

Agradecimientos

“El pasado es prólogo”.

Miguel de Unamuno.

A Dios, a la vida.

Comenzar con la tradicional redacción en donde se den gracias o se distinga alguna experiencia compartida o aprendizaje obtenido en el tiempo invertido en esta institución, resultaría, desde mi punto de vista, injusto, incompleto.

La gratitud es un sentimiento estimativo, subjetivo, e implica una correspondencia e inherentemente un compromiso, y nace de un favor en beneficio nuestro. Ser agradecido es tener gracia, resaltar cualidades, es contar con la benevolencia y amistad de alguien (un ser animado). Por tanto, tendría que agradecer desde el primer día en que sentí placer, como el primer estadio para alcanzar la felicidad. Tendría el compromiso de nombrar a todos, a cada uno de los actores que hasta este día, han sido partícipes de la formación de mi conciencia, y entonces la lista sería larga, pesada y a la vez escueta, pero siempre incompleta.

Entonces, bajo la premisa plasmada en el párrafo anterior, es inútil comenzar una verdadera retrospectiva de agradecimientos. Sin embargo, la conciencia, ese espíritu agitador y displicente, me obliga a nombrar hechos, personas, situaciones del pasado reciente y del presente imperfecto en el que vivo.

El lenguaje es un instrumento insuficiente para transmitir las sensaciones, los verdaderos motivos de fondo que emanan de lo más profundo. El lenguaje es un ente discapacitado cuando no es acompañado por su complemento: los gestos, las expresiones, las reacciones del cuerpo incitadas por la mente, ese otro lenguaje que si es universal y que no encadena algún dialecto en particular, el que transmite angustia, felicidad, tristeza, coraje, hastío, decepción, esperanza: el lenguaje corporal. Y es en esta disyuntiva que deseo plasmar toda

la pasión del sentimiento en los fríos, cortos y geométricos signos que son las letras, que forman palabras y que transmiten significados inanimados, secos.

Los agradecimientos pueden ser políticos, formales, cortesés, en términos de reconocer una ayuda del orden material o intelectual; también los hay del orden moral, de principios, de sentimientos, esos que nacen del fondo, por la sonrisa compartida, por la charla improvisada, por el abrazo inusitado, por la mirada desinteresada, por el grito espontáneo, por el amor que fue, que es, que será.

Valga por esto mi más alto reconocimiento a mis padres, a quienes brindé la primera sonrisa, el primer disgusto, el primer capricho, el más caro abrazo en busca de protección, cobijo, resguardo y los eternos reclamos y disgustos: perdón por ellos; forjadores de lo que he sido hasta hoy, ya que directa o indirectamente, su ejemplo y forma de vida han dejado una huella imborrable en mi ser ya sea para expandir sus enseñanzas o darles un giro, ya que mi juicio interno, no me permitiría ajustarme a lo que ha sido. A mis hermanos, desconocidos hasta hace unos años por mí, porque en mi abstracción negativa de la vida, nunca los puede visualizar como los confidentes, amigos y apoyo que han sido y serán por siempre. A ti pequeña, que has transitado en esta última etapa de mi vida.

A la familia paterna en su conjunto, porque en su personalidad desconocida, han sabido arrojarse y girar en torno a un ejemplo, un confidente: tú, tía monja, Guadalupe, unes cuando todo esta disperso. A la familia materna, que ha representado una constante incógnita y que se han unido solo cuando las cabezas han faltado; gracias por la infancia compartida, gracias Antonio por tantas charlas e interés mostrado.

A la amistad, que escuetamente me ha seguido a lo largo del camino, por los amigos perdidos en el trayecto, por los ganados en el presente (Cornelio, Haggeo, José Luis, Daniel, Claudio, Paulino) y por los recuerdos de momentos vividos. A todos los maestros que han sido coparticipes en el crecimiento personal e intelectual de un servidor con sus ejemplos y defectos. Sería injusto plasmar un solo nombre.

Al CIO en su conjunto, porque todos somos responsables de su imagen, de su proyección futura y de la empatía que día con día se desarrolla; en especial a todas las personas que en estos dos años han participado en DFA (Laura, Guille, Paty, Mari, personal de biblioteca, Lic. Martínez, Dr. Oracio, Dr. Servín).

A los coparticipes de la conclusión de este trabajo: Dr. Ramón, Dra. Amalia, Daniel y muy en especial al Ing. Juan Rayas, gracias por compartir tu experiencia y tu gusto, pasión e interés por el trabajo y el desarrollo tecnológico, has sido pieza clave en esta etapa. Por todos los comentarios informales y las charlas de pasillo: Dr. Abundio, Memo Garnica, Dr. Zacarías y Daniel, Dr. Moisés, Paulino, Dr. David, Dr. Apolinar.

Mi agradecimiento formal al CONACYT, que como parte de su labor administrativa, entre otras, permite distribuir los recursos impositivos con los que contribuimos todos los trabajadores formales y consumidores de productos nacionales del país, para que se desarrolle un cimiento básico en toda sociedad: la ciencia y tecnología.

ÍNDICE GENERAL.

	<u>Página</u>
RESUMEN.....	I
JUSTIFICACIÓN.....	I
OBJETIVO.....	I
PRÓLOGO.....	II
AGRADECIMIENTOS.....	VI
CAPÍTULO 1: Introducción.....	1
1.1 Antecedentes del presente trabajo.....	1
1.1.1 Estado del arte en la medición de forma y topografía.....	1
1.1.2 Desarrollo histórico de los patrones de moiré.....	2
1.2 Planteamiento del problema.....	5
CAPÍTULO 2: Aspectos teóricos sobre el fenómeno de moiré.....	9
2.1 Introducción.....	9
2.2 Óptica de moiré.....	9
2.2.1 Formulación física.....	15
2.2.2 Extracción de información.....	26
2.2.3 Tipos de moiré.....	29
2.2.3.1 Moiré por reflexión.....	29
2.2.3.2 Moiré holográfico.....	31
2.2.3.3 Moiré por sombras.....	32
2.2.3.4 Moiré por proyección.....	38
2.2.3.5 Contorneo electrónico de Moiré.....	44

2.2.3.6 Métodos basados en el efecto Talbot.....	49
2.3 Auto-imágenes.....	49
2.3.1 Interferometría de Talbot.....	70
2.3.2 Método de moiré por proyección de Talbot.....	73
Referencias.....	80
CAPÍTULO 3: Descripción del microscopio óptico.....	84
3.1 Introducción.....	84
3.2 ¿Por qué utilizar un microscopio óptico?.....	84
3.3 El microscopio estéreo.....	85
3.4 Características del microscopio estéreo utilizado.....	89
3.5 La cámara CCD.....	93
Referencias.....	96
CAPÍTULO 4: Análisis de franjas.....	97
4.1 Introducción.....	97
4.2 ¿Qué es la fase?.....	97
4.3 Métodos de análisis de franjas.....	98
4.4 Técnica de desplazamiento temporal de la fase.....	100
4.5 Análisis espacial de fase.....	104
4.6 Técnica de desplazamiento temporal de la fase en “n” pasos.....	106
4.7 Proceso de filtrado del patrón de franjas.....	108
4.8 Desenvolvimiento de fase.....	111
Referencias.....	114
CAPITULO 5: Desarrollo Experimental y Análisis de resultados.....	116
5.1 Introducción.....	116
5.2 Descripción del esquema implementado en el laboratorio.....	117
5.3 Procesamiento de franjas.....	122
5.4 Interpretación de resultados.....	125

Referencias.....	149
CAPÍTULO 6: Conclusiones Generales.....	150
6.1 Resumen y conclusión de los logros alcanzados.....	150
6.2 Trabajo futuro.....	162
Referencias.....	163
APÉNDICES.	
Apéndice A: Los Diamond Anvil Cell.....	164
A.1 ¿Qué es un DAC?.....	164
A.2 Los Yunque de diamante.....	168
A.3 Descripción de la tabla y la región plana.....	168
A.4 ¿Qué son las celdas de carga?.....	169
A.5 Descripción de la cámara de muestra.....	171
Referencias.....	172
Apéndice B: Interferencia.....	173
B.1 ¿Qué es la interferencia?.....	173
B.2 Formulación geométrica del fenómeno de Moiré.....	209
B.3 Formulación indicial del fenómeno de moiré.....	213
Referencias.....	216
Apéndice C: El microscopio y la CCD.....	219
C.1 ¿Qué es un microscopio?.....	219
C.2 Microscopio Estéreo.....	229
C.3 ¿Qué es una CCD?.....	241
Referencias.....	251
Apéndice D: Trabajos derivados del proyecto de tesis.....	252

RESUMEN.

En el presente trabajo, se recupera la topografía de una gasket mediante la proyección de una imagen de Talbot proveniente de una rejilla lineal e iluminada por un haz láser de He-Ne de 638nm; las franjas proyectadas sobre la superficie se capturan con la ayuda de un microscopio estereo y una CCD para, posteriormente, realizar un procesamiento digital de las franjas con la ayuda de los algoritmos conocidos como desplazamiento temporal y espacial de fase y así obtener la información de la fase envuelta. A esta fase se le aplica un algoritmo de desenvolvimiento de fase conocido como seguidor de fase regularizado (Regularized phase tracking unwrapper) y, finalmente, se obtiene la información concerniente a la altura de la gasket promediando diferentes puntos sobre su superficie. Alternativamente, se muestran los resultados obtenidos acerca de la topografía de una letra troquelada en una tapa de plástico así como de un vidrio de perfil convexo.

JUSTIFICACIÓN.

El obtener la topografía de una gasket mediante proyección de una imagen de Talbot, es conveniente debido a que no se afectan las propiedades físicas del material del cual esta hecha la gasket. A partir de algoritmos de desenvolvimiento de fase, se obtiene la medición de la altura y forma del objeto, la cual puede utilizarse posteriormente para someterla a esfuerzos y vibraciones simuladas en algún programa de elemento finito y comparar estos resultados con los obtenidos a partir del método óptico aquí propuesto.

OBJETIVO.

Obtener la imagen y las dimensiones en coordenadas reales de la altura, principalmente, de un elemento conocido como gasket a partir de la modificación de la técnica conocida como Topografía de Moiré por proyección de Talbot. Comparar los resultados con respecto a los obtenidos por un instrumento certificado conocido como Máquina de Medición por Coordenadas.

PROLOGO.

Las técnicas para la medición y caracterización de objetos en el campo de la óptica, ha sido ampliamente difundida desde el mismo nacimiento de la óptica como ciencia. La gama de métodos y diversidad de las formas para lograr el fin comentado, hacen del campo de la metrología óptica una disciplina que se ha ido refinando con el paso de los años, siendo en la actualidad una herramienta que permite perfeccionar la concepción dimensional acerca de un objeto en particular.

En el presente documento se utiliza una técnica óptica basada en la proyección de franjas. Dicha proyección se fundamenta en el principio del fenómeno de Talbot, ampliamente estudiado desde su publicación allá por el año de 1836; acotando aún mas la técnica, se emplea el método conocido como topografía de moiré por proyección de Talbot (TPMT) introducida hacia el año de 1991, a partir de la cual se realizan algunas modificaciones para aprovechar el advenimiento y la implementación del análisis digital de franjas que comenzó a tener una auge importante por la década de los 80's del siglo anterior.

La tesis que se reporta pudiera parecer extensa y tediosa para un experto en óptica debido a que se complementa con apéndices que trata temas básicos en la óptica física, como lo es la interferencia y el funcionamiento del microscopio. Sin embargo, el autor del presente trabajo, considera no esta de sobra anexar esta información, así como la referente al fenómeno de moiré, ya que considera que, si bien, son temas relativos a la formación básica de cualquier óptico, cualquier lector neófito que se interese en el tema o en la presente tesis, pueda encontrar, lo que el autor considera, como la información necesaria para comprender el significado físico de la técnica aquí empleada así como ser una herramienta de apoyo sobre tópicos generales estudiados en óptica. El autor intenta que este sea un ensayo para difundir la relevancia fundamental que actualmente tiene la óptica dentro de la física moderna.

Por otro lado, considero que este tipo de publicaciones, nos permite explayarnos un poco y organizar, además de fundamentar, un trabajo que representa la culminación de muchos meses de estudio y de aprendizaje. Si acaso esto no fuese así, entonces se correría el riesgo de evaluar todo un cúmulo de conocimientos en un solo documento y esto daría una visión, quizá objetiva, pero muy corta acerca del aprovechamiento y de los objetivos que se persigue en la formación de recursos humanos en el área de ciencia. La formación debe ser integral, es decir, dentro de un área muy específica del conocimiento, integrar todas aquellas inquietudes, aptitudes y visiones que uno como persona tiene acerca de un problema en particular, en este caso en el área de la óptica. Así que la naturaleza de la redacción de un documento, un estilo, así como la forma de interpretar resultados puede parecer, para gente especializada en el campo, vaga e inapropiada, sin embargo, se plasma el sentir y el conocimiento adquirido bajo una estructura única y de ahí la importancia del trabajo; además, solo expresando las ideas y las formas es como se aprende, al igual que de los errores y hasta de las necesidades que en algún momento se pudieran tener. ¿Quién no ha sido obstinado por lo menos alguna vez en la vida? En la vida, la terquedad es un estadio, más no un fin.

La libertad de expresar o intentar expresar una idea o concepto, es propia de cada persona, es un sello y una forma de interpretar el mundo; la diferencia es la que enriquece al conocimiento y la diversidad es la que permite el crecimiento. Los conocimientos que se adquieren a lo largo de un tiempo específico no se establecen ni se comprenden en su total magnitud de un día a otro, ni siquiera de una año a otro. La ciencia es una dama celosa, que requiere de atención, de perseverancia y de que sus aromas y encantos, vayan asentándose en el cerebro, para que de esta forma, las relaciones sinápticas llevadas entre las neuronas, las arropen, las hagan suyas y es entonces que se produce un cambio, se avanza un paso en la comprensión de la ciencia y se pulen los estilos, la forma, las ideas y fluyen de forma natural, práctica, y ese bagaje de conocimientos empata con el criterio dictado por aquellos predecesores en el campo, y es cuando la ciencia permite revelar los secretos aún ocultos en ella, pero no antes.

La tesis entonces se convierte en una ventana de libre opinión, de libre albedrío a partir de la resolución o comprensión de un problema en particular, y es un documento que en la forma define el fondo; es de los pocos ejercicios que tenemos como estudiantes para no encasillarnos en requisitos cuadrados, inamovibles y que tienden a la unicidad. A medida que continué desarrollándome en el área, tendré que ajustarme a espacios, esquemas y normas de publicación, pero esta ventana es mía y representa mi estilo, bueno o malo eso no me corresponde a mí juzgarlo, sin llegar a caer en la anarquía total a la forma de presentar un documento. Estos son mis motivos, mis razones. Juzgue usted, amable lector, si es que el documento así le motiva.

La estructura general de la tesis por capítulos es como sigue. Como preámbulo se presenta el resumen, la justificación, el objetivo y el presente prologo, así como los agradecimientos y el índice general que muestra el esqueleto de esta tesis. El capítulo 1, muestra un panorama general de la metrología desde el punto de vista del autor así como justificar, con mayor detalle, la razón de este trabajo.

El capítulo 2 sienta las bases en las que se fundamenta este estudio. Intenta ser una síntesis de la teoría desarrollada por diferentes autores en libros a lo largo de los años; explica el porque la importancia del fenómeno de moiré y sus variantes a través de esquemas y relaciones matemáticas. En este capítulo, se hace hincapié en el fenómeno de Talbot y algunos estudios realizados a este respecto, así como aplicaciones del efecto en el campo de la metrología dimensional, especialmente en la recuperación de contorno y la posible medición de deformaciones basadas en la llamada topografía de moiré por proyección de Talbot.

El capítulo 3 persigue justificar la utilización de un microscopio en el arreglo implementado en el laboratorio y que se describe en el capítulo 5. Así mismo, es un intento por plasmar la utilidad del microscopio estereo como un sistema óptico que nos permite

apreciar la realidad de los objetos que se desean estudiar y de lo común que se ha convertido el uso de la CCD como herramienta de procesamiento y captura de imágenes.

En el capítulo 4 se describen someramente los diferentes algoritmos para el procesamiento digital de franjas utilizado para la obtención de los resultados. El desarrollo experimental así como la descripción de los arreglos implementados en el laboratorio, son narrados en el capítulo 5 lo más detalladamente posible, así como mostrar e interpretar los resultados obtenidos comparándolos con los valores proporcionados por una máquina de medición por coordenadas (MMC). Este capítulo es la parte medular de la tesis y no por ser uno solo deja de tener trascendencia, ya que toda la teoría descrita hasta antes de este capítulo, resaltan la importancia, el fin que se ha logrado consumir a lo largo de años y años de desarrollo científico, una medición real a partir de una técnica óptica.

Por último, el capítulo 6 esta escrito en base a las opiniones, al criterio y a la bitácora de laboratorio elaborada por el autor. Se incluye una visión personal de los objetivos y metas alcanzadas en el desarrollo del trabajo así como de proponer el trabajo futuro que se puede continuar a partir de las bases aquí establecidas.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Éste primer capítulo plantea el contexto y la estructura de la tesis, comenzando con un pequeño análisis acerca del desarrollo que han tenido las técnicas ópticas, en especial la técnica de moiré por proyección y la interferometría Talbot, en el transcurso de los últimos años apoyado por una breve narración histórica de las mismas.

1.1 Antecedentes del presente trabajo.

Diversos desarrollos acerca de la técnica de moiré por proyección de franjas y de la interferometría de Talbot, han sido ampliamente explicados y desarrollados con especial énfasis a partir de la década de los 70's hasta el día de hoy. Por ser técnicas basadas en el fenómeno de interferencia y difracción, los primeros estudios se remontan al siglo XIX, iniciados por Lord Rayleigh (1881) en cuanto al fenómeno de moiré se refiere y a la explicación científica del fenómeno observado por F. Talbot (1836) que consistía en la reproducción exacta de una rejilla de difracción de baja frecuencia iluminada con un haz de luz monocromático y coherente sin necesidad de componentes ópticas.

En la actualidad, dichas técnicas son ampliamente utilizadas para recuperar y analizar la topografía de superficies tridimensionales. Así mismo, al utilizar dichas técnicas, es posible obtener información de propiedades físicas bajo la aplicación de esfuerzos, ya sean mecánicos o térmicos. En el presente trabajo, nos enfocaremos a implementar técnicas ópticas basadas en el método de moiré por proyección de franjas, con un énfasis muy particular en la proyección de una imagen de Talbot.

Éste método tiene su fundamento en la técnica de Talbot-Projected Moiré Topography (TPMT)¹, a partir de la cual se recuperara la forma de objetos tridimensionales.

1.1.1 Estado del arte en la medición de topografía

La utilización de técnicas no invasivas para la medición de la topografía de superficies, se han difundido ampliamente durante el transcurso de las tres últimas décadas. El auge es debido principalmente, a que muchos de los objetos que requieren caracterizarse no pueden someterse a pruebas físicas que generen desgaste en los mismos, en adición a las razones de costo y eficiencia. Dentro de toda la gama de técnicas existentes para dicho fin se encuentran los métodos ópticos los cuales han sido ampliamente difundidos por su versatilidad, por ser de no contacto, campo completo y tienen la gran ventaja de que son sistemas de medición con una alta resolución.

Una de las técnicas ópticas ampliamente difundidas en la actualidad para la caracterización de objetos, se basa en la generación de patrones de interferencia que incluyen una gran variedad de métodos entre los cuales podemos mencionar los siguientes:

- Moteado fotográfico.
- Foto-elasticidad.
- Interferometría holográfica.
- Moteado fotográfico por desplazamiento (Shear Speckle Photography).
- Interferometría de moteado.
- Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI).
- Proyección de franjas de Talbot.
- Técnicas de moiré.

La técnica de moiré se fundamenta en el hecho de que la superficie bajo estudio ocasiona que las franjas lineales proyectadas, de una rejilla, sufran desviaciones en su forma proporcionales al relieve del objeto. Al superponer dicha rejilla con una de referencia, se obtiene un patrón de franjas conocido como *franjas de moiré*. Aplicando diferentes métodos de análisis de franjas (Laura Ortega², et. al.), obtendremos la información relativa

a la desviación de las franjas proyectadas sobre el objeto bajo estudio y así recuperar su topografía.

1.1.2 Desarrollo histórico de la interferometría de moiré en el campo de la metrología.

El término moiré ha tenido diversas acepciones a lo largo de la historia.. Cuando la luz atraviesa un par de rejillas de similar frecuencia superpuestas entre sí, y una de ellas se encuentra desplazada o girada un pequeño ángulo con respecto a la otra, se observaba un patrón de franjas de baja frecuencia. Éste patrón fue bautizado con el nombre de la palabra francesa *muare*, la cual significa batimiento de olas.

Dicha palabra también puede interpretarse como “mojado”, “ondulado”, o “mallado”; otro origen proviene de la misma raíz francesa, pero usada en el campo textil, donde se observó por vez primera el fenómeno, ya que al superponer telas con el tejido lo suficientemente abierto para poder observar a través de ellas, se advertía la generación de un patrón de franjas de baja frecuencia, parecido a las olas de la mar, por lo que se le dio dicho nombre.

La primera propuesta sería de observar y estudiar el efecto de moiré, fue hecha por Lord Rayleigh, cuando sugirió el análisis de las rejillas. Posteriormente siguieron las descripciones hechas por Righi acerca de los patrones de moiré resultantes al superponer rejillas circulares y radiales. En los años de 1920, Ranchi, Raman y Datia, publicaron trabajos acerca del fenómeno. En la década de los 40's, se aplicó para el análisis de deformaciones y esfuerzos en objetos rígidos. En 1948 Weller y Sheperd sugirieron para el estudio y contorno de superficies tridimensionales, el uso de técnicas basadas en moiré. A partir del citado estudio, varias herramientas matemáticas y técnicas experimentales fueron desarrolladas, tales como el formalismo indicial de las ecuaciones que modelan el efecto moiré. Recientemente en los años 70's Meadows, Takasaki entre otros, publicaron una descripción matemática de mediciones topográficas mediante la técnica de moiré por sombreado o conocida también como shadow moiré. Posteriormente, en la misma década,

Hovanesian y Hung aplicaron la técnica de moiré por proyección alcanzando resultados exitosos. Como consecuencia, las técnicas basadas en moiré han sido ampliamente desarrolladas para caracterizar la topografía y el contorno de superficies así como medir deformaciones y esfuerzos en las mismas. Uno de los primeros trabajos para la recuperación de objetos 3-D utilizando la técnica de moiré, fue realizada por Suzuki en 1988 y el trabajo de Rodríguez-Vera (1991) considerando el efecto Talbot para dicho fin. Éste desarrollo a su vez fue impulsado por la publicación de varios algoritmos para el análisis de franjas, entre ellos podemos mencionar el método de Morgan (1982), Schwider (1983), Takeda (1984), Wyant (1984), Hariharan (1987), Mendoza-Santoyo (1988), Koliopoulos (1990), entre muchos otros hasta la actualidad. Existen muchas más aplicaciones para el método de moiré en el campo de la medicina, cristalografía y óptica.

El efecto Talbot o de auto imágenes, descubierto en 1836 por Talbot y explicado por Rayleigh en 1881, se debe a que las rejillas de difracción tienen la propiedad de que cuando se iluminan con un haz de luz coherente y monocromático, se forma una imagen fiel de ellas, sin necesidad de lentes colocando una pantalla a una distancia dada. En su propuesta original, Fox Talbot iluminó con un haz de luz blanca colimada un área rectangular de agujeros muy pequeños, observando que dicho patrón se repetía a lo largo de la dirección de iluminación.

A menudo el efecto Talbot se estudia como parte de la teoría de moiré³, y esto se debe a que ambos fenómenos ópticos se basan en el principio de la interferencia y difracción de ondas y se deriva a partir del estudio de la teoría escalar de la difracción⁴. Por otro lado, a lo largo de la historia, algunos autores han diferenciado el término de efecto Talbot del utilizado para definir las auto-imágenes considerándolos como efectos coincidentes en algunos aspectos o, dicho en otras palabras, cuando se presenta el efecto Talbot es debido a la presencia de las auto-imágenes analizadas desde el punto de vista de la teoría escalar de la difracción⁵. Otro punto de vista sobre el manejo de estos términos, lo define R. Sirohi⁶, quien comenta que las auto-imágenes se deben a la difracción y se observan en objetos periódicos; además la periodicidad transversal de la rejilla se manifiesta así misma como

una periodicidad longitudinal, y esta imagen observada se denomina auto-imagen ya que no se requieren de ningún componente óptico para formarse.

Lord Rayleigh en 1881 fundamenta o explica la teoría del “fenómeno de Talbot”⁷ en base a la teoría desarrollada en su libro “Sound, pp. 268-301”, obteniendo una primera ecuación que proporcionaba las distancias a la cual la imagen de una rejilla lineal iluminada por una fuente de luz no coherente, limitada por una pequeña abertura circular, se repetía así misma sin la presencia de alguna componente óptica. La repetición periódica de dichas imágenes se generaba aproximadamente a cada $z = \frac{2 \cdot d^2}{\lambda}$ donde z representa la distancia sobre el eje de iluminación donde se repiten las imágenes, d indica el periodo de la rejilla y λ es la longitud de onda de la luz. También encontró imágenes a distancias intermedias de donde se formaban las de buena resolución, pero nunca hizo una distinción acerca de los términos empleados, simplemente se refería al fenómeno observado por Fox Talbot, y de ahí el nacimiento del término *efecto Talbot*.

1.2 Planteamiento del problema.

El objetivo de la presente tesis, como ya se comentó, es caracterizar la topografía de un objeto tridimensional, conocido técnicamente como gasket, que forma parte de una celda de carga (su traducción formal sería junta mecánica) utilizado en los dispositivos generadores de alta presión estática (el término utilizado en inglés es High Pressure, HP). Estos son conocidos como DAC (Diamond Anvil Cells); una traducción cercana en español sería celdas de yunque de diamante⁸. Para mayores detalles acerca de las características de un DAC y un gasket, consultar el apéndice A.

La necesidad de caracterizar dicho elemento, el gasket, se debe a que es el corazón de los DAC`s y juegan un papel central en la aplicación de muy altas presiones, alrededor de 300 Giga Pascal (GPa) ya que limita el espacio donde se colocan las pequeñas muestras de los materiales que se desean estudiar bajo estas condiciones y por esta razón son componentes que sufren un desgaste constante. En la actualidad no hay forma de conocer técnicamente

hasta que punto llega tal degradación del material, por lo que es factible desperdiciar dichos elementos sin haber alcanzado su agotamiento mecánico.

Para caracterizar la gasket, no es recomendable aplicar técnicas destructivas que puedan afectarlo, por lo que las técnicas basadas en métodos ópticos serán de gran utilidad por ser no destructivas ni generar cambios en las propiedades mecánicas del material.

Los métodos mecánicos, sin llegar a profundizar en ellos, son sistemas que interfieren directa o indirectamente en la estructura del objeto, por lo que al aplicar algún componente químico o someterlo a esfuerzos mecánicos la naturaleza misma del gasket se podría modificar. Lo que se busca con la técnica óptica es evitar gasto innecesario de material y al mismo tiempo desarrollar la técnica de topografía de moiré por proyección de Talbot (TPMT) para comprobar que es posible obtener medidas reales de altura e información de la topografía de la gasket en particular, y de otros objetos en general y dichas mediciones compararlas con una referencia proporcionada por una Máquina de Medición por Coordenadas (MMC) para corroborar la fiabilidad de la medición.

Dentro del universo de métodos ópticos existentes, se eligió la proyección de franjas, específicamente la de una imagen de Talbot, el cual consiste en proyectar una auto-imagen de una rejilla de difracción lineal de baja frecuencia sobre el objeto bajo análisis, el cual provocará una deformación en las franjas que será proporcional al contorno de la superficie. Se recuperará la topografía de la gasket sin afectar sus propiedades mecánicas a partir del patrón de franjas proyectado.

La DAC donde se utilizan estas celdas de carga o gaskets a caracterizar, son empleadas para realizar estudios de espectroscopia Raman a diferentes materiales sometidos a ultra altas presiones en un área muy pequeña

Las limitantes que se tienen al aplicar este tipo de estudios sobre el objeto descrito con anterioridad, se basan principalmente en el hecho de que tenemos un rango de aplicación y de medición, el cual se explicará con mayor detenimiento en capítulos posteriores. Por

ahora solo se mencionará que la precisión y exactitud de los resultados que se mostrarán, están ligados a la naturaleza del arreglo óptico que se requiere para la proyección de la imagen de la rejilla de difracción, las cuales se manifiestan como aberraciones que influyen en la imagen formada.

También la naturaleza de la fuente de iluminación, un láser de He-Ne a 638nm, es un factor a considerar ya que en el funcionamiento del mismo inciden una cantidad de variables físicas importantes que se manifiestan como ruido de moteado que influye en el sistema.

Para obtener el error en la medición obtenida por la técnica óptica, la referencia será las mediciones proporcionadas por una máquina de medición de coordenadas (MMC), que es un instrumento certificado y calibrado. A partir de esta referencia, tendremos un porcentaje de error en nuestra medición la cual siempre que resulte dentro de cierto rango se puede tomar como fiel a la cantidad física medida.

Por otro lado, es necesario comentar de la existencia de otras técnicas para la medición y caracterización de superficies tridimensionales. Entre estas podemos mencionar a la técnica de moiré por sombreado, a la interferometría de moiré, el moteado fotográfico, la fotoelasticidad, el ESPI y la shearografía. Una amplia gama de dichas técnicas ópticas son abordadas por diversos autores, entre otros por R. Sirohi⁹, J. Gasvik¹⁰. En este caso en particular se desea estudiar más de cerca la aplicación de la técnica de proyección de franjas de Talbot descrita con anterioridad, y hasta donde es posible aplicar el método. De acuerdo a los estudios realizados por Rodríguez-Vera¹¹, con este método es posible medir hasta 11 μ m de altura.

Referencias

1. R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza Santoyo, “3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes”, *Journal of Modern optics*, Vol. 38, 1991, pp. 1935-1945.
2. L. Ortega González, “Técnicas de Análisis de Franjas en Interferometría”, Tesis profesional, CIO, 1994.
3. G. Indebetouw, R. Czarnek, SPIE, select papers on “Optical Moiré and Applications”, Vol. MS64.
4. K. E. Oughston, SPIE, select papers on “Scalar Wave Diffraction”, Vol. MS51.
5. P. Latimer, “Talbot effect reinterpreted: reply to comment”, *Applied Optics*, Vol. 31, July 1993, pp. 3468-3469.
6. R. S. Sirohi, “Optical Methods of Measurement”, Marcel Dekker Inc., 1999, pp 270-271.
7. Lord Rayleigh, “On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith”, *Philos. Mag*, 11, pp 196-205 (1881).
8. A. Jarayaman, “Diamond Anvil Cell and high-pressure physical investigations”, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 55, 1983, pp 65-66.
9. R. S. Sirohi, *Op. cit.*, cap. 8.
10. K. J. Gasvik, “Optical Metrology”, John Wiley & Sons, 1987.
11. R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza Santoyo, *Op. cit.*, pp. 1935-1945.

CAPÍTULO 2

Aspectos teóricos sobre el fenómeno de moiré.

2.1 Introducción.

En el presente capítulo, se explica y formula matemáticamente el fenómeno de moiré que es empleado para generar franjas de interferencia. También se dan las bases que describen el efecto de Talbot, el cual es el corazón del presente trabajo. El capítulo lo complementa el Apéndice B, donde explica el fenómeno de la interferencia, que es la base en la cual se fundamenta la metrología óptica. Dicho fenómeno también es importante en diferentes áreas de la física y la biología, principalmente.

La característica de las técnicas de moiré, y por tanto de la utilización del efecto Talbot, es que el patrón de franjas obtenido, representan contornos de altura constante en el objeto, por lo que la posición de dichos contornos, analizados digitalmente arrojarán resultados que pueden ser presentados en forma gráfica o numérica.

2.2 Óptica de moiré.

Las franjas de interferencia (figura 2.1) producidas por dos fuentes de luz monocromática, han sido usados ampliamente en los sistemas de medición de longitud mas refinados, incluyendo la estabilización de la longitud fundamental estándar en términos de la longitud de onda de la luz.

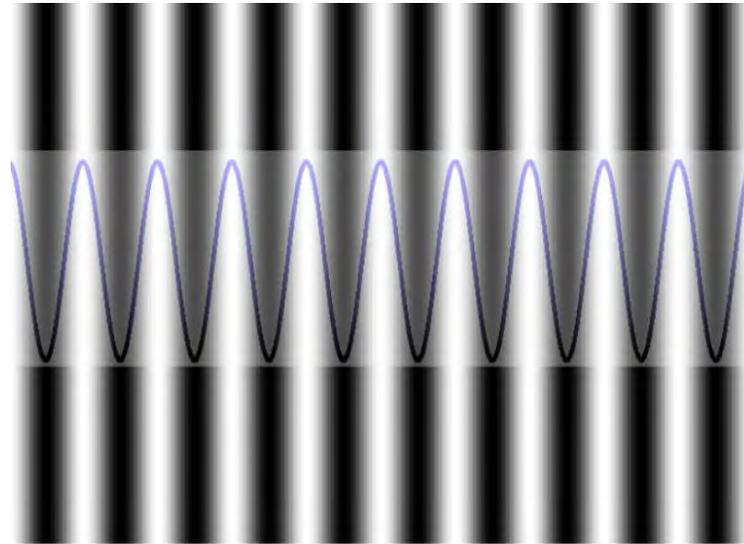


Figura 2.1. Patrón de interferencia de un tren de ondas

También es posible producir franjas mediante el uso de luz blanca y de dos rejillas de aproximadamente igual frecuencia, superpuestas entre sí con una ligera rotación entre sus planos paralelos y observándolas bajo una luz difusa, y es entonces que se producen y se observan las franjas de moiré. Las franjas de moiré han sido utilizadas en la industria de la seda desde la edad media como una forma de control de calidad¹. En metrología óptica, se analizan objetos de fase, los cuales deforman el frente de onda de la luz transmitida, debido a fenómenos ópticos que infieren directamente con la propagación de un haz de luz tales como, interferencia, difracción, refracción y reflexión, principalmente. En este campo existen varias técnicas que se basan en diferentes tipos de fenómenos, entre ellos la utilización del fenómeno de moiré en interferometría.

El fenómeno de moiré se base en la superposición de dos rejillas de periodo similar y estas provocan la difracción de la luz incidente sobre ellas. Muchos autores concluyen que el límite en la concepción entre onda y partícula esta definido por la diferencia entre interferencia y difracción. En palabras simples, mientras que la interferencia es la combinación por superposición de dos o más ondas en un punto específico del espacio, la difracción solo es la desviación sufrida por las ondas alrededor de los bordes de una barrera u obstáculo provocado cuando una porción de un frente de onda choca o se interrumpe en su trayectoria con estos².

Para obtener un patrón de moiré, requerimos de superponer rejillas de difracción de relativa baja frecuencia. El efecto moiré denota un patrón de franjas formadas por la superposición de dos rejillas de periodo similar. Una rejilla de Ronchi es una rejilla de difracción la cual consta de una serie de líneas sobre una superficie plana y transparente, generalmente de separación constante entre ellas. Dichas rejillas de difracción son ralladas en su mayoría sobre superficies de vidrio o películas y consisten en familias de surcos paralelos formando curvas de primero, segundo o de más alto orden. Normalmente tienen surcos que forman una línea recta en frecuencias del orden de varios miles o cientos de líneas por centímetro o pulgada (Figura 2.2).

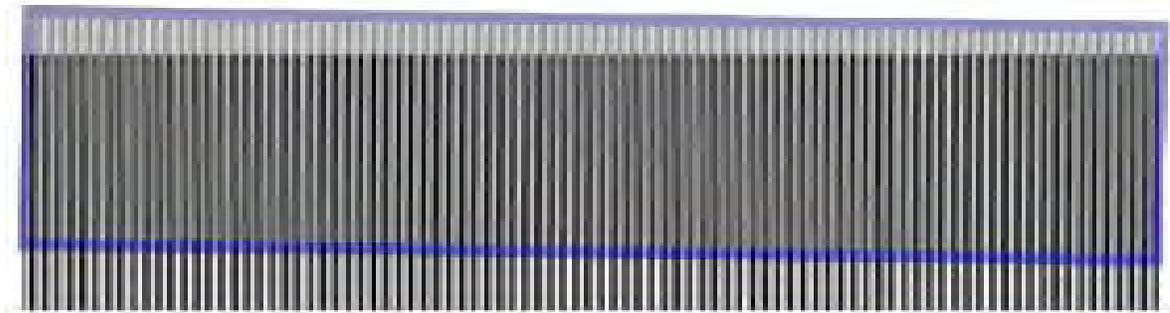


Figura 2.2. Rejilla de Ronchi.

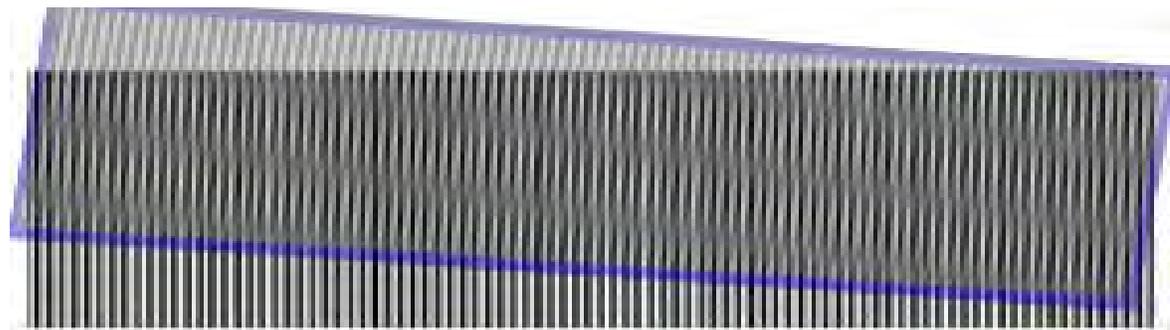
Es posible observar claramente las franjas de moiré sin ningún equipo óptico especial, siempre y cuando las rejillas usadas sean de baja frecuencia, de preferencia que no excedan de 1000 líneas por pulgada. La explicación de la formación de las franjas de moiré basadas en la obstrucción de la luz, y asumiendo una propagación rectilínea de la luz, no excluye la existencia de los fenómenos de difracción e interferencia óptica. La preponderancia de alguno de los dos fenómenos, depende del tipo de iluminación que acompaña a la rejilla.

La figura 2.3 (a) a 2.3 (c), muestra un patrón de moiré formado por dos rejillas idénticas rotadas entre sí por pequeños ángulos θ diferentes e iluminadas por luz difusa. El patrón

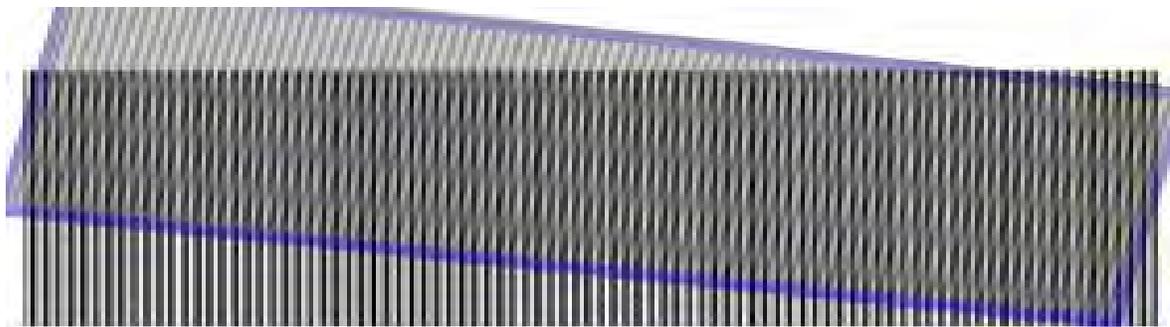
de moiré es debido solamente a la variación en la intensidad de la luz atravesando sucesivamente las dos rejillas.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.3. De la (a) a la (c), patrones de moiré formados por dos rejillas idénticas de líneas equidistantes y paralelas, giradas a diferentes ángulos una con respecto a la otra que está fija; observe que a medida que el ángulo se incrementa, el número de franjas se incrementa.

Cuando se tienen dos rejillas idénticas sin desplazamiento angular, las franjas de moiré son formadas si la inclinación o elevación o bien la deformación de una de las rejillas cambia debido a una fuerza externa aplicada. Si dicha deformación es en dirección a la normal de las líneas, las franjas de moiré serán paralelas a las líneas de la rejilla. Si la deformación es paralela a la dirección de las rallas, no será formado el patrón de moiré. Una deformación aplicada en dirección oblicua a las rallas puede analizarse en dos componentes de traslación, una normal y otra paralela a las rallas. Mientras la componente normal forma las franjas de moiré, la componente paralela no contribuirá al patrón de moiré. Las franjas de moiré también se logran cuando una de las rejillas se desplaza angularmente con respecto a otra del mismo periodo. El patrón de moiré, formado por el desplazamiento angular, son desviaciones de la normal que forman las rallas de una de las rejillas por un ángulo igual a la mitad del desplazamiento angular de la rejilla en cuestión. Por tanto el patrón de moiré formado por pequeños desplazamientos angulares está orientado esencialmente en dirección perpendicular.

Otro fenómeno que producen las franjas de moiré y el cual se utiliza para medir desplazamientos, se genera cuando una de las rejillas se mueve en su propio plano mientras que la otra permanece fija en relación con el observador. Las franjas se mueven a través del campo en la dirección a la cual es normal a las rallas de la rejilla y el número de franjas que pasan en cualquier punto del campo es igual al número de las rallas o líneas de la rejilla en movimiento que pasa por el mismo punto. Si cada rejilla es rígidamente sujeta a una de las componentes en movimiento relativo de una estructura cualquiera, es posible medir el desplazamiento relativo de las dos componentes en términos de la inclinación o deformación de las rallas, contabilizando el número de franjas que pasan en algún punto fijo de la rejilla o por los ciclos de brillo en el mismo punto.

Por tanto, los cambios producidos en la separación, dirección y posición de las franjas, son relativamente grandes comparadas con la respectiva deformación o movimiento de la rejilla que produce estos cambios. Entonces, la naturaleza de dos rejillas superpuestas produce una gran sensibilidad lo cual significa la posibilidad de medir pequeños desplazamientos lineares y angulares ó expansiones de la rejilla.

A lo largo de los años se han ido refinando las técnicas basadas en el fenómeno de moiré, hasta llegar al punto actual donde, con la ayuda de los algoritmos altamente desarrollados para el procesamiento digital de imágenes, específicamente en lo que se refiere al análisis de los patrones de franjas, se ha logrado la simulación de muchas de las situaciones físicas que se desean estudiar. La mayoría de los autores especialistas en el campo, distinguen básicamente cinco formas de técnicas de moiré: moiré holográfico, moiré por sombras o conocido como shadow moiré, moiré por contacto, moiré por reflexión y moiré por proyección. Cada una de estas tiene fortalezas y debilidades con respecto a las otras, sin embargo, el moiré holográfico quizá sea el que implique mayor costo, tiempo y precisión para realizar el experimento; por el contrario, el moiré por proyección y por sombras, quizá sean las técnicas de mayor facilidad para implementarlas además de su bajo costo y precisión.

Como se ha venido explicando en párrafos anteriores, es posible obtener un patrón de franjas de moiré superponiendo dos rejillas de transmisión lineal como las mostradas en la figura 2.3 (a), o bien cuando la deformación de alguna de las rejillas cambia debido a la aplicación de una fuerza externa. Entonces, es posible obtener un patrón de moiré proyectando una rejilla sobre una superficie y posteriormente superponiendo la misma rejilla de referencia sin deformación. El principio de dicha técnica se utiliza en la técnica de proyección de franjas.

Si iluminamos una rejilla con un haz de luz coherente (un láser) y aplicamos el principio del fenómeno de Talbot, será posible colocar un objeto en alguno de los planos donde se replica la rejilla y con ello obtener una rejilla proyectada sobre un objeto. Posteriormente, capturando la imagen de la rejilla sobre el objeto con la ayuda de una CCD, es posible obtener franjas de moiré de baja frecuencia y, a partir del análisis de dichas franjas, obtener información acerca de la topografía del objeto.

El principio descrito, es el que se utilizará para la caracterización de gasket. Para comprender el principio en el que se basa esta técnica, se requiere definir matemáticamente

el fenómeno de moiré, el efecto Talbot y la interferometría de Talbot. Los siguientes apartados del presente capítulo y el siguiente, intentan explicar lo anterior. Para definir física y matemáticamente el fenómeno de moiré, existe en la literatura tres tratamientos principales: desde el punto de vista geométrico, desde la formulación indicial y la formulación física.

2.2.1 Formulación física

Como se ha mencionado en varias ocasiones, el fenómeno de moiré se presenta al superponer dos objetos periódicos tales como un par de rejillas de Ronchi. Si una de las rejillas $G1$ va a deformarse en función del objeto bajo estudio, se puede definir como la rejilla objeto, mientras que la otra rejilla $G2$ permanecerá sin alteración alguna y entonces puede nombrarse como rejilla de referencia. La operación de superposición, puede realizarse de las siguientes formas: como suma, resta, multiplicación y división, las cuales corresponden a una superposición aritmética; la superposición lógica se realiza con dos operadores: and y or. La derivación de la fórmula básica basada en el patrón de moiré de forma incoherente, entre dos rejillas $G1$ y $G2$, emplea la superposición multiplicativa^{3,4}, y los parámetros que intervienen en esta se muestran en la figura 2.4.

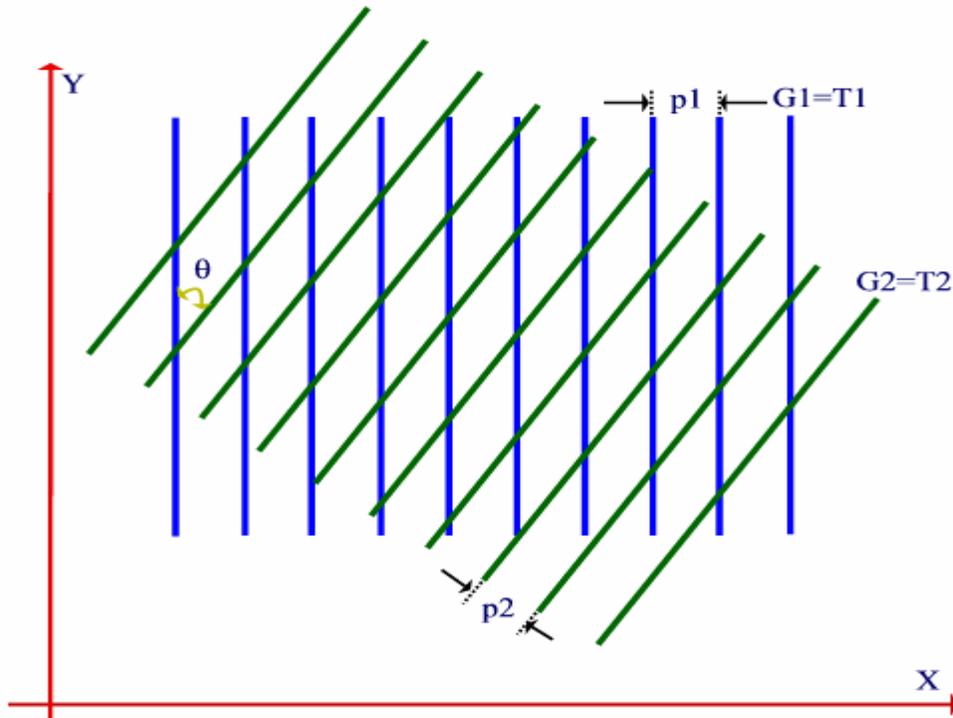


Figura 2.4. Patrón de moiré formado por dos rejillas de Ronchi G1 y G2.

La transmitancia de las rejillas puede representarse como

$$T_1(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} n [x - f_1(x, y) - \delta_1] \right\}. \quad 2.1a$$

$$T_2(x, y) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left\{ \frac{2\pi}{d_2} n [(x - f_2(x, y) - \delta_2) \cos \theta - y \sin \theta] \right\}. \quad 2.1b$$

donde, de acuerdo con la teoría escalar de la difracción

a_0, a_m, b_0, a_n son los coeficientes de Fourier de la distribución de intensidad en el perfil de las líneas de la rejilla.

$f_1(x, y), f_2(x, y)$ son las deformaciones locales de las líneas de las rejillas.

δ_1, δ_2 son los desplazamientos en plano de las rejillas.

θ es el ángulo entre las líneas de las rejillas.

p_1, p_2 son los periodos de las rejillas.

Se puede observar, que la fase de la función de transmitancia de la rejilla que esta inclinada, tiene una componente en x y una componente en y que corresponden a la proyección sobre los ejes. Esto es

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{y}{\text{hipotenusa}} \\ \sin \theta &= \frac{x}{\text{hipotenusa}} \\ \frac{x}{y} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \\ \therefore \tan \theta &= x \cos \theta - y \sin \theta = \Delta \phi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

que es la fase del patrón de interferencia (ver apéndice B).

Entonces, como se emplea la superposición multiplicativa para analizar el patrón de moiré, la transmitancia resultante de empalmar las rejillas en es producto de ambas transmitancias (ecuación 2.1 a y b), esto es

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T_1(x, y) \cdot T_2(x, y) \\ T(x, y) &= \left\{ a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1] \right\} \right\} \cdot \\ &\quad \left\{ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_2} n [(x - f_2(x, y) - \delta_2) \cos \theta - y \sin \theta] \right\} \right\} \tag{2.3} \\ T(x, y) &= a_0 b_0 + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_2} n [(x - f_2(x, y) - \delta_2) \cos \theta - y \sin \theta] \right\} \\ &\quad + b_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1] \right\} + \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1] \right\} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_2} n [(x - f_2(x, y) - \delta_2) \cos \theta - y \sin \theta] \right\} \end{aligned}$$

El único término que cobra interés es el primero y el último de la ecuación 2.3, ya que los términos restantes representan información acerca de las rejillas o información de fondo. El primer término representa la componente de DC o de bias, es decir, un término constante en función de la amplitud de las transmitancias multiplicadas, mientras que el último término representa el patrón de moiré buscado. Aplicando la identidad

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

donde

$$A = \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1]$$

$$B = \frac{2\pi}{p_2} n \{ [x - f_2(x, y) - \delta_2] \cos \theta - y \sin \theta \}.$$

por lo tanto

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1] + \frac{2\pi}{p_2} n \{ [x - f_2(x, y) - \delta_2] \cos \theta - y \sin \theta \} \right\} + \\ \cos \left\{ \frac{2\pi}{p_1} m [x - f_1(x, y) - \delta_1] - \frac{2\pi}{p_2} n \{ [x - f_2(x, y) - \delta_2] \cos \theta - y \sin \theta \} \right\} \end{array} \right\}. \quad 2.4$$

El primer término de la expresión 2.4 representa una alta frecuencia, por lo que no tiene interés para el análisis que se está realizando. El segundo término representa una baja frecuencia y para el patrón de moiré importan los términos de baja frecuencia por lo que se puede expresar el patrón de forma general como

$$T_m = K_1 + K_2 \cos(A - B) \quad 2.5$$

donde K_1 representa un término de DC o bias, el cual se puede observar de los términos constantes obtenidos en 2.3 y comentados en el párrafo anterior; K_2 también es un término constante producto de los coeficientes $a_m a_n$.

La expresión dada por 2.5 puede obtenerse, alternativamente, al realizar un análisis de la transmitancia de las rejillas desde el punto de vista de la teoría de comunicaciones. Para llegar a estas analogías, primero es importante explicar que es lo que sucede en el laboratorio cuando deseamos repetir el experimento de la interferencia de dos ondas. Si utilizamos una fuente de iluminación puntual la cual apunta a una rejilla de difracción, observaremos a campo lejano o de Fraunhofer, una distribución de máximos y mínimos conocido como patrón de difracción. Precisamente el detalle se encuentra en la rejilla que se utiliza ya que idealmente pensamos en una serie de líneas verticales y equidistantes entre si. Matemáticamente esta rejilla es un medio que interfiere en la trayectoria que sigue la luz a través del espacio y por tanto será una función que de alguna manera altera y modifica la ecuación de onda que describe la luz. Pues bien, esta rejilla se puede considerar como una transparencia que gradualmente varía de un máximo a un mínimo en cuanto a la cantidad de luz que permite pasar a través de ella. Por tanto, esta transparencia debe estar normalizada entre 0 y 1 ya que precisamente una transmitancia de 0 significa no permite pasar la energía de la onda luminosa y una transmitancia de 1 significa que permite pasara totalmente a la onda viajera. Ahora bien, una de las funciones matemáticas mas sencillas cuyos valores oscilan entre un rango de +1 y -1, son las funciones de tipo senoidal. Una de ellas es el coseno. Por tanto una primera aproximación a la rejilla real que usemos, sera una función coseno la cual debe estar normalizada a un valor entre 0 y 1, que son los valores de la transmitancia ya que no existen transmitancias negativas, es decir, no tiene significado alguno; por tanto, sumamos un 1 a la función coseno y se rectifica a la función coseno por lo que matemáticamente se tiene, en una dimensión

$$T(x) = \frac{1 + m \cos(2\pi f_o x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p} x\right). \quad 2.6$$

La figura 2.5, muestra la diferencia que existe al superponer, en forma multiplicativa, dos rejillas cuya ecuación es de la forma 2.6. En ambos casos obtendremos como resultado una función de tipo senoidal cuyos máximos y mínimos oscilan entre 0 y 1.

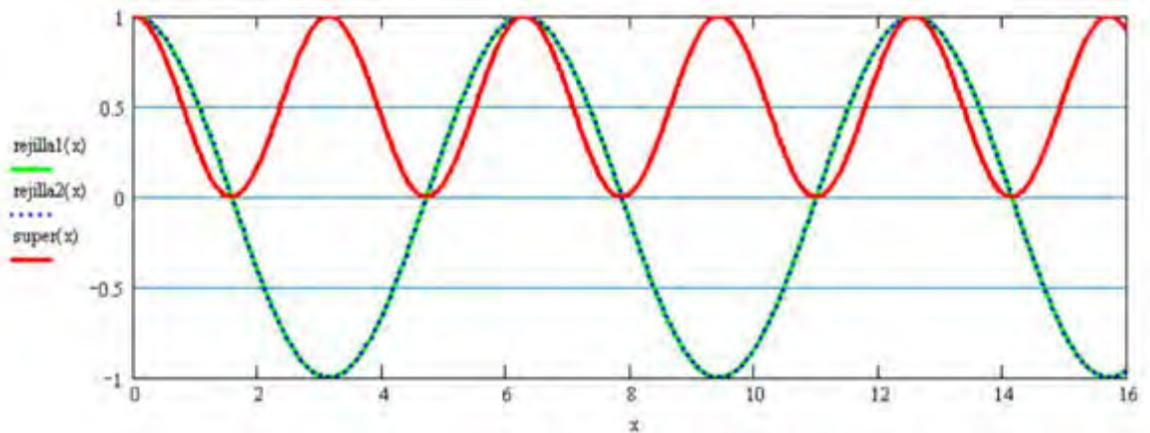


Figura 2.5a. Resultado de superponer dos rejillas cosenoidales y su correspondiente resultado. Observe que las rejillas toman valores negativos lo que estaría en contra de la definición de la transmitancia

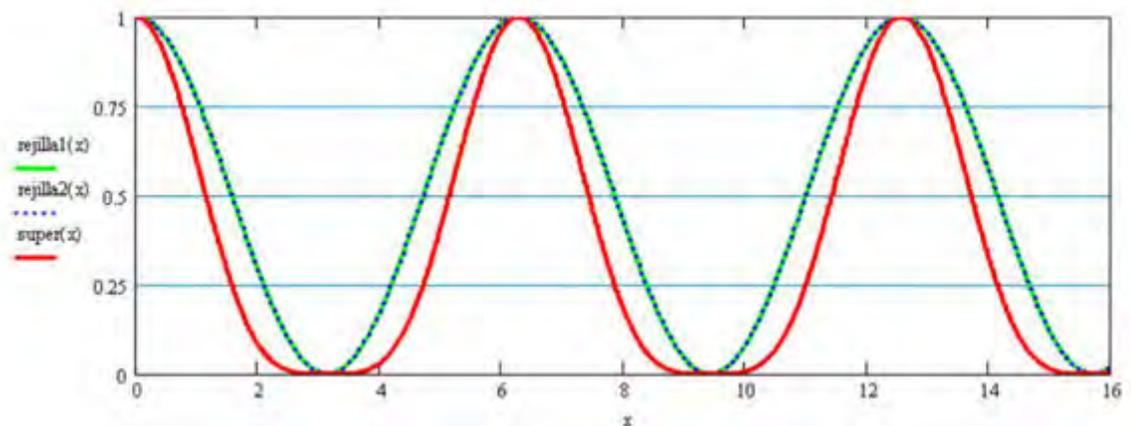


Figura 2.5b. En la parte inferior, se muestra el mismo resultado pero ahora con la función de transmitancia de las rejillas de la forma de la ecuación 2.6; se puede ver que, en este caso, no hay valores negativos de las transmitancias, por lo que correspondería a una simulación real de la rejilla. En ningún caso el resultado de la superposición de ambas rejillas es negativo.

En la ecuación 2.6, m indica el grado o coeficiente de modulación, el cual es un término utilizado en comunicaciones⁵ para describir la cantidad de cambio (modulación) presente

en una forma de onda de AM y análogamente nos indica el cambio en la señal cosenoidal de la rejilla. En si, el coeficiente de modulación no es otra cosa mas que la función de transferencia del sistema, es decir, la relación de la señal de salida con respecto a la señal de entrada. Dicho índice de modulación corresponde a una onda coseno de frecuencia simple de aquí que es un parámetro que indica la visibilidad de las franjas que fue definida por Michelson. Si se analiza la ecuación B.48 del apéndice B, se observa que la intensidad varía con el cuadrado del coseno de la fase de las ondas que interfieren, por lo que el perfil senoidal se mantiene y los cambios entre máximos y mínimos suceden de una forma más rápida y de aquí que la visibilidad es

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad 2.7$$

Entonces, la ecuación 2.6 representa una transmitancia o rejilla de tipo cosenoidal. A medida que la rejilla física se acerque a una rejilla de Ronchi ideal (es decir, con líneas verticales perfectamente delimitadas), la función coseno variara rápidamente entre cero y uno y se tendrán mas órdenes de difracción en el patrón de interferencia al observarlo en campo lejano.

La ecuación 2.6 tiene su similar en la teoría de comunicaciones. Desde este punto de vista representa a la modulación en amplitud o AM de doble banda lateral. Una señal ordinaria, modulada en amplitud de doble banda lateral, usualmente se expresa en la forma⁶

$$f(t) = K \cos(\omega_c t) + Km(t) \cos(\omega_c t). \quad 2.8$$

donde $m(t)$ es una señal de banda limitada conocida como moduladora o bien la señal que contiene la información que se desea transmitir y $\omega_c = 2\pi * f_c = \frac{2\pi}{P_1}$ indica la frecuencia (normalizada a 2π radianes) de la señal cosenoidal o bien de la señal portadora que es la señal por la cual se transfiere la información, la cual se contendrá en la medida en que la

señal portadora varíe su amplitud, de ahí el nombre. K simplemente representa las amplitudes pico tanto de la señal moduladora como de la portadora.

En teoría de comunicaciones electrónicas, se tiene la modulación en amplitud de doble banda lateral y con portadora suprimida, la cual modifica la ecuación 2.8 en un término, la cual se expresa simplemente como

$$f(t) = Km(t)\cos(\omega_c t). \quad 2.9$$

Como se mencionó en párrafos anteriores, el coeficiente de modulación se puede considerar como la función de transferencia del sistema, esto es, para una señal modulada en amplitud se tiene

$$m = \frac{E_m}{E_c}. \quad 2.10$$

donde E_m es el cambio pico en la amplitud del voltaje de la forma de onda de salida y estado en volts y E_c es la amplitud pico del voltaje de la portadora no modulada también en volts. Ahora bien, el porcentaje de modulación M , es simplemente el índice de modulación presentado en forma porcentual, esto es

$$M = \frac{E_m}{E_c} \cdot 100. \quad 2.11$$

Las relaciones entre m , E_m y E_c se muestran en la figura 2.6. Si la señal modulante es una onda seno y el proceso de modulación es simétrico (es decir, si las variaciones positivas y negativas de la amplitud de la envolvente son iguales), el porcentaje de modulación puede derivarse, a partir de la figura 2.6, como

$$E_m = \frac{1}{2}(V_{max} - V_{min})$$

$$E_c = \frac{1}{2}(V_{max} + V_{min}).$$
2.12

y por tanto

$$M = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}} \cdot 100.$$
2.13

donde $V_{max} = E_c + E_m$ y $V_{min} = E_c - E_m$.

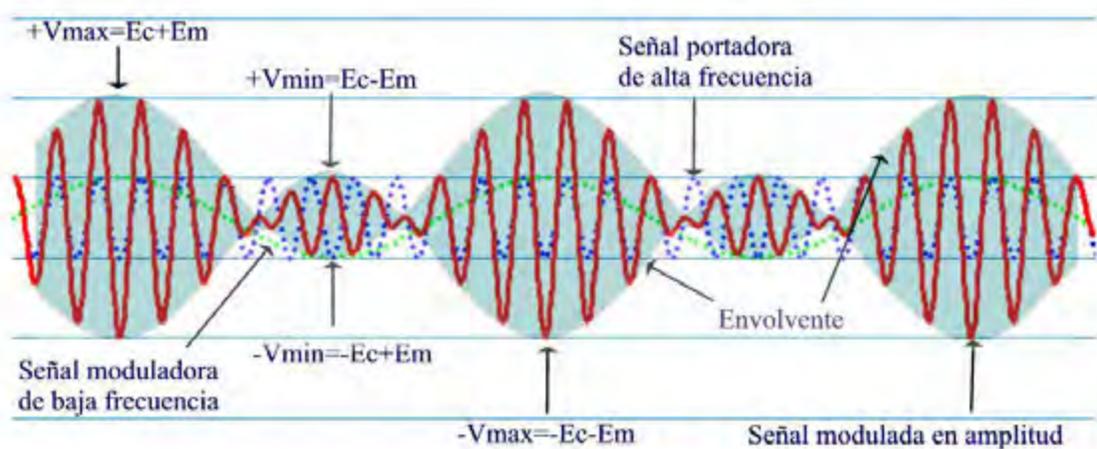


Figura 2.6. Coeficiente de modulación, E_m y E_c .

Si se compara la ecuación 2.13 con la ecuación 2.7, se puede observar la similitud tan grande que guardan ambas y además es lógico pensarlo ya que mientras el índice de modulación proporciona una relación de amplitudes de la onda modulada en función de la portadora y la moduladora, la visibilidad da información acerca de la variación en intensidad del patrón de difracción en un punto dado.

Continuando con las comparaciones, si ahora se observa la ecuación 2.6 y 2.9, se puede decir que ambas representan una distribución de la energía contenido en las ondas

interferentes, en función del coseno de la frecuencia de una de las funciones que describen a las ondas. En otras palabras, mientras que en el caso de la amplitud modulada tenemos una amplitud resultante de la señal modulada directamente proporcional a la amplitud de la señal moduladora, en la interferencia tendremos que la transmitancia será directamente proporcional a la amplitud de la frecuencia de la rejilla mas un término constante que representaría un bias o un DC, o sea, una amplitud constante cuyo valor depende de la amplitud de las ondas que interfieren entre sí. Lo importante no es esta comparación visual, sino los resultados físicos y matemáticos a los que se llegan. Se va a corroborar que al superponer dos rejillas cuya transmitancia es de la forma de la ecuación 2.6, va a arrojar como resultado una serie de términos que implican diferentes frecuencias además de términos constantes; a fin de cuentas, de todos estos términos, solo interesan para el estudio de las franjas de moiré aquellos de baja frecuencia y los que se conocen como DC o bias.

Entonces ambas rejillas o transmitancias que van a formar el patrón de moiré, las podemos expresar como

$$T_1(x, y) = a + b \cos\left(\frac{2\pi x}{p_1}\right) \quad 2.14$$

$$T_2(x, y) = a + b \cos\left[\frac{2\pi}{p_2}(x \cos \theta - y \sin \theta)\right]. \quad 2.15$$

donde la ecuación 2.14 representa a la rejilla paralela al eje Y , mientras que la ecuación 2.15 corresponde a la rejilla inclinada un ángulo θ respecto al eje Y , tal como lo muestra la ecuación B.69 del apéndice B. Nuevamente, aplicando la superposición multiplicativa, se tiene la expresión

$$T(x, y) = T_1(x, y) \cdot T_2(x, y) = [a + b \cos(A)] \cdot [a + b \cos(B)].$$

donde

$$A = \frac{2\pi}{p_1} x \quad y \quad B = \frac{2\pi}{p_2} [x \cos \theta - y \sin \theta].$$

por lo que se tiene un resultado

$$T(x, y) = a^2 + ab \cos A + ab \cos B + b^2 \cos A \cos B.$$

aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

se obtiene

$$T(x, y) = a^2 + ab \cos A + ab \cos B + \frac{1}{2} b^2 \cos(A+B) + \frac{1}{2} b^2 \cos(A-B) \quad 2.16$$

Esta ecuación presenta similitudes con la ecuación 2.3 y 2.4. En 2.16 el primer término representa una constante; los siguientes dos términos, proporcionan información de las dos rejillas o transmitancias T_1 y T_2 , respectivamente; el penúltimo término es una alta frecuencia y el último término proporciona información de baja frecuencia. Por lo tanto y enfatizando lo comentado anteriormente, para el análisis del patrón de moiré solo interesan los términos de baja frecuencia, ya que las franjas que se presentan precisamente corresponden a una baja frecuencia con respecto a la frecuencia de las rejillas. También se incluye en el estudio el término constante que, como ya se dijo, es un DC o el bias. Por tanto, podemos rescribir la ecuación 2.16 solo con los términos que interesan, por lo que

$$T_m = K_1 + K_2 \cos(A-B) \quad 2.17$$

y la ecuación 2.17 describe el patrón de moiré.

El análisis espectral o de Fourier de esta última ecuación similar al que se obtiene al aplicarlo a la modulación en amplitud, el cual ha sido estudiado generosamente en la literatura. Comparando las ecuaciones 2.5 y 2.17, en ambos casos, interesa la componente de mas baja frecuencia que esta representada por el argumento $(A-B)$. Las condiciones necesarias para que se forme el patrón de Moiré, se pueden resumir como sigue:

- El ángulo θ debe ser muy pequeño.
- Las funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$, en la ecuación 2.5, cambian lentamente, o bien, la deformación en x y en y , en la ecuación 2.17, cambia lentamente.

Ahora bien, de ambas ecuaciones se puede conocer el espaciamiento de las franjas, la orientación y el perfil de las mismas. Suponiendo que le término de baja frecuencia es igual a $2\pi \cdot l$ se tiene que

$$A - B = 2\pi \cdot l \quad \text{donde } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{que indica el índice u orden de la franja de moiré.}$$

Por lo tanto, de 2.17

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{p_1} x - \frac{2\pi}{p_2} (x \cos \theta - y \sin \theta) &= 2\pi \cdot l \\ \therefore \left(\frac{1}{p_1} - \frac{\cos \theta}{p_2} \right) x - \frac{\sin \theta}{p_2} y &= l \end{aligned} \tag{2.18}$$

La ecuación 2.18 proporciona información acerca del espaciamiento y la orientación de las franjas de moiré. Un caso especial se presenta cuando $\theta = 0$ por lo que

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) x = l$$

y si además el periodo de las rejillas son iguales, entonces el periodo de las franjas de moiré sería muy grande tendiendo a infinito, por lo cual a dicho modo de trabajo se conoce como modo infinito.

2.2.2 Extracción de información.

Uno de los principales objetivos de aplicar técnicas ópticas no destructivas para caracterizar objetos tridimensionales, es medir la mayor cantidad de variables físicas que interactúan con la muestra en cuestión. Las técnicas basadas en el efecto de moiré, son adecuadas para medir desplazamientos, contornos, deformaciones, fracturas entre otras magnitudes físicas las cuales se pueden medir al filtrar la frecuencia espacial fundamental que genera el patrón de moiré. El efecto de superponer dos rejillas, una conocida como objeto y otra como de referencia, las cuales contienen una frecuencia fundamental, generarán el patrón de moiré de baja frecuencia que provoca que la intensidad de la luz se encuentre modulada creando patrones con propiedades homogéneas independientemente de su origen. Como ya se menciono con anterioridad, esta explicación tiene semejanza con el proceso de modulación en amplitud para transmisión de información. En este caso se tiene una información de baja frecuencia que se desea transmitir; esta onda se mezcla con una función conocida como onda portadora de muy alta frecuencia en comparación con la onda moduladora o de información. El resultado es una señal de muy alta frecuencia (la frecuencia de la portadora), es una onda cuya envolvente mantendrá la forma de la onda moduladora y cuya frecuencia será la de la onda portadora tal como se puede observar en la figura 2.6. En otras palabras las variaciones en amplitud de la onda modulada (la onda mezclada) es directamente proporcional a la amplitud de la onda moduladora. La señal modulada tendrá características físicas independientes de las ondas generadoras (moduladora y portadora) pero guardara una relación directa a la amplitud de la moduladora y a la frecuencia de la portadora, ya que dichos sistemas son lineales y una variación en uno de los parámetros de entrada influirá en el resultado obtenido a la salida.

