

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ÓPTICA, A.C.



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

Título de la Tesis:
Interferometría Temporal Usando la
Función de Transferencia Frecuencial

Que Presenta:
Ing. José Moisés Padilla Miranda

A fin de obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Óptica)

Asesor:
Dr. Manuel Servín Guirado

León, Gto. (Enero 2011)

Versión Definitiva. Incluye Cambios Sugeridos por Revisores de Tesis.

*A la memoria de mi padre,
...por dejarme vivir su sueño.*

Agradecimientos

- A mi familia y amigos, por todo su apoyo y su paciencia.
- A los Drs. Manuel Servín Guirado y Julio César Estrada, por la asesoría y orientación.
- A los demás miembros del grupo (Miguel, Orlando, Adonái), por su gran disposición.
- A mis compañeros de generación, que nunca dejaron de ayudarme.
- Al personal docente y administrativo del Centro de Investigaciones en Óptica A.C.
- A la OSA y al SPIE, por los artículos patrocinados.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el financiamiento.

Resumen

Ésta tesis presenta una revisión de las técnicas interferométricas actuales, particularmente en aquellas basadas en corrimiento de fase o PSI (del Inglés, *Phase Shifting Interferometry*), observando el estado del arte en los procesos de análisis y síntesis. Los capítulos en que se divide abordan los siguientes temas:

1. Es realizada una descripción general de las técnicas interferométricas y del panorama histórico de los métodos propuestos tradicionalmente para la recuperación de fase.
2. Es presentada una breve introducción al procesamiento digital de señales, dada su estrecha relación con la temática general. Se resalta la importancia, y en algunos casos la necesidad, de aplicar técnicas de preprocesado y se introducen algunos resultados importantes asociados con la generación de señales discretas.
3. Es realizada una descripción completa de las técnicas más utilizadas para la generación y el procesamiento de los patrones de franjas señalando la clara analogía entre ellas. Se discuten las ventajas de utilizar la función de transferencia frecuencial o FTF (del Inglés, *Frequency Transfer Function*) para no sólo la valoración de los filtros asociados sino como una alternativa para su diseño.
4. Se presenta una descripción del diseño de la respuesta espectral de los filtros de cuadratura mediante bloques de construcción así como una estrategia para optimizar la tolerancia al error de desentonamiento no reportada con anterioridad. Además se discute la posibilidad de utilizar métodos híbridos, entre interferometría por corrimiento de fase y de franjas abiertas, que permiten el estudio de sistemas dinámicos con un comportamiento espectral superior al de los métodos originales.
5. Finalmente, se presentan las conclusiones de éste estudio así como algunas perspectivas a futuro.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Conceptos básicos de Interferometría	7
1.2. Tipos principales de interferogramas	9
1.3. Recuperación de fase	14
2. Procesamiento digital de señales	17
2.1. Señales discretas	17
2.2. Técnicas de preprocesado	20
2.2.1. Suavizado mediante convolución.	20
2.2.2. Regularización clásica.	23
3. Métodos convencionales de recuperación de fase	29
3.1. Método de Fourier	30
3.2. Interferometría por corrimiento de fase	35
3.3. Análisis del error en Interferometría	38
3.3.1. Error de entonamiento.	42
3.4. Ruido en PSI	45
4. Generación de algoritmos de PSI	49
4.1. Combinación de algoritmos de PSI	49
4.2. Diseño de algoritmos mediante FTF	50
4.3. Métodos Híbridos	56
4.3.1. Generación de portadora espacial a partir de PSI	56
4.3.2. Demodulación de interferogramas con portador pixelado.	58
5. Conclusión y perspectivas	63
A. Desenvolvimiento de franjas	65
A.1. El sistema de desenvolvimiento de franjas	65

Capítulo 1

Introducción

La interferometría se define como una técnica para el diagnóstico de señales mediante el análisis de los patrones generados por la superposición de dos o más ondas. En Metrología Óptica ésta técnica resulta de gran utilidad por las ventajas inherentes al uso de la luz como herramienta de medición como son la posibilidad de recuperar remotamente características de los objetos bajo estudio de manera prácticamente instantánea, con gran exactitud, etcétera.

La aplicación, el análisis y el diseño de las técnicas interferométricas constituyen un área de investigación en constante desarrollo. A lo largo de los capítulos siguientes son revisadas algunas de las aportaciones que en su momento significaron un gran avance en la materia (por ejemplo, la técnica de corrimiento de fase presentada por Bruning et al. [1]; el método de la Transformada de Fourier presentado por Takeda et al. [40]; o el formalismo para la evaluación de sus filtros de cuadratura propuesto por Freischlad y Koliopoulos [6]) donde se resalta su importancia y actualidad.

1.1. Conceptos básicos de Interferometría

Es sabido que la generación de patrones de interferencia mediante la superposición de haces luminosos ha sido utilizada como método de medición desde el siglo XIX, sin embargo la interpretación cuantitativa de dichos patrones fue prácticamente imposible hasta invención de las computadoras.

El avance tecnológico que posibilitó la fabricación de computadoras personales de gran potencia y sensores electrónicos de imagen, principalmente *Charge-Coupled Device* (CCD) y *Complementary Metal-Oxide Semiconductor* (CMOS), permitió el nacimiento y rápido desarrollo del análisis automático de patrones de franjas.

Una de las principales razones para el uso de técnicas interferométricas en las pruebas ópticas radica en que los detectores convencionales operan de acuerdo a la así llamada “ley del cuadrado”, lo que básicamente imposibilita a determinar la fase de los frentes de onda de una manera directa:

Las ondas pertenecientes al rango visible del espectro electromagnético oscilan en el tiempo con una frecuencia $\omega \approx 0.5 \times 10^{15} Hz$, dicho valor se encuentra varios órdenes de magnitud por encima de la frecuencia máxima de operación de los detectores actuales, por lo que estos operan promediando un gran número de ciclos que son registrados durante su periodo de adquisición.

Así pues, la cantidad observable es el flujo promedio de radiación electromagnética sobre la superficie del sensor, es decir la irradiancia. A fin de obtener su expresión explícitamente consideremos dos señales A y B , tales que

$$Re \{A\} = Re \{A_0 e^{i\alpha} e^{-i\omega t}\} = A_0 \cos(\omega t - \alpha), \quad (1.1)$$

$$Re \{B\} = Re \{B_0 e^{i\beta} e^{-i\omega t}\} = B_0 \cos(\omega t - \beta). \quad (1.2)$$

Entonces,

$$\langle AB \rangle = A_0 B_0 \langle (\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha) (\cos \omega t \cos \beta + \sin \omega t \sin \beta) \rangle \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{2} A_0 B_0 \langle \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \rangle \quad (1.4)$$

pues $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ y $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

En términos de exponenciales complejas, la Ecuación (1.4) puede ser escrita como

$$Re \left\{ \frac{1}{2} A_0 B_0 e^{i\alpha} e^{-i\beta} \right\} = Re \left\{ \frac{1}{2} A_0 B_0 e^{-i\alpha} e^{i\beta} \right\} \quad (1.5)$$

por lo tanto, aplicando la convención implícita de que la expresión con significado físico resulta de tomar la parte real de las señales expresadas mediante exponenciales complejas, se tiene

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2} A (B^*) = \frac{1}{2} (A^*) B. \quad (1.6)$$

Aplicando sobre el vector de Poynting, resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \rangle, \quad (1.7)$$

cuya magnitud esta dada por

$$I = \frac{1}{2} E H^* = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \quad (1.8)$$

donde $Z_0 = E/H \approx 377\Omega$, la impedancia característica del vacío.

De la Ecuación 1.8 resulta evidente que por éste medio no es posible recuperar señales contenidas a manera de una fase global pues esta se pierde en el promedio temporal

que da lugar al módulo cuadrado. Típicamente es posible clasificar las soluciones a éste problema en dos grandes grupos: métodos heterodinos, donde al superponer haces de diferente frecuencia se obtiene una señal modulada en amplitud; y métodos homodinos, donde se introduce al sistema al menos un segundo haz con la misma frecuencia temporal que el original. Un análisis extenso de los interferómetros más usados, así como de sus principales características y aplicaciones puede encontrarse en la Bibliografía (Malacara *et al.* [15, 16, 17]).

Por ejemplo, sea el caso simple de dos ondas electromagnéticas idealmente monocromáticas y linealmente polarizadas, viajando en el vacío, descritas por

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 \exp [i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1)] \quad (1.9)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2 \exp [i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_2)] \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$.

Aplicando el resultado descrito por la Ecuación 1.8, y considerando la superposición lineal de ambas ondas se tiene

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \quad (1.11)$$

de forma tal que la irradiancia total queda dada por: (omitiendo por simplicidad el factor de proporcionalidad)

$$I_T = |\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t)|^2 = \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_T^*(\mathbf{r}, t) \quad (1.12)$$

$$= |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cos(\Phi) \quad (1.13)$$

donde $\Phi = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2$.

El término $2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cos(\Phi)$ es llamado término de interferencia pues ya que Φ depende de la posición, éste da lugar a variaciones periódicas de intensidad sobre el plano de observación, es decir, a las llamadas franjas de interferencia. Con propósitos ilustrativos, en la Figura 1.1 se presenta la simulación de un patrón de intensidad típico (página 11).

1.2. Tipos principales de interferogramas

En la literatura, un patrón de franjas convencionalmente está descrito como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad (1.14)$$

donde $a(x, y)$ y $b(x, y)$ son llamadas funciones de fondo y contraste local, respectivamente.

De acuerdo con Servín y Kujawinska [30], la función de fase $\phi(x, y)$ es obtenida cuando un interferómetro, sistema de Moiré, u otro dispositivo produce un mapeo continuo que resulta análogo a la cantidad física observada (sea forma, desplazamiento, deformación, temperatura, etcétera).

La semejanza entre las Ecuaciones 1.13 y 1.14 resulta evidente, pero es importante resaltar el hecho de que la señal expresada en la Ecuación 1.14 no se limita al caso de interferencia óptica. El análisis de los patrones de franjas se refiere a la recuperación o reconstrucción de la señal contenida en la fase. Algunas de las principales dificultades que esto representa son:

- El único observable es la intensidad total $I(x, y)$ y en esta se tienen dos cantidades desconocidas, $a(x, y)$ y $b(x, y)$, enmascarando la señal de interés, $\phi(x, y)$, que también es desconocida;
- Debido a la periodicidad, la fase solo puede ser determinada con una ambigüedad de 2π (también llamada *módulo* 2π);
- Debido al carácter par de la función coseno, $\cos(-\phi) = \cos \phi$, el signo de la fase no puede determinarse a partir de un sólo interferograma sin un conocimiento a priori; y
- En todos los casos prácticos se tiene presente un término de ruido, $n(x, y)$, de forma aditiva o multiplicativa.

De acuerdo a Kujawinska y Kosinski [11], un patrón de franjas puede ser observado como un sistema indeterminado (que posee tres incógnitas en una sola ecuación), sin embargo, existen diferentes métodos que permiten alterar el argumento del término de interferencia e introducir nuevos elementos a fin de obtener una solución.

Uno de estos métodos consiste en generar una portadora espacial dentro del interferograma (para un interferómetro de dos haces esto se logra introduciendo una inclinación en el haz de referencia) de forma tal que la función resultante queda dada por

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \omega_x x + \omega_y y] \quad (1.15)$$

donde ω_x y ω_y típicamente son constantes conocidas, proporcionales a la inclinación de la señal de referencia (o pueden estimarse fácilmente de patrón de franjas).

Los interferogramas de la forma 1.15 son llamados patrones de franjas abiertas (ver Figura 1.2) y bajo las condiciones adecuadas pueden ser demodulados de manera individual. En las mediciones que involucran este tipo de patrones, el lapso de tiempo requerido durante el cual la fase de la señal debe mantenerse sin perturbar es determinado por la rapidez del detector, por lo que resultan atractivos para el estudio de fenómenos dinámicos o en entornos de poca estabilidad.

A pesar de la ventaja intrínseca de poder determinar el mapa de fase a partir de una sola imagen, la técnica más utilizada para la detección de fase modulada es la así llamada Interferometría por Corrimiento de Fase o PSI (siglas en Inglés de *Phase-Stepping Interferometry* o *Phase-Shifting Interferometry*) puesto que en esta no se está limitado a un tipo en particular de patrón de franjas.



Figura 1.1: Simulación de un interferograma de franjas cerradas donde la diferencia de fase en el término de interferencia corresponde a la función *peaks*, una curva de prueba generada mediante translación y escalamiento de funciones gaussianas.

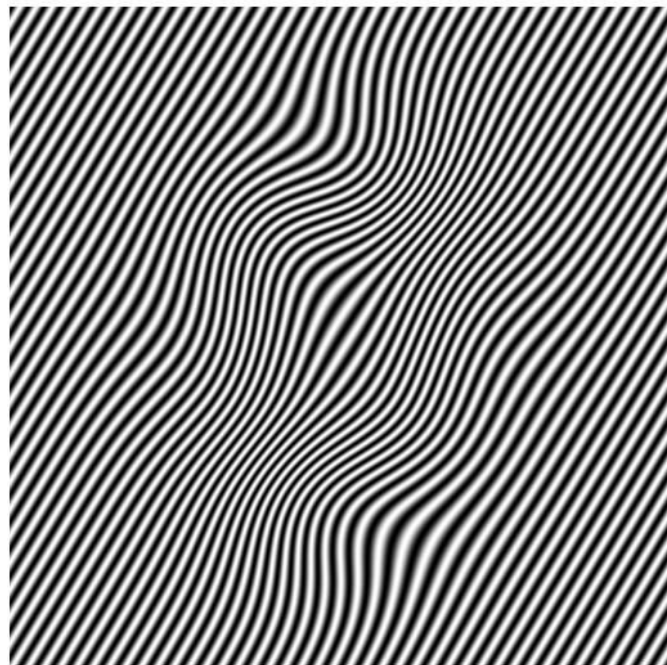


Figura 1.2: Simulación de un interferograma de franjas abiertas, donde la diferencia de fase en el término de interferencia corresponde a la función *peaks* y el haz de referencia presenta una inclinación sobre los ejes x y y .

En la técnica de PSI, una serie de patrones de franjas es generada introduciendo un desplazamiento lineal en el argumento del término de interferencia¹. Dicha señal puede ser descrita como

$$\begin{aligned} I(x, y, n\alpha) &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + n\alpha], \\ n &= -N, \dots, 0, \dots, N \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde α representa el corrimiento de fase entre interferogramas sucesivos. Los términos $a(x, y)$ y $b(x, y)$ son llamados iluminación de fondo y contraste de franjas, respectivamente, y típicamente ambos se consideran de variación lenta. Con fines ilustrativos, en la Figura 1.3 se presenta una serie de cuatro interferogramas generados con un corrimiento de fase relativo de $\alpha = \pi/2$.

En la técnica de PSI la señal de interés es recuperada mediante el uso de un filtro de cuadratura, $h(t)$, cuya expresión depende de la magnitud del corrimiento de fase y del número de muestras², que se encuentra entre un mínimo absoluto de 3 y un máximo típico de alrededor de 20 interferogramas. El principio de operación de dichos filtros, su forma explícita, etcétera, serán detallados más adelante.

Las condiciones ideales para la aplicación de la técnica de PSI son las siguientes:

- La intensidad luminosa del patrón de franjas se encuentra en el rango de operación lineal del sensor utilizado.
- Los interferogramas son capturados con la diferencia de fase exacta a la cual se ajustó el algoritmo correspondiente.
- El cambio introducido en la fase es lineal y obedece exclusivamente a un movimiento de tipo piston.
- Durante la captura digital de los interferogramas, todas las perturbaciones son pequeñas (cambios globales de intensidad, vibraciones, turbulencia de aire, etcétera).

Cuando estas condiciones se cumplen, todos los filtros de cuadratura para PSI encontrados en la literatura tienen la capacidad de recuperar la fase modulada. Sin embargo, en ocasiones no es posible satisfacer algunas de estas condiciones. En éste caso, es necesario contar con un filtros robustos para la recuperación de fase.

¹Una manera típica de lograr este desplazamiento de fase en un interferómetro de dos haces, consiste en ocasionar un movimiento tipo pistón en el soporte de la superficie de referencia (por ejemplo, al montarla sobre un piezo-eléctrico flexurizado, para mayor control y estabilidad) a fin de modificar la diferencia de camino óptico alterando la longitud de una de las trayectorias.

²Dependiendo de la convención utilizada, el número de muestras está dado por $2N - 1$ (para $n = -N, \dots, 0, \dots, N$) o por N (para $n = 0, \dots, N - 1$).

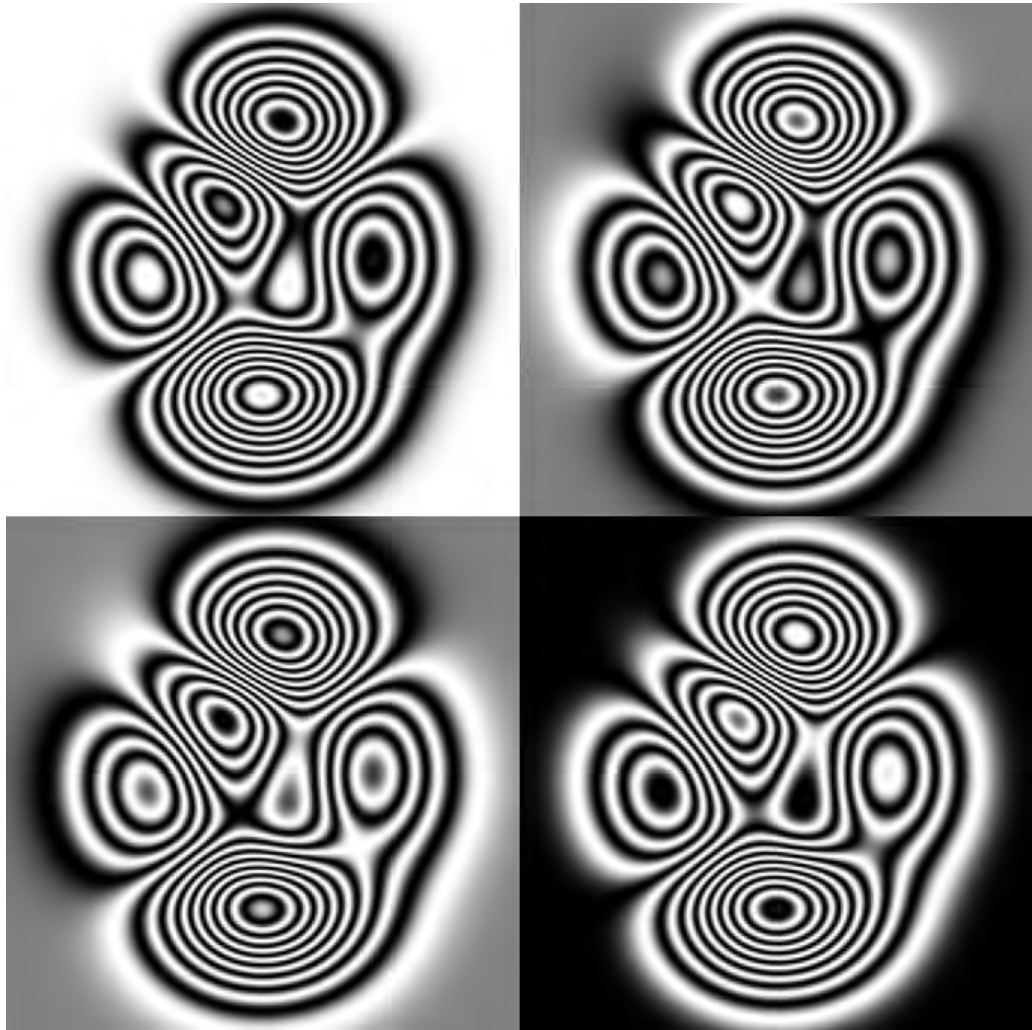


Figura 1.3: Interferogramas generados para recuperación de fase mediante el método de PSI de cuatro pasos y con $\alpha = 2\pi/N$. El incremento de fase es presentado circularmente en el sentido horario.

1.3. Recuperación de fase

Como se mencionó previamente, las modificaciones introducidas en las Ecuaciones 1.15 y 1.16 tienen por objetivo el recuperar la fase de interés, $\phi(x, y)$. A pesar de las múltiples diferencias entre los principales métodos y sus algoritmos, la forma general de la señal de salida recuperada es idéntica en ambos casos, y típicamente es expresada como:

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)]. \quad (1.17)$$

Considerando la expresión en términos de exponenciales de la función coseno,

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad (1.18)$$

de la Ecuación 1.14 resulta evidente que esta señal corresponde a uno de los términos originalmente encontrados en el interferograma.

Una vez aislado el término representado por la Ecuación 1.17 se tienen al menos dos posibilidades para recuperar la fase:

- (Propuesto por Takeda *et. al*[40]) calcular el logaritmo a ambos lados de la ecuación, de lo que resulta

$$\log [c(x, y)] = \log \left[\frac{1}{2}b(x, y) \right] + i\phi(x, y) \quad (1.19)$$

con lo que la fase $\phi(x, y)$ queda completamente aislada en la parte imaginaria pues $b(x, y)$ es puramente real:

$$\phi(x, y) = \text{Im} \{ \log [c(x, y)] \} \quad (1.20)$$

- (Encontrado en la literatura con mucha mayor frecuencia) aplicar la identidad de Euler para las exponenciales complejas

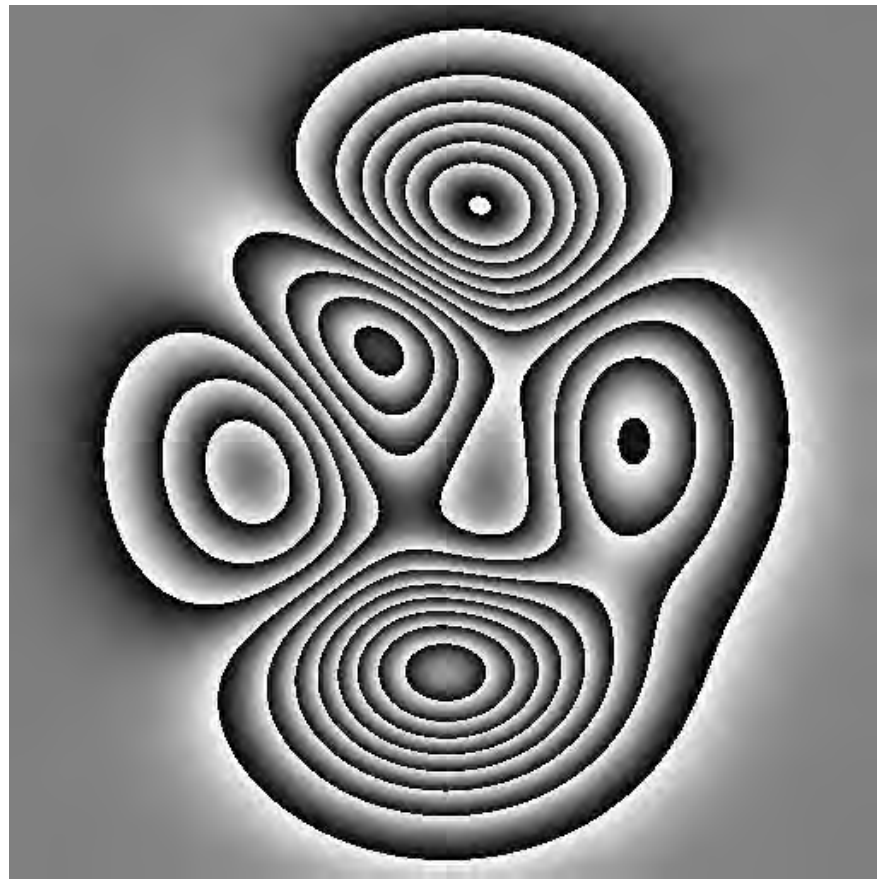
$$\text{Re} [c(x, y)] = \frac{1}{2}b(x, y) \cos [\phi(x, y)] \quad (1.21)$$

$$\text{Im} [c(x, y)] = \frac{1}{2}b(x, y) \sin [\phi(x, y)] \quad (1.22)$$

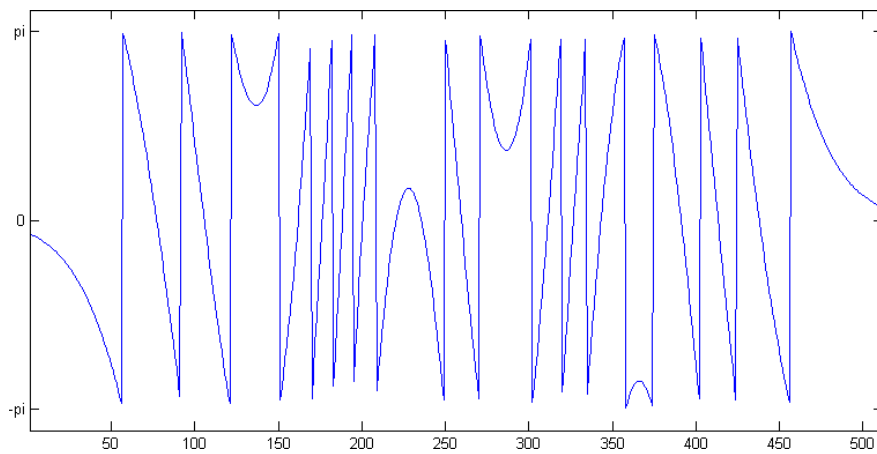
y despejar de ambas ecuaciones para la fase $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im} [c(x, y)]}{\text{Re} [c(x, y)]} \right\}. \quad (1.23)$$

El resultado obtenido por ambos métodos es idéntico, lo que puede comprobarse con facilidad de manera numérica. En la Figura 1.4 se muestra el mapa de fase recuperado para el interferograma simulado (recordando que la diferencia de fase proviene de una superficie suave, la ambigüedad de 2π resulta evidente).



