



**CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.**

Dirección de Formación Académica

Programa de Maestría en Ciencias (Óptica)

**Reconstrucción de Frentes de Onda con Datos
Interferométricos Utilizando Polinomios de
Cuasi-Zernike**

Tesis como requisito para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta

Ing. Armando Gómez Vieyra

Asesor:

Dr. Daniel Malacara Hernández

León, Guanajuato, México.

Diciembre 2006

*Leer y entender es algo;
leer y sentir es mucho;
leer y pensar es cuanto puede desearse.*
Anónimo

*Qué cada paso sea una meta,
sin dejar de ser paso.*
Goethe

Resumen

La ingeniería óptica tiene como meta la conjunción del diseño, fabricación y pruebas ópticas, con el único fin de producir sistemas ópticos adecuados a cada necesidad. Estos requerimientos han llevado al desarrollo de sistemas computacionales que permiten interpretar los resultados proporcionados por las pruebas ópticas.

La información codificada en el interferograma contiene el frente de onda, representado matemáticamente como la suma de la esfera de referencia más la función de aberración. La forma más común de expresar la función de aberración es mediante el uso de polinomios de Zernike, que nos permiten mostrar en un solo conjunto de funciones las aberraciones de alto y bajo orden, además de sus propiedades matemáticas.

En este trabajo se describe el algoritmo y funcionamiento de los programas *Zernike.exe* y *Zernike2.exe*. Los que permiten obtener los polinomios de Zernike y ajustar datos interferométricos a un conjunto de polinomios de cuasi-Zernike ortogonales en el espacio discreto. El término cuasi-Zernike se le asigna al conjunto de funciones ortogonales formadas a partir de los polinomios de Zernike empleando el método de Gram-Schmidt. A partir del conjunto de polinomios de cuasi-Zernike se obtiene una combinación lineal de polinomios de Zernike que permitan reconstruir el frente de onda en evaluación.

Agradecimientos

Agradezco ampliamente al Dr. Daniel Malacara Hernández por ser un gran asesor, por su entusiasmo, aliento y soporte constante durante mi estancia en el Centro de Investigaciones en Óptica (CIO). A mis sinodales, a la Dra. Cristina Elizabeth Solano Sosa y al Dr. Ricardo Benjamín Flores Hernández, por sus recomendaciones y sugerencias al elaborar este trabajo.

Al CONACYT por la beca para realizar mis estudios de posgrado. Además quisiera agradecer a las autoridades y empleados del CIO con los que conviví durante mis estudios. En especial me gustaría agradecer al Lic. Guillermina Muñoz Palancares y al personal de la Biblioteca.

Tengo mucho que agradecer a todos los miembros de la comunidad docente del centro de los cuales he aprendido a valorar el esfuerzo personal y colectivo. Me gustaría agradecer muy en especial a Dr. Zacarías Malacara Hernández por tomarse el tiempo de apoyarme y resolver mis constantes dudas sobre el campo de la óptica.

Mi respeto y amistad a todos mis compañeros de posgrado con quienes he crecido como persona, he pasado momentos inolvidables que siempre permanecerán en mis recuerdos.

Finalmente no tengo palabras para agradecer a mis padres, abuelos y mi hermana por estar ahí siempre.

Contenido

1	Introducción.....	1
1.1	Sistema Óptico	
1.2	Formación de Imágenes	
1.3	Aberraciones	
1.4	Diseño Óptico	
1.5	Fabricación Óptica	
1.6	Las Pruebas Ópticas	
2	Aberraciones Ópticas.....	13
2.1	Esfera de Referencia	
2.2	Modelo de rayos	
2.3	Normalización de Coordenadas	
2.4	La Función de Aberración	
2.5	Forma de las Aberraciones Ópticas	
2.6	Representación de la Función de Aberración con Monomios de Taylor	
2.7	Representación de la Función de Aberración con Series de Fourier	
2.6	Los Polinomios de Zernike y su Uso en la Óptica	
3	Reconstrucción de Frentes de Onda y Análisis de Interferogramas.....	28
3.1	Reconstrucción de Frentes de Onda	
3.2	Análisis de Franjas Interferométricas	
3.3	Interpolación Local	
3.4	Interpolación Global	
3.5	El Criterio de Mínimos Cuadrados	
3.6	Las Fuentes de Errores en el Ajuste Polinómico	
3.7	Las Ventajas de Usar los Polinomios Ortogonales	
3.8	La Mejor Referencia y Referencia Relativa	
3.9	Reconstrucción de Frentes de Onda con Análisis de Fourier	
3.10	Reconstrucción de Frentes de Onda con Redes Neuronales Artificiales	
4	Descripción del Programa para la Reconstrucción de Frentes de Onda a Partir de Datos Interferométricos.....	40
4.1	Programa para la Representación de los Polinomios de Zernike	
4.2	Programa para la Representación de Monomios de Zernike y Graficación	
4.3	Programa de Reconstrucción del Frente de Onda con Polinomios de Cuasi-Zernike	
	Conclusiones.....	49
	Anexo.....	50
A.1	Programa de la Esqueletización de un Interferograma	
A.2	Polinomios de Zernike	
A.3	Reconstrucción de algunos frentes de onda	
	Referencias	57

Figuras

- 1.1 Representación esquemática de un sistema óptico.
- 1.2 Interferómetro de Fizeau empleado para prueba de planos ópticos.
- 1.3 Arreglos empleados en la prueba de superficies cóncavas y convexas.
- 1.4 Interferómetro de Twyman-Green.
- 1.5 Imágenes de un frente de onda bajo prueba de un interferómetro de desplazamiento.
- 1.6 Interferómetro de punto de difracción.
- 2.1 Coordenadas del campo y pupilas normalizadas.
- 2.2 Aberración de rayo del frente de onda real.
- 3.1 Interferograma esqueletizado y con asignación del número de orden en las franjas.
- 4.1 Resultado entregado por el programa *deplegazernike.m*.
- 4.2 Interfase gráfica que presenta la gráfica del polinomio y su representación matemática.
- 4.3 Programa de reconstrucción del frente de onda a partir de datos interferométricos.
- A.1 Programa para el ajuste de intensidad y esqueletización del interferograma.
- A.2 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 1.
- A.3 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 2.
- A.4 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 3.
- A.5 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 4.
- A.6 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 5.
- A.7 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 6.
- A.8 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 7.
- A.9 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 8.
- A.10 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 9.
- A.11 Gráfica del polinomio de Zernike de grado 10.
- A.12 Primer ejemplo de reconstrucción de frente de onda.
- A.13 Segundo ejemplo de reconstrucción de frente de onda.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas ópticos son de gran importancia para el desarrollo de la sociedad. Como ejemplo tenemos los lentes oftálmicos que han evolucionado con el paso del tiempo, desde el tamaño y el peso así como la incorporación de películas antirreflejantes o lentes polarizados. Con el avance de la tecnología óptica se tienen necesidad de sistemas más eficientes de acuerdo a los requerimientos de operación. La ingeniería óptica tiene como meta la conjunción del diseño, fabricación y pruebas ópticas con el único fin de producir sistemas ópticos adecuados a cada necesidad. Estas necesidades han llevado al desarrollo de sistemas computacionales que permiten interpretar los resultados proporcionados por las pruebas ópticas. A continuación se presentan los conceptos básicos útiles para la comprensión de este trabajo.

El sentido de la visión es el medio de comunicación con el mundo exterior más importante que tenemos los seres humanos, lo que quizá pueda explicar por qué la óptica es una de las ramas más antiguas de la ciencia. La óptica es la rama de la física que estudia la emisión, el comportamiento, las propiedades y la interacción de la radiación electromagnética con la materia. Formalmente la descripción de los fenómenos ópticos está basada en la teoría electrodinámica cuántica. Debido a la interacción de la onda electromagnética y la materia, las áreas de la óptica pura y la ingeniería óptica tienden a ser multidisciplinarias.

La óptica es una parte de muchas disciplinas relacionadas que incluyen la ingeniería eléctrica, física, la medicina (particularmente la oftalmología y optometría), entre otras. Adicionalmente, la descripción más completa de los fenómenos ópticos, como lo describe la física teórica, es innecesaria y complicada. Debido a lo cual la mayoría de los casos particulares usan teorías simplificadas. Estas teorías limitadas describen adecuadamente de fenómenos ópticos, donde se ignoran conductas no relevantes (efectos cuánticos) y/o no detectables por el sistema óptico de interés.

1.1 SISTEMA ÓPTICO

Un sistema óptico es un conjunto de componentes (espejos, lentes, prismas, etc.) dispuestas de tal manera que modifican la trayectoria de la luz de un objeto respecto a su imagen. La Fig. 1.1 representa un sistema óptico como una caja negra donde ocurren una serie de interacciones representadas como una función de transferencia $G(x, y)$. Ésta función describe tanto las interacciones deseadas como las no deseadas. Al pasar la luz emitida por un objeto o fuente luminosa ($F(x, y)$) por el sistema óptico, se obtendrá una imagen de este ($H(x, y)$) como resultado de la interacción de la luz con el sistema óptico.

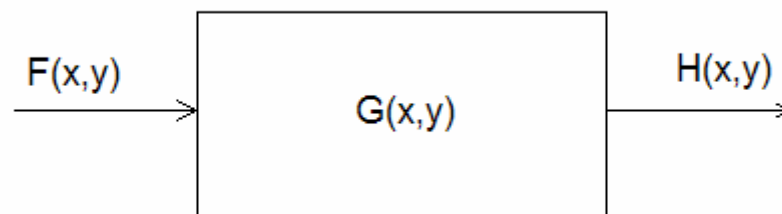


Figura 1.1 Representación esquemática de un sistema óptico

1.2 FORMACIÓN DE IMÁGENES

La formación de la imagen perfecta en un sistema óptico, ocurre cuando todos los rayos que se originan de un solo punto del objeto llegan a un solo punto en el plano imagen, equivalentemente, cuando el frente de onda geométrico en la pupila de salida tiene una forma esférica centrada en el punto imagen.

