and S. Thrun. "Active markov localization for mobile robots", *Robotics and Autonomous Systems*, vol. **25**, pp. 195-207, 1998.

[2.12] S. Thrun, D. Fox, W. Burgard and F. Dellaert, "Robust Monte Carlo localization for mobile robots", *Proc. of National Conference on Artificial Intelligence*, vol. **128**, 2001.

[2.13] D. Fox, W. Burgard, F. Dellaert, and S. Thrun, "Monte Carlo Localization: Efficient position estimation for mobile robots", *Proc. Of National Conference on Artificial Intelligence*, 1999.

[2.14] C. Kwok, D. Fox and M. Meila, "Real-time particle filters", *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. **92**, no. 3, 2004.

[2.15] D. Fox. "Adapting the sample size in particle filters through KLD-sampling", *International Journal of Robotics Research*, **22**, pp.985 – 1003, 2003.

[2.16] A. Doucet, N.J. Gordon and J.F.G. de Freditas, "Sequential Monte Carlo Methods in Practice", *Springer, 2001*.

[2.17] B.Y Ko, J.B. Song, "Real-time Building of Thinning-Based Topological Map with Metric Features", Proc. of International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1524-1529, 2004.

[2.18] Dellaert, F., Fox, D., Burgard, W., and Thrun, S. (1999). "Monte Carlo localization for mobile robots", *In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation* (ICRA).

[2.19] D. Fox, W. Burgard, F. Dellaert, and S. Thrun. "Monte Carlo localization: Efficient position estimation for mobile robots", *In Proc. of the Nat. Conf. on Artificial Intelligence* (AAAI), 1999.

[2.20] Eliazar, A. and Parr, R. "Learning probabilistic motion models for mobile robots. *In Proc. of the International Conference on Machine Learning* (ICML), 2004.

[2.21] Jensfelt, P. and Kristensen, S. "Active global localization for a mobile robot using multiple hypothesis tracking", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **17**, pp. 748–760. 2001

[2.22] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox. "Probabilistic Robotics", MIT Press, 2005.

[2.23] Roland Siewart, Illah R. Nourbakhsh, *"Introduction to autonomous mobile robots"*, MIT Press, 2011.

[2.24]http://www.alibaba.com/product-detail/Ultrasonic-sensor-SRF05-Devantech-SRF05-

Ultrasonic\_1103759344.html

[2.25] http://www.hokuyo-aut.jp/

[2.26] http://www.sick.com/group/EN/home/Pages/homepage1.aspx

[2.27] Thrun S, Burgard W and Fox D, "Probabilistic Robotics", Cambridge: The MIT Press. 194. 2004

[2.28] Borenstein J and Feng L, "Measurement and Correction of Systematic Odometry Errors in Mobile Robots", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. **12**, pp. 869-880, 1996

[2.29] F. Dellaert, D. Fox, W. Burgard, and S. Thrun. "Monte Carlo localization for mobile robots", In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation* (ICRA), Leuven, Belgium, 1998.

[2.30] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordan. "Sequential Monte- Carlo Methods in Practice", *Springer Verlag*, 2001

[2.31]G. Dissanayake, H. Durrant-Whyte, and T. Bailey. "A computationally efficient solution to the simultaneous localization and map building (SLAM) problem", *In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation* (ICRA), pp. 1009–1014, San Francisco, CA, USA, 2000

[2.32] A. Doucet, J.F.G. de Freitas, K. Murphy, and S. Russel. "Rao-Blackwellized partcile filtering for dynamic bayesian networks", *In Proc. Of the Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence* (UAI), pp. 176–183, Stanford, CA, USA, 2000

[2.33] A. Eliazar and R. Parr. DP-SLAM: "Fast, robust simultainous localization and mapping without predetermined landmarks", *In Proc. of the Int. Conf. on Artificial Intelligence* (IJCAI), pp. 1135–1142, Acapulco, Mexico, 2003

[2.34] G. Grisetti, C. Stachniss, and W. Burgard. "Improving grid-based slam with Rao-Blackwellized particle filters by adaptive proposals and selective resampling", *In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation* (ICRA), pp. 2443–2448, Barcelona, Spain, 2005

[2.35] D. Hahnel, W. Burgard, D. Fox, and S. Thrun. "An efficient FastSLAM algorithm for generating maps of large-scale cyclic environments from raw laser range measurements", *In Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems* (IROS), pp. 206–211, Las Vegas, NV,

USA, 2003

[2.36] M. Montemerlo, S. Thrun, D. Koller, and B. Wegbreit. "FastSLAM: A factored solution to simultaneous localization and mapping", *AAAI*, pp. 593–598, Edmonton, Canada, 2002

[2.37] M. Montemerlo, S. Thrun D. Koller, and B. Wegbreit. "FastSLAM 2.0: An improved particle filtering algorithm for simultaneous localization and mapping that probably converges". *In Proc. of the Int. Conf. On Artificial Intelligence* (IJCAI), pp. 1151–1156, Acapulco, Mexico

[2.38] 2003F. Lu and E. Milios. "Globally consistent range scan alignment for environment mapping", *Journal of Autonomous Robots*, **4** pp. 333–349, 1997

[2.39] M. Montemerlo and S. Thrun. "Simultaneous localization and mapping with unknown data association using FastSLAM", *In Proc. of the IEEE ICRA*, pp. 1985–1991, Taipei, Taiwan, 2003.

[2.40] U. Frese, G. Hirzinger, "Simultaneous localization and mapping —a discussion", in: *Proc. of the IJCAI Workshop on Reasoning with Uncertainty in Robotics*, Seattle, WA, USA, pp. 17–26, 2001.

[2.41] H.P. Moravec. "Sensor fusion in certainty grids for mobile robots", Al Magazine, pp. 61–74, Summer 1988.

[2.42] PJ Besl, ND McKay, "A method for registration of 3D shapes", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **14** pp. 239–256, 1992

[2.43] A. Censi, L. Iocchi, and G. Grisetti, "Scan matching in the Hough domain", *In Proceedings of the 2005 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. IEEE, 2005.

[2.44] A. Censi. "Scan matching in a probabilistic framework", *In Proceedings of the 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. IEEE, 2006

[2.45] I. J. Cox. "Blanche–an experiment in guidance and navigation of an autonomous robot vehicle", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7, pp.193–203, april 1991.

[2.46] A. Diosi and L. Kleeman. "Scan matching in polar coordinates with application to SLAM", Technical Report MECSE-29-2005, Department of Electrical and Computer Systems Eng., Monash University, 2005.

[2.47] B. Jensen and R. Siegwart. "Scan alignment with probabilistic distance metric", In Proc. of 2004 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2004.

[2.48] F. Lu and E. Milios. "Robot pose estimation in unknown environments by matching 2D range scans", *J. of Intelligent and Robotic Systems*, **20**, pp. 249–275, 1997.

[2.49] Feng Lu. "Shape Registration Using Optimization for Mobile Robot Navigation", PhD thesis,University of Toronto, 1995

[2.50] S. Thrun,W. Burgard, and D. Fox. "A real-time algorithm for mobile robot mapping with applications to multi-robot and 3D mapping", *In International Conference in Robotics and Automation*, **1**, pp. 321–328. IEEE, 2000.

[2.51] J.-S. Gutmann, K. Konolige, "Incremental mapping of large cyclic environments", in: Proc. of the IEEE *Int. Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, CIRA, Monterrey, CA, USA, pp. 318–325, 1999.

[2.52] Bengtsson O, Baerveldt, A. J, "Localization in changing environments - estimation of a covariance matrix for the IDC algorithm", *Intelligent Robots and Systems*, pp. 1931 – 1937, 2001.

[2.53] Hartmut Surmann, Andreas Nütcher, Joachim Hertzberg "An autonomous mobile robot with a 3D laser range finder for 3D exploration and digitalization of indoor environments", *Robotics and Autonomous Systems*, **45** pp. 181 – 198, 2003.

[2.54] Andrew Howard, Denis Wolf and Gaurav Sukhatme, "Towards 3D Mapping in Large Urban Environments", International Conference on Intellignet Robots and Systems, pp. 419 – 424, 2004.

[2.55] Dorit Borrmann, Jan Elseberg, Kai Lingmann, Andreas Nütcher, Joachim Hertzberg, "Globally consistent 3D ampping with scan matching", *Intelligent Robots and Sys*, pp. 1931 – 1937, 2001.

[2.56] Thomas Whelan, Hordour Johansson, Michael Kaess, John J. Leonard and John McDonald, "Robust Real-Time Visual Odometry for Dense RGB-D Mapping", *IEEE ICRA*, 2013.

[2.57] Peter Henry, Michael Krainin, Evan Herbst, Xiaofeng Ren, Dieter Fox, "RGB-D Mapping:
Using Kinect-Style depth cameras for dense 3D modeling of indoor environments", International
Journal of Robotics Research, 0(0), pp. 1 – 17, 2012.

[2.58] http://www.mobilerobots.com/Mobile\_Robots.aspx

# Capítulo III

# Corrección de no linealidad.

# Introducción.

En lugar de la utilización de los elementos sensores tanto láseres como ultrasónicos, se propone en este capítulo el uso de luz estructurada para la obtención de las mediciones. Tomando en cuenta que el sistema de luz estructurada irá montado en el sistema móvil, es necesario que se tenga la información de profundidad con una sola imagen, ya que al utilizar un proceso de cambio de fase, se tendrán entornos diferentes para cada imagen lo que generará errores por el solo hecho del movimiento del robot. Para desarrollar algoritmos de medición a través de luz estructurada, se debe de tener en consideración los aspectos prácticos de la aplicación de estas técnicas. Uno de los más importantes es la no linealidad del proyector y de la cámara, lo que produce un error en la adquisición de los datos apreciable mayormente cuando se utilizan pocas imágenes. Existen algoritmos que muestran mucha inmunidad a la no linealidad, como el método de desplazamiento de fase en cuatro pasos, pero como el objetivo es obtener el patrón en una sola imagen, es necesario realizar una calibración. En este capítulo se describen métodos propuestos por nosotros, los cuales hacen uso de un número mínimo de imágenes en comparación con otros métodos que usan desde 255 imágenes hasta 1024.

# 3.1 Corrección de no linealidad por mínimos cuadrados.

La medición de la forma de objetos mediante técnicas de proyección de franjas requiere de técnicas de recuperación de fase. De manera general, la mayoría de los métodos tales como el desenvolvimiento de fase temporal [3.1], o proyección de franjas con multi-frecuencias [3.2], requieren la manipulación de varias imágenes, una explicación más detallada se puede encontrar en [3.3] y [3.4]. Algunos algoritmos se han desarrollado para lidiar con no linealidades del detector o bien errores en el cambio de fase [3.5]. Aunque la proyección de franjas a través de video-proyector no ocasiona errores en la fase, las no linealidades del proyector y del detector o

cámara pueden introducir errores significantes en la fase. Aun cuando se utiliza una sola imagen y técnicas de Fourier es necesario un proceso de filtraje para evitar errores introducidos por términos de alta frecuencia [3.6]. En términos generales, las no-linealidades son explicadas con un modelo de una sola variable, la gama ( $\gamma$ ). Algunos métodos han sido desarrollados para corregir las no linealidades causadas por esta variable [3.7, 3.8, 3.19, 3.20] y otros métodos se centran en medirla [3.9 - 3.11], o bien minimizarla a través del desenfoque del proyector [3.18]. No obstante existen trabajos que reportan que la gamma puede no ser el mejor modelo matemático [3.9, 3.19, 3.20].

En este caso se propone la simplificación del método propuesto en [3.12], en donde se requiere la proyección de 1024 imágenes, las cuales si se toman con una cámara con velocidad de adquisición de 30 cuadros por segundo, requerirá al menos de 34 segundos, si no se toma en cuenta un retraso en el proyector. Sin embargo como es el proceso de calibración solamente se efectúa una vez, el tiempo no es un factor fundamental, sin embargo, en el método propuesto solamente es necesario obtener dos imágenes con el beneficio adicional de calcular no linealidades locales, y reducir considerablemente el tiempo de adquisición.

Los patrones de franjas para la proyección se obtienen utilizando la ecuación 3.1.

$$i_p(x, y) = G(x, y)[0.5 + 0.5\cos(2\pi f x)] , \qquad (3.1)$$

donde *f*, es una frecuencia portadora, *G* es una función la cual es una constante que permite obtener el máximo nivel de gris, G = 255 en imágenes de ocho bits, (x, y), son las coordenadas del pixel, y finalmente,  $i_p(x, y)$ , es la imagen con sus niveles de gris en el rango de 0 *a* 255. En general, el perfil de la intensidad después de proyectar la imagen creada utilizando la ecuación 3.1, sobre el objeto, está dada por el modelo de un solo parámetro dado por la siguiente ecuación.

$$i(x, y) = \{a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f x + \varphi(x, y)]\}^{\gamma},$$
(3.2)

donde *a* y *b*, son términos de offset y amplitud, que dependen de la reflectancia del objeto,  $\varphi$  es la función de fase relacionada con la altura del objeto h(x, y), y  $\gamma$  es el parámetro no lineal introducido por el proyector y la cámara, el cual debe de ser obtenido por calibración.

Este procedimiento utiliza el modelo general descrito por [3.8], el cual se describe por la siguiente ecuación.

$$i(x, y) = \alpha(x, y) \{ I_p[i_p(x, y)] + \beta_1(x, y) \} + \beta_2(x, y),$$
(3.3)

donde  $\alpha(x, y)$  es la reflectividad del objeto,  $\beta_1(x, y)$  es la luz ambiente reflejada por el objeto,  $\beta_2(x, y)$  es la luz ambiente que entra directamente a la cámara e  $I_p$  es la función de respuesta de la cámara y el proyector la cual depende del nivel de gris de entrada. Como la no linealidad no depende de la luz ambiente, y con fines de realizar la calibración de los niveles de gris se puede simplificar la ecuación considerando  $\beta_1(x, y) = \beta_2(x, y) = 0$ , condiciones que son válidas solo cuando se realiza el experimento en un cuarto obscuro. La función  $\alpha(x, y)$  permanece debido a que la luz proyectada no es constante y la reflectividad del objeto puede ser no uniforme. Bajo estas condiciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$i(x,y) = \alpha(x,y)I_p[i_p(x,y)].$$
(3.4)

Modelo que se utiliza para estimar la función inversa  $I_p^{-1}$ . Una vez que  $I_p^{-1}$  es calculada, la imagen de entrada  $i_p(x, y)$  es modificada para obtener  $i_p^{-1}(x, y)$  de tal manera que  $I_p[i_p^{-1}(x, y)]$  es una función lineal.

De manera experimental se midió  $I_p^{-1}$  proyectando de manera secuencial dentro de un plano blanco solamente dos imágenes: Una conteniendo todos los niveles de grises,  $i_{pr}(x, y)$  definidos por una función rampa con valores de 0 a 255, esto debido a que se trabaja con datos de enteros sin signo, por lo que en la ecuación 3.1 se sustituye el valor de f = 0, y se define G(x, y) como líneas verticales igualmente espaciadas con valores de niveles de gris que se incrementan desde 0 hasta 255. La segunda imagen es una distribución uniforme con un solo nivel de gris de 255, denotada por  $i_{p0}(x, y)$ . Si la relación entre  $i_{pr}(x, y) \in I_p[i_{pr}(x, y)]$  es lineal entonces i(x, y), es un plano, de cualquier otra manera se obtiene una superficie curva. Se denota por  $i_r(x, y)$  e  $i_o(x, y)$  las imágenes capturadas de  $i_{pr}(x, y) \in i_{p0}(x, y)$ , respectivamente. Su relación proporciona directamente  $I_p$  evaluada en  $i_{pr}(x, y)$ , la imagen en niveles de gris,

$$\frac{i_r(x,y)}{i_0(x,y)} = \frac{\alpha(x,y)I_p[i_{pr}(x,y)]}{\alpha(x,y)I_p[i_{p0}(x,y)]} = kI_p[i_{pr}(x,y)],$$
(3.5)

donde  $k = 1/I_p[i_{p0}(x, y)]$  es una constante. Para calcular  $I_p^{-1}$  solamente se ajusta cualquier renglón de la ecuación 3.5 con un polinomio e invertirlo. Para obtener un sistema más robusto, se pueden ajustar varios renglones y promediar sus coeficientes. En este caso se opta por ajustar cada renglón de la imagen con el fin de corregir las no linealidades locales. Se puede apreciar la diferencia con el método de [3.12], en donde se proyectaron una cantidad importante de imágenes. En esta referencia, cada imagen capturada fue promediada hasta obtener la curva  $I_p(ng)$  la cual representa la respuesta del sistema proyector – cámara para un nivel de gris dado. Esta función fue ajustada con un polinomio de orden 20, utilizando mínimos cuadrados, para después invertirlo para obtener  $I_p^{-1}$ . La utilización de tantas imágenes y un polinomio de un orden tan alto es porque su algoritmo de análisis de fase era extremadamente sensitivo a las no linealidades en la fase.

# 3.2 Resultados del método.

Para llevar a cabo los experimentos se usa el arreglo experimental mostrado en la figura 3.1, el cual, es un sistema típico de proyección de luz estructurada compuesto por un proyector digital
(Optoma, model PK-301) y una cámara (Pixelink, PL-E531), los cuales están conectados a la computadora. El ángulo entre el proyector y la cámara fue de 0.1 rad, y la distancia del proyector al objeto fue de 1800 mm.



Figura 3.1. Bosquejo del sistema utilizado.

En la siguiente figura se muestra la imagen en niveles de gris  $i_r(x, y)/I_0(x, y)$ , capturada sobre la superficie de calibración, la línea blanca muestra el perfil de un renglón, con el fin de observar el comportamiento no lineal.



Figura 3.2. Niveles de gris capturados por la cámara.

Verificando la gráfica de niveles de grises, la curva presenta valores prácticamente constantes para niveles de gris menores a 40 y para valores mayores a 240, haciendo necesario el ajuste de un polinomio de orden alto y aun así es difícil discernir entre dos valores consecutivos dentro de este rango. Si se restringen los niveles de gris en un rango de 40 a 240, se puede reducir el orden del polinomio a 2. Evidentemente si desea, un polinomio de mayor orden se puede usar para ajustar los datos en caso de requerir el rango completo de 0 a 255. Una vez que se ajusta el polinomio de orden 2, por el método de mínimos cuadrados, se encuentra la función inversa con la siguiente fórmula.

$$i_p^{-1}(ng) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a[c - I_p(ng)]}}{2a},$$
(3.6)

en donde *a*, *b y c* son los coeficientes obtenidos por el ajuste polinomial,  $I_p(ng) = a + b(ng) + c(ng)^2$ . Con este procedimiento se calcula  $I_p^{-1}[i_{pr}(x, y)]$ , el resultado se muestra en la figura 3.3, donde nuevamente se muestra en blanco el valor de un renglón de la imagen.



Figura 3.3. Aplicación del método de linealización.

Nótese que  $I_p^{-1}$  puede ser calculada renglón por renglón, y por lo tanto la corrección de  $i_{pr}(x, y)$ puede ser también fila por fila, con el costo de calcular tres coeficientes por fila.

Para analizar el funcionamiento de este procedimiento se proyecta un patrón de franjas en una superficie plana, la cual se muestra en la figura 3.3. El patrón de franjas fue calculado a través de la ecuación 3.1, con f = 20, y G = 255. El periodo medido de las franjas en el patrón de franjas proyectado fue de aproximadamente 15 mm, finalmente este patrón se muestra en la siguiente imagen.



Figura 3.4.- Patrón de franjas capturado.

Una vez que se tienen el patrón proyectado, se procede a analizar el comportamiento de las imágenes corregidas con métodos como Fourier y técnicas de cambio de fase. Primero se presentan resultados para Fourier.

Usualmente, el cálculo de la fase con técnicas de Fourier consiste en calcular la transformada de Fourier del patrón de franjas para después aislar el primer armónico con un filtro ya sea Hamming, Hann, Blackmann o algún otro tipo. Con la transformada inversa de Fourier del espectro seleccionado se obtiene la fase en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$ . El tamaño de la ventana del filtro permite el rechazo de los armónicos introducidos por la no linealidad de la intensidad de las franjas. Desafortunadamente, este rechazo elimina frecuencias necesarias para la reconstrucción de la superficie, causando con esto, errores en bordes o áreas donde existen variaciones pronunciadas o bien discontinuidades. Para recuperar la mayor información posible de información de fase, es suficiente utilizar un filtro de un plano con la mitad de la frecuencia solamente para eliminar el término de background [3.13]. Sin embargo la fase obtenida con este método contiene términos de fase falsos originados por el perfil no senoidal de las franjas. Se mostrará que el método propuesto de corrección de no linealidad es una buena alternativa antes de usar este método de recuperación de fase.