(a)



(b)

Figura 1.4: (a) Mapa de fase recuperado del interferograma simulado y (b) un corte transversal presentado a fin de ilustrar la magnitud de las discontinuidades.

Un mapa de fase como el presentado en la Figura 1.4, donde no han sido corregidas las falsas discontinuidades introducidas en el proceso interferométrico, es llamado *de fase envuelta*. El proceso de eliminación de dichas discontinuidades en la fase recuperada es coloquialmente llamado *desenvolvimiento de franjas*.

La capacidad de un algoritmo para corregir las discontinuidades presentes en un patrón de franjas envueltas depende de múltiples factores (muchos de ellos incluso requieren la selección manual de puntos de inicio) pero, en general, el factor determinante es la calidad del interferograma mismo: que presente ausencia de ruido, un buen contraste, etcétera.

Dado que en todos los casos prácticos es inevitable la presencia de perturbaciones, típicamente es necesario realizar un procesamiento previo de la información a analizar con el propósito de mejorar el desempeño de dichos algoritmos.

Existen diversas técnicas utilizadas en el preprocesado de los patrones de franjas, como son los promedios temporales o espaciales, las técnicas de normalización clásica, etcétera. En algunos casos, la aplicación de estas técnicas es parte fundamental del proceso de recuperación de fase. Por ejemplo, en la técnica de interferometría por patrones de moteado o ESPI (siglas en Inglés de *Electronic Speckle Pattern Interferometry*), los interferogramas obtenidos no pueden ser desenvueltos por métodos tradicionales a menos que sean previamente filtrados mediante un simple pasa-bajas.

En el siguiente capítulo serán abordados algunos de los métodos más utilizados para el procesamiento de señales desde el punto de vista de la representación espacial y de su espectro de frecuencias.

Capítulo 2

Procesamiento digital de señales

El procesamiento digital de señales o DSP (siglas en Inglés de *Digital Signal Processing*) tuvo sus inicios a finales de la década de 1960. Desde la década de 1970 éste campo de investigación evolucionó drásticamente, gracias al aumento exponencial en la capacidad de procesamiento y a la sofisticación de las técnicas. En la actualidad el procesamiento digital de señales se considera parte integral de múltiples procesos y aplicaciones.

Dada la diversidad del tema en cuestión, en el presente capítulo son desarrollados únicamente aquellos aspectos más estrechamente relacionados con el procesamiento de señales interferométricas. Es posible encontrar mayor información en la literatura especializada: por ejemplo, Madisetti & Williams [14] y Proakis & Manolakis [26].

2.1. Señales discretas

Una señal discreta es una secuencia indexada de valores reales o complejos. Matemáticamente se representa como una función cuyas variables únicamente toman valores enteros. Las señales discretas son típicamente generadas mediante el muestreo periódico.

En la presente discusión, únicamente serán consideradas señales con muestreo *uniforme* ya que éste es el caso comúnmente encontrado en la gran mayoría de los casos experimentales. Ejemplos de este tipo de muestreo son la captura mediante sensores electrónicos de imagen, con una resolución fija y uniforme; y la adquisición de una serie de interferogramas a intervalos (o *pasos*) fijos, en las técnicas de interferometría por corrimiento de fase.

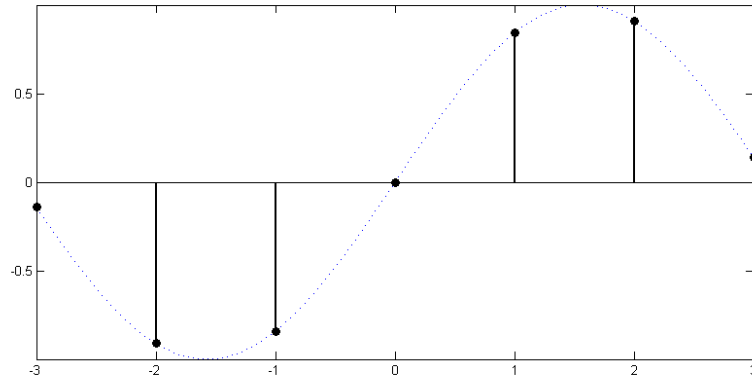


Figura 2.1: Ejemplo de una función continua (línea punteada) y su correspondiente representación discreta (puntos rellenos).

Matemáticamente, una señal discreta puede obtenerse a partir de una señal continua $x_a(t)$ al multiplicarla por una secuencia periódica de impulsos unitarios

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

de forma tal que se resulta la señal muestreada

$$x_s(t) = x_a(t) s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (2.2)$$

donde T_s es el espaciamiento entre muestras o periodo de muestreo, $F_s = 1/T_s$ es la frecuencia de muestreo (en muestras por segundo). Finalmente, la señal discreta queda expresada como una secuencia indexada de valores:

$$x(n) = x_a(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Por ejemplo, sea una señal sinusoidal continua

$$x_a(t) = \cos(\Omega t + \varphi) = \cos(2\pi F t + \varphi) \quad (2.4)$$

que es muestreada periódicamente a $T_s = 1/F_s$. De las Ecuaciones 2.2 y 2.3, se concluye que la señal discreta generada está dada por

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT_s) = \cos(\Omega nT_s + \varphi), \\ &= \cos[(\Omega T_s)n + \varphi], \end{aligned} \quad (2.5)$$

como se ilustra en la Figura 2.1 para $T_s = 1$.

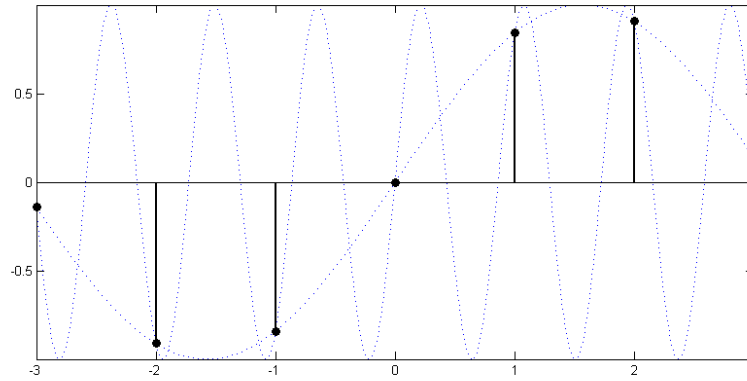


Figura 2.2: Dos señales periódicas que son muestreadas a una misma señal discreta (alias).

Ya que en las señales discretas las variables únicamente toman valores enteros se tiene un resultado importante relacionado con la periodicidad: dada la sinusoidal

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \varphi) \quad (2.6)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, se sigue fácilmente que

$$\cos(\omega_0 n + \varphi \pm 2\pi n) = \cos[(\omega \pm 2\pi)n + \varphi] \equiv x(n). \quad (2.7)$$

De la Ecuación 2.7 se concluye que todas las sinusoidales

$$x_k(n) = \cos(\omega_k n + \varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

$$\omega_k = \omega_0 \pm 2k\pi, \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi \quad (2.9)$$

son idénticas a $x(n)$. De esta forma, una señal discreta con frecuencia $|\omega| > \pi$ posee una representación idéntica a otra señal de frecuencia $|\omega| < \pi$ por lo que la primera es llamada *un alias* de la segunda (ver Figura 2.2).

Por comparación (ver Ecuación 2.5) puede observarse que las frecuencias discretas y continuas están relacionadas como

$$\omega = \Omega T_s, \quad (2.10)$$

$$f = F/F_s \quad (2.11)$$

y que el proceso de muestreo mapea de un rango infinito de frecuencia a un rango finito:

$$-\infty < \Omega < \infty \implies -\pi < \omega < \pi, \quad (2.12)$$

$$-\infty < F < \infty \implies -1/2 < f < 1/2. \quad (2.13)$$

Sustituyendo en las Ecuaciones 2.10 y 2.11 los valores máximos de oscilación que puede presentar una señal discreta resulta

$$\Omega_{max} = \pi T_s, \quad (2.14)$$

$$F_{max} = F_s/2. \quad (2.15)$$

De acuerdo con el resultado anterior, suponiendo que cualquier señal analógica puede ser representada como la superposición de señales sinusoidales de diferente frecuencia, fase y amplitud, es decir

$$x_a(t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(2\pi F_j t + \varphi_j), \quad (2.16)$$

la frecuencia de muestreo necesaria para establecer una correspondencia unívoca entre cualquier señal continua y su equivalente discreto debe ser *por lo menos* del doble de la frecuencia máxima contenida en la señal analizada.

El así llamado teorema del muestreo establece si esta condición se cumple, la señal continua siempre puede ser recuperada de manera exacta mediante la función de interpolación

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi F_N t)}{2\pi F_N t} \quad (2.17)$$

donde $F_N = 2F_{max}$ es la llamada frecuencia de Nyquist.

2.2. Técnicas de preprocesado

Como se mencionó previamente, en todos los casos prácticos existe un límite para la capacidad de controlar la calidad y apariencia de los patrones de franjas, por lo que estos pueden presentar características poco deseables como son la presencia de ruido intenso, poco contraste entre franjas, variaciones significativas en la señal de fondo, etcétera.

Sin embargo, existen técnicas de procesamiento previo que buscan mejorar los datos originales para el análisis de franjas. Estas pueden clasificarse principalmente como operaciones aritméticas (normalización, corrección del factor gamma, etc.) y operaciones de filtrado (convolución con operadores locales o filtros en el espacio de frecuencia).

2.2.1. Suavizado mediante convolución.

La convolución de señales con filtros de respuesta finita al impulso es una de las técnicas más populares para el filtrado de señales. Suele aplicarse, por ejemplo, para la detección de bordes o con propósitos de suavizado.

La máscara promediadora es sin duda alguna el filtro pasa-baja más utilizado en el análisis de franjas. Una expresión típica está dada por

$$h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Existen al menos dos maneras equivalentes de aplicarla para el suavizado de interferogramas, mediante una convolución bidimensional, definida para el caso discreto como

$$I_F(n, m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(j, k) I_F(n - j, m - k) \quad (2.19)$$

o realizando el producto de los espectros en el espacio de frecuencias, en virtud del teorema de convolución

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (2.20)$$

A fin de calcular su espectro de frecuencia, es necesario reescribir la Ecuación 2.18 en términos de la delta de Dirac:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{9} [\delta(x, y) + \delta(n + 1, y) + \delta(x + 2, y) + \delta(x, y + 1) + \delta(x + 1, y + 1) \dots \\ &+ \delta(x + 2, y + 1) + \delta(x, y + 2) + \delta(x + 1, y + 2) + \delta(x + 2, y + 2)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

de forma tal que aplicando las propiedades fundamentales de la delta de Dirac sobre la Transformada de Fourier del filtro $h(x, y)$, resulta

$$H(\omega_x, \omega_y) \equiv \mathcal{F}\{h(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i(x\omega_x + y\omega_y)] dx dy \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{9} \{1 + \exp(i\omega_x) + \exp(i2\omega_x) + \exp(i\omega_y) \dots \quad (2.23)$$

$$+ \exp[i(\omega_x + \omega_y)] + \exp[i(2\omega_x + \omega_y)] + \exp(i2\omega_y) \dots$$

$$+ \exp[i(\omega_x + 2\omega_y)] + \exp[i(2\omega_x + 2\omega_y)]\}.$$

Como se observa en la Ecuación 2.23, el espectro de frecuencias $H(\omega_x, \omega_y)$ es claramente complejo. Mediante manipulación algebraica es posible reescribir éste resultado de una forma más intuitiva:

$$\begin{aligned} H(\omega_x, \omega_y) &= \frac{1}{9} [1 + \exp(i\omega_x) + \exp(i2\omega_x)] [1 + \exp(i\omega_y) + \exp(i2\omega_y)] \\ &= \frac{1}{9} [1 + 2 \cos(\omega_x)] [1 + 2 \cos(\omega_y)] \exp[i(\omega_x + \omega_y)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

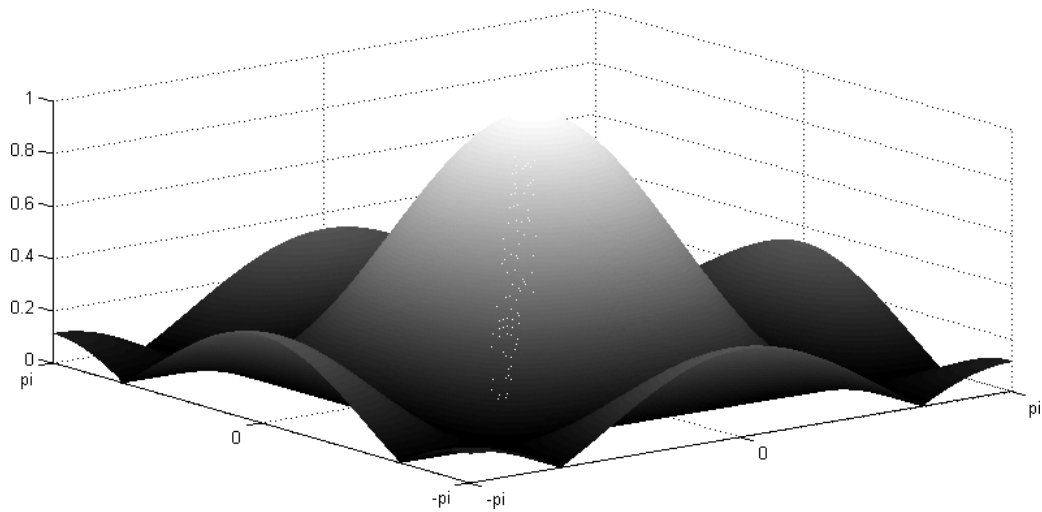


Figura 2.3: Valor absoluto del espectro de frecuencia de la máscara promediadora $h(x, y)$.

En la Figura 2.3 es presentada la gráfica del espectro de frecuencias $H(\omega_x, \omega_y)$ en valor absoluto. Como puede observarse, la función está normalizada y su máxima amplitud se encuentra alrededor del origen, con lo que se demuestra su comportamiento pasa-baja.

Para realizar un filtrado más robusto, es decir, con mayor rechazo a las altas frecuencias, es posible realizar múltiples convoluciones con el mismo filtro o, alternativamente, realizar múltiples convoluciones de cierto filtro consigo mismo. El segundo método es preferido ya que significa una disminución significativa en el procesamiento necesario. Por ejemplo, sea el filtro de respuesta finita

$$h_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \delta(x, y) + \delta(x + 1, y) + \delta(x, y + 1) + \delta(x + 1, y + 1) \quad (2.25)$$

etiquetado así para identificar la dimensión del filtro.

Calculando la autocorrelación de $h_2(x, y)$, resulta

$$h_2(x, y) * h_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

o, realizando la convolución en términos de la función delta de Dirac

$$h_2(x, y) * h_2(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy' \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= \delta(x, y) + \delta(x + 1, y) + \delta(x, y + 1) + \delta(x + 1, y + 1) \dots & (2.28) \\ &+ \delta(x + 1, y) + \delta(x + 2, y) + \delta(x + 1, y + 1) + \delta(x + 2, y + 1) \dots \\ &+ \delta(x, y + 1) + \delta(x + 1, y + 1) + \delta(x, y + 2) + \delta(x + 1, y + 2) \dots \\ &+ \delta(x + 1, y + 1) + \delta(x + 2, y + 1) + \delta(x + 1, y + 2) + \delta(x + 2, y + 2) \dots \end{aligned}$$

lo que se reduce fácilmente a

$$\begin{aligned}
 h_2(x, y) * h_2(x, y) &= \delta(x, y) + 2\delta(x + 1, y) + \delta(x + 2, y) \dots \\
 &+ 2\delta(x, y + 1) + 4\delta(x + 1, y + 1) + 2\delta(x + 2, y + 1) \dots \quad (2.29) \\
 &+ \delta(x, y + 2) + 2\delta(x + 1, y + 2) + \delta(x + 2, y + 2)
 \end{aligned}$$

demostrando que ambos métodos son equivalentes (ver Ecuación 2.26).

En la Figura 2.4 (página 26) se presenta el espectro de los distintos filtros obtenidos mediante la aplicación sucesiva de la convolución entre filtros $h_2(x, y)$. Como puede observarse, el ancho de la región central del espectro disminuye considerablemente en cada iteración, permitiendo un mayor rechazo de las altas frecuencias. Vale la pena señalar que con la ayuda de los distintos paquetes de computación numérica (GNU Octave, MATLAB, NumPy, Scilab... por mencionar algunos) puede calcularse con facilidad la expresión matricial adecuada para un filtro de orden arbitrariamente alto.

Esto comprueba la posibilidad de construir filtros más robustos a partir de bloques o elementos de menor orden (nótese, por ejemplo, que la convolución entre dos filtros de dimensiones 2×2 dio lugar a un filtro de dimensiones 3×3). La extensión al caso complejo es directa y posee una gran importancia para el diseño de los filtros de cuadratura usados en PSI, como se demostrará más adelante.

2.2.2. Regularización clásica.

El principal inconveniente de la aplicación de filtros de convolución consiste en los efectos de borde. Esta distorsión se debe a que el filtro mezcla la información de la señal de fondo con la contenida en el patrón de franjas. Típicamente, para prevenir estos efectos es definida una región de operación que excluye los bordes, evitando el uso de esta información poco confiable para la determinación de la fase.

De acuerdo con Marroquin [18], una manera conveniente de describir el proceso de suavizado consiste en la búsqueda de una señal $f(x, y)$ continua a trazos sobre el dominio de la señal $g(x, y)$ tal que el observable quede modelado como

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (2.30)$$

donde $n(x, y)$ es una señal ruidosa (por ejemplo, una distribución gaussiana de ruido blanco). De esta manera el proceso puede verse como un problema de optimización donde se establece un compromiso entre obtener una señal suave $f(x, y)$ mientras se mantiene una buena fidelidad con la señal observada $g(x, y)$.

Una manera convencional de expresar matemáticamente este problema consiste en la minimización de una funcional de energía, expresada para el caso discreto como

$$U[f(x, y)] = \sum \sum \left\{ [f(x, y) - g(x, y)]^2 + \lambda R[f(x, y)] \right\} \quad (2.31)$$

donde el primer término cuantifica la fidelidad que se tiene entre la señal que busca y la observada, mientras que el segundo (llamado término de regularización) penaliza sus desviaciones de una señal suave, por ejemplo, considerando la magnitud de sus derivadas:

$$R_1[f(x, y)] = \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right]^2 \quad (2.32)$$

$$R_2[f(x, y)] = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right]^2 \quad (2.33)$$

...

Es importante señalar que típicamente las derivadas se realizan como aproximaciones numéricas,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \simeq f(x, y) - f(x - 1, y) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \simeq f(x, y) - f(x, y - 1) \quad (2.35)$$

Uno de los métodos más simples para optimizar las funciones de costo es mediante el descenso de gradiente, es decir,

$$f^{k+1}(x, y) = f^k(x, y) - \eta \frac{\partial U[f(x, y)]}{\partial f(x, y)} \quad (2.36)$$

donde k indica el número de la iteración y $\eta \approx 0.1$ es el tamaño del paso. Éste método es considerado de evolución lenta (como se observa en la Figura 2.6) por lo que en ocasiones resulta necesario optar por alternativas que requieran un menor número de pasos para encontrar una solución, como son los métodos de gradiente conjugado, convergencia cuadrática o métrica variable [Press et al. 25].

A fin de analizar la respuesta en frecuencia del método de regularización clásica, consideremos por ejemplo el caso de primer orden: (sustituyendo las aproximaciones numéricas para las Ecuaciones 2.31 y 2.32)

$$U[f(x, y)] = \sum \sum \left\{ [f(x, y) - g(x, y)]^2 + \lambda [f(x, y) - f(x - 1, y)]^2 \dots \right. \quad (2.37)$$

$$\left. + \lambda [f(x, y) - f(x, y - 1)]^2 \right\}$$

Idealmente, la señal $f(x, y)$ obtenida luego de múltiples iteraciones es tal que iguala el gradiente a cero, es decir

$$\frac{\partial U [f(x, y)]}{\partial f(x, y)} = 0 = 2 \sum \sum \{f(x, y) - g(x, y) + \lambda [f(x, y) - f(x-1, y)] \dots + \lambda [f(x, y) - f(x, y-1)]\} \quad (2.38)$$

Despejando para la *señal de entrada*, $g(x, y)$, se tiene

$$g(x, y) = (1 + 2\lambda) f(x, y) - \lambda [f(x-1, y) + f(x, y-1)] \quad (2.39)$$

y tomando la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= (1 + 2\lambda) F(\omega_x, \omega_y) - \lambda \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i[(x+1)\omega_x + y\omega_y]\} dx dy \\ &\quad - \lambda \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i[x\omega_x + (y+1)\omega_y]\} dx dy \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde se ha realizado un cambio de variable mudo. De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y) &= (1 + 2\lambda) F(\omega_x, \omega_y) - \lambda [\exp(-i\omega_x) F(\omega_x, \omega_y) + \exp(-i\omega_y) F(\omega_x, \omega_y)] \\ &= F(\omega_x, \omega_y) \{1 + \lambda [2 - \exp(-i\omega_x) - \exp(-i\omega_y)]\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

y se encuentra que la función de transferencia está dada por

$$H(\omega_x, \omega_y) \equiv \frac{F(\omega_x, \omega_y)}{G(\omega_x, \omega_y)} = \frac{1}{1 + \lambda [2 - \exp(-i\omega_x) - \exp(-i\omega_y)]} \quad (2.42)$$

lo que representa un filtro pasa-baja, donde el ancho espectral es inversamente proporcional al parámetro λ como se ilustra en la Figura 2.5.