Lord Rayleigh proporcionó una prueba matemática donde un sistema óptico que produzca una imagen perfecta de un objeto, donde los caminos ópticos (CO) para cada uno de los rayos que conectan un punto del objeto a su correspondiente punto en la imagen (los puntos conjugados) deben ser iguales. Las únicas superficies que pueden satisfacer esta condición rigurosamente son el óvalo cartesiano y las secciones cónicas en pares conjugados. Esta situación nunca se satisface para un sistema óptico real con superficies ópticas esféricas, o para las secciones ovales y cónicas fuera de su par de puntos conjugados (el único elemento óptico que exhibe la imagen estigmática para todos los pares de puntos conjugados es el espejo plano, que tiene su distancia focal en el infinito). Esto nos lleva considerar las desviaciones de la imagen ideal (estigmática), llamadas aberraciones, además es necesario tomar en cuenta la difracción de la abertura de salida [Zernike, 1954].

1.3 ABERRACIONES

Las aberraciones son altamente dependientes de las curvaturas de la superficie de los componentes, de la localización de la abertura de salida y su diámetro, y de los ángulos de campo. De acuerdo con estos parámetros estas pueden clasificarse como:

1). Las aberraciones monocromáticas son aberraciones que se producen debido a las desviaciones geométricas de la teoría paraxial (Gausiana). La teoría de primer orden corresponde a la aproximación $\sin \theta \approx \theta$, donde se propone que la propagación de luz a través del sistema es ideal. Si extendemos la aproximación de primer orden al próximo término del polinomio de Taylor, podemos predecir las desviaciones del rayo respecto de la teoría del paraxial cuando $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$. Esta teoría de tercer orden describe las cinco primeras aberraciones o aberraciones de Seidel [Hopkins, 1950]: la aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo, y distorsión. Además se han desarrollado teorías

de quinto, séptimo y órdenes mayores, descritas por diversos textos[Born y Wolf, 1999; Malacara y Malacara, 1994].

2). Las aberraciones cromáticas son el resultado de la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda ($n \rightarrow n(\lambda)$). Esto causa que las propiedades de un sistema óptico, como la amplificación, distancia focal, y localización de todos los puntos principales, sean diferentes para cada color que compone la luz que atraviesa el sistema óptico.

3). Las aberraciones difractivas son debidas a desviaciones de la óptica geométrica debido a la por la naturaleza ondulatoria de la luz. Los efectos de difracción localizados representan el último límite de la mejor imagen posible de un sistema.

4). Las aberraciones también pueden ser el resultado de las limitaciones físicas de un sistema óptico (la calidad de la superficie, exactitud de la superficie, el tamaño limitado de la abertura, etc.).

En el proceso de diseño y fabricación debe tomarse en cuenta las aberraciones, que se encuentran presentes en todo sistema óptico real y son medidas mediante las diversas pruebas ópticas.

1.4 DISEÑO ÓPTICO

El diseño de sistemas ópticos es la ciencia/arte de calcular los parámetros necesarios para la construcción de las componentes ópticas individuales que forman el sistema óptico con las características requeridas. Se encontrarán o aproximarán los valores de curvatura, espesor, material, asfericidad, distancias entre componentes, entre otras, para obtener de las especificaciones requeridas en el sistema, incluyendo el costo, montaje y tiempos de manufactura.

Los parámetros de la construcción incluyen los tipos de la superficie (esférica, asférica, holográfica, difractiva, etc.), y parámetros diferentes para cada tipo de superficie, como el radio de curvatura, el espesor a la próxima superficie, tipo de material, la inclinación con respecto al eje óptico y/o centrado [Malacara y Malacara,2004; Fischer y Tadiac-Galeb, 2000; Smith,2000; Kingslake, 1978; Conrady, 1957,1960; Shannon, 1997].

Las características requeridas para su desempeño pueden incluir:

1. Características ópticas como el contraste de la imagen, cuantificación de la energía, la función de transferencia, la razón de Strehl, el control de reflexión fantasma, etc. y/o el papel de la pupila (el tamaño, la localización, el control de aberraciones)

2. Los requisitos físicos como el peso, volumen estático, volumen dinámico, el centro de gravedad, los requisitos globales de la configuración y,

3. Los requisitos ambientales (los rangos de temperatura, presión, vibración, protección electromagnética, etc.).

Las restricciones de diseño mecánico y óptico pueden incluir el centro del elemento óptico y espesor de la componente, espacios mínimos y/o máximos entre las lentes, índice de refracción de los elementos físicamente realizables y propiedades de dispersión, etc. [Shannon, 1997]. Después de tomar en cuenta lo anterior, se obtiene un diseño final, el cual deberá ser fabricado.

1.5 FABRICACIÓN OPTICA

El objetivo final de la ingeniería óptica es la fabricación de sistemas ópticos, para este fin existen ciertas restricciones como la calidad, el tamaño y las especificaciones. Estas características son proporcionadas por el diseñador al fabricante. Existen dos clases de métodos de fabricación óptica [Karrow, 1993; Parks, 1987; Scott, 1965; Ingalls, 1996; Fontane, 1991; Zschommler, 1984]:

- El método tradicional de fabricación basado en generado, esmerilado y pulido que nos conducen a un elemento óptico original.
- Técnicas de replicación que proporcionan copias idénticas a un molde pero con calidades menores.

Basado en los procesos de fabricación y sobre un conocimiento de los materiales y calidad requerida, se realiza una comparación de técnicas para ayudar a encontrar el método de fabricación más apropiado para cada tipo particular de componente óptica.

De esta forma se determinan los requisitos del usuario y la demanda de componentes ópticos producidos a tolerancias más severas y menores costos. Mientras la tecnología de fabricación y prueba de componentes ópticos han mejorado rápidamente, el desafío continúa siendo cómo integrar las mejoras tecnológicas en los procesos industriales.

1.6 LAS PRUEBAS ÓPTICAS

Tanto el control de la fabricación como la caracterización de un sistema óptico, dependen de las pruebas ópticas, y estas permiten evaluar las características del componente óptico. Dependiendo del sistema se emplea la técnica correspondiente, las pruebas ópticas en su mayoría son aplicaciones de la interferometría y en otros casos se emplea la teoría de difracción.

Una clasificación de las pruebas ópticas dependiendo del elemento a evaluar es:

Prueba de superficies planas

El interferómetro de Fizeau (Fig. 1.2) se emplea para comparar una superficie plana pulida con una superficie plana de referencia sin ponerlos en el contacto y sin arriesgarse a dañar las superficies. Las medidas son hechas en las franjas de igual espesor formadas por la luz colimada en el espacio que separa las dos superficies. Para determinar la planidad absoluta, es posible usar una superficie líquida como referencia [Bünnagel, 1956]; sin embargo, un método usando con más frecuencia consiste en probar un juego de tres superficies nominalmente planas en pares. Los errores de cada una de las tres superficies pueden evaluarse usando esta técnica sin usar una superficie plana de referencia [Schultz y Schwider, 1976; Fritz, 1984].

La homogeneidad

La homogeneidad de un material puede verificarse preparando una muestra plano-paralela y poniéndola en el camino de un interferómetro de prueba. Los efectos de imperfecciones de la superficie y de errores sistemáticos pueden minimizarse sumergiendo la muestra en un material con índice de refracción igual (por ejemplo el aceite) y haciendo las medidas con y sin la muestra que se analiza en el camino de prueba [Schwider, 1990].

Las superficies cóncavas y convexas

Los interferómetros de Fizeau y Twyman-Green pueden usarse para probar superficies cóncavas y convexas [Mantravadi,1992a; Malacara,1992a], se muestran configuraciones de la prueba típicas para las superficies ópticas esféricas en la Fig. 1.3.

Los prismas

La Fig. 1.4 muestra una configuración de la prueba para un prisma de 60° [Malacara, 1992a]. Con un prisma de Amici (roof) que tiene un ángulo de 90°, el haz es retro-reflejado través del sistema.

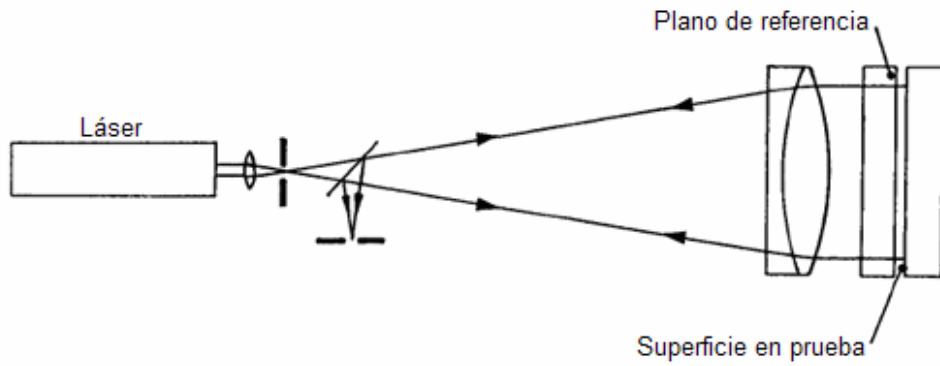


Figura 1.2 Interferómetro de Fizeau empleado para prueba de planos ópticos.