Entonces, siguiendo en esta línea, la frecuencia fundamental de las rejillas generadoras del patrón de moiré, se puede representar por una portadora senoidal, al igual que en modulación en amplitud, y la variable temporal presente en AM, sin perder generalidad, puede ser uno de los ejes de coordenadas y entonces las ecuaciones correspondientes serán

$$T_1(x) = A_1 + B_1 \cos \frac{2\pi x}{p} \quad 2.19$$

donde p es el período de la rejilla no distorsionada. La ecuación de la rejilla objeto, cuyo perfil de líneas esta distorsionado será

$$T_2(x) = A_2 + B_2 \cos \frac{2\pi x}{p(x)} \quad 2.20$$

Entonces la frecuencia portadora modulada del patrón de franjas distorsionado puede escribirse como

$$\frac{2\pi x}{p(x)} = \frac{2\pi x}{p} + \varphi(x) \quad 2.21$$

donde $\varphi(x)$ es la función moduladora en fase. La portadora codifica la magnitud física que se requiere medir y al mismo tiempo se usa como detector. Por tanto, al igual que en la modulación por amplitud, la portadora correspondería a la rejilla no deformada y es la que va a contener la información dada por la moduladora que es representada por la rejilla deformada. Por tanto, las variaciones de la magnitud en la señal moduladora codificaran a la señal portadora y la información ira montada sobre dicha señal dando como resultado la señal modulada, como se observa de la ecuación 2.21.

La información de la magnitud física estará dada por la fase $\varphi(x)$ por lo que al analizar el patrón de franjas producido por la superposición de ambas rejillas, lo que interesa es obtener el dato contenido en la fase.

La intensidad de la luz es modulada debido a la superposición de ambas rejillas y el patrón de moiré obtenido estará dado por

$$I(x) = I_0 + I_1 \cos \varphi(x) \quad 2.22$$

donde $I(x)$ es la intensidad luminosa del patrón, I_0 se conoce como la intensidad de fondo e I_1 el término de modulación de la amplitud de intensidad de la luz, tal como se puede observar al analizar y compararla con las ecuaciones B.47 del apéndice B y 2.17, es decir, guardan significados físicos similares; en este conjunto de ecuaciones el factor común a todas ellas y el más importante es la fase. En cada uno de estos casos, la diferencia principal radica en la forma en que las constantes están definidas y la cual se puede conceptualizar como un DC o bias de la señal y una magnitud multiplicativa al término de fase.

$$I \propto |A|^2 = A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02} \cos(\Delta\phi)$$
$$T_m = K_1 + K_2 \cos(A - B)$$

2.2.3 Tipos de moiré

Existe en la literatura un número definido de técnicas de moiré por las cuales se puede obtener la información de superficies tridimensionales. En general, cualquier sistema que se forma por la superposición de dos estructuras periódicas o con una distribución de intensidad periódica, puede nombrarse como un sistema de moiré⁷. Básicamente las franjas de moiré pueden utilizarse como alternativa a los métodos holográficos y han ido incrementando su utilidad en el campo de la metrología. A continuación se describirán las diferentes formas de contorno por moiré haciendo énfasis en aquellas técnicas que son la base de los resultados experimentales documentados en la presente tesis.

2.2.3.1 Moiré por reflexión.

Esta técnica se utiliza para la medición de objetos que presentan una reflexión especular. El método proporciona información acerca de la inclinación y la curvatura de un objeto y se ha utilizado en la medición del problema de la flexión en láminas o placas delgadas al obtener la segunda derivada de la deflexión relacionada con los momentos de torsión y giro⁸. Para lograr esto, se requiere anteriormente haber obtenido los datos de la deflexión mediante las técnicas de moiré por sombreado o por proyección, las cuales se explicaran posteriormente y que son necesarias para aplicar la segunda derivada y así obtener la curvatura. La única desventaja del método es que el objeto debe ser especular. La figura 2.7 muestra de forma esquemática el montaje experimental, conocido como el arreglo de Ligtenberg, para la reflexión de moiré.

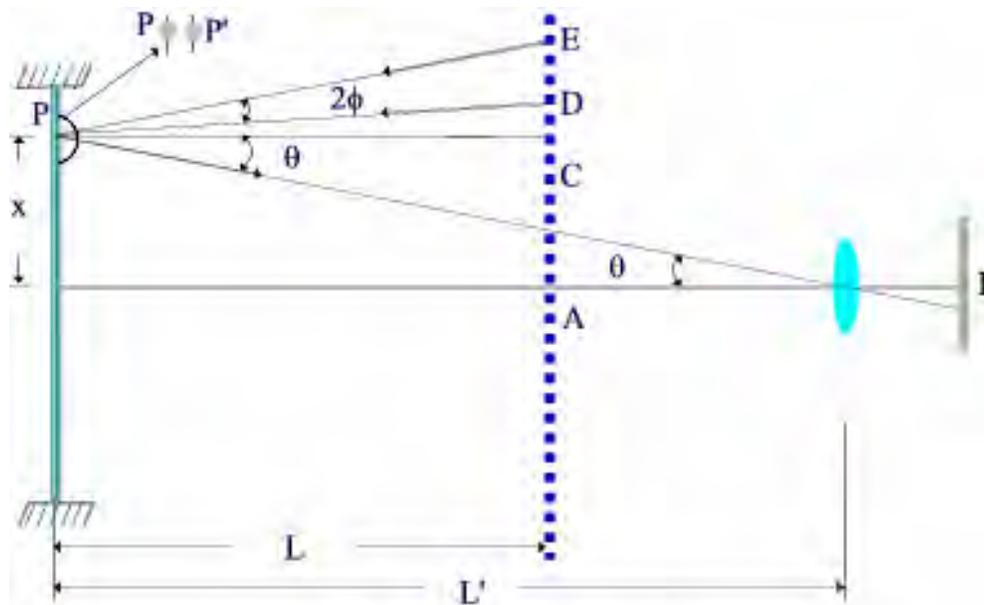


Figura 2.7. Moiré por reflexión: arreglo de Ligtenberg.

El esquema se explicará de forma escrita, sin la utilización de ecuaciones. La superficie de la placa es reflejante, por lo que una imagen virtual de la rejilla de referencia será formada. La figura 2.7 muestra un rayo partiendo del punto D de la rejilla, la cual es reflejada en el punto P del objeto al punto I correspondiente a la imagen del plano. En otras palabras, el

punto I es la imagen del punto D que se refleja en la superficie de la placa. Cuando la placa se deforma, el punto P se desplaza al punto P' . Si la inclinación local es φ , el punto I recibirá el rayo del punto E y la imagen del punto E será formada nuevamente en I . En realidad, una imagen de la rejilla vista como una reflexión es grabada en la placa. Esta imagen por si misma puede contener distorsiones debido a la no planicidad de la superficie de la placa. Después de que la placa ha sido deformada, la imagen nuevamente se graba en la misma placa fotográfica. La deformación provocará una ligera distorsión de la imagen de la rejilla y por tanto, se formará el patrón de moiré. El patrón de moiré será directamente proporcional a la derivada de la deformación dada a la placa. Matemáticamente se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Nb}{2L(1 + \tan^2 \theta)} = \frac{Nb}{2L\left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)} \quad 2.23$$

donde las variables involucradas se pueden observar en la figura 2.7, y N indica el orden de la franja de moiré formada y b es el período de las rejillas.

Si se desea eliminar la dependencia de esta derivada, se utiliza una rejilla curvada cuyas desventajas radican principalmente en las grandes dimensiones y la necesidad de utilizar rejillas de baja frecuencia espacial para obtener un buen contraste en el patrón de moiré. Por tanto, la aplicación se limita a problemas de carga estática y modelos con grandes flexiones.

2.2.3.2 Moiré holográfico

La interferometría holográfica es sensible a los cambios de la longitud del camino óptico del orden de 0.1λ y puede medir cambios del orden de 0.25λ donde λ es la longitud de onda de la fuente de iluminación⁹. Si λ fuese lo suficientemente grande entonces podría ser compatible con las tolerancias normales manejadas en el rubro de la ingeniería las cuales son del orden de 0.0001 pulgadas o de 25 μ m. Este tipo de longitudes de onda se

pueden encontrar en el infrarrojo del espectro electromagnético y en la banda ultrasónica de ondas elásticas de materiales densos. En ningún caso es viable grabar materiales utilizados para generar hologramas de una calidad aceptable para propósitos de medición. La holografía con la calidad necesaria para utilizarla en medición es posible cuando se utilizan en el proceso de grabado emulsiones fotográficas y esto limita el rango de longitudes de onda del orden de los $0.4\mu\text{m}$ a los $0.7\mu\text{m}$ por lo que resulta un método muy sensible.

El proceso químico del revelador fotográfico puede ser una fuente de error en los resultados que se obtengan por dicho método. El proceso de secado con la ayuda de materiales fotocromáticos ha sido exitosamente implementado en la holografía, pero su exposición a altos contenidos de energía permiten sólo la creación de hologramas en un área pequeña cuya aplicación se limita al almacenamiento de una alta densidad de bits.

2.2.3.3 Moiré por sombras.

Mejor conocido en la literatura como shadow moiré o contorno de moiré por sombreado. Es un sistema de medición fuera de plano. Lo primero que puede venir a la mente cuando hablamos del moiré por sombreado, es que el patrón de moiré se formará entre una rejilla real y la proyección de su sombra sobre el objeto bajo estudio por lo que es lógico pensar que la sombra de la rejilla en cuestión se deformará debido a la topografía del objeto, mientras que la rejilla de referencia formadora de la sombra, se mantendrá sin alteración alguna. Esta técnica de moiré se considera para mediciones fuera de plano y es muy útil en la recuperación de la topografía y el contorno de objetos tridimensionales. La rejilla que genera la sombra, será una rejilla lineal, de transmitancia binaria y estará colocada muy cerca del objeto bajo estudio y es entonces que se ilumina de tal forma que la sombra de la rejilla cubra a la muestra y pueda ser vista desde la perspectiva de la rejilla. Las franjas de moiré producidas describen líneas de contorno que representan la profundidad de la muestra; la técnica es una de las más sencillas de implementar ya que solo requiere de una rejilla y una fuente de luz. Esta fuente de iluminación, puede estar colocada a una distancia finita o infinita de la rejilla e iluminará oblicuamente a ésta, mientras que la dirección de observación deberá ser diferente a la de iluminación y es deseable que coincida con la

normal de la rejilla o bien sea simétrica con respecto a ella. Actualmente, el procesamiento digital de imágenes ha ido de la mano con el desarrollo de esta técnica gracias al alto crecimiento e implementación de algoritmos para el análisis de franjas y la obtención y desenvolvimiento de la fase y, por tanto, de la información contenida en las franjas. Una desventaja de esta técnica, en cuanto al tamaño de la muestra que se desea estudiar ya que debe ser al menos del mismo tamaño que la rejilla empleada para producir la sombra.

Otro aspecto importante se refiere a la sensibilidad del método ya que el periodo de la rejilla será tan pequeño como el límite determinado por la pérdida en la definición de la sombra de la rejilla, la cual se incrementa a medida que se aleja de la rejilla, sin embargo, no se debe perder el compromiso en cuanto a la posición de la rejilla con respecto del objeto. Uno de los factores que influyen se debe a la penumbra debido a la difracción al pasar la luz por la rejilla¹⁰.

En esta técnica existen dos variantes en cuanto a la forma de iluminación y observación se refiere las cuales han sido clasificadas en la literatura como iluminación y observación paralela e iluminación esférica o puntual y observación con una CCD colocada a una distancia finita¹¹.

Iluminación paralela y observación paralela.

El patrón de moiré se forma entre la rejilla y su sombra sobre el objeto. La figura 2.8 muestra el esquema utilizado para el moiré por sombreado para iluminación y observación paralela; una rejilla de referencia se coloca sobre el objeto.

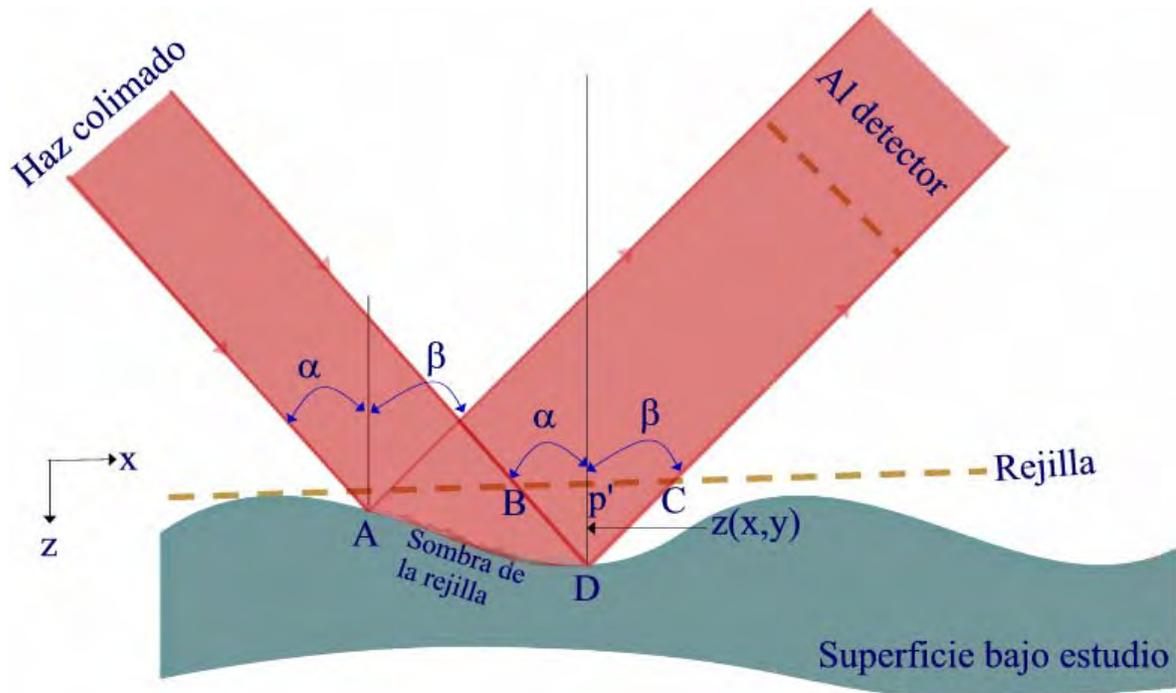


Figura 2.8. Esquema para el moiré por sombreado.

Sin perder generalidad, se puede asumir que el punto A sobre la superficie del objeto está en contacto con la rejilla. La rejilla es iluminada por un haz de luz colimado incidiendo a un ángulo α con la normal a la superficie de la rejilla (con referencia al eje Z) y es observado desde una posición en el espacio, la cual se considera infinita, a un ángulo β . De la figura 2.8 se puede observar que la distancia AB barre un área limitada por el segmento AD sobre la muestra. Los elementos de sombra contenidos en el segmento AD formarán el patrón de moiré al superponerse con los elementos contenidos en el segmento AC . Si se supone que AB y AC tienen una cantidad de elementos de p y q respectivamente. Por lo que $AB = pT$ y $AC = qT$ donde T corresponde al periodo de la rejilla. Por tanto, de la geometría de la figura 2.27 se tiene

$$BC = AC - AB = (q - p)T = NT \quad 2.24$$

donde

$N = q - p$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e indica el orden de las franjas de moiré.

También de la figura 2.8

$$BC = Bp' + p' C \quad 2.25$$

y las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{Bp'}{z} \\ \operatorname{tg}(\beta) &= \frac{p' C}{z} \end{aligned} \quad 2.26$$

combinando las ecuaciones 2.24, 2.25 y 2.26 se llega a

$$\begin{aligned} BC &= z[\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)] = NT \\ \therefore z &= \frac{NT}{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)} = z(x, y) \end{aligned} \quad 2.27$$

Cuando la observación es a lo largo de la normal de la rejilla ($\beta = 0$), entonces la ecuación se reduce a

$$z(x, y) = \frac{NT}{\operatorname{tg} \alpha} \quad 2.28$$

Cuando la rejilla se ilumina normalmente y se observa oblicuamente, entonces

$$z(x, y) = \frac{NT}{\operatorname{tg}(\beta)} \quad 2.29$$

Como ya se comentó, el método no es adecuado para objetos grandes, debido principalmente a que el haz de iluminación está colimado. De la ecuación 2.29, se puede obtener el intervalo del contorno, el cual es

$$\Delta z = \frac{T}{\text{tg}(\beta)} \quad 2.30$$

Iluminación paralela y observación a una distancia finita.

Se presenta cuando se utiliza luz divergente como fuente de iluminación. En general, tanto la fuente como la cámara estarán colocadas a diferentes distancias con respecto a la rejilla. Un caso especial (cuando la cámara y la fuente de iluminación se encuentran a iguales distancias), es de considerable importancia práctica. El esquema para implementar el método se muestra en la figura 2.9.

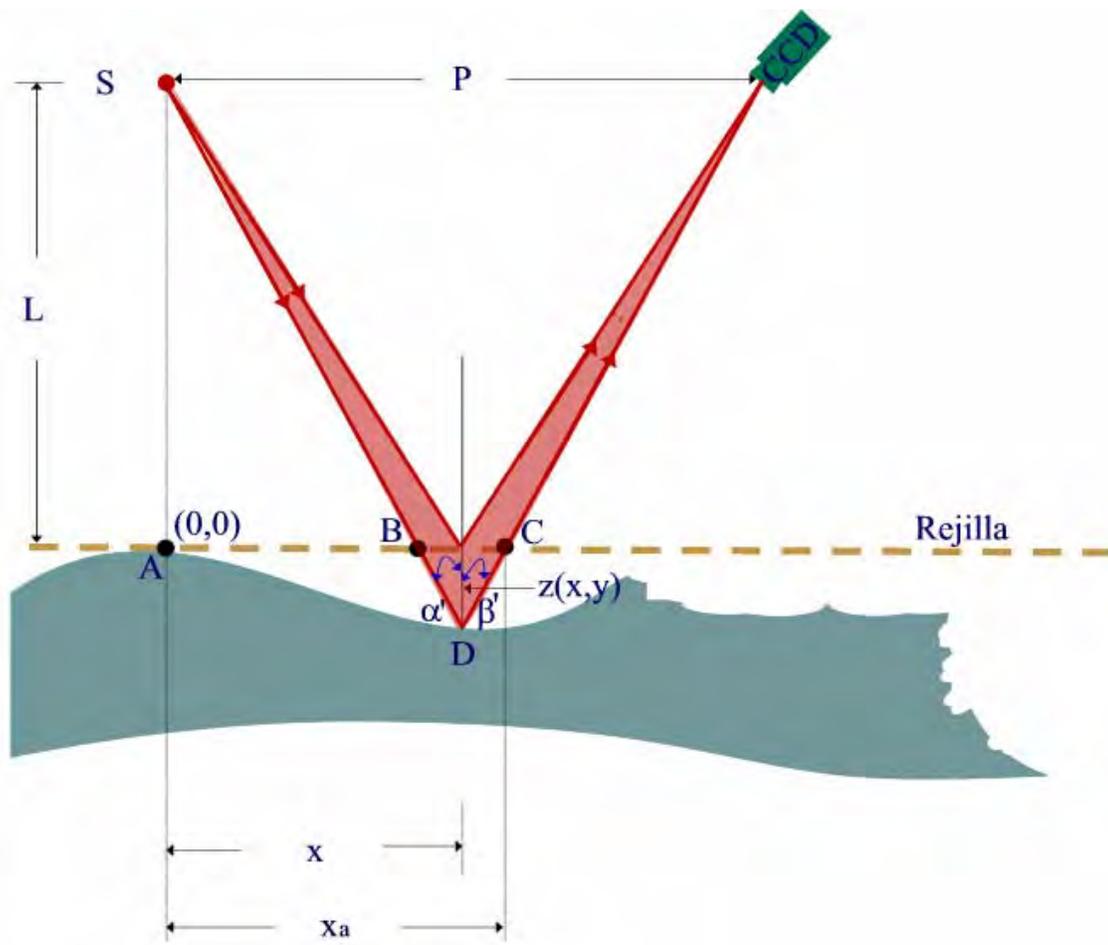


Figura 2.9. Método de shadow moiré con una fuente puntual de iluminación.

De la figura 2.9, la fuente puntual está colocada en el punto S y la cámara se encuentra a una distancia L con respecto a la rejilla y estos puntos están separados entre sí una distancia P . El objeto es iluminado por una onda divergente que parte de la fuente. Como en el caso anterior, el número de elementos de la rejilla contenido en el segmento AB es p y la sombra de la rejilla es proyectada sobre el segmento AD en el objeto bajo estudio. Estos elementos interactúan con los limitados en el segmento AC que corresponden a un número q , produciendo el patrón de moiré, por lo que $AB = pT$ y $AC = qT$ donde T corresponde al periodo de la rejilla. Si la N -ésima franja de moiré es observada en el punto D , entonces

$$BC = AC - AB = (q - p)T = NT \quad 2.31$$

Procediendo como en el apartado anterior, se llega a

$$z(x, y) = \frac{NT}{\operatorname{tg}(\alpha') + \operatorname{tg}(\beta')} \quad 2.32$$

De la figura 2.28 se obtienen las relaciones

$$\operatorname{tg}(\alpha') = \frac{x}{[L + z(x, y)]} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(\beta') = \frac{(P - x)}{[L + z(x, y)]} \quad 2.33$$

Sustituyendo 2.32 en la ecuación 2.31

$$z(x, y) = \frac{Na}{\frac{x}{L + z(x, y)} + \frac{P - x}{L + z(x, y)}} = NT \frac{L + z(x, y)}{P} \quad 2.34$$

Despejando z se llega a

$$\begin{aligned}
 z(x, y)P &= NTL + NTz(x, y) \\
 z(x, y)[P - NT] &= NTL \\
 \therefore z(x, y) &= \frac{NTL}{P - NT} = \frac{NT}{\frac{P}{L} - \frac{NT}{L}}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Si $P \gg NT$, entonces $\frac{P}{L} = \text{tg}(\alpha') + \text{tg}(\beta')$ y $z(x, y) = \frac{NT}{\text{tg}(\alpha') + \text{tg}(\beta')}$, por lo que

$\Delta z = \frac{T}{\text{tg}(\alpha') + \text{tg}(\beta')}$. La razón $\frac{P}{L}$ es llamada la razón de base-altura, ya que el método es aplicable al estudio de objetos grandes y es esencial corregir el error de perspectiva. Este error se debe a que las coordenadas (x, y) de un punto aparecen como (x_a, y_a)

$$\frac{x_a - x}{z(x, y)} = \frac{P - x_a}{L}
 \tag{2.36}$$

que es una aproximación por triángulos semejantes de acuerdo con la figura 2.8. Despejando x

$$\begin{aligned}
 x_a - x &= \frac{z(x, y)[P - x_a]}{L} \\
 x &= x_a - \frac{z(x, y)}{L}[P - x_a] \\
 x &= x_a \left[1 + \frac{z(x, y)}{L} \right] - \frac{z(x, y)P}{L}
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Similarmente

$$y = y_a \left[1 + \frac{z(x, y)}{L} \right] - \frac{z(x, y)P}{L}
 \tag{2.38}$$

En este tipo de arreglos, como ya se menciono, el tamaño de los objetos queda limitado al tamaño de la rejilla.

2.2.3.4 Moiré por proyección.

Debido a que la técnica de moiré por sombreado limita su aplicación al tamaño de la rejilla que se ilumina para generar el sombreado, como alternativa surgió la idea^{12,13} de que la sombra sobre el objeto proyectada por la rejilla pueda ser observada a través de otra rejilla y con ello se elimina la necesidad de producir rejillas grandes para cubrir muestras grandes. Al igual que el moiré por sombreado, es una técnica de medición fuera de plano. A grandes rasgos una de las maneras de implementar la técnica, consiste en dos rejillas de las cuales se obtendrá el patrón de moiré al superponerlas y generar contornos de nivel, los cuales están relacionados a la profundidad del objeto. Con la sombra de la rejilla y con técnicas de filtraje digital, se obtienen las mediciones así como mapas de contorno y deformaciones hechos a la muestra. Actualmente la rejilla de referencia se genera de manera virtual en la computadora al realizar el procesamiento de las franjas.

En esta técnica, una rejilla de alta frecuencia es utilizada y es proyectada sobre la superficie que se desea estudiar y re-proyectada sobre una rejilla de referencia idéntica a la rejilla proyectada y alineada paralelamente a ella¹⁴. Las franjas de moiré se forman en el plano de la rejilla de referencia. Se presentan dos casos:

- Cuando los ejes ópticos de la proyección y la observación son paralelos.
- Cuando los ejes ópticos están inclinados uno con respecto al otro.

Para el primer caso, de acuerdo con la figura 2.10, se forma la imagen de la rejilla $G1$ de período b en el plano de referencia donde su periodo es Mb , siendo M la amplificación del sistema de proyección. Asumiendo que los sistemas de proyección y de formación de la

imagen son idénticos, el ancho de las franjas de la imagen de la rejilla será igual al de $G2$ y los elementos de la rejilla serán paralelos uno con respecto a otro debido a la alineación inicial y entonces no se generará patrón de moiré alguno. Sin embargo, si la superficie que se analiza se deforma o es curva, la rejilla proyectada variara en su periodo y de aquí que se obtendrá un patrón de moiré. El análisis que se realiza al moiré por proyección, es similar al utilizado para el moiré por sombreado. Una de las diferencias es que el periodo de la rejilla es Mb en el plano de referencia y es iluminado por ondas esféricas a partir de la pupila de salida en el sistema de lentes de proyección. Por tanto, de acuerdo a lo descrito en el moiré por sombreado, se tiene

$$z(x, y) = \frac{NMb}{\text{tg}(\alpha') + \text{tg}(\beta')} = NMb \frac{L + z(x, y)}{P} \quad 2.39$$

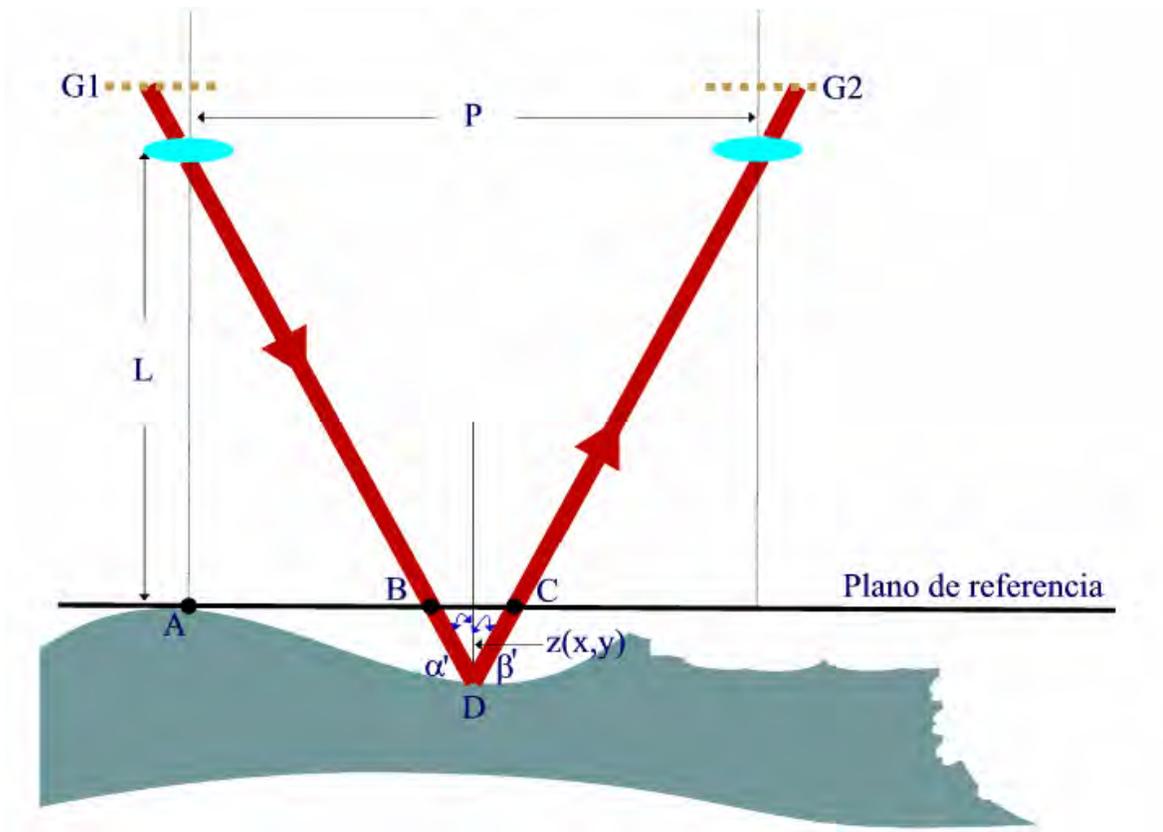


Figura 2.10. Método de proyección de moiré.

por lo que, despejando

$$z(x, y) = \frac{NMb}{P - NMb} L \quad 2.40$$

Escribiendo la amplificación del sistema formador de la imagen como $M = \frac{(L-f)}{f}$ donde f es la distancia focal, se tiene

$$z(x, y) = \frac{NbL(L-f)}{fP - Nb(L-f)} \quad 2.41$$

En esta ecuación 2.41, $z(x, y)$ corresponde a la profundidad del objeto en el punto donde el N-ésimo orden de las franjas de moiré es formado y el espaciado de las franjas de moiré no es constante. Sin embargo si se cumple que $Mb \ll P$, el patrón de moiré estará igualmente espaciado.

Una de las principales limitaciones¹⁵ del método de proyección de moiré es que produce resultados ambiguos acerca de la superficie bajo estudio, si esta presenta discontinuidades en su forma o contorno. Limitaciones similares se presentan cuando la superficie es afectada por alguna sombra o bien dos partes del objeto están separados por alguna región que se encuentra bajo sombras. En la actualidad existen algoritmos que intentan resolver el problema de franjas discontinuas producto de sombras o cambios bruscos en la topografía del objeto. Por otro lado, el método solo es útil para objetos pequeños. Sin embargo, cuando en el sistema de proyección, los ejes ópticos son inclinados (figura 2.11), objetos mayores pueden ser analizados.

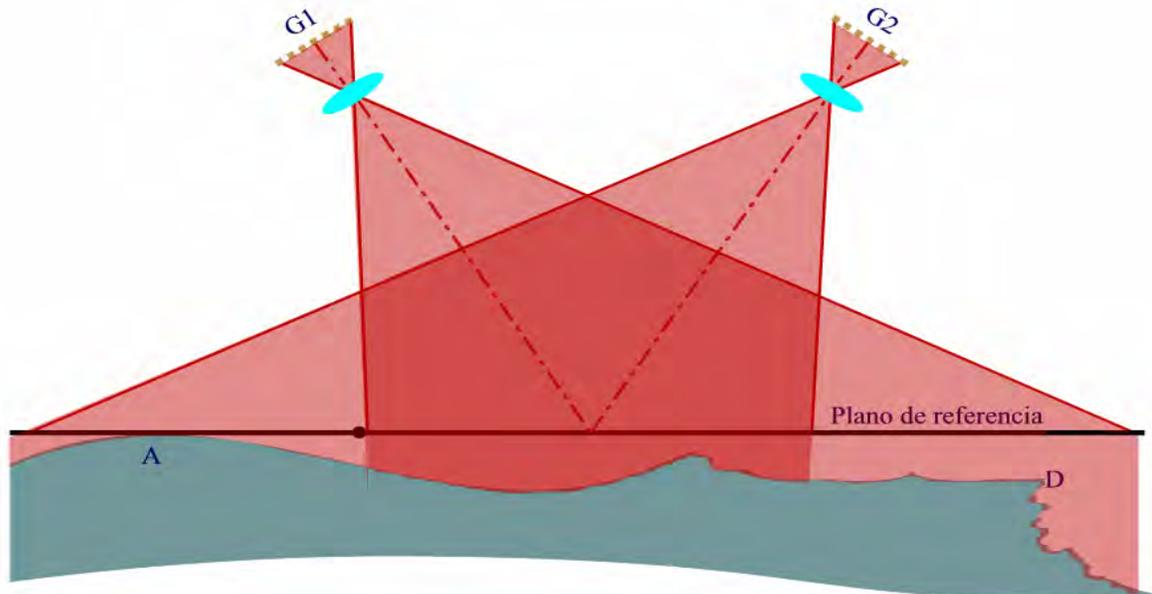


Figura 2.11. Método de proyección por moiré con incidencia y observación oblicua.

Otro enfoque del moiré por proyección es el propuesto por Rodríguez-Vera¹⁶, el cual se basa en la figura 2.12

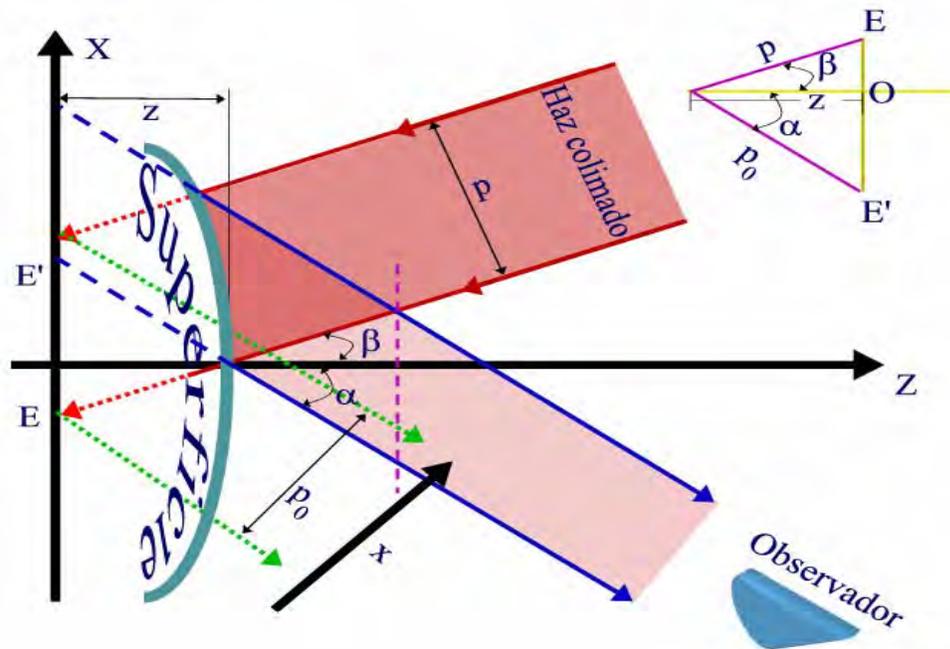


Figura 2.12. Sección transversal de la superficie bajo estudio para moiré por proyección con iluminación paralela.

De la figura 2.12 se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z}{p} \\ \cos \beta &= \frac{z}{p_0} \\ \therefore p_0 &= p \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{aligned} \quad 2.42$$

Para un observador muy alejado, sobre el plano de referencia se tiene

$$I_1(x) = a + b \cos \left(\frac{2\pi}{p_0} x \right) \quad 2.43$$

Sobre el objeto, sustituyendo 2.42 y de la figura 2.12, se tiene que

$$I_o(x) = a + b \cos \left[\frac{2\pi}{p} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (x - \overline{EE'}) \right] \quad 2.44$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\overline{OE'}}{z} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\overline{OE}}{z} \\ \therefore \overline{EE'} &= z [\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\alpha)] \end{aligned} \quad 2.45$$

Si $\alpha = 0$, por tanto, combinando 2.45 y 2.44 se llega a

$$I_o(x) = a + b \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z \operatorname{sen} \beta) \right] \quad 2.46$$

El resultado 2.46 se considera como la rejilla objeto vista a lo largo del eje z , la cual puede superponerse con una segunda rejilla de referencia con el fin de obtener el mapa de contornos demodulado.

La demodulación puede realizarse por medios ópticos o electrónicos. Si la rejilla de referencia utilizada para demodular la información en 2.46 es de la forma (de acuerdo con 2.15)

$$I_r = a + b \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta) \right] \quad 2.47$$

y entonces, el patrón de moiré formado por la superposición de ambas rejillas cuando el ángulo de giro es cero, $\theta = 0$, y utilizando la identidad trigonométrica de la suma de ángulos, es

$$I(x, y) = I_o I_r \approx k_0 + k_1 \cos \left\{ \left[\frac{2\pi}{p} \right] [(1 - \cos \beta)x + z \sin \beta] \right\} \quad 2.48$$

Los contornos claros estarán dados por

$$(1 - \cos \beta)x + z \sin \beta = NT \quad 2.49$$

donde $p = T$ que es el período de la rejilla, y el intervalo de contorno es entonces

$$\Delta z = \frac{T}{\sin \beta} \quad 2.50$$

2.2.3.5 Contorneo electrónico de Moiré.

El contorneo electrónico de moiré (EMC por sus siglas en inglés), se basa en la técnica de contorneo por proyección de franjas pero la demodulación se realiza por uso de la

electrónica para obtener los mapas de contorno¹⁷. La técnica codifica óptimamente la información acerca de la topografía, al proyectar una rejilla sobre la superficie de prueba. La rejilla entonces se deforma de acuerdo a la forma de la superficie y la decodificación se obtiene al restar electrónicamente la información codificada de la imagen capturada por la CCD entre dos diferentes condiciones de la superficie analizada.

El desarrollo teórico es como sigue. Si una superficie es descrita por $z_1 = f_1(x, y)$, de acuerdo con la figura 2.13, a la cual se le proyecta una rejilla lineal cuyas líneas son perpendiculares al plano de la página. Si el ángulo entre los ejes de proyección y observación es β , de la figura 2.13

$$\tan \beta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{catetoadyacente}} = \frac{x_1}{z} \quad 2.51$$

$$\therefore x_1 = z \tan \beta$$

Entonces, la distribución de intensidad en el plano de la imagen y conforme a lo establecido en 2.2.1, la función de intensidad esta dada por

$$I_1(x, y) = a + b \cos \frac{2\pi}{p_x} (x - z_1 \tan \beta) \quad 2.52$$

donde

$$p_x = \frac{p}{\cos \beta} \quad 2.53$$

a, b son constantes y p es el periodo de la rejilla proyectada. Por tanto tenemos la misma relación que en 2.46. Una segunda superficie de prueba, cuya función es $z_2(x, y) = f_2(x, y)$, puede representar una desviación de z_1 o de la superficie de prueba real, si se supone a z_1 como una superficie plana de referencia cuya intensidad estará representada, similarmente a 2.52, por

$$I_2(x, y) = a + b \cos \frac{2\pi}{p_x} (x - z_2 \tan \beta) \quad 2.54$$

y p_x tiene el mismo valor que en 2.53.

Estas distribuciones de intensidad son representadas por señales de voltaje V_1 y V_2 en la PC, y son proporcionales a las funciones de intensidad I_1 e I_2 respectivamente. La imagen resultante es proporcional a

$$V_1 - V_2 \propto |I_1 - I_2|$$

$$|I_1 - I_2| = B \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z_1 \sin \beta) \right] - B \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z_2 \sin \beta) \right] \quad 2.55$$

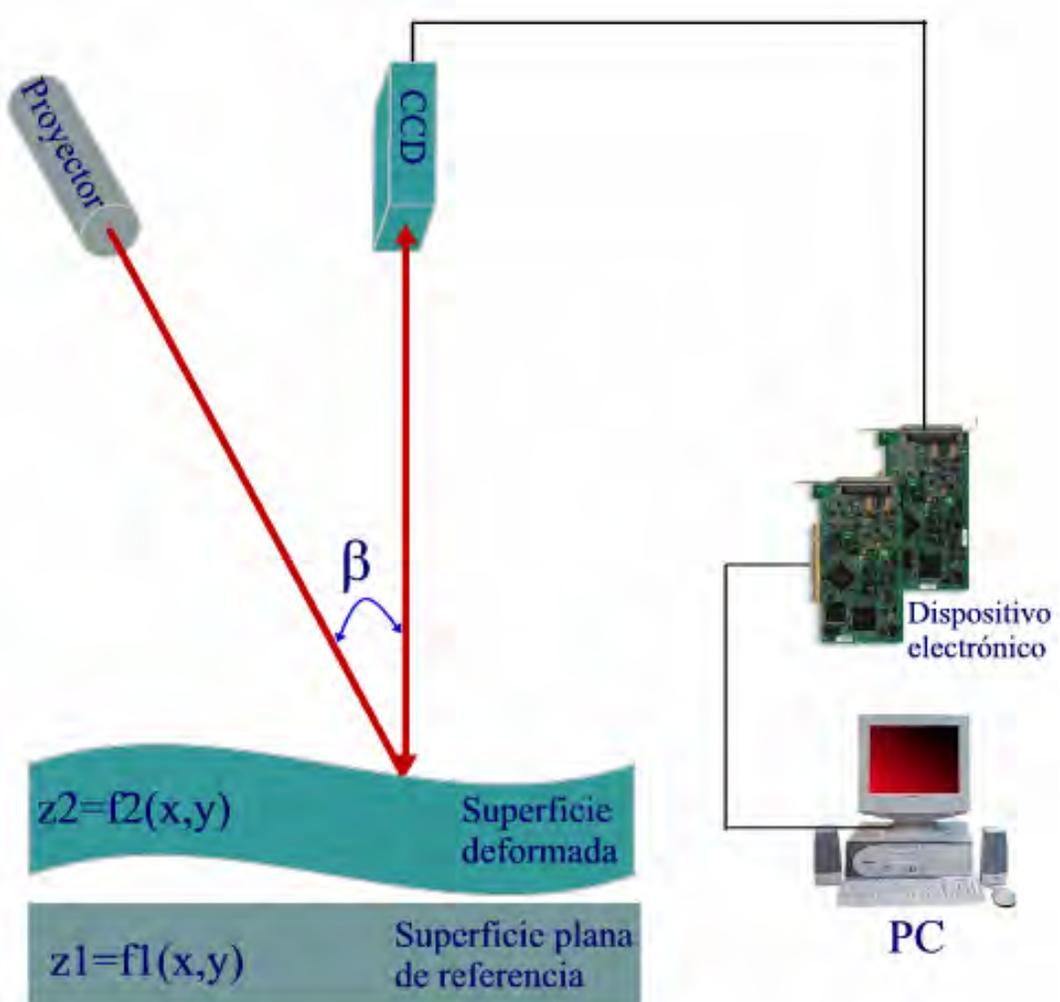


Figura 2.13. Esquema para el método de contorno electrónico de moiré.

De la identidad trigonométrica $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(B - A)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 |I_1 - I_2| &= 2B \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(\frac{x \cos \beta - z_1 \sin \beta + x \cos \beta - z_2 \sin \beta}{2} \right) \right] \\
 &\quad \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(\frac{x \cos \beta - z_2 \sin \beta - x \cos \beta + z_1 \sin \beta}{2} \right) \right] \\
 &= 2B \sin \left[\frac{\pi}{p} (2x \cos \beta - z_1 \sin \beta - z_2 \sin \beta) \right] \\
 &\quad \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(\frac{-z_2 \sin \beta + z_1 \sin \beta}{2} \right) \right] \\
 &= 2B \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(x \cos \beta - \frac{(z_1 + z_2)}{2} \sin \beta \right) \right] \\
 &\quad \sin \left[\frac{\pi}{p} (-(z_2 - z_1) \sin \beta) \right] \\
 &= 2B \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(x \cos \beta - \frac{(z_1 + z_2)}{2} \sin \beta \right) \right] \\
 &\quad \sin \left[-\frac{\pi}{p} (z_2 - z_1) \sin \beta \right] \\
 &= -2B \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(x \cos \beta - \frac{(z_1 + z_2)}{2} \sin \beta \right) \right] \\
 &\quad \sin \left[\frac{\pi}{p} (z_2 - z_1) \sin \beta \right] \tag{2.56} \\
 |I_1 - I_2| &= K \sin \left[\frac{\pi}{p} (z_2 - z_1) \sin \beta \right] \\
 &\quad \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(x \cos \beta - \frac{(z_1 + z_2)}{2} \sin \beta \right) \right]
 \end{aligned}$$

donde K es una constante concerniente al ruido de fondo y la características de la rejillas. La ecuación 2.56 representa la amplitud de las franjas originales proyectadas modulada por el factor (note que interesan las bajas frecuencias)

$$K \sin \left[\frac{\pi}{p} (z_2 - z_1) \sin \beta \right] \tag{2.57}$$

La ecuación 2.57 es similar a la ecuación de modulación angular usada en frecuencia modulada (FM) para transmisión de señales electrónicas, por lo que se puede pensar que en esta ecuación 2.57, la información de las franjas de moiré, que representan líneas de contorno de profundidad del objeto bajo estudio, esta codificada en FM.

Esta función de modulación corresponde a las franjas de moiré, y tiene un mínimo siempre y cuando

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{p}(z_2 - z_1)\sin\beta &= n\pi \\ \therefore (z_2 - z_1) &= \Delta z = n \frac{p}{\sin\beta} \end{aligned} \quad 2.58$$

por lo que el resultado es un patrón de moiré que representa un mapa de contornos de la superficie $z_2 = f_2(x, y)$ con respecto a la superficie $z_1 = f_1(x, y)$, con intervalos de contorno dados por la ecuación 2.58. En el caso de que z_1 represente a una superficie plana, el patrón de moiré resultante será un mapa de contorno de profundidad con respecto a la superficie z_2 .

De los métodos descritos hasta el momento, el contorneo electrónico de moiré es el que se presenta adecuado para los estudios que se pretenden realizar, ya que se obtiene un patrón de contornos proporcional a la altura de la superficie en estudio. Sin embargo, los métodos basados en el efecto de Talbot permiten analizar objetos de menor tamaño y, debido a que no requieren de un proyector, se puede aumentar en gran medida la frecuencia de la rejilla sin perder la resolución del mismo, lo que incrementa la resolución. Se describen a continuación.

2.2.3.6 Métodos basados en el efecto Talbot.

El fenómeno de Talbot fue primeramente estudiado por Fox Talbot¹⁸ en 1836 y el primer análisis cuantitativo y cualitativo de dicho experimento fue realizado por Rayleigh¹⁹ en 1881. A lo largo de la historia, diversos autores han ampliado el tratamiento físico y matemático de dicho fenómeno hasta desarrollar los cimientos de la interferometría de Talbot²⁰ que es un método simple de medición de los frentes de onda derivados del frente de onda transmitido o reflejado por un objeto. El sistema trabaja como un interferómetro de desplazamiento y usa el efecto Talbot o la propiedad de auto imágenes de las rejillas de difracción que no requieren de componente óptico alguno para formar su propia imagen.

Debido a la importancia que este efecto tiene para el desarrollo de la presente tesis, se tratará a detalle en los próximos apartados, complementando lo descrito en el capítulo 1.

2.3 Auto-imágenes

Clásicamente, en un sistema óptico se utilizan lentes para convertir la radiación divergente en una radiación convergente, por lo que la imagen óptica obtenida es la reproducción del objeto formada por el sistema en cuestión. En el fenómeno de Talbot, de auto imágenes o de imágenes de Fourier, como es nombrado por algunos autores, no se requieren de componentes ópticas para formar una imagen. Como se comentó en la introducción del capítulo 1, el efecto de auto imágenes se debe a la peculiar propiedad de las rejillas de difracción de que, cuando son iluminados por un frente de ondas coherente y monocromático, se forma una imagen fiel de ellas sin necesidad de componentes ópticas colocando una pantalla a una distancia dada. El término de auto imagen es utilizado debido a que no requieren de sistemas formadores de imagen. Esta propiedad se puede generalizar a cualquier tipo de objetos que tengan periodicidad²¹ y la auto imagen formada de ellos, se formará por transmisión o por reflexión. Si la rejilla que se ilumina con esta fuente de luz

coherente y de longitud de onda λ es unidimensional y de frecuencia espacial ν , los planos donde se forman auto imágenes serán equidistantes y localizados a distancias $\frac{N}{\nu^2 \lambda}$ del objeto, donde $N = 1, 2, \dots$ dando el orden de los planos de Talbot, tal como se muestra en la figura 2.14. Si la rejilla fuese bidimensional con la misma frecuencia espacial ν en ambas direcciones, también se formarían auto imágenes en los planos localizados en $\frac{N}{\nu^2 \lambda}$.

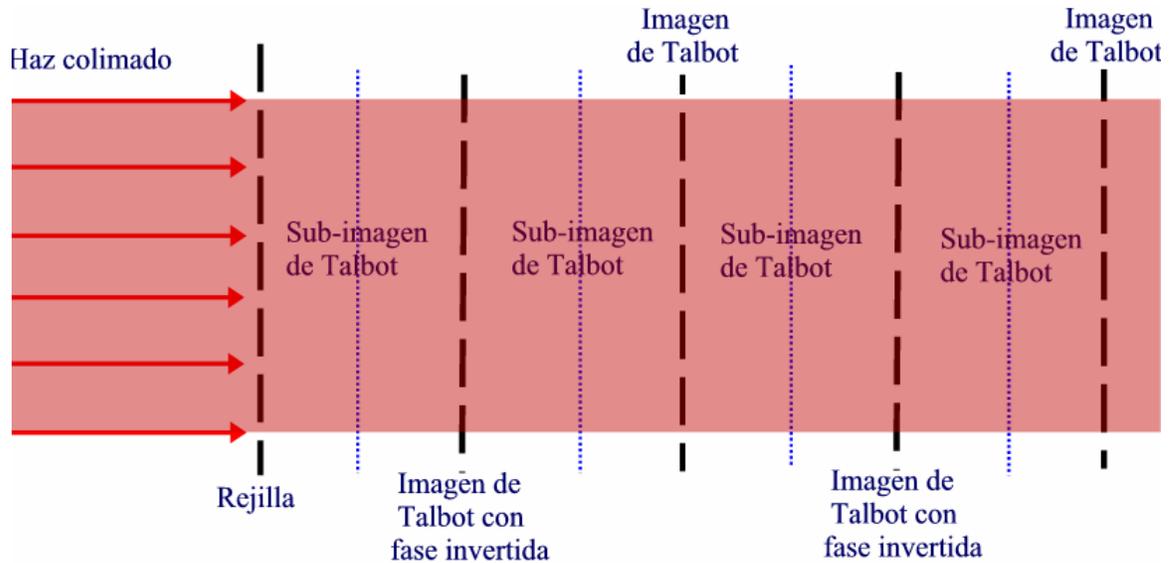


Figura 2.14. Auto imágenes de una rejilla de difracción o efecto Talbot.

En la literatura hay varias maneras de explicar la teoría de las auto imágenes, entre las que se pueden mencionar: interpretación holográfica²², teoría escalar de la difracción^{23, 24, 25, 26} suma del espectro de ondas planas²⁷, y operadores diferenciales²⁸, que son las más recurrentes; trabajos posteriores han sido hechos por Patroski²⁹ y Kafri³⁰, donde el fenómeno de Talbot lo analizan como un caso especial de la deflectometría de moiré; otro punto de vista interesante basado en la teoría escalar de la difracción fue tratado por Latimer³¹. Un compendio muy ilustrativo de la teoría escalar de la difracción fue realizado por la SPIE³²; quizá pueda existir alguna otra teoría que explique el fenómeno Talbot, pero éstas son las más representativas. Para el presente trabajo, se explicará la teoría de las auto imágenes desde el punto de vista de la teoría de la suma de espectro de ondas planas, la teoría escalar de la difracción y el tratamiento de operadores diferenciales.

Suma de espectro de ondas planas.

Dicho tratamiento se basa en un análisis geométrico del efecto Talbot³³. Si se parte de los parámetros mostrados en la figura 2.15, donde una pantalla se coloca a cierta distancia X de una rejilla iluminada con un haz de luz colimado y monocromático. El orden cero de difracción se propagará en la dirección del eje óptico, mientras que un haz difractado con el orden de difracción m se propaga en la dirección del elemento H . Frentes de onda A_0 y A llegan en fase a la pantalla si ambos cruzan en el punto O en dicha pantalla.

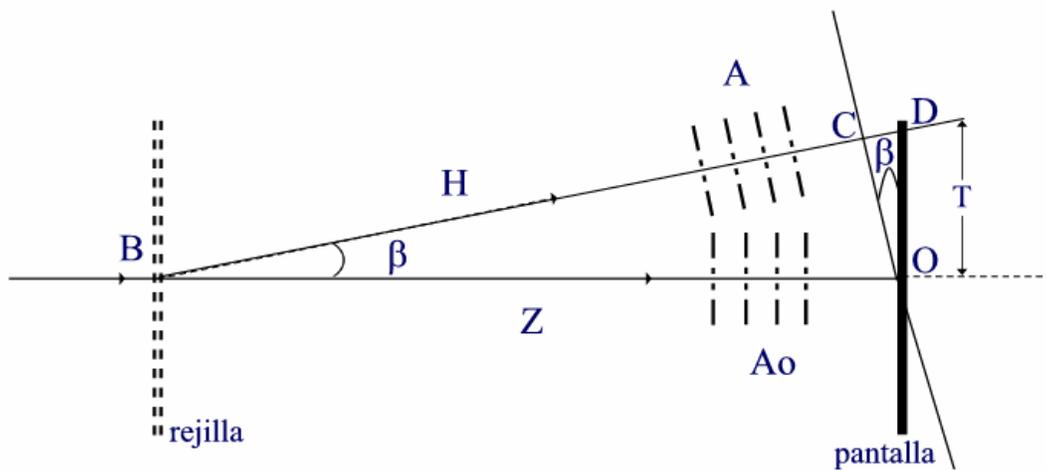


Figura 2.15. Efecto Talbot por suma de ondas planas.

Se sabe, de B.46 del apéndice B, que para un máximo de interferencia

$$D.C.O = m\lambda$$

y de la figura 2.15

$$\sin \beta = \frac{CD}{OD} \quad 2.59$$

por lo que

$$CD = OD \sin \beta = T \sin \beta = D.C.O = m\lambda \quad 2.60$$

donde T es la separación entre A y A_0 de la figura 2.15.

$$\therefore \sin \beta = \frac{m\lambda}{T} \quad 2.61$$

y para ángulos pequeños

$$\beta = \frac{m\lambda}{T} \quad 2.62$$

Ahora bien, de la figura 2.15

$$\begin{aligned} CD &= OB - BD = Z - H = D.C.O \\ H &= Z \cos \beta \\ \therefore D.C.O &= Z - Z \cos \beta = Z(1 - \cos \beta) \end{aligned} \quad 2.63$$

Expandiendo el coseno en series

$$D.C.O = Z \left[1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \dots \right) \right] \quad 2.64$$

Tomando los primeros términos, es decir, aproximando para ángulos pequeños

$$D.C.O = Z \left[1 - 1 + \frac{\beta^2}{2} \right] = Z \frac{\beta^2}{2} \quad 2.65$$

y como $D.C.O = m\lambda = T \sin \beta$ para ángulos pequeños $\beta = \frac{m\lambda}{T}$. Si se hace que

$$D.C.O = N\lambda \quad \text{entonces} \quad Z = \frac{2(D.C.O)}{\beta^2} = \frac{2(N\lambda)}{m^2 \lambda^2} = \frac{2NT^2 \lambda}{m^2 \lambda^2}$$

y finalmente

$$Z = \frac{2NT^2}{m^2 \lambda} \quad 2.66$$

Para cualquier valor de m mayor o igual a uno, es posible encontrar un valor de N tal que

$\frac{N}{m^2}$ sea cualquier entero deseado n , es decir, $n = \frac{N}{m^2}$, entonces

$$Z_n = n \frac{2T^2}{\lambda} \quad 2.67$$

donde n es cualquier entero positivo y T representa la periodicidad de las franjas de la auto imagen en este punto. La distancia mínima $Z_1(n=1)$ a la que se forma auto imagen, recibe el nombre de distancia de Rayleigh. En las posiciones intermedias entre las posiciones de auto imagen se forma también una imagen bien definida, pero con el contraste invertido. La razón es que las ondas difractadas llegan a la pantalla en esas posiciones, con una diferencia de fase de 180° . Para que estas sean claras, se debe cumplir que los ángulos de difracción sean pequeños y por esto se usa una rejilla con una frecuencia espacial muy baja, la conocida rejilla de Ronchi.

Teoría escalar de la difracción.

Para obtener la demostración de las auto imágenes de objetos periódicos desde la perspectiva de la teoría escalar de la difracción, primero se requiere obtener la ecuación de Fresnel, que es el corazón de dicha teoría. Un detector promedia la intensidad de la energía que recibe, entonces la luz que incide sobre el ha viajado una distancia desde su punto de origen a través de un medio que puede ser el aire, el agua, una fibra óptica, etc. El medio

por el que se propaga la luz es la manera en que tiene de viajar o transmitirse, de aquí que se define el termino de transmitancia, en palabras llanas, como la medida de que tan transparente es un medio al paso de la luz y su medida se acota desde 0 como transmitancia nula hasta 1 como transmitancia máxima. Una definición formal de la transmitancia, se da desde el punto de vista de la teoría electromagnética donde la transmitancia se define como el cociente entre el flujo transmitido y el flujo incidente de una onda³⁴. El problema inicial radica en como se transmite una onda a partir de un plano de referencia con una abertura finita hacia otro plano colocado a una distancia finita del primero, es decir, si se analiza un punto del plano de referencia de apertura finita, como se mide ese mismo punto al transmitirse hacia otro plano, tal como se muestra en la figura 2.16.

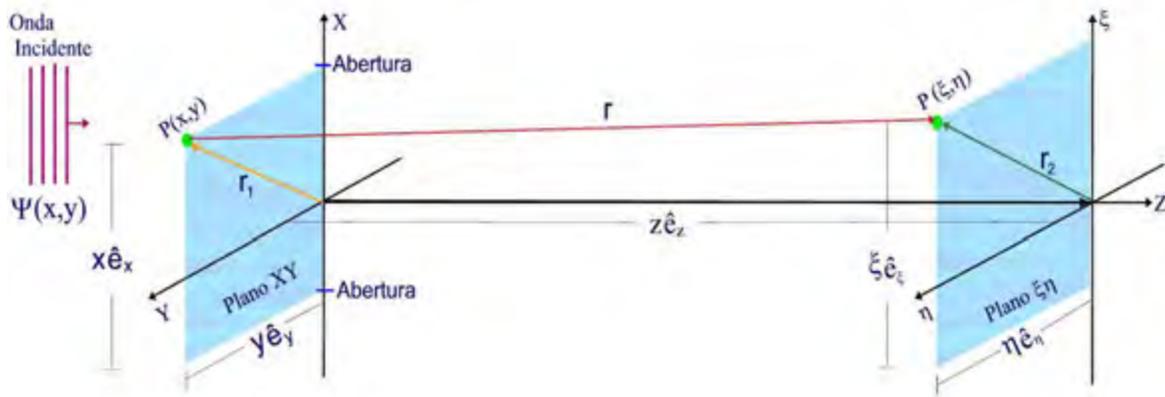


Figura 2.16. Esquema gráfico para deducir la ecuación de Fresnel.

Entonces, se desea medir el punto $P(x,y)$ del plano XY en el plano $\xi\eta$, es decir, el punto $P(\xi,\eta)$. En dicho punto tendremos la misma onda incidente pero atenuada por un factor debido a la transmitancia del sistema. Por tanto, en el plano $\xi\eta$ se tendrá una transmitancia multiplicada por la onda incidente.

Otra forma de analizarlo es desde la teoría de sistemas lineales. Un sistema lineal es un sistema físico que puede modelarse con ecuaciones diferenciales o de diferencia, cuyo objetivo es predecir el comportamiento del sistema ante una entrada específica. Un sistema lineal cumple con la propiedad de superposición y la convolución, además de que es un

sistema espacialmente invariante, con respuesta al impulso en amplitud $h(x)$. Si un sistema es lineal, es posible conocer la salida como la multiplicación de la función de transferencia del sistema con una entrada conocida, donde la función de transferencia es la respuesta al impulso del sistema, tal como se muestra en la figura 2.17.



Figura 2.17. Sistema Lineal

Aquí, la señal de salida $b(x)$, está determinada por la señal de entrada $a(x)$, en convolución con la respuesta al impulso en amplitud $h(x)$ del sistema. Si trasladamos el análisis al espacio espectral o de las frecuencias, y se realiza el producto del patrón de difracción de la señal de entrada en el plano XY , denotado por $A(\nu)$, con la transformada de Fourier de la respuesta al impulso en amplitud $H(\nu)$ que se conoce en la literatura como función de transferencia del sistema (o función de transmitancia), el resultado de dicha multiplicación proporciona el espectro de frecuencias de la señal de salida $B(\nu)$.

De las propiedades de la transformada de Fourier, se sabe que una convolución en el tiempo o en el espacio se transforma a una multiplicación algebraica en el plano de las frecuencias esto es, si

$$\begin{aligned} a(x) &\Leftrightarrow A(\nu) \\ h(x) &\Leftrightarrow H(\nu) \end{aligned}$$

entonces

$$b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x_0)h(x-x_0)dx_0 \Leftrightarrow B(\nu) = A(\nu)H(\nu)$$

donde

$$b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x_0)h(x - x_0)dx_0$$

se conoce como integral de convolución, por lo que la función de transferencia del sistema en el espacio de las frecuencias, es igual al cociente entre la señal de salida con respecto a la señal de entrada

$$H(\nu) = \frac{B(\nu)}{A(\nu)} \quad 2.68$$

o en otras palabras, en el espacio frecuencial la función de transmitancia es una relación entre la señal de salida en el plano $\xi\eta$ con respecto a la señal de entrada en el plano XY . Posteriormente se requiere una transformación de Fourier inversa para obtener finalmente la señal $b(x)$. Para un estudio a profundidad acerca de los sistemas lineales y la transformada de Fourier, se pueden consultar libros especializados en el tema³⁵.

Por tanto, la solución en el plano $\xi\eta$ es

$$\Psi(\xi, \eta) = t(x, y)\Psi(x, y) = t(x, y) \frac{e^{jkr}}{r} \quad 2.69$$

en donde se propone una solución de la ecuación de onda de tipo esférica, ya que se considera que la fuente es puntual y por el principio de Huygens, la luz incidente al chocar o difractarse en un obstáculo se comporta como una fuente puntual al re-emitir ondas en forma esférica. En la ecuación 2.69, $t(x, y)$ representa la función de transmitancia.

De la figura 2.16 se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \vec{r} &= z\hat{e}_z + \vec{r}_2 \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + z\hat{e}_z \end{aligned} \quad 2.70$$

y además

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \\ \vec{r}_2 &= \xi\hat{e}_\xi + \eta\hat{e}_\eta\end{aligned}\quad 2.71$$

donde \hat{e} representa a los vectores unitarios. Ahora bien, como son los mismos vectores unitarios en cualquiera de los planos en cuanto a su magnitud y dirección se refiere, entonces se puede escribir

$$\vec{r}_2 = \xi\hat{e}_x + \eta\hat{e}_y \quad 2.72$$

por tanto, sustituyendo el valor del vector r_2 de 2.72 y r_1 de 2.71 en el valor r de 2.70

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (\xi\hat{e}_x + \eta\hat{e}_y) - (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) + z\hat{e}_z \\ \vec{r} &= (\xi - x)\hat{e}_x + (\eta - y)\hat{e}_y + z\hat{e}_z\end{aligned}\quad 2.73$$

Por tanto, obteniendo la magnitud del vector de la ecuación 2.73, se tiene

$$|\vec{r}| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \quad 2.74$$

que es la magnitud de la distancia entre el plano XY y el plano $\xi\eta$.

Regresando a la solución en el plano $\xi\eta$, se tiene para un solo punto la solución propuesta en 2.69. Para todos los puntos en la abertura de dimensiones $l * m$, se tiene

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_l \sum_m t(x_l, y_m) \frac{e^{jkr_{lm}}}{r_{lm}} \quad 2.75$$

En el límite, la sumatoria tiende a una integral de los puntos sobre el plano. Por lo tanto, infinitesimalmente

$$\psi(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \frac{e^{jkr}}{r} dx dy \quad 2.76$$

La ecuación 2.76 toma todos los puntos que se transmiten al plano $\zeta\eta$.

En la región paraxial (cerca del eje óptico), z se hace muy grande en la solución y por lo tanto la pantalla esta muy alejada del plano XY . Para esta condición se tiene

$$z^2 \gg (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \quad 2.77$$

Debido a que la solución es de forma exponencial, una pequeña variación en las variables influye en gran medida en el resultado. Entonces, si se cumple 2.77

$$|\bar{r}| \approx z \quad 2.78$$

Mediante aproximación de series binomiales de Taylor

$$f(x) = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \text{términos orden superior} \quad -1 < x \leq 1$$

aplicando a la ecuación 2.78

$$|\bar{r}| = r = \sqrt{z^2 + (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{z^2}} \quad 2.79$$

que es de la forma de la serie binomial de Taylor. Tomando los primeros términos de la serie en 2.79

$$r \approx \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{z^2} \right] \approx z + \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{2z} \quad 2.80$$

Sustituyendo la ecuación 2.78 y 2.80 en 2.76, en región paraxial, se llega a

$$\psi(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \frac{e^{jk \left[z + \frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2z} \right]}}{z} dx dy \quad 2.81$$

Manipulando algebraicamente le ecuación 2.81

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{e^{jkz}}{z} \iint t(x, y) e^{jk \left[\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2z} \right]} dx dy \quad 2.82$$

Como $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, $\omega = 2\pi\nu$, $c = \lambda\nu$ entonces, los términos

$$\frac{e^{\frac{j\omega}{c}z}}{z} = \frac{e^{\frac{j2\pi\nu}{c}z}}{z} = \frac{e^{\frac{j2\pi}{\lambda}z}}{z} \quad 2.83$$

y

$$e^{\frac{jk}{2z}} = e^{j\frac{\omega}{2zc}} = e^{j\frac{2\pi\nu}{2zc}} = e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}} \quad 2.84$$

Sustituyendo 2.83 y 2.84 en 2.82 se obtiene

$$\psi(\xi, \eta) = C \frac{e^{jkz}}{z} \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]} dx dy \quad 2.85$$

La ecuación 2.85 se conoce como al ecuación de Fresnel, donde la constante C es multidimensional. Si se analiza la ecuación 2.85 en una dimensión desde la teoría de la transformada de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= C \frac{e^{jkz}}{z} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}(\xi-x)^2} dx = C \frac{e^{jkz}}{z} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}(\xi^2 - 2\xi \cdot x + x^2)} dx = \\ &= C \frac{e^{jkz}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}x^2} e^{-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda \cdot z}\right)x} dx\end{aligned}\quad 2.86$$

Haciendo un cambio de variable

$$u = \frac{\xi}{\lambda \cdot z} \quad 2.87$$

entonces, sustituyendo 2.87 en 2.86

$$\psi(\xi) = C \frac{e^{jkz}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}x^2} e^{-j2\pi \cdot ux} dx \quad 2.88$$

y de 2.88 los términos involucrados solo dependen de una variable, por lo que

$$\begin{aligned}f(\xi) &= C \frac{e^{jkz}}{z} e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} \\ g(x) &= t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}x^2}\end{aligned}\quad 2.89$$

entonces, la ecuación 2.88 se puede escribir como

$$\psi(\xi) = f(\xi) \int g(x) e^{-j2\pi \cdot ux} dx \quad 2.90$$

que una especie de transformada de Fourier. Para estudiar implicaciones mas profundas acerca de la ecuación de Fresnel y variantes, se puede consultar el libro de Goodman³⁶.

En la ecuación de Fresnel 2.85, solo se tiene un parámetro desconocido el cual es la constante multidimensional C . Para conocer el valor de esta, se tiene que resolver la ecuación 2.85, donde intervienen integrales de transformación de tipo gaussiano, llegando al siguiente valor

$$C = \frac{1}{j\lambda} \quad 2.86$$

Entonces, la solución general de la ecuación 2.85 es

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} dx dy \quad 2.86$$

El orden de los factores dentro de los binomios, no afecta el desarrollo cuadrático de los mismos, por lo que no importa su posición en el mismo. El término $\frac{1}{j}$ significa que la onda difractada se desfasa 90° con respecto de la original. A grandes rasgos, la ecuación de Fresnel es un operador que transforma el tipo de onda incidente en el mismo frente de onda una vez difractado. Cuando se resuelve esta ecuación para fuentes pequeñas y distancias cortas, la onda difractada se convierte en un punto al encontrarse en el espectro funciones delta de dirac y es entonces que se habla de campo cercano o de Fraunhoffer.