Vale la pena resaltar una vez más que para esta técnica de preprocesado, la elección correcta de parámetros permite obtener el comportamiento espectral equivalente a un gran número de aplicaciones sucesivas de filtros espaciales simples o bien al comportamiento espectral de filtros de mayor complejidad.

En el Capítulo siguiente se observará que éste enfoque de sistemas lineales y señales recuperadas como convoluciones con filtros complejos puede aplicarse también para la descripción del proceso de recuperación de fase en los métodos convencionales más usados en Interferometría.

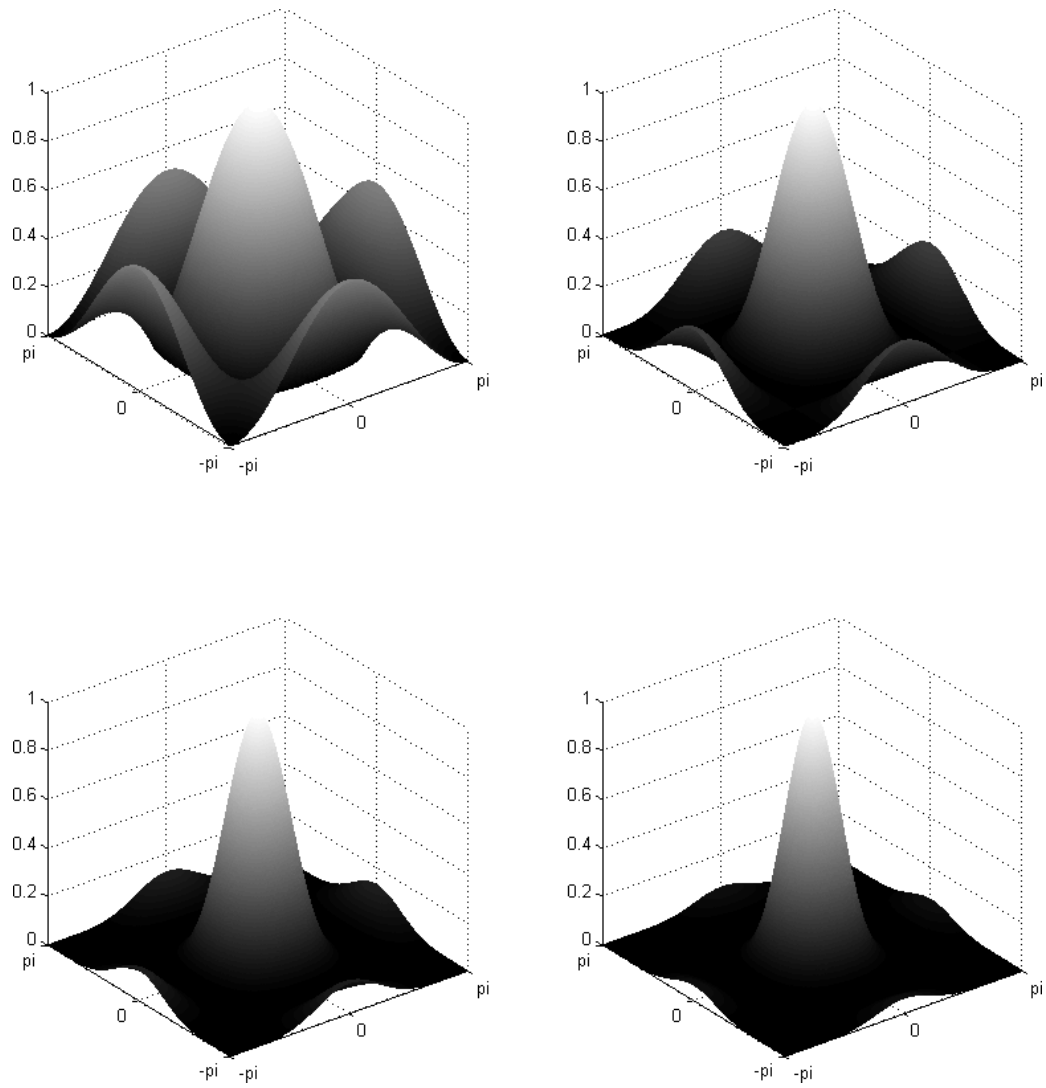


Figura 2.4: Amplitud del espectro de frecuencia de filtros obtenidos como autocorrelaciones sucesivas de un filtro de menor orden (h_2 , $h_2 * h_2$, $h_2 * h_2 * h_2$ y $h_2 * h_2 * h_2 * h_2$, respectivamente).

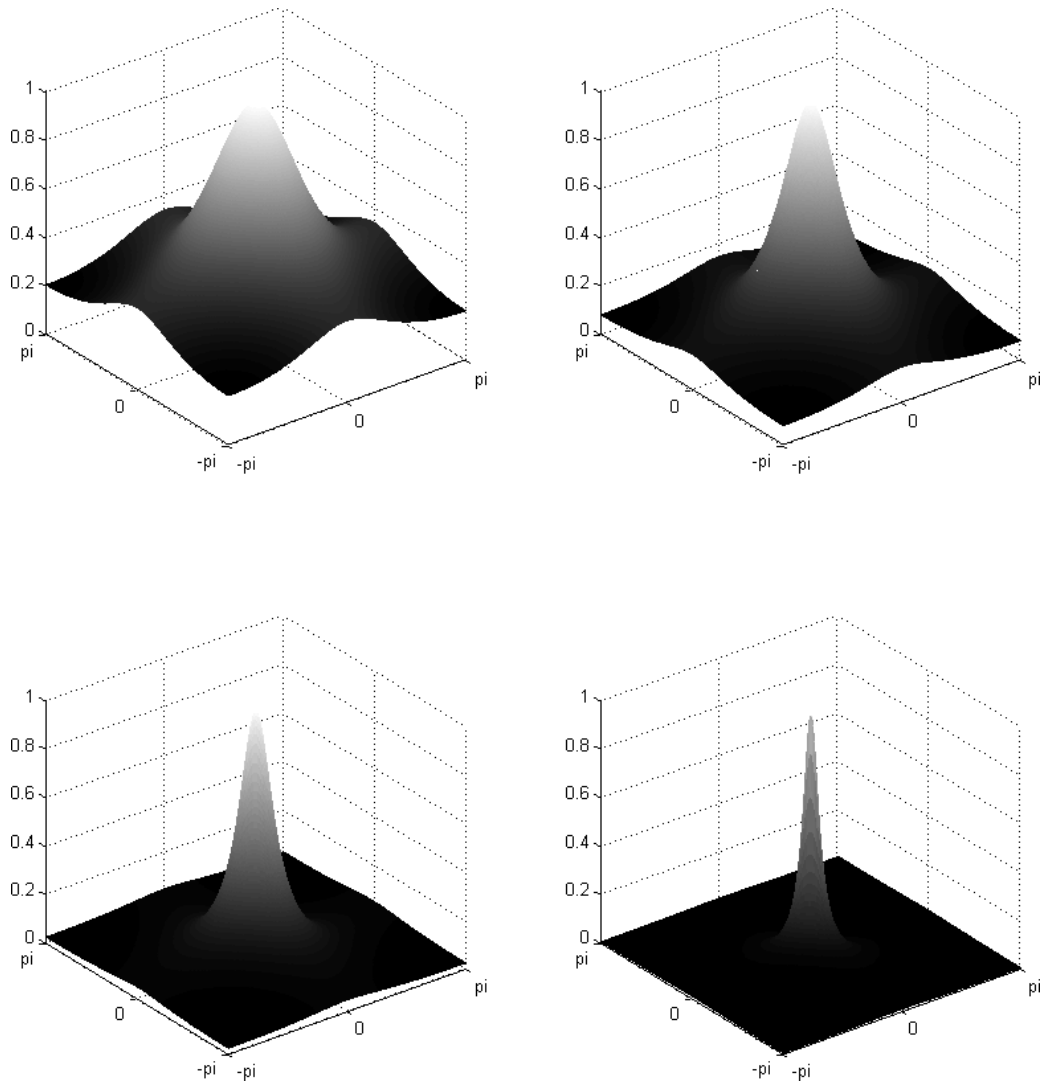


Figura 2.5: Respuesta espectral del algoritmo de regularización clásica (primer orden) para $\lambda = 1, 5, 10, 30$.

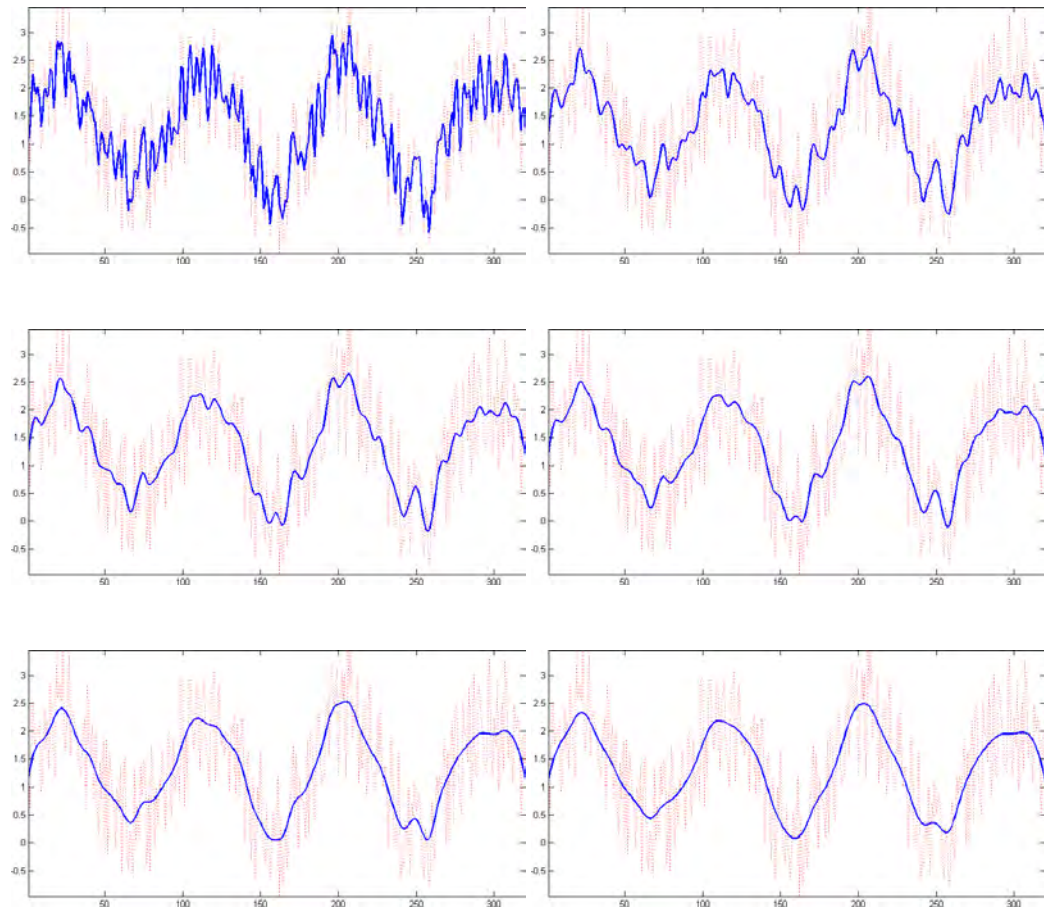


Figura 2.6: Suavizado mediante el método del descenso de gradiente de una sinusoidal con presencia de ruido blanco de distribución gaussiana (aditivo). La línea punteada representa los datos originales, la línea continua corresponde a la función aproximada en la k -ésima iteración ($k = 1, 5, \dots, 25$)

Capítulo 3

Métodos convencionales de recuperación de fase

De acuerdo con Schreiber y Bruning [27], las primeras referencias sobre el corrimiento de fase como técnica para el análisis cuantitativo de los patrones de franjas se remontan a la década de 1960, con las investigaciones realizadas por Carre [2] y Crane [3]. A lo largo de la década siguiente, la técnica fue ampliamente desarrollada (Bruning *et al.* [1], Shagam [37], Wyant [41], entre otros) y aún en la actualidad constituye un tópico de investigación sobre el que se realizan un gran número de aportaciones por la comunidad científica.

A pesar de las ventajas que presenta la técnica de corrimiento de fase (PSI) respecto al así llamado método de Fourier, presentado por Takeda *et al.* [40] en 1981, éste último gozó de gran popularidad gracias a que sus condiciones experimentales podían ser satisfechas con relativa facilidad. Actualmente esta técnica de recuperación de fase es considerada una solución sencilla para un gran número de problemas prácticos y es sin duda una de las favoritas en el entorno académico.

Entre las ventajas que presenta la técnica de PSI respecto a los métodos alternativos podemos mencionar que ésta hace posible recuperar mapas de fase independientemente de la forma de las franjas; permite el diseño de algoritmos robustos (Freischlad and Koliopoulos [6], Hariharan *et al.* [9], Marroquin *et al.* [19], Servin and Kujawinska [30], Servin *et al.* [31, 32, 33, 34, 35], Surrel [39]); y en algunas configuraciones, incluso es posible generar simultáneamente los múltiples interferogramas necesarios para su operación (Millerd *et al.* [20, 21], Novak *et al.* [24], Smythe and Moore [38]).

A continuación es analizada la teoría fundamental del método de Fourier ya que a partir de esta es relativamente sencillo establecer una analogía con los métodos modernos y porque también estos guardan una relación muy estrecha con el análisis espectral, como se demostrará a lo largo de éste capítulo.

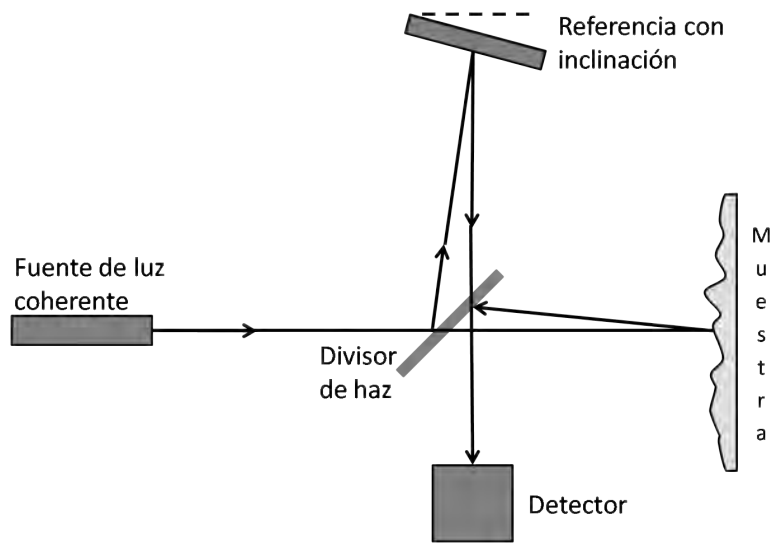


Figura 3.1: Interferómetro que da lugar a una señal como la descrita por la Ecuación 3.1.

3.1. Método de Fourier

De acuerdo con Takeda *et al.*[40], un patrón de franjas abiertas con portadora a lo largo del eje x puede ser descrito de la forma

$$g(x, y) = \omega_0 a(x, y) + b(x, y) \cos[\omega_0 x + \phi(x, y)], \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (3.1)$$

donde, típicamente, los términos $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ se consideran de baja frecuencia respecto a la variación introducida por la portadora ω_0 . En lo subsecuente, sólo será detallado el caso de portadora espacial sobre una dimensión ya que la extensión al caso bidimensional se considera directa.

En la Figura 3.1 se presenta una manera simple de introducir la portadora ω_0 mediante un interferómetro de Michelson, donde el espejo del haz de referencia presenta una ligera inclinación (exagerada con fines ilustrativos).

Dada la identidad de Euler, la Ecuación 3.1 puede ser reescrita como

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(i\omega_0 x) + c^*(x, y) \exp(-i\omega_0 x) \quad (3.2)$$

con

$$c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \quad (3.3)$$

y donde el asterisco (como exponente) denota el complejo conjugado.

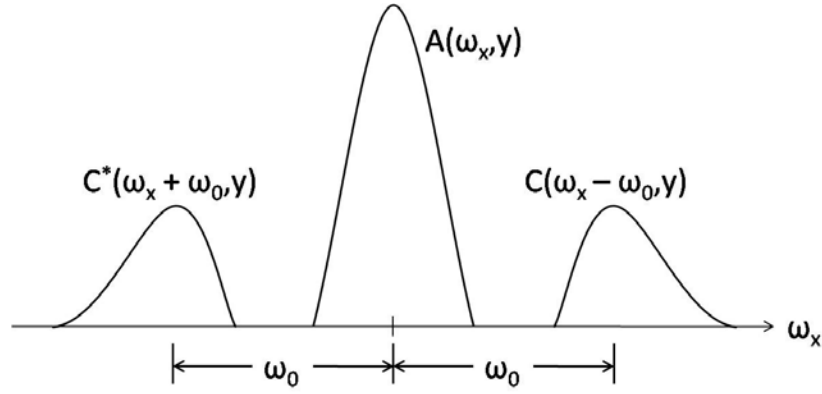


Figura 3.2: Representación esquemática de un espectro de franjas abiertas con portadora a lo largo del eje x .

Tomando la transformada de Fourier con respecto a x en la Ecuación 3.2 resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [a(x, y) + c(x, y) e^{i\omega_0 x} + c^*(x, y) e^{-i\omega_0 x}] e^{-i\omega_x x} dx & (3.4) \\ &= A(\omega_x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} [c(x, y) e^{-i(\omega_x - \omega_0)x} + c^*(x, y) e^{-i(\omega_x + \omega_0)x}] dx \\ &= A(\omega_x, y) + C(\omega_x - \omega_0, y) + C^*(\omega_x + \omega_0, y) & (3.5) \end{aligned}$$

Ya que las variaciones espaciales de $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ se suponen lentas en comparación con la frecuencia de la portadora espacial ω_0 , la Ecuación 3.5 representa un espectro de nódulos aislados, ilustrado esquemáticamente en la Figura 3.2.

En dicho espectro la señal de interés puede recuperarse al desplazar el espectro de frecuencias y aplicar un filtro pasa-baja[40], como se demuestra a continuación:

Aplicando la propiedad de translación de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{\exp(-i\omega_0 x) g(x, y)\} = G(\omega_x + \omega_0). \quad (3.6)$$

y dado un filtro pasa-baja de respuesta finita al impulso, $h(x, y)$, aplicando el teorema de convolución se tiene

$$H(\omega_x, y) G(\omega_x + \omega_0, y) = \mathcal{F}\{h(x, y)\} \mathcal{F}\{\exp(-i\omega_0 x) g(x, y)\}, \quad (3.7)$$

$$= \mathcal{F}\{h(x, y) * [\exp(-i\omega_0 x) g(x, y)]\}. \quad (3.8)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier, resulta

$$h(x, y) * [\exp(-i\omega_0 x) g(x, y)] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega_x, y) G(\omega_x + \omega_0, y)\}, \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \triangleq c(x, y). \quad (3.10)$$

Como se mencionó al final de Capítulo 1 existen múltiples maneras de despejar el mapa de fase $\phi(x, y)$ a partir de la Ecuación 3.10 y la más utilizada en la literatura está dada por

$$\phi(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[c(x, y)]}{\text{Re}[c(x, y)]} \right\}. \quad (3.11)$$

Un aspecto interesante de la Ecuación 3.10 consiste en que esta describe al método de Takeda como una convolución en el espacio entre el interferograma multiplicado por una exponencial compleja y un filtro pasa-baja adecuado.

Similarmente, asociando la exponencial compleja al filtro pasa-baja puede recuperarse la misma señal más una inclinación uniforme proporcional a la portadora:

$$[\exp(i\omega_0 x) h(x, y)] * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega_x - \omega_0, y) G(\omega_x, y)\} \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} b(x, y) \exp i [\phi(x, y) - \omega_0 x] \quad (3.13)$$

de donde resulta

$$\phi(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[c(x, y)]}{\text{Re}[c(x, y)]} \right\} + \omega_0 x. \quad (3.14)$$

En la Figura 3.3 se presenta un ejemplo de la aplicación del método para un experimento académico (resultado real, no simulado) donde mediante un proyector digital convencional fue generado un patrón de franjas abiertas con un perfil de intensidad sinusoidal distorsionado por la presencia de un objeto de prueba (una pirámide cuadrada de caras planas).

NOTA IMPORTANTE: Típicamente los espectros de frecuencia mencionados son obtenidos numéricamente mediante la aplicación del algoritmo de la transformada rápida de Fourier¹, definido por

$$F(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp[-1i(2\pi/M)pm] \exp[-1i(2\pi/N)qn] \quad (3.15)$$

$$f(n, m) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(p, q) \exp[1i(2\pi/M)pm] \exp[1i(2\pi/N)qn] \quad (3.16)$$

donde N y M indican la magnitud de la señal. De acuerdo a su documentación, la mayoría del software numérico adopta esta convención de signos y factores de escala (nuevamente, GNU Octave, MATLAB, NumPy, Scilab... y en particular, Matemática la presenta como la variante² de “procesamiento de señales”).

Esta convención de signo, con argumento negativo para la transformada y positivo para la anti-transformada, es la misma que se utiliza en el cálculo de todas las transformadas de Fourier presentadas aquí (pero no así en la publicación original de Takeda et al.).

¹Aunque en esta discusión se esté analizando únicamente el caso unidimensional, el interferograma es una señal bidimensional y en la práctica se recurre a los algoritmos FFT2 e IFFT2.

²Más información en <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/FourierTransforms.html>

La importancia de mantener la congruencia entre las convenciones radica en que el método de Fourier posee la ventaja de recuperar un mapa de fase *sin ambigüedad de signo*. Sin embargo, al no conocer la convención utilizada en los algoritmos de FFT existe la posibilidad de que el desplazamiento del espectro se realice en la dirección opuesta, recuperando sin saberlo $c^*(x, y)$ e introduciendo nuevamente una indeterminación.