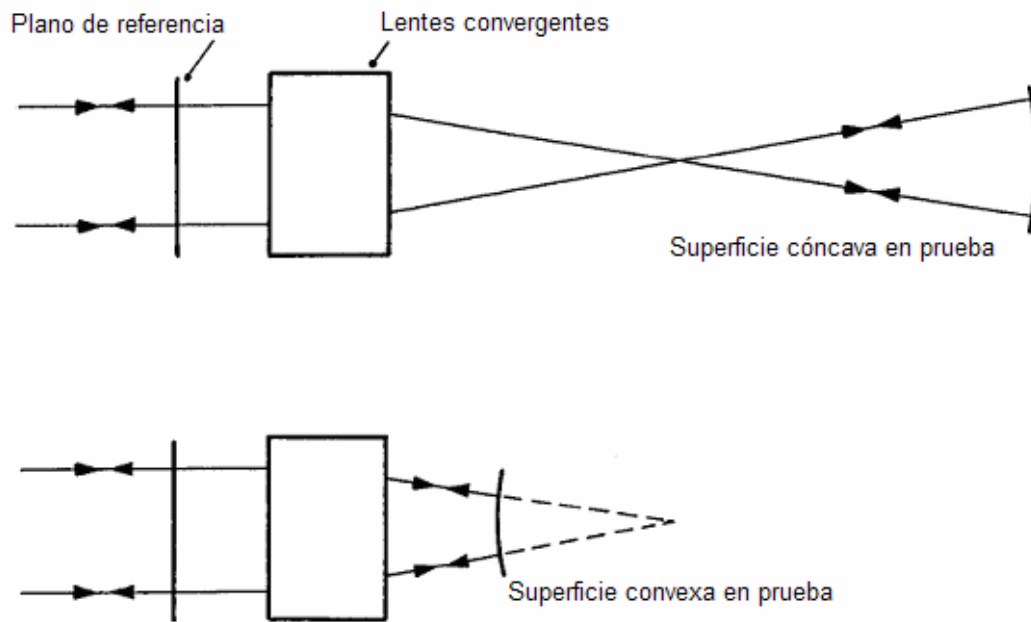


Figura 1.3 Arreglos empleados en la prueba de superficies cóncavas y convexas en el interferómetro de Fizeau y de Twyman-Green.

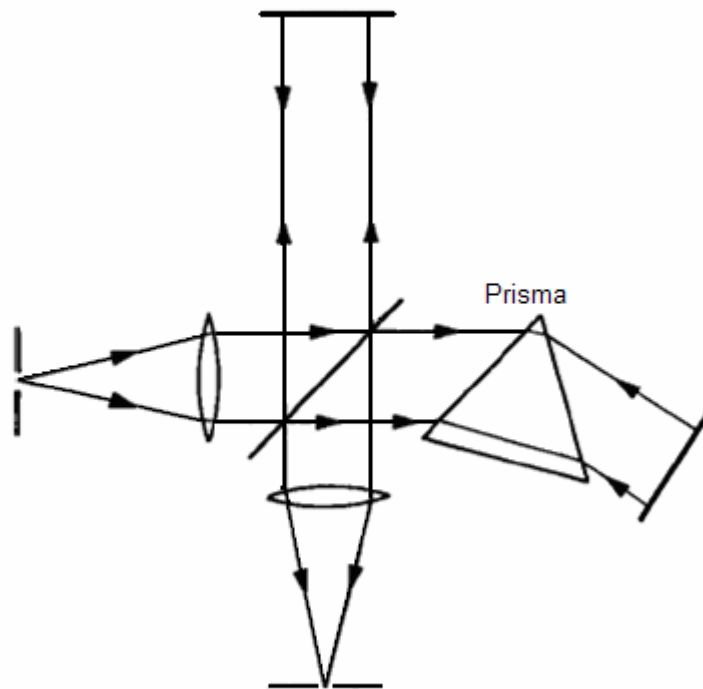


Figura 1.4 Interferómetro de Twyman-Green empleado en la prueba de prismas.

Superficies esféricas

Los problemas de las pruebas ópticas pueden aumentar probando una superficie esférica contra un frente de onda de referencia esférico porque las franjas en algunas partes del interferograma resultante pueden tener una alta densidad por unidad de área para ser resueltas (interpretadas). Una manera de resolver este problema es usar una lente nula [Offner y Malacara, 1992]; otro es usar un holograma generado por computadora con un frente de onda de referencia virtual para generar la forma esférica deseada [Loomis, 1980; Creath y Wyant, 1992]. Los interferómetros de desplazamiento son otra manera de reducir el número de franjas en el interferograma [Mantravadi, 1992b; Malacara, 1992b].

Además podemos clasificar las pruebas ópticas dependiendo el tipo de medición:

Los interferómetros de Twyman-Green y Fizeau

Los interferómetros de Fizeau (Fig. 1.2) y Twyman-Green (Fig. 1.3) son dos herramientas esenciales para la prueba de componentes ópticos. El interferómetro de Fizeau [Mantravadi, 1992a] es empleado para medir con gran eficiencia la planicidad de los planos ópticos, aunque puede ser adaptado para medir curvaturas. El interferómetro de

Twyman-Green [Malacara, 1992a] es una adaptación del interferómetro de Michelson, se usa para probar lentes, planos ópticos, espejos cóncavos y convexos, lentes, prismas, objetivos de microscopios, cristales ópticos y muchos otros elementos ópticos. Ambos han sido por años piedras angulares en el desarrollo de la tecnología óptica por su uso simple y fácil interpretación de sus resultados.

Los interferómetros de desplazamiento

Los interferómetros de desplazamiento, donde la interferencia se obtiene por dos imágenes del frente de onda en prueba, tiene la ventaja de que ellos eliminan la necesidad de una superficie de referencia de las mismas dimensiones de la superficie en prueba [Mantravadi, 1992b; Malacara, 1992b]. Con un desplazamiento lateral, como el mostrado en Fig. 1.5a, las dos imágenes sufren un desplazamiento lateral mutuo. Si el desplazamiento es pequeño, las aberraciones del frente de onda pueden obtenerse integrando los datos de la fase de dos interferogramas a lo largo de las direcciones ortogonales del desplazamiento. Con un desplazamiento radial, como mostrado en Fig. 1.5b, una de las imágenes es contraída o extendida con respecto al otro. Si el diámetro de una imagen es menos que 0.3 del otro, el interferograma obtenido es muy similar al obtenido con un interferómetro de Fizeau o Twyman-Green. Otras formas de desplazamiento, como rotacional, invirtiendo o plegando, también puede usarse para aplicaciones específicas.

Pruebas geométricas para mediciones de aberraciones transversales

El método de la navaja, mejor conocida como la prueba de Foucault, y en general todas las técnicas de Schlieren [Ojeda, 1992], la prueba Ronchi [Cornejo, 1992], de Hartman [Ghozeil, 1992], de Platzek- Gaviola, de Ritchey y otras, son empleadas ampliamente en las pruebas de superficies ópticas. El principio fundamental de este grupo es que los rayos son proyectados fuera del lugar esperado debido a las aberraciones ópticas del sistema, la difracción ó la deformación en el acabado de la superficie. La técnica esta basada en la detección del desplazamiento lateral de los rayos respecto del ideal. Estas pruebas tienen una gran sensibilidad y presentan una gran simplicidad, tanto en el montaje como en la interpretación. La elección de la prueba a emplear depende de las circunstancias. Estas pruebas presentan una alta sensibilidad para aberraciones grandes y son dinámicas.

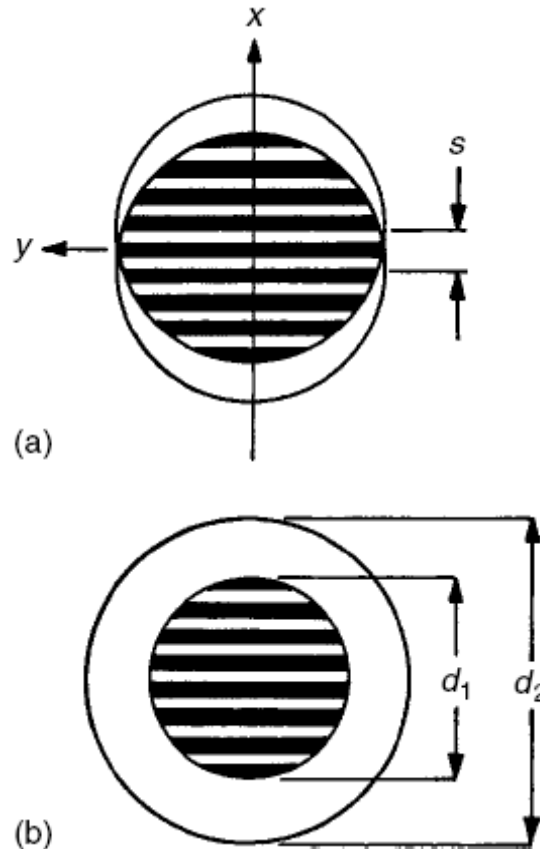


Figura 1.5 Imágenes de un frente de onda bajo prueba de un interferómetro de desplazamiento
(a)lateral y (b)radial.

El interferómetro de difracción de punto

Como muestra la Fig.6, el interferómetro de difracción de punto (llamado también prueba de Smartt [1975] o Zernike [Goleen, 1977]) consiste en un pequeño orificio (en Ingles “pinhole”) en una película parcialmente transmisora colocada en el foco del frente de onda en prueba. El patrón de interferencia formado por el frente de onda de prueba, que se transmite por la película y una onda esférica de referencia producida por la difracción del orificio corresponde a un mapa de contorno de las aberraciones de frente de onda. Ambos frentes de onda siguen trayectorias similares, haciendo este interferómetro compacto e insensible a las vibraciones.