Una vez obtenida la ecuación de Fresnel, se puede ampliar el estudio a objetos periódicos considerando la función de transmitancias $t(x,y)$ como una función dependiente de las características de las rejillas o los objetos periódicos que se desean analizar.

Una función periódica se puede representar de acuerdo a la figura 2.18, y se puede definir como una función para la cual se cumple que

$$f(x) = f(x+T) \quad 2.87$$

para todo valor de x . La constante mínima T que satisface la relación 2.87 se llama el período de la función. Mediante repetición de 2.87, se obtiene

$$f(x) = f(x+nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 2.88$$

Cualquier función periódica $f(x)$ que satisface las condiciones de Dirichlet³⁷, es decir, que la función $f(x)$ es continua por tramos e integrables sobre cualquier intervalo, se puede representar mediante una serie de Fourier. Las condiciones de Dirichlet son:

- 1) La función $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.
- 2) La función $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
- 3) La integral del valor absoluto de $f(x)$ es un período es finita; es decir,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| dx < \infty$$

Se dice que una función $f(x)$ es continua por tramos en el intervalo finito $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ si satisface las condiciones 1 y 2.

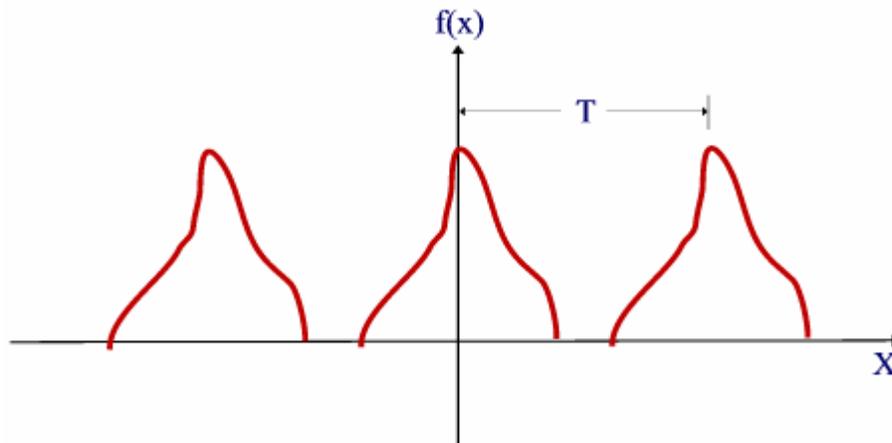


Figura 2.18. Función periódica.

La series de Fourier puede representarse de dos formas principales, en forma trigonométrica o en forma compleja. La serie compleja de Fourier esta derivada de la forma trigonométrica y se expresa como sigue

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad 2.89$$

Entonces, si la transmitancia del objeto es una rejilla periódica, se podrá representar como una serie compleja de Fourier. De acuerdo a la figura 2.19 y analizando en una dimensión se tiene que

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad 2.90$$

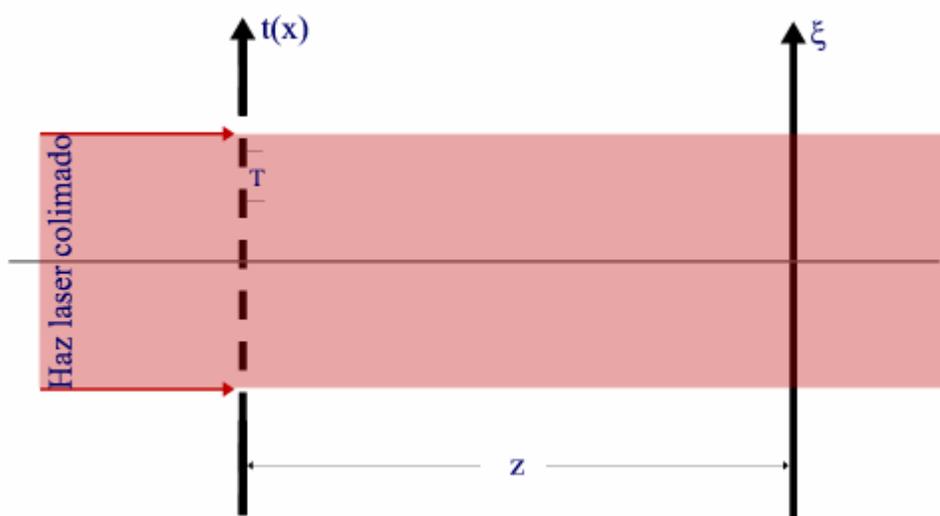


Figura 2.19. Rejilla periódica y su plano de propagación.

Por tanto de la ecuación de Fresnel (2.86), en una dimensión se tiene

$$\psi(\xi) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}(x-\xi)^2} dx \quad 2.91$$

y sustituyendo la ecuación 2.90 en 2.91

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi) &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}(x^2 - 2x\xi + \xi^2)} dx \\
 &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}x^2} e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda \cdot z}x\xi} dx \quad 2.92 \\
 \psi(\xi) &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{j\lambda \cdot z}}\right)^2} e^{-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda \cdot z} - \frac{n}{T}\right)x} dx
 \end{aligned}$$

En la ecuación 2.92, tenemos la transformada de Fourier de una gaussiana, cuya solución se puede obtener de tablas matemáticas o bien realizando el desarrollo del binomio hasta completar el cuadrado y realizar, posteriormente, un cambio de variable aplicando la propiedad de escalonamiento de la transformada de Fourier. Una vez realizado lo anterior se llega a

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi) &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda \cdot z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} (j\lambda \cdot z) e^{-\pi \cdot j\lambda \cdot z \left(\frac{\xi}{\lambda \cdot z} - \frac{n}{T}\right)^2} \\
 \psi(\xi) &= e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} e^{-\pi \cdot j\lambda \cdot z \left(\frac{\xi^2}{(\lambda \cdot z)^2} + \frac{2n\xi}{T\lambda \cdot z} + \frac{n^2}{T^2}\right)} \quad 2.93 \\
 \psi(\xi) &= e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2} e^{-j\frac{\pi}{\lambda \cdot z}\xi^2 + j\frac{2\pi \cdot n}{T}\xi} e^{-j\frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{T^2}n^2} \\
 \psi(\xi) &= e^{j\frac{2\pi}{\lambda}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi \cdot n}{T}\xi} e^{-j\frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{T^2}n^2}
 \end{aligned}$$

De la última ecuación 2.93, se observa que el término formado por los coeficientes C_n y el exponencial con la variable espacial ξ , son una réplica de la función de transmitancia periódica planteada por 2.89 en el plano ξ , siempre y cuando el término exponencial cuyo argumento incluye la variable λ sea igual a un múltiplo de 2π , para que de esta forma de un valor unitario. Entonces, el argumento de dicho exponencial se iguala

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{T^2} &= 2\pi \cdot m \quad m = 0,1,2,\dots \\
 \therefore z_m &= \frac{2m}{\lambda} T^2 \quad 2.94
 \end{aligned}$$

y para el término constante

$$\begin{aligned}
 j \frac{2\pi}{\lambda} z &= j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2m}{\lambda} T^2 = j \frac{4\pi}{\lambda^2} m \cdot T^2 \\
 \therefore e^{j \frac{2\pi}{\lambda} z} &= e^{j \frac{4\pi}{\lambda^2} m \cdot T^2} = \cos\left(4\pi \cdot \frac{m}{\lambda^2 \cdot v^2}\right) + j \sin\left(4\pi \cdot \frac{m}{\lambda^2 \cdot v^2}\right) \approx 1
 \end{aligned}
 \tag{2.95}$$

Por tanto, la solución de la ecuación de Fresnel en el plano ξ es

$$\psi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j \frac{2\pi \cdot n}{T} \xi}
 \tag{2.96}$$

que puede interpretarse como un imagen perfecta del objeto de transmitancia periódica.

Otra manera de tratar el problema, propuesto por Goodman, es obtener la función de transferencia del sistema y considerar al objeto periódico como una rejilla de difracción cuya ecuación es de la forma 2.6 y obtener su espectro en el campo de Fourier. Posteriormente se evalúa la función de transferencia en las frecuencias desplazadas por el espectro de la función de transmitancia y obtener la transformada de Fourier de las funciones y la distribución de intensidad.

Un tratamiento alternativo y muy interesante, es el planeado por Ojeda-Castañeda³⁸, el cual consiste en obtener las imágenes de Talbot de objetos periódicos en términos de las eigenfunciones y los eigenvalores de un operador diferencial de tipo exponencial.

Si comparamos la condición planteada en 2.94 con 2.67, es la misma para que se formen las imágenes de Talbot. Entonces, el tratamiento planteado en esta sección arroja el mismo resultado que en el de la suma de espectros de ondas.

Operadores Diferenciales.

Un tratamiento alternativo para explicar el fenómeno de Talbot, se basa en operadores que explican las condiciones que se deben satisfacer para encontrar auto imágenes de un objeto periódico³⁹. Si partimos de la ecuación de onda para un campo eléctrico^{40,41}, se tiene

$$\nabla^2 \bar{E}(r,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E}(r,t) = 0 \quad 2.97$$

Para simplificar la expresión 2.97, se realizaran algunas suposiciones con respecto a esta forma de la ecuación de onda.

Si se utiliza una fuente de iluminación monocromática como primera simplificación, donde

$\bar{E}(r,t) = \bar{E}(r)e^{j\frac{2\pi}{T}t}$, o en otras palabras, coherente, aplicada a la ecuación 2.97, se obtiene

$$e^{j\omega t} \nabla^2 \bar{E}(r) - \frac{1}{c^2} \bar{E}(r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j\omega t} = 0 \quad 2.98$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Obteniendo la segunda derivada parcial del exponencial en 2.98, se tiene

$$\nabla^2 \bar{E}(r) + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E}(r) = 0 \quad 2.99$$

y como

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda}; \quad c = \lambda \nu \\ \therefore k &= \frac{2\pi \nu}{c}; \quad \omega = 2\pi \nu \\ \therefore k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad 2.100$$

entonces 2.99 se puede expresar como

$$\nabla^2 \vec{E}(r) + k^2 \vec{E}(r) = 0 \quad 2.101$$

que es la ecuación de Helmholtz.

Ahora bien, como una segunda simplificación, la luz linealmente polarizada tiene una orientación de campo eléctrico constante, aunque su magnitud y signo varíen con el tiempo.

Por tanto

$$\vec{E}(r) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.102$$

Si la propagación es a lo largo del eje Z , entonces

$$\psi_1(r) = \psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z} \quad 2.103$$

y la ecuación 2.99 puede escribirse como

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z}] + k^2 \psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z} &= 0 \\ e^{jk \cdot z} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, y, z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z}] &= -k^2 \psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z} \quad 2.104 \\ e^{jk \cdot z} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, y, z) \right] + \\ &\left[-k^2 \psi(x, y, z) + 2jk \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(x, y, z) \right] \end{aligned} \right\} &= -k^2 \psi(x, y, z) \cdot e^{jk \cdot z} \end{aligned}$$

Simplificando la última expresión se obtiene

$$\left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(x, y, z) + 2jk \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) \right] \right\} = 0 \quad 2.105$$

El tercer término de la ecuación 2.105, corresponde a la envolvente de la función de onda. Entonces, en aproximación paraxial se puede despreciar el término ya que varía muy lentamente con z , y por tanto

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, y, z) + 2jk \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) \right] = 0 \quad 2.106$$

Expresando el operador laplaciano como un laplaciano transversal en dos dimensiones, la ecuación 2.106 se puede expresar como

$$\nabla_T^2 \psi(x, y, z) + 2jk \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) = 0 \quad 2.107$$

La ecuación 2.107 es conocida como la ecuación paraxial de onda⁴². Despejando la diferencial parcial de 2.103 se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) &= -\frac{\nabla_T^2 \psi(x, y, z)}{2jk} \\ \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\psi(x, y, 0)} &= -\partial_z \frac{\nabla_T^2}{2jk} \end{aligned} \quad 2.108$$

integrando ambos miembros de 2.108, obtenemos el logaritmo natural de la función a la derecha de la igualdad, donde $\psi(x, y, z)$ representa la distribución de amplitud compleja debido a la propagación de la onda $\psi(x, y, 0)$ y entonces

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{\psi(x, y, z)}{\psi(x, y, 0)} \right] &= -\frac{\nabla_T^2}{2jk} z \\ \therefore \psi(x, y, z) &= e^{-\frac{z}{2jk} \nabla_T^2} \psi(x, y, 0) \end{aligned} \quad 2.109$$

El término exponencial de la ecuación 2.109 puede expandirse en series.

Si ahora se considera que $\psi(x, y, 0)$ es un objeto periódico unidimensional, se puede expresar en forma de la serie exponencial de acuerdo con 2.89

$$\psi(x, 0, 0) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad 2.110$$

Si se sustituye la ecuación 2.110 en la 2.109 se llega a

$$e^{-\frac{z}{2j \cdot k} \nabla_T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} = e^{-\frac{z}{2j \cdot k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad 2.111$$

donde sólo hay dependencia en z y como se está iluminando con una onda plana la cual esta viajando paralela al eje Z , la función $\psi(x, y)$ permanece constante. Por tanto, manipulando esta última ecuación (2.111) se llega a

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{-\frac{1}{j} \frac{z}{2 \cdot k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{-\frac{1}{j} \frac{z \cdot \lambda}{2 \cdot 2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{-j \frac{\pi \cdot T^2 \cdot \lambda}{4\pi^2 \cdot T^2} z} \\ \psi(x, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} e^{-j \frac{\pi \cdot \lambda \cdot 1}{T^2} z} \end{aligned} \quad 2.112$$

El término $\frac{1}{\omega^2}$ representa la frecuencia angular de la onda, por lo que para que haya auto imágenes se requiere que el término exponencial sea de magnitud unitaria para cualquier valor múltiplo de ω . Por lo tanto, se requiere que el argumento sea un múltiplo de 2π , para que de esta forma de un valor unitario y se genere una función idéntica a la expresada en 2.111. De esta forma

$$\frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{T^2} = 2\pi \cdot m \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\therefore z_m = \frac{2m}{\lambda} T^2$$
2.113

La ecuación 2.113 indica la distancia Talbot para un objeto periódico iluminado con un frente de onda plano, y es igual a lo obtenido en 2.94 y 2.67.

2.3.1 Interferometría de Talbot

Al utilizar un sistema de proyección de franjas a partir de una rejilla de difracción sobre la superficie de un objeto, se puede realizar tanto por moiré por sombreado o por moiré por proyección, y dicha proyección de franjas puede realizarse sin la ayuda de lentes ópticas mediante la aplicación del efecto de Talbot, pero se necesitara contar con una fuente de luz coherente por lo que una haz láser es adecuado. Un método de moiré aditivo puede aplicarse para realizar mediciones fuera de plano. También puede recuperarse el contorno del objeto utilizando la técnica de auto imágenes con la ayuda de una segunda rejilla idéntica a la de la imagen proyectada. Cuando una rejilla de alta frecuencia es utilizada, varios planos de Talbot puede interceptarse en la superficie del objeto por lo que un patrón de moiré de alto contraste se formada en los planos de Talbot. Por tanto, está técnica se puede utilizar para realizar exámenes topográficos de objetos tridimensionales.

Cuando el frente de onda que ilumina a la rejilla no es plano sino esférico o distorsionado, las franjas obtenidas en la auto imagen no serán rectas sino deformadas⁴³. La explicación interferométrica en pocas palabras y sustentando lo descrito matemáticamente en las secciones anteriores, es que se asume que los frentes de onda difractados producen un interferograma de desplazamiento lateral tal como se muestra en la figura 2.20. Por el lado de la interpretación geométrica, las franjas se consideran como sombras de las líneas generadoras, proyectadas en una dirección perpendicular al frente de onda, como se observa en la figura 2.21

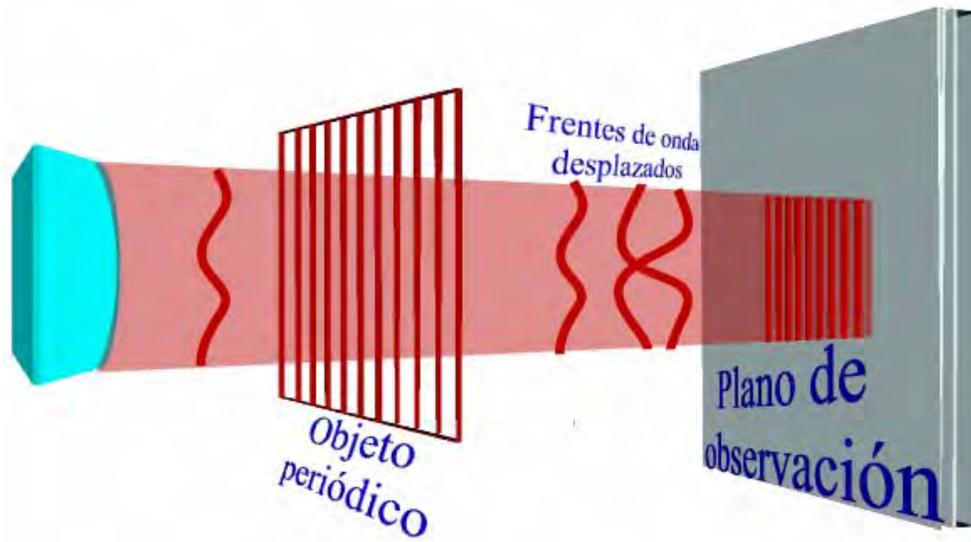


Figura 2.20. Formación de auto imágenes debido a frentes de onda esféricos o distorsionados: interpretación de frentes de onda desplazados lateralmente.

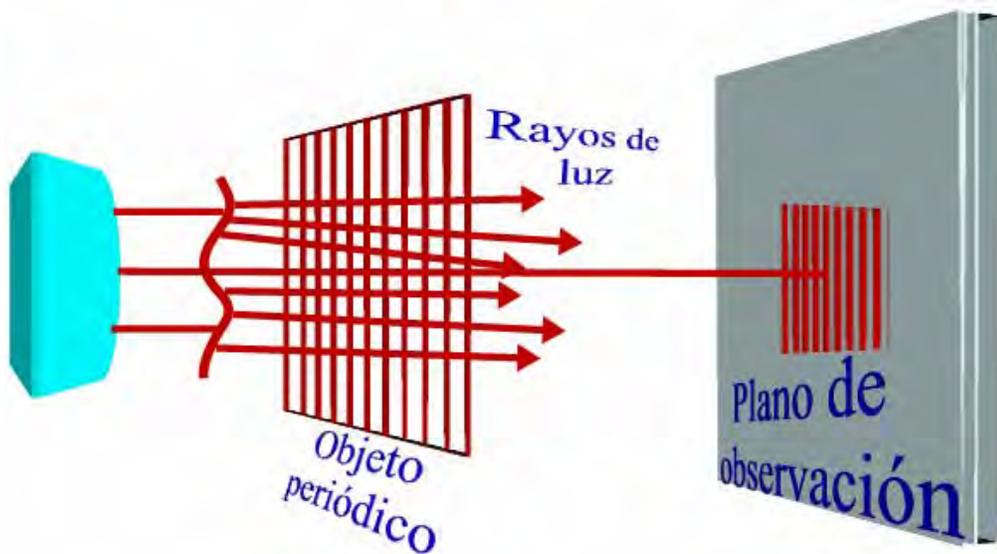
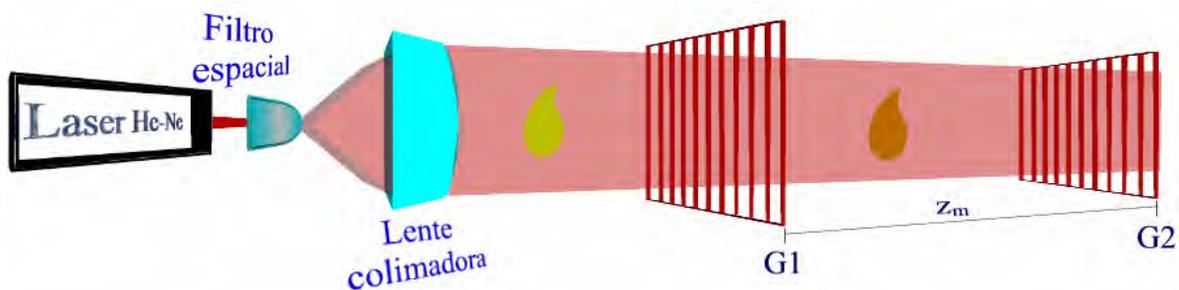


Figura 2.21. Formación de auto imágenes debido a frentes de onda esféricos o distorsionados: interpretación geométrica.

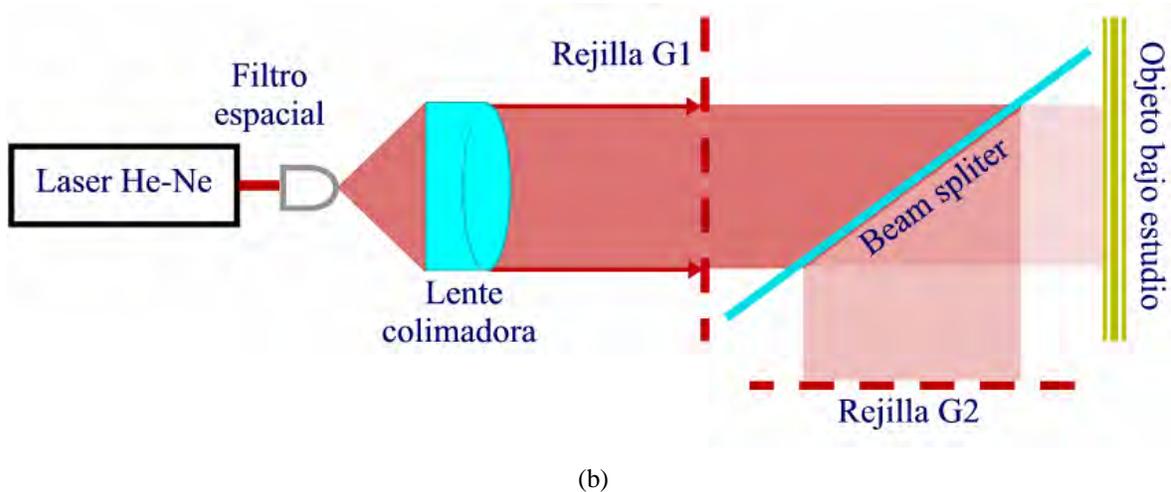
La interferometría de Talbot ha sido generosamente descrita en la literatura y entre los trabajos sobresalientes se encuentra el de Yokoseki y Susuki⁴⁴. Dicho sistema trabaja como un interferómetro de desplazamiento y utiliza el efecto de Talbot como base para proyección de las franjas. Takeda y Kobayashi⁴⁵ también utilizaron este principio para la

medición de aberraciones laterales. Rodríguez-Vera⁴⁶ propuso un arreglo basado en la proyección de franjas de Talbot como una técnica de moiré, aplicado a la obtención del contorno de objetos tridimensionales y básicamente el sistema codifica el relieve de la muestra proyectando auto imágenes a partir de una rejilla lineal iluminada con luz monocromática; una segunda rejilla, similar a la utilizada para generar el fenómeno de Talbot, se emplea para obtener el patrón de moiré que representa el contorno de la superficie de igual profundidad. Con la ayuda de técnicas para obtener la fase envuelta y la desenvuelta mediante algoritmos de procesamiento digital de imágenes, la información acerca de la topografía de la superficie bajo estudio se obtiene a partir de los mapas de contorno.

Los interferómetros típicos de Talbot, se muestran esquemáticamente en la figura 2.22. Las rejillas $G1$ y $G2$ están separadas por una distancia de Talbot z_m . En la figura 2.22a, la muestra es colocada entre las rejillas, para el caso de la interferometría de Talbot tradicional, o antes de ellas para la deflectometría de moiré. La modificación del interferómetro para el caso de muestras de tipo especulares, se muestra en la figura 2.22b. En este último caso, la superficie bajo estudio es iluminada por el haz colimado proveniente de la primera rejilla. La luz reflejada de la superficie es redireccionada al plano de Talbot de la primera rejilla. Una segunda rejilla es colocada en el plano de Talbot y nuevamente el patrón formado en el plano de la segunda rejilla, proporciona información de las franjas desviadas por la muestra con respecto a las franjas primeras.



(a)



(b)
Figura 2.22. Interferómetros típicos basados en el fenómeno de Talbot para a) objetos transparentes y b) superficies de tipo especular.

Estos métodos han sido implementados para estudiar deformaciones, dinámica de fluidos, esfuerzos mecánicos, medición del índice de refracción y obtención del gradiente de temperatura entre otros. En el presente trabajo, se modificará el interferómetro de moiré por proyección de Talbot propuesto por Rodríguez-Vera⁴⁷, para caracterizar una celda de carga (gasket) como se menciona en el capítulo 1.

2.3.2 Método de moiré por proyección de Talbot.

En sus inicios, la interferometría de Talbot se utilizaba para caracterizar objetos transparentes y de tipo especular. Posteriormente, la necesidad de tener estudios acerca de la topografía y contorno de objetos tridimensionales, contribuyó a la evolución de la técnica obteniéndose los primeros resultados a partir de los trabajos realizados por Rodríguez-Vera y colaboradores. En esta sección como primer objetivo se desarrollará la teoría concerniente a la interferometría de Talbot, para posteriormente describir las bases del método de moiré por proyección de Talbot desarrollado por Rodríguez-Vera.

Un objeto iluminado por una imagen de Talbot, donde las líneas de la rejilla son perpendiculares al plano $Y'Z'$, se muestra en la figura 2.23.

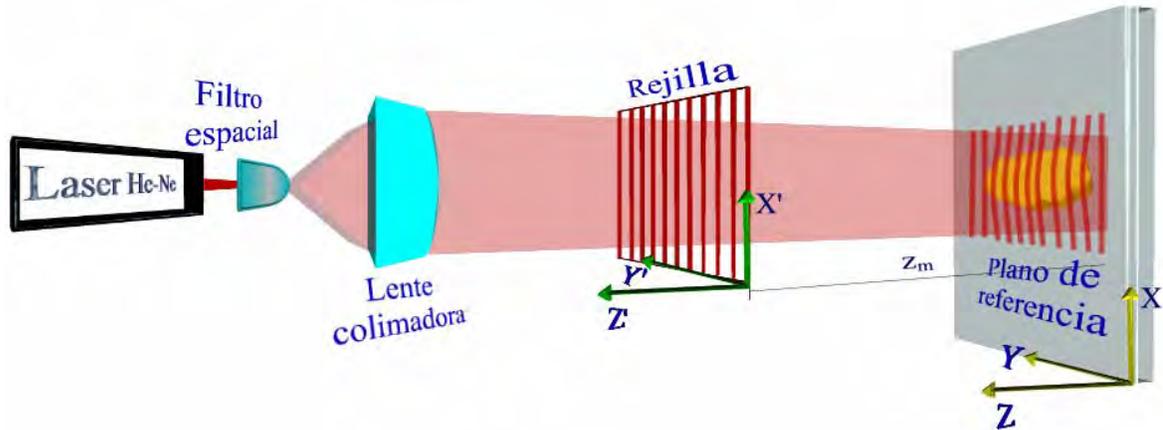


Figura 2.23. Formación de las franjas de Talbot sobre la superficie bajo estudio.

La superficie del objeto bajo estudio la describe una función dependiente de z tal que $z = f(x, y)$. La distribución de amplitud en la vecindad de la superficie de la muestra está dada por

$$O(x, y) = R(x, y, z)g(x, y) \quad 2.115$$

donde $R(x, y, z)$ es la función de reflectividad característica de la superficie del objeto y $g(x, y)$ es la función de transmitancia de la rejilla. Por tanto, la ecuación 2.115 indica que la superficie bajo estudio, la información acerca de su profundidad y por tanto de su topografía, está codificada en amplitud por una frecuencia portadora correspondiente a la frecuencia de la rejilla original. Esta propiedad es la más importante en la interferometría de Talbot, ya que es posible determinar un mapa de contornos decodificando la información contenida en las franjas con la utilización de una segunda rejilla de características similares a la que forma el patrón de franjas de Talbot, ya que superponiendo esta rejilla con las franjas de Talbot deformadas debido a la superficie del objeto que bajo análisis, se formará un patrón de moiré de baja frecuencia con respecto a la rejilla formadora de las auto imágenes. A partir del patrón de moiré, y con la ayuda de algoritmos de procesamiento digital de franjas, se puede obtener la fase envuelta y desenvuelta de la superficie bajo

estudio y a partir de esto, con el uso adecuado de las ecuaciones descriptivas de la teoría de moiré y Talbot, tener medidas reales de esta.

La figura 2.24 muestra el esquema del método de topografía de moiré por proyección de Talbot (en inglés TPMT, Talbot-projected moiré topography) descrito por Rodríguez-Vera. La rejilla G_1 es iluminada por un frente de onda colimado proveniente de un láser He-Ne. A distancias z_m con respecto a la rejilla G_1 , se forman las auto imágenes. Seleccionando una distancia de Talbot, se coloca el objeto bajo estudio. El par de lentes L_1 y L_2 de distancia focal f son colocados de tal forma que la imagen del objeto, cuya información esta codificada por G_1 , se forme sobre la segunda rejilla G_2 . Se elige una amplificación unitaria. Las rejillas G_1 y G_2 son idénticas y de periodo p . El eje de observación está a un ángulo β con respecto al eje óptico.

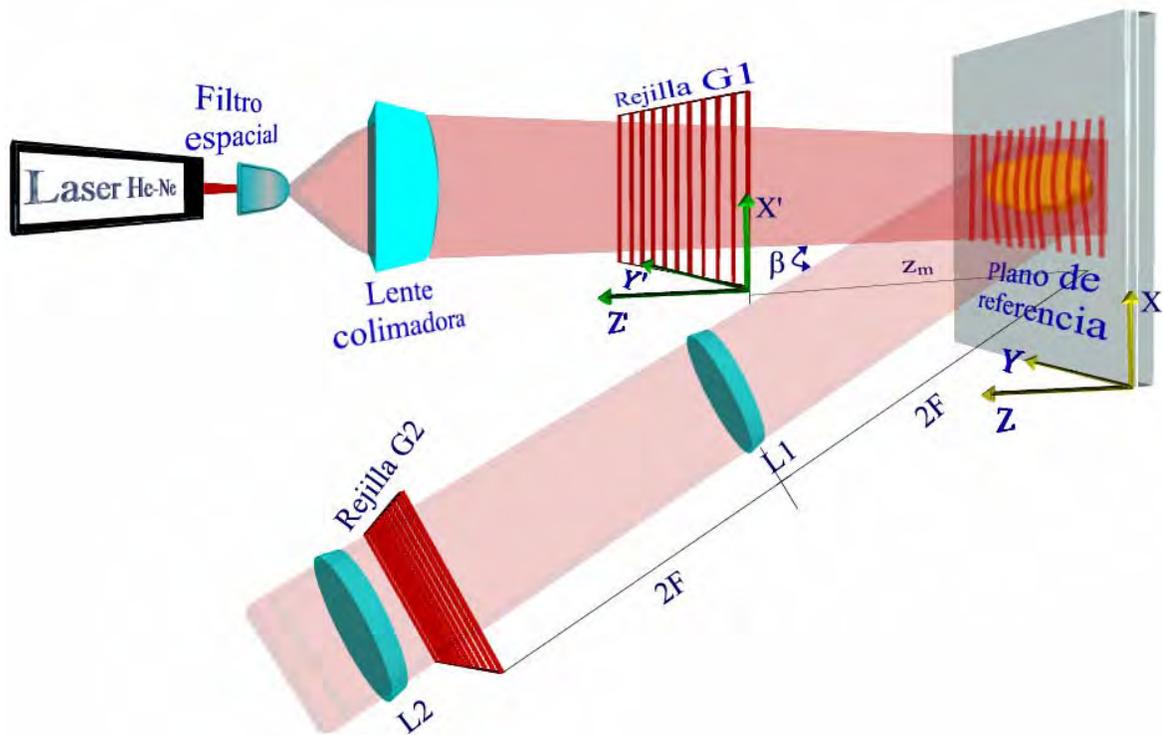


Figura 2.24. Arreglo experimental para el método TPMT.

La distribución de intensidad codificada de la superficie en el plano G_2 , se obtiene de realizar una análisis similar al mostrado en el moiré por proyección y de la ecuación 2.46, por tanto, se tiene

$$O(x, y) = a + b \cos \left[\frac{2\pi}{p_x} (x - z \tan \beta) \right] \quad 2.116$$

donde $p_x = \frac{P}{\cos \beta}$ y a, b son constantes relativas a la reflectividad del objeto, la intensidad de fondo y el contraste de franjas. Esta imagen será sobrepuesta en una rejilla de características similares, la cual actúa como demoduladora, cuyas líneas estará desplazada un ángulo θ con respecto de las proyectadas. Esta rejilla corresponde a la rejilla de referencia utilizada en la técnica de moiré por proyección, por lo que su distribución de intensidad se puede obtener a partir de la ecuación 2.46

$$g_2(x, y) = c + m \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta) \right] \quad 2.117$$

donde c y m son constantes relacionadas con el nivel de DC o bias y el índice de modulación respectivamente, tal como se comentó en la formulación física del patrón de moiré (sección 2.3.3). La distribución de intensidad total en el plano de G_2 esta dada por el producto de la ecuación 2.116 con 2.117 (superposición multiplicativa), lo que resulta en el patrón de franjas de baja frecuencia o franjas de moiré, cuya ecuación es

$$I_m(x, y) = O(x, y)g_2(x, y)$$

$$I_m(x, y) = ac + am \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta) \right] + bc \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z \sin \beta) \right] + \quad 2.118$$

$$bm \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z \sin \beta) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta) \right]$$

Al igual que en la ecuación 2.16 (sección 2.3.3), tenemos dos términos que proporcionan información de las rejillas que generan en patrón de moiré, y solo interesa para la obtención de la información de profundidad del objeto, el término constante de DC o bias y el término que forma la baja frecuencia, es decir, que proporciona la información del patrón de moiré. Por tanto, la ecuación 2.118 se llevará a la forma de la 2.17, por lo que solo interesan los siguientes términos

$$I_m(x, y) = ac + bm \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \beta - z \sin \beta) \right] \quad 2.119$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos[(A - B)] + \frac{1}{2} \cos[(A + B)]$ se

llega a

$$I_m(x, y) = ac + \frac{bm}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{p} [(x \cos \theta - y \sin \theta) - (x \cos \beta - z \sin \beta)] \right\} + \frac{bm}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{p} [(x \cos \theta - y \sin \theta) + (x \cos \beta - z \sin \beta)] \right\} \quad 2.120$$

de donde solo interesa el término de bias y el de baja frecuencia, es decir, los dos primeros términos de la ecuación 2.120. Por tanto, de 2.120 se tiene

$$I_m(x, y) = ac + \frac{bm}{2} \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x \cos \theta - y \sin \theta - x \cos \beta - z \sin \beta) \right] \quad 2.121$$

Si el argumento del coseno de la ecuación 2.121 lo igualamos a una razón periódica que indica los cambios de fase del mismo, es decir, cambios entre los máximos y los mínimos del patrón de franjas, se llega a la fórmula de las franjas de moiré por la ecuación indicial

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{p}(x \cos \theta - y \sin \theta - x \cos \beta - z \sin \beta) &= 2n\pi \\ x \cos \theta - y \sin \theta - x \cos \beta - z \sin \beta &= np \\ \therefore y &= \frac{[\cos \theta - \cos \beta]}{\sin \theta} x + \frac{\sin \beta}{\sin \theta} z + \frac{np}{\sin \theta} \end{aligned} \quad 2.122$$

donde n representa el número entero indicial. La distancia entre franjas del patrón, representa una medida absoluta de la variación en profundidad de la muestra bajo estudio correspondiente a la dirección en z , por lo que la variación en x y en y es nula entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin \theta} z + \frac{np}{\sin \theta} &= 0 \\ \therefore \Delta z &= \frac{1}{\nu \sin \beta} \end{aligned} \quad 2.123$$

donde $\nu = \frac{1}{p}$ y p es el periodo de la rejilla.

La ecuación 2.123 aparentemente indica que no hay límite para la sensibilidad de la técnica TPMT, ya que Δz se aproxima a cero cuando la frecuencia de la rejilla de modulación tiende a ∞ . Esto sucedería si no se estuviese utilizando un sistema formador de imagen en el esquema 2.24, el cual limita la resolución de la rejilla, así como el rango de profundidad que es posible medir de la superficie bajo análisis. En un sistema óptico, el límite de resolución está definido de acuerdo con el criterio de Rayleigh, el cual indica que un punto está perfectamente resuelto cuando en centro de un disco de Airy cae en el primer mínimo del patrón de Airy del otro punto, es decir, un punto máximo de intensidad en un patrón de interferencia podrá ser definido si el centro de la intensidad máxima del punto cae en el primer mínimo de intensidad del siguiente punto⁴⁸. Por esta razón, la mínima separación que es posible resolver de la rejilla proyectada, corresponde a la separación entre los bordes de dos líneas contiguas de la rejilla, es decir $\frac{p_x}{2}$, por tanto

$$\frac{p_x}{2} = \frac{1}{2\nu \cos \beta} = 1.22\lambda \cdot 2 \left(\frac{f}{D} \right) \quad 2.124$$

donde f es la distancia focal del sistema formador de imagen, D es el diámetro de apertura, λ es la longitud de onda de la fuente de iluminación, y ν es la frecuencia de la rejilla empleada para formar la auto imagen y proyectarla sobre el objeto. El limite de la profundidad de campo de difracción ε de una lente esta dada por⁴⁹

$$\varepsilon = 2.44\lambda \left(\frac{f}{D} \right)^2 \quad 2.125$$

El límite de la profundidad de campo de las lentes limita la profundidad del objeto que es posible observar siempre que esta no exceda la profundidad de campo de las lentes, si las franjas se observan a lo largo de toda la superficie. Esto significa que se puede elegir $\Delta z \cong \varepsilon$, por lo que combinando las ecuaciones 2.125 y 2.124 se llega a

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{1}{\nu \cos \beta} = 2.44\lambda \cdot 2 \left(\frac{f}{D} \right) \\ \Delta z &= \frac{1}{4.88\nu \cdot \lambda \cos \beta} = \frac{f}{D} = \left(\frac{\varepsilon}{2.44\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Delta z &\cong \varepsilon \\ \left(\frac{1}{4.88\nu \cdot \lambda \cos \beta} \right)^2 &= \frac{\Delta z}{2.44\lambda} \\ \Delta z &= \frac{2.44\lambda}{23.8144\nu^2 \lambda^2 \cos^2 \beta} \\ \therefore \Delta z &= \frac{1}{9.76\lambda\nu^2 \cos^2 \beta} \end{aligned} \quad 2.126$$

La ecuación 2.126 se puede interpretar como la máxima profundidad que es posible detectar cuando la mínima frecuencia de la rejilla es resuelta.

En el capítulo 5 se discutirá mas acerca de la resolución dada por el sistema y las modificaciones hechas al método aquí descrito y que se utilizó para la obtención de los resultados.

Referencias

1. [D. J. Whitehouse, “Handbook of Surface Metrology”, Institute of Physics Publishing, Great Britain, 1994, pp. 481]
2. [http://dpt_fisicaaplicada.uco.es/lvct/]
3. [O. Kafri, I. Glatt, “The Physics of Moiré Metrology”m Wiley & Sons Inc, 1990, cap. 1 & 2]
4. [K. Paturski, M. Kujawinska, “The Moiré Fringe Technique”, Elsevier, 1993, cap 1 & 2.]
5. [W. Tomasi, “Sistemas de Comunicaciones Electrónicas”, Prentice Hall, 1996, 2da. Edición, cap. 4]
6. [H. P. Hsu, “Análisis de Fourier”, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, capítulo 7]

7. [D. J. Whitehouse, Op. cit., pp. 481]
8. [R. Sirohi, “Optical Methods of Measurement”, Marcel Dekker Inc., 1999, pp. 261-264]
9. [R. Rodríguez-Vera, “Some advances in optical contouring of diffuse objects using moiré and speckle techniques”, Tesis de doctorado, CIO 1993, pp. 7-8]
10. [R. Rodríguez-Vera, Op. cit., pp. 10]
11. [R. Sirohi, Op. cit., 1999, pp. 247-252]
12. [B. Dessus, M. Leblanc, “The fringe method and its applications to measurement of deformations, vibrations, contour lines and differences of objects”, Opto-electronics 5, 1973, pp. 369]
13. [K. Murakami, Y. Murakami, “A study on the moiré topography (An achúrate theory and the aplicable limit of the divergent light ray method”, Bull. JSME 21, 1978, pp. 788]
14. [R. Sirohi, Op. cit., pp. 252-255]
15. [R. Rodríguez-Vera, Op. cit., pp. 12-13]
16. [R. Rodríguez-Vera, “Three-dimensional gauging by electronic moiré contouring”, Revista Mexicana de Física, Vol. 40, No. 3, 1994]
17. [R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, “Electronic moiré contouring”; Conf. Proc. Fringe 92, Leeds, Inglaterra, 31-39]
18. [H. F. Talbot, Phil. Mag. And J. Sci. London 9, 1836, 401]
19. [Lord Rayleigh, “On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith”, Philos. Mag, 11, pp 196-205 (1881)]
20. [A. W. Lohmann, D. E. Silva, “An interferometer based on the Talbot effect”, Opt. Comm. 2, 1971, 413]
21. [R. Sirohi, Op. cit., pp. 270]
22. [D. Malacara Doblado, “Las auto imágenes de Talbot, teoría y aplicaciones”, Tesis de maestría en ciencias, CIO, 1995, cap. 1]
23. [J. M. Cowley, A. F. Moodie, Proc. Phys. Soc. (London), Ser. B:70, 1957, 486]
24. [M.. Born, E. Wolf, “Principles of Optics”, Cambridge University Press, Séptima edición]

25. [W. D. Montgomery, "Self-Imaging Objects of Infinite Apertures", JOSA, Vol. 57-6, 1967, pp. 772-778]
26. [J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw Hill Inc., 2ª edición, 1996, cap. 3-4]
27. [D. Malacara H., "Óptica básica", Fondo de cultura económica, 1989, pag. 378-380]
28. [A. Castro I., "Arreglos de iluminación para interferometría Talbot", Tesis de maestría en ciencias, INAOE, 1996, apéndice B]
29. [K. Patorski, Op. cit. 70-77]
30. [O. Kafri, Op. cit, cap. 6]
31. [P. Latimer, R. F. Croase, "Talbot effect reinterpreted", Applied optics, Vol 31-1. 1992, pp. 80-89]
32. [K. E. Oughston, "Select papers on: scalar wave diffraction", SPIE, Vol. MS-51]
33. [D. Malacara H., "Óptica básica", Fondo de cultura económica, 1989, pag. 378-380]
34. [E. Hecht, "Óptica", Addison Wesley, 3ª. Edición, 1998, pp. 120]
35. [H. P. Hsu, "Análisis de Fourier", Addison-Wesley Iberoamericana, 1987]
36. [J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw Hill Inc., 2ª edición, 1996]
37. [H. P. Hsu., Op. cit., cap. 2]
38. [J. Ojeda-Castañeda, "Focus-error operator and related special functions", J. Opt. Soc. Am., Vol. 73, No. 8, 1983, pp. 1042-1043.]
39. [M. A. Castro I., "Arreglos de iluminación para interferometría Talbot", Tesis de maestría en ciencias, INAOE, 1996, Apéndice C]
40. [M. Born, E. Wolf, Op. cit., cap. 1.]
41. [R. K. Wangsness, "Electromagnetic Fields", John Wiley & Sons, 1979, cap. 24]
42. [S. M. Tan, "Sistemas Lineales", The University of Auckland]
43. [D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, "Interferogram analysis for optical testing", Marcel Dekker Inc., 1998, pp. 24-25]
44. [S. Yokoseki., T. Susuki, "Shearing Interferometer using the grating as the beam splitter", Appl. Opt., Vol. 10, 1971^a, 1575-1580]

45. [M. Takeda., S. Kobayashi., “Lateral aberration measurements with a digital Talbot interferometer”, Appl. Opt., Vol. 23, 1984, 1760-1764.]
46. [R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza Santoyo, “3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes”, Journal of Modern optics, Vol. 38, 1991, pp. 1935-1945]
47. [R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza Santoyo, Op. cit., pp. 1935-1945]
48. [E. Hecht, Op. cit., pp. 140-141]
49. [J. W. Goodman, Op. cit.]

CAPÍTULO 3

Caracterización del microscopio óptico.

3.1 Introducción.

En el esquema experimental propuesto en el presente trabajo, se utiliza un microscopio estereo y una cámara CCD acoplada a éste, para obtener las imágenes de la muestra bajo estudio junto con las imágenes proyectadas sobre ésta. Por tanto, es importante mencionar las características y funcionamiento básico de un CCD (Charge-coupled devices, por sus siglas en inglés) así como de entender el papel que desempeña el microscopio estereo dentro del arreglo experimental planteado.

3.2 ¿Por qué utilizar un microscopio óptico?

La idea fundamental del uso de un microscopio estereo, radica en el trabajo futuro que es posible realizar con la implementación de la técnica óptica aquí descrita basada en el TPMT descrito en el capítulo anterior, ya que la idea es trasladar el estudio presentado a objetos tridimensionales cuyas dimensiones se encasillan en el rango de las docenas o centenas de micras. Entonces, el microscopio se esta utilizando para tener una familiarización con sus características y corroborar que funcione adecuadamente en el arreglo.

Por otro lado la necesidad de caracterizar objetos mecánicos y electrónicos cada vez más pequeños se ha incrementado, y debido a que los métodos ópticos son no invasivos y de campo completo, es lógico considerar la posible aplicación de estos mismos para el estudio de objetos tridimensionales microscópicos (de unas cuantas docenas o centenas de micras). Dentro de este rango de aplicaciones se encuentran los sistemas micro-electro-mecánicos (Micro Electrical-Mechanical Systems, MEMS por sus siglas en inglés), los cuales actualmente son ampliamente utilizadas en diversos campos de la física y la ingeniería.

Para poder observar dichos mecanismos, es necesario utilizar sistemas ópticos no convencionales para formar la imagen, entre estos se encuentra el microscopio óptico el cual tiene una amplia gama de variaciones en su constitución, de acuerdo a la aplicación que se requiera. Así se cuenta con microscopios simples y compuestos como la primera gran clasificación de los mismos llegando a los modernos microscopios estereo, microscopios confocales, microscopios electrónicos, microscopios atómicos, entre otros.

Por tanto, la caracterización de los MEMS se logrará con la ayuda de sistemas ópticos como el microscopio. Un buen inicio para lograr dicho fin, es utilizar dicho mecanismo óptico para caracterizar objetos tridimensionales de apenas unos cientos de micras de tamaño y de ahí que se proponga el uso de un microscopio estereo para la caracterización de la gasket, la cual es un objeto de unos pocos milímetros o cientos de micras de dimensión, como preámbulo para extender la técnica hacia la caracterización de MEMS.

3.3 El microscopio estereo.

El microscopio es un instrumento óptico destinado a observar de cerca objetos extremadamente diminutos. La combinación de sus lentes produce el efecto de lo que se observe aparente tener dimensiones extraordinariamente aumentadas, haciéndose perceptible lo que no lo es a simple vista. Se encuentra en el diccionario¹ el origen de la palabra: proviene de *micro* y del griego *skopeîn* que significa observar. Se distinguen dos tipos principales:

- Microscopio simple: el cual es un sistema óptico constituido por una lente convergente dotada de un elemento de sustentación.
- Microscopio compuesto: es un sistema óptico constituido por dos o mas lentes.

Propiedades ópticas del microscopio.

El proceso de formación de la imagen en un microscopio tiene lugar de la siguiente forma: el objeto debe estar situado en las proximidades del foco del objetivo y a una distancia mayor que la focal; de este modo se produce una imagen (imagen objeto) real, mayor que el objeto e invertida, y que debe formarse entre el ocular y su foco anterior; en estas condiciones el ocular se comporta como una lupa y a partir de la imagen objeto proporciona la imagen ocular, de acuerdo con lo mostrado en la figura 3.1. La imagen ocular debe formarse a una distancia del ojo del observador distinta al límite de la visión superior. A fin de que no sea preciso un esfuerzo de acomodación por parte del observador, conviene que la imagen virtual ocular se forma en el infinito, lo que supone que el haz emergente sea de rayos paralelos, es decir, que la imagen objeto se forma en el foco del ocular, por lo que es preciso enfocar el instrumento; esto se consigue desplazando el tubo a lo largo de la columna hasta lograr una imagen nítida. Muchos microscopios disponen de un sistema de revólver que permite sustituir un ocular por otro de distinta potencia sin necesidad de enfocar de nuevo, y de un sistema zoom que permite variar con continuidad la potencia del ocular.

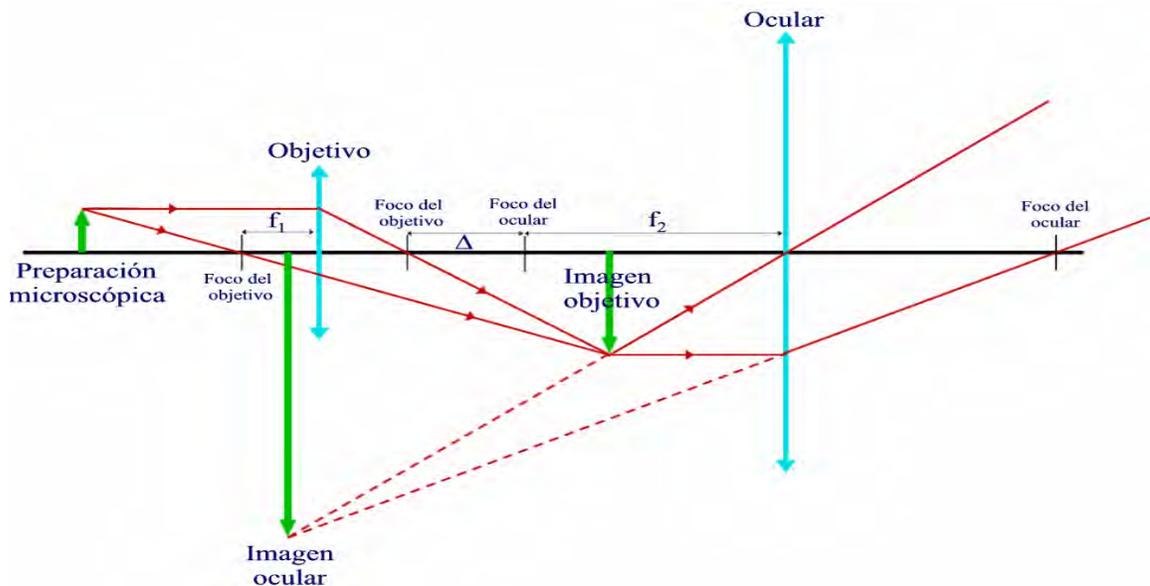


Figura 3.1. Elementos ópticos de un microscopio y formación de la imagen.

El aumento visual del microscopio se define como la relación existente entre el ángulo bajo el cual se ve el objeto con el microscopio y el correspondiente a la visión directa cuando se coloca el objeto a la distancia de visión distinta del ojo (a 25cm de éste). Si f_1' y f_2' son las distancias focales de objetivo y ocular respectivamente, el aumento del microscopio queda determinado por la expresión:

$$A = -25 \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} \quad 3.1$$

donde Δ es la distancia entre los focos imagen del objetivo y objeto del ocular, también recibe el nombre de longitud óptica del microscopio. El aumento puede escribirse en la forma:

$$A = A_1 A_2 \quad 3.2$$

donde $A_1 = \frac{\Delta}{f_1'}$ es el aumento del objetivo y $A_2 = \frac{25}{f_2'}$ es el aumento del ocular

considerado como una lupa ordinaria de potencia $\frac{1}{f_2'}$. Considerando el microscopio como

la asociación de los sistemas centrados, objetivo y ocular, su potencia esta determinada por

$$P = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} \quad 3.3$$

La resolución tanto en un microscopio común como en un microscopio estereo, se calcula a partir de la longitud de onda de iluminación y la apertura numérica del objetivo. La apertura numérica es una medición del poder de resolución del objetivo y se define como la mitad de la apertura angular del objetivo multiplicada por el índice de refracción del medio donde se forma la imagen (comúnmente en estereomicroscopia es el aire). Dividiendo la longitud de onda de la fuente de iluminación por la *apertura numérica*, la mínima distancia discernible entre dos puntos contiguos de la muestra, está dada por la ecuación (criterio de Rayleigh):

$$Re\ soluci\ on(d) = \frac{1.22 \cdot \lambda}{n \sin \theta} \quad 3.4$$

donde d es la mínima distancia que es posible resolver, λ es la longitud de onda de la fuente de iluminación, n es el índice de refracción del medio entre el objetivo y la muestra

y θ es la mitad de la apertura angular del objetivo; la cantidad $n \sin \theta$, también se conoce como la apertura numérica del objetivo.

El *f-número* (abreviado *f*), indica la habilidad de un objetivo de microscopio de captar la luz. El *f-número* puede convertirse en apertura numérica (y viceversa) tomando el recíproco de uno de ambos valores, es decir

$$\begin{aligned} f \text{ - Número}(f) = f\# &= \frac{1}{2 \cdot NA} \\ NA &= \frac{1}{2 \cdot f\#} \\ f\# &= \frac{f}{D} \end{aligned} \quad 3.5$$

La *apertura numérica* (NA), es igual al índice de refracción del medio donde se forma la imagen multiplicada por la apertura angular del objetivo. También, el *f-número* es posible calcularlo dividiendo la distancia focal del sistema de lentes por el diámetro de apertura. Por último, la profundidad de campo y las variaciones de la apertura numérica están en función de la abertura del diafragma, que en el caso de un microscopio estereo, tiene dos diafragmas, uno por canal. La función de éstos es producir un incremento en la profundidad de campo mientras se mejora el contraste de la muestra observada por los oculares. Existen diversos tipos de microscopios cuya mayoría constituyen variantes en sus sistemas, adaptadas a diversos usos, entre los que se pueden mencionar: el microscopio ordinario o de laboratorio, el microscopio de rayos X, el microscopio electrónico de barrido, microscopio polarizante, microscopio de reflexión, microscopio de contraste de fase, microscopio de emisión de campo, microscopio estereo, entre otros. A continuación se describirán las características principales del microscopio estereo, el cual es el utilizado en el esquema experimental que se describirá en capítulos posteriores.

El origen de la palabra *estereo*, proviene del latín *steron* y éste a su vez del griego *stereós*, sólido, y originalmente es la unidad de medida para leñas, equivalente a la leña que puede colocarse, apilada, en el espacio de un metro cúbico⁴; una voz que no proviene de la academia es también *estereo* que es la forma prefija del griego *stereós*, sólido: ESTEREOscópico. Se usa también en la formación de neologismos que denotan “tres

dimensiones”: ESTEREOfónico⁵, ya que diversos estudios han concluido que los ojos y el cerebro humano funcionan coordinadamente para producir lo que se conoce como visión estereoscópica, la cual permite percibir, espacialmente, imágenes tridimensionales de los objetos con los que se tiene contacto. Esto se logra debido a que la interpretación que el cerebro realiza de las dos imágenes ligeramente diferentes recibidas de las retinas. En promedio, la distancia que separa al ojo izquierdo del derecho, es de aproximadamente 64-65mm, y cada ojo percibe un objeto desde un punto de vista diferente, dependiendo de los pocos grados de diferencia que existe de uno con respecto del otro. Cuando las imágenes capturadas por la retina se transmiten al cerebro, las imágenes son unidas, pero aún mantiene un algo grado de profundidad en cuanto a su percepción se refiere, lo cual es de remarcar. La estereomicroscopía aprovecha esta habilidad para percibir la profundidad transmitiendo imágenes gemelas las cuales son inclinadas un pequeño ángulo, entre 10 y 12 grados, para alcanzar un efecto estereoscópico verdadero. Por lo tanto, la palabra estereoscópico va de la mano con la percepción, es decir, de como los ojos perciben la intensidad luminosa reflejada por objetos tridimensionales y la manera en como el cerebro la decodifica.

Los microscopios monoculares (un solo ocular) pertenecen a la familia de microscopios llamadas “microscopios de alta potencia” debido a su gran capacidad amplificadora, o “microscopios compuestos” ya que cuentan en su mecanismo diversas lentes objetivas. A diferencia de éstos, los microscopios estereo, cuyo funcionamiento se explica brevemente en el apéndice C, son conocidos como de “baja potencia”, ya que se utilizan para observar objetos relativamente grandes con respecto a aquellos que se analizan bajo un microscopio monocular. A diferencia de los microscopios binoculares, los microscopios estereo tienen sus propias lentes objetivas para cada uno de sus oculares. Por tanto, el objeto se observara en tercera dimensión o “estereo” bajo un microscopio estereo.

3.4 Características del microscopio estereo utilizado

De acuerdo al sistema óptico implementado en el microscopio estereo, este puede clasificarse como: sistema de gran ocular común (CMO, por sus siglas en inglés) y sistema

de Greenough, en honor a su diseñador Horatio Greenough a finales de 1890, cuyo sistema de lentes erectores de imagen fue adoptado por la compañía Carl Zeiss de Jena. Para conocer las ventajas y desventajas entre ambos sistemas, así como un referente histórico del desarrollo de la estereomicroscopía, consulte el apéndice C. El microscopio estereo utilizado en el arreglo experimental⁶, fue producido por la compañía Zeiss y es un model Stemi 2000-C de tipo Greenough, para visión simultánea estereoscópica, con un divisor de haz interno 50-50% y soporte para el montaje de una cámara CCD. La figura 3.2 representa esquemáticamente el recorrido óptico por cada uno de los haces luminosos que inciden en las dos trayectorias posibles del microscopio. Las dimensiones son (ancho x profundidad x altura) 65x336x371mm y un peso de 4.8kg. El rango de operación se encuentra de +15 a +35°C, con una humedad relativa de <85% y una presión atmosférica de 800 a 106mbar.

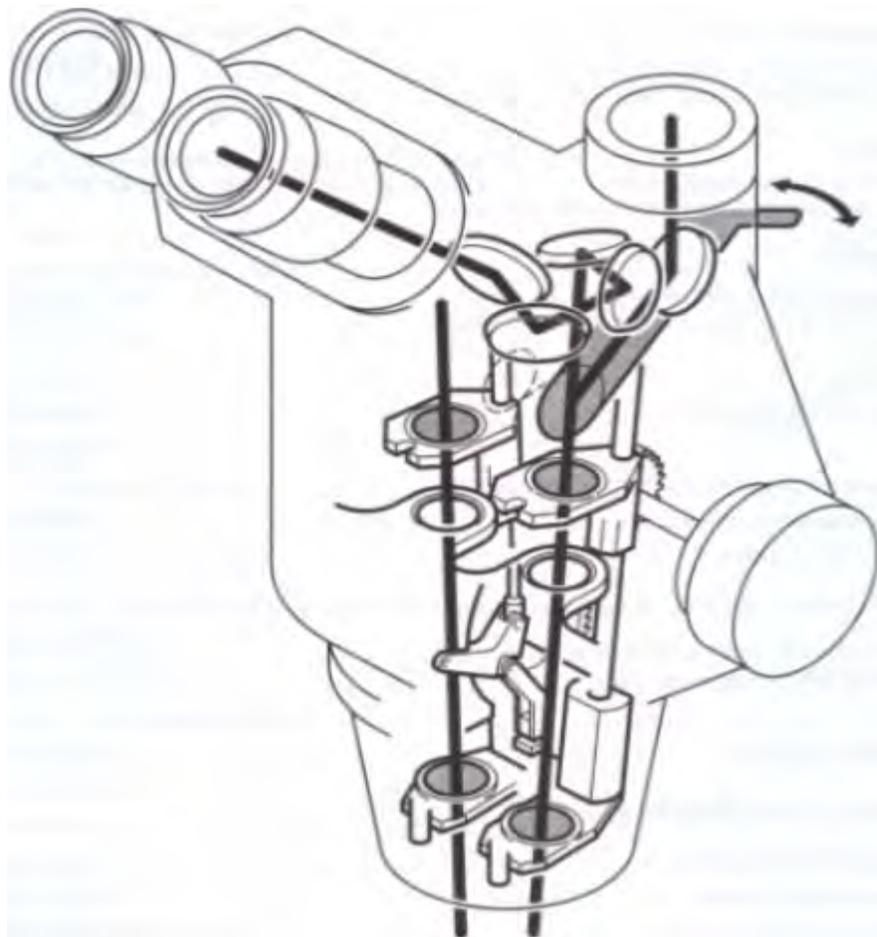


Figura 3.2. Esquema óptico del stemi 200-C

Sus características ópticas son:

- ángulo estereo de 11°
- rango del zoom de 0.65x-5.0x
- distancia libre de trabajo de 92mm
- ángulo de visión 35°
- distancia ajustable al ojo 55-75mm
- lentes auxiliares
 - o 0.3x FOD = 285mm (FOD, Free operating distance)
 - o 0.4x FOD = 210mm
 - o 0.63x FOD = 130mm
 - o 2.0x FOD = 31mm
- rango de amplificación visual básica (sin lentes auxiliares) de 6.5x-50x

La tabla 3.1 resume algunas características ópticas del sistema. (spectacles, capable of focusing; spect. Foc.); la figura 3.3 muestra los elementos principales en este microscopio. Para el esquema implementado en el laboratorio, se utilizó una lente auxiliar de 0.3x, la cual proporciona una distancia libre de operación de 285mm, con un ocular de W-PL 10x y distancia focal de 23mm, proporciona una amplificación máxima total de 15.0x y mínima de 1.95x, la cual se puede ajustar con la perilla del zoom mostrada en la figura 3.3. Por tanto el área de trabajo de 118 a 15.3mm, lo cual cumple con los requisitos que se requieren para caracterizar la gasket. El diámetro del ocular es de 2.6mm por tanto

$$f\# = \frac{f}{D} = \frac{23mm}{2.6mm} = 8.84$$

$$NA = \frac{1}{2 \cdot f\#} = \frac{1}{2(8.84)} = 0.056056$$

que es la apertura numérica del ocular. La apertura numérica de la lente auxiliar vendrá dada en términos de su amplificación y la distancia a la cual se encuentra la muestra, es decir

$$M = \frac{-f}{x_o} \quad 3.6$$

$$f = M \cdot x_o$$

donde la distancia a la cual se encuentra la muestra bajo análisis es de 400mm, y el diámetro de la lente auxiliar es de 53mm. Por tanto con la ayuda de la ecuación 3.5, se obtiene una apertura numérica de la lente auxiliar de

$$NA_{aux} = 0.2208$$

Lente auxiliar	Ocular							
	W 10x/21 focal		W-PL 10x/23 spect. Foc.		W-PL 16x/16 spect. Foc		W 25x/10 foc.	
	Amplificación total	Campo de la muestra (mm)	Amplificación total	Campo de la muestra (mm)	Amplificación total	Campo de la muestra	Amplificación total	Campo de la muestra (mm)
0.3x	1.95x ... 15.0x	107.7 ... 14	1.95x ... 15.0x	118 ... 15.3	3.1x ... 24.0x	82.1 ... 10.7	4.9x ... 37.5x	51.3 ... 6.7
0.4x	2.6x ... 20.0x	80.8 ... 10.5	2.6x ... 20.0x	88.5 ... 11.5	4.2x ... 32.0x	61.5 ... 8.0	6.5x ... 50.0x	38.5 ... 5.0
0.63x	4.1x ... 31.5x	51.3 ... 6.7	4.1x ... 31.5x	56.2 ... 7.3	6.6x ... 50.4x	39.1 ... 5.1	10.2x ... 78.8x	24.4 ... 3.2
1x	6.5x ... 50x	32.3 ... 4.2	6.5x ... 50x	35.4 ... 4.6	10.4x ... 80.0x	24.6 ... 3.2	16.3x ... 125.0x	15.4 ... 2.0
2x	13x ... 100.0x	16.2 ... 2.1	13x ... 100.0x	17.7 ... 2.3	20.8x ... 60x	12.3 ... 1.6	32.5x ... 250x	7.7 ... 1.0

Tabla 3.1. Características ópticas del Stemi 2000-C.

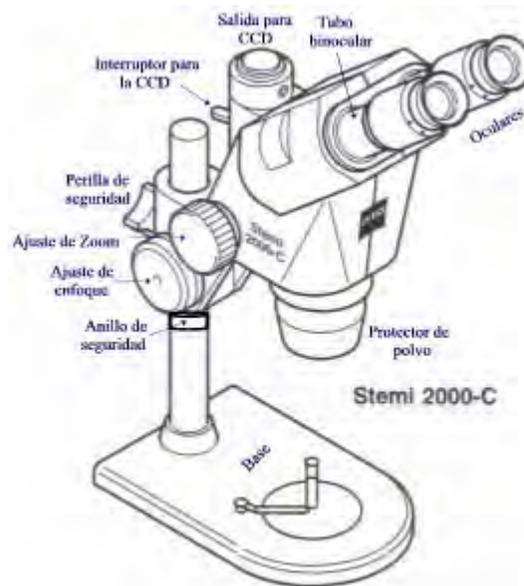


Figura 3.3. Elementos principales del Stemi 2000-C.

3.5 La cámara CCD.

Un CCD (Charge-coupled devices, por sus siglas en inglés) es un arreglo semiconductor en donde la carga (excitación fotoeléctrica) es leída fuera del área de almacenaje. Es decir, se transportan pulsos almacenados en el material semiconductor. La arquitectura CCD cumple con tres funciones básicas:

- Recolección de carga.
- Transferencia de carga.
- Conversión de la carga el voltaje medible.
- Detectar paquetes individuales de carga que son convertidos a un voltaje de salida y codificados digitalmente.

Como un CCD no es otra cosa mas que un detector cuántico de luz⁶, es deseable que cumpla con las características mínimas de relación señal-ruido entre otras, que nos permita tener una apropiada caracterización del mismo así como una respuesta rápida y eficaz.

Algunas características de un detector Ideal son:

- 100% de eficiencia cuántica (QE).
- Respuesta uniforme perfecta.
- Sin generación de ruido.
- Rango dinámico amplio.
- Características estándares completas.

Algunas características que cumplen de manera general los CCDs:

- Alta Eficiencia Cuántica (QE)
- Alta linealidad
- Amplio rango dinámico

- Respuesta uniforme a grandes distancias de sensado
- Baja relación de señal-ruido
- Es un elemento digital

Algunas limitaciones de los CCDs:

- Área de cobertura pobre
- Respuesta pobre al azul
- Problemas de transferencia de carga con bajos niveles de luz
- Capacidad actual del detector de hasta 2048x2048

Por otro lado, actualmente los CCDs se han acercado mucho a cumplir las características de un detector ideal, por lo cual sus aplicaciones son varias y son utilizados en diversos campos de la física actual. Algunas de las aplicaciones generales de estos detectores son:

- Sistemas de formación de imágenes en general.
- Visión robótica
- Aplicaciones científicas
- Aplicaciones militares

De manera general, se puede decir que el CCD:

- Fue inventado por Boyle y Smith, de los laboratorios Bell, en Abril de 1970.
- Requieren de un sistema óptico para mandar la imagen dentro del arreglo del área fotosensitiva.
- Uso más común: en cámaras de video estándar (conocidas como cámaras de estado sólido)

Otros tipos de detectores que función bajo el mismo principio:

- CID (Charge Injection Devices)
- CMOS (Complementary Metal-Oxide-Semiconductors)

La arquitectura CCD cumple con cuatro funciones básicas:

- Recolección de carga;
- Transferencia de carga;
- Conversión de la carga el voltaje medible;
- Detectar paquetes individuales de carga que son convertidos a un voltaje de salida y codificados digitalmente.

La CCD utilizada en el laboratorio, de acuerdo a la hoja técnica⁸, es una cámara marca JAI modelo CV-S3200 cuya frecuencia de muestreo para el sistema NTSC es de 525 líneas a 30 frames/segundo. El pixel mide de alto 9.8micras verticales y 8.4micras horizontales. El formato del sensor es de 1/2 pulgada a color que corresponde a 4.8mm verticales por 6.4mm horizontales, tipo IT EXview HAD CCD cuya sensibilidad es de 0.09lux y proporciona una resolución de imagen de aproximadamente 768(h) x 494(v) píxeles efectivos. Las dimensiones de la cámara son 45x55x110.2 (alto, ancho, largo).

La tarjeta digitalizadota es una marca⁹ imagenation tipo PXC200 precision color frame grabber de alta precisión a color, cuya resolución de captura de imágenes en formato NTSC es de 640(h) x 480(v) píxeles, de bus PCI.