Primeramente, se obtiene la fase de las franjas mostradas en la figura 3.4, utilizando un método común de recuperación de fase [3.6]. La transformada de Fourier de la figura 3.4, proporciona una expresión compleja la cual consiste en la suma de muchos términos. La separación del primer pico de frecuencia  $D_1(u - f, v)$  (donde (u, v) son las coordenadas de frecuencia) fue llevada a cabo por un filtro pasa-bajo de Blackmann de radio 20, (el valor de f) centrado en las coordenadas (20,0). El término filtrado fue trasformado en el dominio del espacio por la transformada inversa de Fourier para obtener una función compleja  $d_1(x, y)$ . La fase respectiva se obtiene con el *arctg* de la parte imaginaria sobre la parte real. Finalmente se llega a la función de fase siguiente.

$$\Phi_{c}(x, y) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{Im[d_{1}(x, y)]}{Re[d_{1}(x, y)]}\right\},$$
(3.7)

lo cual se muestra en la figura 3.5c.

Utilizando el otro método, en donde solo se deja pasar la mitad del espectro de Fourier (Kreis), y removiendo el término de background vía un filtro Blackmann de radio 20, se obtiene la respectiva fase mostrada en la figura 3.5a, la cual está dada por.

$$\Phi_a(x,y) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{\operatorname{Im}[d_n(x,y)]}{\operatorname{Re}[d_n(x,y)]}\right\},\tag{3.8}$$

donde  $d_n = F^{-1}{F[i(x, y)]H(u, v)}$ ,  $F \neq F^{-1}$  son la transformada directa e inversa de Fourier respectivamente, y H(u, v) es el filtro que solamente deja pasar la mitad del espectro de Fourier.

Proyectando la imagen corregida con el inverso del ajuste polinomial y siguiendo el mismo proceso utilizado con las imágenes no corregidas (Método de Kreis), se ha obtenido la fase mostrada en la figura 3.5b. Se puede notar que el procedimiento de corrección reduce las variaciones de amplitud comparado con la figura 3.5a, y contiene mejores definición en los bordes respecto a la figura 3.5c. Para comparar estos resultados con un método de Fourier independiente de las no linealidades, la fase se obtiene nuevamente 3.5d, con un método que usa dos imágenes con un corrimiento de fase de  $\pi$  entre ellas [3.14].



Figura 3.5. Fases experimentales utilizando métodos de Fourier. a) Método de Kreis aplicado a franjas sin corregir. b) Método de Kreis aplicado a franjas corregidas. c) Método de Takeda. d) Metodo independiente de las no linealidades.

Los perfiles de las fases de la figura anterior, son mostradas en la figura 3.6. Sustrayendo las figuras 3.5a, 3.5b, y 3.5c, de la figura 3.5d, es posible estimar la desviación estándar de cada una de ellas, obteniendo 0.1 rad, 0.067 rad y 0.155 rad, respectivamente. Los errores de la figura 3.5c son principalmente introducidos por los bordes mientras que el error de la figura 3.5a y 3.5b son debidos a las variaciones de amplitud. Con este resultado se puede decir que este método reduce la desviación estándar en los errores debido a las no linealidades por cerca de un factor de 2.



Figura 3.6. Perfiles de los mapas de fase. Las letras corresponden a la figura 3.5.

En la figura anterior se puede apreciar una curva en lugar de la línea recta esperada obtenida del plano, esta deformación fue causada por la iluminación divergente del proyector y distorsiones del sistema óptico.

Las mejoras obtenidas en la corrección de la no linealidad también se pueden emplear en técnicas de cambio de fase. De este modo, capturando tres imágenes con un cambio de fase de  $\pi/2$ , la recuperación de la fase se puede realizar empleando el algoritmo de tres pasos dado por:

$$\varphi(x,y) = \operatorname{arctg}[(I_0 - 2I_{\frac{\pi}{2}} + I_{\pi})/(I_{\pi} - I_0)]. \tag{3.9}$$

Con esto se obtienen las fases mostradas en las figuras 3.7a y 3.7b para las imágenes corregidas y no corregidas respectivamente. Como comparación, se calcula la fase con cuatro pasos, con un cambio de fase de  $\pi/2$ , el cual es un algoritmo conocido por ser independiente a los armónicos de órdenes superiores.

$$\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}[(I_{3\pi/2} - I_{\pi})/(I_{\pi} - I_{0})].$$
(3.10)



Figura 3.7. Mapas de fase experimentales obtenidas con métodos de cambio de fase. a) Algoritmo de tres pasos con las imágenes sin corregir. b) Algoritmo de tres pasos con las imágenes corregidas. c) Método de cuatro pasos con franjas sin corregir.

Los perfiles de las fases se muestran en la figura 3.8. Nuevamente substrayendo las figuras 3.7a y 3.7b de la figura 3.7c, se estima la desviación estándar de las inexactitudes de la fase siendo de 0.152 rad y 0.028 rad, respectivamente. Debido a que los errores introducidos por este método son menores con desplazamiento de fase que los obtenidos con Fourier, se puede decir que el error utilizando métodos de Fourier se incrementa por el filtraje del termino background.



Figura 3.8. Perfiles de los mapas de fase, las letras corresponden a la figura 3.7.

### 3.3 Corrección de no linealidad por transformada de Fourier.

Para este procedimiento se toma en cuenta el modelo de gamma descrito por la ecuación 3.2, el cual depende además de los factores mencionados con anterioridad también del grado de desenfoque, este método calcula la gamma promedio de un patrón de franjas senoidales, y solo una imagen es necesaria, esto sin introducir valores predefinidos tal y como se hace en las referencias [3.11] y [3.16]. En el caso específico en donde el patrón de franjas está correctamente enfocado, el valor calculado será igual al introducido por el sistema proyector-cámara. Dado que el efecto principal en la imagen capturada ya contiene las frecuencias adicionales, esta imagen servirá para determinar estos picos adicionales, es por eso que una transformación en Fourier de un renglón aunque bien podría ser de toda la imagen, es calculada y los valores del espectro de Fourier son usados para establecer el criterio para el valor óptimo de gamma. Utilizando varias iteraciones, la intensidad de las franjas seleccionadas es elevada a los valores de gamma y la relación correspondiente entre el primer pico y los otros picos es medida. La potencia que minimiza estas relaciones corresponde a la inversa del valor de gamma introducida por el sistema

proyector-cámara; esto es, el valor calculado de gamma minimizará la magnitud del espectro de Fourier. Las diferencias principales con los métodos propuestos en [3.11] y [3.16], es que se mide directamente el exponente no lineal, y por lo tanto, las mismas imágenes para obtener la fase pueden ser usadas para calcular el gamma, sin requerir valores de gamma pre-definidos. En este sentido, este propósito puede ser interpretado no solo como un proceso de calibración sino también como una corrección no-lineal de gamma.

Usando la ecuación 3.1, se generan las franjas correspondientes, las cuales al ser capturadas por la cámara se obtiene un patrón de franjas descrito por la ecuación 3.2, de la cual se obtiene la expansión binomial de tal manera que esta puede ser re-escrita de la siguiente manera [3.13]

$$i(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, y) \cos\{n[2\pi f x + \varphi(x, y)]\},$$
(3.11)

donde  $b_n(x, y)$  representa el coeficiente de series de Fourier del n-enésimo armónico, denotando  $d_n = \frac{1}{2}b_n(x, y) \exp[j\varphi(x, y)]$ , siendo  $j = \sqrt{-1}$ . Entonces la transformada de Fourier de la ecuación 3.11 puede ser expresada como:

$$I(u,v) = A(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(u - nf, v) + D_n^*(u + nf, v),$$
(3.12)

donde (u, v) son las coordenadas de frecuencia y f es la frecuencia portadora de la ecuación 3.1. Como las distancias de centro a centro de los espectros dependen de la frecuencia f, no se sobrepondrán para una f suficientemente grande. Debido a que cada espectro y su conjugado contienen la misma información de fase, se selecciona solamente  $D_n$ . Definiendo las intensidades relativas  $\Gamma_n$  como:

$$\Gamma_n = \frac{|D(nf,0)|^2}{|D(f,0)|^2},\tag{3.13}$$

71

donde nf es la posición central del n-ésimo máximo en la dirección u. Se espera tener un patrón enteramente senoidal cuando  $\Gamma_n \approx 0$ , para  $n \ge 2$ ; en esta situación el espectro de Fourier debe de consistir solamente del primer armónico. Calculando la sumatoria de la ecuación 3.14, se puede estimar el grado de no linealidad de la ecuación 3.2.

$$S_N = \sum_{n=2}^N \Gamma_n \,. \tag{3.14}$$

De este modo, se construye el algoritmo solamente i(x, y) de la ecuación 3.2, elevándolo por valores reales y positivos  $\gamma_m$ , y evaluando la función objetivo  $S_N(\gamma_m)$  para cada valor. Cuando se obtiene el valor mínimo de  $S_N$  con  $\gamma_{m0}$ , se cumple que  $\gamma_{m0}\gamma \approx 1$ , por lo tanto, el valor final de gamma se obtiene por la relación  $\gamma \approx 1/\gamma_{m0}$ .

Se pueden utilizar varios algoritmos para encontrar el mínimo de  $S_N(\gamma_m)$ , pero se escoge el más sencillo, el cual es un método de búsqueda que no usa gradientes analíticos o numéricos. Como este método solamente encuentra un mínimo local, es conveniente proporcionar un valor inicial cercano a la solución. De la referencia [16], se puede establecer la relación entre  $\gamma$  y  $\Gamma_n$  dada por  $\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} = (\gamma - n)/(\gamma + n + 1)$ . Como  $\Gamma_1 = 1$ , el valor inicial puede estimarse con,  $\gamma_{m0} = (1 - \Gamma_2)/(1 + 2\Gamma_2)$ .

### 3.4 Simulaciones numéricas.

Para ilustrar el funcionamiento del método de corrección no lineal descrito, las imágenes se generan a través de la siguiente ecuación.

$$i_s(x,y) = {G \choose 2} \{ r(x,y) [1 + \cos(2\pi f x)] \}^{\gamma}.$$
(3.15)

Con G = 255, f = 20, y r(x, y) una función suave real y positiva, para realizar la modulación, con este fin se define  $r(x, y) = 0.5 + 0.5\cos(x^2 + y^2)$ , con el fin de modificar el contraste de las franjas y de esta manera simular la variación en la reflexión de la superficie, y utilizando 15 diferentes valores de  $\gamma$ , desde 0.2 hasta 5. Este rango fue seleccionado para cubrir los valores típicos de gamma generalmente usados en los proyectores comerciales.

En la siguiente figura se muestra la imagen para un valor de  $\gamma = 3$ , y en la figura 3.10a se muestra el perfil de un renglón de esta imagen. En la figura 3.10b, se muestra la magnitud del espectro de Fourier sobre las frecuencias (u, 0), en donde el pico central no se muestran para resaltar los armónicos 1 y de mayores órdenes.



Figura 3.9. Patrón de franjas simuladas con variaciones de intensidad.



Figura 3.10.Resultados simulados antes de la corrección de no linealidad (a) Perfil de las franjas, (b) Espectro de potencia.

73

Después de aplicar el procedimiento iterativo, se obtiene una reducción evidente de los armónicos los cuales se muestran en la figura 3.11. El valor de gamma después del método fue de 1/3.002. Elevando  $i_s(x, y)$  por este valor, se obtiene el perfil mostrado en la figura 3.11 a. Realizando este proceso para el rango de 15 valores de gamma previamente mencionado se ha obtenido una desviación de 0.0025 correspondiendo a gamma=0.1, sin embargo el error relativo definido por  $1 - \frac{\gamma_{m0}}{\gamma_m}$ , fue de 0.0020 para todos los valores de m.



Figura 3.11.Resultados simulados de la corrección de no linealidad. (a) Perfil de las franjas (b) Espectro de potencia.

Para analizar el comportamiento del algoritmo sin franjas ideales y además para simular deformaciones en el patrón de franjas debido a una superficie, se completa la simulación agregando una función de fase  $\varphi(x, y) = 2\pi D(x^2 + y^2)$  a la ecuación 3.15. Tomando en consideración que los órdenes no se sobrepongan, es decir, que se cumpla;

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right| < 2\pi \frac{f}{2}.$$
(3.16)

Después de aplicar nuevamente el algoritmo de recuperación de gamma con D = 1,2,3 y 5, los errores relativos para los 15 valores de gamma definidos previamente fueron de 0.0025, 0.0065, 0.05 y 0.07 respectivamente.

Cuando las franjas dadas por la ecuación 5.15, son suavizadas por convolución, el valor de gamma calculado también se modifica. De esta manera, aunque la gamma obtenida con este algoritmo es el que reduce los picos secundarios en el espectro de Fourier, esta puede no ser el valor de gamma introducido. Como el desenfoque tiene un efecto suavizador, el valor de gamma calculado en este caso puede no ser el correcto. Para calcular el valor de gamma a utilizando imágenes desenfocadas se pueden utilizar las referencias [3.11] y [3.12].

En la siguiente sección se presentan resultados experimentales del algoritmo propuesto, además de que se plantean algunas sugerencias prácticas para la correcta aplicación de este procedimiento.

### 3.5 Resultados experimentales.

Para llevar a cabo los experimentos se ha usado el arreglo experimental mostrado en la figura 3.1, bajo las mismas distancias explicadas anteriormente. En la siguiente figura se muestra la imagen capturada, cuando el patrón de franjas se proyecta sobre una pirámide de 30 centímetros de longitud y 40 centímetros de base.



Figura 3.12. Patrón de franjas proyectadas sobre un objeto de prueba.

75

Calculando la FFT de patrón anterior se obtiene el siguiente espectro de potencia. Los picos de frecuencia se aprecian sobre el eje x.



Figura 3.13.- Espectro de Fourier para la figura 3.12.

Aplicando el procedimiento en el área plana formada desde la fila 1 hasta la 200, para acelerar el proceso, se calcula un valor de gamma de 1/4.18. Después de elevar la imagen completa por 4.18, el patrón de intensidad se muestra en la figura 3.14a al igual que su espectro (3.14b). Es evidente una reducción en los armónicos, también se puede notar que existen armónicos residuales, lo que hace suponer que optimizar solamente un parámetro (gamma), puede no ser el mejor modelo matemático para corregir las no linealidades, lo cual también se expone en [3.9].



Figura 3.14. Corrección del patrón de franjas de la figura 3.12. (a) Perfil de las franjas, (b) Espectro de potencia. Se puede aplicar el proceso de corrección de no linealidad para incrementar la exactitud de los algoritmos de Fourier aplicados a la recuperación de fase así como a las técnicas de cambio de fase. Para el primer caso, las técnicas de Fourier, es necesario calcular la trasformada de Fourier del patrón de franjas y aislando el primer armónico con una ventana de Backmann, Hamming o Hann. Con la transformada inversa de Fourier del espectro seleccionado, la pase es obtenida en un intervalo de  $[-\pi, \pi]$ . El tamaño de la ventana permite el rechazo de los armónicos introducidos por la no linealidad en la intensidad de las franjas. Desafortunadamente, este rechazo también eliminan las frecuencias necesarias para la reconstrucción de la superficie, en donde se proyectan las franjas, causando errores en bordes o discontinuidades. Para recuperar la máxima información de fase es suficiente usar un plano en donde se eliminen la mitad de las frecuencias y un filtro que elimine el término de background [3.14], sin embargo, la fase obtenida con este método incluye picos de fases de frecuencias extra introduciendo errores.

Primeramente, se obtiene la fase de las franjas mostradas en la figura 3.12, usando un proceso de recuperación de fase común [3.6-Takeda]. La transformada de Fourier de la figura 3.12, da una expresión compleja consistiendo en una suma de términos. La separación del primer pico de frecuencia, es llevada a coba por un filtro pasa-baja; un filtro Blackmann de radio 20 (el valor de la

frecuencia), centrada en las coordenadas (0,20). El término filtrado es transformado al dominio de tiempo por la transformada de Fourier inversa para obtener una función compleja. La fase respectiva es obtenida con el *arctg* de la parte imaginaria sobre la parte real. De esta manera se tiene la siguiente función de fase.

$$\Phi_c(x, y) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{Im[d_1(x, y)]}{Re[d_1(x, y)]}\right\}.$$
(3.17)

Esto se muestra en la figura 3.15c. Pasando solamente la mitad del espectro de Fourier (método de Kreis), y removiendo nuevamente el término de background con un filtro de Blackmann de radio 20, se obtiene la fase mostrada en la figura 15a, dada por:

$$\Phi_a(x,y) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x,y)]}{\operatorname{Re}[\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x,y)]} \right\},\tag{3.18}$$

en donde  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x, y)$ es la transformada inversa de Fourier para  $\sum_{n=1}^{\infty} D_n(u - nf, v)$ .

Elevando las intensidades de la figura 3.12, por el valor calculado de 1/4.18, y siguiendo el mismo procedimiento usado con las imágenes sin corregir, se obtienen la fase mostrada en la figura 3.15b. Se puede apreciar que este método reduce las variaciones de amplitud comparando con la figura 3.15a, y contiene mejor definición en los bordes en comparación con 3.15c. Para comparar los resultados con un método de Fourier in-sensitivo a las no linealidades del sistema la fase fue obtenida nuevamente (figura 3.15c), con un método que usa dos imágenes que tienen un desfasamiento de  $\pi$  entre ellas, [3.14]. Los perfiles de la figura 3.15, son mostrados en la figura 3.16. Substrayendo las figuras 3.15a, 3.15b y 3.15c de 3.15d, se calcula su desviación estándar en donde se obtuvo 0.172, 0.0085 y 0.177 radianes respectivamente. Los errores en la figura 3.15c son producidos principalmente por los bordes mientras que los errores de la figura 3.15a y 3.15b son debidos a la variación de amplitud.



Fig. 3.15. Fases obtenidas experimentalmente con métodos de Fourier. (a) Método de Kreis a imagines sin corregir. (b) Método de Kreis a imágenes corregidas. (c) Métodod de Takeda. (d)

Método in-sensitivo a no linealidades.



Figura 3.16. Perfiles de la figura 3.15.

En la figura anterior se aprecia una línea curva en lugar de recta, lo que demuestra que es debido al arreglo experimental y no al método utilizado, ya que se presentó también en la sección anterior. También se pueden utilizar técnicas de cambio de fase para analizar las ventajas de realizar la corrección de no linealidad. En este caso, se capturan tres imágenes con un cambio de fase de  $\pi/2$ , y posteriormente utilizando el método de los tres pasos, se obtiene la fase de la siguiente manera.

$$\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}[(I_0 - 2I_{\frac{\pi}{2}} + I_{\pi})/(I_{\pi} - I_0)].$$
(3.19)

Con esto se obtienen las fases mostradas en las figuras 3.17a y 3.17b para las imágenes corregidas y sin corregir. Para llevar a cabo la comparación, se calcula la fase con un método de cuatro pasos (figura 3.17c), el cual es conocido por su independencia ante la no linealidad, la cual está dada por la siguiente ecuación.

$$\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}[(I_{3\pi/2} - I_{\pi/2})/(I_{\pi} - I_{0})].$$
(3.20)

Sustrayendo las figuras 3.17a y 3.17b de la figura 3.17c, se estima nuevamente la desviación estándar de las inexactitudes en la fase siendo de 0.299 y 0.056 radianes respectivamente. Como los errores después de aplicar este método son menores con el método de phase stepping, se puede concluir que los errores utilizando métodos de Fourier se ven afectados por la eliminación del término de Background.



Figura 3.17. Fases obtenidas experimentalmente a través de métodos de phase shifting methods (a) Método de tres pasos con franjas sin corregir. (b) Método de tres pasos con franjas

corregiddas. (c) Método de cuatro pasos.

En la siguiente imagen se pueden observar los perfiles de la figura anterior, se puede apreciar la reducción en las variaciones de amplitud.



Figura 3.18 Perfiles de las fases mostradas en la figura 3.17.

# Referencias.

[3.1] H. O. Saldner and J. M. Huntley, "Temporal phase unwrapping: application to surface profiling of discontinuous objects", *Applied Optics* **36**, pp. 2770-2775, 1997.

[3.2] Eun-Hee Kim, Joonku Hahn, Hwi Kim, and Byoungho Lee, "Profilometry without phase unwrapping using multi-frequency and four-step phase-shift sinusoidal fringe projection", *Optics Express* **17**, pp. 7818-7830, 2009.

[3.3] Gorthi S. S. and P. K. Rastogui, "Fringe projection Techniques: Whiter we are?," *Opt. Laser Eng.* **48**, pp.133, 2010.

[3.4] S. Zhang, "Recent progress on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques", *Opt. Laser Eng.* **48**, pp. 149, 2010.