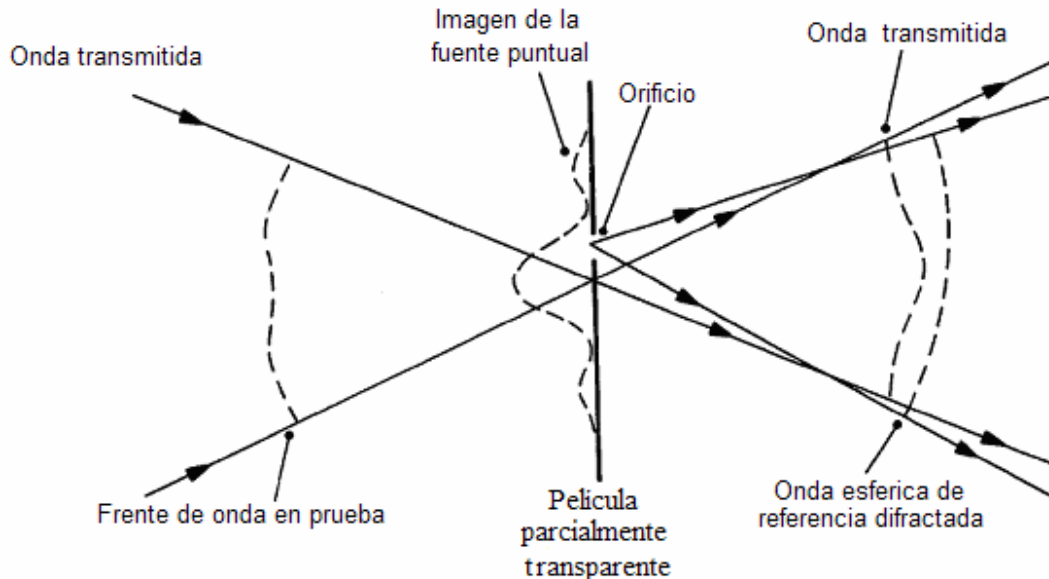


Figura 1.6 Interferómetro de punto de difracción

1.7 INTERPRETACIÓN DE INTERFEROGRAMAS

Los resultados de las pruebas ópticas son los interferogramas, que a simple vista no proporcionan información sobre el sistema. Debido a que las medidas con las pruebas son resultado de la comparación del frente de onda de referencia con el frente de onda en prueba. Pero mediante diversas técnicas matemáticas estudiadas desde principios de siglo y debido principalmente al desarrollo de herramientas computacionales, permiten obtener mucha información, como las aberraciones presentes en el sistema óptico. Existe una gran cantidad de documentación con la cual podemos obtener información sobre la interpretación y análisis de los fenómenos interferométricos [Malacara et al., 2005]. Con diversos desarrollos de algoritmos se ha logrado un alto grado de automatización del proceso de análisis de interferogramas.

Los polinomios de cuasi-Zernike son muy empleados para obtener valores de los coeficientes de aberraciones, para poder reconstruir el frente de onda y conocer algunas otras propiedades del sistema óptico analizado. En el presente del trabajo se describen los fundamentos necesarios para desarrollar un programa que permiten reconstruir el frente de onda a partir de datos interferométricos empleando polinomios de cuasi-Zernike, que son

un conjunto de polinomios ortogonales formados a partir de la combinación lineal de polinomios de Zernike.

Durante este capítulo se han definido los conceptos de óptica, sistema óptico, óptica de primer orden (óptica geométrica) y los tipos de aberraciones. Describiendo los procesos básicos de ingeniería óptica para la elaboración y caracterización de un sistema óptico. Introduciendo al lector en el campo de las pruebas ópticas y análisis de interferogramas (también conocido como análisis de franjas).

CAPÍTULO 2

ABERRACIONES ÓPTICAS

Un frente de la onda esférico que se propaga a través del sistema óptico, en general no se conserva absolutamente esférico a lo largo del sistema, es decir no forma una imagen estigmática. La diferencia entre el frente de onda real localizado en la pupila de salida de un sistema óptico puede compararse con una referencia esférica ideal y describirse por una función de aberración. Esta puede expresarse empleando de diferentes polinomios. La distribución de energía sobre la superficie de la imagen, para las aberraciones de longitudes de onda diferentes, puede describirse por las funciones de aberración de rayo. La forma más común de expresar la función de aberración es mediante el uso de polinomios de Zernike, que nos permiten mostrar en un solo conjunto de funciones las aberraciones de alto y bajo orden, además de sus propiedades matemáticas. Este capítulo presenta los conceptos esenciales de las aberraciones ópticas, mediante el estudio de las propiedades y aplicaciones de los polinomios de Zernike, los cuales permiten describir funciones de aberración.

2.1 ESFERA DE REFERENCIA

La esfera de referencia es un frente de onda idealizado matemáticamente, centrado en el plano imagen en el punto de intercepción del rayo principal, conteniendo además el punto donde el rayo principal cruza eje óptico sobre la pupila de salida. La distancia a lo largo del rayo principal, de la pupila de salida al plano imagen, define el radio de curvatura de la esfera de referencia. Si la forma del frente de onda real es igual a la esfera de referencia, el sistema óptico formará una imagen perfecta sobre cualquier punto de la imagen.

2.2 MODELO DE RAYOS (TRAZO DE RAYOS)

Los rayos son líneas imaginarias normales al frente de onda ideal e indican la dirección de propagación del frente de onda. La forma del frente de onda así como su propagación a través del sistema óptico, se calcula normalmente mediante el trazo de muchos rayos a diferentes alturas del objeto a la imagen, de esta manera se determina la distribución del frente de onda en la pupila de salida. Los rayos están relacionados con la derivada del frente de onda. Si se conoce la información acerca de las aberraciones de rayos, entonces mediante una integración puede determinarse la información acerca del frente de onda. Si conocemos la información del frente de onda, podemos deducir el comportamiento de los rayos a través de la diferenciación.

2.3 NORMALIZACIÓN DE COORDENADAS

El cálculo del frente de onda y las aberraciones de los diferentes rayos de un frente de onda que se propagan por un sistema óptico se simplifica cuando las coordenadas de los rayos en el objeto (o campo) y la pupila son normalizadas a un círculo unitario. Las cuatro coordenadas normalizadas son H_x , H_y , P_x y P_y .

H_x y H_y se refiere a los puntos en el campo objeto, utilizando el tamaño radial del campo de visión (o altura del objeto) para escalar el sistema de coordenadas normalizado. La coordenada ($H_x=0.0$ $H_y=1.0$) se asigna al rayo colocado en la parte superior del objeto (Fig. 2.1). Para cualquier punto objeto (x, y) :

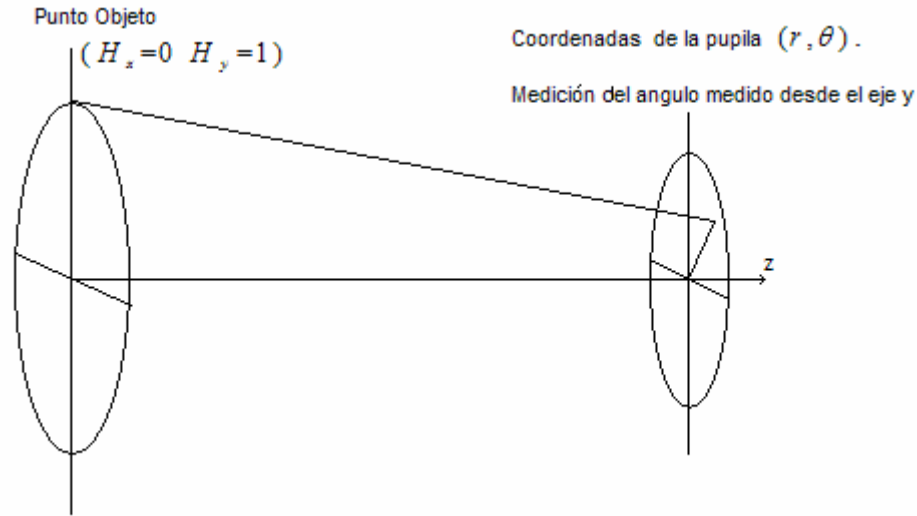


Figura 2.1. Coordenadas del campo y pupilas normalizadas

$$H_x = \frac{x}{OH} \text{ y } H_y = \frac{y}{OH} \quad (2.1)$$

OH es el tamaño radial del campo de visión. Similarmente la normalización de coordenadas del rayo en la pupila de entrada con radio S_{\max} (Fig.2.1) es:

$$P_x = r \sin \theta \text{ y } P_y = r \cos \theta \quad (2.2)$$

o

$$P_x = \frac{x}{S_{\max}} \text{ y } P_y = \frac{y}{S_{\max}} \quad (2.3)$$

La Fig. 2.1 muestra un rayo saliendo del objeto desde el punto ($H_x=0$ $H_y=1$) y entrando a la pupila con coordenadas (r, θ) . La ventaja de usar pupilas normalizadas radica en que los valores numéricos de los coeficientes tiene el mismo efecto para cualquier elemento del polinomio.