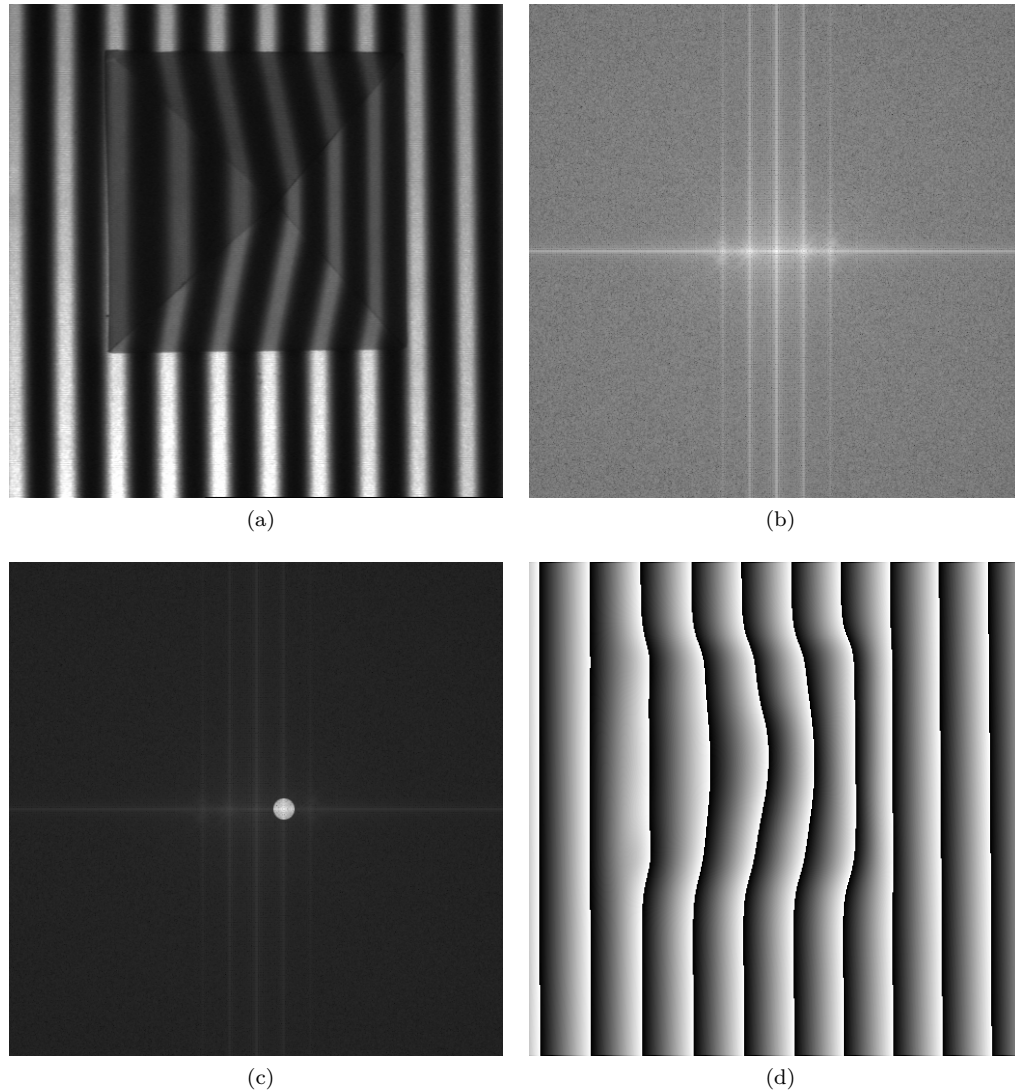


Figura 3.3: Segmentos de (a) un patrón de franjas proyectado sobre un objeto de prueba; (b) espectro de frecuencias obtenido mediante FFT2; (c) superposición del espectro de frecuencia y de la máscara de filtrado, donde la opacidad se ha reducido con fines ilustrativos; (d) mapa de fase envuelta obtenida mediante la aplicación de la Ecuación 3.14 (nótese el incremento uniforme sobre el eje $-x$).

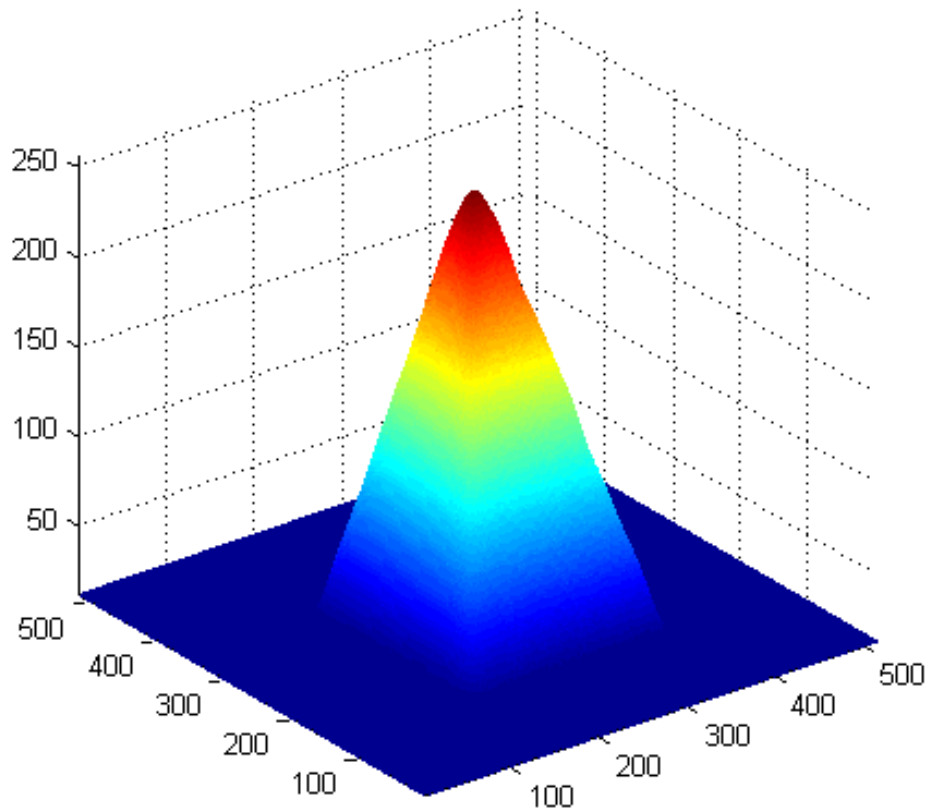


Figura 3.4: Representación tridimensional del objeto de prueba, proporcional al mapa de fase obtenido mediante el método de Fourier. La inclinación uniforme dada por $\omega_0 x$ fue eliminada restando la fase correspondiente al patrón de franjas proyectado. Prueba realizada en los talleres de metrología del Centro de Investigaciones en Óptica A.C., con la asesoría del Ing. Guillermo Garnica Campos.

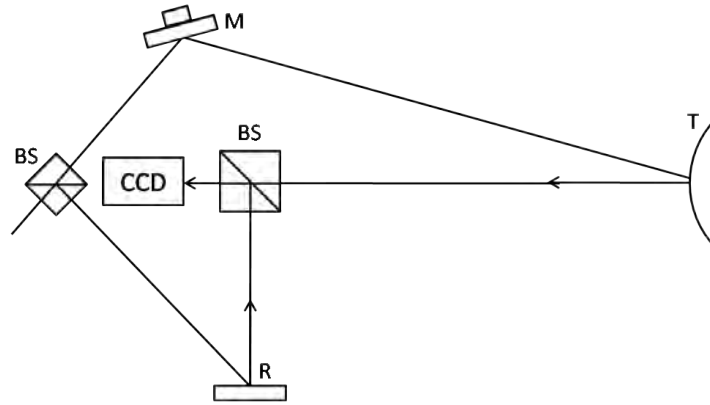


Figura 3.5: Esquema de un interferómetro tipo Michelson adecuado para la técnica de PSI: (BS) divisores de haz, (M) espejo montado sobre un actuador electrónico de gran precisión, (R) espejo de referencia y (T) superficie bajo prueba.

3.2. Interferometría por corrimiento de fase

En 1974, Bruning et al. [1] introdujo el método interferométrico de corrimiento de fase en pasos discretos (del Inglés, *Phase-stepping interferometry*). Típicamente, en esta técnica se tiene un arreglo interferométrico (como el ilustrado en la Figura 3.5) donde se modifica la magnitud de la diferencia del camino óptico mediante un actuador electrónico, mientras se captura y digitaliza cierto número de interferogramas mediante un sensor tipo CCD a fin de obtener una señal discreta donde el mapa de fase presenta un desplazamiento tipo pistón entre muestras consecutivas.

Dicha señal puede ser descrita como un patrón de franjas con portadora temporal

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) - \omega_0 t] \quad (3.17)$$

o, formalmente, como la señal discreta

$$I(x, y, n\alpha) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) - n\alpha] \quad (3.18)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, y el parámetro α indica el periodo temporal del muestreo (que para el presente análisis se considera siempre uniforme).

Aplicando nuevamente la identidad de Euler, de la Ecuación 3.17 se tiene

$$\begin{aligned} I(x, y, t) &= a(x, y) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp\{i[\phi(x, y) - \omega_0 t]\} \dots \\ &+ \frac{1}{2}b(x, y) \exp\{-i[\phi(x, y) - \omega_0 t]\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

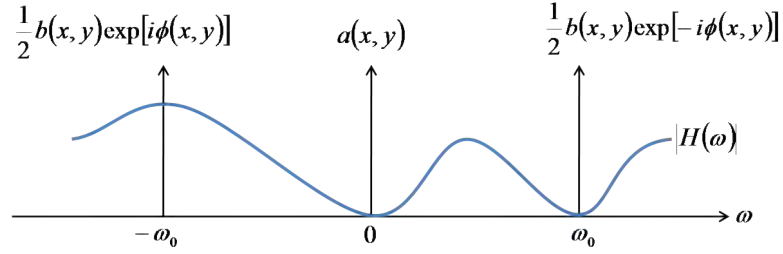


Figura 3.6: Representación esquemática del filtrado de cuadratura temporal utilizado en PSI.

Tomando la transformada de Fourier respecto al tiempo de la Ecuación 3.19, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{I(x, y, t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a(x, y) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \exp(-i\omega_0 t) \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[-i\phi(x, y)] \exp(i\omega_0 t) \right\} \exp(-i\omega t) dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &= a(x, y) \delta(\omega) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \delta(\omega + \omega_0) \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[-i\phi(x, y)] \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

de donde puede concluirse (en virtud del teorema de convolución) que dado un filtro de cuadratura, $h(t)$, las condiciones mínimas que debe cumplir su función de transferencia son

$$H(-\omega_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad H(\omega_0) = H(0) = 0 \quad (3.22)$$

como se ilustra esquemáticamente en la Figura 3.6.

De esta manera, la convolución temporal entre la serie de interferogramas y el filtro de cuadratura tiene como resultado la señal compleja

$$I_c(x, y, t) = I(x, y, t) * h(t) = \frac{1}{2}H(\omega_0) b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \exp(i\omega_0 t) \quad (3.23)$$

donde $H(\omega_0)$ es una constante. Finalmente, despejando para $\phi(x, y)$ resulta:

$$\phi(x, y, t) = \arctan \left[\frac{\text{Im}\{I_c(x, y, t)\}}{\text{Re}\{I_c(x, y, t)\}} \right] - \omega_0 t \quad (3.24)$$

donde se considera suficiente al determinar la señal en $t = 0$.

A fin de obtener una representación general para los algoritmos de PSI sea una señal interferométrica compuesta de N muestras, con separación temporal uniforme, dada por

$$I(x, y, t) = I(x, y, t) \sum_n \delta(t - nT) \quad (3.25)$$

con $n = -N, \dots, 0, \dots, N$.

En la práctica, un filtro de cuadratura adecuado cuenta con el mismo número de coeficientes (entre 3 y 20, típicamente) a fin de aprovechar toda la información disponible:

$$h(t) = \exp(i\omega_0 t) \sum_n a_n \delta(t - nT) \quad (3.26)$$

donde la elección particular de los coeficientes a_n determinan la forma del filtro de cuadratura pues al considerar la representación en el espacio de frecuencias, dichos coeficientes corresponden a una expansión en series de Fourier compleja [39].

Considerando la convolución temporal, $I(x, y, t) * h(t)$ y evaluando en $t = 0$:

$$Ic(x, y, 0) = \sum_n a_n \exp(i\omega_0 nT) I(x, y, nT) \quad (3.27)$$

Despejando para $\phi(x, y)$, resulta

$$\phi(x, y, 0) = \arctan \left[\frac{\sum_n a_n \sin(\omega_0 nT) I(x, y, nT)}{\sum_n a_n \cos(\omega_0 nT) I(x, y, nT)} \right] \quad (3.28)$$

La forma explícita de estos algoritmos puede encontrarse en la literatura, de acuerdo al número de muestras y para distintos valores del paso (por ejemplo, en Malacara *et al.* [15, 16, 17]). A continuación, se presentan algunos de los algoritmos de PSI más comúnmente utilizados (Ecuaciones 3.29-3.32) donde se ha omitido la dependencia espacial en las irradiancias para mantener una notación compacta:

Algoritmo de tres pasos: Greivenkamp y Bruning [1992]

$$\phi(x, y) = \arctan \left[\frac{[1 - \cos(\alpha)] [I(-\alpha) - I(\alpha)]}{\sin(\alpha) [2I(0) - I(-\alpha) - I(\alpha)]} \right] \quad (3.29)$$

Algoritmo de cuatro pasos: Wyant [1982]

$$\phi(x, y) = \arctan \left[\frac{[I(2\alpha) - I(0)] \sin(\alpha)}{I(\alpha) - I(-\alpha) + [I(0) - I(2\alpha)] \cos(\alpha)} \right] \quad (3.30)$$

Algoritmo de cinco pasos: Schwider [1983] y Hariharan [1987]

$$\phi(x, y) = \arctan \left[\frac{2[I(-\alpha) - I(\alpha)]}{I(-2\alpha) - 2I(0) + I(2\alpha)} \right] \quad (3.31)$$

Algoritmo de N+1 pasos: Surrel [1996]

$$\phi(x, y) = \arctan \left[\frac{-\sum_{n=1}^{N-1} n \{I(\alpha) - I[(2N - n)\alpha]\} \sin(n\alpha)}{NI_N - \sum_{n=1}^{N-1} \{I(\alpha) - I[(2N - n)\alpha]\} \cos(n\alpha)} \right], \quad \alpha = \frac{2\pi}{N}. \quad (3.32)$$

Los algoritmos de Hariharan y Surrel suelen ser los más utilizados porque se afirma que estos poseen una mayor tolerancia al desentonamiento en el paso o bien porque que permiten rechazar los armónicos de orden superior que se presentan. A continuación se presenta un análisis de dichas fuentes de error.

3.3. Análisis del error en Interferometría

Como se ha discutido con anterioridad, un patrón de franjas típico suele ser descrito como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (3.33)$$

donde se han omitido de momento la presencia de ruido y de los diferentes tipos de portadoras. Sin embargo, existen escenarios donde esta ecuación puede no-representar fielmente a la señal analizada, como es el caso de un patrón de franjas digitalizado mediante un sensor operando fuera del rango lineal o con saturación por luminosidad (ilustrado en la Figura 3.7). En dichas condiciones, una descripción más adecuada del patrón de franjas puede realizarse mediante una señal del tipo

$$I(x, y) = a(x, y) + \sum_{k=1}^M b_k(x, y) \cos[k\phi(x, y) + \theta_k]. \quad (3.34)$$

Evidentemente, la Ecuación 3.34 corresponde a la así llamada *forma polar* de una serie de Fourier truncada hasta el orden k , y la Ecuación 3.33 puede considerarse como la expansión a primer orden. Sin embargo, resulta importante señalar que a diferencia de otras disciplinas la presencia de los armónicos de orden superior en Interferometría no implica una mejor aproximación al resultado exacto sino que representa dificultades adicionales o bien se considera evidencia de condiciones experimentales poco favorables, por ejemplo:

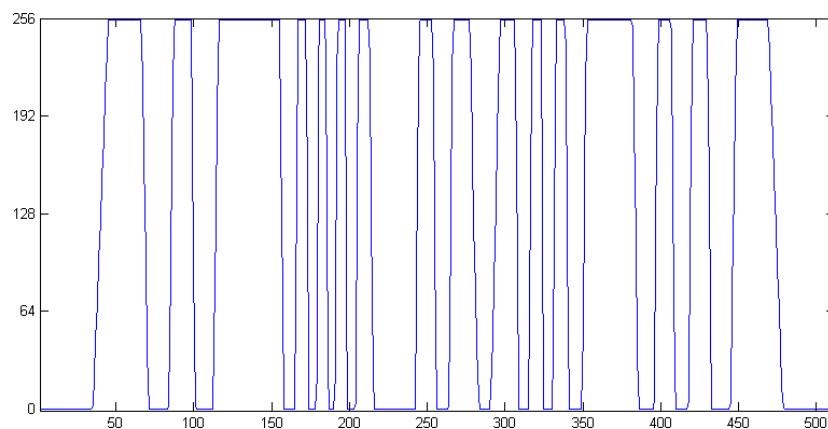
- Se ha comprobado tanto en el método de Fourier³ como en PSI que para determinar el mapa de fase es suficiente considerar el término con $k = 1$, es decir $b(x, y) \cos[\phi(x, y)]$, por lo que considerar términos adicionales carece de interés práctico.
- Puesto que la densidad de las franjas aumenta en los armónicos de mayor orden, de acuerdo con lo desarrollado en la Sección 2.1 su correcto muestreo requeriría un aumento significativo en la resolución, dado por $r_k = r_{1Ny} 2^{k-1}$, donde r_{1Ny} representa la resolución de un sensor de imagen que en una configuración dada fuera capaz de muestrear el armónico de primer orden en el límite de Nyquist.

Por estas y otras razones, en el procesamiento de franjas típicamente se tiene un gran interés en que los algoritmos de recuperación de fase presenten un buen comportamiento ante los armónicos de orden superior ($k \geq 2$).

³La máscara mostrada en la Figura 3.3c es una confirmación experimental de esta afirmación.



(a)



(b)

Figura 3.7: (a) Simulación de un interferograma capturado con saturación del sensor de imagen, y (b) un corte transversal mostrando la intensidad en términos de la escala de grises para una de las columnas centrales.

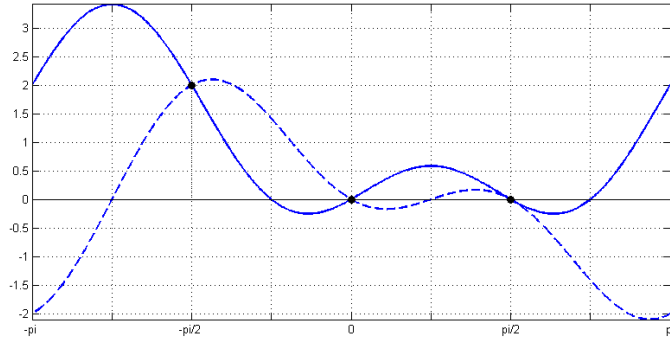


Figura 3.8: Gráfica de la parte real (línea continua) y la parte imaginaria (línea punteada) del espectro de Fourier de un filtro de cuadratura de 3 pasos entonado en $\omega_0 = \pi/2$. Los puntos de interés de acuerdo al formalismo de F&K han sido resaltados; la importancia de dichos puntos así como algunos inconvenientes que se presentan para su valoración son detallados en el texto.

En 1990, Freischlad y Koliopoulos [F&K, 6] presentaron un criterio para evaluar los algoritmos de PSI mediante el análisis espectral de la parte real e imaginaria de sus filtros de cuadratura:

$$h(t) = hr(t) + ihi(t) \quad (3.35)$$

$$Hr(\omega) = \mathcal{F}\{hr(t)\}, \quad Hi(\omega) = \mathcal{F}\{hi(t)\} \quad (3.36)$$

Al graficar la amplitud de ambas partes del espectro se observa que las curvas reales obtenidas presentan en cada caso una misma amplitud para la frecuencia fundamental ω_0 y que dicha amplitud es igual a cero en las frecuencias que son rechazadas por el algoritmo en cuestión, como se observa en la Figura 3.8.

Por medio de este formalismo, Freischlad & Koliopoulos [6] y Larkin & Oreb [13] concluyeron las siguientes propiedades para los algoritmos de PSI [Malacara 16]:

- En un algoritmo insensible al m -ésimo armónico, la parte real e imaginaria del espectro de Fourier del correspondiente filtro de cuadratura son idénticamente cero en $m\omega_0$, es decir

$$Hi(m\omega_0) = Hr(m\omega_0) \quad (3.37)$$

- Un algoritmo es insensible al desentonamiento si la identidad entre la parte real y la parte imaginaria del espectro del filtro de cuadratura se mantiene sobre la derivada, salvo por un cambio en fase de $\pi/2$, es decir

$$\frac{d}{d\omega} [Hi(\omega)]_{m\omega_0} = i \frac{d}{d\omega} [Hr(\omega)]_{m\omega_0} \quad (3.38)$$

- La insensibilidad al desentonamiento y al m -ésimo armónico se presenta en un algoritmo sólo si éste cumple de manera simultánea la primera condición y la segunda se mantiene para la m -ésima derivada.

Estas conclusiones fueron posteriormente reproducidas de una manera elegante por Surrel [39] en 1996, con el formalismo al que llamó de Polinomio Característico y según el cuál al observar un patrón de franjas como una serie de Fourier en la forma compleja

$$I(\phi + \omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(\phi) \exp(ik\omega_0) \quad (3.39)$$

la señal de salida puede representarse como

$$\tan(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(\phi) \sum_{n=1}^N c_n [\exp(ik\omega_0)]^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(\phi) P(z) \quad (3.40)$$

con

$$P(z) = \sum_{n=1}^N c_n z^{n-1}, \quad z = \exp(ik\omega_0) \quad (3.41)$$

y donde los coeficientes $c_n = a_n + ib_n$ corresponden respectivamente a los coeficientes reales e imaginarios del filtro de cuadratura o, equivalentemente, a los coeficientes del denominador y del numerador en el respectivo algoritmo de PSI.

De esta manera se propone que al introducir los valores numéricos de c_n , resolver para las raíces del polinomio $P(z)$ y sustituir para la definición de z en la Ecuación 3.41, el rechazo a los armónicos puede deducirse a partir de la ubicación de los N fasores en un círculo unitario del espacio complejo observando la presencia o ausencia de los complejos conjugados, si las raíces son degeneradas o no, etcétera.

Más información al respecto puede encontrarse en Surrel [39] y Malacara [16, Capítulo 14] donde se presenta además una serie de tablas con los algoritmos de PSI más populares en términos de la representación gráfica propuesta por el propio Surrel.

Ambas técnicas presentadas para la valoración del rechazo a los armónicos de orden superior en PSI (nuevamente, en el método de Takeda el proceso se realiza mediante una máscara de fase o un filtro de cuadratura adecuado) han gozado de gran aceptación en las últimas décadas y sin embargo presentan un inconveniente intrínseco al basar su principio de operación en la separación de la parte real e imaginaria: *la técnica de PSI corresponde con un sistema invariante en el tiempo, no así los criterios de F&K y Surrel.*

Por definición, un sistema T es invariante en el tiempo sí y sólo sí dada una entrada $x(t)$ con su salida correspondiente $y(t)$, se cumple que

$$T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad \forall t_0. \quad (3.42)$$

De acuerdo con Servin et al. [35] la mayoría de los algoritmos de PSI introducen a lo más un corrimiento de fase constante (a diferencia del método de Fourier donde el corrimiento depende de la posición) y en particular los filtros rotados introducen un cambio constante de fase dado por $\Delta_0 = -\omega_0 t_0$:

$$h(t - t_0) = \exp[i\omega_0(t - t_0)] \sum_n a_n \delta(t - nT) = h(t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (3.43)$$

Ahora, separando la parte real e imaginaria como requieren los criterios de F&K y Surrel

$$\begin{aligned} h(t) \exp(-i\omega_0 t) &= hr(t) \cos \Delta_0 - hi(t) \sin \Delta_0 \dots \\ &+ i [hr(t) \sin \Delta_0 + hi(t) \cos \Delta_0]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

y calculando su transformada de Fourier, resulta

$$Hr(\omega) = \mathcal{F}\{hr(t) \cos \Delta_0 - hi(t) \sin \Delta_0\}, \quad (3.45)$$

$$Hi(\omega) = \mathcal{F}\{hr(t) \sin \Delta_0 + hi(t) \cos \Delta_0\}. \quad (3.46)$$

lo que difiere en general con los espectros y coeficientes representados en las Ecuaciones 3.35-3.36 por lo que mediante ambos criterios podría considerarse erróneamente que se trata de un nuevo algoritmo, a pesar de que ambos filtros aunque rotados son idénticos.