[3.5] K. Creath, "Error sources in phase-measuring interferometry", SPIE 1992, 1720 : 428.

[3.6] M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes", *Appl. Opt.* **22**, pp. 3977, 1983.

[3.7] T. Hoang, B. Pan, D. Nguyen, Z. Wang, "Generic gamma correction for accuracy enhancement in fringe-projection profilometry", *Optics Letters*, **35**, pp. 12, 2010.

[3.8] Z. Li, Y. Li, "Gamma-distorted fringe image modeling and accurate gamma correction for fast phase measuring profilometry", *Optics Letters*. **36**, pp. 2, 2011.

[3.9].H. Guo, H. He, and M. Chen, "Gamma correction for digital fringe projection profilometry", *Applied Optics*, **43**, pp. 2906, 2004.

[3.10] P. Jia, J. Kofman, Ch. English, "Comparison of linear and nonlinear calibration methods for phase-measuring profilometry", *Optical Engineering*, **46**, pp. 4, 2007.

[3.11] S. Ma, C. Quan, R. Zhu, L. Chen, B. Li, and C. J. Tay, "A fast and accurate gamma correction based on Fourier spectrum analysis fringe projection profilometry", *Optics Communication*, **285**, pp. 533, 2012.

[3.12] Y. Xiao, Y. Cao, Y. Wu, and S. Shi, "Single orthogonal sinusoidal grating for gamma correction in digital projection phase measuring profilometry", *Opt. Eng.* **52**, 053605, 2013.

[3.13] K. Liu, Y. Wang, D. L. Lau, Q. Hao and L. G. Hassebrook, "Gamma model and its analysis for phase measuring profilometry", *J. Opt. Soc. Am.* A, **27**, pp.553, 2010.

[3.14] T. Kreis, "Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transform method", *J. Opt. Soc. Am.* A, **3**, pp. 847, 1986.

[3.15] J. Li, Xian-Yu Su, and Lu-Rong Guo, "Improved Fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shapes", *Opt. Eng.* **29**, pp. 1438, 1980.

[3.16] Chao Zuo, Qian Chen, Guohua Gu, Shijie Feng, Fangxiaoyu Feng, "High-speed threedimensional profilometry for multiple objects with complex shapes," *Optics express*, **20** pp. 19493-19510, 2012.

[3.17] Song Zhang and Shing-Tung Yau, "Generic nonsinusoidal phase error correction for threedimensional shape measurement using a digital video projector", *Applied Optics*. Vol. **46**, No. 1, 2007.

[3.18] Shuangyan Lei and Song Zhang, "Flexible 3-D shape measurement using projector defocusing", *Optic Letters*, **34**, pp. 20, 2009.

[3.19] Kai Liu; Yongchang Wang; Daniel L. Lau; Qi Hao and Laurence G. Hassebrook. "Gamma model and its analysis for phase measuring profilometry" *JOSA*, **27**, issue 3, 2010.

[3.20] Zhongwei Li and Youfu Li "Gamma-distorted fringe image modeling and accurate gamma correction for fast phase measuring profilometry", *Optics Letters*, **36**, pp. 2, 2011.

# Capítulo IV

# Adquisición de datos 3D.

#### Introducción.

Para la toma de los datos se utilizan técnicas de proyección de luz estructurada. Sin embargo, como se menciona anteriormente, es necesario, por el movimiento del robot, que se tenga toda la información a través de una sola imagen ya que al moverse el robot se tendrán diferentes posiciones y por lo tanto, datos distintos para cada proyección. En la siguiente sección se presenta una técnica de modulación de amplitud, la cual a pesar de ser un algoritmo que funciona a través de cuatro imágenes, ayudará a desarrollar la teoría para uno que permita obtener la información 3D a partir de una sola imagen. La manera más sencilla de obtener información en 3D, es, utilizando la proyección de una sola línea, solamente que es necesario un procedimiento de escaneo [4.1]. Otros métodos más rápidos utilizan técnicas de proyección de franjas, pero requiere de un desenvolvimiento en la fase y descifrar ambigüedades cuando la superficie contiene discontinuidades [4.2]. Otra opción es el desenvolvimiento temporal [4.3], pero de nueva cuenta este procedimiento es relativamente lento. Otros métodos utilizan dos frecuencias para encarar las ambigüedades pero requiere nuevamente de un proceso de desenvolvimiento del patrón de baja frecuencia [4.4, 4.5]. Dos métodos mejorados que no requieren desenvolvimiento se reportan en [4.6 y 4.7]. Sin embargo, requieren del análisis de muchas imágenes con diferentes frecuencias, incrementando de nueva cuenta el tiempo de procesamiento. Los siguientes tres métodos fueron desarrollados por nosotros como solución al objetivo planteado para la adquisición de datos aplicables a robótica móvil.

### 4.1 Recuperación de fase por método de modulación de amplitud.

El procedimiento expuesto trabaja con la proyección de líneas rectas moduladas con una función de amplitud conocida. El cálculo de la función de modulación después de proyectar las franjas proporciona la posición de los órdenes de cada una de ellas, independientemente de las discontinuidades en la fase. Este procedimiento no sólo sirve para desenvolver la fase sino también, para determinar las ambigüedades en la fase causadas por brincos en la fase mayores a  $2\pi$ .

El orden de las franjas es fundamental en el desenvolvimiento de la fase, ya que la función desenvuelta está definida por:

$$\phi(x, y) = \phi(x, y) + 2\pi N(x, y),$$
(4.1)

donde N(x, y) es el número entero correspondiente al orden de la franja. En la práctica, el cálculo de este número es complejo, debido al ruido presente en las franjas o bien la discontinuidades debidas al objeto. En este caso se proveerá un método para encontrar este número, obteniendo a través de cálculos la fase desenvuelta y por consiguiente la deformación en la superficie, independientemente de su complejidad.

Para realizar la proyección de las franjas senoidales, se emplea la siguiente ecuación:

$$I_n(x, y) = G[1 + N(x, y)\cos(2\pi a x + \alpha_n)],$$
(4.2)

donde  $2\pi ax$  es un término portador para *a* franjas verticales,  $\alpha_n$  son los cambios de fase conocidos correspondiente a cada patrón, *G* es el nivel de gris máximo permitido y N(x, y) es el orden de las franjas, calculadas con:

$$N(x, y) = 2\pi a x - [2\pi a x]_{w}, \tag{4.3}$$

donde  $[2\pi ax]_w$  determina la portadora envuelta en el rango de  $[-\pi, \pi]$ . Para obtener un máximo contraste en la ecuación 4.1, N(x, y) es normalizado en el rango [0,1]. El perfil de intensidad que se obtiene después de proyectar la ecuación 4.1, en la superficie de un objeto, está dado por:

$$I_n(x, y) = A(x, y) + N(x, y)B(x, y)\cos[2\pi ax + \phi(x, y) + \alpha_n],$$
(4.4)

donde  $A(x, y) \neq B(x, y)$  son los términos de background y amplitud relacionados con la reflectividad del objeto respectivamente,  $\psi \phi(x, y)$  es la función del cambio de fase relacionada con el perfil de la superficie. Usando un algoritmo de cambio de fase se pueden evaluar estas tres funciones. Se ha seleccionado un algoritmo de cuatro pasos con  $\alpha_n = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , aunque menos pasos pueden ser usados, de esta manera se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\phi_{w}(x,y) = \operatorname{arctg}\left[\frac{I_{4}(x,y) - I_{2}(x,y)}{I_{1}(x,y) - I_{3}(x,y)}\right],\tag{4.5}$$

$$N_e(x,y)B(x,y) = \sqrt{[I_4(x,y) - I_2(x,y)]^2 + [I_1(x,y) - I_3(x,y)]^2},$$
(4.6)

donde  $N_e(x, y)$  es el orden estimado de cada franja, debido a que  $N_e(x, y)$  está ligado a B(x, y) es necesario usar un procedimiento de proyección de franjas adicional, esto con el fin de obtener solamente B(x, y). Esto es llevado a cabo proyectando la ecuación 2, con N(x, y) = 1, y usando las ecuaciones 4.5 y 4.6. Por supuesto, en el caso ideal en donde se tiene A(x, y) = B(x, y), el segundo conjunto de franjas no es necesario. Una vez que se determina  $N_e(x, y)$ , el proceso de desenvolvimiento de fase es de manera directa utilizando la siguiente ecuación.

$$\phi(x, y) = \phi_w(x, y) - 2\pi N_e(x, y).$$
(4.7)

Primeramente se muestran los resultados para simulaciones y posteriormente se complementaran experimentalmente. En la figura 4.1, se muestran tres perfiles correspondientes a las ecuaciones 4.2 y 4.3. La línea continua corresponde a  $N_e(x, y)$  calculada con la ecuación 4.3 para posteriormente normalizarla. La línea punteada corresponde a  $I_1(x, y)$  obtenida con la ecuación 4.2, con N(x, y) = 1, y la tercera línea corresponde a  $I_1(x, y)$  obtenida nuevamente con las ecuaciones 4.2 y 4.3, habiendo usado G = 128, a = 2.5 y  $a_1 = 0$ . Se puede ver el efecto de usar el orden de las franjas como una función de modulación.



Figura 4.1. Perfiles de la proyección de franjas. A) Función de modulación N(x, y). B) Función senoidal con modulación de amplitud. C) Función senoidal sin modulación de amplitud.

El proceso de simulación completo se muestra en la figura 4.2. La imagen superior (4.2a) corresponde a  $I_3(x, y)$  calculado con los mismos parámetros de la figura 4.1. Nótese los cambios de contraste entre las franjas. La figura 4.2b es la fase envuelta calculada con la ecuación 4.5, y finalmente 4.2c, es la función que determina los órdenes obtenidos  $N_e(x, y)$  a partir de la ecuación 4.6.



Figura 4.2. Proceso de simulación. a) Franjas proyectadas. b) Fase envuelta calculada con la ecuación 4.5. c) amplitud calculada con la ecuación 4.6.

Se ve claramente que existen correspondencias entre los ciclos y las fronteras entre la fase envuelta (figura 4.2b) y la imagen de los órdenes de las franjas (figura 4.2c).

Una vez que se prueba el algoritmo con simulaciones, y se comprueban las correspondencias entre la fase envuelta y los órdenes obtenidos, se procede a comprobar el método experimentalmente.

## 4.1.1 Resultados experimentales.

Para realizar los experimentos se utiliza el sistema mostrando en la figura 4.3, el cual está compuesto por un proyector que muestra las franjas, una cámara, y una computadora que almacena las imágenes para realizar los cálculos.



Figura 4.3. Sistema experimental usado para la proyección.

El ángulo entre el proyector y la cámara es de 0.27 radianes, y el periodo de las franjas medidas sobre el objeto es de aproximadamente 60 mm. El objeto de prueba se compone de dos superficies planas separadas una distancia axial de 300 mm lo que provoca un cambio de un ciclo entre los dos planos. La siguiente figura muestra las cuatro imágenes para cada patrón de franjas proyectadas sobre el objeto. Se puede apreciar que existe una área mucho más brillante, esto se debe a que esta está más cercana al proyector, aunque tenga la misma reflectividad que el plano posterior. A reserva de este punto, la continuidad de las franjas sugiere un solo plano.



Figura 4.4.- Franjas experimentales con variación de amplitud.

De nueva cuenta, se obtienen las funciones de fase y de modulación mostradas en la figura 4.5, usando las imágenes de la figura 4.4, con las ecuaciones 4.6 y 4.7 respectivamente.



Figura 4.5. Resultados experimentales. a) Fase envuelta. b) Ordenes de las franjas.

Como se explica anteriormente, un conjunto adicional de imágenes de cuatro patrones de franjas con N(x, y) = 1 son usadas para calcular B(x, y) y por lo tanto la función  $N_e(x, y)$ . Se pueden apreciar algunas variaciones locales en la figura 4.5b, debidas a la aparición de armónicos como consecuencia del uso de un sistema sin calibrar. Si el sistema se calibra para la no linealidad, puede proporcionar más uniformidad en la imagen. En este caso, es decir, donde el sistema no está calibrado, se aplica una convolución simple a la imagen de ventana de  $7 \times 7$  pixeles.

Para apreciar de mejor manera los desplazamientos en los órdenes de las franjas causados por las discontinuidades del objeto se muestran en la figura 4.6, los primeros cuatro órdenes de las franjas en la figura 4.5 de manera individual.



Figura 4.6. Segmentación del orden de las franjas de la figura 4.5. a) franja de orden 0. b) primer orden c) segundo orden. d) Tercer orden.

Después de calcular los órdenes de cada franja, la fase desenvuelta es fácilmente calculada utilizando la ecuación 4.7, y como se muestra en la figura 4.7, eliminando el término lineal, se puede ver, la correcta detección de los dos planos. Además se pueden observar discontinuidades en cada plano esto es debido a la modulación de intensidad y a la falsa captura o correcciones que hace la cámara en la intensidad en donde no se tienen los pasos exactamente definidos, lo que inevitablemente reduce la aplicabilidad de este procedimiento.



Figura 4.7. Fase desenvuelta en radianes.

## 4.2 Recuperación de fase por método de un patrón compuesto.

Continuando con el propósito principal de desarrollar un algoritmo que a través de una sola imagen recupere la información en 3D del entorno utilizando la proyección de luz estructurada, independientemente de discontinuidades en los objetos, que por la aplicación en robótica es el caso general, se propone el siguiente algoritmo.

Se genera un patrón de proyección en una sola imagen (en escala de grises) para obtener el perfil de diferentes objetos independientemente de que estén aislados o separados, lo cual se llevará a cabo a través de un patrón compuesto de tres frecuencias y el cálculo de un patrón equivalente de un periodo. La fase de este patrón equivalente, proporciona la fase sin un proceso de desenvolvimiento. Escalando esta fase, se pueden obtener los órdenes de cada franja en los componentes de alta frecuencia independientemente de las discontinuidades en la fase. Estos órdenes de franjas permiten desenvolver la fase y determinar sus ambigüedades causados por saltos mayores a  $2\pi$ . Este método es similar al propuesto en la referencia [4.5], con la diferencia de que ellos proyectan el periodo unitario y los patrones de alta frecuencia por separado, también, para obtener los valores de fase utilizan técnicas de cambio de fase, los cuales requieren al menos tres imágenes.

Para generar el patrón se plantea la siguiente ecuación.

$$I_D(x,y) = \left(\frac{G}{6}\right) \{3 + \cos(2\pi f x) + \cos(2\pi f y) + \cos[2\pi (f+1)x + 2\pi f y]\},\tag{4.8}$$

donde f es la frecuencia portadora, G es una constante que representa el valor de amplitud requerido para obtener el máximo nivel de gris (de nueva cuenta, 255 para imágenes con 8 bits), (x, y) son las coordenadas de pixel normalizadas e  $I_D(x, y)$  es la imagen con sus niveles de gris en un rango [0, G]. Se puede apreciar que el patrón dado por la ecuación 4.8, se compone de tres patrones de franjas: el primero de ellos con franjas horizontales, otro con patrón de franjas verticales y finalmente, un patrón de franjas con una inclinación de casi 45°. Si se denotan los términos de la portadora como:

$$c_x(x,y) = 2\pi f x;$$
  $c_y(x,y) = 2\pi f y;$   $c_{xy} = 2\pi (f+1)x + 2\pi f y$  (4.9)

Entonces la siguiente relación se mantiene:

$$c_{xy}(x,y) - c_x(x,y) - c_y(x,y) = 2\pi x.$$
(4.10)

El coseno de la ecuación 4.10, es una franja vertical de un solo periodo. Para simplificar la notación se eliminan los términos (x, y). El patrón de intensidad que se obtiene después de proyectar la ecuación 4.8, sobre la superficie está dada por;

$$i = a + b[\cos(c_x + \varphi^x) + \cos(c_y + \varphi^y) + \cos(c_{xy} + \varphi^{xy})], \qquad (4.11)$$

en donde *a* y *b* son los términos de background y amplitud que dependen de la reflectividad del objeto, respectivamente, y  $\varphi^x$ ,  $\varphi^y$  y  $\varphi^{xy}$ , son las funciones de fase relacionadas con la altura del objeto h(x, y). La ecuación 4.11 puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$i = a + d_x \exp(jc_x) + d_y \exp(jc_y) + d_{xy} \exp(jc_{xy}) + d_x^* \exp(-jc_x) + d_y^* \exp(-jc_y) + (4.12)$$
$$d_{xy}^* \exp(-jc_{xy}),$$

donde  $d_x = \frac{1}{2}b \cdot exp(j\varphi^x)$ ,  $d_y = \frac{1}{2}b \cdot exp(j\varphi^y)$  y  $d_{xy} = \frac{1}{2}b \cdot exp(j\varphi^{xy})$ ,  $j = \sqrt{-1}$  y \* significa el complejo conjugado. La transformada de Fourier de la ecuación 4.12, puede expresarse como;

$$I(u,v) = A(0,0) + D_x(u-f,v) + D_y(u,v-f) + D_{xy}(u-f-1,v-f) +$$

$$D_x^*(u+f,v) + D_y^*(u,v+f) + D_{xy}^*(u+f+1,v+f),$$
(4.13)

donde (u, v) son las coordenadas de frecuencia, y f, es la frecuencia portadora de la ecuación 4.8. La ecuación 4.13, consiste de siete espectros centrados en las frecuencias (0,0), (f,0), (0,f), (f + 1, f), (-f, 0), (0, -f), y (-f - 1, -f). Como las distancias entre los centros de los espectros dependen de la frecuencia, no se sobreponen unos con otros siempre y cuando la frecuencia sea lo suficientemente grande. Debido a que cada espectro y su conjugado contienen la misma información de fase, se seleccionan solamente  $D_x$ ,  $D_y$  y  $D_{xy}$  a través de un proceso de filtraje en el espectro de Fourier. Las separaciones de estos términos son llevadas a cabo por un filtro pasabanda, y posteriormente aplicándoles la transformada inversa de Fourier. Las fases son obtenidas con el *arctg* de la parte imaginaria sobre la parte real. De este modo, se tienen las siguientes tres fases.

$$\Phi^{x} = [c_{x} + \varphi^{\prime x}]_{mod \ 2\pi} = arctg\{Im[D_{x}(u - f, v)]/Re[D_{x}(u - f, v)]\},$$
(4.14a)

$$\Phi^{y} = [c_{y} + \varphi^{\prime y}]_{mod \ 2\pi} = arctg\{Im[D_{y}(u, v - f)]/Re[D_{y}(u, v - f)]\},$$
(4.14b)

 $\Phi^{xy} = [c_{xy} + \varphi'^{xy}]_{mod \ 2\pi} = arctg\{Im[D_{xy}(u - f - 1, v - f)]/Re[D_{xy}(u - f - (4.14c) + (0.14c) +$ 

Por lo tanto lo siguiente se cumple.

$$\Phi^{W} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin(\Phi^{xy} - \Phi^{x} - \Phi^{y})}{\cos(\Phi^{xy} - \Phi^{x} - \Phi^{y})} \right].$$
(4.15)

Aplicando la ecuación 4.10 a lo anterior se puede decir que consiste de un solo periodo y debido a la función *arctg*, está dentro del rango de 0 a  $2\pi$ . La finalidad es obtener  $\Phi$ , la función desenvuelta de  $\Phi^w$ . Si el objeto bajo estudio no es muy alto se puede obtener directamente  $\Phi$  ya que en ese caso particular será igual a  $\Phi^w$ , sin necesidad de emplear algún tipo de algoritmo de desenvolvimiento, sin embargo con poco detalle. De cualquier otra manera, será necesario efectuar el desenvolvimiento, y para cualquier caso se cumple la siguiente relación.

$$\Phi = (c_{xy} - c_x - c_y) + (\varphi^{xy} - \varphi^x - \varphi^y).$$
(4.16)

Usando la ecuación 4.10 en la ecuación anterior, se tiene

$$\Phi(x, y) = 2\pi x + \varphi^{Eq}(x, y).$$
(4.17)

Donde  $\varphi^{Eq} = \varphi^{xy} - \varphi^x - \varphi^y$  representa la fase equivalente de las diferencias de fase. Entonces lo que se ha obtenido es la fase  $\Phi(x, y)$  de la proyección de una franja vertical con un solo periodo. Sin embargo como se sabe de [4.15], la fase y la altura de la superficie se relacionan, de la siguiente manera.

$$\varphi(x,y) = 2\pi f h(x,y)/D, \qquad (4.18)$$

donde *D*, es una constante que depende de las posiciones de la cámara respecto del proyector, h(x, y) es la altura de la superficie y *f* es la frecuencia portadora de las franjas. Se considera D = l/d, en donde *d* es la separación entre la cámara y el proyector y *l* es la distancia del proyector a la superficie del plano de referencia.