2.4 LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN

La desviación del frente de onda real, en la imagen, respecto a la esfera de referencia se describe matemáticamente por un conjunto de funciones matemáticas conocidas como aberraciones. La desviación Δ puede determinarse con ayuda de la Fig. 2.2. El radio de la esfera de referencia (R) es la distancia a lo largo de un rayo principal de

la pupila de salida a la superficie de la imagen. El rayo principal interceptado a la superficie de la imagen define la posición del punto de imagen ideal. Todos los rayos normales a la esfera de referencia deberán converger a este punto y formar una imagen geométrica ideal del punto objeto. El rayo es normal al frente de onda real (W) en algún punto en la pupila de salida. En general, un rayo arbitrario no será normal al mismo tiempo a la esfera de referencia y al frente de onda real. Es decir el punto de intersección del rayo arbitrario en la superficie de la imagen no estará en el punto de la imagen ideal. Δy indica la distancia del punto de intersección del rayo real respecto de la posición ideal en el plano $y-z$. La aberración es descrita por [Born y Wolf, 1997]:

$$\Delta y = \frac{R}{n} \frac{dW}{dy} \frac{\cos \theta}{\cos(\theta + \alpha)} \quad (2.4)$$

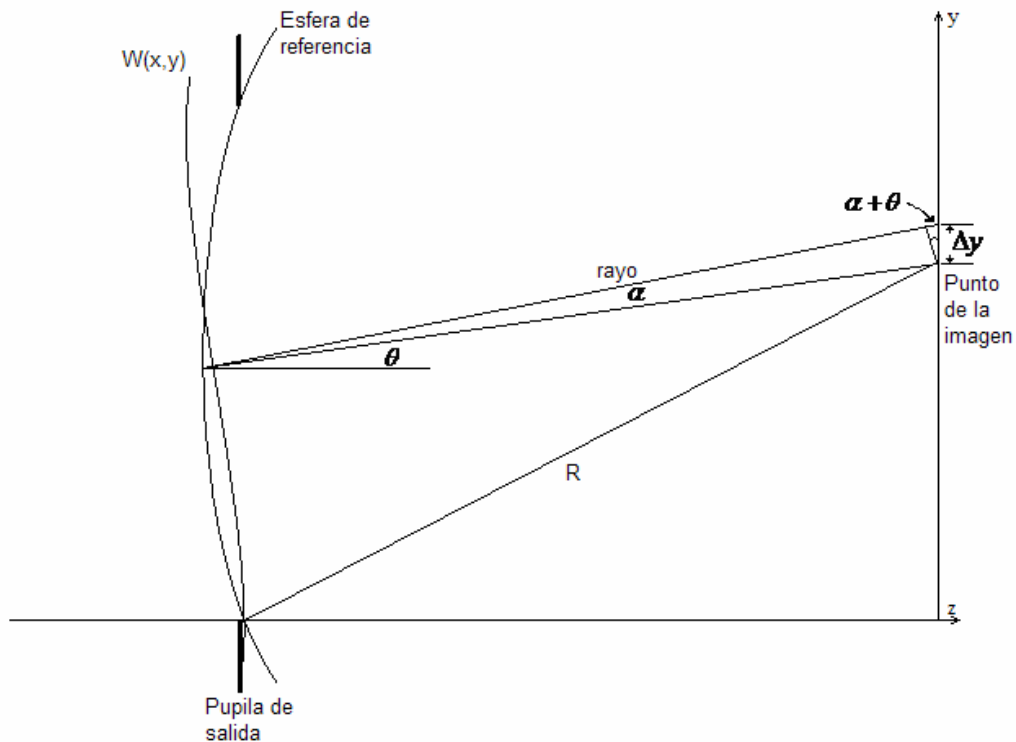


Figura 2.2. Aberración de rayo del frente de onda real

En el aire, el índice de refracción n puede aproximarse a 1(1.00029 en condiciones normales).

Una medida similar se realiza en el plano $x-z$. En las regiones donde las aberraciones son pequeñas, el ángulo α es pequeño, y $\cos\theta$ y $\cos(\theta+\alpha)$ son casi iguales y las aberraciones son aproximadamente:

$$\Delta y = -\frac{R}{n} \frac{dW}{dy} \quad \text{y} \quad \Delta x = -\frac{R}{n} \frac{dW}{dx} \quad (2.5)$$

Las Ecs. 2.5 muestran que hay dos componentes de las aberraciones y estas son cantidades vectoriales. Las aberraciones se definen completamente cuando consideramos las direcciones x y y , llamadas aberraciones transversales (Δ). De forma que

$$\Delta = -\frac{R}{n} \nabla \overline{W} \quad (2.6)$$

Las aberraciones longitudinales (Δl) describen la separación en el enfoque entre rayos diferentes, medidos a lo largo del eje óptico:

$$\Delta l \cong \frac{1}{nu^2} \nabla \overline{W}, \quad (2.7)$$

Donde u es el seno del ángulo del rayo marginal paraxial.

2.5 FORMA DE LAS ABERRACIONES ÓPTICAS

Una aberración óptica es una desviación del frente de onda con respecto a una esfera de referencia perfecta localizada entre la pupila de salida y la imagen en el plano. De la misma forma se define a la función del frente de onda aberrado como la diferencia del camino óptico entre la esfera de referencia y el frente de onda real. Esto se denomina la diferencia de camino óptico (DCO).

Para representar el frente de onda se emplean un conjunto de funciones de base completa. Tradicionalmente se han utilizado los polinomios de Zernike como funciones base para la representación del frente de onda debido a que permiten expresar debidamente todos los ordenes de las aberraciones, al balance que proporciona a cada termino de las aberraciones y sus propiedades de ortogonalidad [Born y Wolf, 1997; Mahajan, 2001].

Durante largo tiempo, se han usado los monomios de Taylor para representar las superficies bidimensionales debido a su simplicidad. Lo que permite utilizar eficientemente

los monomios de Taylor en la simulación del frente de onda cuando se requiere un gran número de términos.

Más recientemente, el éxito de la transformada de Fourier reiterativa [Rodier y Rodier, 1991] empleada en la reconstrucción del frente de onda, ha hecho atractivo el uso de las series de Fourier para representar el frente de onda. El mérito de usar la serie de Fourier es eficaz debido al algoritmo de la transformada rápida de Fourier. En las siguientes secciones, se discuten estos tres conjuntos de funciones y algunas de sus propiedades.

2.6 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON MONOMIOS DE TAYLOR

La aberración del frente de onda W es una función escalar del campo y del sistema coordinado de la pupila, H y P :

$$W = W\left(\left(\overline{H} \cdot \overline{H}\right), \left(\overline{P} \cdot \overline{P}\right), \left(\overline{H} \cdot \overline{P}\right)\right) \quad (2.8)$$

Este puede expresarse como conjunto de monomios de Taylor de la forma:

$$W(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(r, \theta) \quad (2.9)$$

Donde los monomios de Taylor en coordenadas polares son expresados como:

$$T_p^q(r, \theta) = r^p \cos^q \theta \sin^{p-q} \theta \quad (2.10)$$

Donde p es el orden radial (r) y q es la frecuencia azimutal(θ). El conjunto de monomios puede escribirse en coordenadas cartesianas como:

$$T_p^q(x, y) = x^q y^{p-q} \quad (2.11)$$

Los valores de q van de 0 a p para este caso particular. De manera que el frente de onda puede representarse, mediante un cambio de subíndices, en forma general como:

$$W(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i c_{ij} x^j y^{i-j} \quad (2.12)$$

Donde k es el grado del polinomio. O descrito en coordenadas polares sobre un círculo de radio unitario ($x/S_{\max} = r \sin \theta$ y $y/S_{\max} = r \cos \theta$) y S_{\max} es el radio sobre el círculo. De esta forma el frente de onda puede definirse como:

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n r^n (a_{nl} \cos^l \theta + b_{nl} \sin^l \theta) \quad (2.13)$$

En la Ec. 2.13 los términos cosenos y senos describen la parte simétrica y antisimétrica del frente de onda respectivamente.

2.7 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCION DE ABERRACION CON SERIES DE FOURIER

El frente de onda $W(r, \theta)$ puede expandirse en funciones sinusoidales. El uso de series de Fourier puede ser bastante eficiente para la reconstrucción del frente de onda mediante el uso de la transformada rápida de Fourier [Roddier y Roddier, 1991; Poyneer y Veran, 2005; Dai, 2006]. Debido a que las series de Fourier son ortogonales sobre un área rectangular, el frente de onda representado por estas funciones en esta subsección representa una abertura cuadrada que corta la abertura redonda definida por la función de la abertura. Sin embargo, debe tenerse presente que nosotros consideramos sólo el área redonda en los dominios, el espacial y frecuencial; no hay ninguna necesidad de distinguir entre el frente de onda cuadrado y redondo.

Denotaremos $\{F_i(r, \theta)\}$ como el conjunto de series de Fourier. Utilizando esta notación podemos expresar al frente de onda como:

$$W(r, \theta) = \sum_{i=0}^{N^2-1} a_i F_i(r, \theta) \quad (2.14)$$

Donde N^2 son las posiciones para el número de puntos discretos que definen la abertura cuadrada que cubre el frente de onda, y a_i es el i-esimo coeficiente (con valor complejo) de la función de Fourier $F_i(r, \theta)$, que puede escribirse en coordenadas polares como:

$$F_i(r, \theta) = \exp \left[j \frac{2\pi}{N} kr \cos(\theta - \phi) \right] \quad (2.15)$$

donde θ es el ángulo meridional del vector \bar{r} y ϕ es el ángulo meridional del vector \bar{k} . Cuando N se aproxima a infinito:

$$W(r, \theta) = \iint a(k, \phi) \exp(j2\pi \bar{k} \cdot \bar{r}) k dk d\phi \quad (2.16)$$

De las propiedades de la transformada de Fourier, la matriz de la expansión de coeficientes se puede escribir como:

$$a(k, \phi) = \iint W(r, \theta) \exp(-j2\pi \bar{k} \cdot \bar{r}) r dr d\theta. \quad (2.17)$$

Por consiguiente, la expansión del frente de onda representa una transformada inversa de los coeficientes de Fourier, mientras los coeficientes de Fourier representan la transformada de Fourier del frente de onda. El empleo de la serie de Fourier puede ser muy eficaz gracias al algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

2.8 LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y SU USO EN LA ÓPTICA

Los polinomios de Zernike son polinomios ortogonales bidimensionales sobre un disco unitario ($0 \leq \rho < 1$), con coordenadas polares (ρ, φ) en el plano Euclidiano. Los polinomios fueron introducidos por Zernike [1934] en su artículo clásico de contraste de la fase y la prueba de la navaja (Foucault). Como consecuencia, Zernike y Brinkman [1935] mostraron la relación entre los polinomios y los armónicos esféricos generales que ocurren en la solución del problema de potenciales de Laplace en los espacios multidimensionales.

Los polinomios de Zernike también jugaron un papel fundamental en la teoría de aberraciones de Nijboer [1943,1947]. En el curso de ese trabajo se desarrollaron diversas metodologías empleadas comúnmente en el campo de la difracción, y de hecho la tesis de Nijboer sigue siendo una referencia muy útil sobre teoría de difracción de aberraciones ópticas.