Referencias

1. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopedico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Tomo 14, pp. 259]
2. [E. Hecht, “Óptica”, Addison-Wesley, 3^a. Edición, 2000, pp 472]
3. [W. J. Smith, “Modern Optical Engineering”, McGraw-Hill, 1966, pp 140-141]
4. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopédico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Vol. 8, pp. 214]
5. Idem.
6. [“Operating manual Stemi 1000/2000/2000-C”, Manual B 40-002 e, Carl Zeiss Mikroskopie, 1998]
7. [G. C. Holst, “CCD Arrays Cameras and Displays”, JCD Publishing]
8. [[http:// www.jai.com](http://www.jai.com)]
9. [[http:// www.imagenation.com](http://www.imagenation.com)]

CAPÍTULO 4

Análisis de Franjas.

4.1 Introducción

Existen una cantidad amplia de disciplinas involucradas en el proceso de analizar y cuantificar las propiedades de una superficie o de algún objeto en particular. Una de éstas y quizá la más importante, por lo menos para el objetivo que se persigue en este trabajo, es la relacionada con el procesamiento digital de imágenes conectada con la magnitud que se desea medir. Procesar la información es tomar algunos datos de la superficie que se desea medir, de todo el universo de datos originales disponibles, para realizar cambios, separar o identificar características las cuales pueden tener un significado particular.

La cantidad que es medida por una CCD es la intensidad de la luz. Como se comentó en el capítulo 2, la cantidad que interesa medir en un interferograma esta codificada en la diferencia de fase de los trenes de onda que interfieren entre sí. Los algoritmos computacionales para procesamiento digital de imágenes, son una herramienta muy poderosa para obtener información específica acerca de una característica, detalle o área dentro de una imagen. Dentro del amplio mundo del procesamiento digital de imágenes, interesa conocer el campo del procesamiento digital de franjas, el cual es utilizado para encontrar la información de la diferencia de fase en un interferograma y, por tanto, decodificar los datos involucrados para obtener la forma, la deformación o la topografía de un objeto en particular. Por esto, el propósito del presente capítulo es introducir y comentar las principales técnicas utilizadas para determinar la fase a partir de una imagen digital.

4.2 ¿Qué es la fase?

Intentar describir el concepto de fase, resultaría tan complicado como tratar de definir filosóficamente lo que es la luz o lo que significa una onda electromagnética ya que todos estos son términos abstractos y no se refieren a una unidad de especie determinada ni

designan una realidad material. El significado de la palabra fase, según el diccionario de la Real Academia Española¹, proviene del griego φ σις, que significa manifestación y se define como “cada uno de los estados sucesivos de un fenómeno natural o histórico, o de una doctrina, o negocio, etc.”. La diferencia de fase según la misma fuente significa “en dos procesos periódicos, diferencia entre los valores que, en un momento dado, tiene la respectiva fracción de periodo”, o dicho en otras palabras, el intervalo de tiempo o ángulo de fase por el cual una onda adelanta o atrasa con respecto a otra. Esta última definición es la que más se acomoda a los objetivos que en el presente capítulo se pretenden cubrir, es decir, se puede inferir de la definición que, mediante la utilización de algoritmos computacionales, se desea medir los valores que existen en una fracción de periodo cuando dos ondas se interfieren y producen un interferograma, donde esa discrepancia de valores es generada por los cambios que sufren las franjas de interferencia al envolver a un objeto que presenta forma o variación en su forma con respecto a un plano de referencia.

El ángulo de fase en una onda periódica, representa el número apropiado de unidades de una mediada angular entre un punto de la onda y un punto de referencia. El punto de referencia puede ser cualquier punto sobre la onda periódica. Comúnmente, un ciclo completo de una onda mide 2π radianes. Por tanto, en un interferograma se tendrá una también una medición del ángulo de fase, es decir, de la diferencia de un punto de una onda con respecto a otro de referencia que puede encontrarse en la onda que interfiere un pequeño lapso de tiempo después con la de referencia o inicial.

4.3 Métodos de análisis de franjas

Como se explico en el capítulo 2, la técnica de proyección de moiré por el método de Talbot sobre un objeto tridimensional, formara un patrón de franjas el cual se interpreta como un mapa de contorno el cual debe ser expresado de una forma asequible para cualquier persona y por tanto deben ser analizados procesando digitalmente este interferograma. Como se menciono en el capítulo 3, un CCD es un dispositivo cuántico que mide la intensidad de las ondas incidentes en el. La distribución de intensidad de un patrón

de franjas, de acuerdo a la teoría documentada en el apéndice A y lo analizado en el capítulo 2, puede expresarse como

$$I(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos[2\pi \cdot f_f x + \phi(x, y)] \quad 4.1$$

donde $A(x, y)$, $B(x, y)$, $\phi(x, y)$, f_f representan la intensidad de fondo, la amplitud, la fase y la frecuencia espacial del patrón de franjas, respectivamente. Cuando la fase de un patrón de franjas en un punto específico (x, y) y su localización son conocidos, las características que se desean conocer del objeto sobre el cual se generó el patrón de franjas tales como deformaciones o dimensiones físicas, pueden determinarse.

En el campo de la metrología, existen una cantidad considerable de publicaciones y literatura acerca de la detección y determinación de la fase a partir de un patrón de franjas de interferencia. Por esta razón, dependiendo de la fecha, la publicación y el autor, se presentan muy diversas clasificaciones de los métodos existentes para dicho fin. Dicho de otra manera, la categorización que se realiza de los métodos para la detección de la fase, puede variar de un autor a otro.

Las técnicas interferométricas para detección de fase, tentativamente, se podrían clasificar en dos grandes grupos², que son:

- Técnicas homodinas. En estos, solamente una longitud de onda es utilizada.
- Técnicas heterodinas. Cuando dos variables intervienen en su caracterización (donde, generalmente, una de ellas es la longitud de onda).

A partir de aquí, se pueden dividir en dos categorías: métodos estáticos y métodos dinámicos³. En los métodos estáticos para la evaluación de la fase se requiere conocer el centro de las franjas además de requerirse información adicional para determinar el signo de la superficie, es decir, para determinar en que momentos se produce un cambio de fase en la superficie. Los métodos estáticos pueden a su vez dividirse en tres grupos separados:

- Seguidor de contorno de franjas (Contour fringe tracking).
- Técnicas en el dominio de Fourier.
- Técnicas en el dominio espacial.

Los métodos dinámicos presentan la ventaja de que los cambios de signo del patrón de franjas pueden ser resueltos sin ambigüedad alguna. Pueden dividirse en tres grandes grupos:

- Técnica heterodina.
- Técnica de fase cerrada (Phase-locked technique).
- Técnica de desplazamiento de fase (Phase-stepping).

Para consultar información mas detallada acerca del tema, se puede consultar la bibliografía aquí propuesta^{4,5}.

4.4 Técnica del desplazamiento temporal de la fase

En un detector tipo CCD, se miden dos estados consecutivos de una imagen, una intensidad para el estado de referencia y otra diferente para el estado deformado por lo que de esta forma, la ecuación 4.1 puede ser condensada en los siguientes términos

$$\begin{aligned} I &= A_0 + B_m \cos(\phi_r) \\ I' &= A'_0 + B'_m \cos(\phi_d) \end{aligned} \quad 4.2$$

donde A_0, B_m se conocen como intensidad de fondo e intensidad de modulación, respectivamente. Si se supone que $A_0 = A'_0; B_m = B'_m$ el número de variables desconocidas se reduce a cuatro A_0, B_m, ϕ_r, ϕ_d . En la práctica, se considera analizar al estado de referencia y al deformado individualmente, con solo tres variables desconocidas en cada estado A_0, B_m, ϕ_r .

La finalidad que se busca con los desplazamientos de fase temporales⁶, es determinar los estados desconocidos de varias mediciones de intensidad realizadas en un mismo interferograma, introduciendo una diferencia de fase adicional en cada medición y de aquí el nombre de *desplazamiento de fase*, es decir, el cambio en la fase de una señal periódica con respecto a una referencia. Este cambio se logra modificando la longitud de uno de los caminos ópticos, con respecto a otro, en fracciones de la longitud de onda de la fuente de iluminación que es el láser. La intensidad de las mediciones se almacena consecutivamente en el tiempo y de aquí el nombre de “desplazamiento temporal de la fase”. La manera mas ampliamente difundida para el procesamiento digital de franjas basado en el desplazamiento temporal de la fase, se puede observar en la figura 4.1. Consiste en tomar y grabar cuatro imágenes consecutivas agregando un desplazamiento de $\frac{\pi}{2}$ entre ellas

$$\begin{aligned} I_1 &= A_0 + B_m \cos(\phi_r) \\ I_2 &= A_0 + B_m \cos\left(\phi_r + \frac{\pi}{2}\right) \\ I_3 &= A_0 + B_m \cos(\phi_r + \pi) \\ I_4 &= A_0 + B_m \cos\left(\phi_r + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad 4.3$$

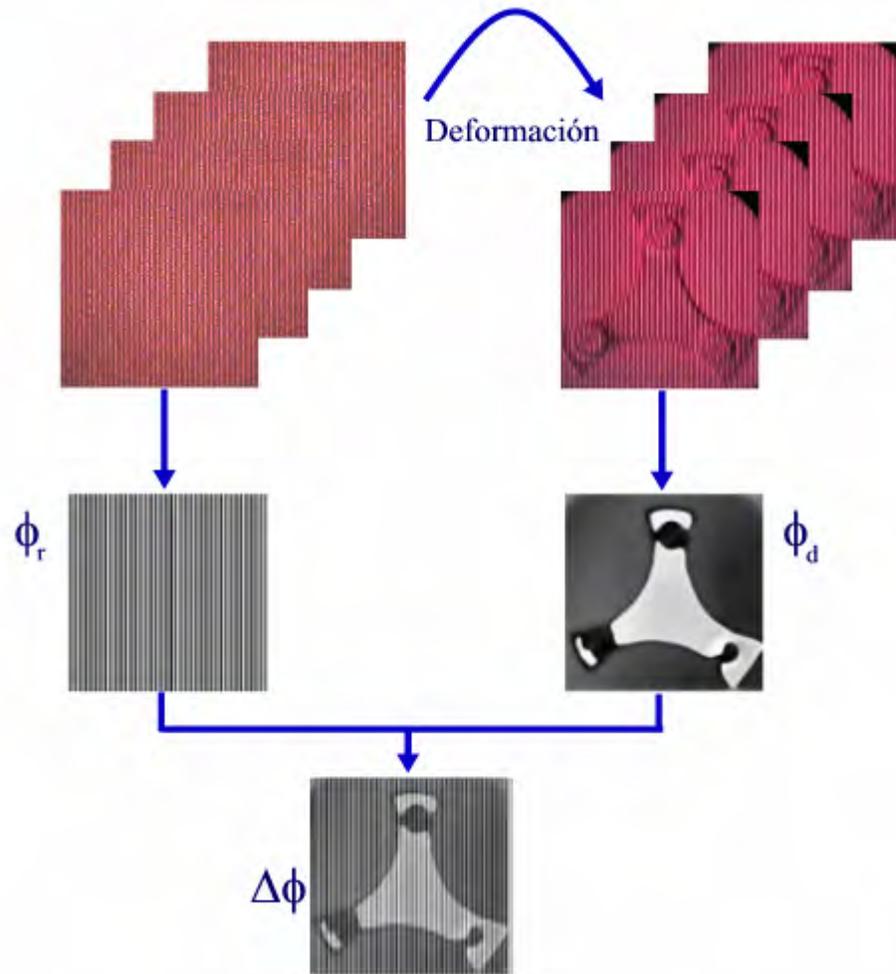


Figura 4.1. Procesamiento digital de franjas utilizando la técnica de desplazamiento de fase temporal de 4 pasos.

De estas expresiones mostradas en 4.3 y utilizando relaciones trigonométricas, una posible solución para la fase, se expresa como la tangente

$$\tan(\phi_r) = \frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3} \quad 4.4$$

La diferencia de fase ϕ_r , estará determinada por la tangente inversa, la cual toma valores en el rango de $[-\pi, \pi]$.

De la misma forma, la diferencia de fase en el estado deformado ϕ_d , puede calcularse a partir de almacenar cuatro imágenes I'_1, I'_2, I'_3, I'_4 . La resta del modulo de 2π de las dos

fases ϕ_r, ϕ_d será la diferencia de fase que se requiere $\Delta\phi$, es decir, la fase del patrón de franjas.

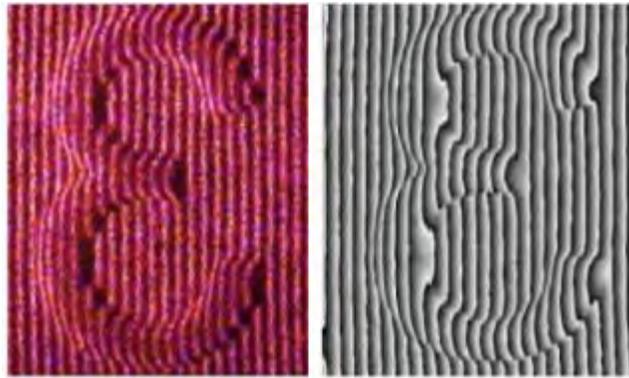


Figura 4.2. Izquierda: Interferograma de un objeto tridimensional. Derecha: Fase envuelta utilizando la técnica de desplazamiento de fase

En la figura 4.2, se presenta el resultado de evaluar la fase por la técnica descrita en el presente apartado. Puesto que el modulo de la fase medido es de 2π , se observa una distribución característica de los niveles de gris que aparecen: de un extremo a otro de la imagen aparecen niveles de gris que cambian del negro y gradualmente hacia el blanco, pasando por toda la gama de tonos grises y, abruptamente, a negro otra vez. Esta es una de las razones por lo que se dice que la fase esta envuelta, es decir, esta modulada por el rango de valores que toma la tangente inversa, que en valor absoluto es de 2π .

En la literatura se pueden encontrar otras muchas técnicas cuya raíz es la misma. Para una revisión más exhaustiva del tema así como estudiar las propiedades y comparaciones de estos algoritmos, puede consultarse la bibliografía aquí propuesta.

Para lograr el desplazamiento de fase entre dos ondas interfiriendo entre sí, la longitud de la trayectoria recorrida por éstas, debe cambiar de alguna manera. En el caso del interferómetro de Talbot propuesto en la presente tesis, se realiza un cambio de 2π radianes en la rejilla generadora de la auto imagen, con la ayuda de un motor a pasos controlado por voltaje, donde a cada paso que se da al motor corresponde a un voltaje proporcional al numero total de pasos contenido en un cambio completo en la fase de la rejilla.

4.5 Análisis espacial de fase

El desplazamiento espacial de fase posibilita evaluar la fase a partir de una sola imagen⁷. Dos ondas planas incidentes en una CCD, con un pequeño ángulo entre ellas, produce el efecto de un cambio de fase lineal de píxel a píxel. De acuerdo con la ecuación 4.2, la intensidad conlleva una función de tipo cosenoidal. La variación regular de intensidad, produce franjas que se conocen como *franjas portadoras*, las cuales son idóneas para evaluar la fase desplazándola espacialmente siempre y cuando esta frecuencia espacial sea considerablemente mayor que la frecuencia espacial de la información de fase que se desea calcular⁸. Este párrafo que aparenta ser un trabalenguas, solo indica que cuando la frecuencia de la fase que contiene la información de la muestra sea menor a la frecuencia de la fase desplazada, es posible reconstruir esta información. Las franjas portadoras, una vez obtenida la información de la fase contenida en ellas, se presenta como una ligera inclinación en el resultado final, que lo único que implica es que la imagen o los datos reconstruidos a partir de la información de fase, estarán desplazados una cantidad constante.

Esta técnica también es conocida como interferometría directa con portadora lineal espacial⁹. El principio por el que trabaja este algoritmo, es que la imagen obtenida a partir del detector bidimensional (CCD), se compara con una llamada de referencia, que muestra el estado de la muestra antes de sufrir alguna deformación y que muestra a las franjas de referencia, y ambas imágenes se superponen; ambas imágenes son transformadas al espacio de Fourier y, si se utiliza una máscara apropiada para filtrar las frecuencias que no interesan, solo quedarán aquellas que contienen la información; posteriormente se calcula la transformada inversa de Fourier de los dos espectros filtrados y sus fases representan la información de la fase requerida mas un término aditivo. La diferencia entre estas fases, representará la fase del patrón de franjas relativa a la deformación del objeto, el proceso se muestra esquemáticamente en la figura 4.3.

La expresión que se obtiene después de superponer las intensidades de la onda de referencias y la onda deformada, es un frente de onda conjugado cuya frecuencia es dos veces mayor que la frecuencia de la portadora¹⁰. La expresión es de la forma (a partir de la ecuación 4.1)

$$I = (A_0 + B_m) \cos \theta + 2\sqrt{A_0 B_m} \cos 2\pi f [x \sin \theta + \phi] \cos \theta + (A_0 + B_m) \sin \theta + 2\sqrt{A_0 B_m} \cos 2\pi f [x \sin \theta + \phi] \sin \theta \quad 4.5$$

Como la señal mostrada en 4.5 se filtra (para altas frecuencias, es decir, un filtro pasa bajas), solamente el último término permanece, cuyas componentes real e imaginaria serán los siguientes términos

$$\begin{aligned} Im(x, y) &= -\sqrt{A_0 B_m} \sin[(2\pi \cdot f)\phi(x, y)] \\ Re(x, y) &= \sqrt{A_0 B_m} \cos[(2\pi \cdot f)\phi(x, y)] \end{aligned} \quad 4.6$$

y entonces la información de la fase se obtiene como

$$\Delta\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi \cdot f} \tan^{-1} \left[\frac{Im(x, y)}{Re(x, y)} \right] \quad 4.7$$

Esta técnica presenta la desventaja de poseer un alto ruido y una relativa baja resolución con respecto al método de desplazamiento temporal de fase. Esto puede compensarse utilizando ya sea una CCD de alta resolución o capturar la imagen con tres o cuatro cámaras¹¹ a la vez y posteriormente promediarlas y de esta forma, también el ruido del moteado se promedia. La figura 4.3 muestra esquemáticamente el procedimiento aquí descrito.

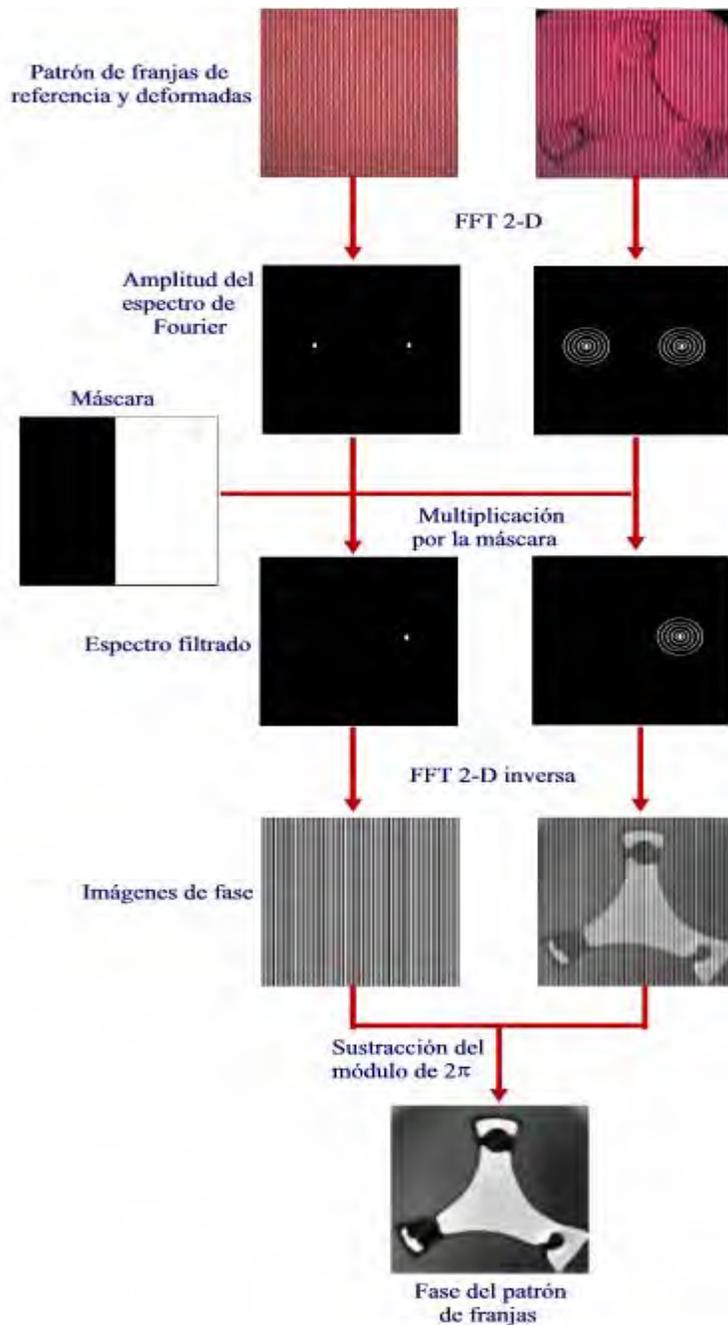


Figura 4.3. Procesamiento de imágenes para el desplazamiento de fase espacial.

4.6 Técnica de desplazamiento temporal de la fase en “n” pasos

El presente método puede considerarse, con ciertas reservas, como novedoso. Nace de la necesidad de obtener una mayor precisión en la información de la fase que se obtiene al analizar un patrón de franjas, y de que los algoritmos tradicionales de desplazamiento

temporal de la fase de cuatro o cinco pasos, son insensibles a una variación en la calibración del desplazamiento lineal de la fase¹² que se genera al tomar imágenes consecutivas que se convierte en una limitante cuando el nivel de ruido se incrementa.

Por tanto, al promediar un número mayor de imágenes, se asegura que el nivel de ruido se promedia con lo que se logra una disminución en el ruido de fondo y un mejor contraste en el patrón de franjas. La fase se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\tan \phi = \frac{\frac{I(0) - I(N)}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{N}\right) - \sum_{n=1}^{N-1} I(n) \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right)}{\frac{I(0) - I(N)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} I(n) \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right)} \quad 4.8$$

El término $I(0)$, representa la imagen de referencia a capturar hasta el número total de imágenes que representa la cantidad de pasos o imágenes capturados en un cambio de fase de 2π .

Las tres técnicas descritas hasta el momento, son las que se utilizarán en el procesamiento digital de las franjas, para obtener la información de la fase, obtenidas a partir del arreglo experimental propuesto en la presente tesis y que se explicará en el próximo capítulo. En la figura 4.4 se pueden observar algunos resultados obtenidos con este algoritmo.

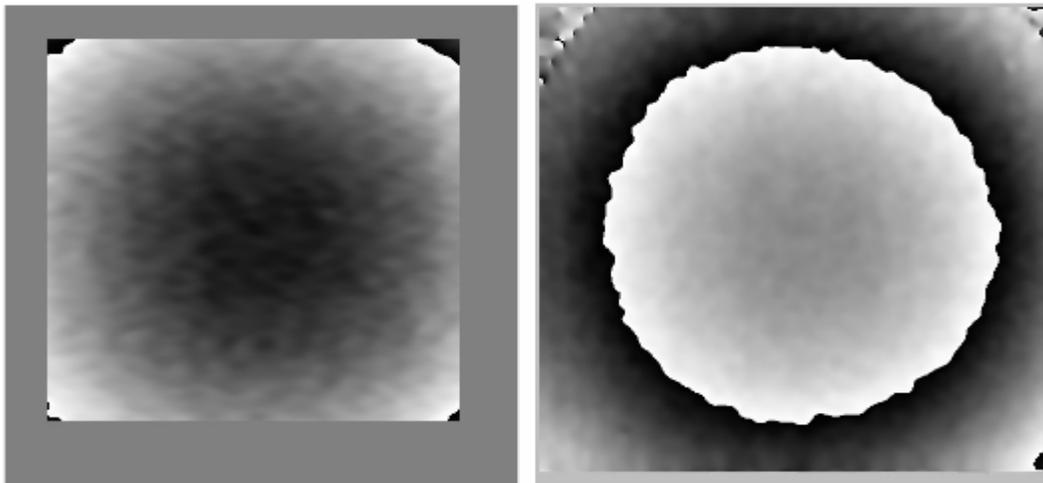


Figura 4.4. Fase envuelta de una sola imagen (izquierda) utilizando el método directo; derecha, fase envuelta obtenida por el algoritmo de “n” pasos. Nótese la diferencia en el ruido de fondo.

Tanto en el apartado 4.4 como en el actual, el patrón de baja frecuencia (franjas de moiré) se logra al realizar la superposición de las franjas proyectadas sobre la imagen con otra rejilla de las mismas características que la generadora de la auto imágenes, de acuerdo con la teoría desarrollada en el capítulo 2, ecuación 2.6. En este caso, la segunda rejilla se simulara por computadora, con lo que se lograra producir el patrón de moiré. Esta rejilla, que se nombrará como rejilla sintética, se genera a partir de la siguiente ecuación

$$t_A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[1 + m \cos\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right) \right] \quad 4.9$$

4.7 Proceso de filtrando en el patrón de franjas

Para la evaluación cuantitativa de las mediciones realizadas por alguna técnica interferométrica, el patrón de franjas debe ser procesado. Debido a que la fuente de iluminación en este tipo de experimentos que involucran al menos la interferencia de frentes de ondas es un láser, este elemento será un factor para incrementar el ruido en el sistema, con los consecuentes resultados en cuanto a la pérdida de información y/o elevar la incertidumbre en los datos obtenidos. Por tanto, los filtros digitales en el análisis de las franjas se convierten en una herramienta indispensable para la correcta interpretación de la información.

Un filtro es un sistema utilizado en electrónica el cual consiste en un dispositivo que elimina o selecciona ciertas frecuencias de un espectro eléctrico, acústico, óptico o mecánico, como las vibraciones.

El resultado de aplicar alguna técnica de análisis temporal o espacial de la fase, presentadas en el presente capítulo, se representa en forma de un mapa de fase (fase envuelta o phase wrapped, en inglés) el cual estará envuelta por un modulo de 2π o, dicho de otra manera, la

envolvente del patrón de franjas contiene un valor de 2π , el cual es conocido como fase del patrón de franjas.

Existen en la literatura diversos métodos de filtraje de imágenes, aunque no todos útiles para el fin que aquí se persigue. Muchos de ellos se basan en un kernel, máscara o ventana de filtrado cuyo tamaño puede variar desde arreglos de 2×2 hasta 9×9 . Un filtro común es la función cuadrada de ancho definido, el cual es equivalente a promediar la irradiancia incidente en todos los píxeles de una ventana de un píxel de altura por N de ancho, o sea, la longitud de la ventana del filtro debe ser igual al periodo de la señal a ser filtrada. Otro tipo de ventanas utilizadas en este algoritmo, son las conocidas como Hamming y Hanning, las cuales se acercan más a un filtraje real y no a la función ideal que representa una ventana rectangular. Para una información más detallada acerca del filtraje en el procesamiento digital de señales, consultar la literatura aquí sugerida¹³.

Para obtener resultados satisfactorios a partir de un patrón de franjas, el procesamiento puede involucrar, además de las técnicas de análisis de fase, una etapa de filtraje y una para desenvolver o decodificar la información contenida en la fase. Si el algoritmo de filtrado es lo suficientemente eficiente para lograr una imagen del patrón de franjas suave, donde el ruido de moteado por el haz láser este lo más atenuado posible, no requiere de implementar alguna otra técnica para leer los datos propios de la fase. También es posible no ahondar en el filtraje y optimizar los algoritmos de desenvolvimiento de fase (unwrapping en inglés) para obtener la misma calidad de datos. Sin embargo, ya sea que se incline por uno u otro camino, lo adecuado es encontrar un balance entre ambos porque, ya sea que se invierta tiempo y esfuerzo en desarrollar un excelente algoritmo de filtrado o desenvolvimiento, en el proceso siempre implicara, tácitamente, involucrar ambas vertientes por lo que, hasta cierto punto, resultarían ser esfuerzos complementarios.

Uno de los filtros convencionales y que en alguna etapa del análisis de resultados se utilizan en el presente trabajo, consiste en promediar el producto del seno y del coseno por la función que representa a la imagen que se desea procesar. Ya que la aplicación de filtros pasa bajas a la imagen no resuelve el problema de las discontinuidades en la fase debido al

módulo de 2π implícito en ella, el problema puede resolverse calculando el seno y el coseno del patrón de franjas envuelto $(\Delta\phi)^{14}$. Este patrón de franjas resultante, se filtra por separado aplicando algoritmos de filtraje promedio o de la media. Una vez obtenido el resultado, se obtendrá el $\sin\Delta\hat{\phi}$ y $\cos\Delta\hat{\phi}$ filtrados, por lo que la información de fase se obtiene al calcular la tangente inversa de la función del seno y el coseno involucradas. Este método proporcionará una fase envuelta del patrón de franjas original, donde el contorno sufre una mejora considerable además de eliminar de mejor forma el ruido de fondo, provocado por el moteado. La figura 4.5 muestra esquemáticamente el proceso de filtrar multiplicando la fase envuelta por un seno y un coseno.

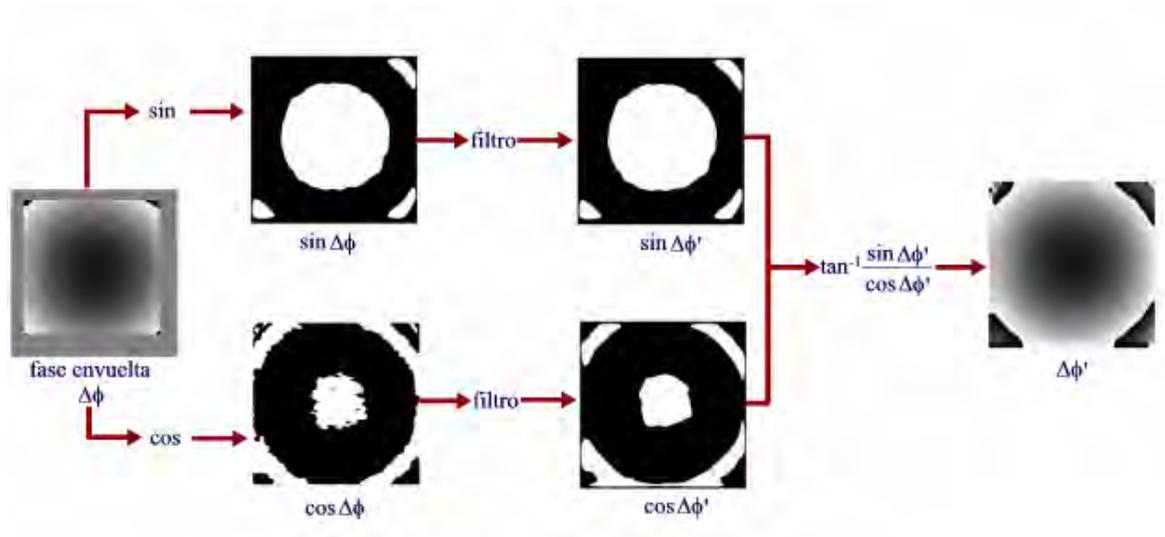


Figura 4.5. Diagrama del proceso de filtrar el patrón de franjas multiplicando por un seno y un coseno.

En el presente trabajo, también son utilizados los llamados filtros de convolución. Estos se basan en la aplicación de un kernel o ventana de filtrado cuya finalidad es la de barrer la imagen, y cada vez que esta ventana barre un área de la matriz de datos de la imagen, se aplica la propiedad de convolución de la transformada de Fourier para obtener un promedio frecuencial de esos puntos. Para otro tipo de filtros basados en principios similares, se puede consultar la referencia propuesta en el presente apartado¹⁵. El método, al igual que el del seno y coseno, es iterativo.

4.8 Desenvolvimiento de fase

Para concluir el presente capítulo, se presentará el algoritmo utilizado para desenvolver la fase (unwrapping, por su definición en inglés) obtenida por cualquiera de los métodos de análisis de franjas descritos para la obtención de la fase. Cabe hacer el comentario que la información proporcionada por la fase una vez analizada, se encuentra, por decirlo de alguna forma, codificada o envuelta, es decir, se requiere de un algoritmo que sea capaz de interpretar la información en escala de grises contenida en la fase, o sea, que puede desenvolverla y así desplegar a la información involucrada en esta de una manera comprensible.

El principal objetivo de los algoritmos de desenvolvimiento de fase, es reconstruir la información de la fase del patrón de franjas sin la presencia de las discontinuidades ocasionadas por el modulo de 2π presente en la fase envuelta; estos algoritmos se basan en la suposición de que los cambios en la fase son continuos en toda la imagen. Por tanto, las discontinuidades en la fase se consideran como un cambio en el orden de la franja.

La figura 4.6 muestra el trabajo que realiza un algoritmo de este tipo, en donde la imagen es procesada línea por línea. La fase envuelta, presentada en 4.6 a), la cual es obtenida al trazar una línea por el centro de la fase presentada en la figura 4.5, es analizada calculando la diferencia en los píxeles vecinos. Si la diferencia sobrepasa un límite o umbral, por ejemplo de $\pi/2$, el orden de la franja (figura 4.6 b) se incrementa o decrementa en 2π , dependiendo del signo de la diferencia. La curva de la fase desenvuelta (figura 4.6 c) es determinada sumando la fase envuelta al orden de la franja correspondiente.

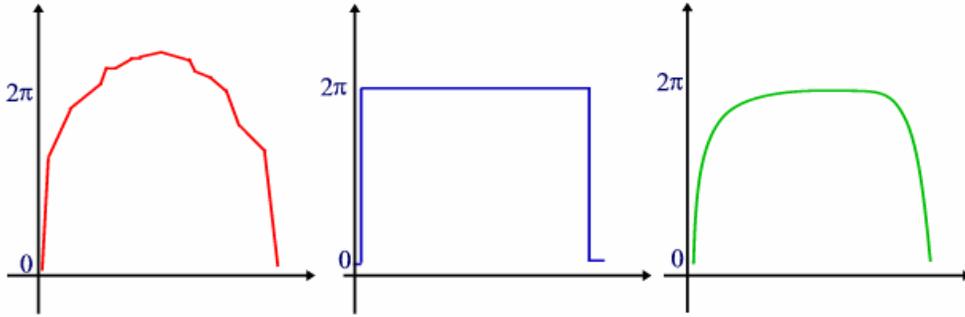


Figura 4.6. Desenvolvimiento de fase a través de una línea horizontal de la figura 4.5. Izquierda: fase envuelta. Centro; Orden de la franja en modulo de 2π . Derecha: Fase desenvuelta.

El algoritmo para el desenvolvimiento de la fase empleado en el presente trabajo, se basa en el seguidor de fase regularizado (Regularized phase tracking unwrapper), el cual requiere de una función, llamada de mérito, que utiliza al menos dos términos los cuales contribuyen a restringir la búsqueda del campo que se desea desenvolver. Estos términos se refieren a

1. La fidelidad entre la función estimada y las observaciones realizadas.
2. El conocimiento a priori acerca del comportamiento espacial de la fase desenvuelta.

Para este algoritmo, se establece que la fase del patrón de franjas $\phi(x,y)$ a predecir debe minimizar la siguiente función de mérito en cada punto (x,y) que contiene la fase válida

$$U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y) = \sum_{(\varepsilon, \eta) \in (N_{x,y} \cap L)} \{ V[\phi_w(\varepsilon, \eta) - \phi_e(x, y, \varepsilon, \eta)] + \lambda [\phi_w(\varepsilon, \eta) - \phi_e(x, y, \varepsilon, \eta)]^2 \sigma(\varepsilon, \eta) \} \quad 4.10$$

y

$$\phi_e(x, y, \varepsilon, \eta) = \phi(x, y) + \omega_x(x, y)(y - \eta) \quad 4.11$$

Las funciones $\phi_w(x, y)$ y $\phi(x, y)$ corresponden a la fase envuelta y a la desenvuelta que se desea obtener, estimadas en el píxel (x, y) . L es el dominio bidimensional donde son válidos los datos de la fase envuelta; $N_{x,y}$ corresponde a los vecinos alrededor de la coordenada (x, y) . La función $\sigma(\varepsilon, \eta)$ es un campo indicador el cual es igual a 1 si el lugar correspondiente a la coordenada (ε, η) ha sido desenvuelto y 0 de otra forma. De la ecuación 4.11, aproximando el comportamiento de la fase desenvuelta mediante un plano cuyos parámetros $\phi(x, y)$, $\omega_x(x, y)$, y $\omega_y(x, y)$ son determinados de tal forma que la función de merito $U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y)$ en la posición (x, y) en L , es minimizada.

El primer término de la ecuación 4.10 intenta mantener el modelo de la fase local lo mas cercano al mapa de fase obtenida mediante la implementación de mínimos cuadrados con sus vecinos $N_{x,y}$ comentado en el postulado 1. El segundo término obliga a que la suposición hecha acerca de la suavización y continuidad de la fase desenvuelta, postulado 2, usando los píxeles desenvueltos previamente marcados por $\sigma(x, y)$. Se observa que el segundo término contribuirá una pequeña cantidad al valor de la función de mérito $U_{x,y}(\phi, \omega_x, \omega_y)$ solo para las funciones de fase desenvueltas suavemente. También, el plano local de la fase esta adaptado simultáneamente al dato observado [en el espacio envuelto usando el operados de envolvimiento $V(x)$] y a la pase desenvuelta continua marcada por $\phi(x, y)$.

Para la referencia completa del método, se cita la bibliografía correspondiente¹⁶.

Referencias

1. [<http://www.rae.es>]
2. [D. J. Whitehouse, “Handbook of Surface Metrology”, IOP Publishing Ltd., 1994, pp. 468-469]
3. [R. Rodríguez-Vera, “Some advances in optical contouring of diffuse objects using moiré and speckle techniques”, Tesis de doctorado, Loughborough University of Technology, 1993, pp. 22-29]
4. [R. Rodríguez-Vera, Op. cit., cap.1]
5. [Laura Ortega G., “Técnicas de análisis de franjas en interferometría”, Tesis de maestría, F. I. M. E. E., 1994; D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, “Interferogram analysis for optical testing”, Marcel Dekker Inc., 1998, cap. 4, 5, 6]
6. [S. P. Waldner, “Quantitative strain analysis with image shearing speckle pattern interferometry (shearography)”, Tesis de doctorado en ciencias técnicas, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1999, cap. 3]
7. [S. P. Waldner, Op. cit., pp. 30-31]
8. [M. Takeda, I. Hideki, A. Kobayashi, “Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based topography and interferometry”, J. O. S. A., A, Vol. 72, 1988, pp. 156-160]
9. [Laura Ortega G., Op. cit., pp. 78-80]
10. [Laura Ortega G., Op. cit., pp. 80]
11. [S. P. Waldner, Op. cit., pp. 32]
12. [J. Schwider, R. Burow, K. E. Elssner, J. Grazna, R. Spolaczyk, K. Merkel, “Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources”, Appl. Opt., 22, 1983, pp. 3421-3432]
13. [R. C. González, “Digital image processing”, Prentice-Hall, 2ª. Edición, 2002]
14. [S. P. Waldner, Op. cit., pp. 37]

15. [J. L. Marroquín, M. Servín, R. Rodríguez-Vera, “Adaptive quadrature filters and the recovery of phase from fringe pattern images”, J. O. S .A., A, Vol. 14, 8, 1997, pp. 1742]
16. [D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, “Interferogram analysis for optical testing”, Marcel Dekker Inc., 1998, pp. 393-397]

CAPÍTULO 5

Desarrollo experimental y análisis de resultados.

5.1 Introducción

En el universo de la física, se busca contar con herramientas que permitan explicar los fenómenos de la naturaleza y modelar el mundo que nos rodea. Dentro de este modelo fisico-matemático del mundo real en particular, y del universo en general, la necesidad de cuantificar los estímulos que nuestro cerebro percibe mediante los sentidos, ha sido una necesidad inherente al desarrollo intelectual y tecnológico del hombre. Por esta razón, desde las primeras mediciones realizadas por el hombre en su papel de ente pensante y transformador del mundo que lo envuelve, se ha cuestionado severamente la validez de esta información y, antes de alardear resultados y realizar conclusiones temerarias, requiere corroborar que tan exacta o cuanto error puede contener esta información comparándola con una referencia o un punto de vista alternativo y es por esto que las referencias están en continua evolución o calibrándose a medida que la ingeniería y la tecnología permite la realización de cada vez mas sofisticados y precisos experimentos para su comprobación.

Es por esto que valorar una medición y compararla con una referencia que cumple con normas básicas para ser certificada, es un trabajo que en la actualidad conlleva una gran importancia y mas aún cuando es posible realizar pruebas de medición y caracterización de objetos sin que estos sufran alteraciones que rompan con su equilibrio fisico-quimico, como es posible realizarlo con varias de las técnicas ópticas utilizadas en la rama de la metrología dimensional. Precisión y exactitud son las palabras claves que encierran, en sí mismas, la finalidad de la metrología en su conjunto.

En el presente capítulo, se explica, describe y se muestra el arreglo experimental utilizado en el laboratorio basado en la TPMT desarrollado por Rodríguez-Vera¹. Se eligió este

esquema sobre los otros descritos en el capítulo 2, ya que se trabajó de cerca con el autor del método, el doctor Rodríguez-Vera, además de que el método presenta la ventaja de ser dinámico en el sentido de que, tanto la frecuencia de la rejilla como el ángulo de observación, pueden ser modificados sin mayor problema aumentando la resolución del sistema y además de que teóricamente es capaz de medir alturas de hasta $11\mu\text{m}$, de acuerdo a lo reportado por el mismo Rodríguez-Vera.. Los resultados que aquí se plasman, han sido producto de la evolución del experimento. Además de los resultados que se reportarán para la topografía del gasket, se presentarán resultados acerca del relieve obtenido para otros objetos.

Con respecto a los resultados de la topografía de la gasket, que es el objetivo principal del presente trabajo, se comparó con las mediciones hechas por la máquina de medición por coordenadas (MMC) que es un instrumento de medición avalado y certificado por los organismos nacionales oficiales basados en normas internacionales sobre aspectos de pesos y medidas dimensionales.

5.2 Descripción del esquema implementado en el laboratorio

El arreglo experimental en el cual se baso la obtención de los resultados que se describirán en el presente capítulo, se basa en el arreglo propuesto por Rodríguez-Vera en el año 1991, el cual se muestra en la figura 5.1, el cual se basa en la teoría del efecto Talbot. La imagen Talbot de una rejilla lineal es proyectada sobre una muestra y, debido al relieve propio del objeto, las líneas de la rejilla son deformadas. De esta manera, la imagen capturada por una CCD, se superpone con una rejilla sintética generando un patrón de moiré el cual representa mapas de contorno proporcionales a la profundidad y dimensiones del objeto bajo análisis. El patrón de moiré se puede obtener de dos formas:

- Desplazando una rejilla sintética generada por computadora.
- Desplazando o moviendo la rejilla física.

Los mapas de contorno contendrán la información sobre el relieve del objeto envueltas en la fase del patrón de franjas proyectado. Una vez que se desenvuelve la fase, es posible obtener medidas reales del espécimen y compararlas con las obtenidas por algún otro instrumento de medición.

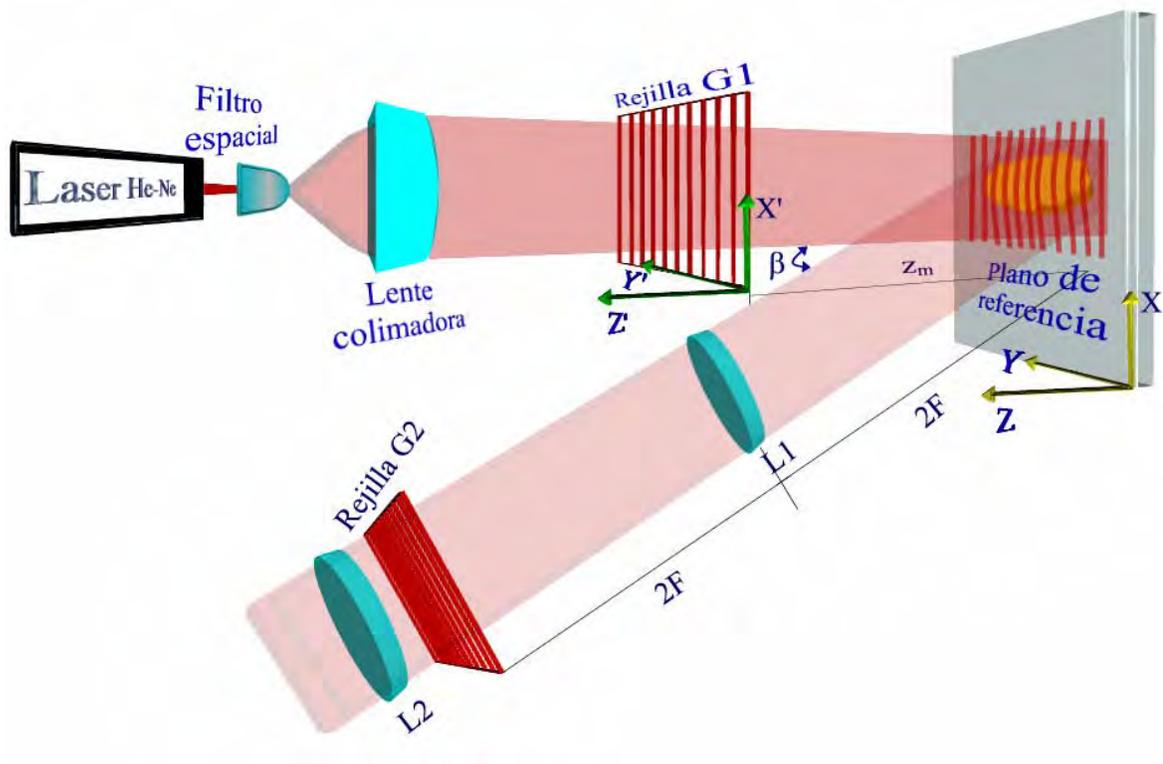


Figura 5.1. Arreglo experimental del método TPMT.

El sistema mostrado en la figura 5.1, depende de los contornos de profundidad del objeto bajo estudio, proyectando la imagen de Talbot de una rejilla lineal.

Una segunda rejilla de las mismas características a la utilizada para proyectar la auto imagen, se introduce al sistema para obtener franjas de moiré, las cuales representan contornos de igual profundidad de la superficie.

Con la implementación de algoritmos de procesamiento digital de franjas, se obtiene la información de fase y es entonces que la información acerca de la topografía del objeto, es calculada a partir de los mapas de contorno.

La primera modificación que se realizó al esquema de TPMT, consistió en eliminar la segundo rejilla, ya que la acción realizada por esta es sustituida al generar digitalmente una rejilla virtual o sintética para producir el patrón de moiré.

Como se comento en el capítulo 4, uno de los algoritmos ampliamente utilizado para procesamiento digital de franjas, es el conocido como método directo o desplazamiento espacial de fase, que en pocas palabras significa que no se requiere de una segunda rejilla lineal (ni sintética ni real) para analizar el patrón de franjas y obtener la información del mapa de contorno, sino solo una imagen de las franjas proyectadas sobre la muestra en cuestión.

Los algoritmos basados en el desplazamiento temporal de fase, también descritos en el capítulo 4 y que se utilizaron para el análisis del patrón de franjas capturado por la CCD, requieren de formar un patrón de franjas de baja frecuencia (moiré) para la recuperación de la información, por lo que es necesario realizar la superposición con una rejilla lineal de las mismas características con respecto a la que genera las auto imágenes, y este papel lo desempeña la rejilla que se definirá como sintética.

La modificación hecha al diagrama mostrado en la figura 5.1, se muestra en la figura 5.2, siendo un interferómetro para medición fuera de plano donde se aprovecha el efecto Talbot para la proyección de franjas, donde se nota la ausencia de la segunda rejilla además de que la lente de campo es sustituida por el microscopio estéreo, cuya utilidad y papel que desempeña dentro del esquema, ha sido comentado en el capítulo 3.

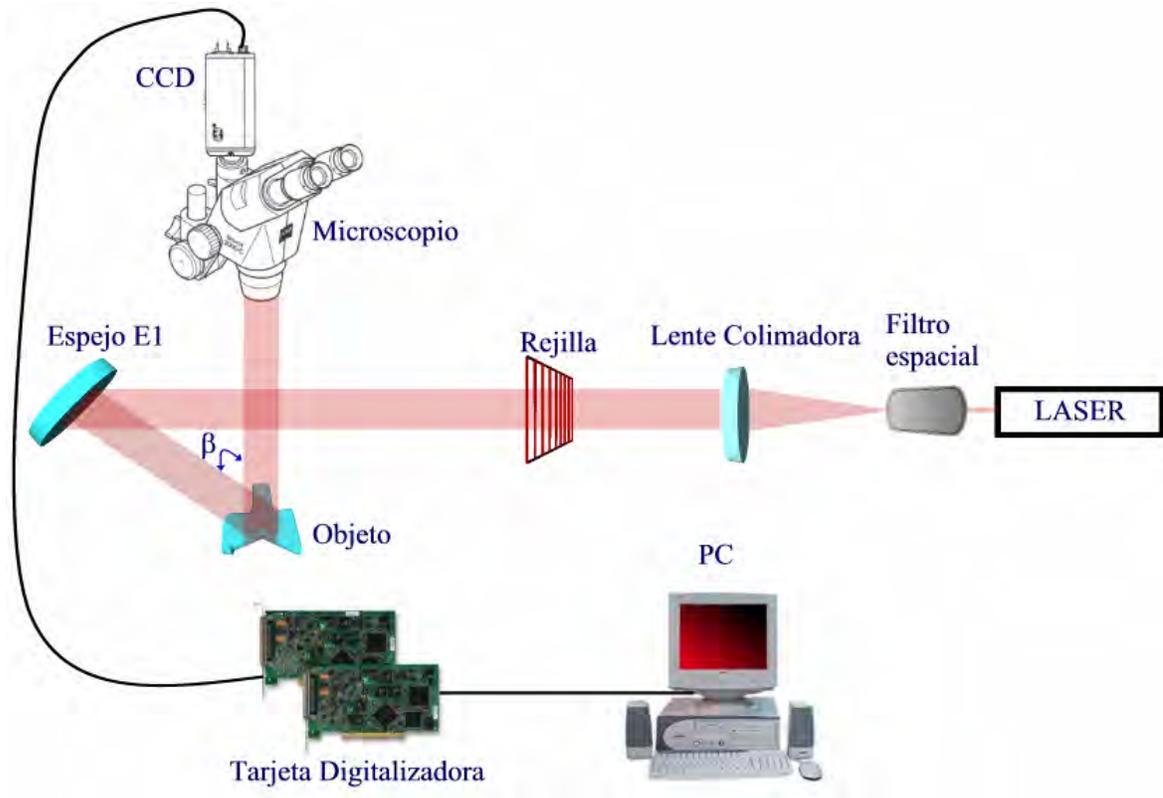


Figura 5.2. Arreglo experimental implementado en el laboratorio.

Las imágenes tanto del microscopio como de la CCD fueron tomadas de los manuales correspondientes^{2,3}. En este arreglo y en el sucesivo, el microscopio estéreo cumple las funciones de la lente de campo, y se ha omitido la rejilla 2 presente en 5.1, y que se sustituye por la rejilla sintética descrita por la ecuación 2.6 (capítulo 2) y 4.9 (capítulo 4). La imagen o imágenes capturadas con la CCD, serán almacenadas en una PC para su posterior procesamiento. Una fotografía del arreglo se muestra en la figura 5.3.

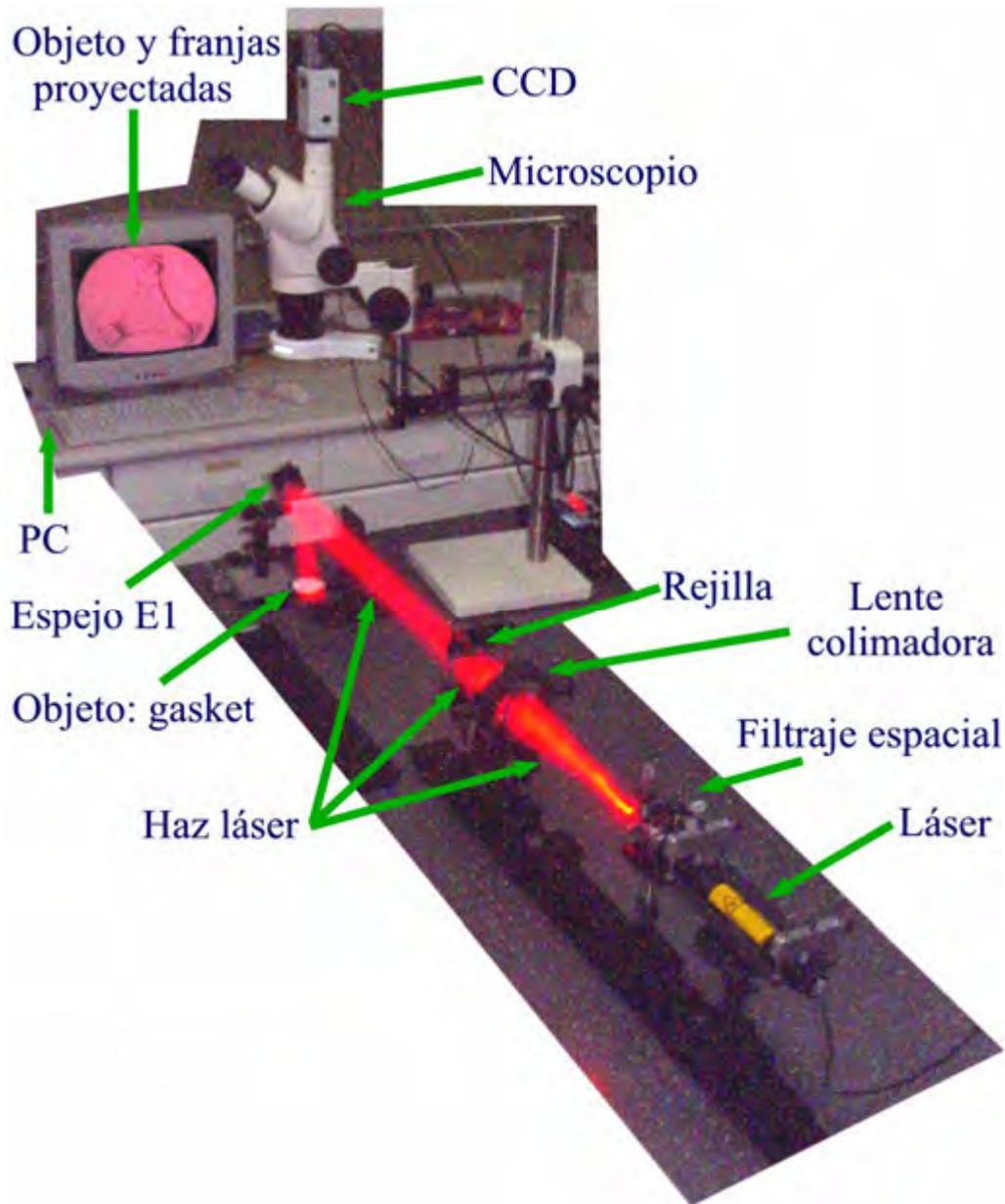


Figura 5.3. Fotografía del arreglo experimental de la figura 5.2

Bajo este esquema, se analizaron los siguientes objetos: el relieve de una letra troquelada en una tapa de plástico, cuyas dimensiones aproximadas son de 0.5mm por 0.5mm de área y la altura, la cual se referencia con respecto a la calculada por la máquina de medición por coordenadas (MMC); la recuperación de la topografía de un gasket, el cual había sido utilizado en un DAC, y la medición de su grosor el cual es comparado con los datos arrojados por la MMC que se encuentra en el laboratorio de metrología dimensional en el

CIO; un vidrio de perfil convexo y un gasket sin uso. Tanto el gasket como el vidrio convexo, habían sido medidos previamente con la máquina de medición por coordenadas (MMC). La medición que realiza la MMC es con respecto a una referencia, es decir una superficie plana. Mas adelante, cuando se realice la interpretación de los resultados obtenidos, se explicará la forma en que se tomaron las mediciones con la MMC de los diferentes objetos aquí mencionados.

Los resultados obtenidos tanto de la fase envuelta, la fase desenvuelta y las medidas en coordenadas reales así como de los algoritmos utilizados para el filtraje, recuperación de la información dada por la fase y para la transformación en coordenadas reales, se comentan y presentan en la sección 5.4.

5.3 Procesamiento de franjas.

Este apartado viene a desempeñar un papel de apéndice o complemento del capítulo 4. Los algoritmos utilizados para extraer la información de la fase del patrón de franjas, son básicamente dos: el desplazamiento temporal de la fase (conocido en la literatura como phase stepping), de 4 y 16 pasos, y el acreditado por algunos autores como método directo, en el cual solo se requiere de una imagen para procesar la información. Para el filtraje, el algoritmo empleado fue el denominado como convolución y, solo en un par de casos que se comentarán en su momento, se utilizó el filtraje de seno y coseno descrito en el capítulo 4. Para el desenvolvimiento de la fase, se utilizó el algoritmo descrito en el mismo capítulo.

Una de las metas de esta tesis, es el expresar las mediciones obtenidas a partir de la información contenida en la fase, en datos reales comparables con una referencia. La referencia que se tomo, fueron las medidas adquiridas por medio de la máquina de medición de coordenadas (MMC) mencionada anteriormente.

De antemano se conoce que la CCD proporciona imágenes de aproximadamente de 752(h) x 582(v) píxeles y la tarjeta de video tiene una resolución de 640(h) x 480(v)

píxeles, de acuerdo a los datos proporcionados en el capítulo 3. Para procesar las imágenes, se está empleando el programa de Math-CAD. Las imágenes que se capturan mediante la tarjeta digitalizadora, se almacenan en formato **.bmp*, por lo que al leerlas en el Math-CAD se despliegan en una matriz de 640(h) x 486(v) cuyos datos son proporcionales a la intensidad luminosa procesada por la CCD a través de la tarjeta digitalizadora. Si comparamos el tamaño de la imagen en formato NTSC que es capaz de capturar la CCD y la resolución que proporciona la tarjeta digitalizadora, hay una pérdida de algunos píxeles tanto horizontales como verticales.

Una razón puede ser a la manera en como se realiza la transferencia de los datos en la tarjeta digitalizadora, ya que muestrea cada 16 x 16 píxeles y en cada paquete que lee hay una pérdida de datos, tal como se observa en la figura 5.6.

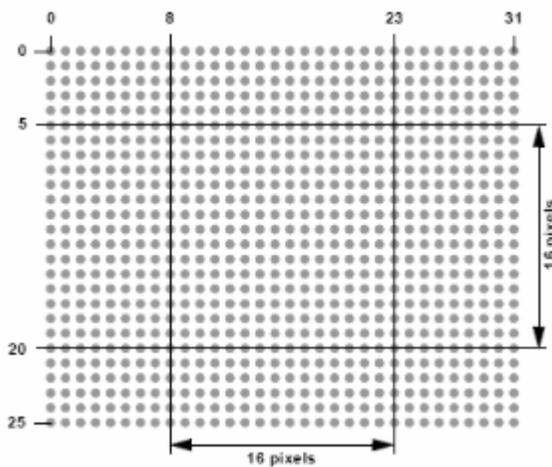


Figura 5.6. En la señal de video NTSC, solo la mitad del primer renglón de cada muestreo es válido. La primera línea (renglón cero), únicamente la parte baja del renglón contiene información. La última línea (renglón 485), solo la parte alta del renglón posee información. Si se requiere incluir en los datos de la imagen en renglón completo, se debe muestrear todo el renglón.

Otro dato curioso es que la medición física de cada píxel de la CCD proporcionada por el fabricante, no es cuadrada, es decir, las dimensiones en largo y ancho no coinciden, y sin embargo en la transferencia de información de la CCD entrega una señal cuadrada. Concluyendo, las imágenes con las que se va a trabajar, tienen un tamaño de 640 x 486 píxeles.

Para expresar los resultados en medidas físicas reales, se procedió como se describe a continuación. Las dimensiones en columna y renglón de la imagen procesada, es una proporción directa al área real que es capaz de capturar la CCD y los datos contenidos en cada cruce renglón-columna es proporcional a la intensidad luminosa percibida, por lo que para medir el área vista por la CCD, se colocó una regla milimétrica en posición vertical y horizontal y se capturó dicha imagen. Los algoritmos aquí utilizados procesan imágenes cuadradas, por lo que todas las imágenes se escalan a un número de píxeles proporcional a 2^n , que en este caso son de 512 x 512 por ser el múltiplo máximo posible alcanzar con la resolución proporcionada por la tarjeta digitalizadora. Como se puede ver, esta dimensión rebasa los 486 píxeles verticales provenientes de la tarjeta, por lo que la imagen se completa hasta alcanzar los 512 píxeles. Para obtener una relación directa de píxeles a milímetros contenidos en una imagen, se cuenta el número de píxeles contenidos en 10mm en la escala de la regla, desplegando la imagen en Math-Cad y obteniendo el cruce renglón-columna en ese rango y entonces calcular a cuantos píxeles corresponde un milímetro por lo que también se puede conocer cuantos milímetros mide un píxel. La figura 5.7 muestra la imagen de la regla milimétrica analizada.

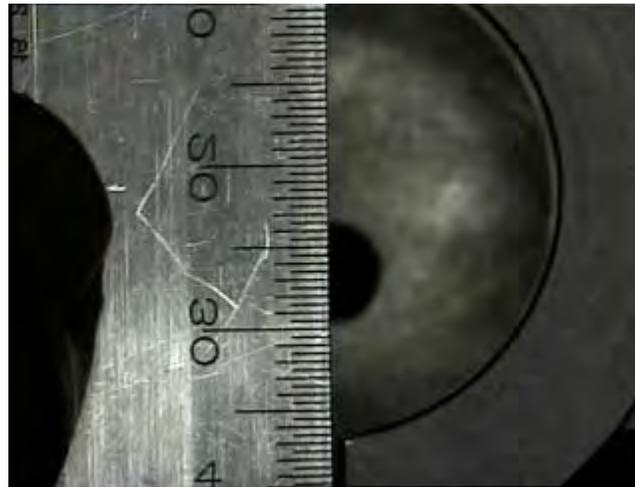


Figura 5.7. Regla milimétrica colocada como referencia en una imagen capturada por la CCD.

De acuerdo con la figura 5.7, se tomó como referencia la cantidad de 20mm a 30mm, es decir, una distancia de 10mm. El píxel vertical en 20mm fue el renglón 162 y corre hasta el 327 que corresponde a los 30mm, por lo que en 10mm hay una cantidad de 165 píxeles.

Entonces por una sencilla regla de tres se obtiene cuantos píxeles corresponden a 1mm dando un valor de 16.5 píxeles por milímetro, por lo que hay 0.061mm ó 610micras por píxel. Por tanto, si se generan imágenes de 512 x 512 píxeles, se tiene que en 512 píxeles hay 31.232mm. Esta cantidad es el factor por el que hay que multiplicar la relación renglón columna de la matriz calculada a partir de la fase desenvuelta para expresarlo en coordenadas reales. Como se explico en el capítulo 2, los mapas de contorno contenidos en la fase envuelta, tienen la información que describe la profundidad del objeto al que se le proyectaron las franjas de interferencia por lo que hay que aplicar las relaciones obtenidas en la sección 2.3.2 y que se retomará en la siguiente sección.

En el apartado siguiente, se mostrarán los resultados tanto de la fase envuelta como la desenvuelta, así como la información en coordenadas reales de los objetos mencionados en la sección 5.2 y se toma como patrón de referencia una máquina de medición por coordenadas (MMC), marca Carl Zeiss, modelo C400, tipo puente, avalada por el informe CNM-CC-740-159/2002 con vigencia 2004-06, trazable al patrón nacional de longitud CNM-PNM-2 del CENAM y ubicada en el taller de metrología dimensional del CIO.

5.4 Interpretación de resultados.

En la presente sección, se condensan las mediciones obtenidas a los diferentes objetos a los que se proyecto la auto imagen de una rejilla lineal. Primero se mencionarán las ecuaciones a partir de las cuales se obtendrá la medición de la altura real del objeto a partir de la información contenida en le fase.

De acuerdo con la sección 2.3, la distancia a la cual se forman auto imágenes de un objeto periódico con periodo T e iluminado con un haz de longitud de onda λ , se conoce como distancia Talbot y esta descrita por la ecuación 2.114

$$z_m = m \frac{T^2}{\lambda} \quad 5.1$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots$ define las imágenes de Talbot y z_m define los planos de Talbot. La fase del patrón de franjas estará modulada por la ecuación 2.116

$$I(x, y) = a + b \cos \left[\frac{2\pi}{p_x} (x - z \tan \beta) \right] \quad 5.2$$

donde $p_x = \frac{P}{\cos \beta}$ y a, b son constantes relativas a la reflectividad del objeto, la intensidad de fondo (el nivel de bias o DC comentado en el capítulo 2) y el contraste de franjas que define el índice de modulación de la fase. Siguiendo con el desarrollo presentado en la sección 2.3.2, cuando se toman dos fases de referencia del tipo 5.2 donde una de ellas representa el estado de referencia o no deformado del objeto bajo estudio y la otra es el estado deformado, al utilizar la operación de sustracción, se obtiene el patrón de moiré característico del desplazamiento del mapa de contorno, que es proporcional a la profundidad del objeto bajo análisis, y cuyo intervalo de contorno esta dado por 2.123

$$z_2 - z_1 = I_2(x, y) - I_1(x, y) = \Delta z = \frac{1}{v \sin \beta} \quad 5.3$$

$$z_2 - z_1 = \frac{n \cdot T}{\sin \beta}$$

donde n representa el orden de la franja y v es la frecuencia de la rejilla. Por tanto, para determinar la topografía de una muestra, cada punto en ella se compara con respecto al plano de referencia en el cual z permanece constante.

En primer lugar, se describirá el trabajo realizado y los resultados obtenidos para los objetos analizados bajo el arreglo mostrado en la figura 5.2.

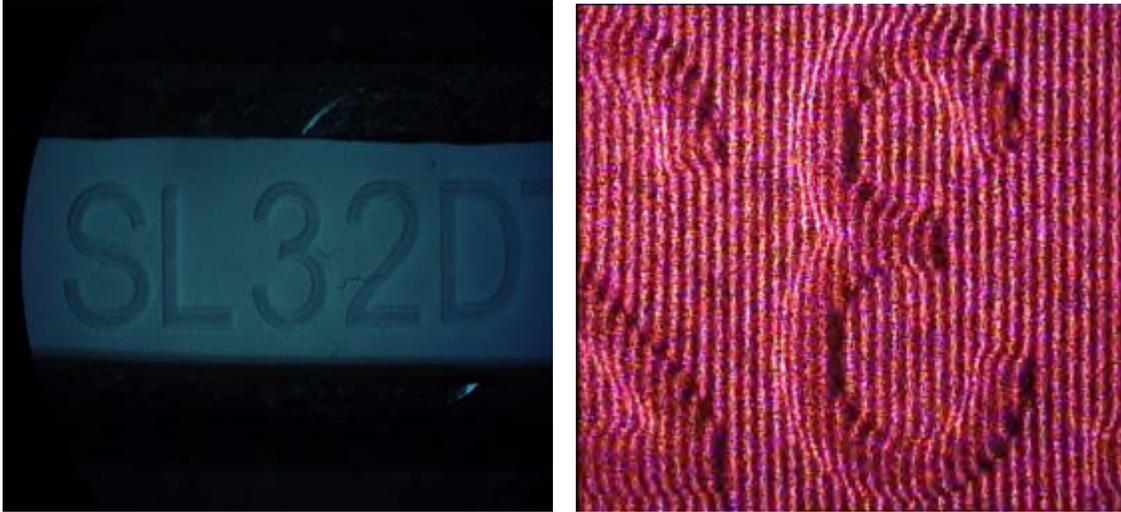
Relieve de una letra troquelada en una tapa de plástico.

Este objeto, de dimensiones aproximadas de 2.4mm x 4mm de área y una altura de 0.248mm con referencia a su base que es la tapa de plástico plana. Esta medida de la altura fue hecha con la MMC. En este objeto, el plano o estado de referencia son las franjas proyectadas en la tapa plástica plana y el plano o estado deformado lo representan las franjas proyectadas sobre la letra de interés. Por esta razón, no es necesario tomar imágenes del plano de referencia, ya que este no está deformado y el único estado que provoca una desviación en las franjas, es la letra en cuestión.