Como la altura de la superficie es calculada a partir de la función de fase, esta depende de la frecuencia de las franjas proyectadas  $h(x, y) = D\varphi(x, y)/2\pi f$ , lo deseable es que la frecuencia sea lo mayor posible para obtener una mayor resolución. En este caso, la fase  $\Phi^x$  calculada con la

ecuación 4.14a fue obtenida con una frecuencia portadora f; por lo tanto, en principio, es f veces más sensible que la fase  $\Phi$  obtenida con la ecuación 4.17. Ahora se describe el procedimiento para obtener  $\Phi^x$  dado  $\Phi$ , o bien, desenvolver  $\Phi^x$  a partir de  $\Phi$ .

De las ecuaciones 4.9, 4.11, y 4.17, se puede ver que multiplicando  $\Phi(x, y)$  por f, proporciona un valor aproximado de la fase desenvuelta  $\Phi^x(x, y)$ . De otro modo el orden de franja N(x, y) relaciona la fase envuelta  $\Phi^x(x, y)$ , y la fase desenvuelta  $\Phi(x, y)$  con la ecuación.

$$N(x,y) = [f\Phi(x,y) - \Phi^{x}(x,y)]/2\pi.$$
(4.19)

Por lo tanto, se puede desenvolver  $\Phi(x, y)$  usando la ecuación.

$$\Phi_u^x(x,y) = \Phi^x(x,y) - 2\pi N(x,y), \tag{4.20}$$

en donde  $\Phi_u^x(x, y)$ , es la fase desenvuelta de  $\Phi^x(x, y)$ . También se pueden obtener los órdenes de las franjas de  $\Phi^x(x, y)$  de la siguiente manera:

$$N_0(x,y) = [f2\pi x - \Phi^x(x,y)]/2\pi.$$
(4.21)

Y es posible obtener otra estimación para la fase desenvuelta de  $\Phi^{\chi}(x, y)$  dada por

$$\Phi_{0u}^{x}(x,y) = \Phi^{x}(x,y) - 2\pi N_{0}(x,y).$$
(4.22)

Con la restricción de que saltos en la fase mayores a  $2\pi$  no se pueden obtener a través de  $\Phi_{0u}^{x}(x, y)$ .  $N_{0}(x, y)$  y N(x, y) son funciones importantes que se usarán más adelante para eliminar algún error no deseado.

Un aspecto importante es el rango dinámico máximo con el que se puede trabajar. En la referencia 4.15, se muestra que para un solo patrón senoidal de frecuencia f y una frecuencia máxima  $f_b$  (background), la siguiente condición se cumple (solamente dos espectros interactúan).

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right| < 2\pi(f-f_b). \tag{4.23}$$

Sin embargo en este caso, se tendrán interacciones entre cuatro espectros A(0,0),  $D_x(u - f, v)$ ,  $D_y(u, v - f) \neq D_{xy}(u - f - m, v - f)$ . Como la separación de los centros de esos espectros, es mayor o igual a f, la frecuencia de corte de cada espectro debe de ser mayor o igual a f/2. Por lo tanto, de la definición de las frecuencias locales en las direcciones  $x \neq y$  se tiene,  $2\pi f_x(x, y) = \partial \varphi(x, y)/\partial x \neq 2\pi f_v(x, y) = \partial \varphi(x, y)/\partial y$ , por lo que las nuevas condiciones del algoritmo son:

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right| < 2\pi(f - f_b), \qquad (4.24a)$$

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right| < 2\pi \left(\frac{f}{2}\right). \tag{4.24b}$$

Dado que en general,  $f_b < f/2$  se pueden simplificar las condiciones anteriores para tener,

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right| < 2\pi(\frac{f}{2}) \qquad y \qquad \left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right| < 2\pi(\frac{f}{2}). \tag{4.24c}$$

La pendiente máxima medible sin ambigüedades puede estimarse utilizando las ecuaciones 4.18, 4.24a, y 4.24c, derivando la ecuación 4.18 y sustituyendo las dos ecuaciones previas se tiene:

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right| < D/2 , \qquad (4.25a)$$

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right| < D/2. \tag{4.25b}$$

Lo que indica una reducción de casi la mitad de la pendiente tolerable de la superficie bajo estudio respecto al método de una frecuencia [4.15], y una restricción adicional a la derivada de la altura en la dirección y. Las ecuaciones 4.25a y 4.25b, son importantes puesto que ayudan a estimar el rango máximo de mediciones con un arreglo dado o para modificar los parámetros de D, (l y d), para realizar la medición de una superficie sin sobre modulación.

Cuando múltiples patrones de franjas se sobreponen en una imagen en escala de grises, el rango de intensidad para. Inicialmente cada patrón de franjas es pequeño, esto afectará en gran medida la información de fase recuperada. Para revisar el comportamiento del algoritmo bajo
restricciones añadidas por las imágenes en escala de grises, y para analizar la distancia máxima medible sin ambigüedad, se realiza la siguiente simulación.

Se generan los patrones de franjas con la ecuación 4.8 y la siguiente ecuación, la cual corresponde al método tradicional de una frecuencia.

$$i_0(x,y) = \frac{G}{2} [1 + \cos(2\pi f x)].$$
(4.26)

En ambas ecuaciones se utiliza G = 255, lo cual lleva a la ecuación 4.8 consta de la suma de tres términos con niveles de gris que van de 0 a 85, por lo que se cubre el rango de 0 a 255. Para que la simulación se apegue al experimento, la frecuencia de las franjas se define como 20. Bajo estas circunstancias, la simulación consiste en la proyección de las franjas sobre un elemento plano con h(x, y) = 0. El proceso para recuperar la fase utilizando una sola frecuencia es similar al que se describió anteriormente, esto es  $i_0(x, y)$ , es transformada por Fourier para obtener los tres espectros centrados en las frecuencias (0,0), (f, 0)y (0, -f). Mediante un filtrado pasa baja del espectro centrado en (f, 0), y calculando el inverso de su transformada de Fourier, la fase es obtenida nuevamente con la función arctg de la parte imaginaria sobre la parte real. El proceso de desenvolvimiento se lleva a cabo utilizando las ecuaciones 4.21 y 4.22.

Después de recuperar las fases de las franjas dadas por las ecuaciones 4.8 y 4.26, se substrae la portadora conocida (continua)  $2\pi f x$  para las dos métodos y después de calcular la desviación estándar y la desviación de pico a pico, los resultados son prácticamente los mismos. PV=0.0035 rad,  $std = 3 \times 10^{-4} rad$ , para el método de una frecuencia y PV = 0.00300 y  $std = 2.5 \times 10^{-4} rad$  para el patrón compuesto. Con estos resultados se puede concluir que la restricción del rango en los niveles de gris cuando se forma la superposición de los tres patrones, no afecta significativamente la exactitud del este método con respecto del método de una sola frecuencia.

#### 4.2.1 Resultados experimentales.

Para llevar a cabo el experimento, se ha usado nuevamente el sistema mostrado en la figura 4.3. Las franjas proyectadas son calculadas con la ecuación 4.8, para f = 20 y G = 255. Para analizar los resultados se usan varios objetos. En el primer caso, el objeto se compone de dos superficies planas separadas por una distancia axial de 300mm, lo cual provoca que exista un cambio de una franja entre los dos planos. La siguiente figura muestra el patrón de franjas proyectado en el primer objeto. Calculando la FFT de la figura 4.8a se obtiene el espectro mostrado en la figura 4.8b. Los picos de frecuencia pueden ser apreciados en los ejes coordenados y a 45° aproximadamente.



Figura 4.8. Franjas experimentales, a) Patrón compuesto. b) espectro de la FFT de a).

Multiplicando el resultado de la FFT con un filtro Blackmann de radio =20, (el valor de f), centrado en las coordenadas de frecuencias (0,20), (21,0)y (21,20), y calculando la FFT inversa, se obtienen tres fases dadas por las ecuaciones 4.14a, 4.14b, 4.14c, y se muestran en la figura 4.9 (ac). Por lo tanto usando la ecuación 4.15, se obtienen la diferencia de fase  $\Phi^w = \Phi$ , figura 4.9d, sin ningún proceso de desenvolvimiento, y usando esta fase  $\Phi$ , se ha calculado con la ecuación 4.19, el orden de las franjas N(x, y) de la fase  $\Phi^x$ . Se puede apreciar en la figura 4.9a que aparentemente se tienen franjas continuas sugiriendo que no existe diferencia de profundidad entre un plano y otro.





Como N(x, y) debe de ser un entero, se redondea la ecuación 4.19, a su entero más cercano. El resultado es mostrado en la figura 4.10a, en donde el orden N = 0, ha sido resaltado en la figura 4.10b, para mostrar el cambio existente entre el escalón que se está analizando. Se puede apreciar que este cambio es alrededor de un orden de franja, lo que indica un cambio de  $2\pi$ .

En la figura 4.10a, se aprecian varios ordenes falsos causados por el proceso de filtrado, sobre todo en los bordes del objeto. Con el escalamiento de  $\Phi(x, y)$ , de la ecuación 4.19, también se escalan las inexactitudes introducidas por el filtrado de Fourier, generando la aparición de estos ordenes falsos, los cuales pueden afectar el proceso. A primera vista, esto aparenta ser una gran limitación a este procedimiento, ya que se requiere del uso de procesamiento digital de imágenes para detectar áreas validas del objeto. Afortunadamente, usando la diferencia entre órdenes de franjas N(x, y) y  $N_0(x, y)$  calculadas con las ecuaciones 4.19 y 4.21 respectivamente, se puede obtener una solución.

$$N^{D}(x, y) = N(x, y) - N_{0}(x, y).$$
(4.27)

 $N^{D}(x, y)$  representa las áreas en donde las diferencias entre  $f \Phi(x, y) \neq \Phi^{x}(x, y)$  son mayores a  $2\pi$ . En áreas donde el objeto es continuo se tienen valores de  $N^{D}(x, y) = 0$ , pero en las áreas en donde existen discontinuidades se puede tener  $N^{D}(x, y) = 1$  o -1, o incluso otro, dependiendo del número de brincos de  $2\pi$ . En este caso se han escogido sólo los valores de 0 y 1, mostrados en la figura 4.10c. Con esta información, se puede desenvolver la figura 4.9a correctamente, despreciando las áreas invalidas mostradas en negro en la figura 4.10c.



Figura 4.10.- Imágenes utilizadas para desenvolver  $\Phi^x$ . a) Ordenes de las franjas. b) El orden cero obtenido de a). c) Mascara de calidad  $N^D$ .

La figura 4.11, representa la fase desenvuelta sin el término de la portadora. El brinco del objeto es evidente. El costo de usar el procedimiento de la ecuación 4.27, es que alguna información del objeto puede perderse en ubicaciones en donde los órdenes falsos de las franjas aparecen, tal y como se aprecia en la figura 4.11.

Es conveniente mencionar que en este caso la corrección de la gamma debe de ser compensada. De cualquier otro modo, el proceso de escalamiento puede ser afectado seriamente, produciendo, de esta manera, que se tengan ordenes falsos; también errores de cálculos en gamma pueden prevenir el uso de la proyección de franjas de alta frecuencia. Por lo que antes de realizar el proceso de adquisición de la imagen, se obtiene la curva de no linealidad del proyector, a través del procedimiento mostrado en el capítulo anterior, para evitar esos errores adicionales.



Figura 4.11.- Fase desenvuelta de la figura 4.8.

Como segundo objeto de prueba se coloca un tubo de PVC, con un diámetro de 11 cm. Evidentemente es una superficie suave, con suficiente altura para provocar un cambio de al menos un periodo (brinco de  $2\pi$ ). Después de aplicar el procedimiento explicado con anterioridad, se obtiene la siguiente figura, en donde se aprecia a) el patrón de franjas proyectado sobre el cilindro de PVC, b) la fase envuelta vertical, c) La diferencia de fase sin desenvolver y d) el orden de las franjas. Para estimar la exactitud del método, se usa la fase desenvuelta  $\Phi_u^x(x, y)$  para calcular la altura del objeto y su diámetro exterior. La altura h(x, y) se calcula con la ecuación 4.18,  $h(x, y) = \frac{\varphi(x, y)l}{2\pi f d}$ , con  $l = 191.5 \ cm, d = 37 \ cm, \frac{1}{f} = 1.625 \ cm$ , el valor del periodo  $p = \frac{1}{f}$  en la superficie es estimado simplemente dividiendo la longitud de la superficie iluminada entre el número de franjas proyectadas.



Figura 4.12.- Imágenes para el segundo objeto. a) Patrón compuesto proyectado en el cilindro. b) Fase envuelta vertical. c) Diferencia equivalente de fase. d) Orden de las franjas.

Para apreciar la diferencia con la fase obtenida cuando solamente se utiliza un solo patrón vertical, también se ha desenvuelto la figura 4.12b, con las ecuaciones 4.21 y 4.22 para obtener  $\Phi_{0u}^{x}(x, y)$ y calcular  $h_0(x, y)$ . En las figuras 4.13 y 4.14, se muestran las alturas del objeto bajo estudio, con el caso de solamente una frecuencia y del patrón compuesto. La diferencia de estos dos se muestra en la figura 4.15. Se puede apreciar que la diferencia consiste principalmente de un valor constante, la figura 4.17, muestra el perfil de la figura 4.14 en línea continua y 4.15 en línea punteada, en donde se ve que ambos métodos generan los mismos valores en la parte central del tubo pero con el método de tres frecuencias se detecta el brinco de ciclo, mientras que no lo hace el de una sola frecuencia.



Figura 4.13.- Altura de la fase recuperada  $\Phi_u^x(x, y)$  usando la figura 4.12.



Figura 4.14.- Altura de la fase recuperada  $\Phi_{0u}^{x}(x, y)$ , para el método tradicional de un patrón.



Figura 4.15.- Diferencia de altura entre las figuras 4.13 y 4.14.

Ajustando una circunferencia con los datos medidos (figura 4.16), se calcula un diámetro de 11.17 cm, lo que proporciona un error de aproximadamente 1.6%. Este error es el mismo para los dos métodos, debido a que los dos proporcionan los mismos resultados usados para ajustar la curva.



Figura 4.16. Perfiles transversales de altura para la figura 4.13 (continua) y figura 4.14 (punteada).

El círculo describe al perfil calculado del tubo de PVC.

El diámetro del círculo debería coincidir con la máxima altura estimada, sin embargo existen variaciones. La máxima altura fue calculada en 10.65 lo que genera un error de 3%. La exactitud puede ser mejorada si se lleva a cabo una corrección de la no linealidad más precisa, incrementado la cantidad de franjas o bien, tomar en cuenta el parámetro de la iluminación divergente, y realizando una calibración exhaustiva del sistema cámara-proyector. El rango máximo de medición con esta configuración puede ser estimado a partir de las ecuaciones 4.25a y 4.25b, debido a que  $\frac{D}{2} = 2.58$ , las máximas pendientes de h(x, y) sobre las direcciones x y y son 1.2 radianes.



Figura 4.17.- Perfiles longitudinales de la figura 4.13 (continua) y figura 4.14 (punteada).

En general se demuestra que la aplicabilidad del método depende de un proceso de calibración del sistema de proyección de luz estructurada (cámara y proyector), y con el correcto desenvolvimiento de la fase equivalente. La determinación de la frecuencia proyectada f es importante ya que es usada para escalar la fase y calcular el orden de las franjas N(x, y); sin

embargo, será el mismo valor que la frecuencia proyectada (conocida), cuando se tienen una selección adecuada del área de proyección. También es importante señalar que algunas inexactitudes se presentan en los bordes de la superficie mostradas en la figura 4.12c, que se propagan a la figura 4.13. Estos errores se deben a las técnicas de filtrado de Fourier, sobre todo en los bordes del objeto. Para obtener mejores resultados incrementando la cantidad de franjas proyectadas, se implementa el método descrito en la siguiente sección.

#### 4.3 Perfilometría utilizando particiones de fase.

Como se menciona anteriormente existen varios métodos para adquirir la información de fase en donde se trata de tener la menor cantidad de imágenes posibles, se tiene por ejemplo la modulación en amplitud en donde se determina la frecuencia unitaria [4.16]. El método de frecuencias seleccionadas que requieren dos patrones de franjas y una tabla de búsqueda para calcular los órdenes de las franjas [4.17], otros métodos que utilizan la codificación en código gray en amplitud [4.18, 4.19], o en fase [4.20]; el método que proyecta una escalera para detectar los órdenes de franjas [4.21]. Para evitar el uso de múltiples imágenes se tienen las referencias [4.22 - 4.24] las cuales trabajan a base de imágenes de color, teniendo que lidiar con el crosstalk entre los distintos canales, provocando que el contraste de las franjas se reduzca notoriamente cuando la imagen se proyecta en colores complementarios. El fundamento de esta sección es incrementar la resolución del trabajo presentado en [4.25].

Este nuevo método se puede explicar a través de los siguientes pasos: La proyección de una sola imagen la cual está compuesta por cuatro patrones de franjas, una vez capturada, se analiza por métodos de Fourier para calcular las fases individuales correspondiendo a cada frecuencia. Adicionalmente se calcula una fase unitaria para con estas fases crear los códigos para desenvolver la fase de alta frecuencia.

### 4.3.1. Construcción del patrón de franjas compuesto.

El patrón compuesto para ser proyectado se describe con la ecuación 4.28, en donde  $f_1$  y  $f_2$  son las frecuencias portadoras de mediana y alta frecuencia, *G* es una constante que representa el valor de amplitud para obtener el máximo nivel de gris (*G* = 255 para imágenes de ocho bits sin signo), (*x*, *y*) son las coordenadas de los pixeles, además que *i*(*x*, *y*) es la imagen calculada con sus niveles de gris en el rango de [0,G].

$$i(x,y) = \frac{G}{8} \{4 + \cos(2\pi f_1 x) + \cos(2\pi f_2 x) + \cos(2\pi f_2 y) + \cos[2\pi (f_2 + 1)x + 2\pi f_2 y]\}$$
(4.28)

Como se describe en el proceso anterior (sección 4.2) los términos del patrón compuesto se pueden describir nuevamente por:

$$c_x(x,y) = 2\pi f_2 x;$$
  $c_y(x,y) = 2\pi f_2 y;$   $c_{xy}(x,y) = 2\pi (f_2 + 1)x + 2\pi f_2 y;$  (4.29)

Y la siguiente relación se mantiene

$$c_{xy}(x,y) - c_x(x,y) - c_y(x,y) = 2\pi f x.$$
(4.30)

Aqui f = 1. Por lo tanto, se tiene que su coseno corresponde a una franja con periodo unitario. Si se define el operador "envuelto" W[ ] como:

$$W[g(x,y)] = atan_{\{\frac{sin[g(x,y)]}{cos[g(x,y)]}\}} + \pi$$
(4.31)

en donde  $atan^2$  es la función trigonométrica tangente expandida al intervalo de  $[-\pi, \pi]$ , la expresión de la ecuación 4.30 sigue siendo válida bajo la aplicación del operador envuelto.

$$W[c_{xy}(x,y) - c_x(x,y) - c_y(x,y)] = W[2\pi x].$$
(4.32)

Esta ecuación como se menciona anteriormente es la base del procedimiento de la sección anterior, y se demuestra que

$$W[W[c_{xy}(x,y)] - W[c_x(x,y)] - W[c_y(x,y)]] = W[2\pi x].$$
(4.33)

Con esto se puede encontrar una fase desenvuelta que consta de un periodo al que se describe como  $\varphi_l(x, y)$ . Siguiendo el procedimiento básico mostrado en la sección anterior se pueden encontrar las fases de mediana frecuencia  $\varphi_m(x, y)$ , y la fase envuelta de alta frecuencia  $\varphi_h(x, y)$ , en donde dos fases de baja frecuencia determinan los órdenes de la fase de alta frecuencia, lo que simplifica su desenvolvimiento.

Para propósitos demostrativos, se simula lo descrito anteriormente para 49 franjas en la fase de alta frecuencia. La figura 4.18a muestra el patrón compuesto, generado a partir de la ecuación 4.28, y la figura 4.18b muestra su espectro de Fourier.



Fig. 4.18. a) Patrón de franjas compuesto para alta frecuencia (49 franjas) b) Espectro de Fourier de a).

Empleando las ecuaciones descritas con anterioridad se calculan las fases para alta, mediana y baja frecuencia, las cuales se muestran en la figura 4.19 respectivamente.



Fig. 4.19. a) Fase envuelta para el patrón de alta frecuencia (49 periodos). b) Fase envuelta para el patrón de mediana frecuencia (7 periodos). c) Fase desenvuelta calculada para una sola franja.