Por esta razón, se propone valorar el comportamiento espectral mediante la magnitud del espectro *complejo*,

$$|H(\omega)| = \left| \mathcal{F}\{hr(t) + hi(t)\} \right| = \sqrt{[Hr(\omega)]^2 + [Hi(\omega)]^2} \quad (3.47)$$

ya que esta es invariante ante rotaciones y claramente su representación gráfica aún permite identificar los puntos donde el espectro se anula simultáneamente tanto en la parte real como en la parte imaginaria.

Al continuar con el análisis de error en PSI puede comprobarse que la representación espectral compleja del filtro de cuadratura o función de transferencia frecuencial (FTF), es una elección natural para evaluar diferentes aspectos del desempeño del algoritmo.

3.3.1. Error de entonamiento.

En la práctica, existe un límite para la precisión con la que puede controlarse la magnitud del paso entre interferogramas consecutivos. El error en el paso o propiamente en la frecuencia de muestreo es llamado desentonamiento (*detuning*, en Inglés).

Como se detalla en Mosino et al. [22], dada una serie de interferogramas muestreados a una frecuencia errónea $\omega_0 + \Delta$, como se ilustra en la Figura 3.9, se tiene una respuesta espectral dada por:

$$\begin{aligned} G(x, y, \omega) &= \frac{1}{2} H(-\omega_0 - \Delta) b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \delta[\omega - (\omega_0 + \Delta)] \dots \\ &+ \frac{1}{2} H(\omega_0 + \Delta) b(x, y) \exp[-i\phi(x, y)] \delta[\omega + (\omega_0 + \Delta)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

con la correspondiente representación temporal

$$\begin{aligned} g(x, y, t) &= \frac{1}{2} H(-\omega_0 - \Delta) b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \exp[-i(\omega_0 + \Delta)t] \dots \\ &+ \frac{1}{2} H(\omega_0 + \Delta) b(x, y) \exp[-i\phi(x, y)] \exp[i(\omega_0 + \Delta)t]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

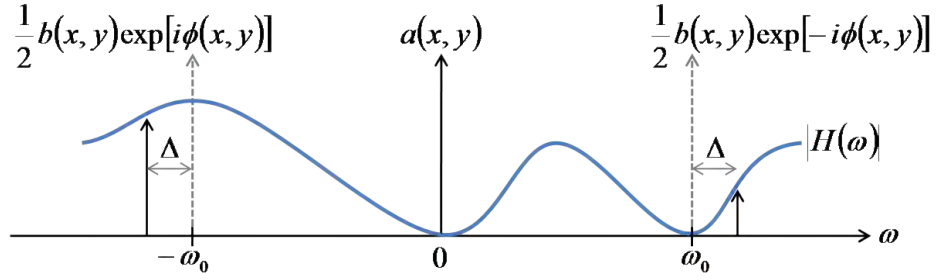


Figura 3.9: Esquema del desintonamiento en un algoritmo de PSI. Nótese que a diferencia de el caso ideal, la segunda exponencial compleja tan sólo es amortiguada en lugar de ser filtrada completamente.

Es posible recuperar un mapa de fase a partir de esta nueva señal compleja procediendo de la misma manera que si el algoritmo estuviera correctamente entonado: separando la parte real e imaginaria, se tienen para un tiempo $t = 0$

$$\operatorname{Re}\{g(x, y, t)\} = \frac{1}{2}b(x, y) \{H(-\omega_0 - \Delta) \cos[\phi(x, y)] + H(\omega_0 + \Delta) \cos[-\phi(x, y)]\}, \quad (3.50)$$

$$\operatorname{Im}\{g(x, y, t)\} = \frac{1}{2}b(x, y) \{H(-\omega_0 - \Delta) \sin[\phi(x, y)] + H(\omega_0 + \Delta) \sin[-\phi(x, y)]\}. \quad (3.51)$$

Aplicando las propiedades de simetría y definiendo la fase errónea φ , resulta

$$\tan[\varphi(x, y)] = \frac{H(-\omega_0 - \Delta) - H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta) + H(\omega_0 + \Delta)} \tan[\phi(x, y)] \quad (3.52)$$

donde se ha supuesto $b(x, y) \neq 0 \forall (x, y)$.

Realizando algunas manipulaciones algebraicas se encuentra fácilmente que

$$\tan[\varphi(x, y)] - \tan[\phi(x, y)] = \frac{2H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta) + H(\omega_0 + \Delta)} \tan[\phi(x, y)] \quad (3.53)$$

$$\tan[\varphi(x, y)] + \tan[\phi(x, y)] = \frac{2H(-\omega_0 - \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta) + H(\omega_0 + \Delta)} \tan[\phi(x, y)] \quad (3.54)$$

tal que aplicando la identidad trigonométrica

$$\frac{\tan(A) - \tan(B)}{\tan(A) + \tan(B)} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}, \quad (3.55)$$

resulta

$$\frac{\sin[\varphi(x, y) - \phi(x, y)]}{\sin[\varphi(x, y) + \phi(x, y)]} = \frac{H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta)} \quad (3.56)$$

La Ecuación 3.56 es ampliamente utilizada para valorar la tolerancia al desintonamiento de los algoritmos de PSI y típicamente sólo se evalúa de manera numérica.

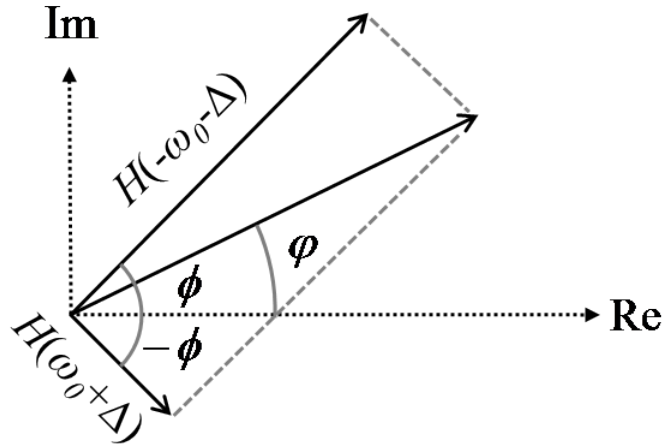


Figura 3.10: Representación fasorial de las dos señales complejas obtenidas en consecuencia del desentonamiento y la correspondiente señal resultante con fase errónea φ .

El error definido por $\Delta\phi = \varphi - \phi$ representa la diferencia entre la fase obtenida y la deseada. Despejando de la Ecuación 3.52 (omitiendo la dependencia espacial por simplicidad)

$$\Delta\phi + \phi = \tan^{-1} \left[\frac{H(-\omega_0 - \Delta) - H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta) + H(\omega_0 + \Delta)} \tan(\phi) \right] \quad (3.57)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.56 puede encontrarse [Mosiño *et al.* 22]

$$\tan(\Delta\phi) = -(e/c) \frac{\sin(2\phi)}{1 + (e/c) \cos(2\phi)}, \quad (e/c) \equiv \frac{H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta)} \quad (3.58)$$

Una simplificación mayor puede observarse al considerar $(e/c) \ll 1$, es decir, para errores de desentonamiento pequeños, tal que aplicando $\varphi \approx \phi$, $\sin(\varphi - \phi) \approx \Delta\phi$, $\sin(\varphi + \phi) \approx \sin(2\phi)$ en la Ecuación 3.56 resulta:

$$\varphi \approx \phi + \frac{H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta)} \sin(2\phi), \quad (3.59)$$

Es decir, que el desentonamiento introduce una señal espuria que es proporcional al patrón original con el doble de frecuencia y un cambio en fase de $\pi/2$.

Finalmente, $\Delta\phi_{max}$ es encontrado maximizando la ecuación 3.58 con respecto a ϕ , de donde se obtiene

$$\Delta\phi_{max} = \sin^{-1} \left| \frac{H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta)} \right| \approx \left| \frac{H(\omega_0 + \Delta)}{H(-\omega_0 - \Delta)} \right| \quad (3.60)$$

siendo la primera un resultado exacto y donde el módulo es introducido considerando que la respuesta frecuencial $H(\omega)$ puede ser compleja.

Vale la pena señalar que a pesar de que el término (e/c) típicamente es pequeño, la presencia de la señal espuria asociada puede ocasionar resultados inesperados al enmascarar discontinuidades de 2π en la fase o bien ocasionar que la señal recuperada sea aparentemente ruidosa, como se ilustra en las Figuras 3.11-3.12 (página 47). Con fines ilustrativos, en la Figura 3.13 (página 48) son presentadas las curvas de $\Delta\phi_{max}$ contra Δ asociadas a los algoritmos de 3-5 pasos más comúnmente utilizados⁴.

3.4. Ruido en PSI

Definimos el ruido como toda perturbación de carácter aleatorio sobre una señal o proceso de interés. El estudio del desempeño de los algoritmos de PSI en la presencia de ruido es otro tema de gran importancia donde la representación espectral permite realizar una valoración adecuada.

Como se mencionó previamente, los procesos de recuperación de fase modulada pueden observarse como la convolución entre una señal real y un filtro de cuadratura a fin de recuperar una señal compleja⁵,

$$I_c(x, y, t) = I(x, y, t) * h(x, y, t) \quad (3.61)$$

donde se ha resaltado la dependencia en (x, y) para resaltar el hecho de que en la práctica suele realizar filtrado espacial del patrón de franjas previo al filtrado temporal.

Como se acostumbra en el análisis de error, puede considerarse el caso *pesimista* donde el ruido presenta contribuciones en cada frecuencia, es decir, ruido blanco: también llamado ruido térmico, está presente de forma aditiva en todo circuito eléctrico o electrónico; es provocado por el movimiento desordenado de los electrones en un conductor y posee una densidad espectral aproximadamente plana.

En general, también pueden tenerse contribuciones del ruido en la fase de un interferograma: por ejemplo, en la técnica de interferometría de patrones de moteado electrónico o ESPI (siglas en Inglés de *Electronic Speckle Pattern Interferometry*) donde las franjas

⁴En el capítulo siguiente se describe un formalismo que permite conocer *por construcción* el comportamiento de la FTF alrededor de $\omega = \omega_0$, lo que resulta ser el factor determinante en la tolerancia al desentonamiento de paso.

⁵Esta afirmación es válida también para el método de Fourier pero, como se mencionó previamente, en dicho método el filtrado espectral suele realizarse mediante máscaras en el espacio de frecuencias.

son generadas mediante la correlación por sustracción de los interferogramas

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[n_s(x, y)], \quad (3.62)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[n_s(x, y) + \phi(x, y)]. \quad (3.63)$$

Sin embargo, de acuerdo al Teorema del Límite Central, se tiene que la función de densidad de probabilidad para $n_s(x, y)$ tiende a una distribución gaussiana dado que el patrón de moteado es producto de una contribución aleatoria y la aplicación del filtrado espacial (intrínsecamente necesario para la técnica) tiene como resultado la conversión del ruido multiplicativo en ruido aditivo [Servin et al. 36].

Sea entonces la secuencia de interferogramas corruptos por una señal aditiva de ruido blanco gaussiano

$$In(x, y, t) = I(x, y, t) + n(x, y, t) \quad (3.64)$$

a ser procesada mediante la aplicación de los filtros espacial y temporal a fin de obtener la señal buscada⁶

$$Ic(x, y, t) = [In(x, y, t) * h(x, y)] * h(t). \quad (3.65)$$

Tomando la transformada de Fourier se obtiene

$$Ic(\omega_x, \omega_y, \omega_t) = In(\omega_x, \omega_y, \omega_t) H(\omega_x, \omega_y) H(\omega_t). \quad (3.66)$$

Suponiendo una densidad espectral $\eta/2$ para el ruido blanco, la potencia promedio del ruido en la señal señal compleja $Ic(x, y, t)$ queda dada por

$$\sigma_n^2 = E(n^2) = \frac{\eta}{2} \left\{ \iint_{-\pi}^{\pi} H^2(\omega_x, \omega_y) d\omega_x d\omega_y \right\} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} H^2(\omega_t) d\omega_t \right\} \quad (3.67)$$

de donde se observa claramente que tanto los filtros espaciales como los temporales contribuyen a determinar la potencia final de la señal ruidosa.

Finalmente, para evaluar de manera general la atenuación del ruido en los algoritmos de PSI puede considerarse una misma potencia en la señal de salida y manteniendo un filtro $h(x, y)$ constante, tal que evaluando la desigualdad

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} H_A^2(\omega_t) d\omega_t \right\} \leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} H_B^2(\omega_t) d\omega_t \right\} \quad (3.68)$$

se determine cual filtro presenta mejor rechazo al ruido (menor área bajo la curva). Por ejemplo, las áreas correspondientes a los algoritmos de 3, 4 y 5 pasos resultan 2.15606, 1.57082 y 1.37447 respectivamente (para curvas normalizadas al valor máximo).

⁶Dado que la convolución es una funcional que opera sobre funciones dependientes de la misma variable, el filtro de cuadratura espacio temporal estaría definido formalmente como

$$h(x, y, t) \equiv h(x, y) \delta(t) * \delta(x, y) h(t)$$

donde ha aplicado la propiedad de la delta de Dirac como neutro convolutivo.

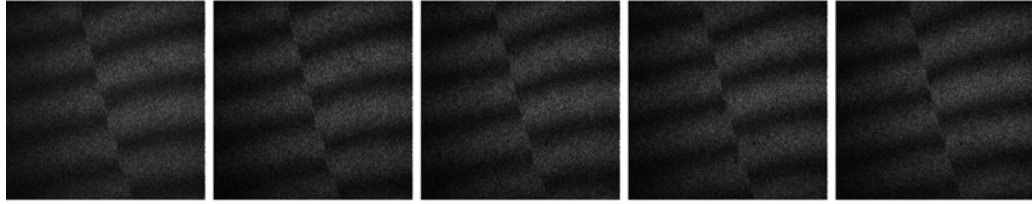


Figura 3.11: Patrones de franjas (reales) generados mediante interferometría por moteado para la detección de fracturas donde la magnitud del paso entre los primeros interferogramas difiere considerablemente del valor teórico (en este caso, $\alpha = 2\pi/5$).

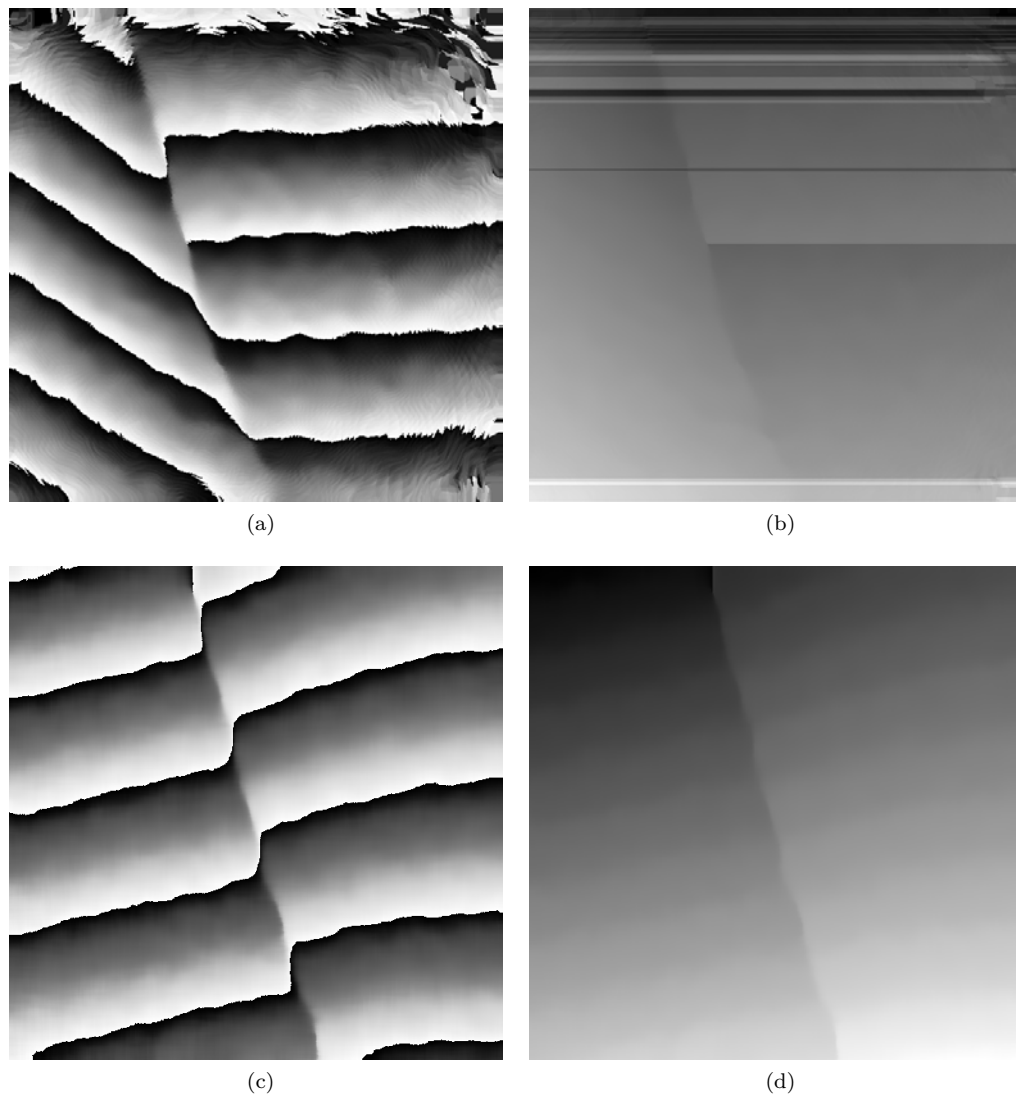


Figura 3.12: Mapas de fase recuperados mediante algoritmos de PSI con 4 pasos (a,b) y 5 pasos (c,d), respectivamente, para la detección remota de fracturas mediante interferometría de moteado.

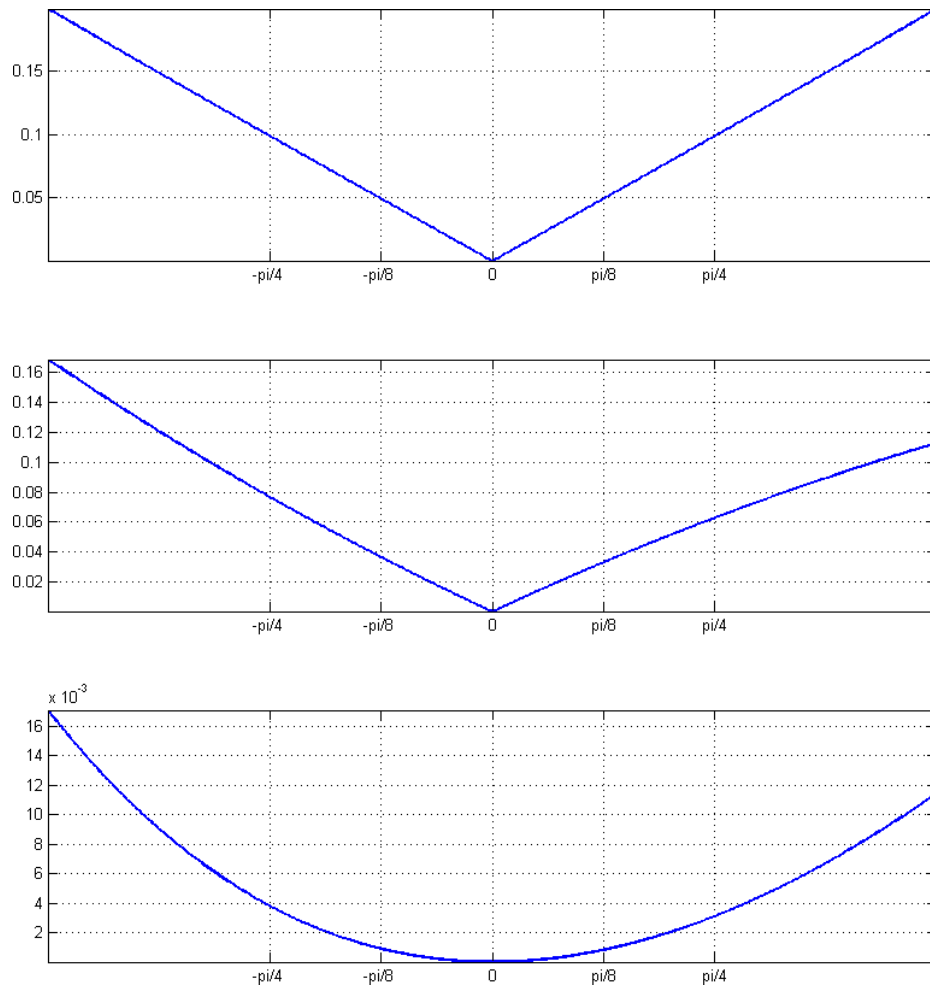


Figura 3.13: Curvas de máximo error de desentonamiento $\Delta\phi_{max}$ contra desentonamiento Δ , para la Función de Transferencia Frecuencial de los algoritmos de PSI dados por las Ecuaciones 3.29-3.31. Como puede observarse, éste filtro de cuadratura con 4 pasos no mejora sustancialmente la tolerancia al desentonamiento respecto al de 3 pasos.

Capítulo 4

Generación de algoritmos de PSI

Generalmente, conforme aumenta el número de muestras en los algoritmos de PSI se obtiene una mayor tolerancia al error por desentonamiento, mejor rechazo al ruido, etcétera. Por lo tanto, resulta natural el cuestionarse cuántas muestras serán necesarias para recuperar un mapa de fase adecuadamente o cuál algoritmo garantiza un mejor desempeño ante ciertas condiciones experimentales dado un número finito de muestras.

Desde la década de 1990 se han desarrollado múltiples métodos de análisis para los algoritmos de PSI. Entre estos pueden resaltarse los métodos de Representación Espectral, basados en el trabajo de Freischlad y Koliopoulos [6]; y el método algebraico presentado por Surrel[39] en 1996, el así llamado de método del Polinomio Característico.

Recientemente, algunas investigaciones [Estrada et al. 5, Servin et al. 35 y sus referencias] han presentado una metodología basada en la Función de Transferencia Frecuencial o FTF (del Inglés, *Frequency Transfer Function*) que permite generar filtros de cuadratura diseñando su respuesta espectral y de esta manera satisfacer condiciones específicas.