Para este experimento, se utilizó como fuente de iluminación un láser de He-Ne de 4mW de potencia y una longitud de onda de 633nm; el objetivo de microscopio utilizado para expandir el haz fue de 40x y para filtrarlo se utilizó un pinhole de 10micras; la lente colimadora tiene 8cm de diámetro y una distancia focal de 30cm con lo que se logró tener un haz colimado de aproximadamente 4cm de diámetro; la frecuencia de la rejilla lineal utilizada fue de 250 LPI (9.843 líneas/mm), lo cual corresponde a un periodo de 0.102mm; el ángulo de observación medido directamente del arreglo da como resultado 32.471° y el plano de Talbot de referencia se encuentra a una distancia de 54cm aproximadamente de la rejilla generadora de las auto-imágenes; al microscopio estéreo se le colocó una lente auxiliar preamplificadora de 0.3x y, de acuerdo a lo establecido en el capítulo 3, tiene una apertura numérica de 0.2208 con una distancia libre de operación de 285mm, y el ocular del microscopio fue de tipo W-PL 10x de distancia focal de 23mm, diámetro de 2.6mm y apertura numérica de 0.56056, el cual proporciona una amplificación máxima total de 15.0x y mínima de 1.95x, la cual se puede ajustar con la perilla del zoom, y un rango de área de trabajo de 15.3 a 118mm.

La letra bajo que se analizó se muestra en la figura 5.8. La figura 5.9 muestra la proyección de las franjas sobre la muestra. Para obtener la fase envuelta, se utilizaron dos algoritmos: el llamado método directo, el cual solo requiere de una imagen para obtener la información de la fase envuelta (capítulo 4) y el desplazamiento temporal de cuatro pasos (phase stepping, capítulo 4). El phase stepping, a su vez, se realizó de dos formas: una de ellas fue

aplicando el desplazamiento físicamente en la rejilla lineal y la otra fue aplicando el desplazamiento a la rejilla sintética. La fase envuelta obtenida con la ayuda de estas técnicas, es mostrada en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12.



Izquierda, figura 5.8. Número analizado. Derecha, figura 5.9. Proyección de la imagen de Talbot sobre el número 3. Ambas figuras son vistas por el microscopio estéreo con diferente zoom.

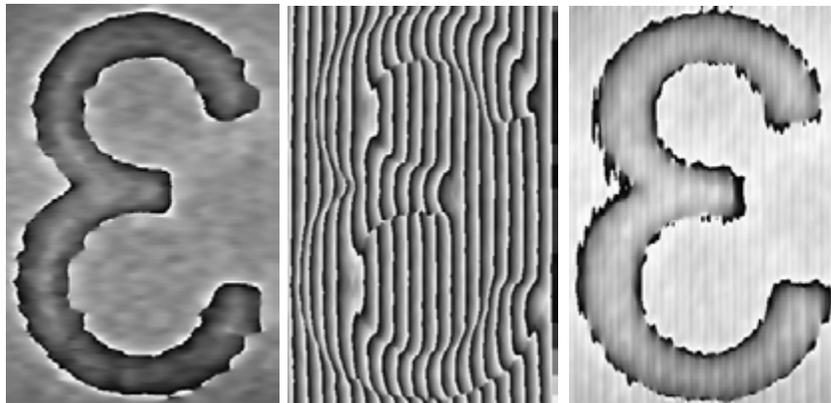


Figura 5.10 (izquierda). Fase envuelta obtenida a partir de la aplicación del método directo.

Figura 5.11 (centro). Fase envuelta obtenida al aplicar el método de phase stepping de 4 pasos a la rejilla real.

Figura 5.12 (derecha). Fase envuelta obtenida al aplicar el método de phase stepping de 4 pasos a la rejilla sintética.

Comparando las figuras 5.10, 5.11 y 5.12, se observa que los cambios de fase en 5.10 y 5.11 están mayormente contrastados con respecto a 5.12, donde se observan algunas discontinuidades o desvanecimientos del cambio de la fase a lo largo de la imagen. Cuando se cuenta con una buena definición del mapa de fase, es decir, entre el cambio de blanco a negro a través de la escala de grises y viceversa, se puede esperar una mejor definición de las diferencias de altura aplicando el cálculo de desenvolvimiento de fase, y por lo mismo, una conveniente resolución de los contornos contenidos en el objeto. En la figura 5.12 también se puede observar un mayor ruido de fondo al permanecer la estela del patrón de franjas proyectado en el número, por lo que se concluye que la etapa de filtrado en esta imagen en particular, no fue del todo exitoso.

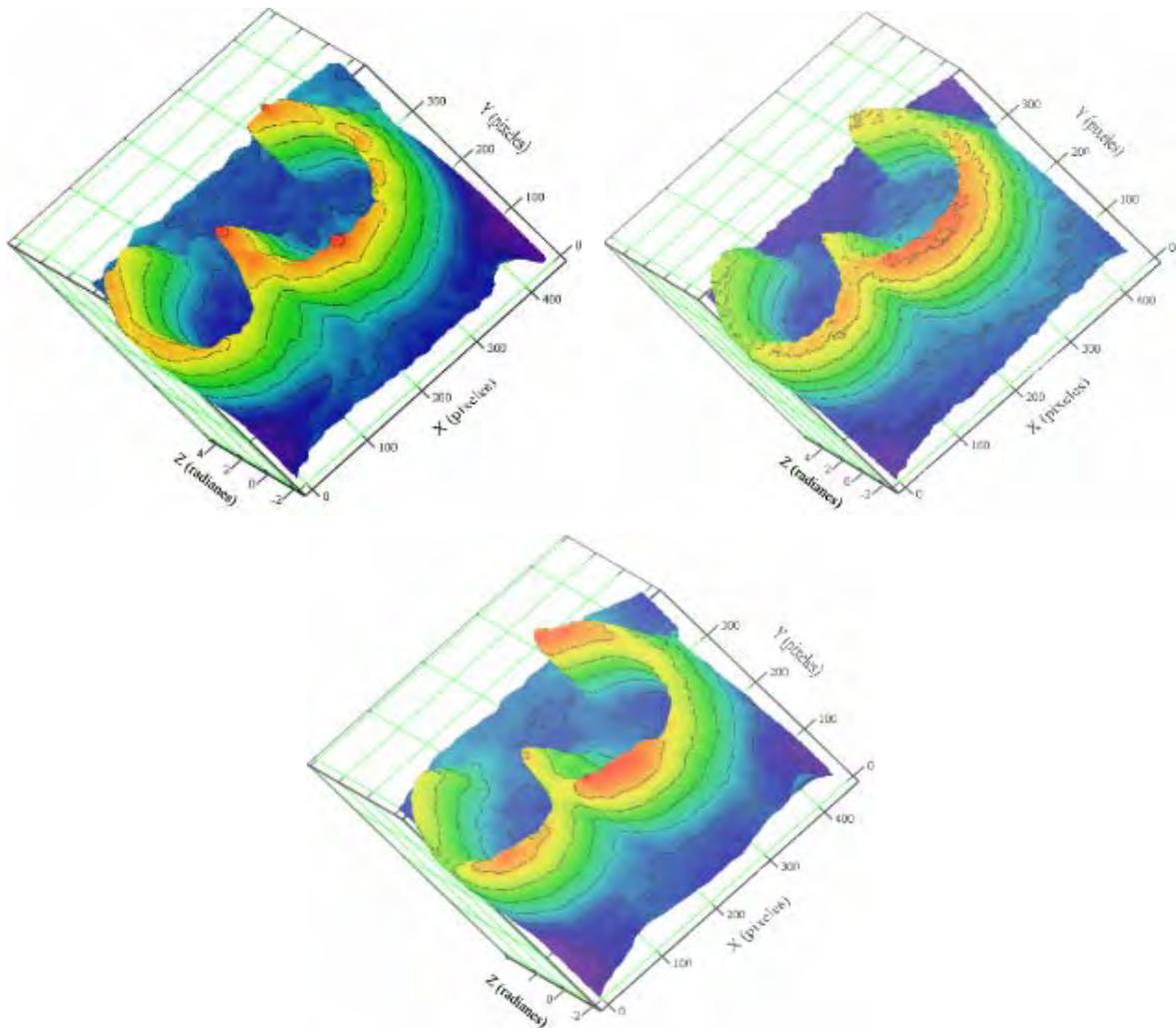
Hay que considerar que estas fueron las primeras pruebas realizadas con el arreglo, por lo que se pueden prestar los resultados a algunas ambigüedades en el sentido de que, en la literatura, el phase stepping logra mejores resultados que el método directo y así parece al comparar la figura 5.10 y 5.11, pero no es lo mismo al comparar la figura 5.10 y 5.12.

Una razón se debe a que, al efectuar el desplazamiento temporal de fase físicamente en la rejilla, en cierto modo el algoritmo promedia cada una de las imágenes superpuestas con la rejilla sintética, lo que reduce el ruido debido al moteado del láser, por lo que el ruido de fondo disminuye y se puede pensar en una mayor optimización de la información contenida en el patrón de franjas, con respecto al método directo.

Por el contrario, al realizar el corrimiento de fase en la rejilla sintética, está no presenta problema alguno al ser producto de una ecuación ideal programada en la computadora, por lo que las franjas se presentan ideales en comparación a la rejilla real a pesar de que se realice la superposición de cada una de las imágenes desplazadas en fase de la rejilla sintética, con la imagen del patrón de franjas capturado por la CCD. En otras palabras, el patrón de moiré obtenido aplicando el desplazamiento de fase a la rejilla real, es menos ruidoso que el obtenido al aplicar el desplazamiento de fase a la rejilla sintética.

Posteriormente a la obtención de la fase envuelta, se aplicó el algoritmo de desenvolvimiento de fase descrito en el capítulo cuarto. Este algoritmo, se fundamenta en el seguidor de fase regularizado (regularized phase tracking unwrapper), que requiere encontrar la función de mérito y del conocimiento a priori de la fase desenvuelta además de la coincidencia entre la función estimada y las observaciones realizadas, para con esto restringir la búsqueda del campo que se desea desenvolver.

La figura 5.13, 5.14 y 5.15, representan la fase desenvuelta de cada uno de los métodos empleados para extraer la fase envuelta mostrada en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12 respectivamente.



Arriba izquierda, figura 5.13, fase desenvuelta calculada a partir de la figura 5.10. Arriba derecha, figura 5.14, fase desenvuelta obtenida a partir de la figura 5.11. Abajo, figura 5.15, desenvolvimiento de fase extraídos de la figura 5.12.

En estas figuras, las unidades en el plano XY están dadas en píxeles, mientras que las unidades en el eje Z son radianes, cuyo rango oscila entre $[\pm 2\pi]$ como se comentó en el capítulo 4. A primera vista, aparentemente las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 son las mismas, sin embargo, al obtener las medidas en datos reales hay una diferencia muy sutil y a la vez trascendente para obtener el grado de error con respecto a la MMC.

Para obtener la altura real del mapa de contorno de cada uno de los métodos descritos hasta el momento, se parte de la ecuación 5.3, que está fundamentada en los desarrollos hechos tanto en el capítulo 2, 4 y el apéndice B. La fase desenvuelta es una matriz de datos que indica los niveles de intensidad (de grises) contenidos en la imagen en cada píxel, y estos valores son proporcionales al algoritmo utilizado para el cálculo de la fase envuelta y modulados por el factor de 2π , por lo que primero se divide la matriz obtenida entre este factor para obtener una medida proporcional al mapa de contorno; posteriormente se escala la imagen, en un factor de 0.061mm por píxel, para obtener las medidas reales de acuerdo a lo comentado en la sección 5.3 del presente capítulo. Las figuras 5.16, 5.17 y 5.18, muestran los resultados en coordenadas reales a partir de las figuras 5.10, 5.11 y 5.12 (milímetros).

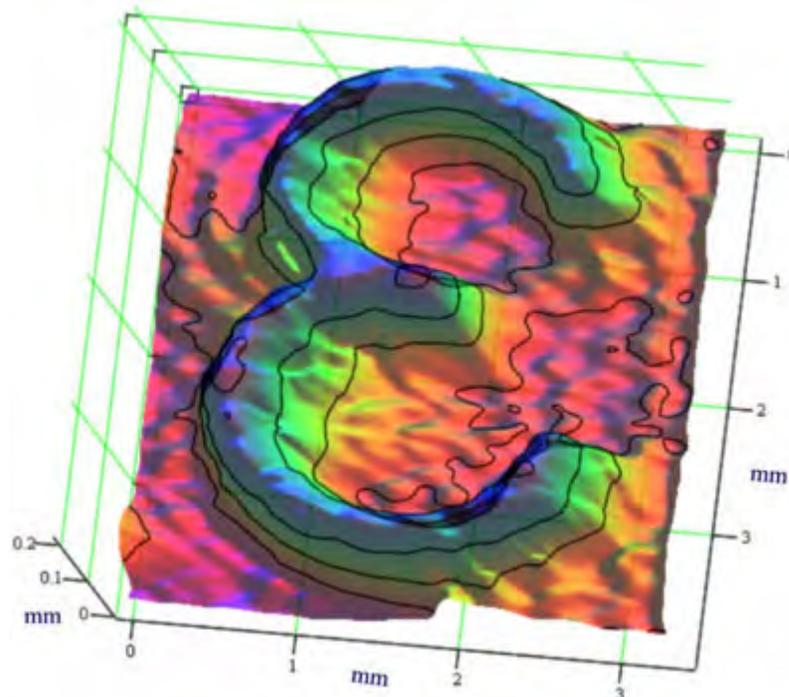


Figura 5.16. Coordenadas reales de la fase desenvuelta a partir del método directo.

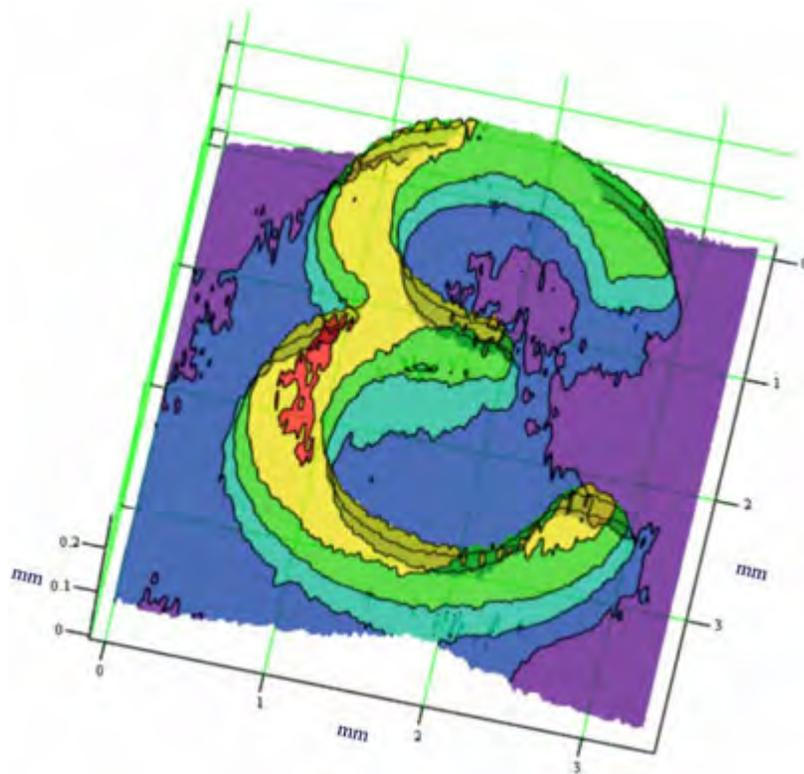


Figura 5.17. Coordenadas reales calculadas a partir del algoritmo de 4 pasos en la rejilla real.

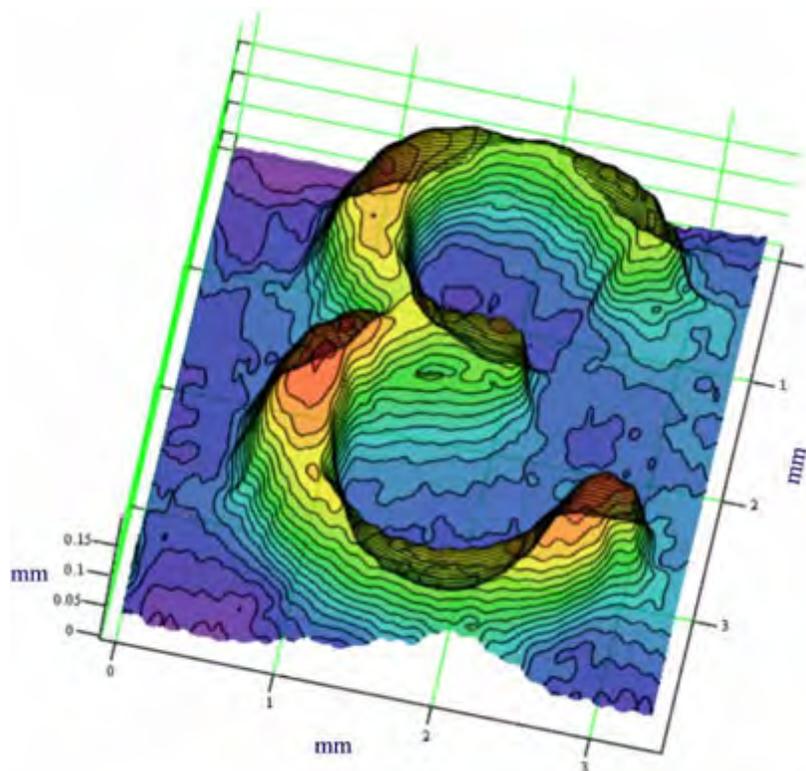


Figura 5.18. Coordenadas reales calculadas a partir del algoritmo de 4 pasos en la rejilla sintética.

En los casos presentados tanto en la figura 5.16 como en la 5.17 y 5.18, se comparo el máximo valor proporcionado por la matriz de datos de la fase desenvuelta en coordenadas reales.

Para el caso del método directo, se obtuvo un máximo de 0.217mm. La altura máxima de la letra realizada con la MMC, correspondió a 0.8307mm, con respecto al plano de referencia de la MMC y se midió la altura de la tapa, con respecto al mismo plano, que fue de 0.5828mm. Al obtener la diferencia entre estas dos cantidades, resulta la medida real de la letra resultando ser de 0.248mm. Estas medidas se realizaron a una temperatura de 20° Celsius, con una humedad relativa de 40%, siendo el diámetro del palpador de la MMC de 0.9712mm y con una incertidumbre en la medición de +/- 6 micras.

Comparando las cantidades calculadas por el método óptico y por la MMC, se observa una diferencia, la cual es el error en la medición de la técnica óptica tomando como referencia la MMC. Este error se obtiene por una sencilla regla de tres y da como resultado 12.5%. Sería deseable que esta diferencia fuese menor al 10%, pero hay que considerar que se esta midiendo solo un punto y esta medición fue la primera realizada con el arreglo experimental mostrado en la figura 5.3, por lo que se estuvo en mayor medida sujeto a errores de tipo humano e inexperiencia por parte del ejecutor. Por otro lado, si se toma la incertidumbre de la MMC a favor de las realizadas con la técnica óptica, el error baja a 10.33%.

Para el caso del desplazamiento de fase de 4 pasos en la rejilla real, se obtuvo un máximo de 0.268mm. El error con respecto a la MMC disminuyó y fue del orden de 8.065% y si se considera la incertidumbre a favor se logra un 5.512%. Este error es menor al del método directo e implica que el ruido de fondo se esta promediando, por lo que la calidad de las franjas se incrementa notablemente con las consecuentes ganancias en cuanto a la obtención de los mapas de contorno en la fase envuelta.

Para el caso del desplazamiento de fase de 4 pasos, se obtuvo un máximo de 0.195mm. El error con respecto a la MMC aumentó y fue del orden de 21.371% y si se considera la incertidumbre a favor se logra un 19.421%. Se podría esperar que el error arrojado por esta técnica fuese menor al del método directo, ya que en el desplazamiento temporal de fase se promedia el ruido de fondo, por lo que la calidad de las franjas tendería a mejorar y así tener una mayor precisión en los resultados. Los argumentos para justificar esta diferencia se podrían enumerar uno a uno, pero resultaría ocioso hacerlo ya que los algoritmos para el procesamiento de las franjas utilizados, presentan un rango de error que varía de interferograma a interferograma. Se ahondara más en las conclusiones.

Recuperación de la topografía de un gasket desgastado.

El único cambio que sufrió el arreglo de la figura 5.2 con respecto a lo descrito en la recuperación de la letra en la tapa de plástico, fue el cambio en la frecuencia de la rejilla, por lo que las condiciones de la iluminación y del sistema óptico se mantuvieron inalteradas. La frecuencia de la rejilla lineal utilizada fue de 50 LPI (1.969 líneas/mm), lo cual corresponde a un periodo de 0.508mm; el ángulo de observación medido directamente del arreglo da como resultado 20.898° y el plano de Talbot de referencia se encuentra a una distancia de 82cm aproximadamente de la rejilla generadora de las auto-imágenes. La diferencia en cuanto al ángulo de observación y el plano de Talbot, se debe al cambio en la frecuencia de la rejilla.

El gasket observado se muestra en la figura 5.18, y tiene dimensiones aproximadas de 22.468mm de diámetro y una altura que varía entre las 600 a las 700micras. En este objeto, el plano o estado de referencia son las franjas proyectadas en una base plana que sirvió de soporte para colocar el gasket.

Para obtener la fase envuelta, se utilizaron dos algoritmos: el llamado método directo, el cual solo requiere de una imagen para obtener la información de la fase y el desplazamiento

temporal de cuatro pasos (phase stepping) a la rejilla sintética. La fase envuelta obtenida con la ayuda de estas técnicas, es mostrada en las figuras 5.19 y 5.20.

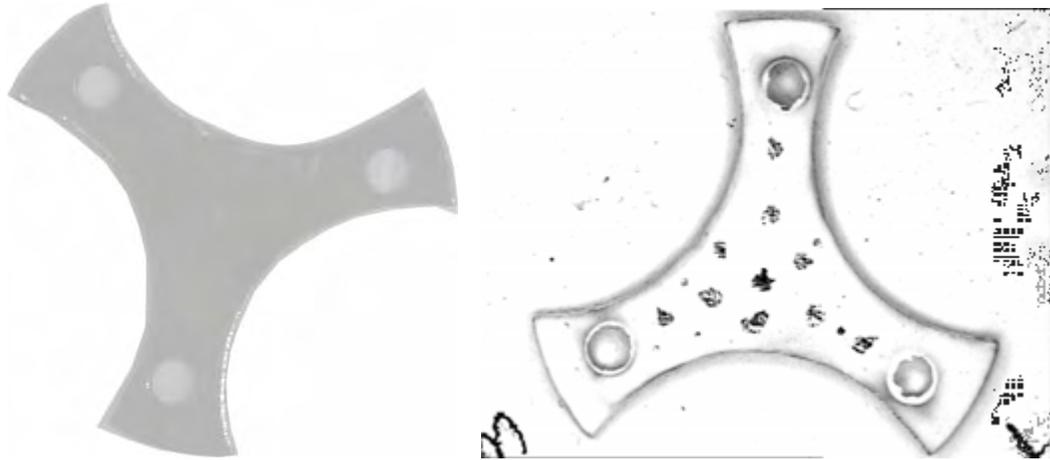


Figura 5.18. Imágenes de la gasket. A la derecha, gasket real y a la izquierda gasket rociada con tinte blanco para conseguir un mejor contraste de las franjas proyectadas. También muestra los puntos de medición hechos por la MMC.

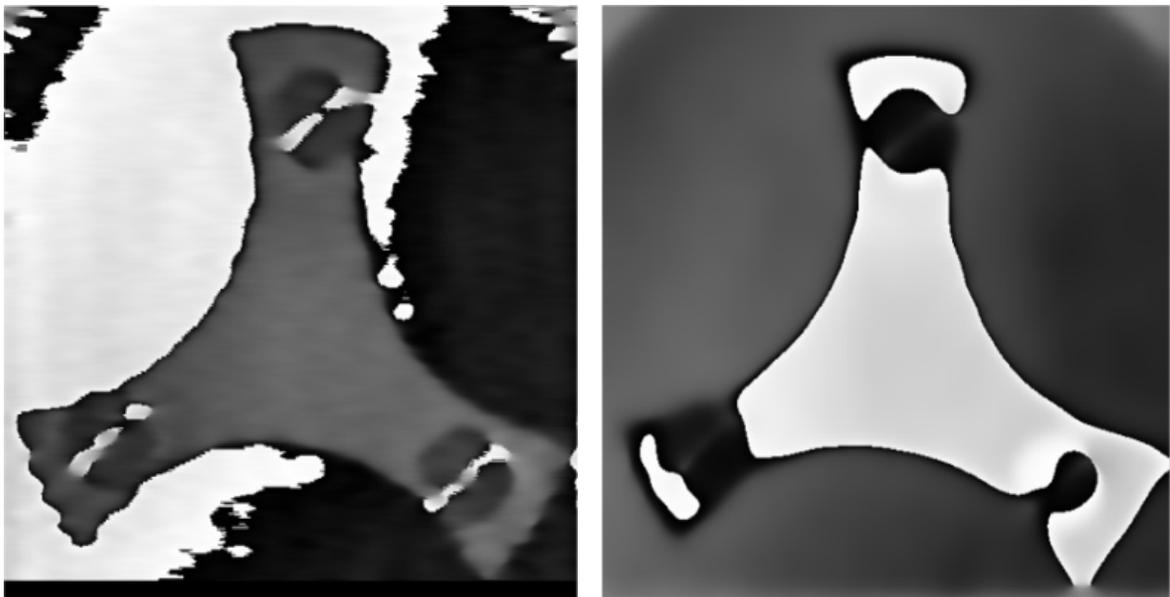


Figura 5.19 (izquierda). Fase envuelta calculada a partir del método directo. Figura 5.20 (derecha). Fase envuelta obtenida al aplicar el desplazamiento temporal de fase en la rejilla sintética.

Se puede corroborar visualmente, que la fase envuelta de la figura 5.20 esta mejor definida con respecto a la mostrada en 5.19, lo que indudablemente haría pensar que el desplazamiento de fase arroja resultados más fiables o libres de ruido. Esto obviamente es cierto siempre y cuando se realice la comparación entre ellos o, mejor dicho, entre las imágenes de sus fases envueltas. Sin embargo, al igual que en los resultados calculados para la letra plasmada en la tapa plástica, interesa la precisión en la medición obtenida referenciada a la MMC. A continuación, las figuras 5.21 y 5.22 presentan el desenvolvimiento de la fase a partir de 5.19 y 5.20 respectivamente.

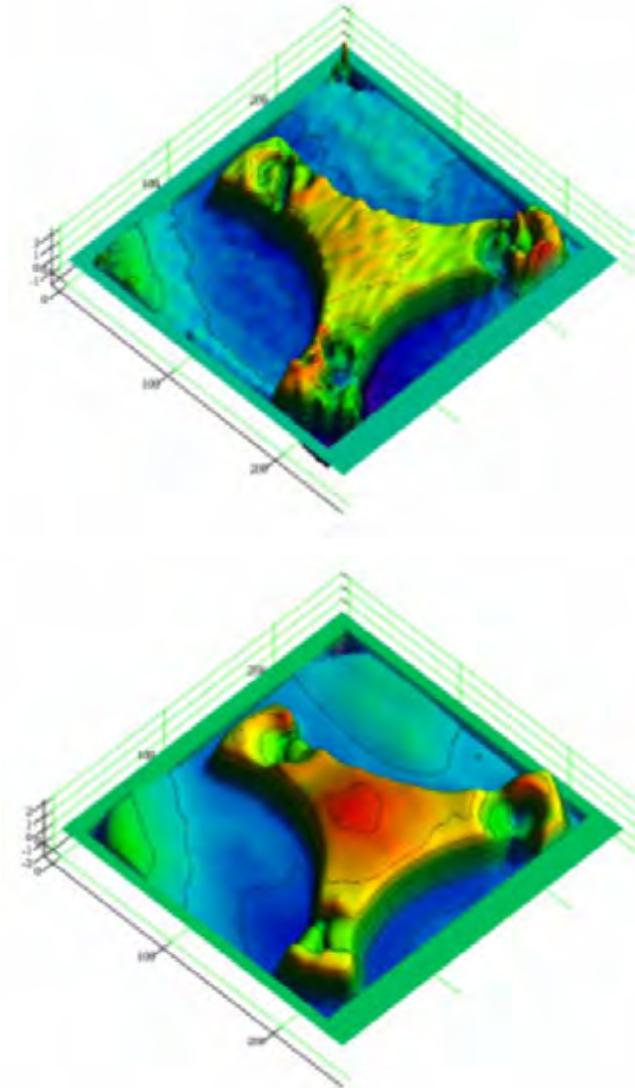


Figura 5.21 (arriba). Fase desenvuelta a partir de 5.19.

Figura 5.22 (abajo). Fase desenvuelta derivada de los resultados de la figura 5.20.

En estas dos figuras, las coordenadas de los ejes están dadas en píxeles.

Por último, se muestran las imágenes en coordenadas reales de las fases desenvueltas mostradas en las figuras anteriores (5.21 y 5.22).

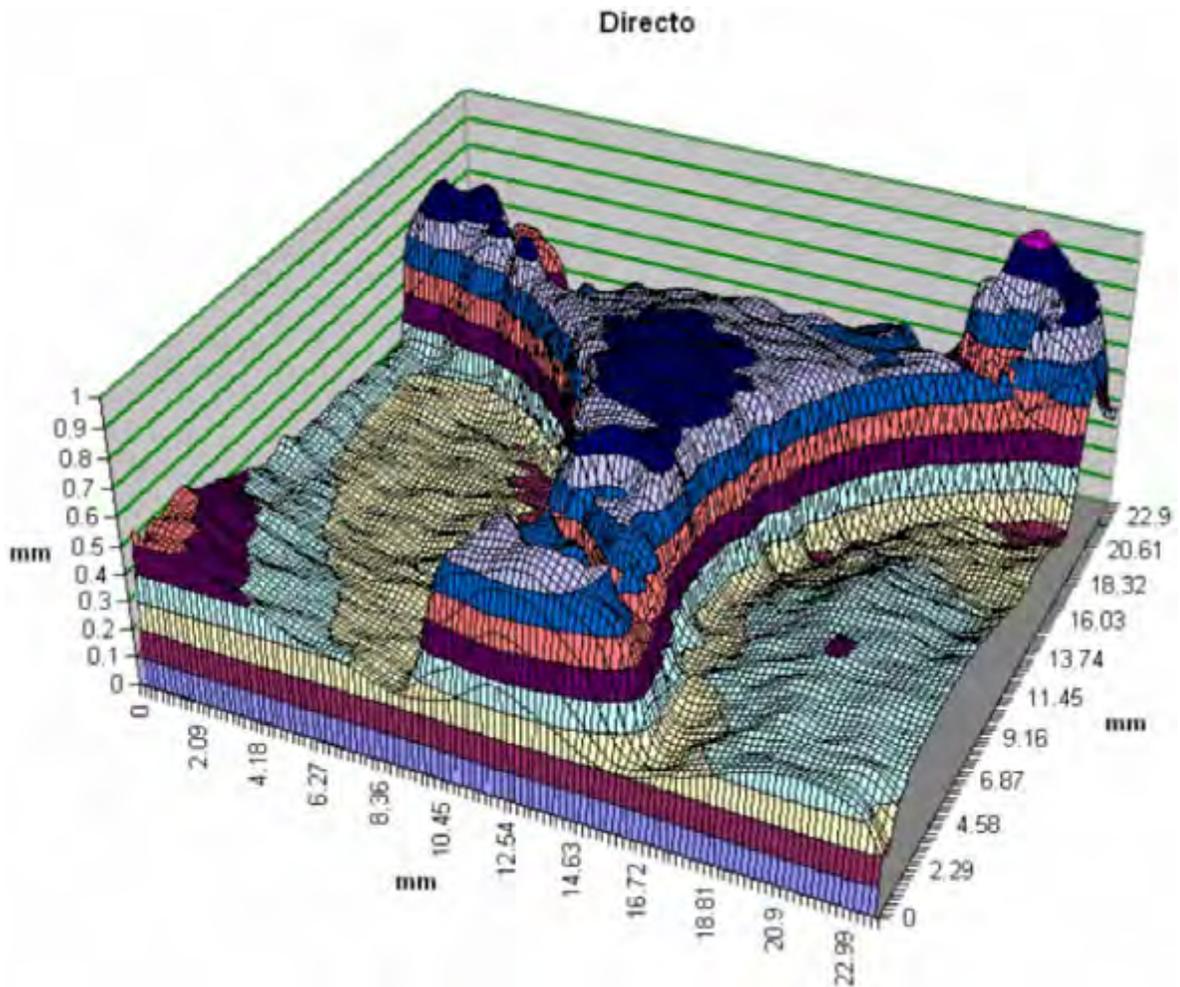


Figura 5.21. Fase desenvuelta en coordenadas reales (método directo).

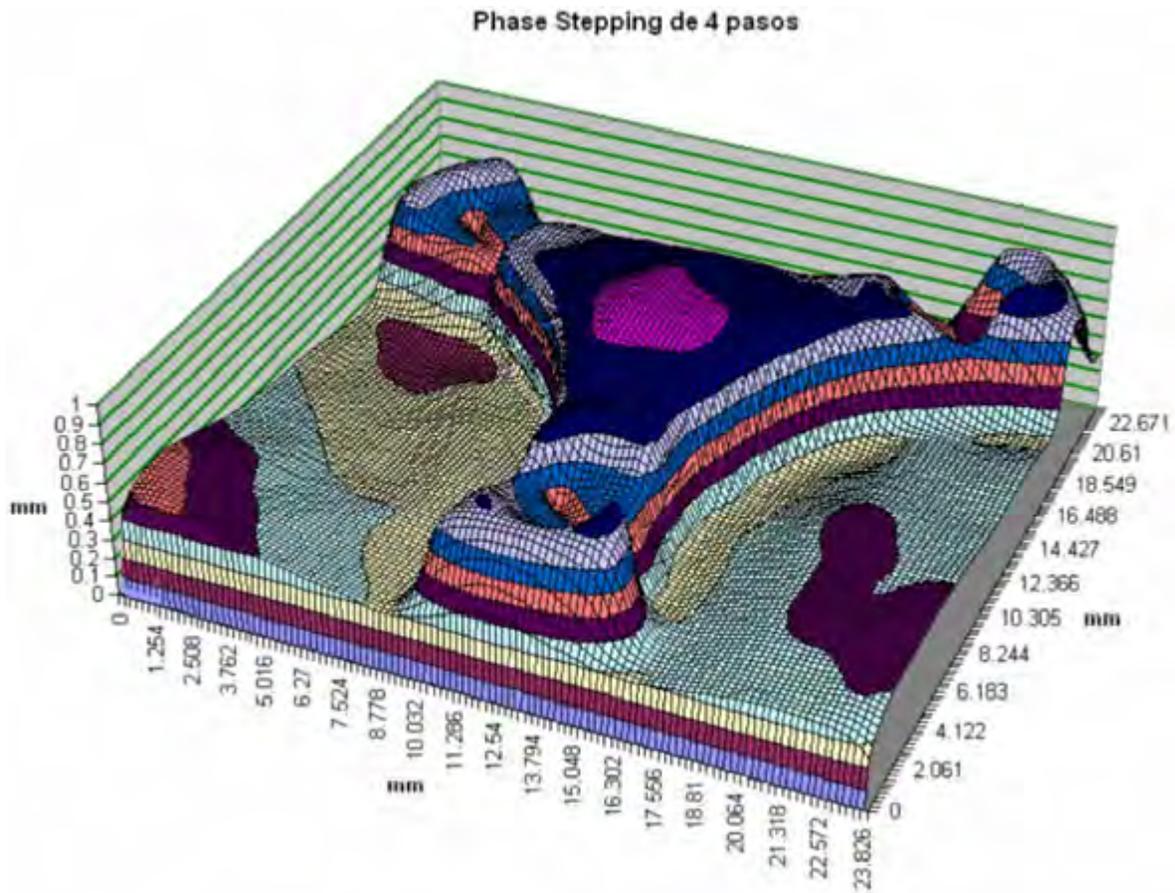


Figura 5.22. Fase desenvuelta en coordenadas reales, generada a partir del algoritmo de 4 pasos.

Las medidas relativas al área que ocupa la gasket, comparándola con el dato proporcionado por la MMC que es de 22.468mm, es relativamente la misma si se toma en cuenta que las dimensiones de la gasket puede variar ligeramente una con respecto a otra.

Con respecto a las alturas que es el dato relevante, se cálculo a partir de la ecuación 5.3 y se comparó con las medidas producidas por la MMC. En este caso si se trato del mismo espécimen. Las condiciones bajo las cuales se realizó la medición con la MMC, fueron las mismas que las descritas en el apartado correspondiente a la tapa de plástico.

Para la obtención del error en la medida óptica con respecto a la MMC, se procedió como se describe a continuación. Se marcaron algunos puntos en la superficie de la gasket, los cuales se muestran en la figura 5.18, y se midieron con la MMC la cual reporta un promedio en la medición con respecto a un plano de referencia. En este caso, la gasket se encontraba fijada a una superficie plana de vidrio pintada de color blanco la cual fue utilizada como el plano de referencia por la MMC. El promedio calculado por la MMC fue de 0.7416mm con una incertidumbre en la medición de +/- 6 micras.

A partir de los puntos marcados en la figura 5.18, y debido a que el diámetro del palpador de la MMC es de 0.9712mm, el contacto con los puntos marcados no se realiza en forma puntual por lo que no corresponde a un píxel dentro del área de la imagen además de dejar una huella visible en la superficie de la gasket, gracias a que esta estaba recubierta con una capa de pintura blanca para obtener un mejor contraste en las franjas proyectadas. Pues bien, se aprovechan las marcas dejadas por el palpador sobre la superficie, para delimitar una sub-matriz dentro de la matriz de datos obtenida por el desenvolvimiento de la fase, la cual trata de corresponder al área del punto dejado por el transductor de la MMC para de esta manera tener un promedio de altura en esos $n \times n$ píxeles y así obtener una medida mas congruente en comparación a la MMC. Una vez realizado lo anterior, se llega a un resultado promedio dependiendo del método por el que se haya desenvuelto la fase. Para el método directo, se obtuvo un promedio de 0.714mm y para el desplazamiento de fase tanto como 0.821mm; de aquí que el error es de 3.691% y 10.74% respectivamente. Si se aplica la incertidumbre de la MMC a favor de las mediciones se tendría un error de 4.464% y de 9.851% respectivamente. Estos errores son menores al 10% en relación a la MMC, por lo que pueden considerarse como precisos. Al igual que el apartado anterior, correspondiente a la letra en la tapa de plástico, se profundizará más en las conclusiones.

Obtención de la forma de un vidrio de perfil convexo.

En este experimento, las condiciones de iluminación de mantuvieron al igual que la frecuencia de la rejilla (50 líneas por pulgada, 1.969 líneas por milímetro), y el ángulo de observación en este arreglo es de 14.231° . El sistema óptico, que incluye tanto el microscopio estéreo como las lentes colimadoras y demás, mantienen los mismos valores que los descritos anteriormente. La muestra consiste en un vidrio de perfil convexo de 50mm de diámetro, tal como se observa en la figura 5.23.

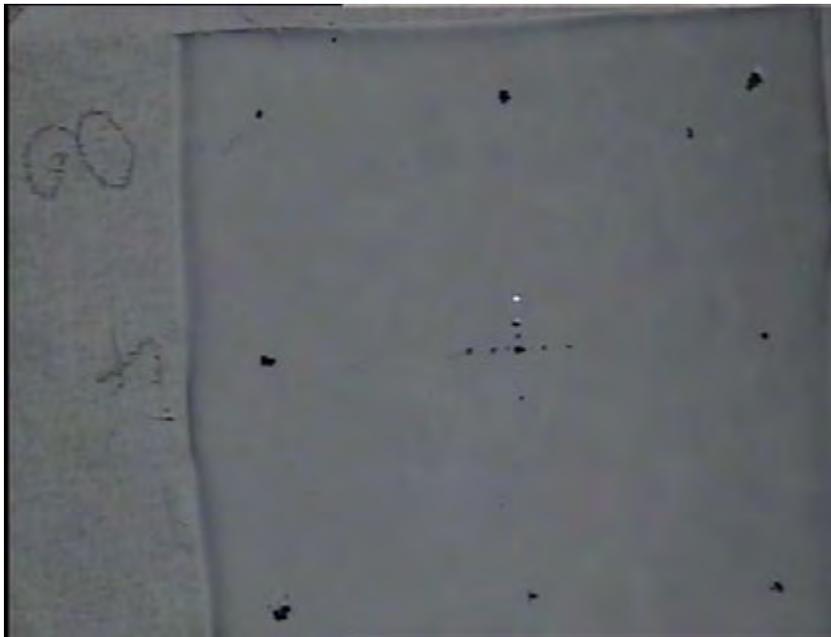


Figura 5.23. Imagen del vidrio convexo.

En la figura 5.23, solo se muestra una parte del vidrio, el área de interés. En esta se muestran algunos puntos hechos para que la MMC los tomase como referencia para medirlos y compararlos con el punto de altura máxima que corresponde al punto central de la imagen 5.23.

La finalidad de esta prueba en un inicio, consistió en calcular un error en las mediciones que fuese sistemático, es decir, que tuviese relación con las aberraciones que el sistema óptico agrega al análisis ya que estas mediciones, además de compararse con las logradas

con la MMC, la superficie se compara con otra ideal generada por computadora basada en los puntos caracterizados por la MMC y a partir de estas diferencias calcular una especie de constante técnica del sistema en conjunto que se compensará en cada medición. Sin embargo, para obtener las medidas de la gasket con este arreglo, se contó con una serie de puntos marcados en la superficie que permitió compararlos, directamente, con las mediciones proporcionadas por la MMC. La separación entre puntos es de 20.3mm.

El calculo de la fase envuelta, se realizó aplicando el método directo y el algoritmo de “n” pasos para lo que se capturaron 15 imágenes. Además, en el método directo se utilizo el filtro de seno y coseno para eliminar de una manera más efectiva el ruido de fondo. Estas técnicas fueron comentadas en el capítulo 4. Las figuras 5.24 y 5.25 muestran los resultados obtenidos.

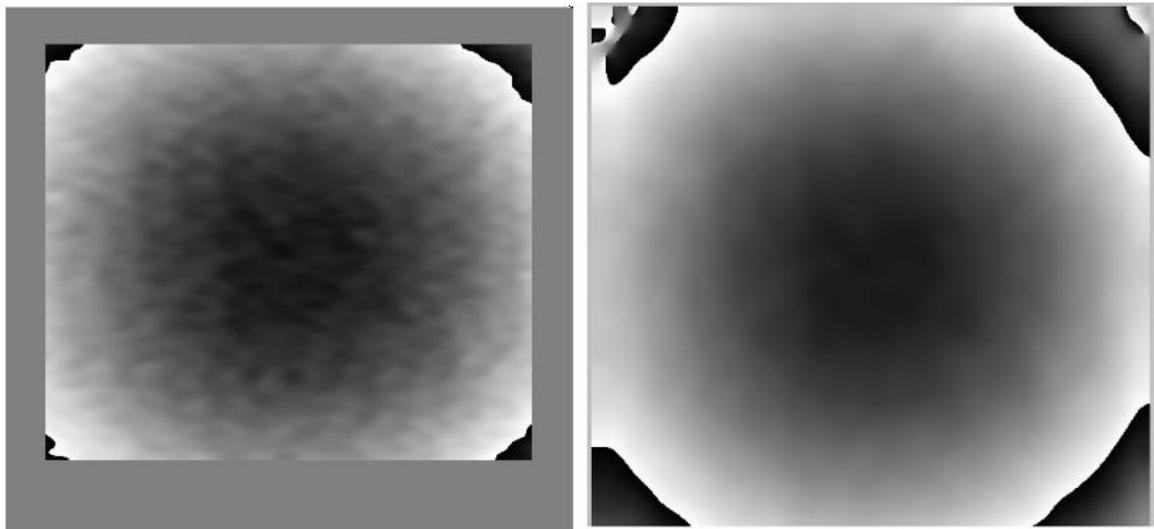


Figura 5.24. Fase envuelta calculada por método directo: antes y después de aplicar la multiplicación por el seno y el coseno.

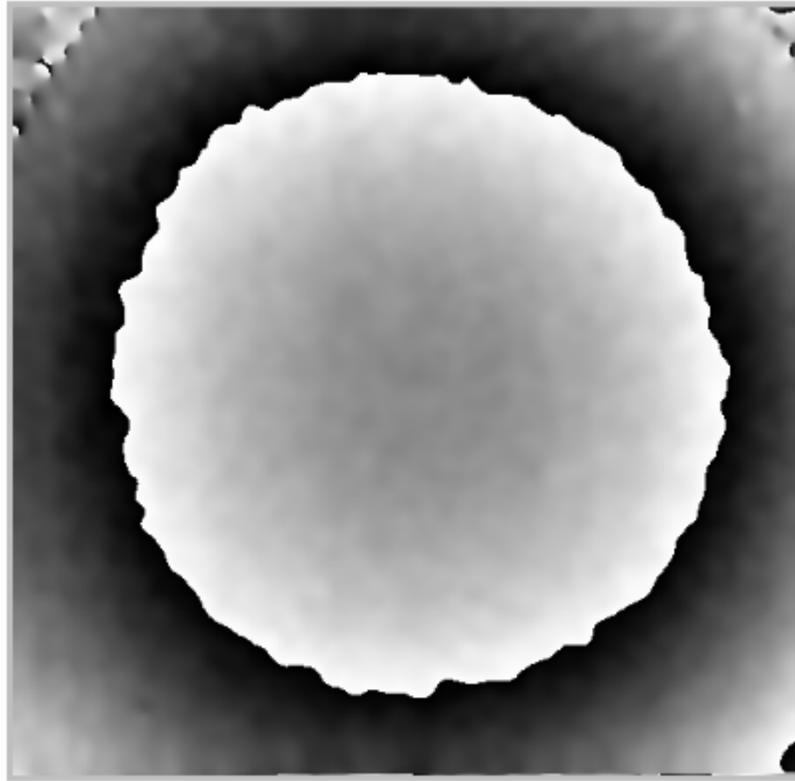


Figura 5.25. Fase envuelta obtenida por el desplazamiento de fase de 15 pasos.

En este caso, las fases envueltas mostradas son de muy buena resolución y, en el caso del método directo, se observa una mejora notable al aplicar el filtro de seno y coseno llegando inclusive a filtrar de un mejor modo el ruido de fondo. La figura 5.26 y 5.27 muestran la obtención de la fase desenvuelta en coordenadas reales de 5.24 y 5.25 respectivamente, y en la figura 5.28 se muestra la superficie generada a partir de los puntos caracterizados por la MMC.

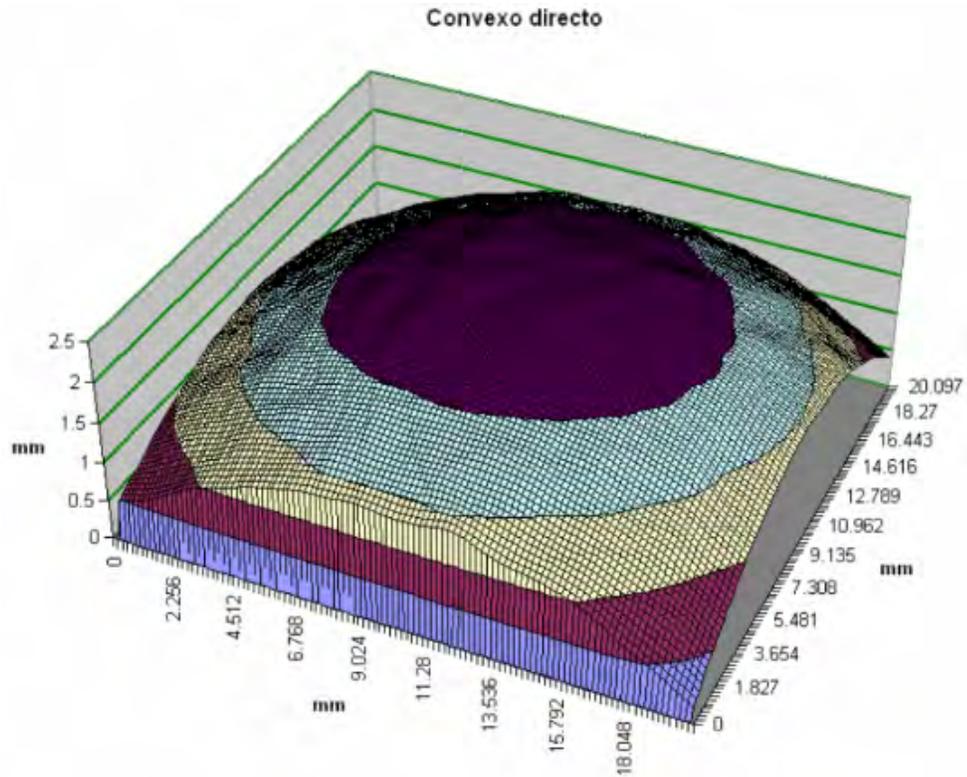


Figura 5.26. Medidas reales de la fase envuelta calculada a partir del método directo.

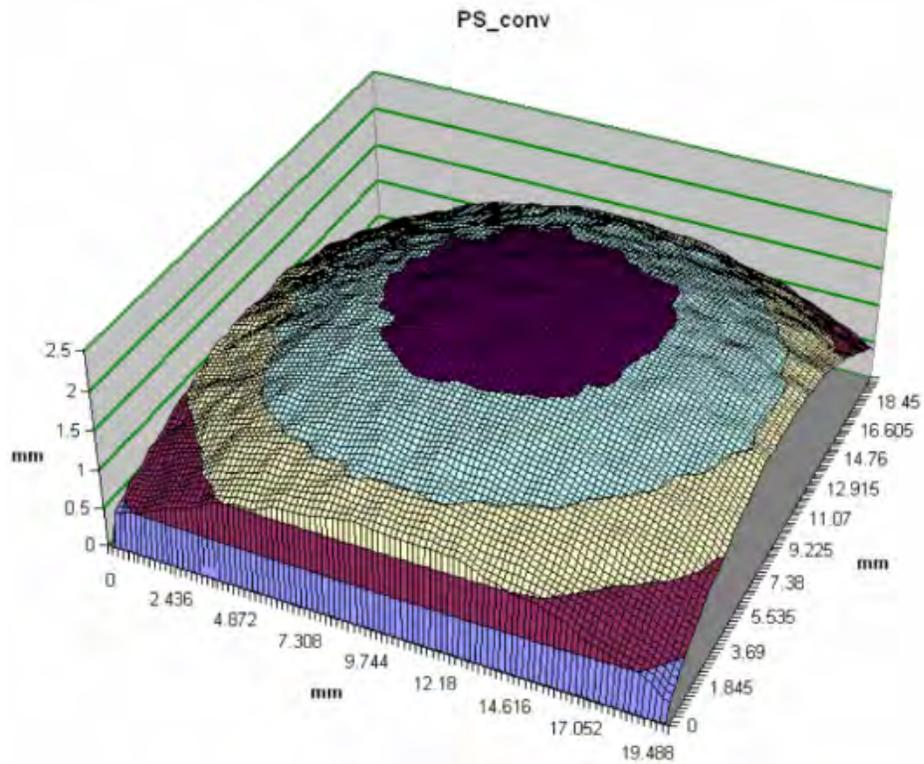


Figura 5.27. Superficie en coordenadas reales a partir del desplazamiento de fase (15 pasos).

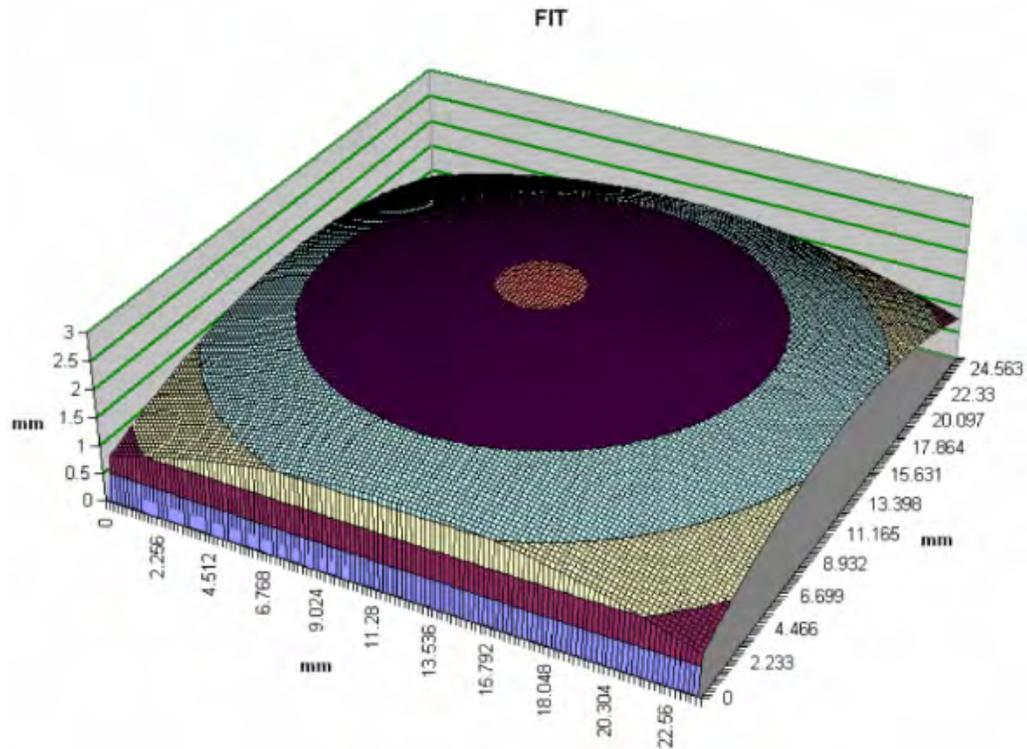


Figura 5.28. Superficie ideal obtenida a partir de los puntos calculados por la MMC.

Para el cálculo del error se procedió de dos formas. Primera: al tener la imagen de la superficie de referencia, que fue la misma a la que se le proyectó el patrón de franjas, se comparó directamente las alturas en los puntos específicos obtenidos al aplicar la ecuación 5.3 a la fase resultante de las técnicas ópticas con las proporcionadas por la MMC. Segunda: y al igual que en la recuperación de la gasket desgastada, se promedió una submatriz a partir de la matriz de datos arrojada por la fase desenvuelta por cada huella marcada por el palpador de la MMC sobre la superficie y se comparó con los datos de la MMC.

Para el caso del cálculo de la fase por el método directo, se obtuvo una diferencia de altura entre el punto máximo y los puntos de referencia ubicados en la periferia del área de interés de la muestra de 0.898mm con la MMC, contra 0.976mm proporcionados por la fase desenvuelta, por lo que se produce un error de 8.686% con respecto a la MMC. Procediendo de la segunda forma descrita en el párrafo anterior, los puntos promediados

con la técnica óptica dan como resultado 0.895mm dando un error de 0.334% con respecto a la MMC.

Los datos obtenidos utilizando el desplazamiento de fase de 15 pasos fueron los siguientes: al igual que en el párrafo anterior, entre el punto máximo y los puntos marcados en la superficie convexa, la MMC cálculo 0.898mm contra 0.781mm de la fase desenvuelta, existiendo un error de 13.029% con respecto a la MMC. Por otro lado, el promedio de las sub-matrices limitadas por los puntos en la superficie, proporcionan un valor de 0.782mm por lo que el error es de 12.918% con respecto a la MMC. Se puede notar que la variación porcentual fue muy baja en comparación con el método directo. Si se aplica la incertidumbre en la medición de la MMC a favor de los resultados, el error será aun menor.

Recuperación de la topografía de un gasket no desgastado

Para esta prueba, el sistema óptico y de iluminación son los mismos que los indicados en la muestra anterior al igual que la frecuencia de la rejilla y el ángulo de observación. En la figura 5.18 (izquierda), se mostró la forma de la gasket. Como el objeto a tratar en esta sección es una gasket no desgastada, los puntos que se toman de referencia sobre la superficie se pueden ver en la figura 5.29.



Figura 5.29. Gasket y puntos de referencia sobre la superficie.

Sin mas preámbulo, en las figuras 5.30 y 5.31 se muestra el resultado de la fase envuelta, calculada a partir del método directo y del phase stepping de 15 pasos.

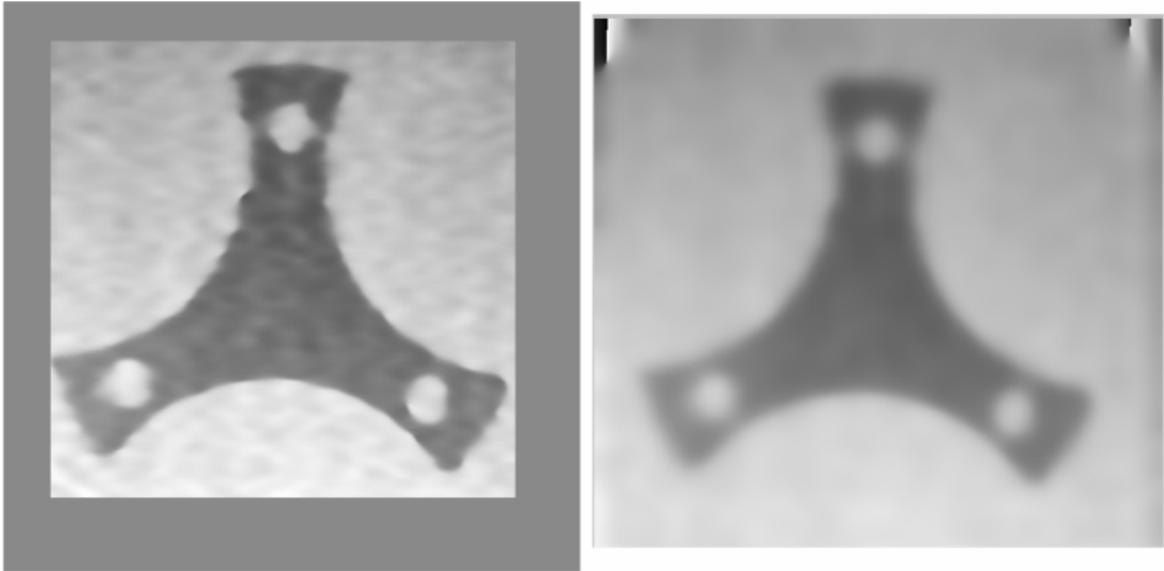


Figura 5.30. Fase envuelta calculada por método directo: antes y después de aplicar el filtro multiplicando por el seno y el coseno.



Figura 5.31. Fase envuelta al aplicar el algoritmo de “n” pasos a las imágenes capturadas.

De acuerdo a las figuras mostradas, se puede esperar que el desenvolvimiento de la fase tenga un error significativamente menor con respecto a los datos mostrados con la gasket desgastada, los cuales se aproximaban al 4.4% con la aplicación del método directo y el 9.8% para el desplazamiento temporal de fase de 4 pasos. Los resultados de la fase desenvuelta son mostrados en las figuras 5.32 y 5.33.

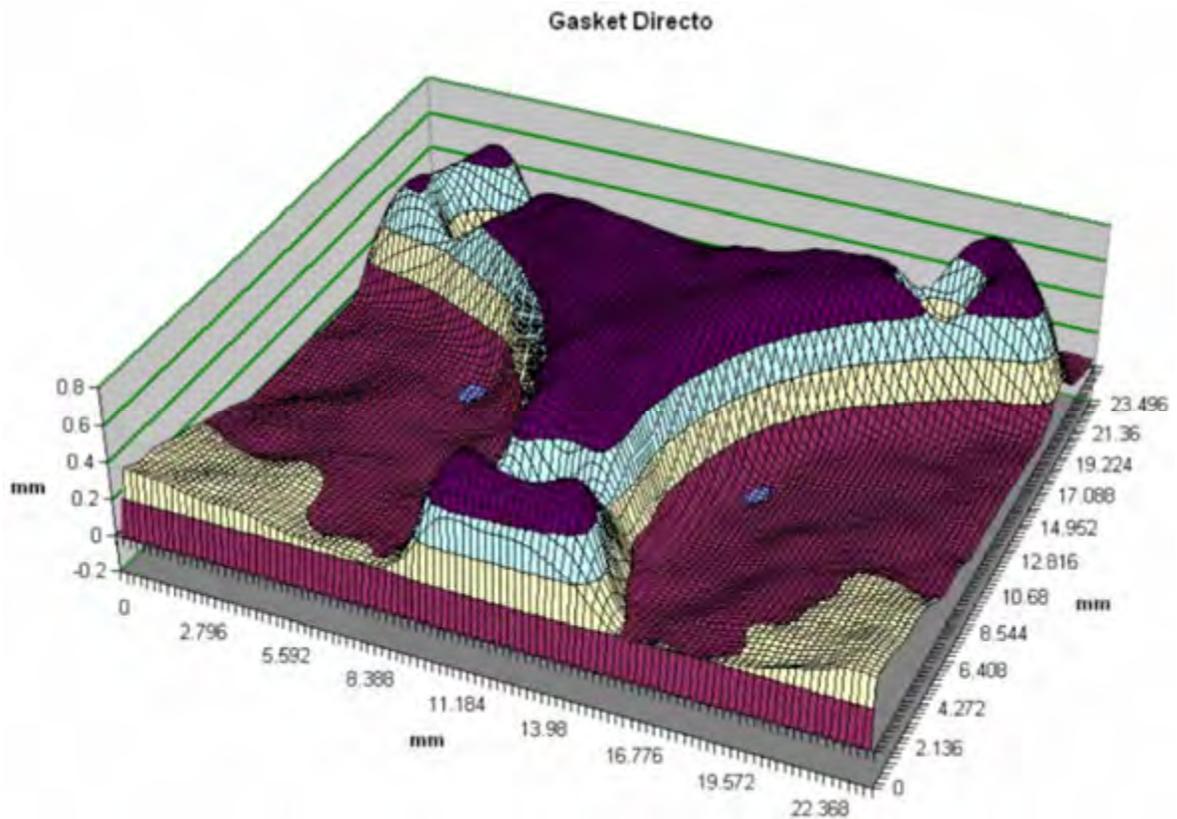


Figura 5.32. Fase desenvuelta en coordenadas reales de la gasket aplicando el método directo.

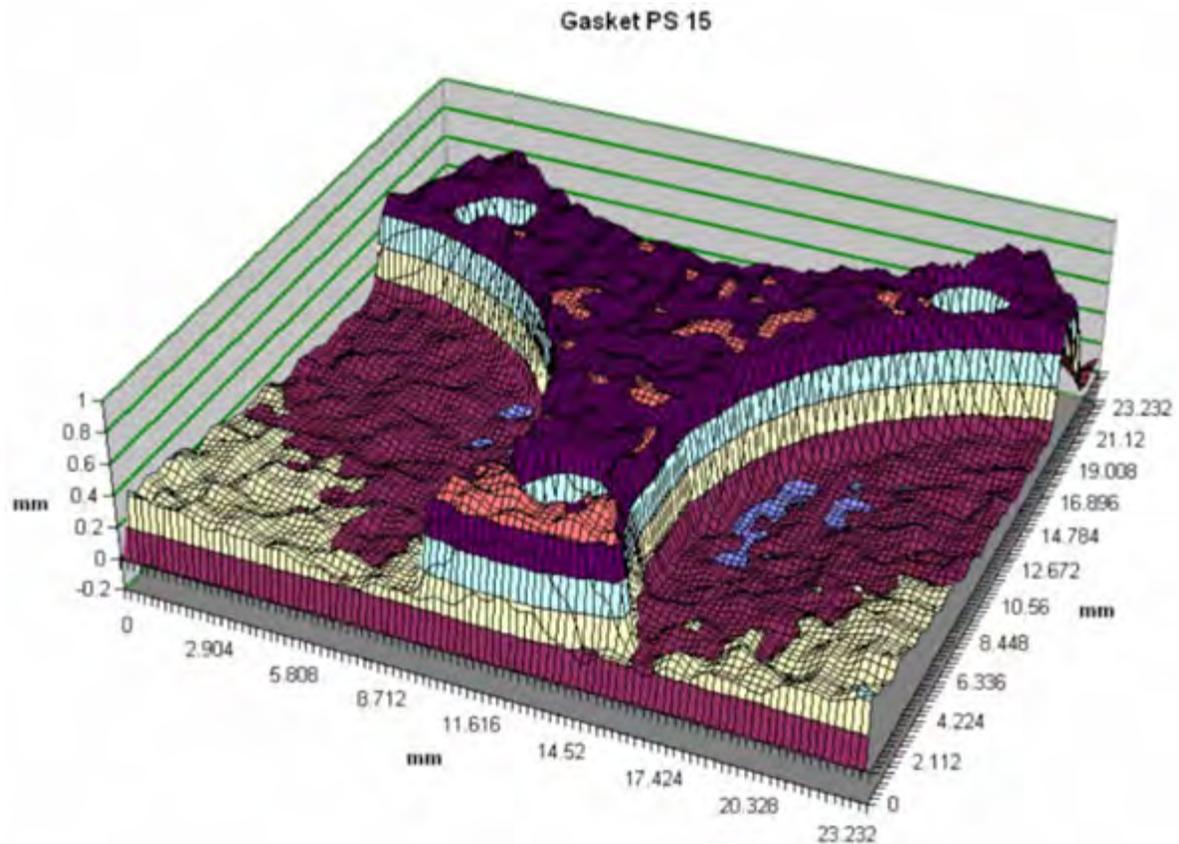


Figura 5.33. Fase desenvuelta en coordenadas reales de la gasket calculada por el phase stepping de 15 pasos.

Para calcular el error con respecto a la MMC, se aprovecho el hecho de que se contaba con una imagen de referencia la cual tenía los puntos a medir; esta imagen (figura 5.29), tiene las mismas características, en posición espacial, con respecto a la que se proceso aplicando los algoritmos de análisis de franjas. Por esta razón, se obtuvo la diferencia en las mediciones calculando la altura del píxel central donde había tocado el palpador de la MMC con respecto a las mediciones hechas por la misma MMC. Otra forma en que se obtuvo el error fue delimitar sub-matrices de la fase desenvuelta, calculada aplicando la ecuación 5.3 a la matriz de la fase envuelta, cuyo tamaño trata de correspondes al área donde toco el palpador el cada punto de la superficie, tal como se realizó para la gasket desgastada y para la superficie convexa descritos anteriormente.

Los resultados proporcionados al aplicar el método directo fueron los siguientes: al realizar la medida directa en el píxel central de los puntos marcados (figura 5.29), se obtuvo un promedio en la altura de 0.68mm contra 0.725mm promediados por la MMC, lo que provoca un error de 6.207%. Este error disminuye al aplicar las sub-matrices derivadas de delimitar un área sobre los puntos de la figura 5.29 y compararlas con el promedio de la MMC; la media aritmética de todas estas sub-matrices arroja un valor de 0.718 y el error es entonces de 0.929%.

Repitiendo el mismo proceso descrito en el párrafo anterior pero ahora empleando el algoritmo de “n” pasos (en este caso 15), se obtiene que la media de los píxeles centrales de los puntos medidos por la MMC es de 0.695mm, lo que corresponde a un 4.138% de error; calculando el promedio de las sub-matrices se tiene una medida de 0.717mm por lo que el error disminuye a 1.083%.

Los errores reportados en los párrafos anteriores pueden disminuir si se utiliza la incertidumbre en la medición de la MMC a favor de estos resultados por lo que se obtiene un error de 5.38% y 0.102% en el caso del método directo; 3.31% y 0.276% para el phase stepping de 15 pasos. Si se hablara en términos electoreros, se tiene un empate técnico. Se comentará más al respecto en las conclusiones finales.

Referencias

1. [R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza-Santoyo, “3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes”, Journal of Modern Optics, Vol. 38, No. 10, 1935-1945]
2. [“Operating manual Stemi 1000/2000/2000-C”, Manual B 40-002 e, Carl Zeiss Mikroskopie, 1998]
3. [<http://www.jai.com>]

CAPÍTULO 6

Conclusiones Generales.

6.1 Resumen y conclusión de los logros alcanzados.

Dos palabras, como se comentó en la introducción del capítulo 5, son básicas en cualquier tipo de medición que se desee realizar: precisión y exactitud; vocablos de similar significado cuya forma de pronunciarse esconde el fondo de su crucial diferencia. Exactitud es la puntual y fiel ejecución de algo, y este algo es tan vago y abstracto que no tiene sentido en si mismo; exacto es cabal y entonces la palabra adquiere sentido: ajustado al peso o a la medida, cantidades físicas que describen cualitativamente un ente, sin importar al sujeto que materialicen sea este una moneda, un auto, el acero o la pluma de un ave.

Precisión, definida desde la filosofía de la óptica, es la separación mental que hace el entendimiento (la conciencia) de dos cosas realmente identificadas, en virtud de la cual se concibe la una como distinta de la otra; diferencia es entonces su esencia, es encontrar los pequeños detalles que hace único un rayo de luz (concepción geométrica) de otro, la variedad entre cosas de una misma especie; precisión implica concisión, brevedad y economía de medios en el modo de expresar un concepto con exactitud, y entonces se cierra el círculo virtuoso y anfibológico entre preciso y exacto y la línea divisoria es una mera concepción virtual relativa a la manera en como percibimos tal o cual espécimen, en la necesidad imperante del hombre de definir, significar algo, implementar una nueva palabra al lenguaje, un ente o una imagen que el cerebro percibe para atraparla y volverla tangible, real, aunque este inmersa en la irrealidad de su esencia.