La fase envuelta de las frecuencias baja y media  $\varphi_l(x, y) \neq \varphi_m(x, y)$ , respectivamente, son utilizadas para obtener los órdenes de cada periodo del patrón de alta frecuencia por la propiedad de que el rango de las fases siempre está en el rango de  $[-\pi, \pi]$ . Para obtener los órdenes, es necesario verificar los valores de fase y aplicar umbrales dados por  $2\pi/N$ , en donde N, es el número de códigos para cada ciclo. Los códigos u órdenes pueden ser calculados con la información presente en la siguiente tabla. En el caso analizado, se tienen los mismos siete umbrales en los dos casos tanto para la fase de baja frecuencia, como en la de mediana frecuencia. Para la baja frecuencia existen siete valores en la fase de un periodo  $\varphi_l^{th}(x, y)$ , y el mismo proceso se repite en la fase de mediana frecuencia creando nuevamente siete niveles  $\varphi_m^{th}(x, y)$ , con la particularidad de que los niveles se repiten en cada ciclo. Para obtener el orden se utiliza la tabla 4.1.

Codeword	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	 44	45	46	47	48
Th 1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	 6	6	6	6	6
Th 2	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	 2	3	4	5	6

Tabla 4.1. Generación de los órdenes a través de los valores umbralizados de las fases de baja y mediana frecuencia.

Se puede apreciar claramente en la figura 4.20, que los niveles obtenidos  $\varphi_l^{th}(x, y) \neq \varphi_m^{th}(x, y)$  están alineados salvo en algunos casos debido a redondeos. Sin embargo, de manera general se provee una sola combinación posible entre los dos valores, con lo cual se generan  $m \times n$  órdenes para el proceso del desenvolvimiento de la fase de alta frecuencia, en donde m representa los niveles de los umbrales en la fase de baja frecuencia y n representa los niveles en el caso de la mediana frecuencia. Como se toma m = 7, n = 7 se tienen los 49 ordenes, mostrados en la figura 4.20.



frecuencia (línea punteada) b) Órdenes generados.

Después de calcular los órdenes para cada franja, la fase desenvuelta se determina utilizando la siguiente ecuación, en donde  $\Phi(x, y)$  es la fase desenvuelta,  $\varphi_h(x, y)$  es la fase de alta frecuencia, y N(x, y) es el orden de las franjas:

$$\Phi(x, y) = \varphi_h(x, y) + 2 * \pi * N(x, y).$$
(4.34)

Analizando la figura 4.20 se puede apreciar que se presentan valores erróneos en los cambios de orden, causando por consiguiente que la fase calculada a través de la ecuación 4.34 presente valores equivocados. Este problema ha sido estudiado recientemente y solucionado para el desenvolvimiento de fase en ese caso utilizando codificación gray[4.18]. Este método puede ser fácilmente aplicado para resolver el problema expuesto. Aplicando ese proceso los errores son evitados, y el resultado final para la fase desenvuelta después de la corrección se muestra en la figura 4.21.



Fig. 4.21. Fase desenvuelta obtenida con el método propuesto.

#### 4.3.2. Resultados experimentales

Para llevar a cabo los experimentos, se ha usado el armado esquematizado en la figura 4.22. Es un sistema de proyección típico, el cual consta de un proyector digital Optoma modelo PK-301, manejado por una computadora y una camara pixelink modelo PL-E301. El ángulo formado entre el proyector y la cámara fue colocado en 0.1 rad, y la distancia del proyector al objeto fue de 1800 mm. Las franjas proyectadas se calcularon a partir de la ecuación 4.28, con  $f_1 = 20$ ,  $f_2 = 80$  y

G = 255. El primer objeto analizado es un tubo de PVC, de 11 cm de diámetro exterior, el cual genera varios cambios de fase mayores a  $2\pi$ .



Fig. 4.22. Esquema del armado experimental

La figura 4.23a, muestra el patrón compuesto generado proyectado en el primer objeto de prueba, y en la figura 4.23b, su espectro de Fouirer.



Figura 4.23. a) Patrón compuesto proyectado sobre el tubo de PVC. b) Espectro de Fourier de a).

114

Aplicando el proceso descrito se obtienen las tres fases, las cuales corresponden a la baja, mediana (20 periodos) y alta frecuencia (80 periodos). Los resultados se muestran en la siguiente imagen.



Fig. 4.24. Las fases envueltas obtenidas a través del filtrado del espectro de Fourier de la figura 4.23. a) Para la alta frecuencia (80 periodos). b) para la mediana frecuencia (20 periodos). c) Para la baja frecuencia (solamente un periodo).

Las figuras 4.25a y 4.25b son utilizadas para calcular los órdenes de las franjas en donde para la franja de un solo periodo se utilizan 20 umbrales y en el caso de la de mediana frecuencia se emplean cuatro umbrales los cuales se repiten en cada ciclo. El resultado es mostrado en la figura 4.26. El renglón 200 se resalta en la imagen y se grafica su perfil para evaluar el comportamiento de los órdenes, en donde se aprecian errores en el borde de la imagen debido a errores en el cálculo de la fase de una sola frecuencia debido a la no linealidad del sistema, el cual va más allá de este método.



Figura 4.25. a) perfil de la fila 200 de N(x, y). b) Ordenes de las franjas N(x, y).

Una vez que la fase desenvuelta es calculada se puede transformar fácilmente a información en 3D, utilizando la siguiente ecuación.

$$h(x,y) = \frac{\Phi_{pl} - \Phi_{ob}}{c},$$
 (4.35)

en donde  $\Phi_{pl}$  es la fase desenvuelta para un plano, o simplemente una rampa de niveles conteniendo el valor mínimo 0 y como máximo valor  $2\pi f$ , siendo fel número de franjas del patrón de alta frecuencia,  $\Phi(x, y)$ es la fase calculada para el objeto analizado y c una constante dada por el armado experimental. La información en 3D para el tubo de PVC es mostrado en la siguiente figura.



Fig. 4.26. Reconstrucción tridimensional del tubo de PVC.

Para verificar la validez del método propuesto cuando se analizan objetos con discontinuidades y formas complejas, se llevaron a cabo dos experimentos con objetos diferentes. El primero consistió de dos botellas aisladas especialmente, las cuales tienen diferentes formas y tamaños respecto al plano de referencia. El segundo objeto analizado es un maniquí. Para analizar la pérdida de información debido a los procesos de Fourier, se recalcula lo anterior utilizando métodos de corrimiento de fase, lo cual implica obviamente el incremento en el número de imágenes utilizadas, cuatro para cada fase, por lo que se requieren 12 imágenes cuando se emplea el método de los cuatro pasos, el cual como es bien sabido tiene inmunidad a la no linealidad del sistema de proyección, y los errores debidos esta causa no influyen en gran medida en la fase calculada. Las imágenes proyectadas están dadas por las siguientes cuatro ecuaciones.

$$I_1(x,y) = A + Bsin(2\pi f x + 0), \qquad (4.36)$$

$$I_2(x, y) = A + Bsin(2\pi f x + \pi/2), \tag{4.37}$$

$$I_3(x, y) = A + Bsin(2\pi f x + \pi), \tag{4.38}$$

$$I_4(x, y) = A + Bsin(2\pi f x + 3\pi/2).$$
(4.39)

La fase envuelta está dada por:

$$\varphi_a(x, y) = atan2\left(\frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1}\right),\tag{4.40}$$

donde  $\varphi_a$  representa las fases envueltas para la baja, mediana y alta frecuencia, para los tres casos. Una vez que se obtienen las fases envueltas, se le aplica el mismo procedimiento desarrollado para la técnica de Fourier. Los resultados se analizan utilizando los dos procedimientos con el fin de realizar la comparación entre ellos y efectuar el análisis de error. En la figura 4.27 se aprecian los resultados para el procedimiento de "phase shifting" y técnica tradicional de Fourier. En el primer caso se aprecia la correcta reconstrucción de los objetos con la desventaja de requerir 12 imágenes. En el caso del método de Fourier, se tiene un buen detalle en la superficie reconstruida, sin embargo, no se incluyen los brincos en la fase lo que produce mediciones erróneas.



Figura 4.27. Resultados para los métodos de phase shifting (a y b). Resultados para el método de Fourier tradicional (c y d).

En la figura 4.28 se aprecia inicialmente el patrón del método propuesto proyectado sobre los objetos de prueba, y los resultados para la fase desenvuelta en donde se aprecian áreas de discontinuidad generadas por efectos de la no linealidad del sistema cámara-proyector. Estos tienen un brinco de  $2\pi$ , los cuales se corrigen tomando en cuenta el valor entero más cercano de





Una vez que se corrigen las fases desenvueltas se convierten a información tridimensional, a partir

de la ecuación 4.35. En la siguiente figura se aprecian los resultados.



Fig. 4.29. Resultados utilizando el método propuesto: a) Para los botes, b) Para el maniquí.

### 4.3.3. Análisis numérico de resultados.

El tamaño de las ventanas utilizando el filtro Blackmann en el método tradicional de Fourier y el método propuesto se determinaron empíricamente para obtener la mejor calidad en la reconstrucción incrementando su tamaño, de manera que para cada filtro, éste no incluyera frecuencias del espectro contiguo, quedando en 80 y 45 pixeles respectivamente. La diferencia en el tamaño de las ventanas explica una calidad de detalle mayor en el Fourier tradicional y el suavizado en los resultados del método propuesto. Adicionalmente en la figura 4.30 se muestran perfiles de los botes para los dos métodos.



Fig. 4.30. Perfiles de los botes en la dirección x a) y en la dirección y b), c) acercamiento de la ventana resaltada en b).

Un análisis numérico de los datos resaltados en la figura anterior muestra que las desviaciones pico-valle obtenidas con el patrón compuesto y el método tradicional de Fourier comparadas con el método de "phase shifting" fueron de 0.6 mm y 0.7 mm respectivamente. Las desviaciones estándar de sus diferencias es de 0.27 mm y 0.19 mm respectivamente. Debido a que la altura promedio del objeto fue de 110 mm se estiman los errores PV alrededor del 1%. Con esto se puede decir que la aplicabilidad del método propuesto es influenciada por una buena calibración de las no linealidades en el sistema de luz estructurada.

La pérdida de información es minimizada cuando se incrementa el número de franjas. Con este método se pueden incrementar el número de franjas con respecto al método propuesto en la sección anterior en donde se tienen hasta 20 franjas, particularmente el número de franjas es restringido por la resolución del proyector que fue de 80, aunque con el uso de otro proyector se puede incrementar.

## Referencias

[4.1] J. Apolinar Muñoz-Rodriguez, and Ramon Rodriguez-Vera, "Evaluation of the light line displacement location for object shape detection", *Journal of Modern Optics*, Taylor and Francis group, Mexico 2003, pp 137-154. Volume **50** ussue 1.

[4.2] Pramod K. Rastogi, "Optical Measurement techniques and applications", *Artech House*, 1997.

[4.3] H. O. Saldner and J. M. Huntley "Temporal phase unwrapping: application to surface profiling on discontinuous objects", *Applied Optics OSA*. pp. 2770-2775. Volume **36** issue 13, 1997.

[4.4] JieLin Li, Hong-Jun Su and Xian-Yu Su, "Two frecuency grating used in phase measuring profilometry", *Applied Optics, OSA*, pp. 277-280 Volume **36** issue 1, 1997.

[4.5] JieLin Li, Laurence G. Hassebrock, and Chun Guan "Optimized two-frequency phase measuring profilometry light sensor temporal noise sensitivity" *Journal of the Optical Society of America OSA*, pp. 106-115 volume **20** issue 1, 2003.

[4.6] Eun-Hee Kim, Joonku Hahn, Hwi Kim, and Byoungho Lee "Profilometry without phase unwrapping using multi-frequency and four-step phase-shift sinusoidal fringe projection", *Optics Express*, OSA, pp. 7818-7830. Volume **17** issue 10, 2009.

[4.7] Kyung-Il Joo, Chang-Sub Park, Min-Kyu Park, Kyung-Woo Park, Ji-Sub Park, Youngmin Seo, Joonku Hahn, and Hak-Rin Kim "Multi-spatial-frequency and phase-shifting profilometry using a liquid crystal phase modulator", *Applied Optics*, OSA, pp. 2624-2632. Volume **51** issue 14. 2012.

[4.8] Gorthi SS, Rastogi PK. Fringe projection techniques : whither we are? *Opt Laser Eng.* **48**, pp. 133, 2010.

[4.9] Zhang S. "Recent progress on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques", *Opt Laser Eng*, **48**, pp. 149, 2010.

[4.10] Takeda M, Gu Q, Kinoshita M, Takai H, Takahashi Y. "Frequency-multiplex Fourier-Transform profilometry: a single shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolation" *Appl Opt*, **36** pp. 5347, 1997.

[4.11] Wei Hung Su, Hongyu Liu. "Calibration-based two-frequency projected fringe profilometry; a robust accurate, and signle-shot measurement for objects with large depth discontinuities", *Opt Express* **14** pp. 9178, 2006.

[4.12] Wei-Hung Su. "Color-encoded fringe projection for 3D shape measurements", *Opt Express* **15** pp. 13167, 2010.

[4.13] Zhang ZH. "Review of single-shot 3D shape measurement by phase calculation based fringe projection techniques", *Opt Laser Eng.*, **50**, pp. 1097, 2012.

[4.14] Li J, Hassebrook LG, Guan Ch. "Optimized two-frequency phase-measuring profilometry light-sensor temporal-noise sensitivity", *J Opt Soc Am A*, **20**, pp. 106, 2003.

[4.15] Takeda M, Mutoh K. "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes", *Appl. Opt* **22**, pp. 3977, 1983.

[4.16] S. Gai and F. Da, "Fringe image analysis based on the amplitude modulation method", *Opt. Exp.*, **18**, pp. 10704-10719, 2010.

[4.17] Y. Ding, J. Xi, Y. Yu and J. Chicharo, "Recovering the absolute phase maps of two fringe patterns with selected frequencies", *Opt. Lett.*, **36**, pp. 2518-2520, 2011.

[4.18] D. Zheng and F. Da, "Self-correction phase unwrapping method based on Gray-code light", *Opt. Las. Eng.*, **50**, pp. 1130-1139, 2012.

[4.19] Q. Zhang, X. su, L. Xiang and X. Sun, "3-D shape measurement based on complementary Gray-code light", *Opt. Las. Eng.* **50**, pp. 574-579, 2012.

[4.20] Y. Wang and S. Zhang. "Novel phase-coding method for absolute phase retrieval", *Opt. Lett.* **37**, pp. 2067-2069, 2012.

[4.21] S. Zhang, "Composite phase-shifting algorithm for absolute phase measurement", *Opt. Las. Eng*, **50**, pp. 1538-1541, 2012.

[4.22] Wei-Hung Su and H. Liu, "Calibration-based two-frequency projected fringe profilometry: a robust, accurate, and single-shot measurement for objects with large depth discontinuities", *Opt. Exp.* **14**, pp. 9178-9187, 2006.

[4.23] Wei-Hung Su, "Color-encoded fringe projection for 3D shape measurements", *Opt. Exp.* **15**, pp. 13167-13181, 2007.

[4.24] W. Liu, Z. Wang, G. Mu and Z. Fang, "Color-coded projection grating method for shape measurement with a single exposure", *Appl. Opt.* **39**, pp. 3504-3508, 2000.

[4.25] C. A. García Isaís and N. A. Ochoa, "One shot profilometry using a composite fringe pattern", *Opt. Las. Eng*, **53**, pp. 25-30, 2014.

## Capítulo V

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones y trabajo futuro

Esta investigación se desarrolló en varias etapas: en la primera parte se hizo el análisis de los algoritmos de localización de robots móviles, resolviendo aspectos de dificultad considerable, ya que para su implementación fue necesario contar con plataformas adecuadas de desarrollo. Al no poseer un robot que se adecuara a nuestras características se tuvieron que desarrollar sistemas completos, desde la plataforma, los controles electrónicos, interfaces de comunicación para la adquisición de datos, incluso, la fabricación de los sensores que pudieran ayudar a realizar las funciones del robot. Como se describe en el capítulo II, el robot utilizado fue enteramente desarrollado en este proyecto. Una vez que se contó con la plataforma adecuada para la resolución del problema de localización se pudo implementar satisfactoriamente la localización del sistema en un entorno conocido para posteriormente llevar a cabo el mapeo del entorno pero con una plataforma diferente.

Debido a la complejidad de la localización y el mapeo simultaneo utilizando el robot, se hizo imposible continuar trabajando con la plataforma desarrollada debido a la carencia de los sensores requeridos, por lo que se buscó una institución en donde se pudiera tener una colaboración, encontrando en el Centro de Investigaciones en Matemáticas, no solo la plataforma Pioneer 3-AT, sino además, el conocimiento y las asesorías necesarias para llevar a cabo estos algoritmos probabilísticos. De esta manera llegamos a realizar el mapeo correctamente utilizando la técnica de grid mapping del laboratorio de robótica tal y como se muestra en los resultados correspondientes a ese capítulo.

El principal objetivo de este trabajo es incluir sistemas de visión a través de luz estructurada con el propósito de obtener mayor precisión y exactitud tanto en la localización como en el mapeo del robot, o bien realizar mediciones de algún objeto "in situ", lo que implica mover el sistema de adquisición de información en 3D a través del entorno que rodea el objeto. Estudiando este tipo

de sistemas se llegó a la conclusión de utilizar la menor cantidad de imágenes posibles para adquirir la información en tres dimensiones. En el aspecto práctico, el principal factor a corregir es la no linealidad del proyector, ya que estos dispositivos están diseñados para tener un contraste específico para las características normales de operación tales como: exhibir presentaciones, películas, imágenes, entre otros. Esta cualidad del proyector distorsiona los patrones senoidales empleados en las técnicas de proyección de luz estructurada creando errores en la fase y por lo tanto en la recuperación de la forma del objeto analizado. En el capítulo III, se exponen los trabajos desarrollados para realizar la corrección de este parámetro conocido como gamma, en donde se desarrollan y aplican nuevos métodos de corrección. Finalmente en el capítulo IV, se pone especial atención a desarrollar métodos propios de adquisición del entorno en 3D a partir de una sola imagen utilizando métodos de Fourier logrando resultados prometedores, ya que como primer resultado se tiene una resolución del sistema correspondiente a 20 franjas. Se continuó trabajando con la finalidad de mejorar el método, incrementando el número de franjas proyectadas, finalmente, se logró a través de una modificación, trabajar hasta con 80 franjas con el sistema utilizado, logrando la mejora en la calidad de los resultados obtenidos.

La aportación al estado del arte de este trabajo radica en el logro de obtener la reconstrucción tridimensional de objetos complejos, y/o con discontinuidades, mediante el desarrollo de dos métodos novedosos con proyección de luz estructurada usando únicamente la proyección de una imagen. En el caso del método "One shot profilometry with a composite pattern" [6.1], proyectamos un patrón compuesto por tres franjas con diferentes orientaciones, las cuales utilizamos para calcular la fase equivalente correspondiente a una franja. Esta fase unitaria se empleó como función intermedia para demodular franjas con frecuencia moderada y reconstruir la topografía del objeto bajo estudio; sin embargo, la resolución moderada alcanzada por este método lo hace aplicable únicamente en objetos que no presentaran muchos cambios en la altura.

Nuestro segundo método, expuesto en el artículo "One shot profilometry using phase partitions" [6.2], se tiene una mayor resolución debido a que se pueden utilizar frecuencias altas. Esto permite recuperar una mayor cantidad de información frecuencial en la superficie del objeto, no importando si existen discontinuidades o si hay cambios considerables en su topología. Estas propuestas representan un avance respecto de otros métodos en donde para tener una gran resolución se necesitan de varias imágenes, o bien utilizando una imagen no se pueden detectar correctamente objetos separados u objetos cuya altura sobrepase un periodo de la franjas proyectadas.

Como trabajo futuro estamos tratando de mejorar las técnicas que desarrollamos mediante su fusión con algunos métodos existentes en donde se tienen hasta el momento resultados prometedores. Además, se está incluyendo la información del color de los objetos a la reconstrucción tridimensional, con lo que se tendremos prácticamente una cámara RGB-D. Creemos que con los resultados obtenidos hasta el momento mejoraremos significativamente los resultados de sensores comerciales como el sensor Kinect de Microsoft.

Una vez que se tenga la reconstrucción en 3D con la información de color a partir de una sola imagen se realizará la unión de las tecnologías de los robots móviles y los métodos de iluminación de luz estructurada con el fin de obtener resultados con alta precisión en las mediciones obtenidas. La principal aplicación será la de reconstruir en 3D objetos de grandes dimensiones "in situ", incluyendo la información de color, en donde el sistema de medición sea el que efectúe el movimiento, y no como se hace tradicionalmente en donde el objeto es el que se mueve con respecto al sistema de medición. Otra aplicación es la construcción de mapas del entorno como minas o ruinas arqueológicas, con una alta calidad en los detalles, teniendo como limitante la

pérdida de información dependiendo de las características de absorción de los materiales que compongan el entorno.