4.1. Combinación de algoritmos de PSI

Anteriormente, las técnicas reportadas para la combinación de dos o más algoritmos de PSI no resultaban sistemáticas, intuitivas ni bien definidas. Recientemente se ha propuesto el enfoque de la función de transferencia frecuencial como una la manera natural para generar filtros de mayor complejidad a partir de la convolución de filtros simples [Estrada et al. 5, Servin et al. 35]. Considérese, por ejemplo, dos algoritmos de PSI dados por

$$\tan [\phi (x, y)] = \left. \frac{hi1 (t) * I (x, y, t)}{hr1 (t) * I (x, y, t)} \right|_{t=0} \quad (4.1)$$

$$\tan [\phi (x, y)] = \left. \frac{hi2 (t) * I (x, y, t)}{hr2 (t) * I (x, y, t)} \right|_{t=0} \quad (4.2)$$

Suponiendo que ambos filtros se encuentran sintonizados apropiadamente, el mapa de fase recuperado por estos debe ser idéntico. Sin embargo, cada filtro puede poseer diferentes cualidades respecto a la tolerancia al desentonamiento, el rechazo de los armónicos o la atenuación del ruido. Para generar un nuevo algoritmo de PSI, al que idealmente se transfieren las características deseables de los algoritmos originales, basta con calcular la convolución temporal entre sus correspondientes respuestas al impulso

$$h1(t) * h2(t) = [hr1(t) + i hi1(t)] * [hr2(t) + i hi2(t)] \quad (4.3)$$

de forma tal que el algoritmo combinado queda dado por

$$\tan[\phi(x, y)] = \left. \left\{ \frac{[hi1(t) * hr2(t) - hr1(t) * hi2(t)] * I(x, y, t)}{[hr1(t) * hr2(t) + hi1(t) * hi2(t)] * I(x, y, t)} \right\} \right|_{t=0} \quad (4.4)$$

Si bien éste método define completamente la combinación de filtros de PSI, resulta más intuitivo considerar las respectivas FTFs a fin de generar una función de transferencia combinada mediante el producto en el espacio de frecuencias,

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h1(t) * h2(t)\} = H1(\omega) H2(\omega). \quad (4.5)$$

Este enfoque es ampliamente explotado en la ingeniería de sistemas lineales donde la síntesis de filtros de gran sofisticación se realiza mediante la combinación de los así llamados bloques de construcción.

4.2. Diseño de algoritmos mediante FTF

Anteriormente se concluyó que la función de transferencia frecuencial de un filtro de cuadratura para PSI debe cumplir

$$H(-\omega_0) \neq 0, \quad H(0) = H(\omega_0) = 0 \quad (4.6)$$

Mediante la combinación de elementos simples es posible diseñar una función de transferencia frecuencial que satisfaga estas condiciones y a partir de esta calcular la representación temporal del filtro de cuadratura, como se muestra a continuación.

[González, 7] Sea la función de transferencia frecuencial

$$H(\omega - \omega_0) = 1 - \exp[i(\omega - \omega_0)] \quad (4.7)$$

con ceros dados en $\omega = \omega_0 \pm 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), como se ilustra en la Figura 4.1.

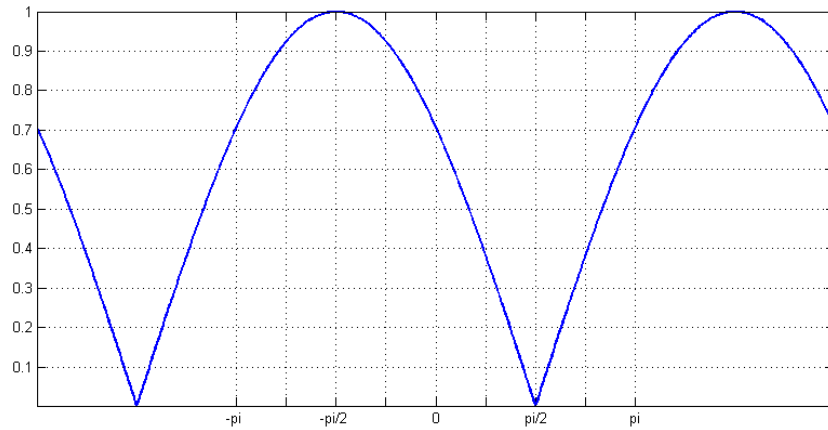


Figura 4.1: Valor absoluto de la función de transferencia frecuencial asociada al bloque básico para el diseño de filtros de cuadratura.

La respuesta al impulso de la FTF dada en la Ecuación 4.7 está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega - \omega_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - \exp[i(\omega - \omega_0)t]\} \exp(i\omega t) d\omega, \\ h(t; \omega_0) &= \exp(i\omega_0 t) [\delta(t) - \delta(t + 1)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

El par transformado dado por las Ecuaciones 4.7-4.8 puede considerarse el bloque básico de construcción, a partir de cual es posible recrear la respuesta espectral de los algoritmos de PSI más populares, como se muestra a continuación:

3-pasos: (Greivenkamp y Bruning)

$$\begin{aligned} H3(\omega; \omega_0) &= H(\omega) H(\omega - \omega_0) & (4.9) \\ &= (1 - e^{i\omega}) [1 - e^{i(\omega - \omega_0)}] \\ &= 1 - (1 + e^{-i\omega_0}) e^{i\omega} + e^{-i\omega_0} e^{i2\omega} \\ \mathcal{F}_{\leftrightarrow} h3(t; \omega_0) &= \delta(t) - (1 + e^{-i\omega_0}) \delta(t + 1) + e^{-i\omega_0} \delta(t + 2) & (4.10) \end{aligned}$$

4-pasos: (Wyant)

$$\begin{aligned} H4(\omega; \omega_0) &= H(\omega) H(\omega - \omega_0) H(\omega - \pi) & (4.11) \\ &= (1 - e^{i\omega}) [1 - e^{i(\omega - \omega_0)}] [1 - e^{i(\omega - \pi)}] \\ &= 1 - e^{-i\omega_0} e^{i\omega} - e^{i2\omega} + e^{-i\omega_0} e^{i3\omega} \\ \mathcal{F}_{\leftrightarrow} h4(t; \omega_0) &= \delta(t) - e^{-i\omega_0} \delta(t + 1) - \delta(t + 2) + e^{-i\omega_0} \delta(t + 3) & (4.12) \end{aligned}$$

5-pasos: (Schwider y Hariharan)

$$H5(\omega; \omega_0) = H(\omega) H^2(\omega - \omega_0) H(\omega - \pi) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &= (1 - e^{i\omega}) \left[1 - e^{i(\omega - \omega_0)} \right]^2 \left[1 - e^{i(\omega - \pi)} \right] \\ &= 1 - 2e^{i(\omega - \omega_0)} + (2e^{-i2\omega_0} - 1) e^{i2\omega} + 2e^{i(3\omega - \omega_0)} - e^{i(4\omega - 2\omega_0)} \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h5(t; \omega_0) &= \delta(t) - 2e^{-i\omega_0} \delta(t + 1) + (2e^{-i2\omega_0} - 1) \delta(t + 2) \dots \\ &+ e^{-i\omega_0} \delta(t + 3) - e^{-i2\omega_0} \delta(t + 4). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En estos ejemplos puede observarse que el filtro de cuadratura generado requiere en cada caso de $N + 1$ muestras (o pasos), donde N corresponde a la suma de los exponentes de los bloques básicos en la FTF.

De esta manera, es posible *diseñar* una respuesta frecuencial tal que, por ejemplo, se minimice el área bajo la curva y en consecuencia se genere un algoritmo de PSI que presente un mejor rechazo al ruido, como se ilustra en la Figura 4.2.

De las Ecuaciones 4.11 y 4.13 se observa además que la respuesta espectral de los algoritmos más usados para 4 y 5 pasos incluye un cero adicional en $\omega = \pi$, que permite rechazar débilmente el segundo armónico cuando $\omega_0 = \pi/2$ y reducir el área bajo la curva, como se observa en la Figura 4.3 (página 54), pero que puede considerarse un desperdicio en términos de la tolerancia al desentonamiento dado que $\Delta\phi$ depende predominantemente del comportamiento de $H(\omega)$ alrededor de ω_0 .

Una estrategia interesante para desarrollar filtros de cuadratura con la mayor tolerancia al desentonamiento consiste en introducir un cero espectral para $\omega = 0$ y colocar al resto de los disponibles en $\omega = \omega_0$ (es decir, generar un cero de orden n para $n + 2$ pasos): elevando $H(\omega - \omega_0)$ a la n -ésima potencia se tiene

$$H^n(\omega - \omega_0) = \{1 - \exp[i(\omega - \omega_0)]\}^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \exp[ik(\omega - \omega_0)] \quad (4.15)$$

donde $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ son los así llamados coeficientes binomiales.

Al introducir el cero espectral necesario en $\omega = \omega_0$,

$$\begin{aligned} H(\omega) H^n(\omega - \omega_0) &= (1 - e^{i\omega}) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{ik(\omega - \omega_0)} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{ik(\omega - \omega_0)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{-ik\omega_0} e^{i\omega(k+1)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desarrollando las sumatorias y agrupando términos similares, se tiene

$$\begin{aligned} H_{2+n}(\omega; \omega_0) &= 1 - e^{i\omega} - (-e^{-i\omega_0})^n e^{i(n+1)\omega} \dots \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n}{k-1} e^{-i(k-1)\omega_0} + \binom{n}{k} e^{-ik\omega_0} \right] e^{ik\omega} \end{aligned} \quad (4.17)$$

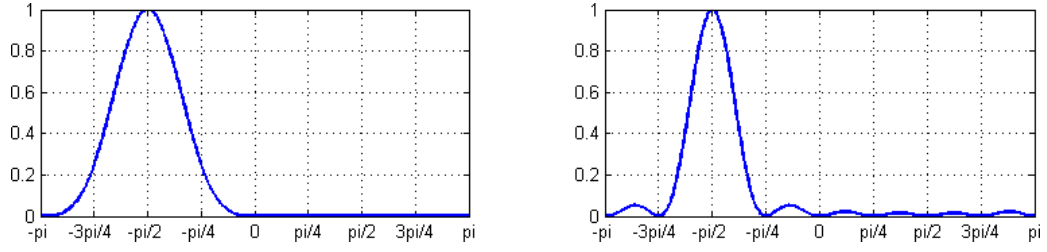


Figura 4.2: Funciones de transferencia frecuencial correspondientes a algoritmos de PSI con 6 y 8 pasos ($N + 1$ pasos, con N dado por el número de ceros en la gráfica), diseñadas para reducir el área bajo la curva y presentar un mejor rechazo al ruido.

De la FTF representada en la Ecuación 4.17, la representación temporal del filtro de cuadratura se obtiene de manera directa:

$$h_{2+n}(t; \omega_0) = \delta(t) - \delta(t+1) - (-e^{-i\omega_0})^n \delta(t+n+1) \dots \quad (4.18)$$

$$+ \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n}{k-1} e^{-i(k-1)\omega_0} + \binom{n}{k} e^{-ik\omega_0} \right] \delta(t+k).$$

Las expresiones particulares pueden obtenerse para $n \in \mathbb{N}$, donde el caso $n = 1$ reproduce la Ecuación 4.9. Por completéz, a continuación se presentan la forma explícita de los filtros de cuadratura generados con $n = 2, 3$ siguiendo con la notación de las Ecuaciones 4.17 y 4.18:

$$h_{2+2}(t; \omega_0) = \delta(t) - \delta(t+1) - (1 + 2e^{-i\omega_0}) \delta(t+1) \dots \quad (4.19)$$

$$+ (2e^{-i\omega_0} + e^{-i2\omega_0}) \delta(t+2) - e^{-i2\omega_0} \delta(t+3).$$

$$h_{2+3}(t; \omega_0) = \delta(t) - \delta(t+1) - (1 + 3e^{-i\omega_0}) \delta(t+1) \dots \quad (4.20)$$

$$+ (3e^{-i\omega_0} + 3e^{-i2\omega_0}) \delta(t+2) - (3e^{-i2\omega_0} + e^{-i3\omega_0}) \delta(t+3) \dots$$

$$- e^{-i3\omega_0} \delta(t+4). \quad (4.21)$$

En la Figura 4.4 son presentadas las curvas de error máximo por desentonamiento de paso para demostrar que efectivamente puede obtenerse una tolerancia similar a la del algoritmo de Schwider-Hariharan usando tan solo cuatro pasos y una tolerancia superior usando los mismos cinco pasos.

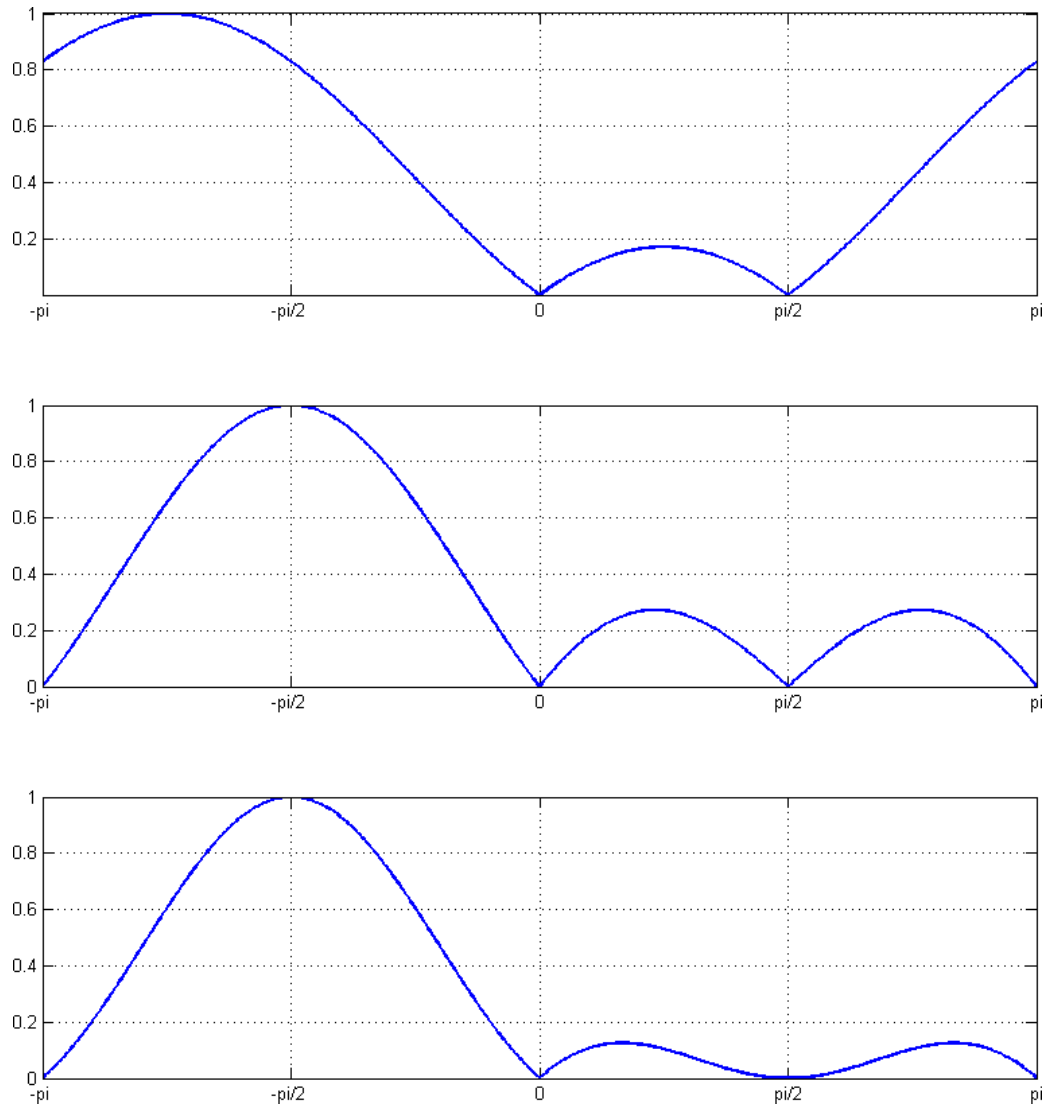


Figura 4.3: Valor absoluto de la función de transferencia frecuencial de tres filtros de cuadratura con 3, 4, y 5 pasos entonados en $\omega_0 = \pi/2$.

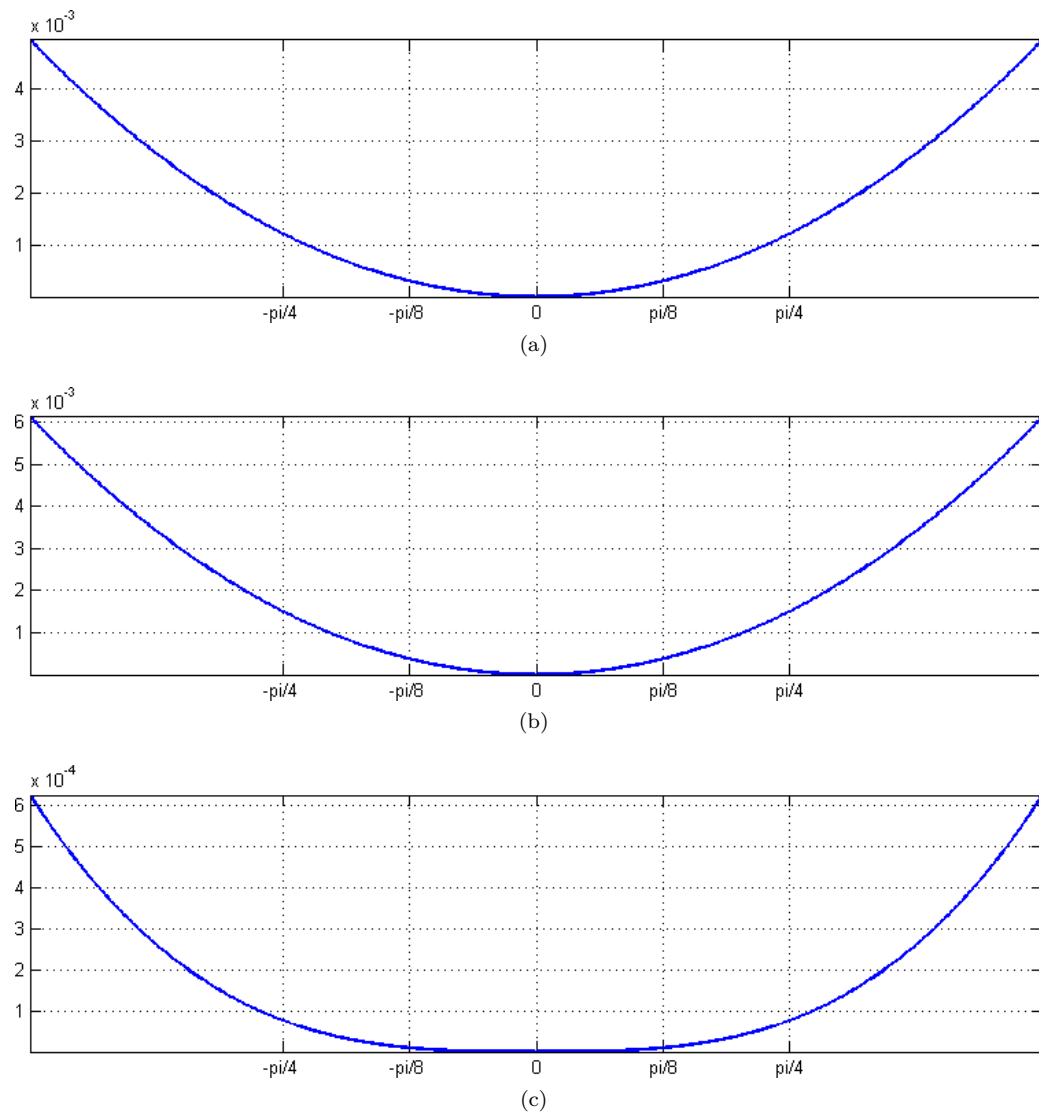


Figura 4.4: Curvas de error máximo contra desentonamiento para los filtros de cuadratura de (a) 4 y (c) 5 pasos con la mayor concentración de ceros disponible en $\omega = \omega_0$ y (b) la correspondiente al filtro de Schwider-Hariharan, con 5 pasos. En todos los casos la FTF fue normalizada para validar la comparación.

4.3. Métodos Híbridos

Recientemente han sido desarrolladas algunas técnicas interferométricas cuyos métodos para la generación de portadora (espacial o temporal) así como su procesamiento, no corresponden plenamente con la descripción que ha sido desarrollada en el presente Capítulo para el método de Fourier ni para el de corrimiento de fase y que no obstante guardan una estrecha relación con ambos. A continuación son presentadas dos de dichas técnicas, cada una con su respectivo ejemplo numérico, a fin de ilustrar las ventajas que presentan frente a otros métodos más convencionales.

4.3.1. Generación de portadora espacial a partir de PSI

En la interferometría por corrimiento de fase el número de patrones de franjas que pueden obtenerse de manera confiable está siempre limitado por la estabilidad mecánica, turbulencia en el aire, etcétera. Típicamente, para un número dado de muestras se esta restringido a procesar dicha información mediante un algoritmo de igual número de pasos, puesto que no es posible aplicar un algoritmo para más pasos y la aplicación de un algoritmo con menos pasos implica en general menor robustez o bien que parte de la información estaría siendo desperdiciada.

Servin et al. [33] propone que a partir de N interferogramas de dimensiones $L \times L$, con un corrimiento de fase relativo de $\alpha = 2\pi/N$, es posible generar una señal con portadora espacial reorganizando la información en un solo patrón de franjas con dimensiones $NL \times L$ al que posteriormente puede aplicarse un filtro de cuadratura para recuperar la fase de interés, como se discutió en la Sección 3.1.

Sea por ejemplo el sistema de tres patrones de franjas de PSI dado por

$$\begin{aligned} I(x, y, -\alpha) &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) - \alpha], \\ I(x, y, 0) &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \\ I(x, y, +\alpha) &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

con $\alpha = 2\pi/3$. El método típico para la obtención de $\phi(x, y)$ consiste en aplicar el algoritmo de PSI dado por la Ecuación 3.29:

$$\tan[\phi(x, y)] = \frac{[1 - \cos(\alpha)][I(-\alpha) - I(\alpha)]}{\sin(\alpha)[2I(0) - I(-\alpha) - I(\alpha)]} \quad (4.23)$$

o, dado que son equivalentes, el generado en la Ecuación 4.9:

$$\tan[\phi(x, y)] = \frac{\sin(\alpha)[I(0) - I(\alpha)]}{I(-\alpha) - [1 + \cos(\alpha)]I(0) + \cos(\alpha)I(\alpha)}. \quad (4.24)$$

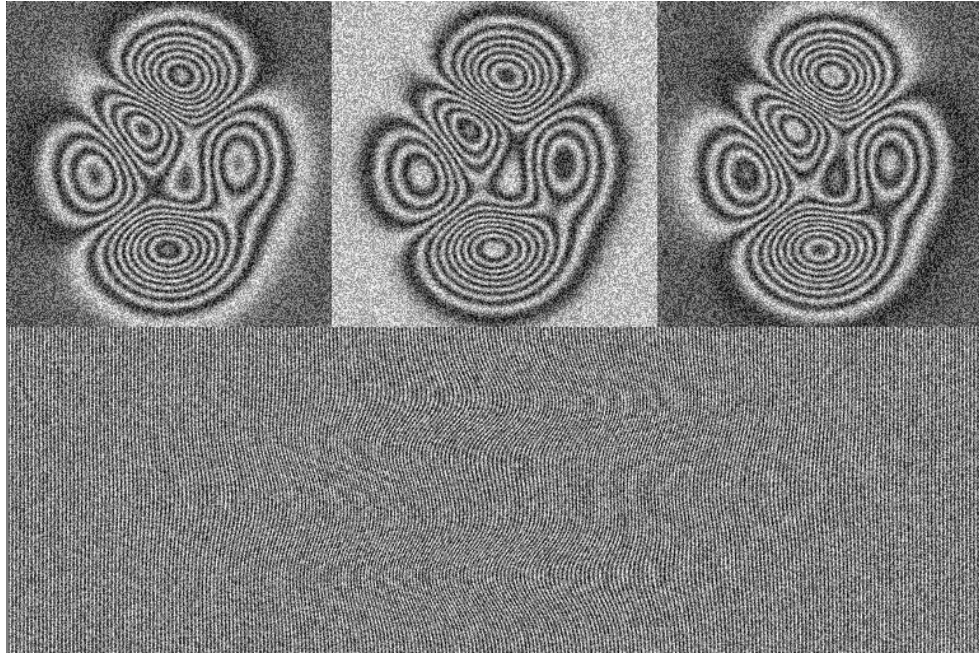


Figura 4.5: Interferogramas generados mediante PSI con un corrimiento de fase relativo de $2\pi/3$ y el patrón de franjas con portadora espacial generado reordenando la información disponible en los interferogramas originales. En esta simulación se ha introducido una cantidad considerable de ruido blanco a fin de comprobar la robustez del método.