De esta dependencia absurda y necesaria, se gesta la incertidumbre, la falta de conocimiento seguro y claro de algo, la no certeza; el error que es el valor medido o calculado y el real; ¿real?, ¿con respecto a que? Y la realidad entonces requiere de una referencia, una base, una comparación, una medición o una relación de otro tipo, respecto a otra cosa, y que mejor a un patrón. Y entonces se fijaron los patrones de referencia, universales, perfectibles, inamovibles hasta que la matemática de la física no los desenmascare.

El hombre percibe y mide sus creaciones, sus descubrimientos, lo referencia a patrones preestablecidos, seguros, demostrables, dominados, para quitarles el velo del misterio y desnudar su gnosticismo. Y es conciente de su inexactitud, de los errores en las mediciones, en los descubrimientos o en los experimentos que realiza.

El que ejecuta un experimento sabe que entre mas puntos o datos se midan, cuanto mas será la precisión que se puede obtener al promediar los mismos, aunque siempre existirá el error humano al influir en la medición. Es algo así como lo que sucede en las concepciones de mecánica cuántica, en donde, cuando un observador mira al sistema bajo estudio, interactúa con el mismo y sucede que las variables cambian y lo esperado en el sistema estudiado no tendrá el mismo comportamiento exacto al que se supusiera. Sucede con la famosa paradoja del gato encerrado de Shrodinger, donde el observador juega un papel definitivo en el comportamiento y definición del sistema.

Algo similar sucede los experimentos desarrollados en esta tesis, si bien sencillos y prácticos no dejan de estar influidos por la percepción humana. Entonces, salta la cuestión básica en este tipo de mediciones: la precisión o la exactitud con la que se toman los datos. El ser preciso no necesariamente significa ser exacto, y el tener exactitud no siempre es sinónimo de precisión y menos cuando se requieren realizar muchas mediciones a lo largo de un tiempo o espacio. Pensemos en un tirador de dardos a un blanco. Probablemente muchos de sus tiros caerán cerca del centro o del valor máximo, más no todos, y seguramente casi ninguna pegará exactamente en el centro. Sin embargo, si la mayoría de los dardos caen en una zona cercana a un punto de referencia o del centro y siguen una

distribución ordenada, podemos decir que el tirador tuvo una precisión muy alta al momento de realizar sus tiros. Por otro lado, si solo un tiro dio en el centro y los demás siguen una distribución al azar a lo largo del blanco, entonces concluiríamos que el tirador fue muy exacto al atinar al centro del blanco pero poco preciso, ya que sus dardos restantes están desordenados. Entonces, el punto medio, y mas cuando se trata de mediciones hechas en el laboratorio, es tener una buena precisión quizá mas que una sola exactitud, ya que si los datos son precisos y fiables y caen dentro de un cierto rango de certidumbre, existen herramientas matemáticas y algoritmos los cuales pueden darnos una aproximación aun mas adecuada de lo que esta sucediendo experimentalmente con respecto a un valor o un estudio teórico realizado previamente.

Un aspecto mas es la cuestión de la referencia o con respecto a que medimos. Cualquier variable física en el mundo real siempre se mide con respecto a una referencia. Entonces, en cuanto nuestros datos estén más cercanos a este patrón o referencia, serán más precisos y por lo tanto se podrá modelar con mayor exactitud el fenómeno bajo estudio.

En el presente trabajo, se aplicó la técnica de TPMT en la medición de la topografía de un elemento correspondiente a un gasket, a una letra troquelada y a una superficie convexa. La principal modificación hecha a la técnica de TPMT, consistió en sustituir la rejilla física de referencia por una rejilla sintética generada por computadora, para la generación de las franjas de moiré. Al aplicar las técnicas de desplazamiento de fase (phase stepping), se desplazó la rejilla que generaba la auto imagen; otra forma de obtener el corrimiento de fase, fue desplazando la rejilla sintética y, a partir de los mapas de contorno generados, se calcula la información de la fase envuelta. Por otro lado, utilizando la técnica conocida como método directo, se usó una auto imagen de la rejilla física para obtener la información de la fase envuelta. Aplicando el algoritmo de desenvolvimiento de fase conocido como seguidor de fase regularizado (Regularized phase tracking unwrapper), se recuperó la topografía de los objetos mencionados.

Es importante enfatizar que el objetivo principal del presente trabajo, era y es analizar un interferograma para obtener la información relativa a la topografía de un gasket desgastado

y no desgastado. Dicha información es importante en el uso que tiene este elemento en experimentos correspondientes a la espectroscopia ramman. Los resultados que aquí se presentaron, icásticos, cumplen con la meta trazada ya que las medidas reales están dentro de un rango de precisión con respecto a una referencia (la MMC) certificada y calificada por estándares nacionales e internacionales. El error en las mediciones reportadas con respecto a la MMC, en su mayoría, son menores al 10%, por lo que se puede concluir que son precisas sin tener la exactitud de los valores arrojados por la MMC.

También, dentro de los objetivos trazados, se puede comentar que se logro dar un salto entre el análisis de la fase envuelta y llevarlo a presentar en forma de coordenadas reales ya que tradicionalmente se hacen estudios detallados acerca de la calidad en los datos de la fase envuelta y como resolver los problemas de ruido en la imagen de las franjas así como las discontinuidades en las mismas, dejando un poco de lado expresar estos datos en un sistema conocido y universal como lo es el sistema internacional de unidades. Entonces, este trabajo ha sido un granito de arena para corroborar lo importantes que pueden ser las técnicas ópticas para realizar mediciones reales en diferentes objetos.

Con respecto a los valores obtenidos de la altura en los diferentes objetos presentados en esté trabajo, al compararlos con las mediciones realizadas con la MMC, se puede notar que el método directo proporciona errores menores que los obtenidos al aplicar la técnica del desplazamiento temporal de fase (4 ó 15 pasos), cuando se pensaría que esto hubiese sido al revés, ya que el desplazamiento de la fase promedia el ruido de fondo y de moteado presente en la imagen, con lo que la calidad de las franjas mejora y esto se refleja al momento de procesar digitalmente las imágenes. Algunos de los factores que quizá influyen para que se generen estos datos se mencionan en párrafos posteriores.

Se pueden mencionar de manera cualitativa algunos factores que influyen en el error de la medición de la topografía de los objetos, entre ellos, se debe considerar al sistema óptico utilizado (el microscopio estéreo), el cual es un sistema que forma imagen, y que requiere transferir los puntos visibles que forma un objeto hacia un detector (en este caso la CCD), como un factor de error en la medición.

Este se intentó medir al compararlo con una superficie ideal, la superficie convexa generada a partir de la interpolación de los puntos medidos por la MMC, y considerarla como una especie de constante técnica que estaría presente en todas las mediciones realizadas con este sistema óptico. Sin embargo, esto no puede tomarse como algo definitivo ya que los puntos analizados por la MMC sobre la superficie convexa no fueron en la cantidad suficiente para que esta simulara en su totalidad a la superficie real, por lo que se encuentran imprecisiones entre las superficies, tal como se muestra en la figura 6.1.

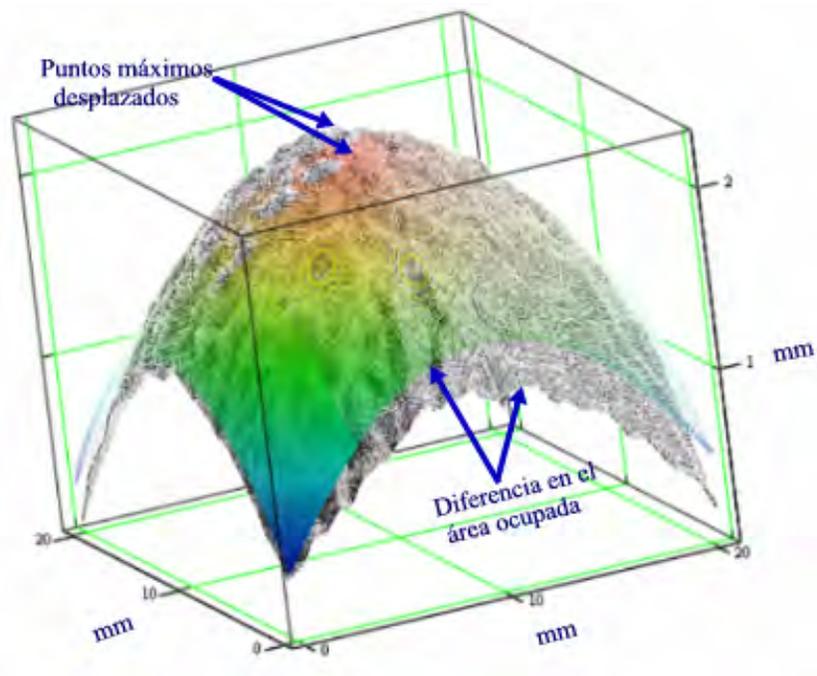


Figura 6.1. Diferencia entre la superficie real y la ideal.

Por tanto, no es un muy buen parámetro para generalizarlo al sistema. La alternativa es medir una mayor cantidad de puntos, con la MMC, sobre la superficie.

La calidad de la imagen es medida mediante la resolución, el contraste, los errores de perspectiva, errores geométricos y la profundidad de campo, y lo que se conoce en óptica como aberraciones las cuales pueden considerarse, en términos de errores, en la

intercepción geométrica de rayos en el plano imagen o la diferencia entre la longitud de los caminos ópticos de los rayos formadores de la imagen. No se está considerando estas aberraciones en el análisis de los errores, pero provocan que las medidas proporcionadas directamente por los píxeles (pel) de la CCD no sean exactas a las dimensiones físicas del pel además de que la resolución está limitada por la capacidad de procesamiento de la tarjeta digitalizadora. Detalles acerca del funcionamiento del microscopio óptico en cuanto a las aberraciones y la transferencia de información por parte de la CCD, se pueden consultar en los apéndices B y C.

Tampoco se está considerando el hecho de que las franjas proyectadas, principalmente las que se encuentran alejadas del eje óptico, conocidas como error de perspectiva, se encuentran a priori con una ligera deformación debido a las aberraciones del microscopio estéreo, que por estar basado en un sistema Greenough, pueden llegar a ser notable (apéndice C). Esto provoca que en el procesamiento digital de las franjas, la fase desvendada se encuentre afectada por una portadora, la cual es consecuencia de una ligera inclinación en la superficie que se estudió, tal como se observa en los resultados de la gasket no desgastada, al observarse en las figuras correspondientes, en donde el ruido de fondo se encuentra por encima de la referencia del sistema. Esta inclinación o nivel de portadora se puede observar en la figura 6.2.

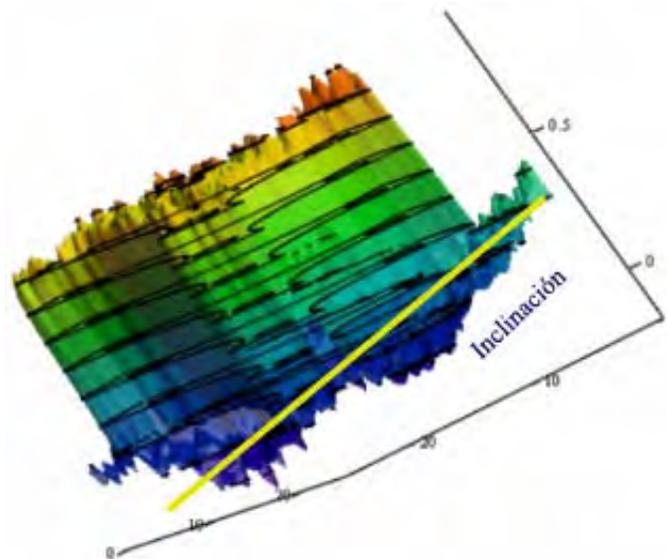


Figura 6.2. Ruido de la portadora debido al tilt en la muestra o aberraciones en el sistema óptico.

Dado el uso de iluminación coherente, se tienen presente ruido aleatorio en las franjas. Como es ampliamente conocido en la literatura, la generación del haz láser conlleva un ruido inherente cuya máxima notoriedad se observa en el moteado. Si bien estas motas son de utilidad al aplicar técnicas interferométricas basadas en esta característica del láser, para el efecto del experimento descrito en la tesis, perjudica en lugar de beneficiar. Esto se acentúa aún más al amplificar una imagen y limita la resolución de la técnica ya que se llega a un punto en que el tamaño de la mota es más grande que la definición de la franja lineal auto proyectada, tal como se muestra en la figura 6.3.

Con respecto a la resolución, al realizar un estudio de las ecuaciones gobernantes de la técnica (sección 2.3.2), se puede concluir que este parámetro es función de la frecuencia de la rejilla, el ángulo de observación y la longitud de onda. El análisis de estos factores así como el límite de resolución teórico del método, ha sido interpretado a conciencia por Rodríguez-Vera¹, et. al. Sin caer en inexactitudes, comenta que la sensibilidad es un compromiso entre el $f\#$ del sistema óptico y la frecuencia de la rejilla llegándose a obtener un límite de hasta 11 micras en el Δz con un ángulo de 36° .

En el sistema aquí propuestos, se logro una mayor resolución al disminuir el ángulo de observación (alrededor de 14°) mas no se pudo resolver con mayor precisión la superficie de la gasket, debido a que en algunos puntos de la imagen con las franjas proyectadas, estas mostraban discontinuidades, es decir, la continuidad de la franja al rodear un borde del objeto se perdía y provocaba que en el algoritmo de procesamiento no se distinguiera a cual franja, entre las vecinas, correspondía la trayectoria. Esto se puede observar en la figura 6.4.

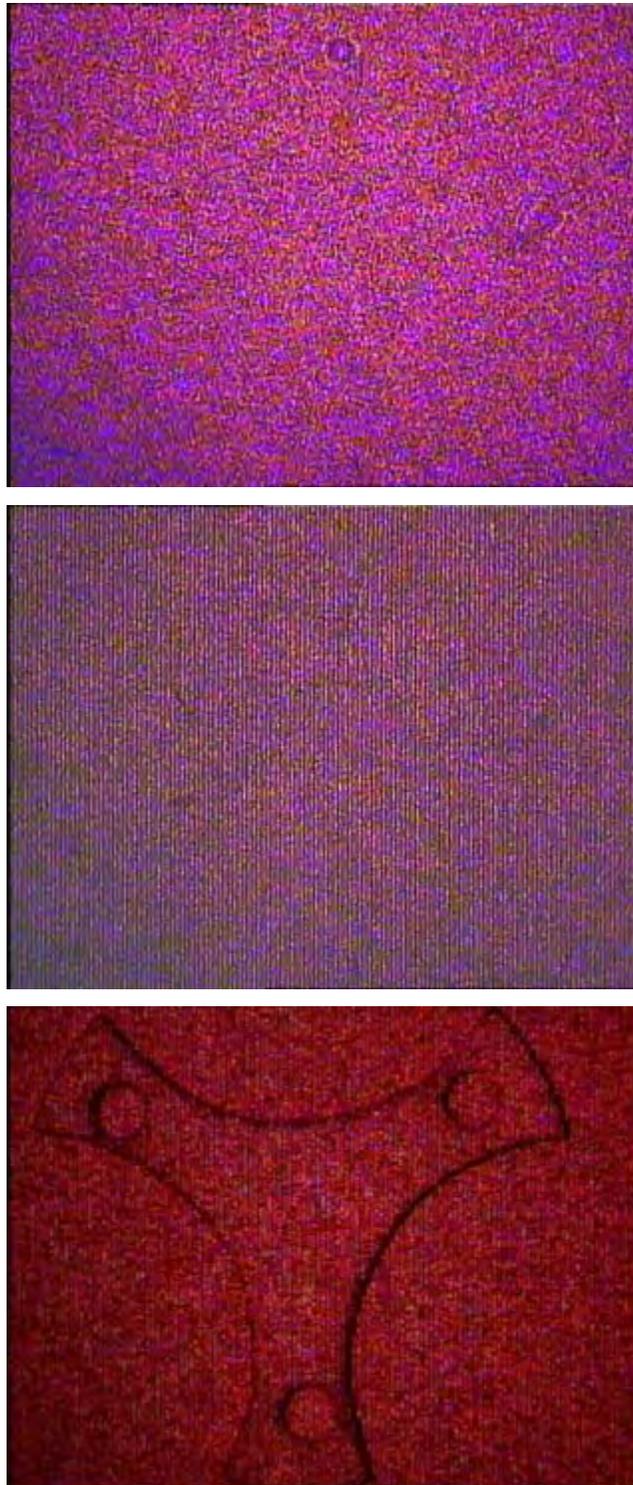


Figura 6.4. Problema del moteado al ampliar la imagen y aumentar la frecuencia de la rejilla, en este caso 250 LPI.

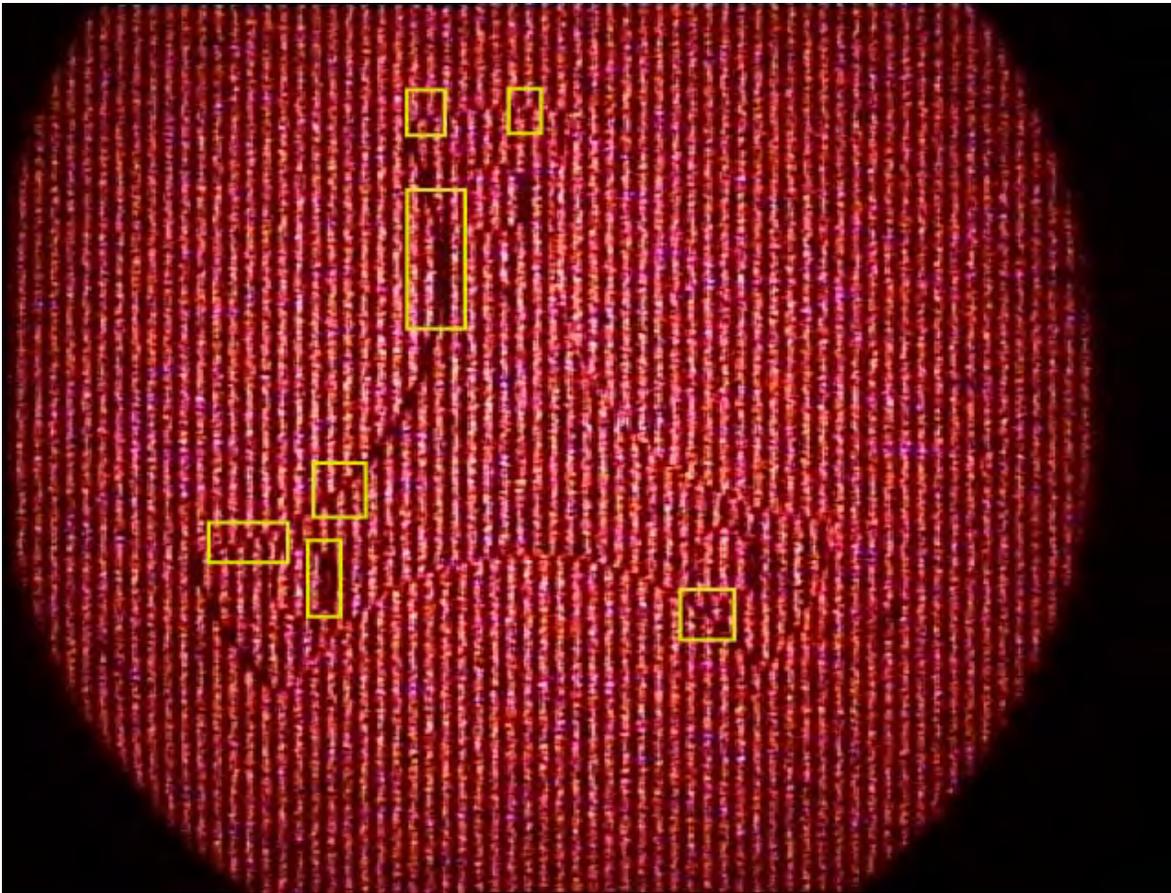


Figura 6.4. Discontinuidades en las franjas y presencia de sombras.

Para resolver este problema, se utilizó una frecuencia baja en la rejilla (50 LPI) llegando al límite comercial de la rejilla, así como variar el ángulo de iluminación (y por consecuencia el de observación) para disminuir la presencia de las sombras en el contorno de la superficie. La otra alternativa era aumentar la frecuencia de la rejillas para aumentar la resolución del sistema, pero entonces el moteado se convertía en un problema ya que rebasaba el grosor de las franjas proyectadas, tal como se muestra en la figura 6.3. En pocas palabras, nos encontramos en el límite de la resolución del sistema, ya que si la gasket hubiese tenido unas pocas micras más de grosor se hubiesen acrecentado estas discontinuidades. Ésta fue la razón por la cual en el estudio de la gasket desgastada se calcularon errores mayores al 10% (para el algoritmo de 4 pasos), al igual que el la letra troquelada.

Durante el procesamiento digital, se optimizaron en lo posible los filtros y también por esto se implemento el algoritmo de 16 pasos para el desplazamiento temporal de la fase, ya que con este algoritmo se promedia el ruido del moteado y por tanto se logra una mejor definición de las franjas. La optimización de los algoritmos de procesamiento toma una relevancia crítica, y se enfrenta a la disyuntiva de mejorar la etapa de filtraje o encaminar tiempo y energía a los algoritmos de envolvimiento y desenvolvimiento de la fase, tal como se comento en el capítulo 4.

En el ir y devenir de las diferentes pruebas que se realizaron en el laboratorio, se llego a mover físicamente la gasket para promediar el ruido y mejorar la resolución, obteniéndose una calidad alta en las franjas. Sin embargo no era viable utilizar este truco para la medición ya que no se contaría con una referencia fija, esto en cuanto a los puntos marcados sobre la gasket, y por tanto, la no comparación con respecto a la imagen de los puntos medidos por la MMC.

Imágenes de estas franjas y en problema del moteado se puedes observar en la figura 6.5. La mejora notable se debe a que cuando se mueve la muestra, la CCD promedia la intensidad luminosa incidente con todo y el ruido del moteado, lo que provoca que las zonas de baja intensidad (aquellas fuera de las franjas de interferencia), prácticamente se anulen resultando en una imagen con mayor contraste y la ausencia del ruido de fondo.

Al procesar estas imágenes, los resultados en cuanto a las imágenes relativas a la fase y de la fase desenvuelta mejoran notablemente, notándose un adecuado contraste entre los mapas de contorno y sin discontinuidad alguna entre los cambios en el valor de la fase, tal como se observa en 6.5.

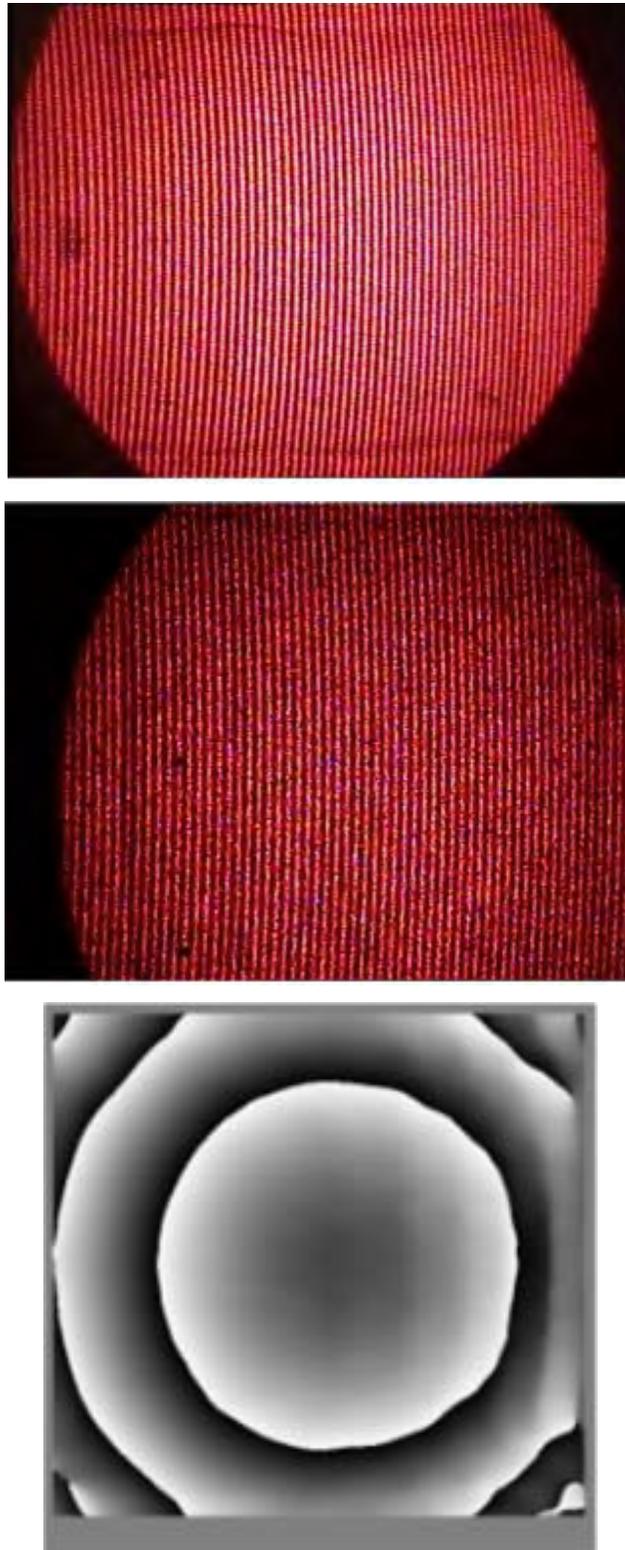


Figura 6.5. Arriba. Diferencia entre una imagen promediando el moteado del haz láser (moviendo periódica y suavemente la muestra). En medio. Imagen con ruido de moteado. Abajo. Fase envuelta de la imagen promediada.

La cuestión referente al tamaño de las motas, adquiere relevancia cuando se desea proyectar franjas sobre un área muy pequeña (del orden de micras), ya que para resolver al objeto en cuestión, se aumenta la frecuencia de la rejilla (se experimento con rejillas de hasta 350 LPI), definiéndose en el sistema óptico con sus consecuentes aberraciones en los extremos siendo esto un factor no tan trascendente como el moteado del haz láser, ya que en este caso las motas amplificadas son mayores al grosor de las franjas proyectadas impidiendo una resolución de la imagen y por lo tanto el procesamiento digital de la misma. Este es un problema a resolver como trabajo futuro, lograr disminuir este inconveniente, se estarían colocando las bases para pasar al siguiente estadio en las mediciones a objetos cuyas dimensiones son del orden de micras y que se comentará mas adelante.

Finalmente, los resultados de la gasket no desgastada y de la superficie convexa, muestran que las medidas están muy por debajo del 10%, por lo que puede concluirse que son bastante aceptables y que si estos resultados y la repetición sistemática del experimento muestra una estabilidad, se habrá dado un paso importante en cuanto a la utilización de técnicas ópticas para obtener mediciones.

Antes de terminar con este colofón, se podría hacer una síntesis acerca del procedimiento a seguir cuando se desea medir topografía o deformaciones utilizando alguna técnica interferométrica. El principio consiste en la generación de un patrón de franjas, sea cual fuere la forma de producirlas, y proyectarlas sobre el objeto que se desea estudiar. Posteriormente, implementar el sistema formador de imagen que permita resolver y observar adecuadamente el patrón de franjas y las características generales del objeto. Consecuentemente, se requiere de un sistema de almacenaje o algún mecanismo que permita grabar esas imágenes y que actualmente se basa en la captura en tiempo real con la ayuda de una CCD o video cámara de alta resolución. Como preámbulo a la obtención de resultados, se requiere del procesamiento, análisis y síntesis de la información contenida en las franjas proyectadas sobre el objeto, en donde los algoritmos computacionales y el procesamiento digital de imágenes han adquirido una etiqueta de necesarios y trascendentes. Por último la interpretación de resultados y la comparación de estos con

respecto a un patrón o referencia, algo que permita garantizar la fiabilidad de los mismos. Este proceso descrito en estas últimas líneas, no son mas que un punto de vista del autor y como tal están sujetas a la crítica y a la perfectibilidad que solo el tiempo permite cuajar, como un proceso continuo en la sedimentación y la comprensión completa de los conocimientos adquiridos.

6.2 Trabajo futuro.

Hay mucha tela aún de donde cortar e ideas para realizar mejoras a los arreglos aquí reportados. Uno de las primeras modificaciones que se podrían implementar es en modificar el sistema óptico (microscopio estéreo) para aprovechar su configuración y utilizar alguno de los caminos ópticos para iluminar la muestra, por lo que estaríamos hablando de que la iluminación y la observación se harían prácticamente en el mismo eje. Entonces la ecuación 5.3, que rige el nivel de resolución en la profundidad a partir de los mapas de contorno generados por el interferograma, se aproximaría a ángulos muy pequeños con lo que el Δz incrementaría notablemente su valor.

También el cambiar la longitud de onda de iluminación ocasionaría que el tamaño de las motas disminuyese, ya que estas tienen una dependencia directo con respecto a la longitud de onda con que se ilumina el sistema, así como el $f\#$ del sistema óptico.

Como trabajo futuro esta el aplicar deformaciones y vibraciones a la gasket para medirlos con la técnica óptica aquí propuesta, y aprovechar la forma obtenida de la gasket para complementar el estudio en algún programa de elemento finito, y así comparar las simulaciones ideales con respecto a los datos reales que se calculen.

Además, aún queda pendiente optimizar el arreglo para obtener la incertidumbre relativa al mismo e, inclusive, desarrollar la teoría necesario para calcular lo que podría definirse como vector de sensibilidad para el sistema y de esta forma, realizar un comparativo con otras técnicas ópticas desarrolladas para el mismo fin, como lo puede ser el método de ESPI.

También, las modificaciones que se puedan implementar en el microscopio estereo, estarán encaminadas a la posibilidad de resolver áreas y objetos cada vez mas pequeños hasta llegar a nivel micro y así sentar las condiciones para caracterizar MEMS (Micro electronic mechanic systems, por sus siglas en ingles), que son micro máquinas electrónicas cuyo uso esta actualmente en boga y tiende a crecer.

Referencias.

1. [R. Rodríguez-Vera, D. Kerr, F. Mendoza-Santoyo, “3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes”, Journal of Modern Optics, Vol. 38, No. 10, 1935-1945]

Apéndice A

Los Diamond Anvil Cell¹.

A.1 ¿Qué es un DAC?

Los desarrollos e investigaciones de elementos sometidos a altas presiones (High Pressure), están directamente vinculados al avance tecnológico alcanzado, y cada nuevo logro en el campo ha resultado en una amplia expansión en el conocimiento concerniente al comportamiento de los materiales bajo altas presiones. En la pre-historia de los desarrollos tecnológicos para generar altas presiones, se encuentran los estudios hechos por Percy Bridgman en la década de los 50's, que culminaron con el desarrollo del dispositivo conocido como Bridgman anvil, el cual consistía en generar las altas presiones, de alrededor de 100 Kbar, con la ayuda de un pistón cilíndrico.

La presión comúnmente se expresa en:

$$[kbar(kilobar)] = 1 * 10^3 [bar]$$

y los

$$[Mbar(megabar)] = 1 * 10^6 [bar]$$

Otra unidad de presión ampliamente utilizada actualmente son los

$$[GPa(Gigapascals)] = 1 * 10^4 [bar] = 10 [kbar]$$

$$1 [bar] = 1 * 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right] [pascals] = 0.9869 [atm] = 1.0197 \left[\frac{kg}{m^2} \right].$$

Posteriormente Harry Drickamer (entre 1965 y 1966) y demás colaboradores desarrollaron un dispositivo, basado en dispositivos de tipo yunque, capaz de producir ultra altas presiones (del orden de los *Mbar*) cuyas aplicaciones se enfocaban en medir resistencia, difracción de rayos X, y estudios de absorción óptica así como el comportamiento del estado sólido bajo ultra altas presiones a muy bajas temperaturas logrando con esto un empuje para el estudio de superconductores.

El siguiente desarrollo importante sobre dispositivos generadores de altas presiones, casi después de 15 años, fue la llegada del dispositivo conocidos como *Diamond Anvil Cell* (DAC ó celdas de yunque de diamante), la cual se convirtió rápidamente en el instrumento generador de ultra altas presiones (actualmente del orden de 300 a 500 *GPa*) el cual ayudo tanto a físicos como a químicos a entender y caracterizar el comportamiento de diferentes materiales bajo condiciones de presión y temperatura similares a los existentes en el centro de la tierra. Debido a que dichas presiones pueden generarse en un área muy pequeña (similar al área de la palma de la mano), nuevos estudios basados en métodos ópticos han podido realizarse tales como absorción y reflectividad óptica así como estudios sobre el esparcimiento Raman y Brillouin además del estudio de la difracción de los rayos X en cristales sometidos a muy altas presiones.

Básicamente un DAC consiste en colocar una muestra entre dos caras paralelas de dos diamantes actuando como yunque, los cuales contienen una celda de carga o gasket que se encuentra confinado en el área bajo presión, y es entonces cuando una fuerza empuja al mismo tiempo los diamantes actuando como yunque ejerciendo la fuerza sobre la muestra (Figura A.1). Las componentes básicas de un DAC son:

- a. Diamond anvil (yunque de diamante).
- b. Table (Base ó mesa).
- c. Culet ó Flat (plano o región plana).
- d. Gasket.
- e. Sample cavity (cámara ó cavidad).

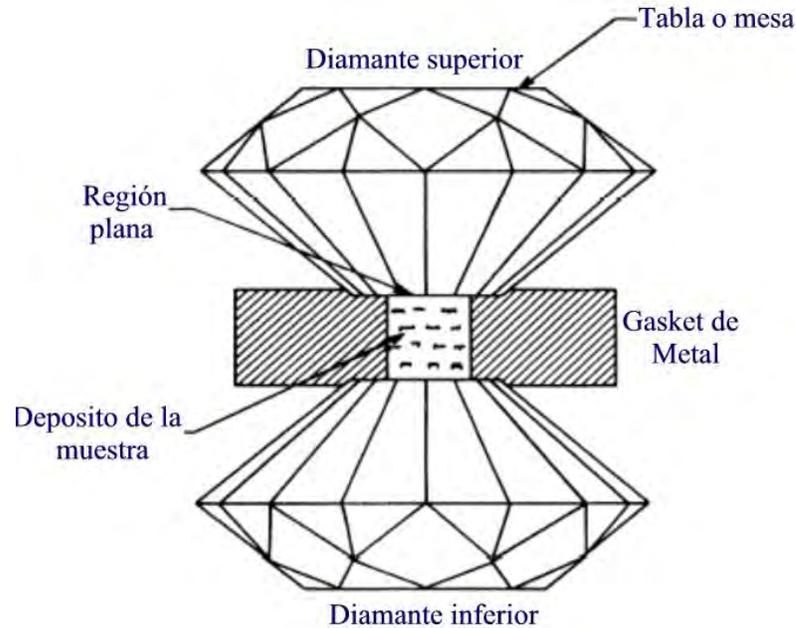


Figura A.1. Celda DAC de configuración yunque invertido, con una gasket de metal para confinar la muestra bajo estudio, y componentes básicas de un DAC.

Un yunque (Figura A.2) es un bloque el cual es ampliamente utilizado para moldear objetos formados de hierro o acero al rojo vivo, golpeándolos con marros y ejerciendo presión sobre ellos hasta darle la forma buscada. También son utilizados en la industria joyera.

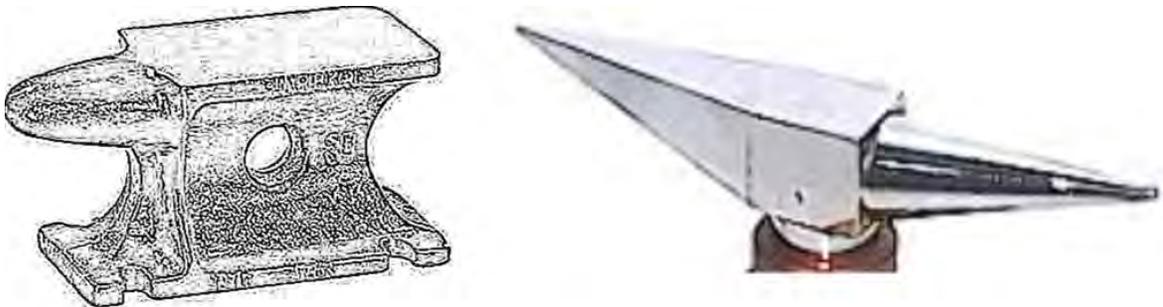


Figura A.2. A la derecha: yunque para modelar piezas metálicas al rojo vivo. A la izquierda: yunque utilizado en la industria joyera para dar forma a piedras preciosas.

Entonces, en este caso, el término *anvil* se refiere simplemente a que la pieza tiene la capacidad de soportar altas presiones y su forma aparentaría ser un yunque con los picos invertidos.

Diferentes configuraciones en los DAC's son posibles debido a la forma en como la fuerza es generada así como de los mecanismos utilizados para la alineación del yunque. Hasta mediados de los 80's existían en el medio cinco diferentes tipos de DAC's, los cuales se conocen como:

- a. Celdas NBS.
- b. Celdas Bassett.
- c. Celdas Mao-Bell.
- d. Celdas Syassen-Holzapfelt.
- e. Celdas Merrill-Bassett.

Las dimensiones de un DAC no sobrepasan en diámetro a una moneda de \$10.00 pesos mexicanos. En el caso de la gasket que se desea caracterizar, esta se utiliza en una célula de forma triangular con las esquinas recortadas (figura A.3) la cual mide 3cm desde la base del triángulo al centro de curvatura. El grosor de la célula con todo y los diamantes incluidos es



Figura A.3. Diferentes tamaños de celdas y comparación con una moneda.

de 1.5cm. El peso de la celda con todo y montura es de aproximadamente 85 gramos y corresponde a una de tipo Merrill- Bassett multi-propósito. Los diamantes utilizados

corresponden a la clasificación I, y son de baja fluorescencia para aplicaciones de difracción óptica y espectroscopia Raman, con 16 caras, de un peso aproximado de $\frac{1}{6}$ [carat] ____ {1 [carat] = 0.20 gr} y 0.6mm de región plana (culet) o región donde soporta una presión superficial alta. La celda viene equipada y ensamblada con un par de discos de berilio de 12.5mm de diámetro y 3mm de espesor pegados al diamante con pegamento epóxico; el diámetro de apertura es de 1mm.

A.2 Los Yunques de Diamante.

Los diamantes normalmente se cortan de piedras de gemas brillantes. La región plana se logra puliendo el diamante con una herramienta especial hasta lograr una superficie octagonal de área aproximada de 0.45mm^2 (usualmente de 0.7mm por lado del octágono). Típicamente el tamaño del diamante puede variar de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{2}$ [carat] y el tamaño plano de los diamantes para la formación del yunque de 0.3 a 0.7mm y deben ser paralelos. La superficie octagonal opuesta a la región plana del yunque, se define como una tabla con una distancia diagonal de 3.5 a 4.5mm (igual a un área de 8 a 12mm^2) de largo y aproximadamente de 2mm en diamantes de $\frac{1}{8}$ [carat]. La selección de los diamantes y su tamaño dependen del tipo de DAC a utilizarse así como de la naturaleza de la investigación pero en cualquier caso deben de tener imperfecciones internas mínimas. También existe un tipo especial del diamante el cual es perforado en una región que abarca de la cabeza al centro del mismo con la finalidad de ejercer una presión uniforme y evitar fracturas o agotamiento del material que provoque un mal funcionamiento de la celda.

A.3 Base del diamante y región plana.

Estas dos regiones están expuestas a muy altas presiones y deben de ser paralelas y con un mismo centro de referencia por necesidad. Para ayudar a preservar la gasket en buen estado

el mayor tiempo posible, la pequeña región plana o culet debe de estar soportada por al menos 16 caras o lados. Para trabajos a muy altas presiones, también se requiere que sean biseladas logrando (figura A.4) con esto un mejor desempeño y acotar la región plana a un menor tamaño (menor a 150 micras).

Debido al uso y a la altas presiones generadas en la celda, los diamantes pueden llegar a fracturarse o a dañarse. El agotamiento o desgaste sufrido alrededor de o en la región plana, son reparables, sin embargo, las tensiones o daños profundos provocados por las altas presiones (en el cuerpo interno del diamante) son irreversibles al igual que aquellas que destruyen la interfase correspondiente a la base del diamante (figura A.5).

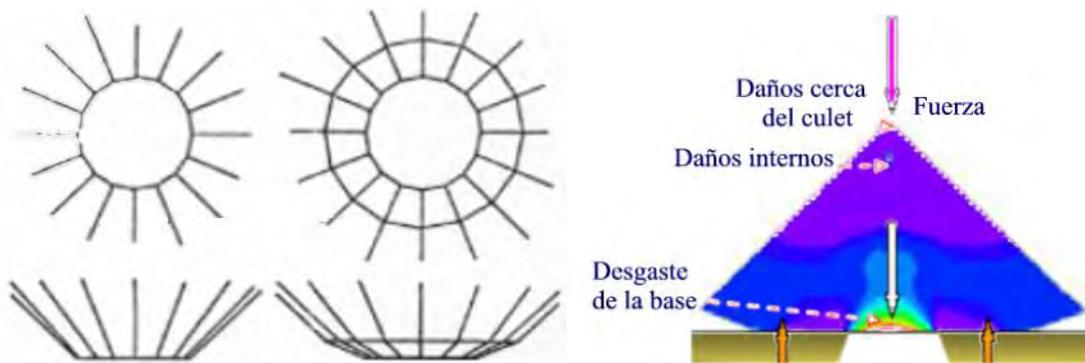


Figura A.4 (izquierda). Tipos de caras que soportan la región plana del diamante.

Figura A.5 (derecha). Regiones en las que el diamante sufre desgastes y daños debido a las altas presiones aplicadas.

A.4 ¿Qué son las celdas de carga?

Las celdas de carga o gaskets son el corazón de los sistemas DAC. Al contrario de los diamantes, tanto el material como la estructura del gasket puede elegirse libremente de acuerdo con el experimento y para la presión a utilizar. Con el descubrimiento y la utilización de las gaskets fue posible desarrollar las celdas yunque de diamante, y su primer tarea fue la de contener el medio hidrostático donde en un principio se ejercía la presión. La figura A.6, muestra un gasket fijado y presionado entre dos diamantes opuestos.

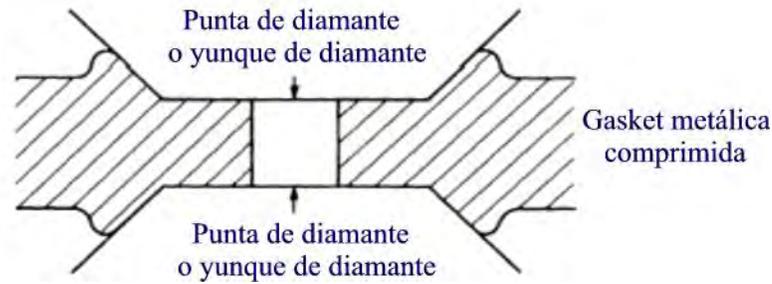


Figura A.6. Presión ejercida sobre un gasket entre dos puntas de diamante.

La gasket tiene un pequeño agujero en el centro de aproximadamente $200\mu\text{m}$ de diámetro hecha con la punta del diamante sobre la hoja metálica en contacto. Este diámetro dependerá del fluido hidrostático que se utilice como agente para aplicar las altas presiones. El grosor inicial de la gasket es de aproximadamente 0.20 a 0.25mm y en el centro de 0.10 a 0.15mm, teniéndose grosores de hasta 0.6 a 0.7mm, dependiendo de la aplicación. Esta gasket se acomoda en la porción baja del diamante. Una vez colocado, la muestra es colocada en el pequeño agujero y posteriormente se llena con un fluido especial y se sella con la parte superior del yunque de diamante sobre la gasket. La celda de carga, además de contener a la muestra sobre la que se va a ejercer presión, previene daños a las puntas de los diamantes debido a la concentración de esfuerzos en los bordes de las caras del yunque de diamante. Como ya se mencionó con anterioridad, si se biselan las caras del diamante que forman la pequeña región plana o el culet, se lograra una reducción en la concentración del esfuerzo sobre el yunque del diamante.

En la práctica la elección del material con el cual se va a construir la gasket no es trascendente. Dentro de los materiales mas ampliamente utilizados encontramos acero inoxidable, aleaciones de cobre-berilio e inclusive hojas de rhenium.

El primer síntoma que indica que daño en la gasket, es el incremento en el diámetro del agujero en el centro, donde se coloca la muestra, pero no existe ninguna otra forma de predecir, estimar o tan siquiera suponer que la celda de carga comienza a ser poco útil para los experimentos. Quizá la única referencia sea la inspección visual o la experiencia en el

uso de estos elementos, es decir, durante cuanto tiempo a una presión dada es útil el gasket sin que comience a generar un desgaste excesivo, y esto es hasta cierto punto subjetivo.

A.5 Descripción de la cámara de muestra.

Es, físicamente, el pequeño espacio donde se coloca la muestra a la cual se someterá a ultra altas presiones. Esta se encuentra entre las dos pequeñas superficies planas o culets formados por ambos diamantes y que limita el gasket, tal como se muestra en la figura 1.

La fuerza que se aplica a la celda debe ser totalmente axial (figura A.7), por medio de los tornillos de presión ubicados en el cascaron de la celda. La muestra con pequeños pedazos o astillas de rubí y el medio de presión, se colocan en la cámara. El medio de presión que

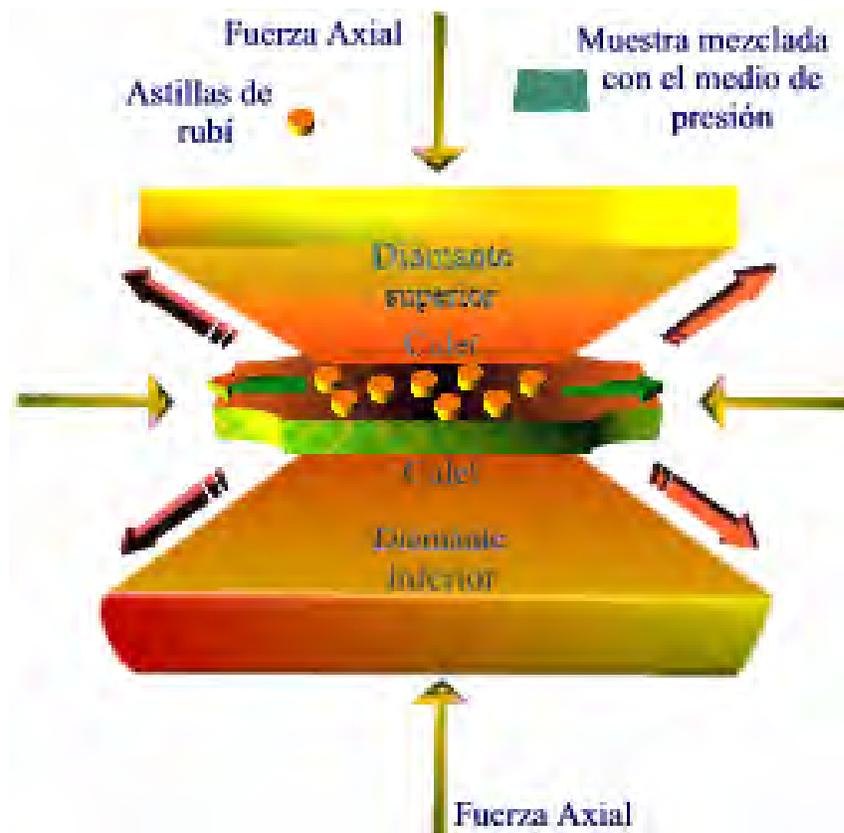


Figura A.7. Distribución de la presión, por la fuerza aplicada, y otro aspecto de la cámara de muestra.

generalmente es viscoso, contribuye a distribuir la presión y evita que la cavidad sufra bloqueo radial. Conforme la presión se incrementa en el gasket, el medio fluye hacia fuera de la cavidad y el grosor de la muestra disminuye y es entonces posible realizar los estudios de hasta cuanta presión, relacionada con la fuerza aplicada, soporta la muestra bajo estudio. Posibles fallas del sistema pueden presentarse debido a deformaciones del culet, por contacto entre ambos culets debido a que el gasket se encuentra dañado o por problemas en la base (tablet) donde se apoyan los diamantes.

Referencias.

1. A. Jarayaman, Diamond Anvil Cell and high-pressure physical investigations, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 55, 1983, pp 65-66.

APÉNDICE B

INTERFERENCIA.

B.1 ¿Qué es la interferencia?

No podemos comenzar directamente en explicar el fenómeno de la interferencia, sin antes narrar un panorama general acerca de la óptica a lo largo de la historia. El desarrollo histórico y documentado de los fenómenos ópticos se remonta a la época de los griegos cuando Epicuro^{1,2} descubrió la ley de la reflexión de la luz y estableció que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Realizó comentarios acerca de la refracción de la luz al observar objetos sumergidos parcialmente en agua sin llegar a comprender el fenómeno. Posteriormente, hacia el año 1000 de nuestra era, un físico árabe de nombre Abu Alí Alhazen, diseñó la primera cámara oscura que fue la antecesora de la cámara fotográfica de nuestros días, al igual que espejos parabólicos, además de estudiar el enfoque de diversas lentes construidas por el mismo. A partir del siglo XIV se desarrolló en Europa la construcción de lentes con el fin de ayudar a aquellas personas con problemas visuales. El descubrimiento del telescopio es atribuido a Galileo, mas se tienen datos de que dichos instrumentos ya habían sido utilizados con anterioridad como simples arreglos de dos o mas lentes alineadas entre sí con el fin de observar objetos pequeños con mayor detalle.

En 1609 Galileo se enteró del descubrimiento del telescopio, y seis meses después había construido uno de su propio diseño. Con sus investigaciones se dieron las bases para considerar a la óptica como ciencia. Galileo fue el primero en proponer un método para medir la velocidad de la luz, mismo que no dio el resultado esperado, aunque dos siglos después el francés Fizeau logró emplear este método con éxito. Willebrord Snell (1591-1626) fue un físico holandés que describió la refracción de la luz comentada muchos años antes por Epicuro y detalló la universalmente conocida ley que lleva su nombre. Marcelo Malpighi (1628-1694), fisiólogo italiano, observó que con una adecuada combinación de lentes se podría aumentar el tamaño de los objetos pequeños dejando las bases que

sirvieron para el desarrollo de la microscopía. Antón van Leeuwenhoek (1623-1723), perfeccionó el microscopio, construyendo aparatos con amplificaciones hasta de 200, con una sola lente muy pequeña, del tamaño de una cabeza de alfiler, tallada con una gran perfección.

El pionero de lo que se conoce como óptica moderna fue Cristian Huygens, quien perfeccionó el telescopio y formuló la primera teoría sobre la naturaleza de la luz al suponer que es un fenómeno ondulatorio, similar al de las ondas sonoras o las ondas en el agua, explicando las leyes de reflexión y refracción de la luz, al suponer que la luz viaja con menor velocidad en el agua o en el vidrio que en el vacío o en el aire. Isaac Newton, en 1672, desarrolló un telescopio de reflexión basado en un espejo esférico y encontró que al pasar la luz solar por un prisma, ésta se descomponía en los colores del arco iris, o sea que la luz blanca era una mezcla de colores, y creó las bases de lo que se conocería más tarde como la teoría corpuscular de la luz. John Dollond demostró que empleando combinaciones de lentes de diferentes tipos de vidrios se podía reducir notablemente lo que se conoce como aberración cromática. Young y Fresnell encontraron que la luz se desviaba un poco alrededor de los obstáculos que encuentra, contraponiendo lo dicho por Newton. Después el francés Foucault midió la velocidad de la luz en el agua y dio la razón a la teoría ondulatoria de Huygens, al encontrar que la luz viaja más lentamente en el agua que en el aire.

Olaus Roemer (1644-1710), fue un astrónomo danés que fue el primero en medir la velocidad de la luz, observando los satélites de Júpiter en diferentes posiciones de la órbita de ese planeta. Obtuvo una velocidad de la luz en el espacio de 227,000 kilómetros por segundo. Las mediciones modernas proporcionan un valor de 299,792 kilómetros por segundo. Tomás Young (1773-1829), fue un físico inglés que realizó experimentos consistentes en hacer pasar la luz a través de dos pequeños orificios, uno después de otro, y observó en una pantalla franjas alternadas de luz y sombra, fenómeno que después se definiría como interferencia, e interpretando esto como una demostración de que la luz se desviaba un poco. Agustín Jean Fresnell (1788-1827), fue un físico e ingeniero francés que desarrolló la descripción matemática de la teoría ondulatoria de la luz, realizando así una de

las mayores contribuciones a la óptica. Fresnell supuso que las ondas son transversales, es decir, que las vibraciones son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Fresnell diseñó además las lentes que llevan su nombre, las cuales se utilizan en los faros, y son más eficientes que los espejos esféricos. Joseph von Fraunhofer (1787-1826), físico alemán, estudió las diferentes propiedades ópticas de los vidrios, dependiendo de sus procesos de fabricación. Fue el primero en usar rejillas de difracción (finos alambres paralelos o finos cortes de líneas paralelas en un plano sobre una superficie de vidrio). Al hacer pasar la luz del sol, primero por una rendija y después por un prisma, Fraunhofer observó que el espectro solar está cruzado por numerosas líneas oscuras. De la misma forma, observó que la luz de las estrellas tiene también líneas oscuras. Kirchhoff empleó estas líneas medio siglo después para sus investigaciones. Armand Fizeau (1819-1896), físico francés, en 1849 midió la velocidad de la luz en la tierra. Fizeau empleó una rueda dentada giratoria, un espejo y una fuente de luz. Fizeau encontró también que si una estrella se aleja de nosotros, la posición de las líneas de su espectro debe moverse hacia el rojo (disminuyendo su frecuencia), y si se acerca, las líneas de su espectro deben moverse hacia el violeta (aumentando su frecuencia). Este efecto fue utilizado posteriormente para investigaciones en astronomía. Jean Bernard Foucault (1819-1868), físico francés que colaboró con Fizeau para determinar la velocidad de la luz, poco tiempo después desarrolló un método propio para este fin, substituyendo la rueda dentada por un espejo giratorio. El método de Foucault no requiere de una distancia muy grande, por lo que fue posible también medir la velocidad de la luz en el agua, que resultó menor que en el aire, dando la razón a la teoría ondulatoria de Huygens. Foucault diseñó además un tipo de péndulo que lleva su nombre y con él demostró que la tierra gira alrededor de su eje. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), físico alemán que observó que al colocar una sal o mineral en una flama intensa, la sustancia emite luz, que al ser analizada en un espectroscopio (una rendija, un prisma y un antejo), produce un espectro formado por numerosas líneas de colores. De esto dedujo que cada elemento químico, cuando se calienta intensamente, emite un espectro de líneas de colores característicos. El método empleado por Kirchhoff es una de las armas más poderosas que existen para averiguar los elementos que contiene cualquier sustancia.

El desarrollo que la óptica ha tenido a partir de principios del siglo XX hasta nuestros días, ha sido complementado y revolucionado con el nacimiento de la teoría cuántica de la física. Nombres como el de Planck, Bohr, Born, Einstein, Dirac, Sommerfeld, Heisenberg, De Broglie, Thompson, Bose, Pauli, Schrödinger, entre otros, empujaron nuevas teorías a nivel atómico de los fenómenos electromagnéticos y obviamente ópticos conocidos hasta ese momento, los cuales continúan hoy en día siendo motivo de grandes controversias y estudios profundos que tratan de explicar la realidad de la materia en el universo.

Ahora bien, el fenómeno de la interferencia, o más bien dicho, el proceso físico por el cual se explica la superposición (suma o resta) de dos ondas electromagnéticas viajeras, ha sido analizado agudamente desde que se observaron los primeros efectos relacionados con la luz al alterar el medio por el cual se propaga. Un ejemplo cotidiano del fenómeno de la interferencia sucede cuando las ondas de luz son reflejadas por dos superficies de una capa transparente extremadamente fina situada sobre una superficie lisa, como el caso de las irisaciones de una fina capa de aceite sobre el agua, las cuales se deben a la interferencia, y demuestran la importancia del cociente entre el espesor de la capa y la longitud de onda de la luz. Puede emplearse una capa o varias capas de materiales diferentes para aumentar o disminuir la reflectividad de una superficie. Los separadores de haz dicróicos son conjuntos de capas de distintos materiales, cuyo espesor se fija de forma que una banda de longitudes de onda sea reflejada y otra sea transmitida. Un filtro interferencial construido con estas capas transmite una banda de longitudes de onda extremadamente estrecha y refleja el resto de las longitudes. La forma de la superficie de un elemento óptico puede comprobarse presionándolo contra un patrón y observando el diagrama de franjas que se forma debido a la capa delgada de aire que queda entre ambas superficies.

La interferencia, definida desde el punto de vista de la real academia de la lengua española³, proviene de *inter-*, y del latín *ferens*, *-entis*, el cual es principio activo de *ferre*, que significa llevar; es una voz femenina y significa la acción recíproca de las ondas, ya sea en el agua, ya en la propagación del sonido, del calor o de la luz, etc., de que resulta, en ciertas condiciones, aumento, disminución o anulación del movimiento ondulatorio. Está

palabra proviene del inglés⁴ *interference*, originaria de la época del medio inglés y en dicha lengua es una palabra compuesta por *interfere* + *ence*, de *entre* –*inter* y *ferir* –*ence* que hace referencia al verbo *to strike*, por lo que la palabra compuesta tiene su similar en español de *entreferir* o golpearse uno a otro (entre individuos).

El fenómeno de la interferencia se presenta cuando dos ondas mutuamente coherentes se superponen en algún lugar del espacio. La condición de coherencia en dos ondas diferentes, se presenta si y solo si ambas provengan de la misma fuente o bien, en el caso de que sean monocromáticas, que tengan la misma frecuencia, tal como sucede con algunos láseres. Cuando dos ondas armónicas se interfieren y ambas son de la misma frecuencia y longitud de onda pero de diferente fase, la onda resultante será una onda armónica cuya amplitud depende de esta diferencia de fase. En sí el término de fase, de acuerdo con la Real Academia de la Lengua española [<http://www.rae.es>], proviene del griego φ $\sigma\iota\varsigma$, que significa manifestación, y en física y química es un término que indica cada una de las partes homogéneas físicamente separables en un sistema formado por uno o varios componentes; es decir, conceptualmente las partes corresponderían a cada una de las ondas individuales que se interfieren. La diferencia de fase, en dos procesos periódicos, es la diferencia entre los valores que, en un momento dado, tiene la respectiva fracción de período. En sí hablar de la fase, al igual que otros conceptos matemáticos, es algo abstracto que solo nos ayuda a definir conceptualmente un evento físico; es entonces que hablamos de una diferencia de fase como un cambio de valores, o de intensidades, que se pueden detectar con la ayuda de cualquier detector óptico.

Las causas que ocasionan la diferencia de fase entre dos ondas son diversas. Una de ellas es la diferencia de longitud en la trayectoria recorrida por las dos ondas. Por ejemplo, una diferencia de fase de 1 unidad de longitud de onda, no produce ninguna diferencia de fase; una diferencia de fase de $\frac{1}{2}$ en la longitud de onda, produce una diferencia de fase de 180° . Otra causa es cuando una onda se refleja en una superficie límite determinada y en este caso sufre un cambio de 180° . Cuando la luz se propaga de un medio de baja densidad, como el aire, a un medio de más alta densidad, como el vidrio o el agua, esta sufre un decremento en su velocidad de propagación además de un cambio de fase de 180° en la luz

reflejada. Si la luz se propaga inicialmente por el medio de alta densidad a uno de baja densidad, no se produce cambio de fase alguno.

El concepto de coherencia es de gran importancia en interferometría. En la literatura se definen dos tipos de propiedades de un frente de onda en cuanto a su coherencia se refiere: la coherencia espacial y la coherencia temporal. En un experimento convencional para observar el fenómeno de interferencia, un frente de onda se divide en dos reflexiones parciales. Posteriormente estas son recombinadas; lo que determina que tan adecuadamente se combinan ambas ondas, es la coherencia temporal de la luz, la cual es inversamente proporcional al ancho del ancho de banda espectral de la luz. Si B representa el ancho de banda de la señal, entonces $\frac{1}{B}$ es la longitud de coherencia de la luz, tal como se muestra en la figura B.1. Si la diferencia entre las trayectorias recorridas por dos rayos en un interferómetro es mayor que $\frac{1}{B}$ entonces no se sumarán ni destructiva ni constructivamente,

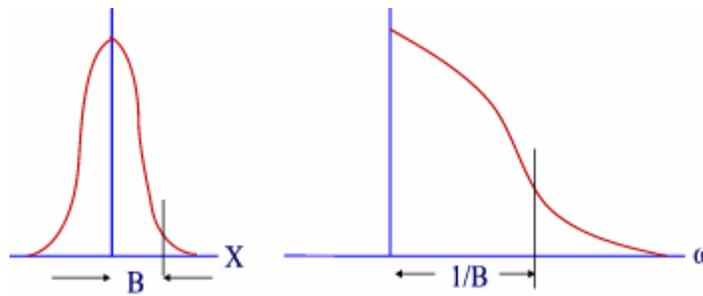


Figura B.1. Relación entre la coherencia temporal y el ancho de banda.

ya que la información de la fase se pierde. La coherencia espacial se refiere a la relación de fase entre los puntos de un mismo frente de onda, tal como los puntos A y B de un frente de onda esférico, como se muestra en la figura B.2. En este caso, si la fuente de luz es lo suficientemente fina para considerarse como fuente puntual, es posible tener frentes de onda con fases similares emergiendo ligeramente en diferentes direcciones desde la fuente O. Entre mas grande sea el área en el cual el frente de onda es coherente (espacialmente), menor debe ser el ángulo que la fuente subtende al frente de onda. Ejemplos de este tipo de interferencia son observadas por los biprismas y espejos de Fresnel, los espejos de Lloyd,

las lentes divisoras de Billet y el interferómetro de Rayleigh⁵. La coherencia temporal toma relevancia importante cuando la interferencia es provocada por división de amplitud. La coherencia espacial toma relevancia cuando la interferencia es causada por la división del frente de onda. Los términos relativos a interferómetros por división de amplitud y por división de frente de onda se explican en párrafos posteriores.

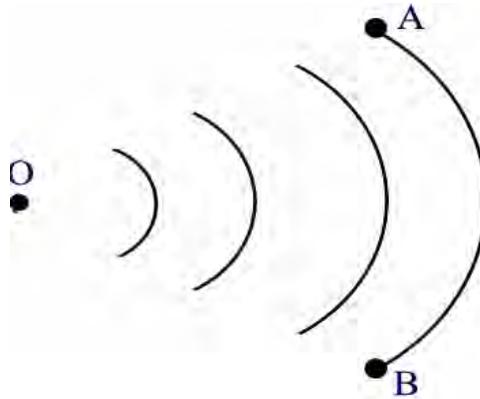


Figura B.2. Coherencia espacial.

Idealmente una onda de luz con una sola frecuencia, debe tener una longitud de onda infinita. Matemáticamente aún una onda senoidal ideal de longitud finita, tendrá un ancho de banda en frecuencia desde el punto de vista de la teoría de Fourier. Por tanto no existen fuentes de luz que emitan a una sola frecuencia. Las fuentes luminosas mejores emiten un rango finito de longitudes de onda aunque, si bien, en un ancho estrecho; inclusive el láser tiene un ancho finito de emisión, no solamente una longitud de onda y esto se debe a la naturaleza misma de cómo se produce la emisión luminosa en una fuente de este tipo ya que influyen los tiempos de emisión de los electrones así como el movimiento térmico al azar y las colisiones que sufren entre ellos, interrumpen los trenes de onda ensanchando la distribución de frecuencia. Otra forma de entender la coherencia tanto temporal como espacial⁶, es obteniendo el espectro de frecuencias de una onda senoidal idealizada y compararla con el campo de una onda senoidal real, tal como se muestra en la figura B.3. El intervalo de tiempo en el cual la fase de la onda permanece constante se conoce como el tiempo de coherencia Δt . El correspondiente intervalo espacial asociado a este lapso de tiempo, se conoce como longitud de coherencia y está definido por $\Delta \ell = c * (\Delta t)$. Para una

onda monocromática, Δt es infinito pero $\Delta \nu$ es cero, donde ν es la frecuencia de la onda. Por tanto, a medida que Δt decrece, el ancho de banda frecuencial $\Delta \nu$, se incrementa y por tanto ambas cantidades están relacionada por $\Delta \nu \approx \frac{1}{\Delta t}$. Entonces, cuando el espectro de frecuencia es amplio, la longitud del tren de ondas en el espacio decrece tal como lo hace el tiempo de coherencia y entonces se puede decir que este es un decremento en la coherencia longitudinal o espacial. En pocas palabras, la coherencia temporal nos informa cuanto tiempo la onda emitida no sufre discontinuidades o cambios bruscos en su fase y la coherencia espacial indica cuanta distancia real la onda se mantiene sin sufrir discontinuidades o cambios bruscos en la fase.

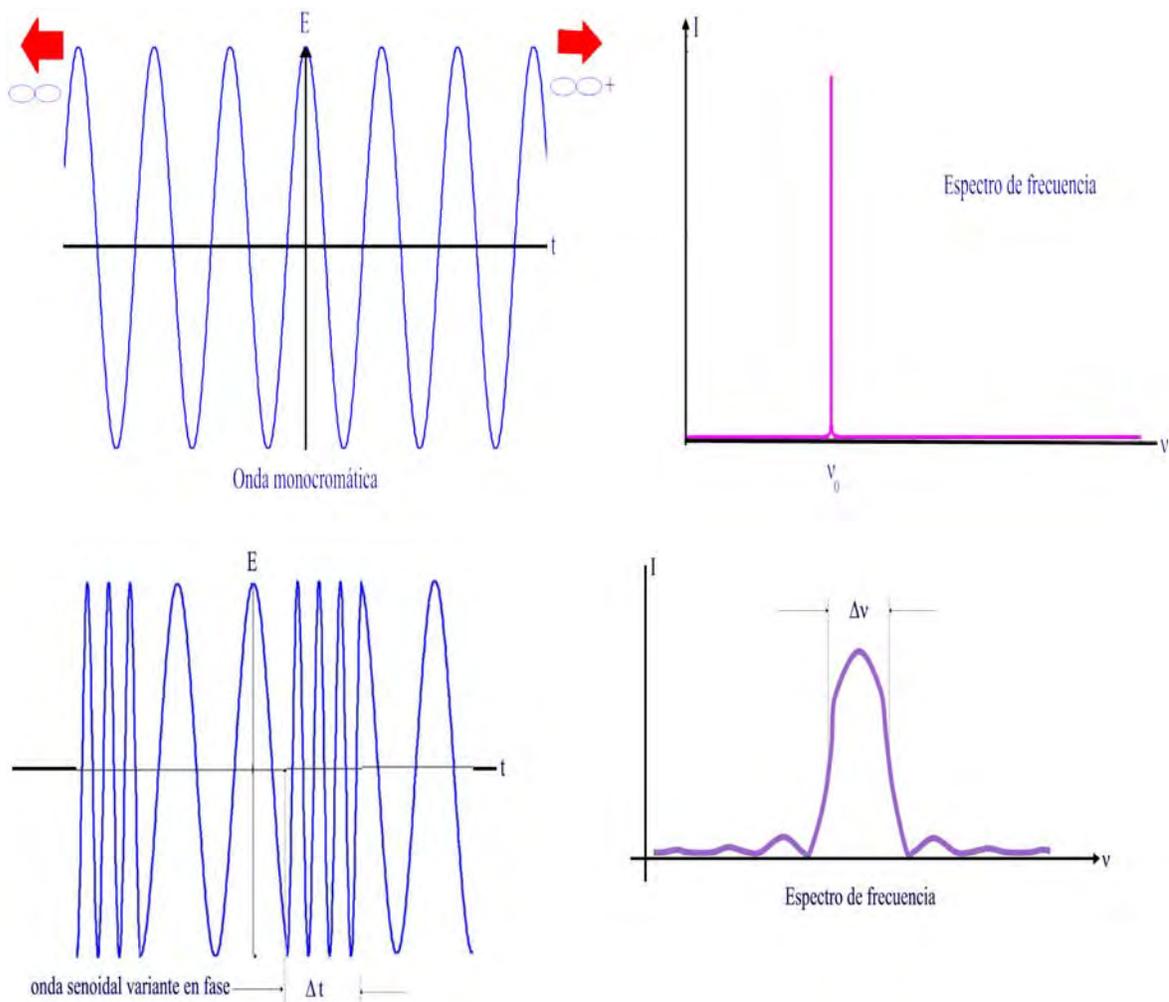


Figura B.3. (Arriba) Onda ideal tipo cosenoidal y su espectro; (abajo) onda real y su espectro

La coherencia también se puede definir⁷ como la capacidad para interferir entre sí las ondas luminosas emitidas por dos fuentes, es decir, para formar un patrón de interferencia. Esta capacidad de interferir será mayor a medida que las fuentes tengan una mayor relación en cuanto a la fase se refiere.