## Referencias

[6.1] C. A. García Isaís and N. A. Ochoa, "One shot profilometry using a composite fringe pattern", *Opt. Las. Eng*, **53**, pp. 25-30, 2014.

[6.2] C. A. García Isaís and N. A. Ochoa, "One shot profilometry with phase partitions", *Opt. Las. Eng*, **68**, pp. 111-120, 2015.

## Apéndice



#### A.1 Propiedades de Gaussianas.

Si se tiene una función de probabilidad Gaussiana en una sola dimensión o bien univariada, esta se puede definir solamente con sus valores de media y su desviación estándar, tal y como se muestra en la siguiente ecuación.

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2).$$
 (A1.1)

Es decir;

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})}.$$
 (A1.2)

Al proyectar esta distribución de probabilidad por una función mostrada en la ecuación A1.3, se tendrá como resultado la distribución de probabilidad mostrada en la ecuación A1.4.

$$Y = aX + b, \tag{A1.3}$$

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2 \sigma^2). \tag{A1.4}$$

Ahora teniendo dos funciones de probabilidad Gaussianas  $X_1$  y  $X_2$ .

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$
 (A1.5)

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$
 (A1.6)

Se define el producto de las distribuciones de probabilidad como:

$$p(X_1) \cdot p(X_2) = N \sim \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mu_2, \frac{1}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}\right).$$
(A1.7)

Ahora para una función de probabilidad multivariada o bien, en dos dimensiones, la distribución se define como:

$$p(x) \sim N(\mu, \Sigma),$$
 (A1.8)

en donde  $\Sigma$  ahora es la matriz de covarianza, por lo que p(x), se determina por:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$
(A1.9)

Al pasar nuevamente una función de probabilidad Gaussiana (A1.10) por una función del tipo de A1.11, se tiene el resultado mostrado en A1.12.

$$X \sim N(\mu, \Sigma), \tag{A1.10}$$

$$Y = AX + B, \tag{A1.11}$$

$$Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T). \tag{A1.12}$$

De la misma manera del caso univariable, se puede aplicar el mismo producto de distribuciones en las multivariadas, definidas como:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1),$$
 (A1.13)

$$X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2),$$
 (A1.14)

\_\_\_\_\_

dando por resultado

$$p(X_1) \cdot p(X_2) \sim N(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mu_2, \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}})$$
(A1.15)

# Apéndice

В

#### Optics and Lasers in Engineering 53 (2014) 25-30



Contents lists available at ScienceDirect

journal homepage: www.elsevier.com/locate/optlaseng

Optics and Lasers in Engineering

## One shot profilometry using a composite fringe pattern

## CrossMark

#### C.A. García-Isáis, Noé Alcalá Ochoa\*

Centro de Investigaciones en Óptica, A.C., Loma del bosque 115, Col. Lomas del campestre, C.P. 37150 León, Guanajuato, Mexico

ABSTRACT

#### ARTICLE INFO

#### -----

Article history: Received 10 January 2013 Received in revised form 29 July 2013 Accepted 9 August 2013 A method is proposed to solve one of the problems that profilometry encounters when fringe projection techniques are used: the difficulty to discern between surface discontinuities that cause phase shifts greater than  $2\pi$ . Based on fringe projection of a single composite fringe pattern containing three different frequencies, such problem can be solved. Experimental results are presented using Fourier methods. © 2013 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Profilometry FFT Shape measurement Robotics

#### 1. Introduction

There is a diversity of techniques to get the shape of objects that have surface discontinuities or spatially isolated surfaces through the projection of light; perhaps the simplest is the projection of a single line, with the disadvantage of needing a scanning process [1]. In general, most methods, such as temporal phase unwrapping [2] or multi-frequency fringe projection [3], require the manipulation of various images; a detailed description of them can be found on the review articles of Refs. [4] and [5]. In order to reduce the erroneous measurements caused by object movements during the image grabbing process, or to decrease the acquisition time, it is desirable to get the 3D shape information from a single image. Takeda et al. [6] have proposed a method based on a two-frequency fringe pattern and modifications to the Gushov-Solodkin algorithm. Later, other single-shot methods have been proposed, as the two-frequency fringe pattern of [7], which requires an unwrapping process for both the high and low frequency phases. Also, a single color pattern has been proposed [8], but it requires an additional calibration process to avoid color crosstalk; moreover, the color absorption of some materials restricts its use. Additional references that utilize one image to get the surface profile can be found in the reviewed article of Ref. [9].

Our proposal deals with the projection of a single image (gray levels) to get the shape of objects having discontinuities or being spatially isolated. It is based on the projection of a composite fringe pattern with three frequencies and the calculation of a fringe pattern with an equivalent period of one. The phase of this equivalent pattern gives us the phase without using an unwrapping process. By scaling this phase, we can get the fringe orders of the high frequency components irrespective of phase discontinuities. These fringe orders help us to unwrap the phase and to determine its ambiguities caused by phase jumps greater than  $2\pi$ . This method resembles the one proposed in Ref. [10], with the difference that they project the single period and the high frequency patterns independently; also, to get its phase values, they use phase shifting techniques, which requires at least three images of each one.

#### 2. Theory

Let us explain our proposal. Using a computer, we generate a composite pattern to be projected onto the object surface given by

$$\begin{split} \dot{i}_D(x,y) &= (G/6) \{3 + \cos{(2\pi f x)} + \cos{(2\pi f y)} \\ &+ \cos{[2\pi (f+1)x + 2\pi f y]} \}, \end{split} \tag{1}$$

where *f* is a carrier frequency, *G* is a constant that represents the amplitude value introduced to obtain the maximum gray level range (i.e.  $G_{=}255$  for eight bit images), (*x*, *y*) are the normalized pixel coordinates, and  $i_D(x, y)$  is the image with its gray levels in the range [0,*G*]. It can be noticed that the pattern given by Eq. (1) comprises the sum of three fringe patterns: one with vertical fringes, another with horizontal fringes, and the last one with fringes almost at  $45^{\circ}$ . If we denote the carrier terms as follows,

$$c_x(x, y) = 2\pi f x; \quad c_y(x, y) = 2\pi f y; \quad c_{xy}(x, y) = 2\pi (f+1)x + 2\pi f y$$
 (2)

then the following relation holds,

$$c_{xy}(x, y) - c_x(x, y) - c_y(x, y) = 2\pi x,$$
 (3)

<sup>\*</sup> Corresponding author. Tel.: +52 477 4414200; fax: +52 477 4414000. E-mail address: alon@cio.mx (N. Alcală Ochoa).

<sup>0143-8166/\$-</sup>see front matter © 2013 Elsevier Ltd. All rights reserved. http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2013.08.006
its cosine is a one period vertical fringe. This is an important relation that we will use later on. To simplify our notation, we will drop off the (x, y) variables, but they will be implicit, although in some formulas, they are included to emphasize their dependence. The intensity profile that we will obtain after projecting Eq. (1)

onto the object's surface will be given by

$$i = a + b[\cos(c_x + \phi^x) + \cos(c_y + \phi^y) + \cos(c_{xy} + \phi^{xy})],$$
(4)

where *a* and *b* are background and amplitude terms that depend on the object's reflectivity, respectively, and  $\varphi^{x}$ ,  $\varphi^{y}$  and  $\varphi^{xy}$  are the phase functions related to the surface height *h*(*x*, *y*). Eq. (4) can be rewritten in the following form

$$i = a + d_x \exp(jc_x) + d_y \exp(jc_y) + d_{xy} \exp(jc_{xy}) + d_y^* \exp(-jc_x) + d_y^* \exp(-jc_y) + d_{xy}^* \exp(-jc_{xy}),$$
(5)

where  $d_x=(1/2)b \exp(j\varphi^x)$ ,  $d_y=(1/2)b \exp(j\varphi^y)$ ,  $d_{xy}=(1/2)b \exp(j\varphi^{xy})$ ,  $j = \sqrt{-1}$  and \* means complex conjugated.

The Fourier transform of Eq. (5) can be expressed as:

$$I(u, v) = A(0, 0) + D_x(u-f, v) + D_y(u, v-f) + D_{xy}(u-f-1, v-f) + D_x^*(u+f, v) + D_v^*(u, v+f) + D_{xy}^*(u+f+1, v+f),$$
(6)

where (u, v) are the frequency coordinates, and f is the carrier frequency of Eq. (1). Eq. (6) consists of seven spectrums (denoted by capital letters) centered on frequencies (0,0), (f,0), (0,f), (f+1,f), (-f,0), (0,-f) and (-f-1,-f). Since the distances from center to center of the spectrums depend on frequency f, no overlap among them occurs for f that is big enough. Because each spectrum and its conjugate contain the same phase information (except for their opposite sign), we select only  $D_x$ ,  $D_y$  and  $D_{xy}$  to be filtered. The separations of those terms are carried out by a band-pass filter, and then transformed into the space domain by the inverse of the Fourier transform. The respective phases (modulus  $2\pi$ ) are obtained with the arctg of the imaginary part over the real part. This way we end up with the following three phases (modulus  $2\pi$ ):

$$\Phi^{X} = [c_{X} + \varphi^{X}]_{\text{mod } 2\pi} = \operatorname{arctg}\{\operatorname{Im}[D_{X}(u - f, v)] / \operatorname{Re}[D_{X}(u - f, v)]\},$$
(7a)

$$\Phi^{y} = [c_{y} + \varphi^{y}]_{\text{mod } 2\pi} = \operatorname{arctg}\{\operatorname{Im}[D_{y}(u, v - f)]/\operatorname{Re}[D_{y}(u, v - f)]\},$$
(7b)

$$\Phi^{xy} = [c_{xy} + \varphi^{xy}]_{\text{mod } 2\pi} = \operatorname{arctg}\{\operatorname{Im}[D_{xy}(u-f-1, v-f)]/\operatorname{Re}[D_x(u-f-1, v-f)]\}$$
(7c)

hence, the wrapped difference of  $\Phi^{xy}$ ,  $\Phi^x$  and  $\Phi^y$  is given by

$$\phi^{w} = \arctan\left[\frac{\sin\left(\phi^{xy} - \phi^{x} - \phi^{y}\right)}{\cos\left(\phi^{xy} - \phi^{x} - \phi^{y}\right)}\right],\tag{8}$$

which, by Eq. (3), consists of only one period, and because of the arctg function, is within the range 0 to  $2\pi$ . Following with our procedure, it is important to get  $\phi$ , the unwrapped function of the low frequency wrapped function  $\phi^w$ . If the object height under test is low enough, we may have  $\phi^w = \phi$  directly, without any additional unwrapping procedure; otherwise, it will be necessary to use an unwrapping technique. In any case the following relation is satisfied

$$\Phi = (c_{xy} - c_x - c_y) + (\varphi^{xy} - \varphi^x - \varphi^y) \tag{9}$$

Using Eq. (3) in Eq. (9) we obtain

$$\Phi(x,y) = 2\pi x + \varphi^{Eq}(x,y), \tag{10}$$

where  $\varphi^{Eq} = \varphi^{xy} - \varphi^x - \varphi^y$  represents the equivalent phase of the phase differences. Then, what we have obtained is the phase  $\Phi(x, y)$  of the projection of a vertical fringe pattern with one period. However, as it is known [11], the phase and the height surface can be approximated by

$$\varphi(x, y) = 2\pi f h(x, y) / D, \qquad (11)$$

where *D* is a constant that depends on the camera and projector positions, h(x, y) is the surface height, and *f* is the frequency of the carrier fringes (in Eq. (10), f = 1). We considered D = l/d, where *d* is the separation between the camera and the projector and *l* is the distance from the projector to the surface of the reference plane.

Since the surface height calculated from the known phase function depends on the frequency of the projected fringes,  $h(x, y) = D\varphi(x, y)/2\pi f$ , it is desired to project fringes with frequencies as high as possible in order to get also higher resolution. In our case, the phase  $\Phi^x$  calculated with Eq. (7a) was obtained with a carrier frequency *f*; then, in principle, it is *f*-times more sensitive than the phase  $\phi$  obtained with Eq. (10), with the drawback that  $\Phi^x$  is a wrapped phase function. Then, we will describe a procedure to get  $\phi^x$  provided  $\phi$ , or more precisely, to unwrap  $\phi^x$  given  $\phi$ .

From Eqs. (2), (4) and (10), we can see that multiplying  $\Phi(x, y)$  by f gives us an approximate value of the unwrapped phase  $\Phi^{x}(x, y)$ . On the other hand, the fringe order number N(x, y) relates the wrapped  $\Phi^{x}(x, y)$  and unwrapped  $\Phi(x, y)$  phase functions with the equation

$$N(x, y) = [f \ \Phi(x, y) - \Phi^{x}(x, y)]/2\pi;$$
(12)

then, we can unwrap  $\varPhi^{\mathbf{x}}$  using the equation

 $\Phi_{\mu}^{X}(x,y) = \Phi^{X}(x,y) - 2\pi N(x,y), \tag{13}$ 

where  $\Phi_u^x(x, y)$  is the unwrapped phase of  $\Phi^x(x, y)$ .

We can also obtain the fringe orders of  $\Phi^{x}(x, y)$  in the following way,

$$N_0(x, y) = [f 2\pi x - \Phi^x(x, y)]/2\pi,$$
(14)

to get another unwrapped estimation of  $\Phi^{x}(x, y)$  given by

$$\Phi_{0u}^{x}(x,y) = \Phi^{x}(x,y) - 2\pi N_{0}(x,y), \tag{15}$$

with the drawback that  $\Phi_{uu}^{x}(x, y)$  is not sensitive to phase jumps greater than  $2\pi$ , as  $\Phi_{u}^{x}(x, y)$  is.  $N_{0}(x, y)$  and N(x, y) are important functions that we will use in Section 3 to discard undesired error introduced by our method.

An important aspect is the maximum dynamic range that we can work with. From Ref. [11], we know that for a traditional one direction sinusoidal projected fringe of frequency f and maximum background frequency  $f_b$ , the following condition is obtained (only two spectrums interact):

$$\left| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| < 2\pi (f - f_b), \tag{16}$$

However, in our case, we will have the interactions among the four spectrums A(0,0),  $D_x(u-f,v)$ ,  $D_y(u,v-f)$  and  $D_{xy}(u-f-m,v-f)$  (Eq. (6)). Since the separation among the centers of those spectrums is greater or equal to f, the cutoff frequency radius of each spectrum must be greater than or equal to f/2. Then, from the definition of local frequencies along x and y directions,  $2\pi f_x(x,y) = \partial \varphi(x,y)/\partial x$  and  $2\pi f_y(x,y) = \partial \varphi(x,y)/\partial y$ , respectively, the new conditions for our algorithm are

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| < 2\pi (f - f_b), \tag{17a}$$

$$\left|\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right| < 2\pi \left(\frac{f}{2}\right),\tag{17b}$$

Given that in general  $f_b < f/2$  we can simplify the conditions to be

$$\left|\partial\varphi(x,y)/\partial x\right| < 2\pi(f/2) \text{ and } \left|\partial\varphi(x,y)/\partial y\right| < 2\pi(f/2)$$
 (17c)

The maximum slope (steep of the surface) measurable without ambiguity can be estimated from Eqs. (11) and (17a)-(17c). Deriving Eq. (11) and substituting in the previous two equations we find

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right| < D/2,\tag{18a}$$

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right| < D/2,\tag{18b}$$

which mean a reduction of almost half the tolerable slope of the surface under test respect to the one frequency method [11] and an additional restriction on the derivative of the height according to the *y*-direction. Eqs. (18a) and (18b) are important since they help us to estimate the maximum range of measurement with a given set-up or to modify the parameters of D, (l and d) to measure a given surface without over modulation.

It is convenient to mention also that since our method provides integer numbers to unwrap the phase obtained with the projection of one-frequency, the resolution must be the same.

When multiple (here, it is three) fringe patterns are overlapped in a gray image, the intensity range for each fringe pattern is small. First of all, it will greatly affect phase information. In order to show the behavior of our algorithm under gray images restrictions and to analyze the maximum step measurable without ambiguity we will do the following simulation.

We computer-generate fringe patterns with Eq. (1) and the following equation (which corresponds to the traditional onefrequency projection method):

$$i_0(x, y) = (G/2)\{1 + \cos(2\pi f x)\},$$
(19)

In both equations we set G=255 which lead that Eq. (1) consists of the sum of three terms with gray levels ranging from 0 to 85 and that the one term of Eq. (19) covers the full range from 0 to 255. To make the simulation faithful to the experiment, fringe frequency *f* was chosen to be 20. Under these circumstances, our simulation consists in the projection of fringes over a flat element with h(x, y) = 0. The process to recover the phase using only one frequency is similar to the one described previously; that is,  $i_0(x, y)$  is Fourier transformed to obtain three spectrums centered on (*f*,0), and calculating its inverse of the Fourier transform, the respective phase (modulus  $2\pi$ ) is obtained with the arctg of the imaginary part over the real part. Unwrapping is carried out using Eqs. (14) and (15).

After recovering the phases of the fringes given by Eqs. (1) and (19), we subtracted the known carrier (continuous) function  $2\pi f x$  to both phases. Afterwards, we calculated their standard (std) and Peak-To Valley (PV, defined as the maximum minus minimum deviation) deviations. The results were practically the same of PV = 0.0035 rad, std =  $3 \times 10^{-4}$  rad for the one frequency method and PV = 0.0030 rad, std =  $2.5 \times 10^{-4}$  rad for the composite. With these results we can conclude that the gray level restriction when forming the superposition of the three patterns to form the composite pattern does not influence significantly the accuracy of our method respect to the one frequency method.

# 3. Experimental results and discussions

Next, we will describe some experiments and practical suggestions for the above unwrapping procedure.

To perform the experiments, we have used the experimental setup depicted in Fig. 1. It is a typical projection system comprised of a digital projector (Optoma, model PK 301) driven by a computer and a camera (pixelink, model PL-E531, square pixel size of  $5.2 \,\mu$ m) to record the projected fringes. The angle between the projector and the object was of 1800 mm. The projected fringes were calculated

136



Fig. 1. Experimental setup used to project the computer generated fringes onto an object composed of two parallel planes.



Fig. 2. Experimental projected fringes. (a) Composite fringe pattern and (b) power spectrum of the FFT of (a).

with Eq. (1) settings f = 20 and G = 255. The period of the fringes measured on the object surface was of approximately 15 mm. The first object was composed of two parallel planar surfaces separated by an axial distance of 300 mm, which made the projected fringes shift a full cycle between both planes.

The following figure shows the fringe pattern projected onto our first test object. Calculating the FFT of Fig. 2(a), we obtain its power spectrum depicted in Fig. 2(b). Frequency peaks can be appreciated along the coordinate axes and at 45<sup>\*</sup>.

Multiplying the FFT result with a Blackmann filter of radius = 20 (the value of *f*), centered on frequency coordinates (0,20), (21,0) and (21,20), and calculating the three inverse FFT, we have obtained the three wrapped phases given by Eqs. (7a)–(7c) and shown in Fig. 3(a–c). Thereby, using Eq. (8), we obtained the phase difference  $\Phi^w = \Phi$  (Fig. 3(d)) without unwrapping, and using this phase  $\phi$ , we calculated, with Eq. (12), fringe order N(x,y) of phase  $\Phi^x$  (Fig. 3(a)). In Fig. 3(a), notice the apparently continuous fringes on both planes, suggesting no depth difference.

As N(x, y) must be an integer, we have rounded Eq. (12) to its nearest integer; the result is shown in Fig. 4(a), where order N=0has been highlighted in Fig. 4(b) in order to show the shift caused by the step of the object under analysis. It can be appreciated that such shift is about one fringe order, which means a  $2\pi$  phase step.

In Fig. 4(a), various spurious fringe orders caused by the Fourier filtering process can be appreciated at the object's edges; the scaling process of  $\Phi(x, y)$  in Eq. (12) also scales the inaccuracies introduced by the Fourier filtering procedure, rendering in the appearance of these spurious orders, which may affect the unwrapping process. At first glance, this seems to be a severe

C.A. García-Isáis, N. Alcalá Ochoa / Optics and Lasers in Engineering 53 (2014) 25-30



Fig. 3. Wrapped phase components obtained from filtering the Fourier spectrum. (a) Horizontal, (b) vertical, (c) inclined and (d) wrapped difference among them.





Fig. 5. Unwrapped phase (radians) of Fig. 2.