Zernike [1934] definió originalmente sus polinomios, que son invariantes con respecto a la rotación del sistema coordenado sobre el eje z , como resultado de las eigenfunciones de una ecuación del diferencial de segundo orden, su importancia no fue apreciada inmediatamente. Veinte años después Bhatia y Wolf [1953] mostraron que las funciones pueden derivarse por métodos algebraicos. Mientras su aproximación ha dado ventajas heurísticas, se sabe actualmente que muchas de sus propiedades se encuentran más fácilmente utilizando la teoría de grupo. Kintner [1976], en su tesis doctoral y en una serie de artículos, enfatizó la teoría y la aplicación computacional de los polinomios en la óptica aplicada. La generalización de los polinomios de Zernike fue presentada por Myrick [1966] y actualmente siguen trabajando en su desarrollo en óptica cuántica [Wünsche,2005].

En varios textos desarrollan ampliamente la deducción, propiedades y aplicaciones de los polinomios de Zernike, entre ellos podemos citar a Malacara y DeVore [1992], Kim y Shannon [1987], Mahajan [1994, 1998, 2001], Prata y Rusch [1989], Wyant y Creath [1992], Zhang y Shannon [1992], Malacara y Malacara [2004], Malacara et al. [2005], Bezdid'ko [1974, 1975], Wang y Silva [1980], Tango [1977], Born y Wolf [1999], Buchdahl [1970], entre otros. A continuación se revisaran algunos conceptos matemáticos necesarios para trabajar con los polinomios de Zernike.

Dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, definidas en un intervalo $[a, b : c, d]$, son ortogonales si en este intervalo la integral de su producto es igual a cero:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)g(x, y)dxdy = 0 \quad (2.18)$$

Consideremos ahora un sistema de funciones $\{g_n(x, y)\}$, definidas y continuas en un intervalo $[a, b : c, d]$. Si las funciones del sistema son ortogonales cumplen:

$$\int_a^b \int_c^d g_n(x, y)g_m(x, y)dxdy = 0 \quad (n \neq m) \quad (2.19)$$

Por lo que se dice que este es un sistema ortogonal de funciones. En la situación de $n = m$ asumiremos que siempre se cumple la condición:

$$\int_a^b \int_c^d g_n^2(x, y)dxdy > 0 \quad (2.20)$$

El sistema de funciones $\{g_n(x, y)\}$ es considerado completo si cualquier función $f(x, y)$ puede aproximarse por una combinación lineal de funciones del sistema con cualquier grado de precisión.

En el desarrollo para el estudio de campos oscuros y contraste de fase, Zernike [1934] introduce los polinomios circulares de dos variables reales, definidas en un círculo unitario:

$$U_n^l(x, y) = R_n^l(\rho)\cos l\varphi \quad (2.21)$$

donde x, y son coordenadas Cartesianas, ρ, φ son coordenadas polares, R_n^l es un polinomio de grado n en términos de ρ , el cual no cuenta con potencias menores que l .

Estos polinomios se conocen como los polinomios de Zernike, para un sistema ortogonal completo dentro de un círculo unitario.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} R_n^l(\rho) \cos(l\varphi) R_{n'}^{l'}(\rho) \cos(l'\varphi) \rho d\rho d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2n+2} & \text{para } n = n', m = m' \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases} \quad (2.22)$$

Donde $\pi/(2n+2)$ es una constante de normalización, y estos poseen la propiedad de invariancia con respecto a la rotación del sistema de coordenadas sobre el eje z .

Tal definición de los polinomios de Zernike hace posible encontrar la relación entre ellos y muchas funciones especiales [Bezdidko, 2003]. Subsecuentemente Zernike y Brinkman [1935], empezando de las ecuaciones de Laplace, mostraron las relaciones existentes entre los polinomios circulares y las funciones esféricas.

La expansión tradicional del frente de onda aberrado W en series de potencias (expresado en longitudes de onda), será:

$$W = \sum_{lmn} b_{lmn} l_1^{2m+l} \rho^n \cos^l \varphi \quad (2.23)$$

$$W = \sum_{ln} a_{ln} \rho^n \cos^l \varphi \quad (2.24)$$

Donde b_{lmn} y a_{mn} son coeficientes constantes, l_1 es la distancia del punto imagen al eje óptico y ρ, φ son coordenadas polares en la pupila de salida. Esta expresión utiliza las condiciones de simetría en la formulación de los problemas y su solución lleva a relaciones muy complicadas, donde la evaluación numérica es sumamente laboriosa. Nijboer en su tesis [1947] reemplaza las potencias $\cos^l \varphi$ por su correspondientes armónicos $\cos l\varphi$, los cuales nos proporcionan la siguiente expansión de un frente de onda aberrado

$$W = \sum_{lmn} b_{lmn} l_1^{2m+l} \rho^n \cos l\varphi \quad (2.25)$$

$$W = \sum_{ln} a_{nl} \rho^n \cos l\varphi \quad (2.26)$$

La introducción de los armónicos $\cos l\varphi$ conduce a la ortogonalidad de las aberraciones individuales, una con respecto a otra dentro del círculo unitario.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} a_{ln} a_{l'n'} \rho^{n+n'} \cos(l\varphi) \cos(l'\varphi) \rho d\rho d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{para } l \neq l' \\ c & \text{para } l = l' \end{cases} \quad (2.28)$$

Esto es debido a la ortogonalidad de las funciones $\cos l\varphi$ y $\cos l'\varphi$ para $l \neq l'$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Continuando con las ideas de Zenike, Nijboer [1947] combina las secuencias finitas:

$$\rho^n \cos l\varphi, \rho^{n-2} \cos l\varphi, \dots, \rho^m \cos l\varphi \quad (2.29)$$

De los términos de la Ec. 2.24, representando las secuencias de las aberraciones individuales de un tipo. Obteniendo la siguiente expansión de la onda aberrada en términos de polinomios circulares $R_n^m(\rho) \cos m\varphi$:

$$W = \sum_{lmn} \bar{b}_{lmn} m_1^{2m+l} R_n^l(\rho) \cos l\varphi \quad (2.30)$$

$$= \sum_{nl} A_{nl} R_n^l(\rho) \cos l\varphi \quad (2.31)$$

Donde la ortogonalidad de los polinomios de Zernike de cualquier aberración individual, definida por Ec. 2.31, es mutuamente ortogonal dentro del círculo unitario. La representación de las aberraciones definidas por la Ec. 2.24 pueden considerarse clásica, y la definida por la Ec. 2.31 pueden renombrarse como ortogonal. Debe darse énfasis, que por su misma naturaleza matemática una aberración ortogonal individual:

$$A_{nl} R_n^l(\rho) \cos l\varphi \quad (2.32)$$

Consiste de una suma finita definida completamente como:

$$\sum_{p=q}^n \sum_{q=0}^l a_{pq} \rho^p \cos^q \varphi \quad (2.33)$$

De términos clásicos (monomios) individuales, los cuales pueden obtenerse utilizando la tabla de polinomios radiales y de la formula de De Moivre

$$\cos l\varphi + i \sin l\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^l \quad (2.34)$$

Además las funciones radiales $R_n^{n-2m}(\rho)$ son ortogonales y satisfacen [Malacara y DeVore, 1992]

$$\int_0^1 R_n^l R_n^{l'} \rho \partial \rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'} \quad (2.35)$$

Encontrándose la expresión conocida:

$$R_n^{n-2m}(\rho) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \rho^{n-2s} \quad (2.36)$$

Definiendo la función de aberración con polinomios de Zernike en la manera de Rimmer y Wyant [1975]:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} R_n^{n-2m}(\rho) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n-2m)\varphi. \quad (2.37)$$

Una explicación más extensa se presenta por Malacara y DeVore [1992], en donde se encuentra el desarrollo para encontrar la notación para la representación con monomios de los polinomios de Zernike. Se debe señalar que Mahajan [1998] presenta un formalismo puramente matemático para las expresiones de los polinomios de Zernike, en donde se toma el eje x como meridional, modificando únicamente los valores constantes de cada término. Pero la forma más clásica ha sido presentada aquí.

Por ejemplo, la aberración esférica ortogonal de séptimo orden

$$A_{80} R_8^0(\rho) = A_{80} [70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1] \quad (2.38)$$

consiste de las siguientes aberraciones clásicas individuales:

$70A_{80}\rho^8$ - aberración esférica de 7° orden

$-140A_{80}\rho^6$ - aberración esférica de 5° orden

$90A_{80}\rho^4$ - aberración esférica de 3° orden

$20A_{80}\rho^2$ - defoco

A_{80} - inclinación

La ortogonalidad de las aberraciones individuales simplifica la solución de muchos problemas, al integrar los términos de los polinomios de Zernike sobre el área de una pupila, y reducirlas a una expresión mas simple entre los coeficientes de la Ec. 2.31.

Una aplicación muy importante se encuentra en los criterios de calidad de un sistema óptico, donde se emplea el coeficiente de Strehl, equivalente a la razón de la intensidad máxima dada en un plano de observación para una intensidad máxima producida por un sistema libre de aberraciones. En el caso particular, de aberraciones de bajo orden (Seidel) está definida por [E. Wolf, 1951]:

$$I = 1 - (2\pi)^2 \left[\overline{W^2} - (\overline{W})^2 \right] \quad (2.39)$$

Donde

$$\overline{W^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W^2 \rho \partial \rho \partial \varphi \quad (2.40)$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W \rho \partial \rho \partial \varphi$$

Después de reemplazar W por su equivalente definido en la Ec. 2.31 y utilizando la ortogonalidad de las aberraciones individuales dentro de un círculo unitario [Bezdidko, 1975], encontramos:

$$\overline{W^2} = A_{00}^2 + \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{nl}^2}{n+1} \quad (2.41)$$

$$\overline{W} = A_{00} \quad (2.42)$$

La Ec. 2.41 es la formula de Parseval para un sistema ortogonal de funciones $R_n^l(\rho) \cos l\varphi$, y seguido por la Ec. 2.42 donde A_{00} caracteriza el retraso promedio del frente de onda con respecto a la esfera.