En óptica se consigue la coherencia de las siguientes formas:

- mediante la reflexión en las dos superficies de una película delgada,
- mediante la reflexión en un espejo de haces combinados por reflexión,
- o por la difracción del haz en dos pequeñas rendijas.

Si la relación de fase entre las ondas cambia de forma rápida y aleatoria, se dice que los haces son incoherentes. Si dos trenes de ondas son coherentes y el máximo de una onda coincide con el máximo de otra, ambas ondas se combinan produciendo en ese punto una intensidad mayor que si los dos haces no fueran coherentes. Si son coherentes y el máximo de una onda coincide con el mínimo de la otra, ambas ondas se anularán entre sí parcial o totalmente, con lo que la intensidad disminuirá. Cuando las ondas son coherentes, puede formarse un diagrama de interferencia formado por franjas oscuras y claras. Para producir un diagrama de interferencia constante, ambos trenes de ondas deben estar polarizados en el mismo plano.

Los átomos de una fuente de luz ordinaria irradian luz de forma independiente, por lo que una fuente extensa de luz suele emitir radiación incoherente. Para obtener luz coherente de una fuente así, se selecciona una parte reducida de la luz mediante un pequeño orificio o rendija. Si esta parte vuelve a separarse mediante una doble rendija, un doble espejo o un doble prisma y se hace que ambas partes recorran trayectorias de longitud ligeramente diferente antes de combinarlas de nuevo, se produce un diagrama de interferencias.

Por lo tanto, el fenómeno de la interferencia lo podemos definir u observar cuando se superponen dos frentes de onda luminosos, que dependen del retraso relativo entre las

ondas que se superponen y la intensidad resultante será la suma o diferencia de cada una de las ondas produciéndose un patrón de franjas oscuras y claras, conocido como franjas de interferencia. Existen dos tipos de interferencia: constructiva y destructiva. El caso de interferencia constructiva, figura B.4, corresponde a la suma de dos ondas y el resultado es una amplitud mayor. Cuando la suma de dos ondas hace que la amplitud sea cero, se dice que la interferencia es destructiva, tal como se muestra en la figura B.5.

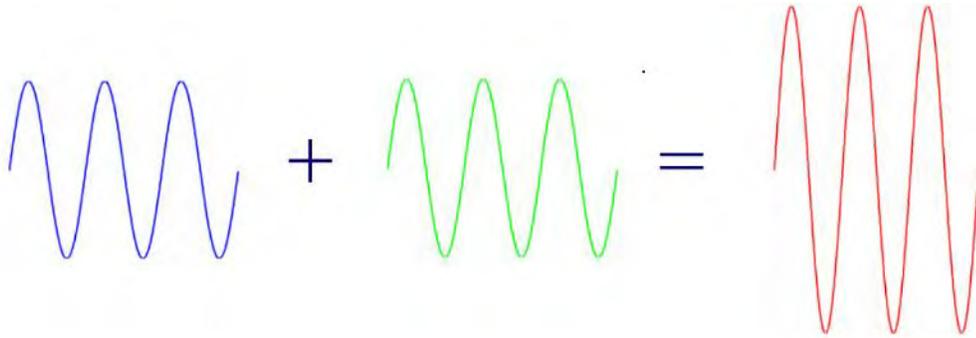


Figura B.4. Interferencia constructiva.

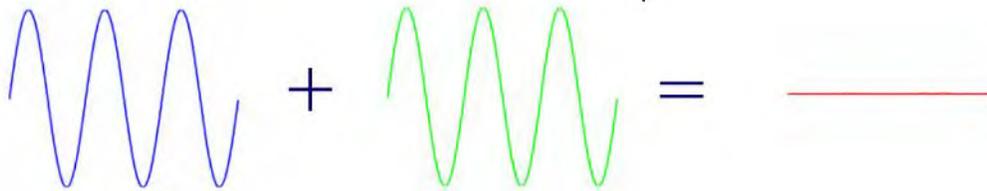


Figura B.5. Interferencia destructiva.

En suma, en un patrón de interferencia se dice que la interferencia es constructiva si corresponde a las franjas claras de mayor intensidad que las ondas que lo producen y la interferencia es destructiva si corresponde a las franjas oscuras. La definición del patrón de interferencia tomado de un diccionario de lengua inglesa, corresponde al diagrama de interferencia o espectro de interferencia que corresponde a la distribución frecuencial de una señal que se interfiere, tal como lo podemos observar en la figura B.6.

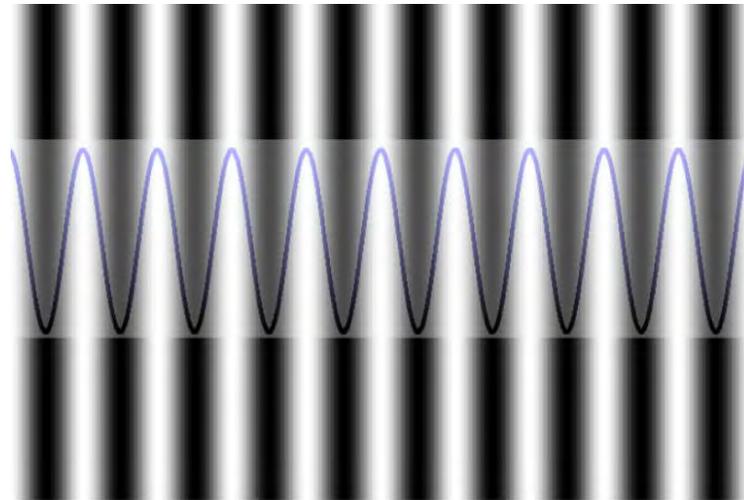


Figura B.6. Patrón de interferencia de un tren de ondas.

Para observar el fenómeno de interferencia se utilizan arreglos experimentales ópticos llamados interferómetros. Un interferómetro está definido como un instrumento con el cual se producen y observan interferencias entre dos o más trenes de ondas⁸. Estos se pueden clasificar en dos tipos: de división de frente de onda y de división de amplitud. En el primer caso (figura B.7) se usan porciones del frente de onda, es decir, se toma el frente de onda y se divide en partes las cuales tienen igual intensidad. En el segundo caso (figura B.8) se toma el frente de onda y se le hace incidir sobre un material que sólo deja pasar una parte de dicho frente, comúnmente conocido como divisor de haz o beam splitter, y la otra parte la refleja.

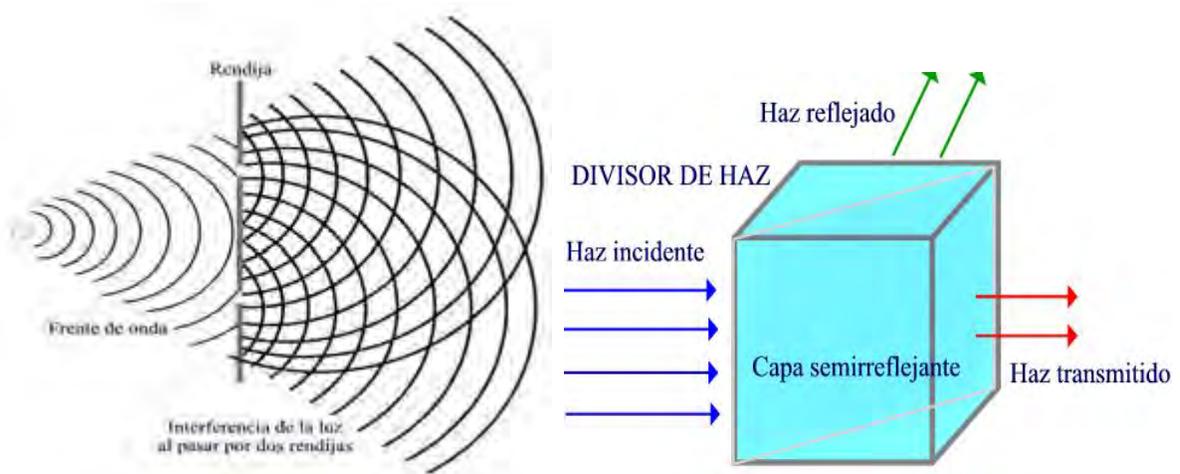


Figura B.7 (izquierda). Interferómetro de división de frente de onda.

Figura B.8 (derecha). Interferómetro de división de amplitud.

El término de interferencia en realidad no está muy bien elegido porque de hecho cada tren de onda produce a sí mismo un efecto totalmente independiente del otro tren de ondas, pero debido a que este término ha sido usado por largo tiempo no se ha alterado su definición.

Hasta el momento ha quedado definido el fenómeno de la interferencia desde un punto de vista conceptual. Matemáticamente tenemos que la interferencia se basa en la superposición de dos frentes de onda que generalmente provienen de una misma fuente luminosa. Una onda se define como un disturbio óptico o una perturbación óptica. De acuerdo con la formulación electrodinámica de Maxwell, se supone que la luz, desde un punto de vista físico, es una onda electromagnética cuya solución satisface la ecuación general diferencial de onda⁹. La ecuación general de onda se obtiene como sigue. Una onda viajera en el tiempo, periódica y unidimensional de periodo T , se muestra en la figura B.9.

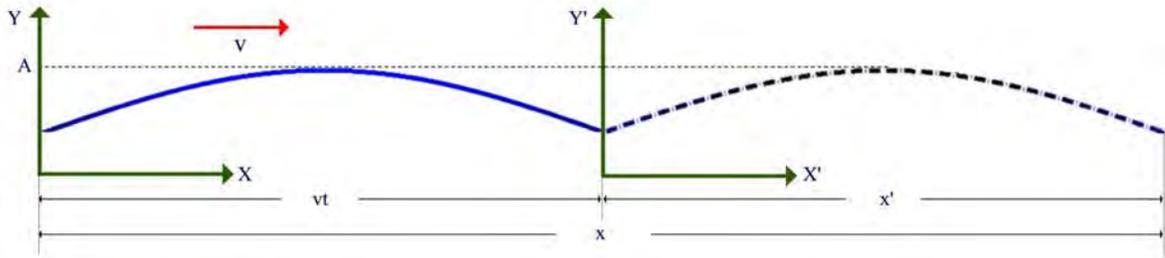


Figura B.9. Una onda viajera en el tiempo.

La onda se mueve una distancia definida por $d = vt$. La ecuación de onda depende de la posición espacial y el tiempo, por lo tanto:

$$\Psi(x,t) = f(x,t) \quad \text{B.1}$$

donde:

$$\Psi(x,t) \quad \text{ecuación de onda.}$$

$$f(x,t) \quad \text{función que describe el perfil de la onda.}$$

Como la onda esta en movimiento, para conservar el perfil se supone estática por un instante, es decir, se congela y el marco de referencia cambia, tal como se muestra en la figura B.6. De acuerdo con esta, se tiene:

$$x' = x - vt$$

y el desplazamiento de la onda a partir de la ecuación B.1 es:

$$\Psi(x, t) = f(x', t) = f(x - vt, t) \quad \text{B.2}$$

Suponiendo que la onda no varía en el tiempo, entonces la función descrita por B.2 puede analizarse modelando sus variaciones de acuerdo al movimiento que sigue. Entonces, como se habla de un cambio, se obtienen las derivadas parciales de B.2 y resulta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial x} \quad \text{B.3}$$

y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial t} \quad \text{B.4}$$

puesto que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1 \\ \frac{\partial x'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(x - vt) = -v \end{aligned}$$

entonces, B.3 y B.4 pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{B.5}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x'} v \quad \text{B.6}$$

Este último par de ecuaciones nos indica como cambia la función con respecto al marco de referencia que se mueve a velocidad constante. Despejando $\frac{\partial f}{\partial x'}$ de B.6 y sustituyendo en B.5, se tiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{B.7}$$

o bien

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{B.8}$$

y las ecuaciones B.7 y B.8 representan a la onda estática en el tiempo y con el marco de referencia moviéndose. Este par de ecuaciones no determinan el comportamiento completo ya que solo se conoce como cambia la función con respecto a una variable. Para obtener como cambia el cambio, es decir, referente a la otra variable, se requiere obtener la segunda derivada de B.5 y B.6, esto es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad \text{B.9}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad \text{B.10}$$

y de B.1 sustituyendo en B.6, tenemos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{B.11}$$

Sustituyendo B.11 en B.10:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(-v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x'^2} \quad \text{B.1B}$$

Aplicando B.1B a B.9, resulta:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{B.13}$$

donde la ecuación B.13 es conocida como la ecuación de onda unidimensional. Generalizando a tres dimensiones espaciales, y de la definición del operador nabla para obtener el operador laplaciano:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

y

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

obtenemos, en coordenadas generalizadas:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{B.14}$$

y la ecuación 14 se conoce como la ecuación diferencial de onda.

Una onda armónica se puede representar como:

$$\Psi(x, t) = f(x - vt) \quad \text{B.15}$$

donde vt indica que la onda se encuentra en movimiento. Ejemplos de ondas periódicas que se comportan de esta manera son las funciones senoidales, por lo que:

$$\Psi(x, t) = A \sin[k(x - vt)] \quad \text{B.16}$$

donde:

A	amplitud de la onda armónica
k	constante de ajuste dimensional

Debido a que las funciones trigonométricas proporcionan valores en radianes, es decir, en unidades adimensionales, requerimos de una constante que ajusta las dimensiones de la función senoidal para seguir obteniendo los valores en unidades fundamentales; por tanto, el valor de k realiza esta operación, la de ser solo un ajuste dimensional del argumento de la onda armónica. Para conocer este valor constante, se necesita fijar condiciones de periodicidad de la onda anclando o fijando la variable del tiempo y adelantar a la onda en una longitud de onda completa, λ , o un periodo completo, T , para no perder el perfil de la onda definida por Ψ , por lo que:

$$\Psi(x + \lambda, t) = \Psi(x, t) \quad \text{B.17 a}$$

$$\Psi(x, t + T) = \Psi(x, t) \quad \text{B.17 b}$$

Las ecuaciones B.17 a y B.17 b, fijan las condiciones de periodicidad, para mantener el perfil de la onda y en cada caso, se presenta una periodicidad espacial dada por B.17 a, y una periodicidad temporal dada por B.17 b. Por tanto, para este par de ecuaciones se tiene:

$$\Psi(x + \lambda, t) = \Psi(x, t) = A \sin\{k[(x + \lambda) - vt]\} \quad \text{B.18 a}$$

$$\Psi(x, t + T) = \Psi(x, t) = A \sin\{k[x - v(t + T)]\} \quad \text{B.18 b}$$

De este último par de ecuaciones, se analizarán los argumentos de la función seno, donde:

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{B.19 a}$$

$$kvT = 2\pi \quad \text{B.19 b}$$

El par de ecuaciones descritas por B.19, representan la condición necesaria para que la onda sea cíclica e igual a la armónica dada en la ecuación B.16. De la ecuación B.19a, se puede leer el valor de k directamente, el cual es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{B.20}$$

Dimensionalmente se tiene:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

y la ecuación B.16 dimensionalmente resulta:

$$\Psi(x,t) = A \sin \left\{ \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \left[m - \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) s \right] \right\} = A \sin \left\{ \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] [m] \right\} = A \sin[\text{rad}]$$

lo cual sigue proporcionando un resultado en radianes por lo que la adimensionalidad permanece. Por otro lado, analizando el argumento de la ecuación B.16 y utilizando la ecuación B.20 se llega a:

$$kvt = \frac{2\pi}{\lambda} vt = 2\pi \frac{v}{\lambda} t$$

y como $v = \lambda\nu$ donde ν representa la frecuencia de la onda (cuantas veces se repite por segundo), por tanto $\nu = \frac{v}{\lambda}$ y $\nu = \frac{1}{T}$ por lo que $kvt = 2\pi\nu t$ y puesto que $\omega = 2\pi\nu$ se concluye que:

$$kvt = \omega t$$

por lo que la ecuación B.16 se puede expresar como:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{B.21}$$

Cuando una onda es periódica, λ , esta normalizada a 2π , por lo tanto:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad \text{B.22}$$

donde B.22 se define como la frecuencia angular.

Si se analiza la ecuación B.14, resulta ser una ecuación diferencial por lo que para resolverla se pueden proponer diversas soluciones. Una de ellas consiste en suponer un perfil de ondas planas, las cuales se modelan a partir de fuentes de luz coherente y monocromática. Una onda plana¹⁰ queda definida como se muestra en la figura B.10.

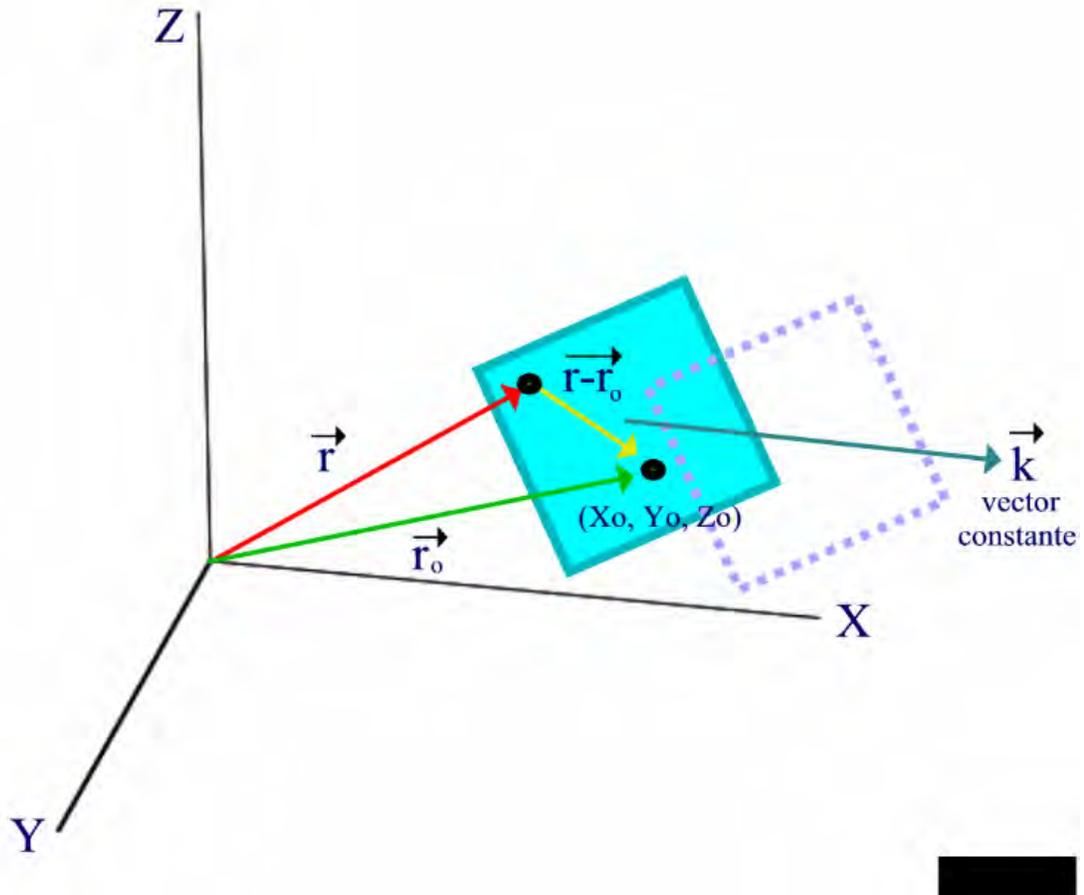


Figura B.10. Onda plana viajera.

De la figura:

- \vec{k} vector de onda
- \vec{r}_0 vector constante al punto (x_0, y_0, z_0)
- \vec{r} vector que indica la posición de un punto cualquiera en el plano.

Por definición del producto punto, se sabe que:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{B.23}$$

donde B.23 representa la ecuación vectorial del plano. Desarrollando la ecuación se obtiene:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{r}_0 \cdot \vec{k} = \text{constante} \quad \text{B.24}$$

o sea:

$$k_x x + k_y y + k_z z + D = 0 \quad \text{B.25}$$

donde las ecuaciones B.24 y B.25 representan la solución que se busca para el plano.

Si planteamos la siguiente función:

$$\Psi(\vec{r}) = A * e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{B.26}$$

como solución a la ecuación de onda plana, donde $\vec{k} \cdot \vec{r}$ representa a todo un plano (espacio de puntos). Como el plano se desplaza, se repite a si mismo a una distancia λ , es decir, tiene periodicidad. Por tanto

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda \hat{k})$$

donde \hat{k} representa a un vector unitario en la dirección de z . Por lo tanto de B.26

$$A * e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = A * e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \lambda \hat{k})}$$

y se llega a

$$e^{i\vec{k} \cdot \hat{k} \lambda} = 1 \quad \text{B.27}$$

Para que B.27 se cumpla es necesario que:

$$\vec{k} \cdot \hat{k} \lambda = 2\pi \quad \text{B.28}$$

donde B.28 representa la condición de periodicidad. Por identidades vectoriales se tiene que:

$$\vec{k} \cdot \hat{k} = \vec{k} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{k^2}{|\vec{k}|} = |\vec{k}| = k$$

y de acuerdo con la condición de B.28, resulta:

$$\begin{aligned} |\vec{k}| \lambda &= 2\pi \\ |\vec{k}| &= \frac{2\pi}{\lambda} = k \end{aligned} \quad \text{B.29}$$

que es el valor del vector de propagación calculado con anterioridad, por lo que la solución propuesta en B.26 satisface con la condición de una onda plana periódica.

Para un t cualquiera:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A * e^{i[\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t)]} \quad \text{B.30}$$

Desarrollando el argumento del exponencial dado en B.30, y sustituyendo los valores dados por las ecuaciones B.29 y $v = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}$ se llega a

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{v}t = \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{T} t$$

Teniendo en mente que $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ se obtiene

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{2\pi}{T} t = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

Por lo tanto, la onda plana completa, tanto espacial como temporalmente, es de la forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = A * e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]} \quad \text{B.31}$$

El mismo resultado puede obtenerse al tratar la onda como una perturbación electromagnética a partir de las ecuaciones de Maxwell, y a esta relación se le conoce como relación de dispersión. Dicho desarrollo puede encontrarse en el apéndice correspondiente.

El procedimiento planteado aquí al resolver la ecuación general de onda, se baso en la suposición de que desde el punto de vista matemático, se tienen ondas planas, pero un tratamiento similar puede desarrollarse al resolver la ecuación para coordenadas esféricas (ondas esféricas) y para coordenadas cilíndricas. Para un estudio más detallado se puede consultar el análisis propuesto por Born y Wolf¹¹.

Para el caso de coordenadas cilíndricas, la ecuación de onda es de la forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + k^2 \Psi = 0 \quad \text{B.32}$$

cuya solución es del tipo

$$\Psi(r) = A * \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \quad \text{B.33}$$

donde

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{cT} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \frac{1}{c} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

y c representa la velocidad de la luz en el vacío.

En el caso de coordenadas esféricas, se tiene

$$\nabla^2\Psi(r)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad \text{B.34}$$

y la solución es del tipo

$$\Psi(r)=A*\frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{B.35}$$

Ahora que se conoce física y matemáticamente lo que es una onda, se puede conocer lo que sucede cuando dos ondas armónicas se interfieren, ya que la onda resultante será la suma de ambas funciones de onda. Para llegar a la ecuación general que describe el fenómeno de la interferencia, se partirá del planteamiento de cada una de las ondas en particular y posteriormente se realizará el tratamiento matemático correspondiente. En la literatura existen diversas maneras de llegar a tal relación. En particular, para aplicaciones de metrología, el procedimiento descrito por Kafri¹² o Sirohi¹³ son muy claros y sencillos de comprender; un tratamiento conceptual muy acertado esta descrito por Hecht¹⁴. Un análisis mas profundo, desde el punto de vista de la teoría electromagnética, viene dado por E. Wolf¹⁵ y Wangsness¹⁶.

Para el caso de dos ondas armónicas planas que se interfieren, la onda resultante será la suma aritmética de las dos funciones. Definiendo a dichas ondas como

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z, t) &= A_{01}e^{i(\vec{k}_1\vec{r}\pm\omega t+\varepsilon_1)} \\ \Psi_2(x, y, z, t) &= A_{02}e^{i(\vec{k}_2\vec{r}\pm\omega t+\varepsilon_2)} \end{aligned} \quad \text{B.36}$$

donde tenemos tanto dependencia espacial como temporal. Los términos ε_1 y ε_B son términos constantes que indican la diferencia de fase entre las ondas, es decir, si estas se encuentran atrasadas o adelantadas una con respecto a la otra.

Se elige para el análisis ondas planas, debido a que son un ejemplo de radiación totalmente coherente puesto que la amplitud y la fase de dichas ondas están descritas por la ecuación

B.31 y se cumplen para todo el espacio¹⁷. Las propiedades radio métricas de una radiación completamente coherente son especificadas por los campos electromagnéticos mediante el vector de Poynting y la densidad de energía electromagnética¹⁸.

La luz descrita como una radiación, desde el más amplio sentido físico, se define como la diseminación de la energía que emana de una fuente¹⁹. La interacción entre la oscilación eléctrica y magnética de un campo electromagnético, permite a la energía propagarse como radiación desde un emisor a través de un medio transparente hacia un receptor. La rapidez con la que ocurre dicha interacción se describe como la frecuencia de radiación. Por otro lado, la luz se describe en términos de longitudes de onda, más que de frecuencias. La longitud de onda se puede definir como la distancia entre dos puntos consecutivos de una onda periódica cuya oscilación mantiene la misma fase. La *Illumination Engineering Society* (IES), ha definido a la luz como la *energía radiante visualmente evaluada*. La relación entre la longitud de onda y la frecuencia esta dada por:

$$\nu = \frac{C}{\lambda} \quad \text{B.37}$$

donde C es la velocidad de la luz en el vacío. La ecuación B.36 ya había sido analizada con anterioridad en el presente apéndice. La diferencia radica en, que aquel caso hablamos de la velocidad de la onda arbitrariamente.

Para poder detectar o medir físicamente la energía contenida en una onda, requerimos de un sistema foto detector (figura B.11), los cuales miden la intensidad de la onda que incide sobre su área²⁰, es decir, la irradiancia o radiación incidente definida como el flujo de energía por unidad de área recibida por un elemento de superficie real o imaginaria. Entonces, el vector de Poynting corresponde a una intensidad de campo o irradiancia que queda definida por el flujo de energía por el ángulo sólido de la superficie a donde incide.

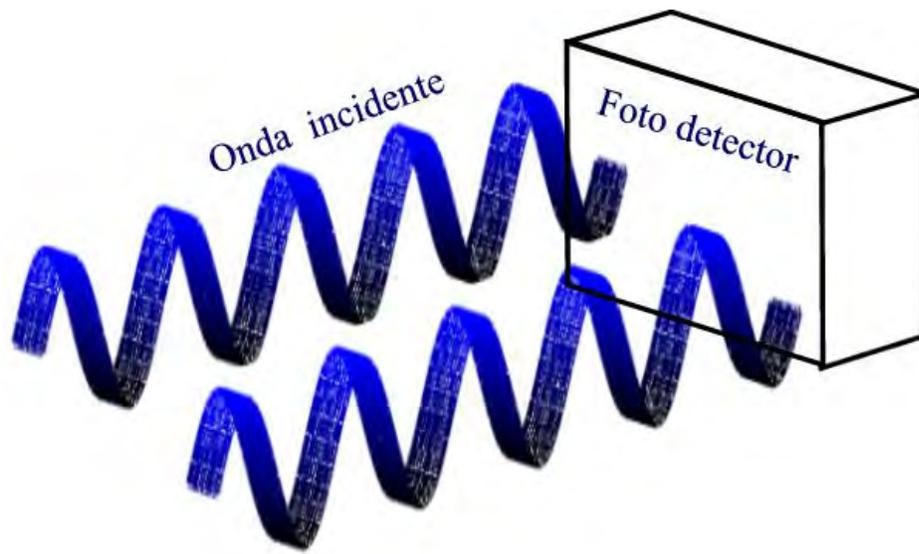


Figura B.11. Sistema fotodetector que mide la intensidad de la onda electromagnética incidente.

Estas cantidades radio métricas se muestran en la tabla B.1. Una de las unidades que resaltan en dicha tabla es la relativa a las unidades de radiancia e intensidad radiante, las cuales están dadas en *estereo-radianes* cuya palabra proviene de estereo- y radián, término usado en geometría que define la unidad de medida del ángulo sólido²¹.

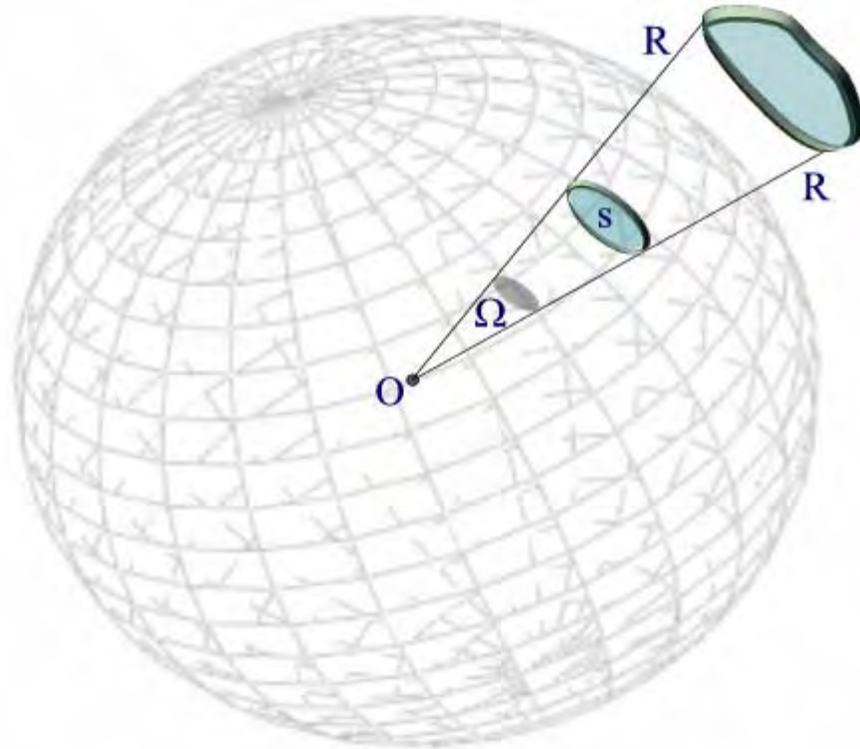


Figura B.12. Ángulo sólido

Esta cantidad proviene del concepto de flujo por unidad de ángulo sólido ampliamente utilizado en radiometría y por definición el ángulo sólido es el espacio comprendido dentro de una superficie cónica (o piramidal), tal como se muestra en la figura B.12; la definición formal es el ángulo sólido de vértice en el centro de una esfera y subtendido por un casquete esférico cuya superficie sea igual al cuadrado del radio de dicha esfera. Su valor se expresa en *estereo-radianes* (*sterad*) y se obtiene trazando un radio arbitrario R y centro arbitrario O a la superficie de una esfera de donde $\Omega = \frac{s}{R^2}$ y s es el área del casquete esférico interceptado por el ángulo sólido, y $s = 4\pi R^2$ por lo que $\Omega = 4\pi$ es el ángulo sólido completo alrededor de un punto. La razón por la que las unidades se les nombra *estereo-radian*, es por el origen de la palabra *estéreo* que proviene del latín *steron* y este a su vez del griego *stereós*, sólido, y originalmente es la unidad de medida para leñas, equivalente a la leña que puede colocarse, apilada, en el espacio de un metro cúbico²²; una voz que no proviene de la academia es también *estereo* que es la forma prefija del griego *stereós*, sólido: ESTEREOscopico. Se usa también en la formación de neologismos que

denotan “tres dimensiones”: ESTEREOfónico²³; por lo tanto, la palabra va de la mano con la percepción, es decir, las unidades indican que es la forma en como un detector (ojo humano) percibe la irradiancia o la incidencia radiante, como un ángulo sólido. Aquí es adecuado notar que la palabra intensidad tiene diferentes significados en el campo de la física óptica, la cual se refiere a la magnitud del vector de Poynting y su similar en radiometría es la irradiancia. La teoría acerca de radiación electromagnética estudiada por la radiometría y la fotometría (Tabla B.1), es muy amplia e interesante por lo que un estudio mas profundo acerca del tema esta fuera de los objetivos planteados en la presente tesis, pero si el lector se interesa en profundizar sobre el tema puede consultar la bibliografía aquí propuesta^{17, 18}.

Cantidad	Símbolo	Definición	Unidad
Energía radiante	Q	$\int \Phi dt$	J
Densidad de energía radiante	u	$\frac{dQ}{dV}$	$\frac{J}{m^3}$
Flujo radiante (potencia)	Φ, P	$\frac{dQ}{dt}$	W
Exitancia radiante (o radiación emitida)	M	$\frac{d\Phi}{dA}$	$\frac{W}{m^2}$
Irradiancia	E	$\frac{d\Phi}{dA}$	$\frac{W}{m^2}$
Radiancia	L	$\frac{d^2\Phi}{dA_{proj} d\Omega}$	$\frac{W}{m^2 sr}$
Intensidad radiante	I	$\frac{d\Phi}{d\Omega}$	$\frac{W}{sr}$

Tabla B.1. Cantidades radiométricas.

El cálculo del promedio temporal de cantidades vectoriales tales como el vector de Poynting, las cuales dependen de la parte real de una cantidad compleja, se simplifica en

forma notable aplicando la siguiente regla²⁴: si A y B muestran la misma dependencia temporal, y son de la forma:

$$A = A_0 e^{-i\omega t}, \quad B = B_0 e^{-i\omega t}$$

Entonces el promedio temporal del producto de la parte real de dichas cantidades, estará dada por:

$$\langle (Re A)(Re B) \rangle_t = \frac{1}{2} Re(A_0 B_0^*) \quad B.38$$

donde B_0^* indica que es el complejo conjugado de B .

Tanto en el caso del vector de Poynting, que nos proporciona una medida de la cantidad de energía contenida en una onda electromagnética, como de una onda de la forma de la ecuación B.31, solo tienen significado desde un punto de vista matemático y físico ya que cualquier sensor que se utilice para medir dicho flujo de energía, es insensible a los cambios de fase, o en otras palabras, ningún detector utilizado en óptica responde a la fase. Matemáticamente esto significa que solo es posible detectar la intensidad que es proporcional al cuadrado de la amplitud compleja de la onda en cuestión.

Retomando la ecuación B.36 tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z, t) &= A_1 e^{\pm i\omega t} = A_1 [\cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)] \\ \Psi_2(x, y, z, t) &= A_2 e^{\pm i\omega t} = A_2 [\cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad B.39$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1)} \\ A_2 &= A_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2)} \end{aligned} \quad B.40$$

y los términos A_1 y A_2 se definen como las amplitudes complejas de las ondas. Cuando dichas ondas interfieren, la amplitud de la onda compuesta estará formada por la superposición de ambas, es decir, a la suma de las amplitudes complejas, por lo que:

$$\begin{aligned} A &= |\Psi_1| + |\Psi_2| = \sqrt{A_1^2 \cos^2(\omega t) + A_1^2 \sin^2(\omega t)} + \sqrt{A_2^2 \cos^2(\omega t) + A_2^2 \sin^2(\omega t)} \\ &= A_1 + A_2 = A_{01} e^{i\alpha_1} + A_{02} e^{i\alpha_2} \end{aligned} \quad \text{B.41}$$

donde

$$\alpha_n = \vec{k}_n \cdot \vec{r} + \varepsilon_n \quad \text{y} \quad n = 1, 2$$

El flujo de energía de la onda compuesta I es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, tal como se explico con anterioridad, es decir, igual a AA^* y A^* es el complejo conjugado de A . Por tanto

$$I \propto |A|^2 = AA^* = (A_{01} e^{i\alpha_1} + A_{02} e^{i\alpha_2}) (A_{01}^* e^{-i\alpha_1} + A_{02}^* e^{-i\alpha_2}) \quad \text{B.42}$$

y puesto que A_{01} y A_{02} son amplitudes reales, desarrollando la operación entre paréntesis, se llega a

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A_{01}^2 + A_{02}^2 + A_{01} A_{02} [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}] \\ |A|^2 &= A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01} A_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad \text{B.43}$$

Reordenando el último término a la derecha de B.43, se llega a

$$2A_{01} A_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2A_{01} A_{02} \cos \Delta\phi \quad \text{B.44}$$

Entonces, el flujo de energía resultante de la superposición de ondas monocromáticas es igual a la suma de cada uno de los flujos de las ondas individuales mas un término de interferencia, el cual se puede obtener aplicando la ecuación B.38 a B.36, esto es

$$\begin{aligned} \langle (Re \Psi_1)(Re \Psi_2) \rangle_t &= \frac{1}{2} Re(A_1 A_2^*) = \frac{1}{2} Re(A_{01} e^{i\alpha_1} A_{02}^* e^{-i\alpha_2}) = \frac{1}{2} A_{01} A_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= A_{01} A_{02} [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}] \end{aligned}$$

el cual es el mismo término obtenido en la expresión B.43.

De B.44, $\Delta\phi$ define la diferencia de fase entre las dos ondas que interfieren y el $\cos \Delta\phi$ toma valores entre $+1$ (para múltiplos pares de π) y de -1 (para múltiplos impares de π). El flujo modulado en su totalidad que varía entre las dos posiciones extremas se denomina, para un desplazamiento de fase de *cero* como totalmente constructivo, y para un desplazamiento de fase de π como totalmente destructivo; esto se observa al cambiar el patrón de interferencia alternadamente entre franjas oscuras y brillantes cuyo espaciamiento es proporcional a la diferencia de caminos ópticos existente entre las ambas ondas en unidades de λ . Esta diferencia de camino óptico (*DCO*), es introducido por el término vectorial $\vec{k} \cdot \vec{r}$.

En otras palabras, los máximos y mínimos ocurren cuando

$$\text{Máximos: } \Delta\phi = 2m\pi$$

$$\text{Mínimos: } \Delta\phi = (2m+1)\pi \quad \text{B.45}$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

o a múltiplos enteros de la longitud de onda, es decir

$$\text{Máximos de D.C.O} = m\lambda$$

$$\text{Mínimos de D.C.O} = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{B.46}$$

donde m es un entero y n es un entero impar.

Cuando ε_1 y ε_2 son iguales a cero, tenemos:

$$\phi_1 = \bar{k}_1 \cdot \bar{r} \quad \text{y} \quad \phi_2 = \bar{k}_2 \cdot \bar{r}$$

por lo que con B.42, B.43 y B.44 se llega a la expresión de intensidad de la forma:

$$I \propto |A|^2 = A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02} \cos(\Delta\phi) \quad \text{B.47}$$

donde

$$\Delta\phi = (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}$$

y

$$|\bar{k}_1| = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad |\bar{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

Un caso particular sucede cuando

$$A_{01} = A_{02} = A_0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

entonces:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad \text{B.48}$$

que es el caso de la interferencia de dos ondas monocromáticas que parten de la misma fuente, para este caso, un láser.

Ahora que se conocen las bases que describen la ecuación de onda, se podrá comprender de una manera formal el fenómeno de moiré ya que estos tienen gran semejanza con el planteamiento matemático de la interferencia.

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia de la Lengua española²⁵, la palabra difracción se deriva del latín *diffractus*, que significa roto, quebrado; es un término

utilizado en el campo de la óptica y se define como la desviación del rayo luminoso al rozar el borde de un cuerpo opaco. Una definición más formal es como sigue: fenómeno característico de las propiedades ondulatorias de la materia por el cual un obstáculo que se opone a la propagación libre de las ondas se presenta como una fuente secundaria que emite ondas derivadas en todas direcciones. Se derivan dos tipos: difracción de Fraunhofer que es el tipo de difracción en que la fuente luminosa y la pantalla receptora pueden considerarse situadas ambas a una distancia infinita del sistema difractor; y la difracción de Fresnel que es el tipo de difracción en el que el foco luminoso, la pantalla receptora o ambos a la vez están a una distancia finita del sistema difractor²⁶. Una de las formas de generar la coherencia en un frente de onda luminoso, es mediante la difracción que sufre el haz al incidir sobre un pequeño agujero por lo que se puede pensar que la difracción es una propiedad o un manera por la cual se puede producir el fenómeno de la interferencia y por tanto, la generación de un patrón de franjas.

Comúnmente se piensa que la luz viaja en una trayectoria rectilínea. En la realidad no sucede esto. Cuando la luz incide sobre el borde de un obstáculo cualquiera, se desvía o difracta, y el obstáculo no genera una sombra geométrica nítida. El alcance de las zonas iluminadas fuera de las líneas rectas punteadas en la figura B.13, que no llegan a quedar completamente en la sombra depende de varios factores²⁷. Estos son: la longitud de la abertura de la rendija, la distancia entre la rendija y la pantalla, así como de la longitud de la onda con que se ilumina. Si el tamaño de la rendija es muy grande comparado con la longitud de onda de la luz, entonces las regiones fuera de las líneas punteadas son muy pequeñas y casi no se notan. En este caso, se puede considerar que la luz sí se propaga en línea recta. Este es el caso con el que se está más familiarizado, ya que las rendijas que se observan cotidianamente tienen longitudes de centímetros y la luz tiene longitudes de onda del orden de diezmilésimas de milímetro. Por otro lado, si el tamaño de la rendija es comparable al de la longitud de onda de la luz, entonces el efecto es bastante apreciable. En este caso las regiones de difracción, que se encuentran fuera del par de líneas rectas en la figura B.13, se extienden muy ampliamente.

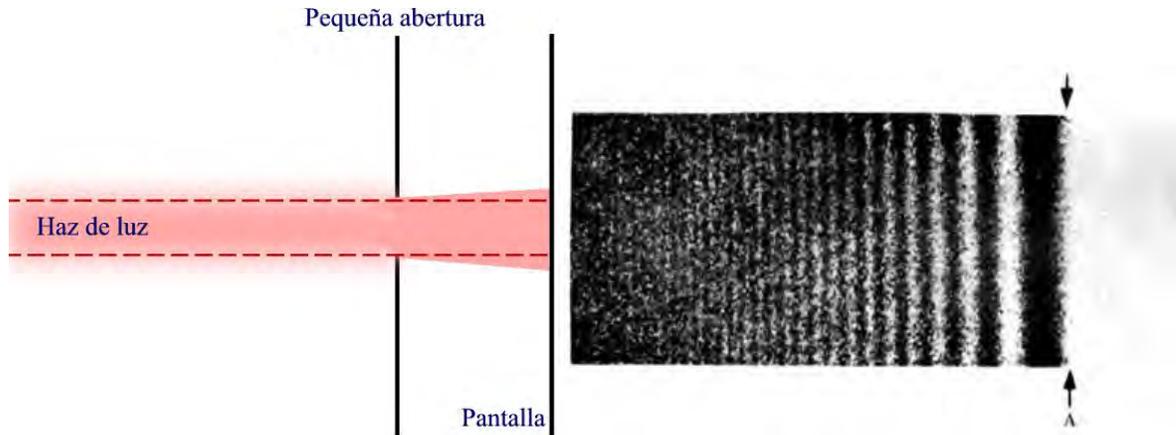


Figura B.13. La luz no se propaga en línea recta al pasar por una rendija, sino que se “quiebra”, se difracta. La sombra que se forma en un borde no está definida totalmente, tal como se observa en el límite indicado por A.

Los puntos situados en el borde de un obstáculo actúan como una fuente de ondas coherentes, y se forma un diagrama de interferencias denominado diagrama de difracción. La forma del borde del obstáculo no se reproduce con exactitud, porque parte del frente de onda queda cortado. En la figura B.14 se muestran los patrones de difracción de dos rendijas iluminadas con la misma fuente de luz. El patrón de la figura B.14(a) corresponde a una rendija que es dos veces más ancha que la rendija que produce el patrón de la figura B.14(b). En las figuras se observa que mientras más angosta sea la rendija, más se extenderá el patrón de difracción que se forma.

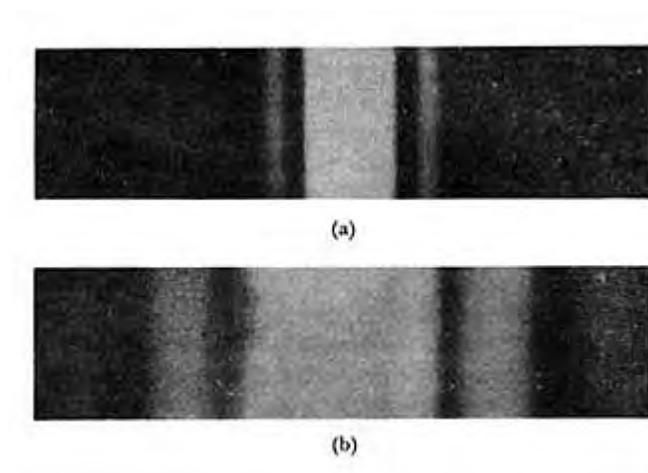


Figura B.14. Patrones de difracción que forman dos rendijas, una del doble de ancho que la otra. La más ancha forma el patrón del inciso (a), y la más angosta el patrón (b).

En general, se puede decir que cuando la longitud de onda de la luz utilizada es del mismo orden que las longitudes de las rendijas, entonces ocurren fenómenos de difracción. Los fenómenos descritos hasta este momento ocurren cuando la rendija que se usa tiene una forma rectangular muy delgada. Sin embargo, también se pueden utilizar rendijas de otras formas. Así, si se usa una rendija cuadrada, entonces el patrón de difracción que se forma en la pantalla es como el mostrado en la figura B.15. La longitud de onda de la luz es del orden de la longitud de los lados del cuadrado formado por la rendija. Otro ejemplo es el mostrado en la figura B.16, para el caso de una rendija circular.

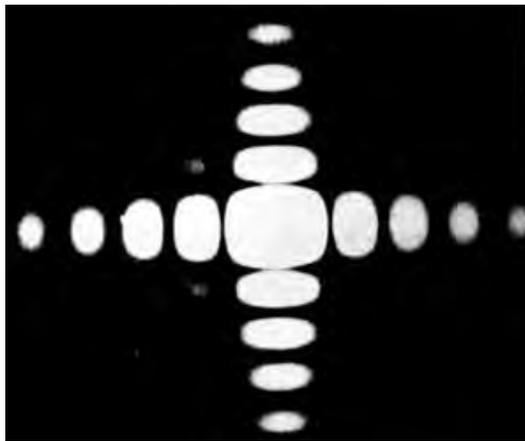


Figura B.15. Patrón de difracción que forma una rendija cuadrada.



Figura B.16. Patrón de difracción que forma una rendija circular.

Se ha encontrado también el patrón de difracción causado por una rendija rectangular. Si se compara este patrón con el formado por una rendija cuadrada resulta que en la dirección en que la rendija se hace más delgada, el patrón se esparce con mayor énfasis. El patrón que forma una rendija elíptica, comparándolo con el patrón que forma una rendija circular resulta que se extiende en aquella dirección en la cual la rendija se contrae.

En cualquiera de los casos tratados, las características del patrón de difracción que se forma, es decir, la separación entre las zonas iluminadas y las de sombra, así como su

alcance, dependen de las dimensiones de la rendija, de la separación entre la rendija y la pantalla y, de la longitud de onda de la luz usada.

Cuando la luz pasa por una lente, viaja a través de una abertura finita, por lo que siempre se forma un diagrama de difracción alrededor de la imagen de un objeto. Si el objeto es extremadamente pequeño, el diagrama de difracción aparece como una serie de círculos concéntricos claros y oscuros alrededor de un disco central, llamado disco de Airy en honor al astrónomo británico del siglo XIX George Biddell Airy. Esto ocurre incluso con una lente libre de aberraciones. Si dos partículas están tan próximas que los dos diagramas se solapan y los anillos brillantes de una de ellas coinciden con los anillos oscuros de la segunda, no es posible resolver (distinguir) ambas partículas. El físico alemán del siglo XIX Ernst Karl Abbe fue el primero en explicar la formación de imágenes en un microscopio con una teoría basada en la interferencia de los diagramas de difracción de los distintos puntos del objeto.

En óptica, el análisis de Fourier —llamado así en honor al matemático francés Joseph Fourier— permite representar un objeto como una suma de ondas sinusoidales sencillas, llamadas componentes. A veces se analizan los sistemas ópticos escogiendo un objeto cuyas componentes de Fourier se conocen y analizando las componentes de Fourier de la imagen. Estos procedimientos determinan la llamada función de transferencia óptica. En ocasiones, el empleo de este tipo de técnicas permite extraer información de imágenes de baja calidad. Agustín Jean Fresnel sintetizó los conocimientos de la teoría ondulatoria planteada por Huygen apostando fuertemente por la teoría escalar de la difracción. Un análisis completo acerca del estudio de la luz desde el enfoque de la teoría escalar de la difracción, es ampliamente tratado por Goodman²⁸. También se han aplicado teorías estadísticas al análisis de las imágenes formadas.

Una red de difracción está formada por varios miles de rendijas de igual anchura y separadas por espacios iguales (se consiguen rayando el vidrio o el metal con una punta de diamante finísima). Cada rendija produce un diagrama de difracción, y todos estos diagramas interfieren entre sí. Para cada longitud de onda se forma una franja brillante en

un lugar distinto. Si se hace incidir luz blanca sobre la red, se forma un espectro continuo. En instrumentos como monocromadores, espectrógrafos o espectrofotómetros se emplean prismas y redes de difracción para proporcionar luz prácticamente monocromática o para analizar las longitudes de onda presentes en la luz incidente.

Una rejilla de difracción es una pantalla con un número grande de rendijas de iguales tamaños y situadas a la misma distancia una de otra. En la figura B.17 se muestran los patrones de difracción para rejillas que tienen 1, 2, 5 y 20 rendijas, cuando son iluminadas por un haz de luz que incide perpendicularmente sobre ellas. En este caso se observa que hay zonas iluminadas alternando con zonas oscuras. Obsérvese que al aumentar el número de rendijas, la luz difractada se va concentrando en regiones cada vez más angostas. Para una rejilla con 20 rendijas el patrón se forma prácticamente de rayas muy marcadas, que tienen sensiblemente la misma intensidad. Por otro lado, para rejillas con pocas rendijas, las zonas iluminadas están más extendidas y tienen distintos tamaños, así como diferentes intensidades.

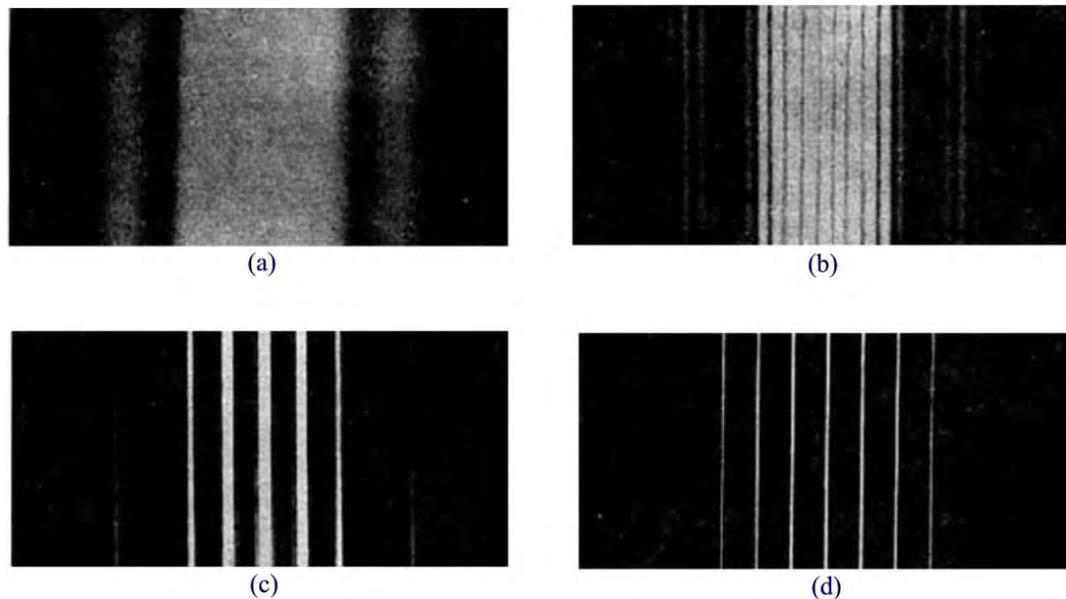


Figura B.17. Patrones de difracción que forman rejillas con: (a) 1 rendija; (b) 2 rendijas; (c) 5 rendijas; (d) 20 rendijas. A medida que el número de rendijas aumenta, se van formando líneas cada vez más angostas.

B.2 Moiré geométrico o formulación geométrica.

Dicho tratamiento fue estudiado y propuesto originalmente por Oster²⁹ en 1964. El análisis hecho por Oster y compañía, se fundamenta en proponer a la familia de rectas que conforman a las rejillas, como una familia de líneas indexadas. De acuerdo con el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española³⁰, indexar es registrar ordenadamente datos e informaciones, para elaborar su índice. Por tanto, indexación es la acción y efecto de indexar, es decir, a partir de esta familia de líneas, ordenarlas de acuerdo a un índice o bien predecir su comportamiento a partir del arreglo espacial; probablemente de este principio se derive el termino de ecuaciones indiciales, al hacer referencia a la palabra originaria índice, ya que el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española no contempla ninguna definición al respecto y cito textual³¹: “En el *DRAE* no se recogen este tipo de expresiones, por ser tecnicismos propios, en este caso, del ámbito de las matemáticas. Sí hemos comprobado su uso en los textos, donde hay algunos ejemplos de 'ecuaciones indiciales'. No hemos localizado ejemplos de uso de 'ecuaciones indizadas' que podría ser un equivalente en español”. Este tratamiento se describirá en el siguiente apartado.

En el estudio realizado por Oster, argumenta que el patrón de moiré resultante será mucho más notable cuando los índices de las intersecciones entre las familias de las rectas, satisfagan ciertas condiciones o relaciones sencillas. A partir de estas condiciones, se llega a las expresiones matemáticas relativas a la intersección entre un par de rejillas formada de líneas verticales y paralelas entre sí, entre rejillas formadas por círculos concéntricos, entre rejillas zonales de Fresnel, rejillas de líneas radiales y algunas combinaciones entre estas. En este apartado sólo se analizara el patrón de moiré generado por un par de rejillas de líneas verticales y paralelas entre sí, ya que es el caso que interesa. Para un estudio profundo del tema, se puede consultar el artículo de Oster citado en el presente capítulo así como estudios hechos por Kafri, Patorski, entre otros. El desarrollo aquí presentado se basa en el realizado por Valdez de Anda³².

El patrón de moiré obtenido al sobreponer una rejilla G_1 con periodo p_1 y otra rejilla G_B con periodo p_B se muestra en la figura B.20, donde las líneas de las rejillas circunscriben entre ellas un ángulo θ . Las franjas de moiré son equidistantes con período p' y forman un ángulo ϕ con respecto a las líneas de G_B . De la figura B.21 se pueden obtener las siguientes relaciones. Del triángulo $AB'C$

$$\sin \theta = \frac{p_2}{AC} \quad \text{B.49}$$

y aplicando la ley de los cosenos al triángulo ABC

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\overline{AC} \cos \theta \quad \text{B.50}$$

y la ley de los senos al triángulo ABC

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \phi} = \frac{\overline{AB}}{\sin \theta} \quad \text{B.51}$$

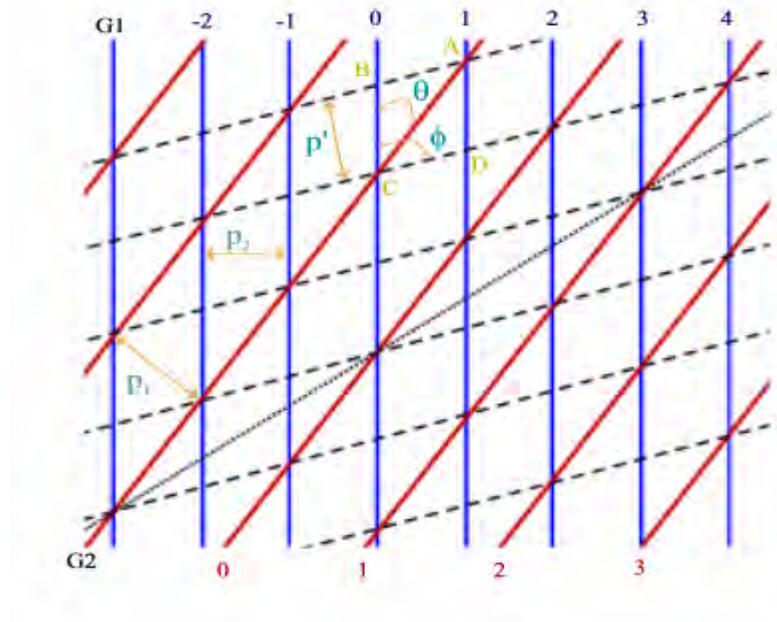


Figura B.20. Variables a considerar en la formulación geométrica del patrón de moiré.

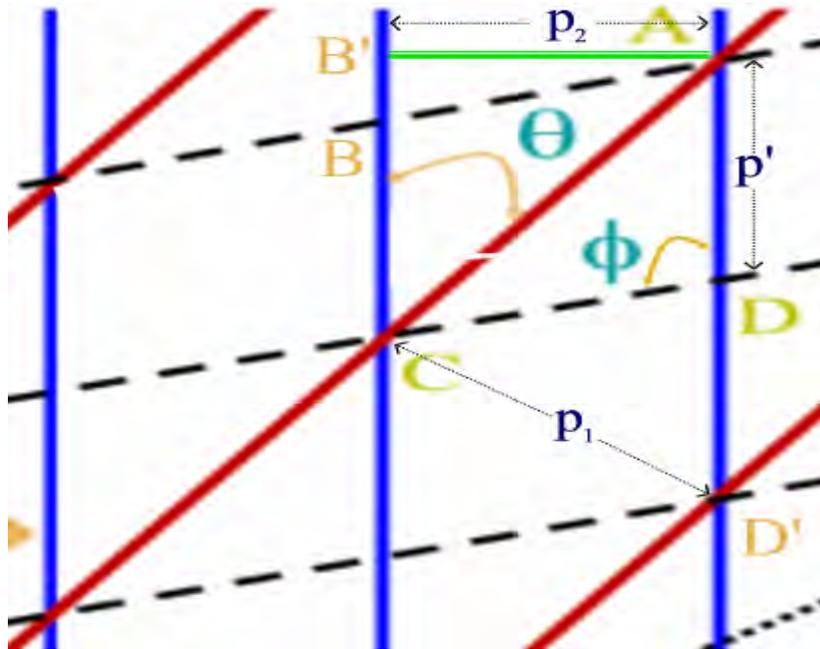


Figura B.21. Figura de referencia para obtener las relaciones para el moiré geométrico.

El área del paralelepípedo $ABCD$ es

$$\overline{ABCD} = \overline{AB} * \overline{CD} = \overline{AC} * \overline{CD'} = \overline{BC} * \overline{CD}$$

y sustituyendo los segmentos CD , CD' , y CD , en la figura B.17, se llega a:

$$\overline{ABCD} = \overline{AB} * p' = \overline{AC} * p_1 = \overline{BC} * p_2 \quad \text{B.52}$$

sustituyendo en la ecuación B.50 y arreglando la expresión para que quede en función de AB y p' , se llega a:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 \frac{p'^2}{p_2^2} + \overline{AB}^2 \frac{p'^2}{p_1^2} - 2 \frac{\overline{AB} * p'}{p_2} \frac{\overline{AB} * p'}{p_1} \cos \theta \quad \text{B.53}$$

Manipulando algebraicamente esta última expresión, se obtiene finalmente:

$$p' = \frac{p_1 p_2}{(p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{B.54}$$

Para obtener la ecuación B.54, en su artículo original, Oster parte de definir un par de ecuaciones indiciales que describen a la familia de rectas del par de rejillas que forman el patrón de moiré. El corazón de este análisis son las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \Psi(h) \\ G(x, y) &= \Phi(k) \\ \Theta(h, k) &= p \\ p &= h - k \end{aligned} \quad \text{B.55}$$

La primera y segunda ecuación de B.55, describe la primera y segunda familia de curvas, respectivamente, indexadas mientras que la tercera ecuación establece la dependencia de dichos índices en función de un subconjunto de enteros reales p . Para el análisis físico, este último entero real representa el período de las rejillas bajo estudio. A partir del conjunto de ecuaciones dados en B.55, Oster estudia una serie de diferentes rejillas ente las cuales incluye la de franjas verticales y paralelas. Para consultar dicha interpretación se cita en la referencia citada al principio del presente apartado.

Retomando el análisis previo, de B.5B se llega a la expresión

$$\overline{BC} = \overline{AC} \frac{p_1}{p_2} \quad \text{B.56}$$

y de B.51 se obtiene

$$\overline{AB} = \overline{AC} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \quad \text{B.57}$$

Sustituyendo B.55 y B.57 en la ecuación B.50 se tiene

$$\overline{AC}^2 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} = \overline{AC}^2 \frac{p_1^2}{p_2^2} + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \frac{p_1}{p_2} \overline{AC} \cos \theta \quad \text{B.58}$$

Manipulando algebraicamente B.58, se llega a la relación

$$\sin \phi = \frac{p_2 \sin \theta}{(p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{B.59}$$

Un caso especial se presenta cuando el periodo de las rejillas es idéntico, es decir, se cumple que $p_1 = p_2 = p$ y con la ayuda de la identidad trigonométrica

$\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$ la ecuación B.54 se transforma en

$$p' = \frac{p}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{B.60}$$

B.3 Formulación indicial del fenómeno de moiré.

Cómo ya se menciona en el apartado anterior, indicial hace referencia a ecuaciones indiciales, es decir, que dependen de una indexación o índice para ordenarse o conocer su comportamiento. En esta formulación, la finalidad es encontrar la posición y localización de las franjas de moiré, donde una rejilla se considera como un arreglo discreto de líneas descritas por un conjunto de ecuaciones cada una de las cuales especifica la ubicación de la línea en el arreglo. Recordando los fundamentos de geometría analítica, se sabe que la ecuación mas simple de una recta es aquella que se describe en términos de la pendiente o la distancia entre dos puntos. Basándose en este principio, la ecuación de una rejilla de Ronchi³³ de período p a lo largo del eje y , estará dada por

$$y = kp \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots \quad \text{B.61}$$

donde k indica a la k -ésima franja.

El patrón de moiré formado por la superposición de las rejillas $G1$ y $G2$ se puede observar en la figura 2.22. Las líneas de la rejilla $G1$ forman un ángulo de $\frac{\theta}{2}$ con el eje x , y la rejilla $G2$ esta simétricamente inclinada con respecto a $G1$, es decir, forma un ángulo de $-\frac{\theta}{2}$. Para obtener las ecuaciones que describan el comportamiento de las rejillas $G1$ y $G2$, se parte de las relaciones trigonométricas mostradas en la figura B.23 de donde se tiene que

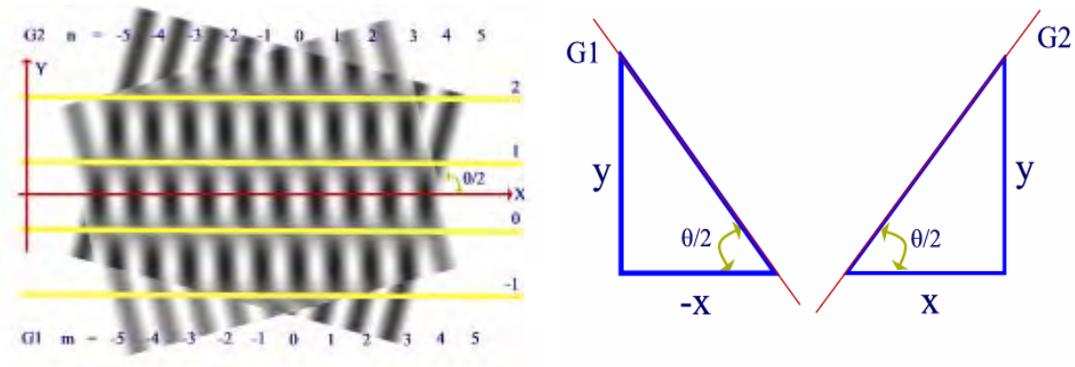


Figura B.22 (izquierda). Esquema que muestra la localización geométrica del patrón de moiré.

Figura B.23 (derecha). Ángulos subtendidos por las rejillas con respecto al eje X.

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{x}{\text{hipotenusa}} \quad \text{B.62}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{y}{\text{hipotenusa}}$$

sustituyendo el valor de la hipotenusa de cualquiera de las expresiones dadas por B.62 se llega a

$$y \cos \frac{\theta}{2} = x \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{B.63}$$

y de aquí, generalizando, cuando se trata de la rejilla GB se tiene para la n -ésima franja y para GI se tiene la m -ésima franja a lo largo de $-x$, generándose el par de ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} y \cos \frac{\theta}{2} &= x \sin \frac{\theta}{2} + np & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ y \cos \frac{\theta}{2} &= -x \sin \frac{\theta}{2} + mp & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad \text{B.64}$$

Las intersecciones de las dos rejillas forman un arreglo de franjas brillantes cuyo índice esta dado por

$$k = m - n \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{B.65}$$

De B.64

$$\begin{aligned} n &= \frac{y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}}{p} \\ m &= \frac{y \cos \frac{\theta}{2} + x \sin \frac{\theta}{2}}{p} \end{aligned}$$

por lo que después de un poco de álgebra se llega a

$$x = \frac{kp}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{B.66}$$

Para valores pequeños de θ el $\sin \theta$ se aproxima a θ , por lo que B.66 se expresa como

$$x \cong \frac{kp}{\theta} \quad \text{B.67}$$

La ecuación B.67 representa un conjunto de líneas rectas perpendiculares al eje x , cuyo espaciamiento es $\frac{1}{\theta}$ veces el período de las rejillas originales. Si comparamos la ecuación B.60 con B.66, podremos observar la gran similitud entre estas, por lo que concuerda con la formulación hecha desde el punto de vista geométrico.

Referencias

1. [E. Hecht, “Óptica”, Addison Wesley, Madrid, 2000, pp. 1-10]
2. [D. Malacara, “Óptica básica”, Fondo de Cultura Económica, 1989, pp. 13-BB]
3. [Real Academia Española, “Diccionario de la lengua española”, Madrid 1984, vigésima edición, Tomo II, pp. 781.]
4. [Enciclopedia Británica, inc., “Webster’s Third New Internacional Dictionary, of the english language unabridged”, G. & C. Merriam Co., 1976, Vol. II, pp. 1178.]
5. [D. J. Whitehouse, “Handbook of Surface Metrology”, Institute of Physics Publishing, Great Britain, 1994, pp. 469]
6. [E. Hecht, “Optics”, Schaum’s outlines series, McGraw-Hill, 1975, pp. 148-149.]
7. [D. Malacara, Op. cit., pp. 268]
8. [Enciclopedia Británica, inc., Op. cit., pp. 1178.]