Fig. 4. images used to unwrap  $\Phi^{*}$ . (a) Finge order number. (b) Zero Finge order obtained from (a). Note the shift between upper and lower areas indicating the existence of a jump between them (c) quality mask  $N^{0}$ .

limitation of our proposal, since it implies the necessity of the use of digital image processing techniques to detect valid areas of the object. Fortunately, the fringe order difference of N(x, y) and  $N_0(x, y)$ , calculated with Eqs. (12) and (14) respectively, may give us a solution

## $N^{D}(x,y) = N(x,y) - N_{0}(x,y)$ (20)

 $N^D(x, y)$  represents the areas where the differences between  $f \Phi(x, y)$  and  $\Phi^x(x, y)$  are greater than  $2\pi$ . Areas where the object is continuous have values of  $N^D = 0$ , but the values for areas where there are discontinuities may be  $N^D = 1$  (or -1), or another, depending on the number of  $2\pi$  jumps. In our case, we have chosen only the values of 0 and 1, shown in Fig. 4(c). With this information, we can unwrap Fig. 3(a) correctly, discarding the invalid areas shown in black in Fig. 4(c). Fig. 5 represents the unwrapped phase with the carrier term subtracted. The step of the object is clearly seen. The price to be paid for using the simple procedure of Eq. (20) is that some information of the object can be lost at the locations where the spurious fringe order appears, as appreciated in Fig. 5.

It is convenient to mention that the gamma correction of the fringes projected must be compensated; otherwise, the scaling process of the phase could be severely affected, rendering the introduction of more spurious fringe orders; also, gamma miscorrections may prevent the use of high frequency fringe projection. For the demonstration purposes of our method, we did not calibrate the projector accurately; so, we performed our profilometry experiments using up to 20 fringes per field. We obtained the non-linearity curve of our projector with a projection and grabbing process of a sequence of images with increasing gray levels. The normalized average value of each grabbed image gave us a curve used to correct the gray values of the projection composite image calculated with Eq. (1).

Our second example is a pvc pipe, 11.0 cm outer diameter. It is a smooth surface with enough height to introduce a shift of one period ( $2\pi$  jump). After following the previously explained procedure, we obtained the following figure.

It comprises (a) the fringe pattern projected onto our second test object, (b) the vertical wrapped phase, (c) the phase difference  $\phi$ (without unwrapping) and (d) the fringe order N(x, y). In order to estimate the accuracy of our method, we used the unwrapped phase  $\Phi_{\mu}^{X}(x,y)$  to calculate the object's height and its outer diameter. The height h(x,y) was evaluated with Eq. (11),  $h(x,y) = \varphi(x,y)l/2\pi f d$ , with l=191.5 cm, d=37 cm and 1/f=1.625 cm. The value of the period p = 1/f on the surface was estimated simply by dividing the illuminated horizontal length by the number of fringes projected (32.5 cm/ 20 fringes). In order to appreciate the difference with the phase obtained when only a vertical fringe pattern is used, we unwrapped Fig. 6(b) with Eqs. (14) and (15) to get  $\Phi_{0u}^{x}(x, y)$  and calculate  $h_{0}(x, y)$ . In Figs. 7 and 8 we show the heights of the test object obtained by projecting three frequencies and one frequency. It's difference is shown in Fig. 9. It can be appreciated that the difference consists mostly of a constant value. Fig. 10 shows a profile of Fig. 7 (continuous line) and 8 (dotted line) where it is noticed that both



Fig. 6. Images from a second test object obtained with our phase recovery procedure. (a) Composite fringe pattern of our second test object, (b) vertical wrapped phase Φ<sup>8</sup>, (c) equivalent phase difference Φ and (d) fringe order N(x, y).



**Fig. 7.** Height of the phase recovered  $\Phi_n^x(x, y)$  using Fig. 6(a) and our procedure.

methods generate the same values in the central part of the pipe but the three frequencies method detects the pipe jump while the one frequency does not. By fitting a circle with the measured data (Fig. 10) we calculated a diameter of 11.17 cm, which give us an error of about 1.6%; this error is the same for both methods (one and three frequency) since they provide the same results used to fit the curve. To start with, the diameter of the circle should coincide with the maximum height estimated however, we found a discrepancy. The maximum height measured (Fig. 11) was of 10.65 cm which means that the step was measured with an error of about 3%. The accuracy may be improved by conducting a better non-linearity correction



Fig. 8. Height of phase  $\Phi_{Du}^x(x,y)$  recovered using Fig. 6(b), which corresponds to a traditional one-frequency fringe projection. An erroneous phase recovery is obtained.

process, increasing the projected frequency and taking into account the divergent illumination. The maximum range of measurement with this configuration can be estimated from Eqs. (18a) and (18b). Since D/2=2.58, the maximum slope of h(x,y) along the *x* or *y* directions is 1.20 rad (69°).

In general, we found that the applicability of our method is mostly influenced by a good calibration of the nonlinearities of the structured light system (camera and projector), and by the correct unwrapping of the equivalent phase. The determination of the projected frequency f is important since it is used to scale





Fig. 10. Transversal height profiles of Figs. 7 (continuous) and 8 (dotted). The circle describes the calculated profile of the pipe.

the phase and calculate fringe order N(x, y); however, it will be the same value as the projected frequency (known), providing an adequate selection of the projection area. Note some inaccuracies on the borders of the surface shown in Fig. 6(c) that are propagated to Fig. 7. These are errors due to Fourier filtering techniques, and their reduction will be the subject of future research.

## 4. Conclusions

Summing up, we have successfully proved an alternative method to perform profilometry with discontinuous objects, using the projection of only one image. As an additional benefit, we obtained with only one image the surface profile equivalent to projecting one fringe period; process that is normally accomplished using phase shifting techniques or FFT techniques with various images. In spite



Fig. 11. Longitudinal profiles of Figs. 7 (continuous) and 8 (dotted).

of the simplicity and powerfulness of our technique, some information at the object edges or low modulation zones may be lost due to the Fourier method analysis.

## Acknowledgments

Noé Alcalá Ochoa would like to thank Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (CONACyT) the financial support through Project Number 133495, and César Augusto García Isáis acknowledges CONACyT's Grant. We acknowledge the support of Mario Ruiz Berganza in the writing process. Also, we want to thank the suggestions of the anonymous referees which we found valuable.

#### References

- Muñoz-Rodriguez Apolinar J. Rodriguez-Vera Ramon. Evaluation of the light line displacement location for object shape detection. J Mod Opt 2003;50: 137-54
- [2] Saldner HO, Huntley JM. Temporal phase unwrapping: application to surface profiling of discontinuous objects. Appl Opt 1997;36:2770-
- [3] Eun-Hee Kim, Joonku Hahn, Hwi Kim, Byoungho Lee, Profilometry without phase unwrapping using multi-frequency and four-step phase-shift sinusoidal fringe projection. Opt Express 2009;17:7818-30.
- [4] Gorthi SS, Rastogui PK, Fringe projection techniques: whither we are? Opt Laser Eng 2010;48:133.
- [5] Zhang S. Recent progress on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques, Opt Laser Eng 2010;48:149.
  [6] Takeda M, Gu Q, Kinoshita M, Takai H, Takahashi Y. Frequency-multiplex
- Fourier-transform profilometry: a single-shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolations. Appl Opt 1997;36:5347.
- [7] Wei-Hung Su, Hongyu Liu. Calibration-based two-frequency projected fringe profilometry: a robust, accurate, and single-shot measuren ent for objects with large depth discontinuities. Opt Express 2006;14:9178. [8] Wei-Hung Su. Color-encoded fringe projection for 3D shape measurements.
- Opt Express 2010;15:13167.
- [9] Zhang ZH. Review of single-shot 3D shape measurement by phase calculation-
- based fringe projection techniques. Opt Laser Eng 2012;50:1097.
   Li J, Hassebrook LG, Guan Ch. Optimized two-frequency phase-measuring profilometry light-sensor temporal-noise sensitivity. J Opt Soc Am A 2003;20: 106
- [11] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. Appl Opt 1983;22:3977.

#### Optics and Lasers in Engineering 68 (2015) 111-120



Contents lists available at ScienceDirect

Optics and Lasers in Engineering journal homepage: www.elsevier.com/locate/optlaseng

# One shot profilometry using phase partitions

# C.A. García-Isáis, Noé Alcalá Ochoa\*

Centro de Investigaciones en Óptica, A.C., Loma del bosque 115, Col. Lomas del campestre, C.P. 37150 León, Guanajuato, Mexico

#### ARTICLE INFO

Article history. Received 7 July 2014 Received in revised form 6 December 2014 Accepted 21 December 2014

#### Keywords: Profilometry FFT FTP Shape measurement

#### ABSTRACT

Shape measurement using structured light systems involves the difficulty of detecting sharp discontinuities higher than one period of the projected fringe pattern; moreover, phase unwrapping becomes a problem. In this paper, a method to retrieve surface topography trough the projection of a single fringe pattern in gray levels is proposed. The correct phase is unwrapped through the use of Fourier methods and partition functions obtained from the phase. Experimental results show that the method can deal with the projection of high frequency fringes, being limited mainly by the resolution of the projectordetector system.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

CrossMark

#### 1. Introduction

For years, multiple efforts have been made in order to develop methods for measuring the topography of objects with fringe projection. Such methods are not universal and have their own niche of applications. For example, those using phase shifting techniques [1] that require the projection of various images are limited to being used for objects whose movements are static during the acquisition time. Fourier techniques require only one image to attain the phase, but at the cost of increasing the processing time and reducing the exactitude of the calculated phase [2,3]. None of the methods is able to deal with sharp discontinuities that are greater than one period of the projected fringes or equivalent to  $2\pi$  rad in their phase, nor can they cope with isolated surfaces. In order to overcome those problems, some methods based on Fourier and phase shifting techniques have been developed. Perhaps, the most successful for static measurements is the temporal phase shifting method that uses many wrapped images of different frequencies [4]. Other methods that also use phase shifting techniques are, for example: the dualfrequency method, which combines a unit-frequency fringe pattern with a high-frequency [5]; the amplitude modulation method, where the unit frequency is obtained from amplitude modulation of the fringes [6]; the method of selected frequencies, which requires two fringe patterns and a look up table to calculate the fringe orders [7]; those methods that use gray-coding in amplitude [8,9] or in phase [10]; and the method that projects a stair to detect the fringe orders [11]. To avoid the use of multiple image

0143-8166/@ 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

methods that use a single color pattern can be found in [12-14], but they suffer from channel crosstalk; therefore, when projected on areas of complementary colors, stripe contrast can be notoriously reduced. There is also a fringes projection method that uses multiple images [15] to perform measurements with fringes of one period. In that proposal eight images are superposed: four of high frequency and four of one period. The high frequency fringes poses the same orientation (vertical) and works like carrier fringe to get the phase of the one period fringes (horizontal). Also, two filtering processes are carried out: a high-pass filtering process to isolate the high frequency peaks and a posterior low-pass filter to get the one period fringes.

In recent research, a method to recover the shape of objects that have abrupt heights [16] or isolated surfaces was reported. In that study, a single image in gray levels and Fourier techniques to calculate an equivalent unit-frequency phase and a high frequency wrapped phase were used. The low-frequency phase was used to unwrap the high-frequency phases and to detect the abrupt phase changes. Unfortunately, this method involves a scale phase factor that introduces errors in fringe order when the frequency is too high (about 20 fringes). In this work, we overcome such drawback and build a more robust algorithm; to do so, we project a single fringe pattern with four frequencies: three as described in the previous paper and an additional medium frequency. Thus, phase partitions to unwrap the high-frequency phase unambiguously were constructed. As a result, a method that uses only one pattern in gray levels was achieved, which was able to deal with isolated areas and phase steps greater than  $2\pi$ ; henceforth, its highfrequency term may help to obtain high accuracy measurements. The fundamental differences between our work and that of Guen et al. [15] are: a) we superpose four patterns instead of eight, which leads to increasing the gray-level dynamic range of the

<sup>\*</sup> Corresponding author.

E-mail address: alon@cio.mx (N. Alcalá Ochoa). http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.12.016

C

projected fringes and b) we use the phase of the low frequency fringes to calculate the phase of the high frequency fringes, increasing in this way the accuracy of the measurement. In [15] this scaling procedure was not considered. A detailed comparison of both methods is carried out in Appendix A.

In the next section, an explanation of this method along with some simulations shall be provided; subsequently, experimental results are shown in Section 3.

# 2. Description of the method and simulations

Our proposal can be summarized as follows: (a) the projection of a single image that is made up of four fringe patterns, (b) its acquisition and analysis with Fourier methods in order to calculate the individual phase maps corresponding to each frequency and the calculation of a unit-frequency phase map, (c) the creation of phase partitions, (d) the determination of the fringe numbers and its correction and finally (e) the unwrapping of the high frequency phase map.

## 2.1. Construction of the composite fringe pattern

The composite pattern to be projected is described by

$$i(x,y) = \frac{6}{8} \{ 4 + \cos(2\pi f_1 x) + \cos(2\pi f_2 x) + \cos(2\pi f_2 y) + \cos[2\pi (f_2 + 1)x + 2\pi f_2 y] \}$$
(1)

where  $f_1$  and  $f_2$  are medium and high carrier frequencies, *G* is a constant that represents the amplitude value introduced to obtain the maximum gray level range (i.e. G=255 for 8 bit images), (*x*,*y*) are the normalized pixel coordinates, and *i*(*x*,*y*) is the image with its gray levels in the range [0,*G*]. We will choose  $2f_1 < f_2$  for purposes that will be later explained. The four carrier terms are given by

$$c_{x1}(x,y) = 2\pi f_1 x; \quad c_x(x,y) = 2\pi f_2 x; \quad c_y(x,y) = 2\pi f_2 y; c_{xy}(x,y) = 2\pi (f_2 + 1)x + 2\pi f_2 y.$$
(2)

Thus, as described in [16], the following relation holds:

$$c_{xy}(x,y) - c_x(x,y) - c_y(x,y) = 2\pi x,$$
(3)

which is a unit frequency fringe.



Fig. 1. (a) Digital composite pattern with  $f_1 = 7$ , and (b) Fourier spectrum of the pattern without the zero order.



Fig. 2. (a) Wrapped phase for the high frequency pattern (49 periods), (b) Wrapped phase for the medium frequency pattern (7 periods), and (c) Wrapped phase calculated for one fringe pattern.

In order to manipulate the phases, we define the "wrapping" operator  $W[\ ]$  as

$$W[g(x,y)] = a \tan 2\{ \sin [g(x,y)] / \cos [g(x,y)] + \pi,$$
(4)

where *a*tan2 is the trigonometric function tan expanded in the interval  $[-\pi,\pi]$ ; the constant  $\pi$  is added to obtain values in the interval  $[0,2\pi]$  to simplify our notation. With this operator, we find the following equivalent expression of Eq. (3)

$$W\{W[c_{xy}(x,y)] - W[c_x(x,y)] - W[c_y(x,y)]\} = W[2\pi x],$$
(5)

where the four wrapped phase functions  $W[c_{x1}(x,y)]$ ,  $W[c_x(x,y)]$ ,  $W[c_y(x,y)]$  and  $W[c_{xy}(x,y)]$  are obtained using the Fourier filtering process described in [16]. Next, we will summarize such process. To simplify our notation, we will drop off the (x,y) variables, although in some formulas they will be included to emphasize its dependence.

2.2. Wrapped phase calculations using a Fourier method

The intensity profile that we will obtain after projecting Eq. (1) onto the object's surface will be given by

$$i = a + b[\cos(c_{x1} + \varphi^{x1}) + \cos(c_x + \varphi^x) + \cos(c_y + \varphi^y) + \cos(c_{xy} + \varphi^{xy})],$$
(6)

where *a* and *b* are background and amplitude terms that depend on the object's reflectivity, respectively, and  $\varphi_{x}^{x_1} \varphi_{x}^{y}, \varphi_{y}^{y}$  and  $\varphi_{y}^{xy}$  are the phase functions related to the surface height h(x,y) to be calculated.

After Fourier transforming Eq. (6) we obtain

$$I(u, v) = A(0, 0) + D(u, v) + D^*(u, v),$$

with

$$D(u, v) = D_{x1}(u - f_1, v) + D_x(u - f_2, v) + D_y(u, v - f_2) + D_{xy}(u - f_2 - 1, v - f_2),$$
(7b)



Fig. 3. (a) Graphs of the phase partitions generated using the phases threshold. (b) Fringe order.

#### Table 1

Numerical values of the phase partitions generated with  $c1_n$  and  $c2_m$ .

Fringe Order	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	 43	44	45	46	47	48
C1n	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	 6	6	6	6	6	6
C2n	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	 1	2	3	4	5	6



Fig. 4. Unwrapped phase obtained with our phase partitions proposal.

113

(7a)

where \* means complex conjugated, (u,v) are the frequency coordinates,  $f_1$  and  $f_2$  are the carrier frequencies, and  $D_{x1}$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ and  $D_{xy}$  are the Fourier spectrums introduced by  $\cos(c_{x1} + \varphi^{x1})$ ,  $\cos(c_x + \varphi^x)$ ,  $\cos(c_y + \varphi^y)$  and  $\cos(c_{xy} + \varphi^{xy})$ , respectively. Although Eq. (7a) consists of nine spectrums, we are only interested in those four involved in Eq. (7b) because each spectrum and its conjugate contain the same phase information. Since the distances from center to center of the spectrums depend on frequencies  $f_1$  and  $f_2$ , no overlap among them occurs for frequency values that are high enough. The separation of  $D_{x1}$ ,  $D_x$ ,  $D_y$  and  $D_{xy}$  is carried out by a band-pass filter and then transformed into the space domain by the inverse of the Fourier transform. The respective phases (modulus  $2\pi$ ) are obtained with the arctg of the imaginary part over the real part. This way, we end up with the following four phases (modulus  $2\pi$ ):  $W[c_{x1}+\varphi'^{x1}]$ ,  $W[c_x+\varphi'^x]$ ,  $W[c_y + \varphi'^y]$  and  $W[c_{xy} + \varphi'^{xy}]$ . Applying Eq. (5) to the last three phases, we obtain

$$W\{W[c_{xy}+\varphi^{xy}]-W[c_{x}+\varphi^{x}]-W[c_{y}+\varphi^{y}]\}=W[2\pi x+\varphi^{eq}], \quad (8)$$

where  $\varphi^{eq} = \varphi^{xy} - \varphi^x - \varphi^y$  represents the equivalent phase (unwrapped) of the phase differences. Then, what we have obtained is the wrapped phase  $W[2\pi x + \varphi^{eq}]$  of the projection of a vertical fringe pattern with one period, as shown in [16]. This phase, together with the wrapped phases corresponding to both frequencies  $f_1$  and  $f_2$  given by  $W[c_{x1} + \varphi^{x1}]$  and  $W[c_x + \varphi^x]$ , is the basis of our absolute unwrapping method; that is, a method which takes into account phase jumps greater than  $2\pi$  and isolated objects.





## 2.3. Construction of phase partitions

Our initial point is the unwrapping of the unit-frequency phase  $W[2\pi x + \varphi^{eq}]$  to get  $\varphi^{eq}$ . For moderate values of  $\varphi^{eq}$ , no unwrapping will be required, but in general it will. Since it is a unit period, its unwrapping is straightforward and is given by

$$2\pi x + \varphi^{eq}(x, y) = W [2\pi x + \varphi^{eq}(x, y)] + 2\pi N(x, y)$$
(9)

where N(x,y) is the nearest integer value of  $\{x - W[2\pi x + \phi^{eq}(x,y)]/2\pi\}$ and represents the fringes order function.

The phase partitions are integer values assigned to certain phase intervals of the unitary and the medium frequency wrapped phases. With the combination of both integers, the fringe order of the high frequency wrapped phase is constructed. Let us define the integer functions values of the unwrapped phase  $2\pi x + \varphi^{eq}(x,y)$ 

$$c \mathbf{1}_{n}(x, y) = \left(\frac{n-1}{f_{1}}\right) 2\pi \leq \left[2\pi x + \varphi^{eq}(x, y)\right] < \frac{n}{f_{1}} 2\pi,$$
  

$$n = 0, 1, 2, \dots, f_{1} - 1,$$
(10)

and similarly for the wrapped phase of the medium frequency

$$\begin{aligned} S_{2m}(x,y) &= \left(\frac{m-1}{f_2}\right) f_1 2\pi \le W\left[c_{x1} + q^{x1}\right] < \frac{m}{f_2} f_1 2\pi, \\ m &= 0, 1, 2, ..., (f_2/f_1) - 1, \end{aligned}$$
(11)

Those functions have the values  $c1_n(x,y)=n$  and  $c2_m(x,y)=m$ . Although it is not strictly necessary, we will suppose that  $f_2/f_1$  is an integer to simplify our explanation. Once we have defined those phase partitions functions, we calculate the fringe order N(x,y) of the high frequency wrapped phase as

$$\Psi(x,y) = c1_n(x,y)f_1 + c2_m(x,y), \tag{12}$$

which let us calculate the absolute unwrapped high frequency term through the following equation

$$\varphi^{x}(x,y) = W [2\pi x + \varphi^{x}(x,y)] + 2\pi N(x,y) - 2\pi f x$$
(13)

Let us explain the generation of the phase partitions with a numerical simulation, where we set  $f_1$ =7 and  $f_2$ =7<sup>2</sup>=49. Fig. 1(a) shows the simulated composite pattern, generated using Eq. (1), and Fig. 1(b) shows the magnitude of its Fourier spectrum given by Eq. (7a).