Después de sustituir las Ecs. 2.41 y 2.42 en la Ec. 2.39, nosotros obtenemos:

$$I = 1 - 2\pi^2 \sum_{nl} \frac{A_{nl}^2}{n+1}. \quad (2.43)$$

La Ec. 2.43 muestra que el coeficiente de Strehl puede expresarse de una manera muy simple en términos de los coeficientes de la Ec. 2.31, y cada aberración individual reduce el coeficiente de Strehl independientemente [Bezdidko, 1977]. Debido a esto, para la Ec. 2.43 es posible derivar varias propiedades muy importantes de la serie (Ec. 2.31). Primero, las aberraciones ortogonales individuales (Ec. 2.33) poseen una relación sumamente útil entre los valores de los coeficientes para las aberraciones clásicas individuales incluidas en ellas. Además, los coeficientes se interrelacionan de tal manera que las aberraciones clásicas individuales, incluidas en la aberración ortogonal individual, se compensan mutuamente entre ellas. Así cualquier aberración ortogonal (Ec. 2.33) contiene, además de un orden mayor de la aberración clásica, aberraciones de orden menor para que la intensidad en el punto de interés sea un máximo.

Por ejemplo, en la presencia de la aberración de tercer orden, la aberración esférica clásica $a_{40}\rho^4$, es necesario introducir el defoco $a_{20}\rho^2$ con el coeficiente

previamente definido $a_{20} = -a_{40}$ para obtener la intensidad máxima. Al mismo tiempo el polinomio radial, define la aberración esférica ortogonal de tercer orden, obteniendo la forma

$$R_4^0(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1 \quad (2.44)$$

Donde se observa el parámetro de defoco $-6\rho^2$, sumado a la aberración esférica clásica de 3er orden $6\rho^4$ y un término de pistón $+1$, para obtener la intensidad máxima.

Considerando que la aberración se describe por un término de la expansión polinómica de Zernike:

$$W = A_{nl} R_n^l(\rho) \cos l\varphi \quad (2.45)$$

Por ejemplo, esta consiste en la suma finita definida completamente por la Ec. 2.33 de las aberraciones clásicas individuales. En el caso de calcular el coeficiente de Strehl (Ec. 2.43):

$$I = 1 - 2\pi^2 \frac{A_{nl}^2}{n+1} \quad (2.46)$$

Si se introduce de cualquier aberración clásica individual $a_{2,s} \rho^r \cos^s \varphi$ donde $r < n$ y $s \leq m$, en la representación polinómica de Zernike del frente de onda aberrado, los nuevos términos $A_{n,l} R_n^l(\rho) \cos l\varphi$ no afectan el término del ya presentado $A_{nl} R_n^l(\rho) \cos l\varphi$, que lleva a una disminución del coeficiente de Strehl.

A partir de esto podemos concluir que, conociendo los coeficientes de la expansión polinómica de Zernike del frente de onda aberrado, uno puede determinar inmediatamente el grado de corrección del sistema en el sentido de compensar las aberraciones del alto orden por una de bajo orden (de tercer orden). Así, si la aberración para un sistema óptico real se expresa mediante la Ec. 2.45, entonces significa que los órdenes más altos son completamente compensados por los ordenes bajos y cualquier intento para mejorar el sistema se logra introduciendo un control sobre las aberraciones de bajo orden.

Por otro lado, en la teoría de la difracción para aberraciones desarrollada por Zernike y Nijboer, el punto importante es un método general para resolver el problema de calcular el patrón de difracción en la presencia de cierto tipo de aberración, como es

descrito por Zernike y Nijbier [1949], Nienhuis y Nijboer [1949], Zernike [1954] y Marèchal [1954].

La aberración se expande en un serie polinómica de Zernike, que simplifica la consideración del efecto de aberraciones pequeñas. El patrón de difracción se expresa en términos de la expansión de una serie en términos de los coeficientes de aberración.

Wolf [1951] y Linfoot [1955] ha discutido la teoría de Zernike-Nijboer. En el artículo de Linfoot se presenta una clasificación de aberraciones, basado en las expansiones de la Ec. 2.31 y también se discute la aberración en términos de los polinomios de Zernike.

Además, los problemas prácticos, la aplicación de polinomios de Zernike en los sistemas ópticos, es tratada por Bhatia y Wolf [1954] considerando el problema de construir polinomios de dos variables, que formaran un sistema completamente ortogonal dentro de un círculo unitario e invariante a la rotación de los ejes coordenados sobre el origen del sistema coordenado. Ellos mostraron que aunque existían un conjunto innumerable de estos sistemas, únicamente uno de ellos posee algunas propiedades simples (la relación entre el índices n y m) y es idéntico al conjunto de los polinomios circulares de Zernike. Los resultados obtenidos hicieron posible encontrar la relación entre los polinomios de Zernike y polinomios de Jacobi [Tango, 1977]. El método también se usó por los autores para crear otro sistema ortogonal de polinomios dentro de un círculo unitario.

Recientemente, Bezdidko [2003] describe la relación de los polinomios de Zernike con diferentes tipos de transformaciones lineales y su interrelación con otras funciones especiales y otros polinomios ortogonales (funciones de Bessel, funciones Hipergeométricas, polinomios de Legendre).

En conclusión, el desarrollo de los polinomios de Zernike ha permitido representar la aberración de los sistemas ópticos de forma simple. Debido a esto, se han podido reducir enormemente problemas de interpretación de los fenómenos geométricos y difractivos de los sistemas ópticos, tanto matemáticos como computacionales. Las aportaciones de distintos investigadores a través de la historia, ha permitido desarrollar una herramienta muy útil en el campo de la ingeniería óptica.

CAPÍTULO 3

RECONSTRUCCIÓN DE FRENTES DE ONDA Y ANÁLISIS DE INTERFEROGRAMAS

El análisis de las aberraciones en los sistemas ópticos emplea como herramienta principal las pruebas ópticas. Donde destacan los interferómetros de Twyman-Green y Fizeau en el ámbito industrial, permitiendo evaluar los sistemas ópticos cualitativa y cuantitativamente con gran precisión. Estos dos interferómetros entregan un interferograma, donde se encuentra codificada la información del comportamiento del sistema. Es necesario analizar los interferogramas para reconocer las características del frente de onda, y como consecuencia las características de la componente óptica. En este capítulo se presenta un panorama general sobre los procedimientos para el análisis de interferogramas y la reconstrucción de los frentes de onda

3.1 RECONSTRUCCIÓN DE FRENTES DE ONDA

La evaluación de frentes de onda ópticos puede llevarse a cabo usando varias técnicas de demodulación de interferogramas producidos por diferentes tipos de interferómetros [Malacara, 2005]. El interferómetro de Twyman-Green [Malacara, 1992] y el interferómetro de Fizeau [Mantravadi, 1992a] se encuentran entre los instrumentos comerciales usados comúnmente. En estos dos interferómetros utilizan generalmente la técnica de desplazamiento de fase (phase stepping) para extraer información del frente de onda bajo prueba. La desventaja principal asociada a estos tipos de instrumento es su baja estabilidad y alto costo (ambos deben operarse en las mesas hológrafas para evitar vibración que puede adulterar las medidas, con excepción del interferómetro de Newton).

Por otro lado hay otros interferómetros que son muy robustos a las vibraciones mecánicas, económicos y de fácil construcción. Entre los mejor conocidos están la prueba de Ronchi [Cornejo-Rodríguez, 1992; Wan y Lin, 1988; Omura y Yatagai, 1988], que sólo usa una rejilla de Ronchi, y los interferómetros de desplazamiento lateral del tipo Murty [Mantravadi, 1992b; Rimmer y Wyant, 1975]. Estos últimos interferómetros son sensibles a la pendiente del frente de onda en la dirección del desplazamiento. Para un frente de onda rotacional simétrico, se necesita un solo interferograma para detectar el frente de onda deseado; pero, para el caso más general, se necesitan dos interferogramas de desplazamiento lateral con direcciones ortogonales del desplazamiento. A pesar de su robustez y simplicidad, estos interferómetros se utilizan para extraer datos cuantitativos del frente de onda analizado.

Una desventaja del interferómetro de desplazamiento es que presenta una medida indirecta del frente de onda. El patrón de interferencia representa la diferencia entre el frente de onda y una parte del mismo desplazado una cierta distancia. Esto hace muy complejos el análisis del patrón de interferencia obtenido, visual y cuantitativo. La reconstrucción de la fase de la onda (el frente de onda) a partir de un mapa de diferencias de la fase entre los dos frentes de onda, como ha sido discutido por muchos autores, debe utilizarse en la reconstrucción de frente de onda modal [Southwell, 1980].

En los métodos de la reconstrucción de fase [Fried, 1977; Hudgin, 1977; Noll, 1978; Hunt, 1979; Frost et al., 1979; Herrmann, 1980], el frente de onda puede reconstruirse al aplicar el un ajuste de mínimos cuadrados de frente de onda en un conjunto

discreto de puntos del interferograma. Esto no requiere ningún conocimiento a priori de la forma del frente de onda, ó emplear métodos de reconstrucción modales [Sumita, 1969; Rimmer y Wyant ,1975; Cubalchini, 1979; Herrmann, 1981] que describan el frente de onda por medio de un conjunto de funciones modales, por ejemplo un polinomio de tercer orden, debe ajustarse al tipo de frente de la onda en prueba. Los métodos modales son aquellos conocidos como métodos de interpolación local, donde se emplea una función base para encontrar el comportamiento del frente de onda en una región específica. Los coeficientes, de la función ajustada por la diferencia del frente de onda medido, describen el frente de onda en términos de funciones modelo. La opción del método de reconstrucción depende del tipo de problema:

Si el frente de onda esperado puede describirse por un conjunto compacto de funciones, se prefiere una técnica modal debido a sus propiedades de propagación de error y su análisis eficaz [Southwell, 1980]. Cuando los componentes ópticos, como lentes o láseres de semiconductor, son analizados, en la reconstrucción de frente de onda se prefiere las técnicas modales.