9. [M. Born, E. Wolf, “Principles of Optics”, Cambridge University Press, Séptima edición, cap. 1.]
10. [E. Hecht, Op. cit., cap. 2]
11. [M. Born, E. Wolf, “Principles of Optics”, Cambridge University Press, Séptima edición, cap. 1.]
12. [O. Kafri, “The physics of moiré metrology”, John Wiley & Sons, Inc., 1990, cap. 1]
13. [R. S. Sirohi, F. S. Chau, “Optical Methods of Measurement”, Marcel Dekker Inc., cap. 1 y 2]
14. [E. Hecht, Op. cit., cap. 7]
15. [M. Born, E. Wolf, Op. cit.]
16. [R. K. Wangsness, “Electromagnetic Fields”, John Wiley & Sons, 1979, cap. 24]
17. [R. W. Boyd, “Photometry and Radiometry”, Academic Press, p. 13]
18. [R. K. Wangsness, Op. cit., cap. 21 y 24]
19. [C. DeCusatis, “Handbook of Applied Photometry”, Optical Society of America, 1998, cap. 1]
20. [R. W. Boyd, Op. cit., cap. 2, 10]
21. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopédico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Vol. 8, pp. 215]
22. [Idem., pp. 214]
23. [Idem.]
24. [R. W. Boyd, Op. cit., cap. 2, 10]
25. [Real Academia Española, “Diccionario de la lengua española”, Madrid 1984, vigésima edición, Tomo II, pp. 498]
26. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopedico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Vol. 8. pp. 40]
27. [http://www.conevyt.org.mx/inea/biblioteca/varios/50_ob_dcig_v1/cienciaB/menu.htm]
28. [J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics”, McGraw Hill, Bda. Edición, 1996]

29. [G. Oster, , M. Wasserman, C. Zwerling, “Theoretical Interpretation of Moiré Patterns”, JOSA, Vol. 54, 1964]
30. [<http://www.rae.es>]
31. [ConsultaB [consuB@rae.es]]
32. [A. A. Valdez de Anda, “Evaluación Antropométrica del Pie usando Topografía de Moiré”, Tesis de Maestría, León Gto., julio de 1994, cap. 1]
33. [O. Kafri, Op. cit., pp. 6-8]

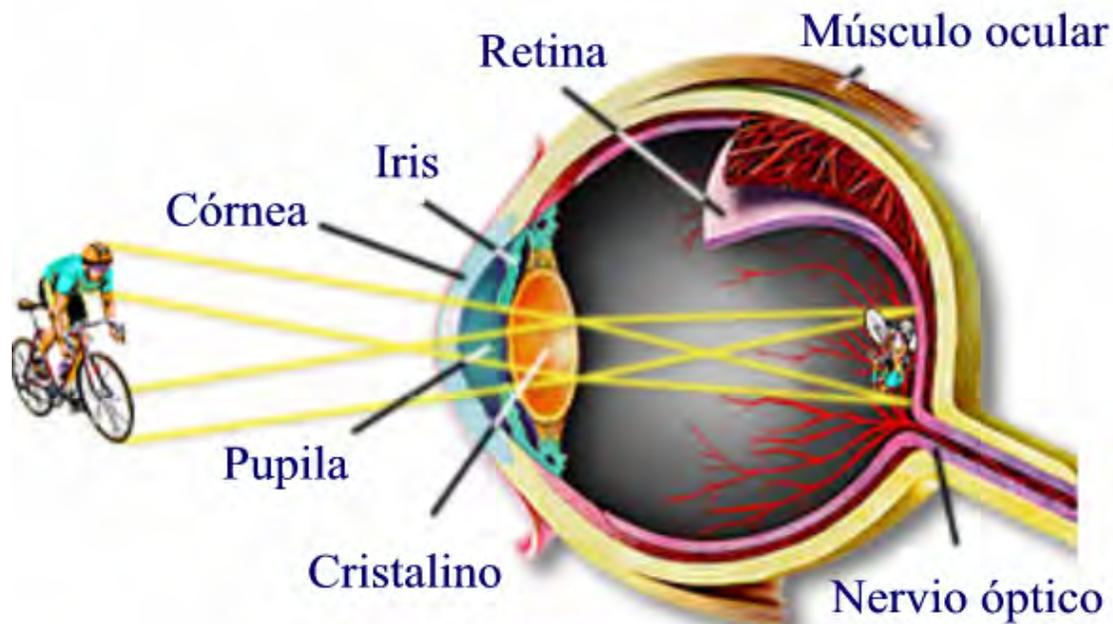
APÉNDICE C

El microscopio y la CCD.

C.1 ¿Qué es un microscopio?

Antes que nada y puesto que la mayoría de los usuarios de los microscopios realizan una observación directa, es importante comprender las relaciones entre el microscopio y el ojo humano. Los ojos del hombre son capaces de distinguir el color en la porción visible del espectro, del violeta hacia el azul, siguiendo el verde y después el amarillo, posteriormente el naranja hasta llegar al rojo; el ojo no percibe ni los rayos ultravioletas ni los infrarrojos. El ojo también es capaz de percibir diferencias en brillo o intensidad que van del negro al blanco y toda la escala de sombras entre ellos. Por tanto, una imagen que sea vista por el ojo debe presentarse en colores del espectro visible y/o con variaciones en la intensidad de la luz. En la retina, los elementos que perciben el color se denominan células cónicas; las células que distinguen los niveles de intensidad, más no el color, son las células llamadas bastones. Estas células están localizadas en la retina en la parte trasera dentro del globo ocular. La anatomía principal del ojo la compone el iris, la córnea, el cristalino y estos elementos regulan el paso de la luz además de enfocar la imagen que llega a la retina (figura C.1).

El ojo humano



Copy Right © 1995-2004
by Michael W. Davidson
and The Florida State University <http://www.micro.magnet.fsu.edu/>

Figura C.1. Anatomía del ojo humano.

Para que una imagen se observe con toda claridad, se debe esparcir en la retina con un ángulo visual mínimo. A menos que la luz incida en líneas no adyacentes de las células retínicas (en función de la amplificación y de la difuminación de la imagen), es posible distinguir detalles muy finos en la imagen así como puntos separados, es decir, la capacidad de resolución del ojo. Aún mas, debe haber suficiente contraste entre detalles adyacentes de la imagen y/o el fondo debe estar lo suficientemente amplificado para poderse resolver. Debido al límite en la habilidad del cristalino del ojo para cambiar su curvatura, los objetos muy cercanos al ojo no pueden observarse claramente ya que no se enfocan con propiedad en la retina. La distancia de vista adecuada y convencional para resolver un objeto es de 25cm. Las lentes simples amplificadoras, son lentes convexas (cuyo centro es mas delgado que la periferia) que ayudan a que el espécimen u objeto que se desea observar y que no puede ser resuelto por el ojo, sea visto a detalle ya que se coloca entre el objeto y el ojo y entonces puede enfocarse ya que esta lente cumple la función de esparcir la imagen en la

retina debido a que aumenta en ángulo visual de la retina. De aquí la necesidad de desarrollar lentes amplificadoras y con ello los primeros pasos del microscopio.

Los historiadores no están de acuerdo acerca de quién inventó el microscopio¹. Las lentes eran conocidas en Florencia, Italia a finales del siglo XIII (año de 1200 DC). A finales del siglo XVI (año de 1500 DC), fabricantes holandeses de vidrios comenzaron a experimentar con lentes. En 1608, Hans Lippershey, aplicó una patente de su tubo de ampliación el cual agrandaba objetos distantes. El también reportó el uso de variaciones de su tubo amplificador a objetos cercanos a la mano. Unos pocos meses después, un inventor italiano llamado Galileo construyó su propio tubo amplificador y descubrió que mientras un telescopio que enfoca a las estrellas requiere solo un par de pies de largo, para amplificar pequeños objetos cercanos se requiere de un tubo dos o tres veces esa longitud.

A principios de 1625, un miembro de la academia de Lynxes, el físico-naturalista John Faber, renombró al tubo óptico de Galileo como microscopio, ya que, en sus palabras, "...permitía observar cosas diminutas...". Al mismo tiempo, muchos científicos de la época estaban muy entusiasmados por la "imagen artificial" producida por el telescopio, ya que se observaba que amplificaba objetos distantes, mientras que, por el contrario, al microscopio no se le encontraba un uso práctico.

Fue hasta 1665 cuando Robert Hooke publicó su obra "Micrographia", una exposición excitante acerca de la teoría de la luz y el color, así como de la combustión y la respiración, incluyendo la descripción del microscopio y usos. Lo que Galileo logró para el telescopio, Hooke lo logró para el microscopio. Cincuenta y siete ilustraciones dibujadas por el mismo Hooke revelaron por primera vez lo que para el ojo humano era desconocida, tal como el ojo de una mosca, o el filamento succionador de la abeja, entre otras muchas imágenes. La figura C.2, muestra el primer modelo del microscopio, cuya iluminación la emite una vela directamente a la lente que apunta al objeto.



Figura C.2. Microscopio utilizado por Robert Hooke.

A medida que los años pasaron, la comunidad científica internacional creció. En 1668, la revista de intercambios filosóficos de la Real Sociedad de Londres publicó un extracto del trabajo de una revista italiana describiendo como un fabricante de lentes, Eustachio Divini, utilizó un microscopio y descubrió un animal mucho más pequeño que cualquiera que se hubiese observado anteriormente. Cinco años después, Henry Oldenburg, quien era un editor de la revista de intercambios filosóficos en Londres, recibió una carta de un anatomista alemán de nombre Regnier de Graaf, describiendo el trabajo de un holandés, Antonie van Leeuwenhoek, quien observó las fibras del algodón y otros textiles y que también trabajaba como inspector de pesas y medidas. Frecuentemente utilizaba lentes de baja amplificación para inspeccionar la calidad de la ropa, además de otros sorprendentes objetos. Él comenzó construyendo sus propias lentes.

Hooke utilizaba lo que se conoce como microscopio compuesto, que combina dos o más lentes, Leeuwenhoek perfeccionó el microscopio, construyendo aparatos con amplificaciones hasta de 200, con una sola lente muy pequeña, del tamaño de una cabeza

de alfiler, tallada con una gran perfección. Utilizaba un microscopio simple, como el que se muestra en la figura C.3.

El espécimen era observado sosteniéndolo en el microscopio y mirando a la muestra bajo estudio mediante el otro lado. Leeuwenhoek eventualmente diseñó alrededor de 550 lentes de las cuales sobresale una de amplificación lineal de 500 y con la capacidad de resolver hasta una millonésima de metro. A lo largo de los años, el reportó sus descubrimientos a la Real Sociedad de Londres a través de cartas, algo así como 190. Leeuwenhoek perfeccionó el microscopio simple al elaborar lenticillas de gran poder de aumento. De los 419 microscopios fabricados por Leeuwenhoek que se conocen, algunos tienen una amplificación mayor de 250x. A estos instrumentos se deben las primeras observaciones de bacterias, glóbulos rojos, huevecillos de insectos y muchos otros seres microscópicos, observaciones que contribuyeron a cambiar radicalmente las ideas sobre el ciclo de la vida animal y sobre la estructura de los seres vivos a nivel microscópico. En 1674, Con sus microscopios, Leeuwenhoek fue el primero en describir los espermatozoides. En 1667 descubrió los primeros animales unicelulares, llamados protozoarios, y en 1683 observó las bacterias. Encontró además que las moscas tienen pequeños parásitos. Con esto abrió el camino al descubrimiento de las bacterias y concluyó que estos cuerpecillos orgánicos eran necesarios para la vida siendo el pionero de la microbiología, embriología, histología, entomología, botánica y la cristalografía.



Figura C.3. Microscopio ideado por Leeuwnhoek.

El microscopio es un instrumento óptico destinado a observar de cerca objetos extremadamente diminutos. La combinación de sus lentes produce el efecto de lo que se

mira aparezca con dimensiones extraordinariamente aumentadas, haciéndose perceptible lo que no lo es a simple vista. Se encuentra en el diccionario² el origen de la palabra: proviene de *micro* y del griego *skopeîn* que significa observar. Se distinguen dos tipos principales:

- Microscopio simple: el cual es un sistema óptico constituido por una lente convergente dotada de un elemento de sustentación.
- Microscopio compuesto: es un sistema óptico constituido por dos o más lentes.

El ejemplo mas ampliamente conocido del microscopio simple es la lupa. Para efectos de investigación, se utilizan microscopios compuestos por lo que es importante conocer algunas de sus características principales.

En un microscopio compuesto, el lente que se encuentra más cercano al espécimen se denomina objetivo; tiene una distancia focal corta y, forma una imagen real y aumentada, que es el objeto del segundo sistema de lentes, denominado ocular. El condensador tiene la función de concentrar la luz sobre el espécimen.

El microscopio compuesto representa un paso mas allá de la lupa simple proporcionando un mayor aumento angular de objetos cercanos.

El microscopio compuesto, permite corregir aberraciones de tipo cromático y esférico, fue inventado (entre 1591 y 1608) por el holandés Zacharias Jensen. Este microscopio estaba compuesto por una lente objetivo convexa y un ocular cóncavo. Posteriormente Johannes Kepler diseñó un microscopio compuesto en que, ambos, el objetivo y el ocular, eran de tipo convexo. (Fig. C.4)

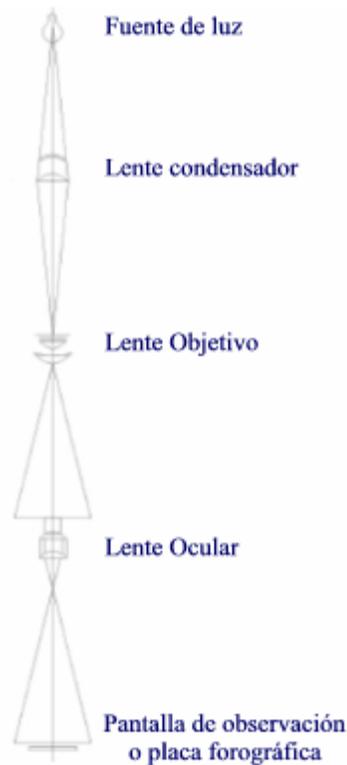


Figura C.4. Microscopio compuesto similar al de Kepler.

La *parte óptica* de un microscopio compuesto está constituida por un conjunto de dos sistemas ópticos convergentes fijados en los extremos de un *tubo*: son el *objetivo* y el *ocular*, formados a su vez por asociaciones de lentes diversas con objeto de eliminar las aberraciones.

La *parte mecánica* consta del *pie*, pieza metálica en forma de herradura y de gran peso para asegurar la estabilidad del aparato, y la *columna*, sujeta al pie por medio de un mecanismo que permite variar su inclinación, y de la que son solidarios el *tubo* y los elementos auxiliares; el tubo puede desplazarse a lo largo de la columna con movimiento rápido, a través de un mecanismo de cremallera, o con movimiento lento, por medio de un tornillo micrométrico.

Los *elementos auxiliares* son la platina y el dispositivo de iluminación. La *platina* es una placa destinada a sostener el objeto que se desea observar (*preparación microscópica*) y va

provista de un orificio en su parte central, de abertura regulable por medio de un diafragma, a través de la cual se ilumina la preparación. El *dispositivo de iluminación* puede consistir en un manantial luminoso propio o un espejo de orientación regulable que recoge los rayos luminosos procedentes de un manantial exterior; muchos microscopios disponen de un sistema de lentes situado debajo de la platina y cuyo foco coincide con el manantial luminoso; este dispositivo se denomina *condensador*, y tiene por objeto concentrar los rayos luminosos sobre la preparación.

Propiedades Ópticas del microscopio.

El proceso de formación de la imagen es un microscopio tiene lugar de la siguiente forma: el objeto debe estar situado en las proximidades del foco del objetivo y a una distancia mayor que la focal; de este modo se produce una imagen (imagen objeto) real, mayor que el objeto e invertida, y que debe formarse entre el ocular y su foco anterior; en estas condiciones el copular se comporta como una lupa y a partir de la imagen objeto proporciona la imagen ocular, de acuerdo con lo mostrado en la figura C.5. La imagen ocular debe formarse a una distancia del ojo del observador distinta al límite de la visión superior. A fin de que no sea preciso un esfuerzo de acomodación por parte del observador, conviene que la imagen virtual ocular se forma en el infinito, lo que supone que el haz emergente sea de rayos paralelos, es decir, que la imagen objeto se forma en el foco del ocular, por lo que es preciso enfocar el instrumento; esto se consigue desplazando el tubo a lo largo de la columna hasta lograr una imagen nítida. Muchos microscopios disponen de un sistema de revólver que permite sustituir un ocular por otro de distinta potencia sin necesidad de enfocar de nuevo, y de un sistema zoom que permite variar con continuidad la potencia del ocular.

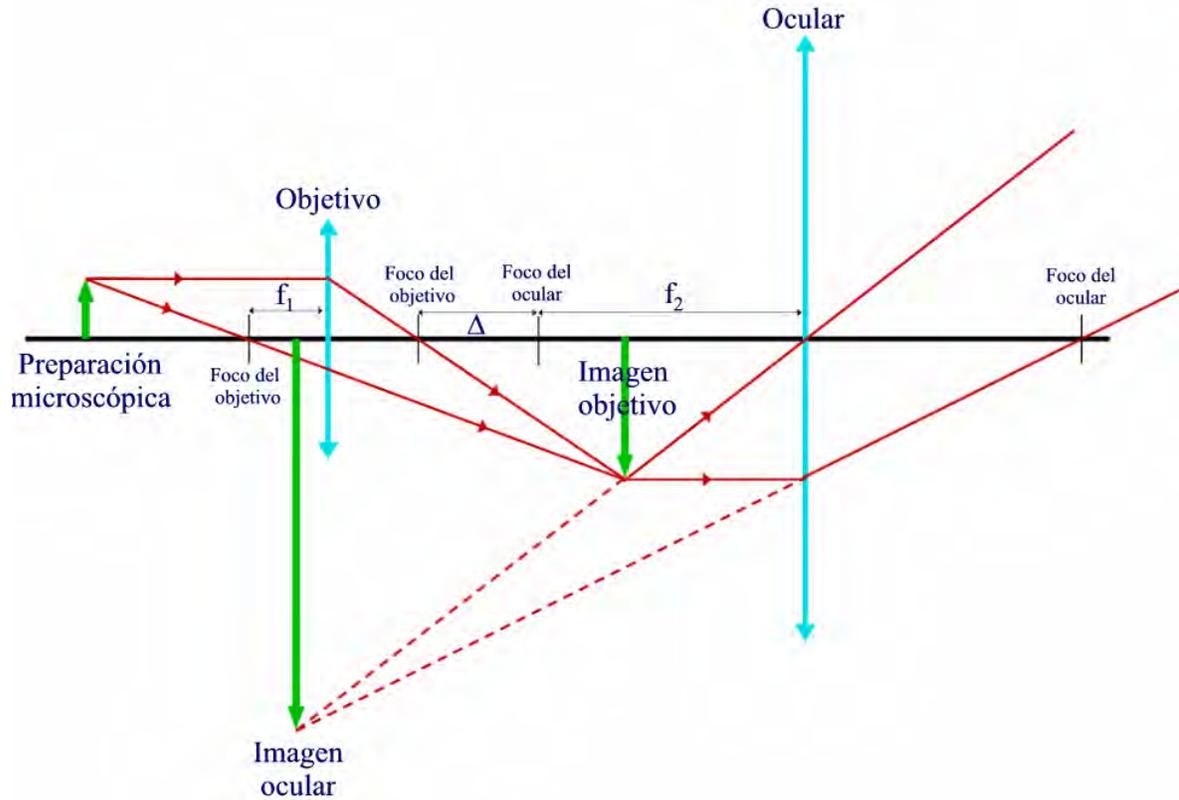


Figura C.5. Elementos ópticos de un microscopio y formación de la imagen.

El aumento visual del microscopio se define como la relación existente entre el ángulo bajo el cual se ve el objeto con el microscopio y el correspondiente a la visión directa cuando se coloca el objeto a la distancia de visión distinta del ojo (a 25cm de éste). Si f_1' y f_2' son las distancias focales de objetivo y ocular respectivamente, el aumento del microscopio queda determinado por la expresión:

$$A = -25 \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} \quad \text{C.1}$$

donde Δ es la distancia entre los focos imagen del objetivo y objeto del ocular, también recibe el nombre de longitud óptica del microscopio. El aumento puede escribirse en la forma:

$$A = A_1 A_2 \quad \text{C.2}$$

donde $A_1 = \frac{\Delta}{f_1'}$ es el aumento del objetivo y $A_2 = \frac{25}{f_2'}$ es el aumento del ocular

considerado como una lupa ordinaria de potencia $\frac{1}{f_2'}$. Considerando el microscopio como

la asociación de los sistemas centrados, objetivo y ocular, su potencia esta determinada por

$$P = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} \quad \text{C.3}$$

Se define el poder separador o resolutor, como la inversa de la mínima distancia ente dos puntos del objeto que pueden ser observador como distintos en la imagen (criterio de Rayleigh). La razón de esta limitación en la observación surge del proceso de formación de la imagen objeto; la pupila de entrada al objetivo limita los rayos que proceden del objeto dando lugar a una figura de difracción de la imagen objeto, de cada punto del objeto. Dos imágenes se dicen distintas cuando sus centros de difracción están lo suficientemente alejados entre sí como para ser vistas desde el objetivo bajo un ángulo³ de valor

$$\frac{1.22\lambda}{D} \quad \text{C.4}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz empleada en la iluminación y D es el diámetro de la pupila de entrada del objetivo. Dos puntos del objeto se ven como distintos si su separación⁴ es a lo sumo igual a

$$\frac{1.22\lambda}{2n \sin u} \quad \text{C.5}$$

donde n es el índice de refracción del medio en que se encuentra el objeto y u es el ángulo bajo el que se ve el semidiámetro de la pupila de entrada al objetivo desde el centro del objeto, de acuerdo con la figura C.6, y a la ecuación C.4 se le conoce como el límite angular de resolución, de acuerdo a la teoría escalar de la difracción (disco de Airy). El producto $n \sin u$, recibe el nombre de apertura numérica del objetivo. Hay que notar que, variando las distancias focales de objetivo y ocular, teóricamente se podrían obtener aumentos tan grandes como se deseara; sin embargo, la limitación que impone un poder separador pequeño supone que un aumento elevado conlleva la formación de imágenes difusas por los efectos difractivos que se originan en el objetivo. Así, la única alternativa posible para obtener imágenes muy aumentadas y nítidas es disminuir la longitud de onda

de la luz iluminante o bien aumentar la apertura numérica del objetivo, por ejemplo mediante la utilización de objetivos de inmersión en un fluido de alto índice de refracción.

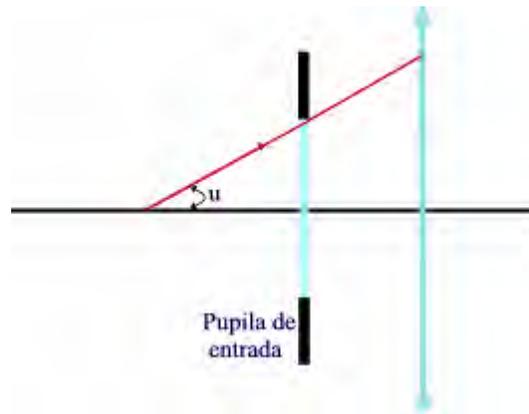


Figura C.6. Apertura numérica de un microscopio.

Existen diversos tipos de microscopios cuya mayoría constituyen variantes en sus sistemas, adaptadas a diversos usos, entre los que se pueden mencionar: el microscopio ordinario o de laboratorio, el microscopio de rayos X, el microscopio electrónico de barrido, microscopio polarizante, microscopio de reflexión, microscopio de contraste de fase, microscopio de emisión de campo, microscopio estéreo, entre otros. A continuación se describirán las características principales del microscopio estéreo, el cual es el utilizado en el esquema experimental que se describirá en capítulos posteriores.

C.2 Microscopio Estéreo.

El origen de la palabra *estéreo*, proviene del latín *steron* y este a su vez del griego *stereós*, sólido, y originalmente es la unidad de medida para leñas, equivalente a la leña que puede colocarse, apilada, en el espacio de un metro cúbico⁵; una voz que no proviene de la academia es también *estereo* que es la forma prefija del griego *stereós*, sólido: ESTEREOscopico. Se usa también en la formación de neologismos que denotan “tres dimensiones”: ESTEREOfónico⁶, ya que diversos estudios han concluido que los ojos y el cerebro humano funcionan coordinadamente para producir lo que se conoce como visión estereoscópica, la cual permite percibir, espacialmente, imágenes tridimensionales de los objetos con los que se tiene contacto. Esto se logra debido a que la interpretación que el cerebro realiza de las dos imágenes ligeramente diferentes recibidas de las retinas. En

promedio, la distancia que separa al ojo izquierdo del derecho, es de aproximadamente 64-65mm, y cada ojo percibe un objeto desde un punto de vista diferente, dependiendo de los pocos grados de diferencia que existe de uno con respecto del otro. Cuando las imágenes capturadas por la retina se transmiten al cerebro, las imágenes son unidas, pero aún mantiene un alto grado de profundidad en cuanto a su percepción se refiere, lo cuál es de remarcar. La estereomicroscopía aprovecha esta habilidad para percibir la profundidad transmitiendo imágenes gemelas las cuales son inclinadas un pequeño ángulo, entre 10 y 12 grados, para alcanzar un efecto estereoscópico verdadero. Por lo tanto, la palabra estereoscópico va de la mano con la percepción, es decir, de cómo los ojos perciben la intensidad luminosa reflejada por objetos tridimensionales y la manera en como el cerebro la decodifica.

Los microscopios monoculares (un solo ocular) pertenecen a la familia de microscopios llamadas “microscopios de alta potencia” debido a su gran capacidad amplificadora, o “microscopios compuestos” ya que cuentan en su mecanismo diversas lentes objetivas. Estos son utilizados para observar objetos extremadamente pequeños tales como partes de insectos, plantas, células sanguíneas y hasta bacterias. La mayoría cuenta con tres lentes objetivas en la parte baja del cuerpo del microscopio, proporcionando potencias amplificadores de 40X, 100X y 400X y algunos tiene un cuarto lente que amplifica en un factor de 1000X. El microscopio monocular cuenta con solo un lente ocular en su parte superior, pero también los hay con dos lentes oculares (microscopio de cabeza binocular o microscopio binocular).

Por otro lado, los microscopios estereo cuyo funcionamiento se explicara brevemente a continuación, también son llamados de “inspección”, de “disección” por su utilización en diversos campos de los laboratorios médicos y biológicos, o de “baja potencia”. Frecuentemente se utilizan para observar objetos relativamente grandes con respecto a aquellos que se analizan bajo un microscopio monocular. Tanto el microscopio binocular como el microscopio estereo, cuentan con dos oculares. Sin embargo, a diferencia de los microscopios binoculares, los microscopios estereo tienen sus propias lentes objetivas para

cada uno de sus oculares. Por tanto, el objeto se mirara en tercera dimensión o “estereo” bajo un microscopio estereo.

El primer microscopio de estilo estereoscópico con dos oculares gemelos y con objetivos cambiables, fue diseñado y construido por Cherubin d’Orleans en 1671. Actualmente este tipo de instrumentos son catalogados como sistemas pseudo estereoscópicos ya que logran obtener una imagen vertical aplicando lentes suplementarias.

150 años después, Sir Charles Wheatstone escribió un tratado sobre visión binocular cuyo interés radicaba en estimular la microscopia estereo e impulsar trabajo futuro acerca de este tópico. A mediados del siglo XIX, Francis Herbert Wenham de Londres, diseño el primer microscopio estereo exitoso, incorporando un nuevo elemento a los esquemas conocidos hasta entonces: un prisma acromático que desviaba la luz hacia el objetivo. El binocular de Wenham, como fue conocido posteriormente, tenía la debilidad de no contar con componentes ópticas adecuadas para generar un efecto realmente estereo.

A principio de la década de 1890, Horatio S. Greenough, un diseñador americano, introdujo un diseño óptico novedoso que se convirtió en el padre de la estereo microscopia moderna. Greenough convenció a la compañía Carl Zeiss de Jena a producir el microscopio, pero incorporando un sistema de lentes formadora de imagen diseñada por Greenough. Los ingenieros de Zeiss diseñaron prismas invertidos para producir una imagen erecta y vertical. Este diseño ha sido probado a lo largo del tiempo por un gran número de microscopistas, y fue, en sus inicios, la base de las observaciones hechas a muestras diseccionadas en los laboratorios de medicina y biología.

Los microscopios estereo construidos durante la primera mitad del siglo veinte, o conocidos como microscopios de disección, contaban con componentes microscópicas tradicionales de acuerdo a su época, cuyas características ópticas cumplen con las comentadas en el apartado anterior, en donde la distancia de trabajo era inversamente proporcional a la amplificación.

El primer microscopio estereo moderno, fue construido a mediados de 1950, y fue llamado Cycloptic de la American Optical Inc., aunque posteriormente se conoció en forma genérica como microscopio de objetivo común (CMO por sus siglas en inglés, Common Main Objective, figura C.7), de cuyo diseño se basaron otros tantos fabricantes, el cuál fue un parte aguas en el diseño de microscopios entre cuyas características relevantes se cuentan el estar construido de aluminio, contar con una distancia de trabajo constante y cambio interno de la amplificación, que permitía al observador incrementar la amplificación del objeto desde 0.7X hasta 2.5X, en cinco etapas. En resumen, el microscopio utilizaba una sola pieza de prismas erectores de imagen (conocidos también en la literatura como prismas reflectores), y fue equipado con una variedad de accesorios incluyendo brazos, chasis, sistemas de iluminación revolucionarios para su época. Básicamente el microscopio Cycloptic de American Optical Inc., al igual que la mayoría de los primeros microscopios estereo construidos, consiste en una montura en la parte baja del cuerpo del microscopio para asegura al objetivo en su posición detrás del tambor rotativo que contiene dos pares de telescopios tipo Galileano afocales. A medida que el tambor gira, los lentes telescópicos eran utilizados tanto en orientación directa e inversa (amplificando o deamplificando), logrando cuatro diferentes amplificaciones. La quinta amplificación es el resultado de abrir el canal sin vidrios. El sistema de lentes Galileano tiene la desventaja de poseer una distancia focal corta, y un pequeño diámetro de campo, y raras ocasiones las amplificaciones exceden 2X o 3X. Una lente Galileana proporciona amplificación de 2X o de 1/2X, dependiendo de la orientación, y el par de lentes que pueden acomodarse para producir estas variaciones. La cabeza del microscopio Cycloptic, contiene el tubo de las lentes, prismas reflectores o erectores y un par de oculares. En 1959, Bausch & Lomb introdujo al mercado de los microscopios un microscopio estéreo llamado StereoZoom, el cual implementaba amplificación variable o, también conocido, como zoom. La diferencia con respecto al microscopio CMO radicaba en que el StereZoom no utilizaba prismas reflectores sino el sistema basado en el propuesto por Greenough casi 70 años atrás.

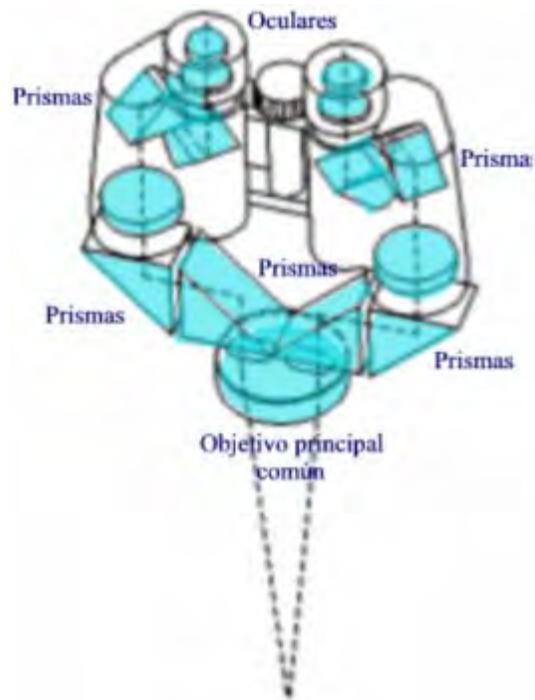


Figura C.7. Microscopio estéreo CMO básico.

Actualmente dentro de las características de los microscopios estereo, es contar con objetivos de una amplia apertura numérica que producen imágenes con un alto contraste presentando una mínima cantidad de distorsión geométrica. Los tubos de observación están acomodados de tal forma que proporcionan un campo de visión por encima de los 26mm, con ajuste dióptrico que permite a la imagen y a la retícula permanecer en foco simultáneamente. Muchos modelos soportan rangos de zoom por encima de 12X-15X, que proveen un amplio rango de amplificación (entre 2X a 540X) y reduce la necesidad de cambiar de objetivos. Características ergonómicas son incorporadas al diseño del microscopio para ayudar a reducir la fatiga durante largas jornadas laborales, y nuevos accesorios permiten observar especímenes que no era posible estudiar años atrás.

En algunos sistemas estereo microscópicos, la muestra bajo estudio es formada utilizando dos trenes de componentes ópticos separados, cada uno formado de un ocular, un objetivo y elementos ópticos intermedios. Otro diseño emplea un objetivo común compartido entre dos canales ópticos. Las dos imágenes diferentes, originadas por la ligera diferencia entre los ángulos de visión, son proyectadas en las retinas del observador, donde estimulan al

nervio óptico y transfirieren la información al cerebro para su procesamiento. El resultado en una imagen tridimensional de la muestra cuya resolución esta limitada por los parámetros del sistema óptico del microscopio y de la frecuencia a la cual se transmite la información a la retina, la cual esta limitada por la densidad del píxel en una cámara digital de CCD (charged coupled device, en inglés).

Los estereo microscopios pueden dividirse en dos categorías principales, cada una de estas con características a favor y en contra. Los microscopios estereo antiguos, se clasifican como microscopios estereo de Greenough al ser posteriores al sistema inventado por Horatio Greenough, utilizan tubos gemelos que están inclinados para producir el efecto estereo. La otra categoría es un sistema mas reciente basado en el CMO, y utiliza un solo objetivo (de aquí el nombre) el cual es compartido por un par de tubos oculares y sistema de lentes. Cada tipo de microscopio puede equiparse por lentes individuales que permiten cambiar la amplificación o bien por un sistema de amplificación variable y continuo (zoom).

El diseño de Greenough introducido por Zeiss, consiste de dos sistemas ópticos idénticos y simétricos, cada uno con un ocular separado y un objetivo en exacta alineación con la cubierta (Figura C.8). La principal ventaja de este sistema es su alta apertura numérica la cual se logra debido a que los objetivos son muy similares en diseño a los utilizados en un microscopio común. El tamaño, foco, rotación y centrado de las imágenes transmitidas al observador, deben de mantenerse dentro de un rango de tolerancia muy estrecho para que los ojos observen esencialmente la misma escena. En estos sistemas, el ojo izquierdo observa el objeto del lado izquierdo mientras que el ojo derecho observa el mismo objeto con una ligera variación en la perspectiva en el lado derecho. Un par de prismas de reflexión o erectores de imagen, o bien, un sistema de espejos, es utilizado para eliminar la rotación e invertir la amplificación de la imagen recibida desde los objetivos y presentarla al observador tal como se observaría sin la presencia del microscopio. Como la formación de la imagen es simétrica alrededor del centro del sistema óptico utilizado, la corrección de aberraciones ópticas es menos difícil de lograr, ya que las lentes son axialmente simétricas y no hay una gran cantidad de rayos luminosos pasando a través de la periferia del objetivo.

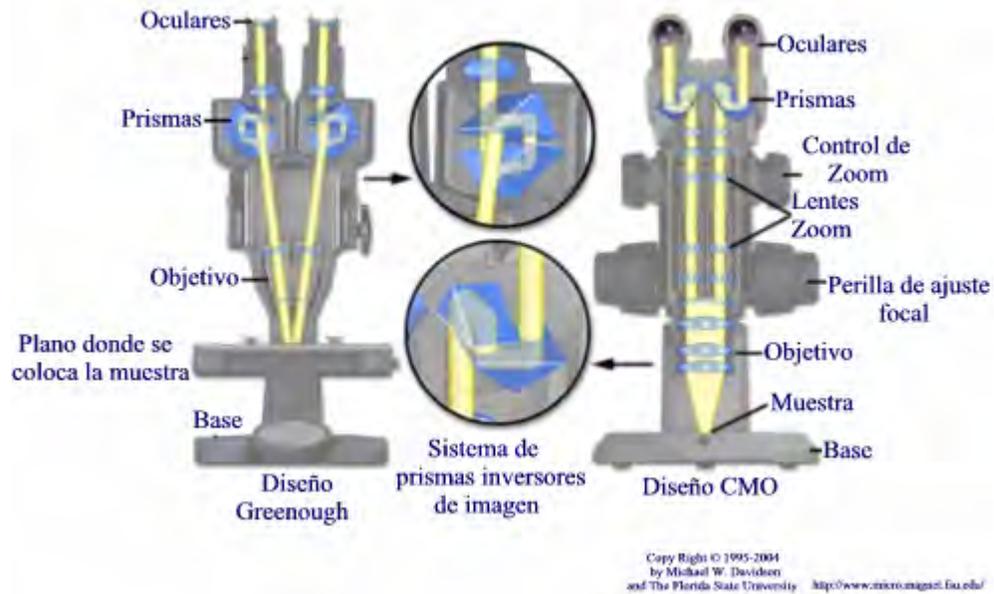


Figura C.8. Comparación entre los sistemas Greenough y CMO de un microscopio estéreo.

En este tipo de microscopios estereo con sistema Greenough, se observa una distorsión debido a la separación oblicua de cada tubo de un eje en común y a este efecto se le conoce como efecto Keystone. Este efecto provoca que el área del lado izquierdo del ojo derecho, aparezca ligeramente mas pequeño que el del lado derecho de la misma imagen, y viceversa (figura C.9). La distorsión de Keystone se incrementa debido a que las imágenes intermedias producidas por cada tubo están inclinadas con respecto al plano donde se encuentra la muestra, y con una ligera inclinación entre ellos, por lo que solo las regiones centrales pueden ser simultáneamente enfocadas con idénticas amplificaciones. El resultado es que las porciones periféricas del campo de visión se enfocan ligeramente por encima o por debajo del plano de la muestra y, por tanto, se presentan pequeñas diferencias en cuanto a su amplificación, aunque los ojos normalmente compensan este efecto y comúnmente no es percibido por el observador. Durante largos intervalos de observación, la fatiga y el estrés del ojo pueden acelerarse debido al efecto Keystone.

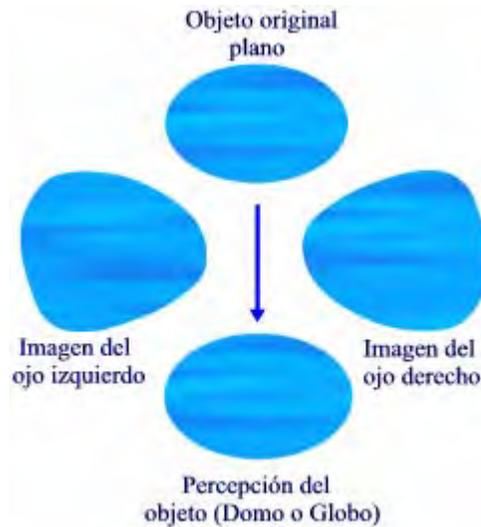


Figura C.9. Distorsión de perspectiva y Keystone

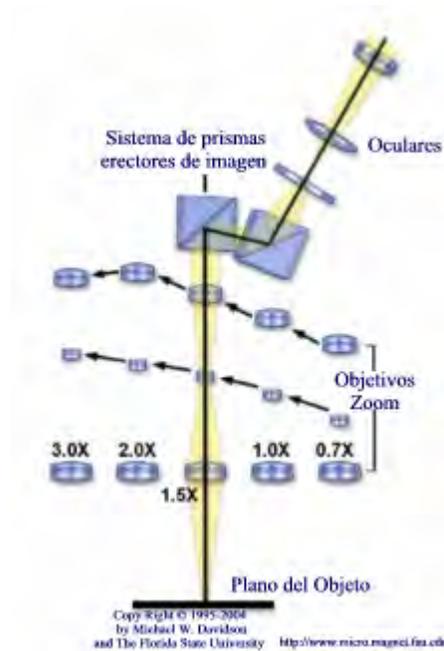
El diseño de los microscopios estereo basados en un solo objetivo principal (CMO por sus siglas en inglés), calculan su centro en la acción refractiva de una lente objetiva de un diámetro relativamente grande, a través del cual tanto el canal derecho como el izquierdo, ven al objeto. Cada canal opera como un tren de componentes ópticas independientes pero paralelos entre ellos, por lo que también es conocido como microscopio paralelo (figura C.8), y la luz esta colimada entre los canales individuales y el objetivo, o sea, la imagen es proyectada al infinito. Este sistema garantiza que la convergencia de los ejes ópticos izquierdo y derecho, coincida con el punto focal en el plano de la muestra. Como el arreglo de estos ejes paralelos se extiende a los oculares, la imagen proveniente de la izquierda y de la derecha se observan sin ninguna o con una ligera convergencia. Una de las principales ventajas de este diseño, es que el eje óptico del objetivo es normal al plano de la muestra y no existen inclinaciones inherentes de la imagen en el plano focal de los oculares.

Al observar muestras a través de este tipo de microscopios estereos, las porciones centrales de la muestra aparecerán un poco elevadas, por lo que en una muestra plana, su contorno se observara convexo. La distorsión de perspectiva, conocida como efecto globular, es el resultado de la combinación del efecto Keystone y distorsiones debidas a las componentes ópticas, tal como se observa en la figura C.9. En general, las aberraciones cromáticas son

difíciles y caras de corregir, si se considera el gran tamaño y volumen del vidrio utilizada para construir el objetivo.

Es difícil de determinar cual de los dos diseños (CMO o Greenough) es superior, debido a que no existe un criterio universal aceptado para comparar el diseño entre los sistemas estéreo microscópicos. Los sistemas CMO, en general, cuentan con una mayor potencia de iluminación, debido a la abertura del objetivo, con respecto a los sistemas Greenough además de una mayor corrección de las aberraciones ópticas. La elección entre microscopio estereo basado en un sistema Greenough o un CMO, dependerá de la aplicación. Los microscopios basados en el sistema Greenough son empleados para trabajos duros como lo es la soldadura de micro componentes, disecciones biológicas y trabajos similares. Los microscopios basados en el sistema CMO, se utilizan para aplicaciones mas complejas que requieran de alta resolución con avanzados sistemas de iluminación. En general el costo de un sistema CMO es mucho mayor que un sistema Greenough.

La amplificación lograda en un microscopio estereo, es el producto de la amplificación del objetivo y del ocular mas las contribuciones de las lentes auxiliares tanto internas como externas. El sistema que revolucionó la forma de amplificar las muestras, fue el zoom. En algunos libros se denomina a los sistemas zoom como sistemas pancráticos, cuya palabra proviene del griego *pan* que significa cada y *kratos* que significa potencia. La razón del zoom varía entre 4:1 y 15:1, dependiendo del modelo y año de fabricación del microscopio. El sistema zoom (figura C.10), proporciona una rango de amplificación variables y puede ajustarse girando un botón localizado en la periferia del microscopio o integrado a el. El sistema esta diseñado para permitir rápidas y continuos cambios en la amplificación, manteniendo el enfoque del microscopio. Sistemas de lentes zoom modernas empleados en microscopios estereo, proporcionan un rango de amplificación desde 7X hasta 30X e inclusive, algunos sistemas empleados en investigación logran amplificaciones cercanas a 500X. Este amplio rango es complementado por una profundidad de campo y distancias de trabajo que son mucho mayores que las encontradas en microscopios compuestos con equivalentes amplificaciones. La distancia de trabajo varia entre 20 a 140mm. Lentes auxiliares pueden utilizarse para ampliar dicha distancia así como la profundidad de campo.



FiguraC3.10. Configuración del sistema zoom en un microscopio estereo.

Los oculares generalmente están equipados con un ajustador dióptrico para permitir enfocar simultáneamente tanto la muestra como las retículas de medición, y los tubos binoculares son móviles y permiten variar la distancia interpupilar en un rango de 55 a 75mm.

El campo de vista (FOV por sus siglas en inglés), el cual se refiere al área que es visible y se encuentra en foco cuando se observan muestras en un microscopio, se determina por la amplificación del objetivo y el tamaño del diafragma colocada en el campo del ocular. Cuando la amplificación se incrementa en un microscopio normal o un microscopio estereo, el tamaño del campo de vista se decrementa si el diámetro del diafragma del ocular se mantiene constante. Inversamente, cuando la amplificación disminuye, el campo de vista aumenta. Cambiando el tamaño de la apertura del diafragma del ocular, se podrá incrementar el campo de vista manteniendo la amplificación, o bien decrementar el campo de vista. El tamaño de campo típico con un ocular de 10X y un objetivo de baja potencia (0.5X), es alrededor de 65 a 80mm (dependiendo del factor del zoom) y requiere de un alto grado de iluminación.

Al igual que en el microscopio compuesto, la resolución del sistema esta dado por la ecuación C.5. La amplificación, distancia de trabajo, código de colores para la amplificación del objetivo y apertura numérica de microscopios estéreo típicos se muestra en la tabla C.1.

Amplificación Del Objetivo	Código de color	Apertura numérica	Distancia de Trabajo (mm)
ED Plan 0.5x	Rojo	0.045	155
ED Plan 0.75x	Amarillo	0.68	117
ED Plan 1x	Blanco	0.09	84
ED Plan 1.5x	Verde	0.14	50.5
ED Plan 2x	Azul	0.18	40
Plan Apo 0.5x	-	0.066	136
Plan Apo 1x	-	0.13	54
Plan Apo 1.6x	-	0.21	24

Tabla C.1. Relación entre amplificación, código de color, apertura numérica y distancia de trabajo de un objetivo.

Las lentes que se utilizan en fotografía, sen clasificadas en un sistema que se basa en el f# (f número), con respecto a su apertura numérica, tal como se muestra en la tabla C.2. De hecho estos dos valores parecen diferentes, pero expresan actualmente la misma cantidad: la habilidad de capturar la luz por parte de una placa fotográfica o un objetivo de microscopio. Los f números pueden ser fácilmente convertidos en aperturas numéricas, y viceversa, como

$$f\text{número}(f) = \frac{1}{2 \cdot NA} \quad C.6$$

$$NA = \frac{1}{2 \cdot f\#}$$

La apertura numérica en un microscopio (NA), es igual al índice de refracción del medio formador de la imagen multiplicado por la apertura angular del objetivo. El f-número es calculado dividiendo la distancia focal del sistema de lentes por el diámetro de apertura. El diámetro de apertura en un objetivo de un microscopio estereo es similar a la de un microscopio compuesto. Como la amplificación del microscopio se incrementa o decrementa cambiando el factor de zoom, la distancia focal también se altera. A grandes

amplificaciones, la razón del diámetro de apertura a la distancia focal se incrementa, y ocurre lo contrario cuando la amplificación decrece.

Apertura numérica	f-número
0.023	21.7
0.029	17.2
0.052	9.6
0.085	5.9
0.104	4.8
0.118	4.2
0.128	3.9
0.131	3.8

Tabla C.2. Relación entre la apertura numérica y el f-número.

La profundidad de campo es un concepto fundamental en la estereo microscopia, y esta influenciada por la amplificación total que proporciona el instrumento, incluyendo la contribución del objetivo y las lentes auxiliares. Con una amplificación de 50X, usando un objetivo de 1X (apertura numérica de 0.10), un ocular de 10X y un factor de zoom de 5, la profundidad de campo mostrada por un microscopio estereo típico es de aproximadamente 55 micrómetros. Si una lente auxiliar de 2X se adiciona al microscopio cuando esta configurado para trabajas a 50X, la nueva amplificación será de 100X, pero la profundidad de campo caerá a 14 micrómetros. En esta situación, es conveniente cambiar la amplificación del ocular de 10X a 20X para lograr la amplificación obtenida con la lente auxiliar y mantener el valor de la profundidad de campo (ver tabla C.3).

Objetivo	Factor de Zoom	Apertura Numérica	Profundidad de campo (Micrometros)			
			10x	15x	20x	30x
HR Plan Apo 1x	0.75	0.023	1,348	1,072	934	796
	1	0.029	820	655	573	491
	2	0.052	239	193	170	147
	4	0.085	80	66	59	52
	6	0.104	48	41	37	33
	8	0.118	35	30	27	25
	10	0.128	28	24	22	21
	11.25	0.131	26	21	21	19

Tabla C.3. Profundidad de campo en objetivos de microscopios estereo.

Cerrando el diafragma del iris producirá una disminución de la intensidad luminosa del sistema, incrementando el tiempo de exposición para sistemas de cámara digitales. En la mayoría de los casos, una elección óptima de la apertura del diafragma se determina por experimentación. Si el diafragma se cierra lentamente, la imagen comienza a mostrarse con mayor contraste así como la intensidad de la iluminación cae. Al mismo tiempo, dependiendo de la configuración óptica del microscopio, la imagen comenzará a degradarse y los detalles de la muestra mostrarán el fenómeno de la difracción y los pequeños detalles se desvanecerán. La elección mas adecuada es un balance entre la observación de la mayoría de los detalles de la muestra con máximo contraste visto en los oculares o en las imágenes digitales.

C.3 ¿Qué es un CCD?

Un CCD (Charge-coupled devices, por sus siglas en inglés) es un arreglo semiconductor en donde la carga (excitación fotoeléctrica) es leída fuera del área de almacenaje. Es decir, se transportan pulsos almacenados en el material semiconductor. La arquitectura CCD cumple con tres funciones básicas:

- Recolección de carga.
- Transferencia de carga.
- Conversión de la carga el voltaje medible.
- Detectar paquetes individuales de carga que son convertidos a un voltaje de salida y codificados digitalmente.

El dispositivo con cargas acopladas CCD tiene un funcionamiento similar al ojo facetado de un insecto, donde millares de sensores individuales perciben los puntos de luz que son procesados por el "cerebro" del insecto formando así una imagen completa. En una pastilla de apenas 2.64mm x 2.64mm de área de sensado, tenemos 347,904 sensores que captan cada punto de una imagen, resultando así una resolución excelente en la reproducción.

En nuestro caso el "cerebro" es el computador el cuál recibirá en forma digital los puntos de luz captados por millares de sensores formando así una imagen completa. En realidad el computador no ve imágenes sino que a cada intensidad corresponde un valor numérico definido, facilitando de esta manera un tratamiento matemático de la imagen.

Como un CCD no es otra cosa mas que un detector cuántico de luz⁷, es deseable que cumpla con las características mínimas de relación señal-ruido entre otras, que nos permita tener una apropiada caracterización del mismo así como una respuesta rápida y eficaz.

Algunas características de un detector Ideal son:

- 100% de eficiencia cuántica (QE)
- Respuesta Uniforme Perfecta
- Sin generación de ruido
- Rango Dinámico Amplio
- Características estándares completas

Algunas características que cumplen de manera general los CCDs:

- Alta Eficiencia Cuántica (QE)
- Alta linealidad
- Amplio rango dinámico
- Respuesta uniforme a grandes distancias de sensado
- Baja relación de señal-ruido
- Es un elemento digital

Algunas limitaciones de los CCDs:

- Área de cobertura pobre
- Respuesta pobre al azul
- Problemas de transferencia de carga con bajos niveles de luz

- Capacidad actual del detector de hasta 2048x2048

Por otro lado, actualmente los CCDs se han acercado mucho a cumplir las características de un detector ideal, por lo cual sus aplicaciones son varias y son utilizados en diversos campos de la física actual. Algunas de las aplicaciones generales de estos detectores son:

- Sistemas de formación de imágenes en general.
- Visión robótica
- Aplicaciones científicas
- Aplicaciones militares

De manera general, se puede decir que el CCD:

- Fue inventado por Boyle y Smith, de los laboratorios Bell, en Abril de 1970.
- Requieren de un sistema óptico para mandar la imagen dentro del arreglo del área fotosensitiva.
- Uso más común: en cámaras de video estándar (conocidas como cámaras de estado sólido)

Otros tipos de detectores que función bajo el mismo principio:

- CID (Charge Injection Devices)
- CMOS (Complementary metal-oxide-semiconductors)

La arquitectura CCD cumple con cuatro funciones básicas:

- Recolección de carga;
- Transferencia de carga;
- Conversión de la carga el voltaje medible;
- Detectar paquetes individuales de carga que son convertidos a un voltaje de salida y codificados digitalmente.

El bloque básico detector que forma a un CCD es el MIS (metal-insulator-semiconductor capacitor), llamado gate (compuerta) (figura C.11). El MIS mas importante es el MOS (metal-oxide-semiconductor), ya que el óxido de silicón es un aislante. En un MIS (Metal Insulator Capacitor), al aplicar un voltaje positivo significa que la mayoría de los carriers (agujeros) son repelidos a la región debajo de la capa de oxido provocando con ello que se forme un potencial para los electrones. Un CCD es un arreglo de capacitores MIS separados por zonas o regiones de paro (barreras potenciales).

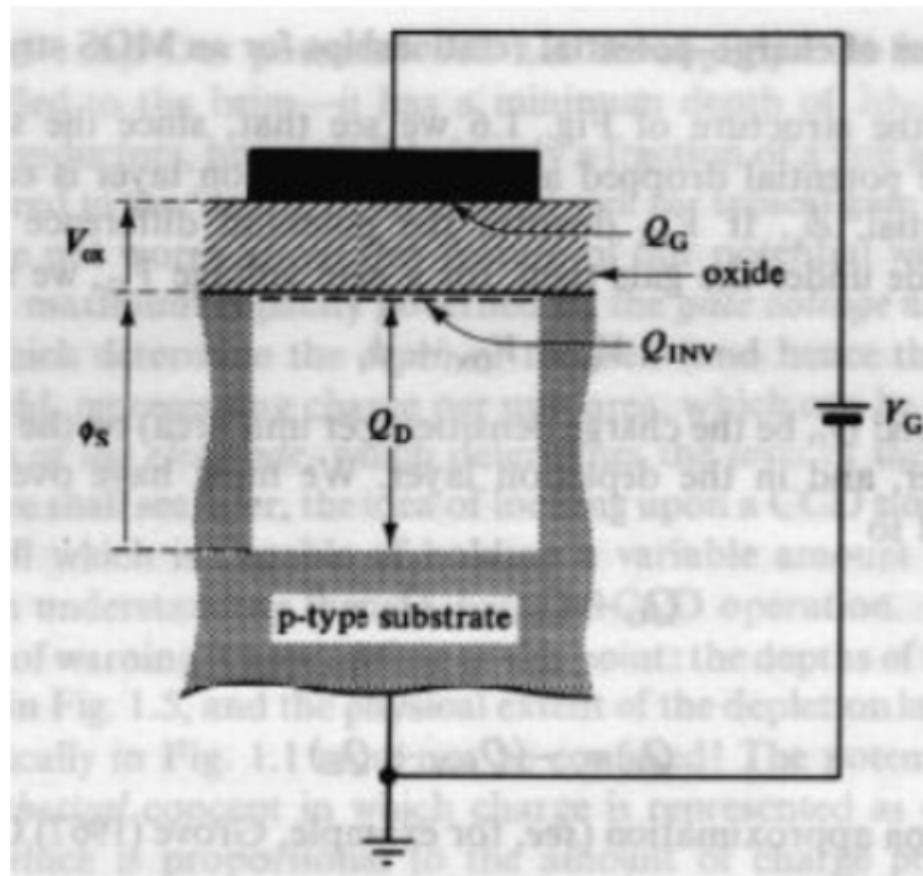


Figura C.11. Esquema de un MIS.

Los dispositivos de acoplamiento de carga pueden ser construidos como grandes arreglos lineales o bidimensionales. Estos últimos son a menudo usados en pequeñas cámaras de video. Estos dispositivos consisten de una gran cantidad de electrodos (o compuertas) en un substrato semiconductor.

Entre los electrodos y el sustrato se deposita una delgada película dieléctrica. La operación de un CCD se muestra en la figura C.12. El sustrato se dopa para obtener una corriente eléctrica debida a portadores positivos (denominados huecos). Al aplicar un voltaje positivo a cada tercer electrodo (V1), los portadores mayoritarios son repelidos de la región inferior (ver figura C.12a) y se crean "pozos". Cuando la luz incide sobre los dispositivos, portadores de carga adicionales son generados (como con fotodiodos). Los portadores positivos son repelidos y los portadores negativos atraídos hacia la compuerta, llenando los pozos (ver figura C.12b). Después de un tiempo los portadores de carga se acumulan, y el arreglo puede ser leído mediante el corrimiento de los portadores de un pozo hacia el siguiente. En la práctica, el potencial eléctrico de las compuertas (V2) situado al lado de las ya polarizadas se incrementa, de manera que la carga es repartida entre los pozos situados bajo dos compuertas (ver figura C.12c). Luego el primer potencial (V1) es apagado y toda la carga es transferida al pozo adyacente y así sucesivamente (ver figura C.12d). En estos dispositivos, el número de portadores existentes es proporcional a la cantidad de luz que llenó cada pozo. El diagrama completo de un CCD se presenta en la figura C.13.

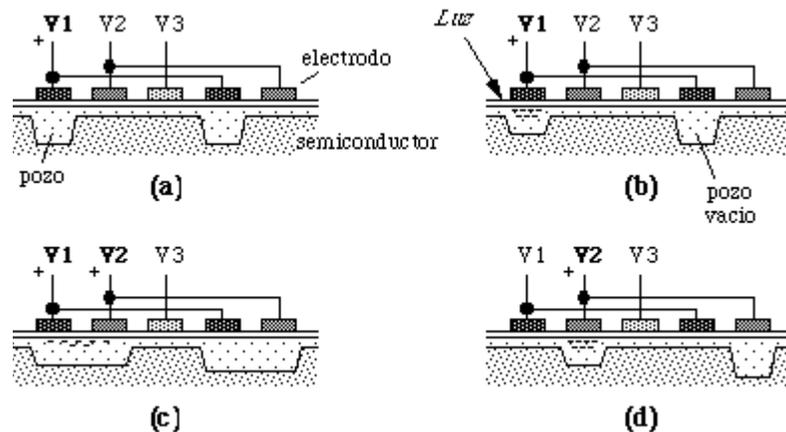


Figura C.12. Operación básica de un CCD.

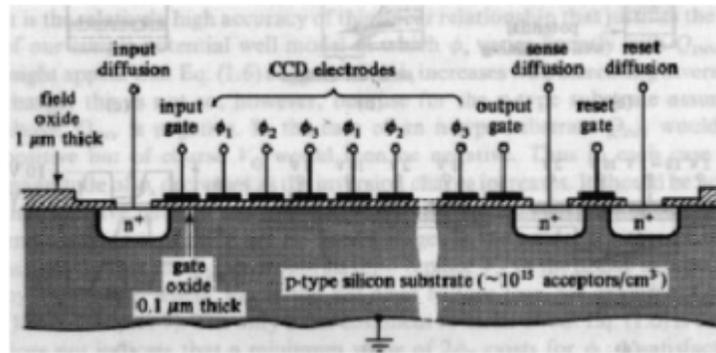


Figura C.13. Diagrama completo de un sistema CCD.

Una forma alternativa de conceptualizar el CCD, es que se utiliza como una línea de retardo para señales analógicas y como un registro de desplazamiento para señales digitales. Básicamente el CCD es un MOSFET construido con muchas puertas.

En pocas palabras, podemos decir que el bloque básico de un CCD es un capacitor o gate MOS (metal-oxide-semiconductor). Manipulando los voltajes de compuerta (gate), la carga puede almacenarse o transferirse. La mayoría de los detectores que operan en la región del visible usan una arquitectura tipo CCD para leer la señal. La función principal de dichos sensores es la generación de carga como en el caso de las cámaras de estado sólido con lectura de CCD). Los CCD's y otros detectores pueden integrarse en arreglos monolíticamente o como híbridos. Los arreglos monolíticos combinan las estructuras de los detectores y los CCD's en un solo chip. Los arreglos híbridos evitan algunas imperfecciones asociadas con el crecimiento de diferentes materiales en un solo chip.

En el caso de los CID (Charge Injection Devices), los píxeles consisten en dos capacitores MOS cuyas compuertas están conectadas independientemente a renglones y columnas. Usualmente la columna de los capacitores se usa para integrar la carga, mientras que los renglones de los capacitores sensan la carga después de la integración.

Con la arquitectura de los CID's, cada píxel es direccionable, o sea, tenemos un arreglo matricial direccionable. La salida del CID va acompañada por la transferencia de la carga integrada de la columna de los capacitores hacia los renglones de los capacitores. Posteriormente, después de leer esta señal no destructiva, la carga regresa a las columnas

para una mayor integración o bien es inyectada (o descartada) dentro del sustrato de silicón. Suspendingo la inyección de carga, el usuario inicial “la múltiple integración de arreglos o frames”, o sea, un lapso de exposición, y puede verse la imagen sobre una pantalla con una exposición óptima. La integración puede tomar de unos pocos milisegundos hasta varias horas. Con capacitores individuales en cada sensor o píxel, el blooming o exceso de carga no es transportada por lo que la sobrecarga no puede propagarse.

Actualmente, con la aparición de los píxeles activos se ha dado un giro a este tipo de detectores. Dichos píxeles activos son fabricados con tecnología CMOS (complementary-meta-oxide-semiconductor). La ventaja de estos, es que uno o más transistores activos pueden ser integrados a cada píxel. Además son totalmente direccionables (pueden leerse solo los píxeles seleccionados) y pueden mejorar el procesamiento de la imagen en el chip.

¿Qué aplicaciones tiene un CCD?

Principalmente son cuatro, mencionadas anteriormente: Sistemas de formación de imágenes en general, visión robóticas y de máquinas, aplicaciones científicas y aplicaciones militares.

Dentro de la terminología usada en cualquier detector, se encuentran frases tales como:

- Low noise
- High frame rate
- Reduces aliasing
- High sensitivity.

Dichos términos no tienen algún significado específico si no se especifica con respecto a que o a que valores se referencia o comparan. Por ejemplo una cámara A tiene menos low noise con respecto a la cámara B.

El uso mas extenso de un CCD es el detectar imágenes. Cuando hablamos de detección de imágenes, siempre se busca obtener una calidad mínima en la reproducción de dicha imagen que se detecta. El término calidad de imagen es considerado como una impresión subjetiva, calificadores de la imagen entre pobre a excelente. Influye la habilidad perceptiva de la misma. Las expresiones y formulas que intentan describir de que tanta calidad es una imagen, son obtenidas mediante datos empíricos donde los observadores califican a la imagen de peor a mejor y de ahí se deriva una ecuación relacionada con el rango o escala en la cantidad de degradación de la misma. En esta calificación de la imagen entra la relación que puede tener con respecto a los lentes del objetivo usado dentro del sistema y a las funciones moduladoras de transferencia (MTF.- Modulation Transfer Functions) y a la relación señal-ruido (SNR). En el supuesto de las cámaras comerciales, se asume que la cámara de estudio o generadora provee una imagen perfecta y solo el receptor afecta la calidad de la imagen.

La MTF es el factor principal de análisis en un sistema. Describe como los patrones sinusoidales se propagan a través del sistema. Debido a que cualquier objetivo puede descomponerse en series de Fourier, la MTF, aproximadamente, indica como aparecerá la imagen en la pantalla. Para un consumidor, la resolución del sistema es importante por los que la relación señal-ruido (SNR), es secundario. En aplicaciones científicas adquiere igual importancia tanto la resolución como la MTF.

Píxeles, Dateles, Disceles y Resels

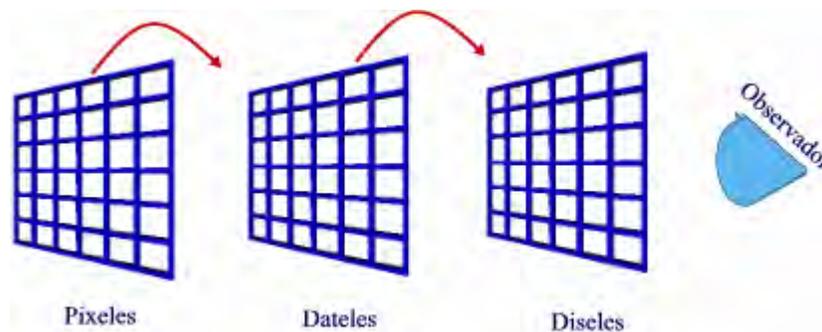


Figura C.14. Relación entre Píxeles, Dateles y Disceles. Cada arreglo es mapeado en otro. El número de elementos en cada arreglo puede ser diferente. No todos los arreglos están presentes en todos los sistemas.

Un píxel o pel (picture element), se define como el mínimo tamaño de muestreo o elemento primario. La figura C.14 muestra una relación entre los diferentes términos usados para definir a un elemento en un arreglo CCD y la tabla C.4 indica la relación entre ellos.

Elemento	Descripción
Píxel o pel (picture element)	Una muestra creada por un detector
Datel (data element)	Cada dato es un datel. Los dateles residen en la memoria de la computadora
Disel (display element)	El menor elemento (muestra) que el medio exhibidor puede acceder
Resel (resolution element)	La señal mas pequeña que puede soportar un sistema analógico

Tabla C.4. Terminología –ELS.

El término Resel es usado en sistemas analógicos y se refiere al tamaño mínimo posible a detectar. Este término es análogo al usado en sistemas ópticos cuando se relaciona la resolución entre franjas de interferencia de acuerdo al criterio de Rayleigh o bien al disco de Airy; o bien cuando en sistemas electrónicos nos referimos al ancho de banda mínimo.

En un CCD cada arreglo es mapeado en el siguiente. El número de elementos en cada arreglo puede ser diferente, es decir, varía de sistema a sistema. Por ejemplo, en un arreglo fijo, el número total de píxeles es igual al número de detectores.

La respuesta espacial del detector es determinada por el tamaño del detector (área fotosensitiva). Si la extensión de este es d_H (tamaño horizontal del detector) en la dirección horizontal, la longitud óptica focal es f_l entonces el ángulo detectado subtendido horizontalmente (DAS_H) es:

$$DAS_H = \frac{d_H}{f_l} \quad C.7$$

De manera similar, en la dirección vertical tenemos:

$$DAS_V = \frac{d_V}{f_l} \quad C.8$$

Los arreglos fijos o staring arrays, frecuentemente están especificados por el espaciamiento del detector de centro a centro (pitch). Entonces, el PAS_H (horizontal píxel-angular-subtense) es:

$$PAS_H = \frac{d_{CCH}}{f_l} \quad C.9$$

donde d_{CCH} es el pitch horizontal. En la dirección vertical, similarmente, tenemos:

$$PAS_V = \frac{d_{CCV}}{f_l} \quad C.10$$

El factor de llenado es la razón entre las áreas:

$$Fillfactor = \frac{d_H * d_V}{d_{CCH} * d_{CCV}} \quad C.11$$

En un staring array que tiene un 100% de factor de llenado, el PAS es igual al DAS, (por ejemplo, $d_H = d_{CCH}$ y $d_V = d_{CCV}$).

Si la resolución de un resel es mucho mayor que el PAS, entonces el resel óptico determina la resolución del sistema. Si el número de píxeles a través de este resel es grande, entonces el teorema de muestreo puede satisfacerse. Si la salida del sistema electrónico de la imagen esta en forma digital, entonces el número de datels (o muestras) es igual al número de píxeles. Si la salida analógica de la cámara es digitalizada, entonces el número de datels esta ligada a una imagen con un rango de digitalización conocido como frame grabber's digitization rate. Este número puede ser mucho más grande que el número de píxeles. Un número grande de píxeles no genera mayor resolución en términos de los λ -els. Sin embargo, a altas frecuencias de muestreo puede mejorar completamente el sistema en función de la MTF.

Referencias

1. [[http://www.micro.magnet.fsu.edu/History of the Microscope.htm](http://www.micro.magnet.fsu.edu/History%20of%20the%20Microscope.htm)]
2. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopedico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Tomo 14, pp. 259]
3. [E. Hecht, “Óptica”, Addison-Wesley, 3^a. Edición, 2000, pp 472]
4. [W. J. Smith, “Modern Optical Engineering”, McGraw-Hill, 1966, pp 140-141]
5. [“Salvat Universal, Diccionario Enciclopédico”, 16^a. Edición, Barcelona España, 1990, Vol. 8, pp. 214]
6. [Idem.]
7. [G. C. Holst, “CCD Arrays Cameras and Displays”, JCD Publishing]

Apéndice D

Trabajos derivados del proyecto de tesis.

Participación en congresos.

1. “Recuperación de contorno y relieve de objetos mediante proyección de autoimágenes”.
J. Mauricio Flores M., J. A. Rayas, Daniel D. Aguayo, R. Rodríguez-Vera, Amalia Martínez.
1er. Encuentro, “Participación de la mujer en la ciencia”.
León, Gto., mayo de 2004.
2. “Recuperación de contorno y relieve de objetos mediante proyección de autoimágenes”.
J. Mauricio Flores M., J. A. Rayas, Daniel D. Aguayo, R. Rodríguez-Vera, Amalia Martínez.
Taller de procesamiento digital de imágenes y óptica.
Guanajuato, Gto., junio de 2004.
3. “Microscopic shape and deformation measurement by a projected Talbot image”.
R. Rodríguez-Vera, J. M. Flores Moreno, Daniel D. Aguayo, J. A. Rayas, Amalia Martínez.
12th. Internacional conference on experimental mechanics.
Politecnico di Bari, Italy., August – September 2004.
4. “Tecnologías ópticas para el contorno de piezas”.
Amalia Martínez., J. A. Rayas, J. Mauricio Flores M., Daniel D. Aguayo, R. Rodríguez-Vera.
IV Simposio de la óptica en la industria.
Ensenada, B. C., septiembre 2004.
5. “Interferometría de moteado en la detección de deformaciones fuera de plano en una membrana metálica”.
Daniel D. Aguayo, J. A. Rayas, J. Mauricio Flores M., R. Rodríguez-Vera, Amalia Martínez.
1er. Encuentro, “Participación de la mujer en la ciencia”.
León, Gto., mayo de 2004.
6. “Interferometría de moteado en la detección de deformaciones fuera de plano en una membrana metálica”.
Daniel D. Aguayo, J. A. Rayas, J. Mauricio Flores M., R. Rodríguez-Vera, Amalia Martínez.
Taller de procesamiento digital de imágenes y óptica.
Guanajuato, Gto., junio de 2004.