Reacomodando la información disponible mediante la fórmula

$$I'(x, y) = \begin{cases} I'(3x, y) & = I(x, y, -\alpha) \\ I'(3x + 1, y) & = I(x, y, 0) \\ I'(3x + 2, y) & = I(x, y, +\alpha) \end{cases} \quad (0, 0) \leq (x, y) \leq (L, L) \quad (4.25)$$

se genera un patrón de franjas con portadora espacial $\omega_x = 2\pi/3$ como se ilustra en la Figura 4.5. Generalizando para N interferogramas, el patrón de franjas extendido con portadora espacial $\omega_x = \alpha = 2\pi/N$ queda dado por

$$I'(Nx + m, y) = I(x, y, m\alpha), \quad m = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.26)$$

Un método eficiente de realizar la demodulación de esta nueva señal consiste en aplicar un filtro de Gabor dado por

$$G(x, y; \alpha) = \exp(i\alpha x) \exp\left[-\left(\frac{x^2}{N^2\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2}\right)\right] \quad (4.27)$$

donde la elección desigual del parámetro de esparcimiento obedece al hecho de que la dependencia temporal se ha fusionado con la dependencia espacial a lo largo del eje x generando un ensanchamiento en dicha dirección.

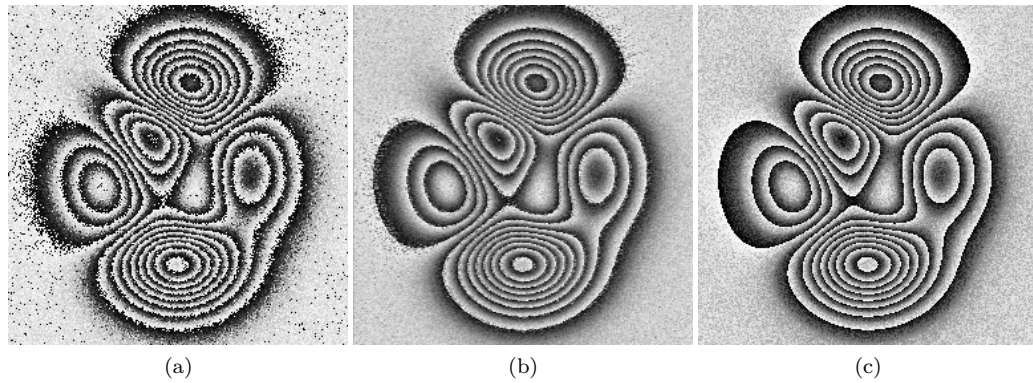


Figura 4.6: Mapas de fase obtenidos a partir de los interferogramas simulados mediante (a) PSI con un algoritmo de 3 pasos; (b) la convolución de la señal con portadora espacial y un filtro de Gabor; (c) resultado teórico ideal, presentado con fines comparativos. Para este caso, el procesamiento mediante la generación de portadora espacial claramente presenta filtrado del ruido muy superior.

De esta manera, el algoritmo para la recuperación de fase queda dado como

$$\tan [\phi (x', y)] = \frac{\text{Im} [I' (x, y) * G (x, y; \alpha)]}{\text{Re} [I' (x, y) * G (x, y; \alpha)]} \quad (4.28)$$

donde el asterisco denota la convolución espacial (en este caso bidimensional) y se ha utilizado una etiqueta especial en la variable x para resaltar el hecho de que el mapa de fase necesita ser reescalado. Como señalan Servin et al. [33], idealmente el mapa de fase recuperado mantiene el mismo valor durante tres píxeles consecutivos por lo que un método simple de generar $\phi (x, y)$ es utilizar los píxeles centrales.

Vale la pena señalar que a diferencia del procesamiento tradicional, en éste método no se está restringido al filtrado frecuencial dado por el algoritmo de PSI de forma tal que con la elección adecuada del filtro de cuadratura es posible obtener un mayor rechazo al ruido, los armónicos, etcétera. Esta situación se ilustra numéricamente en la Figura 4.6.

4.3.2. Demodulación de interferogramas con portador pixelado.

Como se discutió previamente, en las técnicas de PSI la generación del corrimiento de fase entre los distintos patrones de franjas tradicionalmente se realiza mediante el desplazamiento tipo piston de una superficie de referencia. En consecuencia, el sistema debe mantenerse estable durante un largo periodo de adquisición, por lo la técnica no puede ser aplicada a eventos dinámicos.

Sin embargo, existen en la actualidad múltiples técnicas para la generación simultánea de interferogramas con cambios de fase relativos, llamadas de corrimiento espacial de fase (en Inglés, *spatial phase shifting*). En estas, el proceso de adquisición ocurre varios órdenes de magnitud más deprisa y presentan en general una mayor inmunidad a las vibraciones.

Los primeros avances en la generación simultánea de patrones de franjas en PSI se remontan al año de 1984 (Kwon [12], Smythe & Moore [38]) donde eran reportados diferentes arreglos con divisores de haz y múltiples sensores CCD.

En las décadas siguientes, múltiples autores (Koliopoulos [10], Millerd et al. [20], Ngoi et al. [23]) reportaron diversos métodos basados en elementos difractivos y polarización, que permiten la generación de tres o más interferogramas de PSI en un único sensor.

De entre estos métodos, llamados de corrimiento espacial, la propuesta de máscaras pixeladas presentada por Millerd et al. [21] es sin duda el más aceptado en la actualidad: consiste en un interferograma con división de haz por polarización, donde se dispone a la salida un sensor CCD al que se integra un arreglo periódico de micropolarizadores con una rotación progresiva de $\pi/2$, generando un cambio de fase relativo entre cada pixel, como se ilustra en la Figura 4.7.

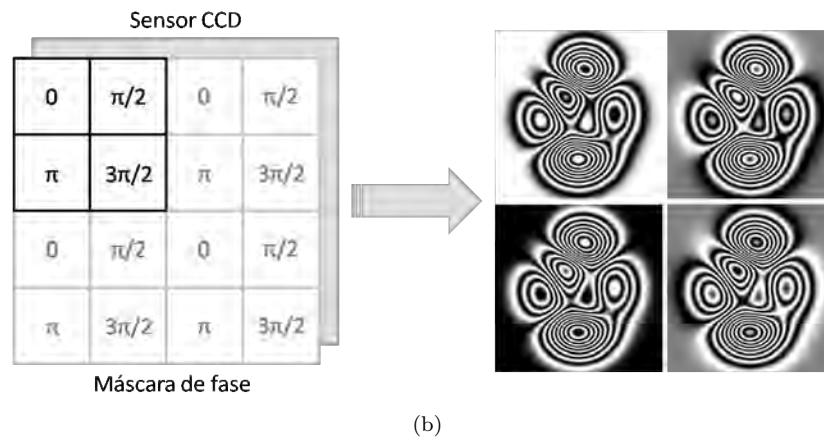
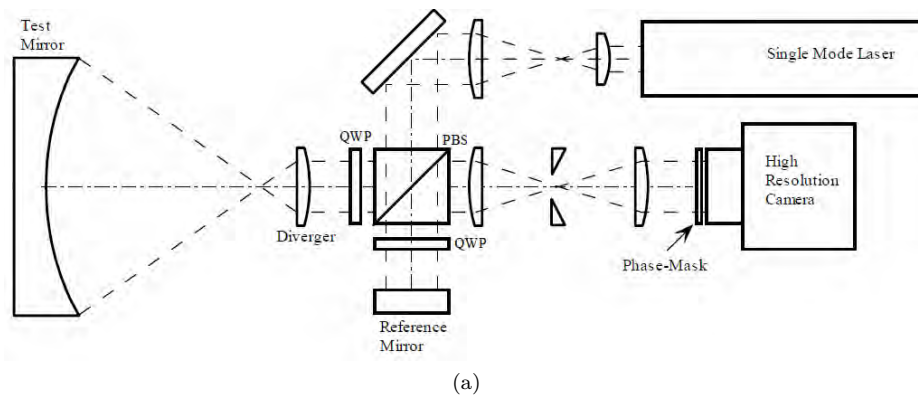


Figura 4.7: (a) Configuración propuesta por Millerd et al. [21] para la generación simultánea de cuatro patrones de franjas de PSI sobre un solo sensor CCD haciendo uso de un arreglo periódico de micropolarizadores. (b) Esquemática del cambio de fase introducido por cada elemento de la máscara de fase y de los patrones de franjas que pueden ser generados adquiriendo un elemento del así llamado super-pixel (resaltado en negro).

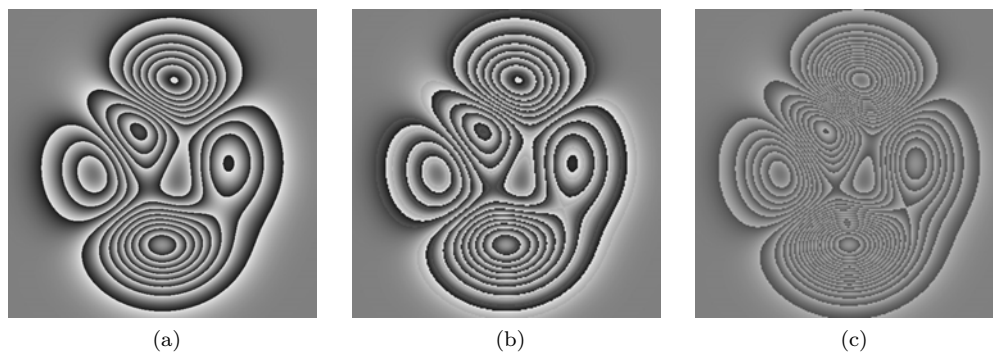


Figura 4.8: (a) Fase envuelta ideal $\phi(x, y)$, presentada con fines comparativos; (b) mapa de fase $\hat{\phi}(x, y)$ recuperado; (c) error en la fase debido al desentonamiento (como puede observarse, la señal espuria presenta el doble de frecuencia, como predice la Ecuación 3.59). El contraste en (c) ha sido mejorado por facilidad de observación.

De acuerdo con Millerd et al. [21], si la fase observada varía poco al interior del superpixel de dimensiones 2×2 puede aplicarse el conocido algoritmo de PSI con 4 pasos para estimar el resultado sobre cada super-pixel: (reportando el algoritmo propuesto originalmente)

$$\tan \hat{\phi}(x, y) = \frac{I(0) - I(\pi)}{I(\pi/2) - I(3\pi/2)}. \quad (4.29)$$

donde la señal sobre la fase demodulada denota un valor estimado, que puede diferir de $\phi(x, y)$ pues como señalan Servín y Estrada [29], la fase observada en cada super-pixel presenta no sólo un desplazamiento temporal sino también uno espacial, lo que genera un error por desentonamiento significativo (especialmente si es usado el algoritmo de cuatro pasos tradicional), como se observa en la Figura 4.8. Además, el mapa de fase obtenido por éste método se recupera con sólo la mitad de la resolución original y aunque Millerd et al. [21] mencionan que la Ecuación 4.29 puede ser aplicada sobre la totalidad del interferograma, demodulando prácticamente todos los píxeles, desafortunadamente no han publicado los detalles de cómo llevar a cabo dicha operación.

De acuerdo con Servín y Estrada [29], un método mucho más conveniente para la demodulación de estos interferogramas, que en particular elimina completamente el error por desentonamiento, consiste en lo siguiente: dado el interferograma con portadora pixelada

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + pm(x, y)] \quad (4.30)$$

puede observarse que a fin de recrear experimentalmente esta señal sería requerido un frente de onda de referencia dado por

$$R(x, y) = \exp[i pm(x, y)] \quad (4.31)$$

donde la llamada la máscara de fase $pm(x, y)$ se supone conocida.

Multiplicando el interferograma con portadora pixelada, por el conjugado¹ de esta señal de referencia:

$$I(x, y) R^*(x, y) = \{a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + pm(x, y)]\} \exp[ipm(x, y)], \quad (4.32)$$

y separando la parte real e imaginaria de esta señal compleja, resulta

$$\text{Im}\{I(x, y) R^*(x, y)\} = -a \sin(pm) + \frac{1}{2}b[\sin(\phi) - \sin(\phi + 2pm)] \quad (4.33)$$

$$\text{Re}\{I(x, y) R^*(x, y)\} = +a \cos(pm) + \frac{1}{2}b[\cos(\phi) + \cos(\phi + 2pm)] \quad (4.34)$$

donde se ha omitido la dependencia espacial por simplicidad. Dada una máscara de fase $pm(x, y)$ de alta frecuencia, tal que se cumpla para todo (x, y)

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} pm(x, y) \right| > \max \left| \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) \right|, \quad (4.35)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} pm(x, y) \right| > \max \left| \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) \right|, \quad (4.36)$$

se tiene que las Ecuaciones 4.33-4.34 representan términos separados espectralmente. De esta manera, aplicando un filtro pasa-baja (LPF) resulta

$$\text{LPF}\{\text{Im}[I(x, y) R^*(x, y)]\} = \frac{1}{2}b(x, y) \sin[\phi(x, y)] \quad (4.37)$$

$$\text{LPF}\{\text{Re}[I(x, y) R^*(x, y)]\} = \frac{1}{2}b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad (4.38)$$

Finalmente, el mapa de fase modulado queda dado por

$$\tan[\phi(x, y)] = \frac{\text{LPF}\{\text{Im}\{I(x, y) \exp[-ipm(x, y)]\}\}}{\text{LPF}\{\text{Re}\{I(x, y) \exp[-ipm(x, y)]\}\}}. \quad (4.39)$$

A continuación se presenta una simulación numérica que ilustra la aplicación del método para un interferograma simulado con modulación por dos máscaras de fase diferentes: la primera como proponen Millerd et al. [21] y la segunda con una distribución diferente de los micropolarizadores propuesta por Servín y Estrada [29],

$$sp_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\pi \\ \pi & \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix}, \quad sp_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\pi \\ \frac{3}{2}\pi & \pi \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

¹Puede observarse con facilidad que el utilizar $R(x, y)$ o $R^*(x, y)$ sólo altera el resultado en un signo global.

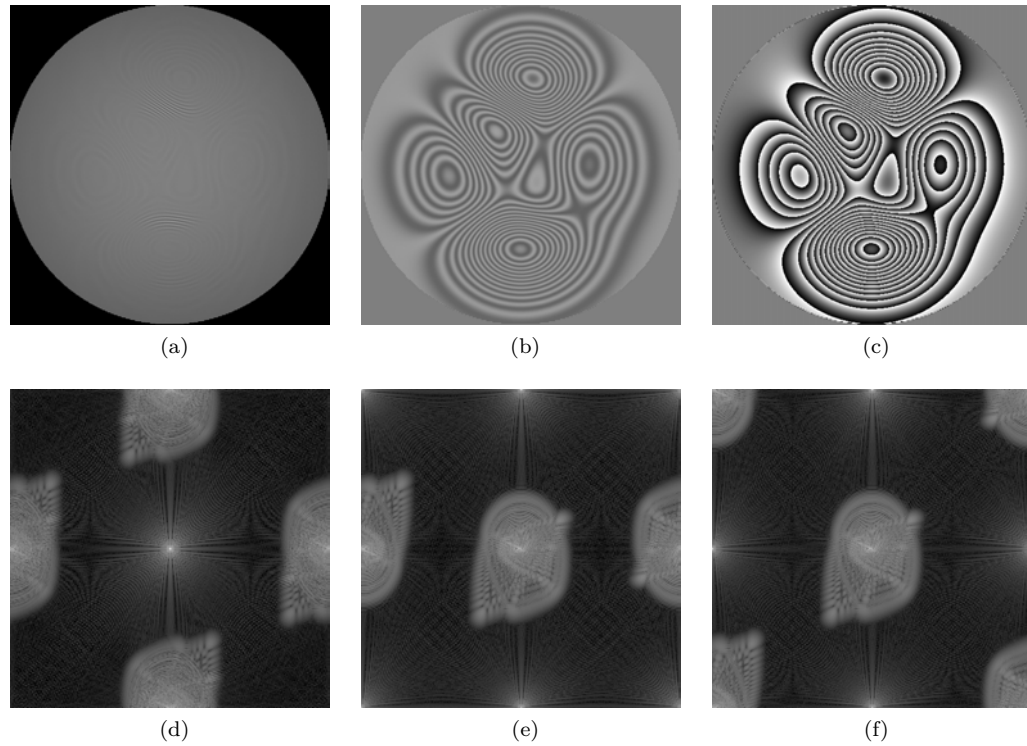


Figura 4.9: Interferograma con modulación pixelada de fase (a) como lo observaría el sensor CCD; (b) la parte real del producto con la señal de referencia conjugada; y el mapa de fase envuelto recuperado por la técnica. Espectros de frecuencia de (d) la señal original y del producto con el frente de referencia dado por la máscara de fase 1 (e) y 2 (f), respectivamente.

Replicando las matrices sp_k ($k = 1, 2$) resultan las máscaras de fase

$$pm1(x, y) = \delta(x, y) - \delta(x, y + 1) + i[\delta(x + 1, y) - \delta(x + 1, y + 1)] \quad (4.41)$$

$$pm2(x, y) = \delta(x, y) - \delta(x + 1, y + 1) + i[\delta(x + 1, y) - \delta(x, y + 1)] \quad (4.42)$$

con $(x, y) = (2n + 1, 2m + 1)$, $(n, m) \in \mathbb{Z}$.

Como puede observarse de la Figura 4.9, el mapa de fase recuperado por esta técnica no presenta error por desentonamiento. De la representación espectral se observa que el producto del interferograma de fase pixelado con la exponencial correspondiente al haz de referencia simulado desplaza las componentes espectrales de la señal de fondo a los costados y la componente de interés al centro.

Vale la pena resaltar que los términos conjugados que contienen la información sobre $\phi(x, y)$ presentan una mayor separación espectral mediante el uso de la máscara de fase $pm2(x, y)$ que cuando se aplica la máscara $pm1(x, y)$, pasando de π a $\sqrt{2}\pi$, lo que permite hacer un mejor uso del espacio espectral.

Capítulo 5

Conclusión y perspectivas

En el presente trabajo se ha presentado una revisión actualizada de los últimos avances que se han realizado en el área de la Interferometría por Corrimiento de Fase, o PSI, y se pretende que sirva como material introductorio de apoyo en esta disciplina, para lo cual se ha incluido un resumen -autocontenido en la medida de lo posible- de las herramientas básicas necesarias para su estudio.

Siendo un área de gran interés y en constante desarrollo típicamente se tiene la dificultad adicional de que la bibliografía relacionada se encuentra dispersa en múltiples publicaciones científicas, sujeta a las notaciones propias del autor y en muchas ocasiones con severas omisiones en el desarrollo matemático (sea por restricciones de espacio, de formato, etcétera). En el carácter compilatorio de este trabajo se ha pretendido subsanar estos inconvenientes, particularmente con los Capítulos 1-3, manteniendo una notación uniforme y desarrollando algunos de los aspectos menos explícitos de las publicaciones originales.

A partir del Capítulo 2 se realizó el análisis de los procesos de filtrado en términos de sistemas lineales y de la respuesta espectral, para realizar posteriormente la analogía y comprobar en el Capítulo 3 que los procesos de recuperación de fase (método de Fourier y algoritmos de PSI) también pueden ser descritos mediante este formalismo. Además, en los Capítulos 3 y 4 se presentaron evidencias de las ventajas inherentes al manejo de la Función de Transferencia Frecuencial para no sólo la valoración de los filtros de cuadratura asociados sino como una alternativa para su diseño.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentó una descripción del diseño de la respuesta espectral de los filtros de cuadratura mediante bloques de construcción así como una estrategia para optimizar la tolerancia al error de desentonamiento no reportada con anterioridad. En relación a los así llamados métodos híbridos, que toman elementos de interferometría por corrimiento de fase y de procesamiento de patrones de franjas abiertas, se comprobó cómo estos permiten el estudio de sistemas dinámicos de patrones de franjas cerradas o bien con un comportamiento espectral superior al de los métodos originales.

Respecto a las perspectivas a futuro, se tiene considerado realizar la extensión del análisis para los casos que difieren del comportamiento ideal, por ejemplo, en PSI analizar los casos en los que el paso es dinámico, no-uniforme o desconocido.

Adicionalmente, se desea realizar una demostración rigurosa de la evaluación de los filtros de cuadratura mediante la magnitud de la FTF, particularmente analizar una equivalencia al tercer criterio de F&K (rechazo y tolerancia a los armónicos mediante la identidad de las derivadas) para poder concluir efectivamente que la nueva metodología permite recuperar toda la información que pueden proporcionar los métodos tradicionales, sin presentar sus desventajas.

También se tiene un gran interés en realizar una revisión bibliográfica de disciplinas afines pues los formalismos y desarrollos presentados en estas, ocasionalmente pueden adaptarse para su aplicación en problemas de la Óptica; por ejemplo, la Función de Transferencia Frecuencial y la combinación de filtros de cuadratura son ampliamente utilizados en Procesamiento de Señales pero las ventajas de su uso siguen siendo desconocidas para gran parte de la comunidad científica que realiza procesamiento de señales interferométricas.

Apéndice A

Desenvolvimiento de franjas

Como se mencionó previamente, los mapas de fase recuperados en el procesamiento de las señales interferométricas suelen presentar discontinuidades de magnitud 2π que no corresponden con el frente de onda analizado. Existen diversos algoritmos para la eliminación de dichas discontinuidades que pueden encontrarse en la literatura (por ejemplo, ver Malacara [16], p.623-628) en un proceso llamado desenvolvimiento de franjas.

Bajo condiciones ideales el proceso de desenvolvimiento puede realizarse mediante métodos simples o de integración directa. Sin embargo, la presencia de ruido en la señal requiere de implementaciones más robustas, que en muchos casos implican algoritmos complejos o altamente iterativos. El método presentado a continuación es propuesto por Estrada et al. [4], consiste en un algoritmo rápido y computacionalmente eficiente para el desenvolvimiento de franjas que presenta además tolerancia a la presencia de ruido en el patrón a procesar.