In this example, we have chosen  $\varphi^{yy} = \varphi^x = \varphi^y = 0$ , which implies that the wrapped phases will consist only of carrier terms given by  $W[c_{x1}]$ ,  $W[c_x]$ ,  $W[c_y]$  and  $W[c_{xy}]$ . After using Eq. (8), we calculated  $W[2\pi x + \varphi^{eq}(x,y)]$ , which is equal to  $W[2\pi x]$  since  $\varphi^{eq}(x, y) = 0$ . In Fig. 2(a)–(c),  $W[2\pi x]$ ,  $W[c_{x1} = 2\pi f_1 x]$  and  $W[c_x = 2\pi f_2 x]$ , are



Fig. 6. (a) Composite pattern projected on the PVC pipe. (b) Fourier spectrum of (a).



Fig. 7. Wrapped phases obtained by filtering the Fourier spectrum of Fig.6b (a) For the high frequency (80 periods), (b) for the medium frequency (20 periods), and (c) For the low frequency (one period).



Fig. 8. Experimental phase partitions. From a unit frequency map (continuous) and from a medium wrapped phase map (dotted).



Fig. 9. (a) Profile of the 200th row of N(x,y). (b) Fringe orders N(x,y).

shown, respectively. Note that in this case,  $W[2\pi x]$  and its unwrapped phase  $2\pi x$  are both equal.

For this example, with  $f_1=7$  and  $f_2/f_1=7$ , Eq. (10)–(12) are expressed as follows:

$$c1_n(x,y) = \left(\frac{n-1}{7}\right)2\pi \le [2\pi x] < \frac{n}{7}2\pi, \quad n = 1, 2, ..., 7,$$
(14a)

$$c2_m(x,y) = \left(\frac{m-1}{7}\right) 2\pi \le W[2\pi f_1 x] < \frac{m}{7} 2\pi, \quad m = 1, 2, ..., 7, \quad (14b)$$

$$N(x,y) = c 1_n(x,y) f_1 + c 2_m(x,y).$$
(14c)

In Fig. 3(a), we plot the horizontal lines  $c1_n(x,0)$  (continuous line) and  $c2_m(x,0)$  (dotted line), and in Fig. 3(b), its order fringe N(x,0). The numerical values are given in Table 1.

It can be appreciated from Fig. 3 that on the borders between  $c1_n(x,y)$  and  $c1_{n+1}(x,y)$ , some erroneous values can be generated



because of the Fourier filtering operation. This problem has been studied for phase shifting techniques in [8], and an algorithm was proposed, which we found useful for correcting our images. After applying such algorithm to this particular case, those errors were corrected and the final results of the unwrapped phase are shown in Fig. 4, where we have used the equation  $W[2\pi x + \varphi^x(xy)] + 2\pi N(xy)$  to get such unwrapped phase.

# 3. Performance of the Fourier analysis

An important aspect is the maximum dynamic range that can be worked with. Using a procedure similar to that used in reference [11] with two sinusoidal patterns of frequencies  $f_1$ ,  $f_2$ , a maximum background frequency  $f_a$  with  $f_a < f_1 < f_2$ , we can obtain the following condition for the three spectrums A(0,0),  $D_x(u-f_1,v)$ , and  $D_x(u-f_2,v)$ :

$$\left| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| < 2\pi (f_2 - f_1), \tag{15a}$$

In Ref. [16], the condition for the four spectrums A(0,0),  $D_x(u-f_2,v)$ ,  $D_y(u,v-f_2)$  and  $D_{xy}(u-f_2-m,v-f_2)$  was established in a slightly different manner, as follows:

$$\left|\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\right| < 2\pi \left(\frac{f_2}{2}\right).$$
 (15b)

Thus, if  $2f_1 < f_2$  is chosen, it is followed by  $f_2 - f_1 > f_2/2$ , and the condition of (Eq. (15b)) is the most astringent of both. Therefore, it can be concluded that adding a medium frequency sinusoidal fringe pattern to those four patterns of Ref. [16] does not modify the dynamic range of the calculated phase, providing the condition  $2f_1 < f_2$ .

Another important aspect is the gray level range reduction of the fringe patterns forming the composite pattern of Eq. (1), which will be analyzed briefly following the method used in [16].

Since the purpose of this phase coding method is to get the fringe number to unwrap the high frequency wrapped phase W



Fig. 11. Experiments with isolated objects and one irregular surface. Composite pattern projected on (a) scene one and (b) mannequin. Unwrapped phases are shown in (b), and (d).

 $[2\pi x + q^x(x,y)]$ , the focus will lay on the behavior of this phase under gray level changes. To do that, fringe patterns with Eq. (1) and the following equation (which corresponds to the traditional one-frequency projection method) are computer-generated:

$$i_0(x,y) = (G/2)[1 + \cos(2\pi f_2 x)],$$
 (16)



Fig. 12. Experiments with complex and isolated objects. (a) and (d) 3D reconstructions using a phase shifting technique; (b) and (d) the traditional Fourier method.



Fig. 13. Experiments with complex and isolated objects using the proposed composite pattern.

In both equations, we set G=255, which leads Eq. (1) to consist of the sum of four terms, ranging from 0 to 64 Gray levels each one. High fringe frequency  $f_2$  was chosen to be 40 and  $f_1=8$ , although other values may be selected. The process to recover the phase using only one frequency is similar to the one described previously; that is,  $i_0(x,y)$  is Fourier transformed, and the spectrum centered on  $(f_2,0)$  is band-pass filtered. Later, the inverse of the Fourier transform is obtained, and the respective wrapped phase (modulus  $2\pi$ ) is calculated. After recovering the phases of the fringes given by Eqs. (1) and (16), we subtracted the known carrier (continuous) function  $2\pi f_2 x$  from both phases. Afterwards, we calculated their standard (std) and Peak-To Valley (PV, defined as the maximum minus minimum deviation) deviations. The results for both methods (one fringe and composite fringes) were practically the same, PV=0.0038 rad, std= $3x10^{-4}$  rad. Little changes occurred for different values of  $f_1$  and  $f_2$ . In these simulations to filter the Fourier, a Blackman filter with radius  $f_2 - f_1$  was used in both cases. With these results, we can conclude that the gray level restriction caused by the superposition of the four patterns does not significantly influence the accuracy of our method compared to the one frequency method when the same filter is used to process the respective Fourier spectrums.

## 4. Experimental results and discussions

To perform the experiments, we have used the experimental setup depicted in Fig. 5. It is a simple projection system comprising a digital projector (Optoma, model PK 301) driven by a computer and a camera (pixelink, model PL-E531, square pixel size of 5.2 µm) to record the projected fringes. The angle between the projector and the camera was set to 0.1 rad and the distance from the projector to the object was of 1800 mm. The projected fringes were calculated with Eq. (1) settings  $f_1=20$ ,  $f_2=80$  and G=255. The first object analyzed was a PVC pipe, 11 cm. outer diameter. This radius diameter was big enough to generate various jumps of  $2\pi$  in the wrapped phase of the high frequency map. Fig. 6(a), illustrates the fringe composite pattern generated by Eq. (1) projected onto the PVC pipe and Fig. 6(b) shows the magnitude of its Fourier spectrum.

Multiplying the FFT result with a Blackman filter of radius=45 (value lower than  $f_2 - f_1$ ), centered on frequency coordinates (0,80), (81,0) and (81,80), and with radius=20 centered on (20,0), four wrapped phases were obtained,  $W[c_x + \varphi^x]$ .  $W[c_y + \varphi^{yy}]$ ,  $W[c_xy + \varphi^{xy}]$  and  $W[c_{x1} + \varphi^{x1}]$ , respectively. Thereby, using Eq. (8), the phase difference was obtained  $W[2\pi x + \varphi^{eq}]$  shown in Fig. 7(c).

Phases  $W[c_{x1}+\varphi^{x1}]$  and  $W[c_x+\varphi^{x}]$  are shown in Fig. 7(b) and (a), res-

pectively.

It can be appreciated that the phase map of Fig. 7(c) is wrapped; hence, it was unwrapped by means of using Eq. (9) to obtain the equivalent phase for one period  $\varphi^{eq}$ . After Eqs. (14a) and (14b) were applied to both  $\varphi^{eq}$  and the wrapped phase of Fig. 7(b), we attained the respective phase partitions  $c1_n(x,y)$  and  $c2_m(x,y)$ . The profile of the 200th row of  $c1_n$  (continuous line) and  $c2_m$  (dotted line) are presented in Fig. 8. Note that the levels of  $c1_n$  consist of 20 steps, corresponding to  $f_1$ .

After having phase partitions  $c_{1n}$  and  $c_{2m}$ , the fringe N(x,y) order was calculated and shown in Fig. (9), where row 200 is highlighted and plotted.

Once the unwrapped phase  $\Phi_{ob}$  was calculated with Eq. (13), it could be easily transformed to height information through the following equation [17]:

$$h(x,y) = K \Phi_{ab}(x,y), \tag{17}$$

where *K* is a constant given by the experiment setup. The 3D data information of the PVC pipe is shown in Fig. 10.



Fig. 15. Computer generated fringes, with (a) the AM method and (b) with our proposal. (c) Intermediate high-pass filter of the AM method. (d) High-pass filter of our proposal. Phases recovered, (e) with the AM method (f) and with our proposal.



Fig. 14. (a) Profiles of scene one in direction x. (b) Profiles of the smaller object of scene one in direction y (continuous line corresponds to 3D data from method proposed, and dotted line to 3D data from phase shifting). (c) Profiles of highlighted area of (b).



Fig. 16. Central row profiles of the step-phases shown in Fig. 15(e) and (f). Continuous, dotted and dashed lines correspond to the exact profile, the calculated with the AM method and the obtained with our proposal, respectively. (a) Shows the exact and the obtained with our method. (b) Shows the exact and the obtained with the AM method.

In order to compare the loss of information due to the Fourier process, the phase coding method was carried out with a phase shifting procedure, obviously increasing the number of projected images as follows. If  $i_{fn}(x,y)$  are the projected fringes

$$i_{fn}(x,y) = A + B \sin(2\pi f x + n\pi/2)$$
 (18)

with f=1,  $f_1$ ,  $f_2$ , n=0,1,2,3 and  $I_{fn}(x,y)$  their corresponding acquired fringes on the object, by using a four step algorithm, which is well known to considerably reduce the errors introduced by phase non-linearities, the wrapped phases for the three frequencies were calculated through

$$W[\varphi_f(x,y)] = a \tan 2\left(\frac{I_{f3}(x,y) - I_{f1}(x,y)}{I_{f2}(x,y) - I_{f0}(x,y)}\right).$$
(19)

Once such wrapped phases were obtained, the phase coding method was applied to them in the same manner as it had been done with the Fourier wrapped phases. Then, to prove the validity of the proposed method, the objects were analyzed with both techniques and compared to each other. The first scene consists of two isolated bottles of different shapes and heights, and the second is a mannequin face. The results can be appreciated in Figs. 11–13. In Fig. 11(a) and (c), are the two objects illuminated by the composite fringe pattern: the pair of bottles and the mannequin, respectively. The calculated unwrapped phases are shown in 11(b) and (d).

In Fig. 11(b) and (d) some discontinuous areas can be appreciated. They correspond to spurious phase jumps of  $2\pi$  introduced by the application of the spectrum filters and by residual phase nonlinearity of the camera–projector system. We corrected such erroneous areas taking into account the nearest integer value of  $\{[\phi^{eq}(xy)-2\pi x-(xy)]/2\pi\}$ . The 3D representations calculated with phase shifting are shown in Fig. 12(a) and (c) for the bottles and the mannequin, respectively; (b) and (d), shows the corresponding data for the Fourier traditional method [2], and finally our phase maps are shown in Fig. 13(a) and (b), where some error near the mannequin's nose still appears due to low modulation in those areas. We will work on its reduction, but in the meantime, such errors appear as cosmetic errors that must be reduced or eliminated.

It can be noted that there is good agreement between the heights calculated with our proposed method and those of phase shifting, although our results appear smoother due to the Fourier filtering. The results obtained with the traditional Fourier method are closer to those obtained with phase stepping in detail quality but contain the big error height due to its insensitivity to  $2\pi$  phase

jumps. The FFT filtering window sizes used in both, the traditional and ours were determined empirically to get the better detail in both and to avoid overlap between the peaks, being of 80 and 45 pixels respectively. This window size difference is the explanation of the smoother results obtained with our method respect to the traditional. Also, some profiles are provided in Fig. 14. In Fig. 14(a), the profiles of scene one (two bottles) for two methods (Phase shifting and our proposal) in the *x* direction are plotted; Fig. 14(b) illustrates the profile of the smaller bottle from scene one in the y direction. The dotted and continuous lines correspond to what was obtained with the phase shifting method and with our proposal, respectively. Fig. 14(c) shows the data corresponding to the rectangle highlighted in Fig. 14(b). We had selected these data because of the evident variations on the profile.

From the profiles in Fig. 14, the similitudes can be appreciated, except at the borders, where some deformations are introduced by the Fourier filtering process.

An analysis for the data highlighted in Fig. 14(c) shows that the Peak-To-Valley (PV) deviations obtained with the composite pattern respect to those obtained with the traditional Fourier method and the phase shifting technique were of 0.6 mm and 0.7 mm, respectively.

The standard deviations (std) calculation of its difference gives us 0.27 mm and 0.19 mm, respectively. Since the average height of our object was 110 mm, we estimate the PV deviations errors around 1%.

In general, we found that the applicability of our method is mostly influenced by a good calibration of the nonlinearities of the structured light system (camera and projector). On the other hand, the maximum number of experimental fringes to be analyzed was restricted by the resolution of our projector, and reached up to 80 fringes (four times the number reported in [16]). Projectors with higher resolutions may be able to cope with more fringes.

# 5. Conclusions

This paper has successfully proven a new method to calculate the unwrapped phase and the profile information of discontinuous, isolated and complex objects, when only one shot is used through Fourier techniques. The number of analyzed fringes was increased, limiting its value mainly by the resolution of the projector-camera system used. For better results a gamma correction is highly recommended. 120

C.A. García-Isáis, N. Alcalá Ochoa / Optics and Lasers in Engineering 68 (2015) 111-120

# Acknowledgments

Noé Alcalá Ochoa would like to thank Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, México) the financial support of project number 133495 and César Augusto García Isáis acknowledges CONACyT's grant. Proofreading of Mario Ruiz Berganza is also recognized.

## Appendix A. Comparison of two methods to achieve phases of reduced sensitivity

As it has been explained in the main body of this article, using high carrier fringes we can calculate the phase with a reduced sensitivity, i.e., as if a one fringe period were used. This phase is important since for moderate surface heights no unwrapping is required. Using computer simulations we will compare this intermediate result with the method described in [15], which we will name the AM method. The AM method is devoted to calculate such reduced sensitivity phase.

Our computer simulated test object was a squared phase step modulated with circular groves in which its frequency increases from the center to the edge.

In the simulation for the AM method, four carrier frequencies were chosen, equally to those described it such reference, i.e. 33, 56, 79 and 103 cycles, respectively. Using the AM procedure we calculated the fringes pattern containing the test object (Fig. 15(a)). This fringe pattern was Fourier transformed and was high-pass filtered using the filter function shown in Fig. 15(c). After low-pass filtering each filtered order we finally obtained the phase, shown in Fig. 15(e). Although the filtering procedure in [15] is carried out using convolution operations we preferred to do it in the Fourier domain to simplify the process. Each circle of Fig. 15(c) is a Blackman filter with radius around (56-33)=23 pixels. The low-pass filter used was also a Blackman type where its radius was chosen to optimize the results, being around twice the first filter diameter (45 pixels). This radius increment is due to a squaring process, necessary to separate the low-frequency terms from the high-frequency functions.

On the other hand, with our method, we constructed the composite pattern of the same object (Fig. 15(b)), using Eq. (6) with a=256/2, b=256/8,  $f_1=20$  (the frequency used in our experiments) and  $f_2=103$  (the maximum frequency of the AM method). After Fourier transforming the image of Fig. 15(b) we high-pass filtered the resulting power spectrum using the filter shown in Fig. 15(d). After that, we calculated the phase of the step with Eq. (8), which is shown in Fig. 15(f). In our filtering process we have used a Blackman filter with a radius given around  $(f_2 - f_1)/2 = 41$ .

It can be appreciated from the phase images (Fig. 15(e) and (f)) that our proposal recover the edges and the frequency content with more fidelity than the AM method. This improvement is caused mainly by the bigger diameter of the high-pass filter. To highlight the phase details, the profiles of the central rows in the calculated phases are shown in Fig. 16, where the continuous lines represent the exact phase step. Notice that the errors depend on the frequency content of the object, being minima at center and maxima and the edges where the frequency is maxima too. We calculated also the numerical standard deviation of the calculated phases with respect to its exact phase and we have found values of 0.0238 rad for our method and 0.0405 rad for the AM, which means almost a reduction by a factor of 2.

As a final remark we must mention that we also have carried out this simulation using the 7-order Butterworth filter, suggested in Ref. [15], but we found more reliable results with the Blackman filter.

#### References

- Creath K. Error sources in phase-measuring interferometry. SPIE 1992;1720;428.
   Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic
- measurement of 3-D object shapes. Appl Opt 1983;22:3977. [3] Kujawinska M, Wojciak J. High accuracy Fourier transform fringe pattern
- analysis. Opt Las Eng 1991;14:325–39. [4] Saldner HO, Huntley JM. Temporal phase unwrapping: application to surface
- profiling of discontinuous objects. Appl Opt 1997; 36:2770-5. [5] Liu K, Wang Y, Lau DL, Hao Q, Hassebrook LC. Dual-frequency pattern scheme
- for high-speed 3-D shape measurement. Opt Exp 2009;18:5229–44. [6] Gai S, Da F. Fringe image analysis based on the amplitude modulation method.
- Opt Exp 2010;18:10704–19. [7] Ding Y, Xi J, Yu Y, Chicharo J. Recovering the absolute phase maps of two fringe patterns with selected frequencies. Opt Lett 2011;36:2518–20.
- [8] Zheng D, Da F, Self-correction phase unwrapping method based on Gray-code light. Opt Las Eng 2012;50:1130–9.
- [9] Zhang Q, su X, Xiang L, Sun X. 3-D shape measurement based on complementary Gray-code light. Opt Las Eng 2012;50:574–9.
- [10] Wang Y, Zhang, S. Novel phase-coding method for absolute phase retrieval. Opt Lett 2012;37:2067–9.
- [11] Zhang S. Composite phase-shifting algorithm for absolute phase measurement. Opt Las Eng 2012;50:1538–41.
   [12] Su Wei-Hung, Liu H. Calibration-based two-frequency projected fringe profi-
- [12] Su Wei-Hung, Lu H. Calibration-based two-frequency projected tringe prohlometry: a robust, accurate, and single-shot measurement for objects with large depth discontinuities. Opt Exp 2006;14:9178–87.
- [13] Su Wei-Hung, Color-encoded fringe projection for 3D shape measurements. Opt Exp 2007;15:13167–81.
- [14] Liu W, Wang Z, Mu G, Fang Z. Color-coded projection grating method for shape measurement with a single exposure. Appl Opt 2000;39:3504–8.
   [15] Guan C, Hassebrook LG, Lau DL. Composite structured light pattern for three-
- Guan C, Hassebrook LL, Lau DL. Composite structured light pattern for threedimensional video. Opt Exp 2003;11:406–17.
   García Isaís CA, Ochoa NA. One shot profilometry using a composite fringe
- [16] Garcia Isais CA, Ochoa NA. One shot profilometry using a composite fringe pattern. Opt Las Eng 2014;53:25–30.
   [17] Paul Kumar U, Somasundram U, Kothiyal MP, Krishna Mohan N. Single frame
- [17] Paul Kumar U, Somasundram U, Kothiyal MP, Krishna Mohan N. Single frame digital fringe projection profilometry for 3-D shape measurement. Optik 2013;124:166–9.