A.1. El sistema de desenvolvimiento de franjas

La descripción unidimensional del sistema de desenvolvimiento de fase (en Inglés, *phase unwrapping*) se presenta como la integración de las diferencias en la fase envuelta observada. En las disciplinas de procesamiento digital de señales y teoría de comunicaciones, esta clase de sistemas suele modelarse mediante ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. Por ejemplo,

$$\hat{\phi}(t) - \tau \frac{d}{dt} \hat{\phi}(t) = g(t) \quad (\text{A.1})$$

representa un sistema lineal invariante de primer orden con entrada $g(t)$, salida $\hat{\phi}(t)$ y donde el parámetro τ restringe la magnitud de las variaciones en la salida. La solución a esta ecuación diferencial está dada por

$$\hat{\phi}(t) = \exp(t/\tau) \left[C_0 - \frac{1}{\tau} \int^t \exp(-s/\tau) g(s) ds \right] \quad (\text{A.2})$$

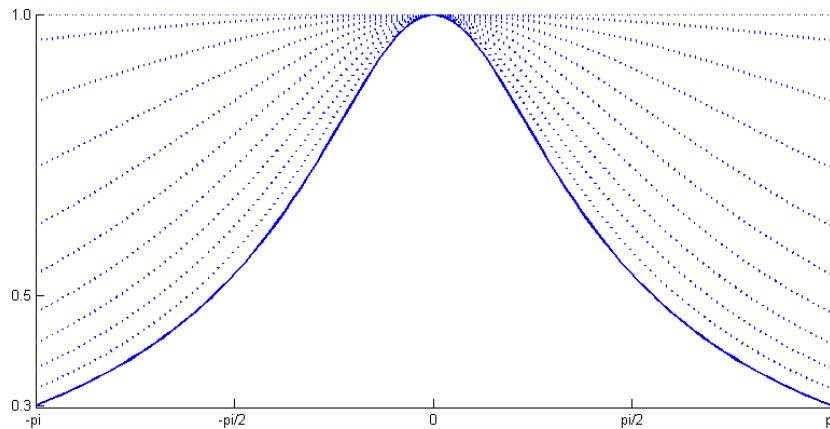


Figura A.1: Amplitud de la función de transferencia frecuencial para el sistema de desenvolvimiento de primer orden. La línea continua representa el caso $\tau = 1$ y las líneas punteadas corresponden a valores en el rango $0 < \tau < 1$, donde el sistema es estable.

donde el primer término corresponde a la solución homogénea (respuesta a entrada nula), y el segundo a la solución particular (respuesta del sistema).

Como puede verse de la Ecuación A.2, la salida del sistema consiste en una integral pesada (*weighted*) de la señal de entrada $g(t)$. Entonces, si la entrada consiste en la derivada de una fase envuelta módulo 2π , la salida estará dada por la fase desenvuelta filtrada por el sistema¹.

Para un sistema discreto, continuando el análisis en 1- D , se tiene

$$\hat{\phi}(n) - \tau \hat{\phi}(n - 1) = [\phi_w(n) - \phi_w(n - 1)] \text{ mod } 2\pi. \tag{A.3}$$

donde $\hat{\phi}$ representa la fase observada como salida y ϕ_w la fase envuelta.

Excepto por el parámetro τ , este sistema es muy cercano al descrito típicamente para desenvolvimiento por integraciones de línea. De acuerdo con Proakis & Manolakis [26], el sistema descrito por la Ecuación A.1 es estable para $\tau < 1$, lo que no se cumple en las propuestas previas, además de que se adquiere cierto control sobre la respuesta espectral: calculando la transformada de Fourier de la Ecuación A.1 resulta

$$\Phi(\omega) - \tau(i\omega) \Phi(\omega) = G(\omega), \tag{A.4}$$

y despejando para la función de transferencia frecuencial,

$$\frac{\Phi(\omega)}{G(\omega)} = \frac{1}{1 - i\tau\omega} \tag{A.5}$$

que corresponde a un filtro pasa-baja, como se observa en la Figura A.1.

¹Por definición, $x \text{ mod } y$ representa el residuo de operación x/y . En términos de la función *parte entera*, $[x]$, puede calcularse como $x \text{ mod } y = x - y [x/y]$

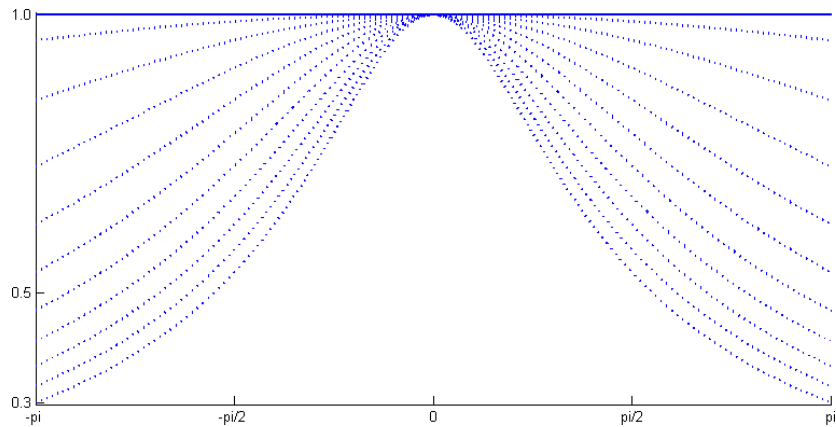


Figura A.2: Amplitud de la FTF del sistema de desenvolvimiento de primer orden con retroalimentación. La línea continua representa el caso $\tau = 1$ y las líneas punteadas corresponden a valores en el rango $0 < \tau < 1$, donde el sistema es estable.

Una variante del sistema lineal discutido hasta ahora consiste en tomar información *a priori* de la señal de entrada:

$$\hat{\phi}(n) - \hat{\phi}(n-1) = \tau [\phi_w(n) - \phi_w(n-1)] \text{ mod } 2\pi. \quad (\text{A.6})$$

Esta nueva ecuación de diferencias dice que si la salida es consistente con la entrada también lo son sus diferencias y en general, se cumple también la siguiente relación:

$$\hat{\phi}(n) - \hat{\phi}(n-1) = \tau [\phi_w(n) - \phi(n-1)] \text{ mod } 2\pi. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, despejando para $\hat{\phi}(n)$, resulta:

$$\hat{\phi}(n) = \hat{\phi}(n-1) + \tau [\phi_w(n) - \phi(n-1)] \text{ mod } 2\pi. \quad (\text{A.8})$$

con la correspondiente respuesta frecuencial dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega(\tau - 1)} \quad (\text{A.9})$$

cuya representación gráfica se presenta en la Figura A.2 para $0 < \tau < 1$.

La Ecuación A.8 describe un proceso donde el valor de la fase en el sitio n se calcula considerando el valor de la fase envuelta y los valores desenvueltos del sitio $n-1$, como se presenta esquemáticamente en la Figura A.3.

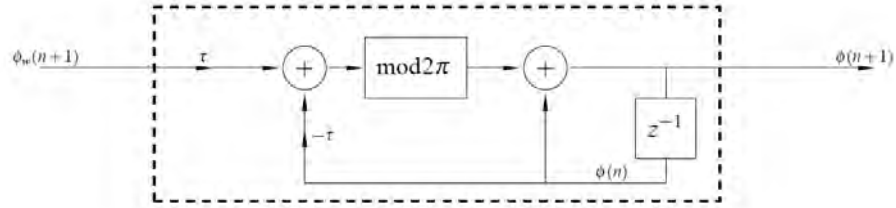


Figura A.3: Diagrama de bloques para el sistema de desenvolvimiento dinámico de primer orden. [Estrada *et al.*, 4]

Al extender la discusión al caso bidimensional, se tiene que la vecindad en los sitios a desenvolver se presenta en múltiples direcciones, además de que entre estos puede haber más de uno ya desenvuelto. Para modelar esto, se propone etiquetar como $\mathbf{n} + 1$ todos los sitios a desenvolver en una vecindad Ω , siendo \mathbf{n} el conjunto de los sitios ya procesados. De esta manera, el sistema lineal de desenvolvimiento para el caso bidimensional queda expresado como

$$\hat{\phi}(\mathbf{n} + 1) = \frac{1}{N(\Omega)} \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{n}) + \tau [\phi_w(\mathbf{n} + 1) - \phi(\mathbf{n})] \text{mod}2\pi \right\}. \quad (\text{A.10})$$

donde $N(\Omega)$ representa el número de elementos en la vecindad Ω .

Para procesar todos los sitios en el mapa de fase, una posibilidad consiste en realizar un barrido secuencial por filas o columnas. Sin embargo, si el dominio de la fase no posee una forma regular es recomendable utilizar otras estrategias como, por ejemplo, el algoritmo de relleno por difusión (del Inglés, *flood fill*) usado para colorear regiones conectadas en una imagen.

En las Figuras A.4-A.6 se presenta una simulación numérica comparando esta técnica con la extensión al caso bidimensional del método típico de integración de línea (nominalmente, la Ecuación A.3 con $\tau = 1$). Para estas pruebas se ha simulado un patrón de franjas cerradas al que se han introducido términos aditivos de ruido blanco con una varianza dada por 0.6rad y 1.2rad , respectivamente. Como puede observarse, el sistema con retroalimentación presenta una tolerancia al ruido mucho mayor.

Vale la pena señalar que el algoritmo es simple y rápido en términos computacionales (puesto que solo involucra sumas, restas y productos para obtener la fase desenvuelta en cada sitio) a diferencia de otros métodos reportados que hacen uso de complejos algoritmos o técnicas iterativas, las cuales suelen requerir un gran número de cálculos para convergir a la fase esperada.

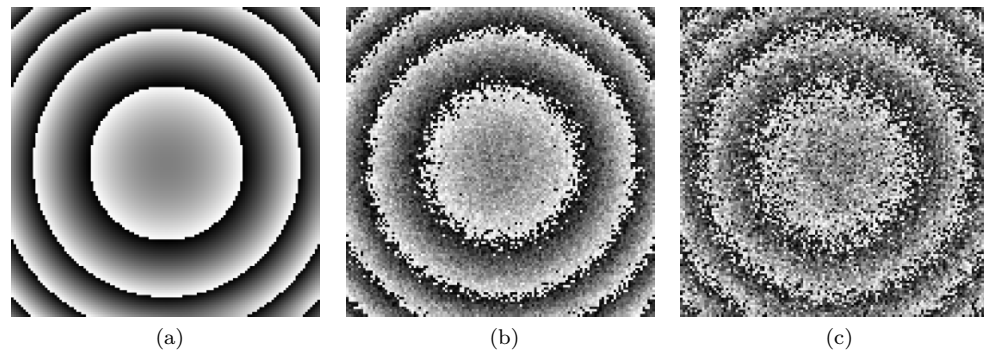


Figura A.4: Simulación de un mapa de fase envuelta (a) sin presencia de ruido, presentado con fines comparativos, y con ruido blanco de distribución gaussiana con varianza de (b) $0.6rad$ y (c) $1.2rad$.

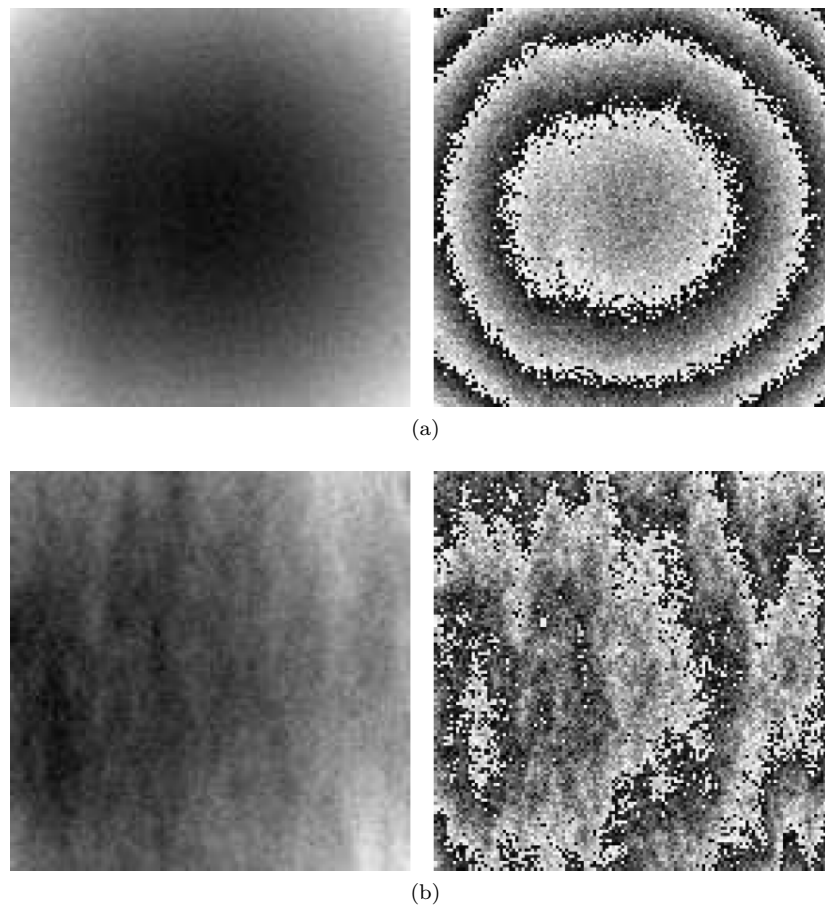


Figura A.5: Señal recuperada mediante el método clásico de integración de línea para el mapa de fase con ruido blanco de distribución gaussiana con varianza de (a) $0.6rad$ y (b) $1.2rad$. Una vez obtenido el resultado (izquierda) éste ha sido nuevamente envuelto (derecha) para facilitar la comparación visual con el patrón de franjas original.

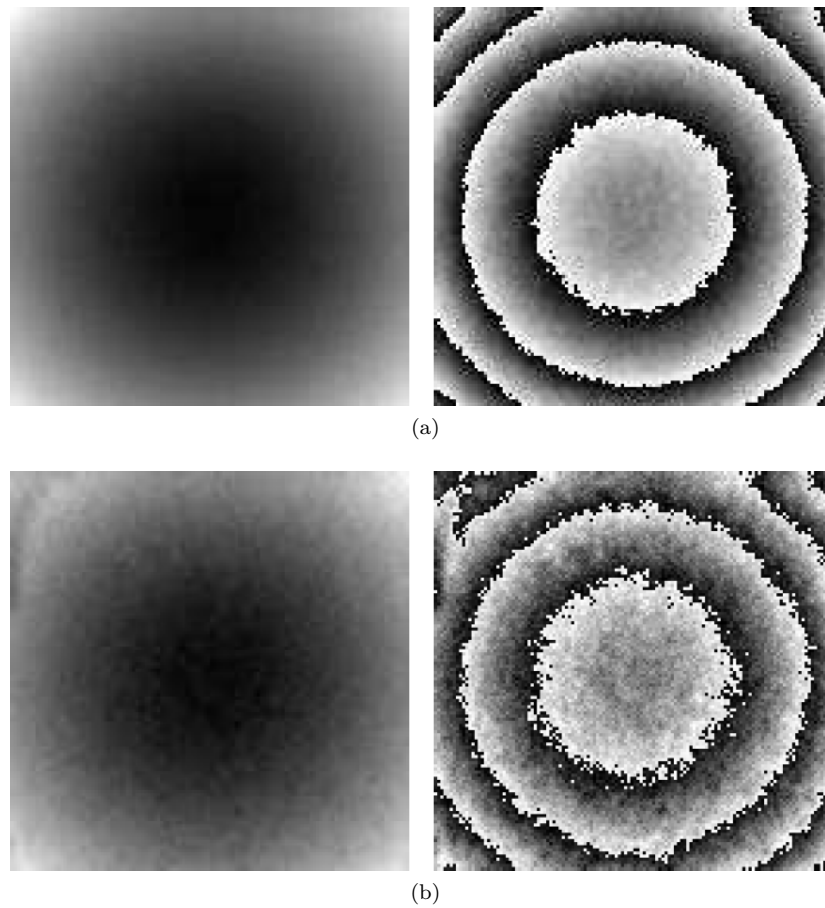


Figura A.6: Señal recuperada mediante el sistema dinámico de primer orden. Por comparación con el método tradicional de integración de línea, claramente este sistema presenta una tolerancia al ruido superior. Para las señales con varianza de (a) $0.6rad$ y (b) $1.2rad$ fue utilizado el parámetro $\tau = 0.3$ y 0.4 , respectivamente.

Bibliografía

- [1] J.H. Bruning, D.R. Herriott, J.E. Gallagher, D.P. Rosenfeld, A.D. White, and D.J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces, lenses. *Appl. Opt.*, 13:2693, 1974.
- [2] P. Carre. Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du bureau international des poids et mesures. *Metrologia*, 1:13–23, 1966.
- [3] R. Crane. Interference phase measurement. *Appl. Opt.*, 8:538, 1969.
- [4] J.C. Estrada, M. Servin, and Quiroga. J.A. First order noise tolerant fast phase unwrapping system. 2011.
- [5] JC Estrada, M Servin, and JA Quiroga. Easy and straightforward construction of wideband phase-shifting algorithms for interferometry. *Optics Letters*, 34(4):413–415, 2009.
- [6] K Freischlad and CL Koliopoulos. Fourier description of digital phase-measuring interferometry. *Journal Of The Optical Society Of America A-Optics Image Science And Vision*, 7(4):542–551, apr 1990.
- [7] C.Adonai Gonzalez-V. Comunicación interna (artículo en revisión). adonai@cio.mx.
- [8] J.E. Greivenkamp and J.H. Bruning. Phase shifting interferometry. In D. Malacara, editor, *Optical Shop Testing*, pages 501–598. Wiley & Sons, 1992.
- [9] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm. *Appl. Opt.*, 26(13):2504–2506, 1987.

- [10] C.L. Koliopoulos. Simultaneous phase-shift interferometer. *Proc. SPIE 1531*, pages 119–127, 1992.
- [11] M. Kujawinska and C. Kosinski. Adaptability: Problem or solution. In W. Jüptner and W. Osten, editors, *Akademie Verlag Series in Optical Metrology*, pages 419–431. 3th edition, 1997.
- [12] O. Kwon. Multichannel phase-shifting interferometer. *Opt. Lett.* 9, pages 59–61, 1984.
- [13] K.G. Larkin and B.F. Oreb. Design, assessment of symmetrical phase-shifting algorithms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9:1740, 1992.
- [14] V. Madisetti and D.B. Williams. *The digital signal processing handbook*. CRC, 1998.
- [15] D. Malacara. *Handbook of Optical Engineering*. Marcel Dekker, Inc, 2001. ISBN: 0-8247-9960-7.
- [16] D. Malacara. *Optical shop testing*. Wiley-Blackwell, 2007.
- [17] D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara. *Interferogram analysis for optical testing*. CRC, 2005.
- [18] J. L. Marroquin. Deterministic interactive particle models for image processing and computer graphics,. *Computer and Vision, Graphics and Image Processing*, 55:408–417, 1993.
- [19] JL Marroquin, JE Figueroa, and M Servin. Robust quadrature filters. *Journal Of The Optical Society Of America A-Optics Image Science And Vision*, 14(4):779–791, 1997.
- [20] James Millerd, Neal Brock, John Hayes, Brad Kimbrough, Matt Novak, Michael North-Morris, and James C. Wyant. Modern approaches in phase measuring metrology (invited paper). In Wolfgang Osten, Christophe Gorecki, and Erik L. Novak, editors, *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection IV*, volume 5856, pages 14–22. SPIE, 2005.

- [21] James Millerd, Neal Brock, John Hayes, Michael North-Morris, Brad Kimbrough, and James Wyant. Pixelated phase-mask dynamic interferometers. *Fringe 2005*, pages 640–647, 2006.
- [22] J. F. Mosino, M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga. Phasorial analysis of detuning error in temporal phase shifting algorithms. *Opt. Express*, 17(7):5618–5623, MAR 30 2009. ISSN 1094-4087.
- [23] B. K. A. Ngoi, K. Venkatakrishnan, and N. R. Sivakumar. Phase-shifting interferometry immune to vibration. *Appl. Opt.*, 40:3211–3214, 2001.
- [24] Matt Novak, James Millerd, Neal Brock, Michael North-Morris, John Hayes, and James Wyant. Analysis of a micropolarizer array-based simultaneous phase-shifting interferometer. *Appl. Opt.*, 44(32):6861–6868, 2005.
- [25] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, third edition, 2007. ISBN-13 978-0-511-33555-6.
- [26] J.G. Proakis and D.G. Manolakis. *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*. Prentice Hall New Jersey, 1996.
- [27] H. Schreiber and J.H Bruning. Phase shifting interferometry. In D. Malacara, editor, *Optical Shop Testing*, chapter 14. Wiley-Blackwell, 3th edition, 2007.
- [28] J. Schwider, R. Burow, K.E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel. Digital wavefront interferometry: Some systematic error sources. *Appl. Opt.*, 22: 3421–3432, 1983.
- [29] M. Servin and J. C. Estrada. Error-free demodulation of pixelated carrier frequency interferograms. *Optics Express*, 18, Issue 17:18492–18497, 2010. doi:doi:10.1364/OE.18.018492.
- [30] M. Servin and M. Kujawinska. Modern fringe pattern analysis in interferometry. In D. Malacara-Hernández and B. Thompson, editors, *Handbook of Optical Engineering*, chapter 12, pages 373–426. Marcel Dekker, Inc, 2001. ISBN: 0-8247-9960-7.

- [31] M. Servin, R. Rodríguezvera, and D. Malacara. Noisy fringe pattern demodulation by an iterative phase-locked loop. *Optics And Lasers In Engineering*, 23(5):355–365, 1995.
- [32] M. Servin, D. Malacara, J.L. Marroquin, and F.J. Cuevas. Complex linear filters for phase shifting with very low detuning sensitivity. *Journal of Modern Optics*, 1362-3044, 44 Issue 7:1269 – 1278, 1997.
- [33] M. Servin, M. Cywiak, D. Malacara-Hernandez, J.C. Estrada, and J.A. Quiroga. Spatial carrier interferometry from m temporal phase shifted interferograms: Squeezing interferometry. *Optics Express*, 16(13):9276–9283, 2008.
- [34] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga. Spectral analysis of phase-shifting algorithms. *Opt. Express*, 17(19):16423–16428, 2009.
- [35] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga. The general theory of phase shifting algorithms. *Opt. Express*, 17(24):21867–21881, 2009.
- [36] M. Servin, J.C. Estrada, J.A. Quiroga, J.F. Mosino, and M. Cywiak. Noise in phase shifting interferometry. *Optics Express*, 17(11):8789–8794, 2009.
- [37] R. N. Shagam and J. C. Wyant. Optical frequency shifter for heterodyne interferometers. *Appl. Opt.*, 17:3034–3035, 1978.
- [38] R.A. Smythe and R. Moore. Instantaneous phase measuring interferometry. *Opt. Eng.*, 23:361, 1984.
- [39] Yves Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping. *Appl. Opt.*, 35(1):51–60, 1996.
- [40] Mitsuo Takeda, Hideki Ina, and Seiji Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1):156, 1982.
- [41] J. C. Wyant. Use of an ac heterodyne lateral shear interferometer with real-time wavefront correction systems. *Appl. Opt.*, 14(11):2622, 1975.
- [42] J.C. Wyant. Interferometric optical metrology: Basic principles and new systems. *Laser Focus*, May, pages 65–71, 1982.