Si ningún conjunto de funciones modelo puede reducir los errores esperados, es necesario encontrar un nuevo conjunto de funciones, como es el caso de la turbulencia atmosférica. La reconstrucción de la fase se realiza preferentemente por ajuste de mínimos cuadrados.

La reconstrucción de los frentes de ondas ha llevado durante años al estudio de algoritmos adecuados para la interpretación de las aberraciones presentes en los frentes de onda. El problema ha derivado en programas [Hayslett y Swantner, 1980] que nos permiten encontrar frentes de onda mediante la interpolación local y el empleo de polinomios ortogonales, además del empleo de ambos en un mismo algoritmo. Recientemente se ha utilizado otras técnicas como las redes neuronales, uso de gradientes, transformadas de Fourier y otros, discutidos algunas secciones posteriores.

3.2 ANÁLISIS DE FRANJAS INTERFEROMÉTRICAS

La reconstrucción de frentes de onda a través de la evaluación de un interferograma, se conoce como análisis de franjas. Las franjas son esencialmente líneas de contorno, que pueden desviarse de un patrón ideal dependiendo de las variaciones en la

superficie. El proceso de determinar la localización de las franjas se conoce como digitalización del interferograma. El análisis de franjas revela la información contenida en el interferograma, la fase y la intensidad del frente de onda.

El análisis computacional de interferogramas se realiza alimentando la computadora con los datos digitalizados ajustados a una función matemática para encontrar la información útil. La reducción automática de interferogramas no solo permite la interpretación exacta y rápida, sino además ofrece la habilidad de conocer la superficie del elemento óptico en el caso de la prueba de Foucault y predecir su desempeño (forma del frente de onda).

Los métodos de análisis se pueden dividir en dos:

- Aquellos que reducen primero la imagen a una lista de centros de franjas digitalizados.
- Aquellos que procesan directamente las franjas completas para obtener la diferencia de camino óptico medido.

En el primero, los centros de las franjas pueden ser localizadas manualmente o con una tabla digitalizada. También pueden detectarse automáticamente utilizando algunos algoritmos de procesamiento de imágenes.

Después de localizar los centros de las franjas, se les asigna un número de orden (m) consecutivo, que se incrementan uno a uno según se recorran las franjas (Fig. 3.1). De manera que obtenemos las coordenadas (x, y) de puntos de igual fase. La deformación obtenida estará dada por:

$$W(x, y) = m\lambda \quad (3.1)$$

De manera automática [Reid, 1988], el procedimiento de análisis del interferograma puede resumirse como:

- Filtrado espacial de la imagen.
- Identificación del máximo o mínimo de la franja (esqueletización).
- Asignación del número de orden de la franja.
- Interpolación de las franjas para ajuste del frente de onda.

Malacara et al. [2005], revisan a detalle esta metodología.

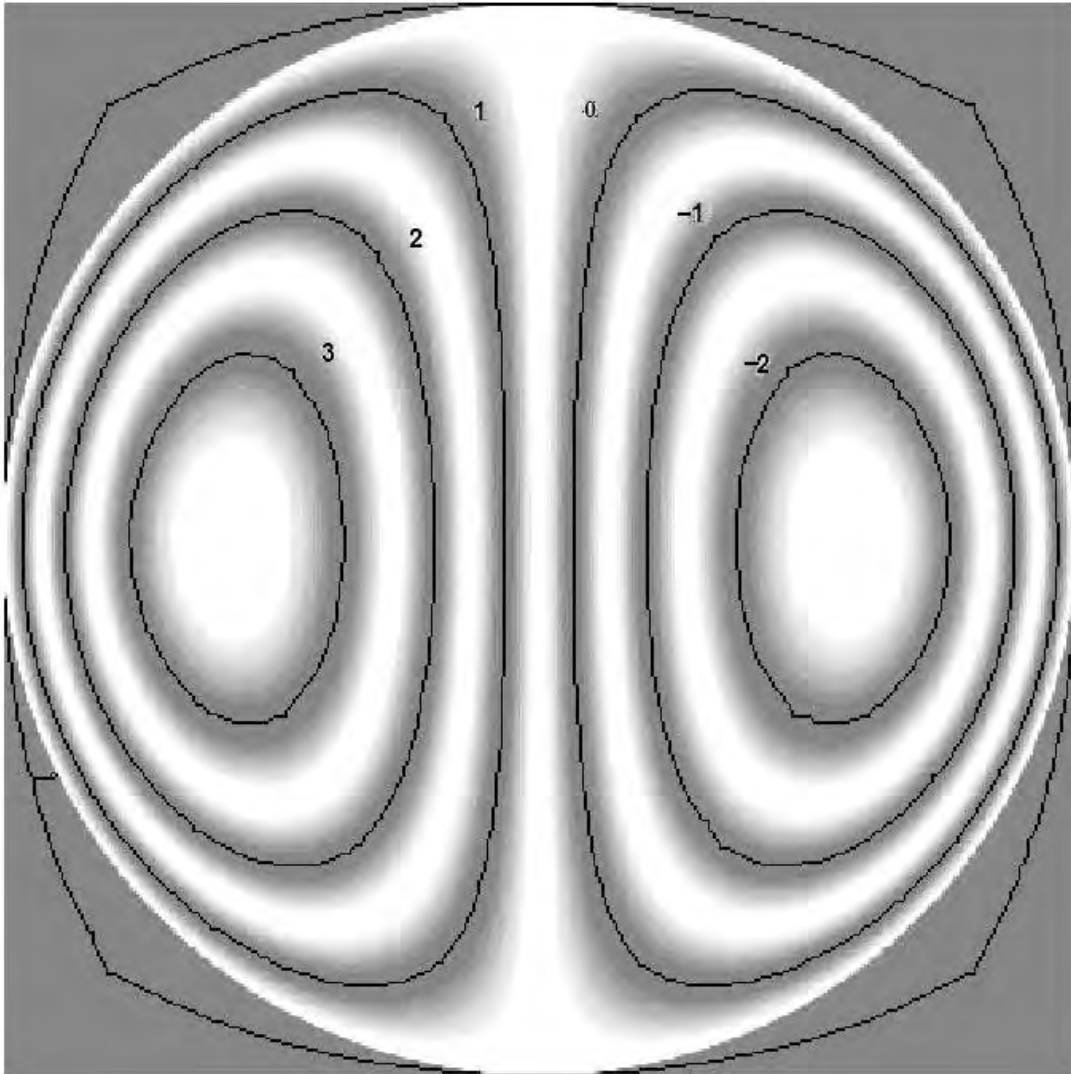


Figura 3.1 Interferograma esqueletizado y con asignación del numero de orden en las franjas

La interpolación polinomial puede dividirse en dos grandes vertientes:

- Local
- Global

Dentro de la segunda categoría, se encuentra un método para analizar los interferogramas en una dimensión, utiliza la transformada de Fourier, descrito por Takeda et al. [1982]. Otro método emplea el ajuste sinusoidal presentado por Mertz [1983]. Además existen los métodos que emplean gradientes, redes neuronales y otros

3.3 INTERPOLACIÓN LOCAL

Cuando se desea estudiar una sección específica del interferograma, se recurre a un proceso de interpolación, con diferentes vertientes que tiene por objetivo predecir el comportamiento del frente de onda en un punto o zona específica.

Al estudiar este problema en una dimensión, se ha probado la existencia de una dependencia funcional entre las magnitudes x e y , que expresa el aspecto cuantitativo de este fenómeno. La función $y = \varphi(x)$ se desconoce; sin embargo, mediante una serie de experimentos, determinamos los valores de esta función: y_0, y_1, \dots, y_n para ciertos valores de la variable independiente x_0, x_1, \dots, x_n pertenecientes al intervalo $[a, b]$.

El problema consiste en encontrar la función más simple (un polinomio por ejemplo), para facilitar los cálculos, con el requisito que sea una función exacta o aproximada de la función desconocida $y = \varphi(x)$ en el intervalo $[a, b]$. En forma más abstracta, el problema puede formularse del modo siguiente: dados los valores de una función desconocida $y = \varphi(x)$ en $n + 1$ puntos diferentes: x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$,

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \dots, \quad y_n = \varphi(x_n), \quad (3.2)$$

hallar un polinomio $P(x)$ de grado inferior o igual a n , que aproxime a la función $\varphi(x)$ [Piskinov, 2004]. A continuación se presenta un teorema que rige este problema:

Teorema.- Si x_0, x_1, \dots, x_n son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios y_0, y_1, \dots, y_n existe un polinomio único P_n grado menor o igual a n , de manera que:

$$P_n = y_i \quad (0 \leq i \leq n) \quad (3.3)$$

Existen diferentes métodos para encontrar este polinomio, entre los cuales se encuentran Lagrange, Newton, Hermite, splines, etc [Kincaid y Cheney, 1994; Gerald y Wheatley, 2000].

Los tres procedimientos más comúnmente utilizados son los estudiados por Mieth y Osten [1990] y Malacara [2005]. Estos son:

- Interpolación sofisticada bilineal
- Interpolación usando spline unidimensionales
- Interpolación por triangulación

Donde el método de interpolación por triangulación tiene una gran eficiencia, pero presenta un gran esfuerzo computacional.

3.4 INTERPOLACIÓN GLOBAL

El ajuste global se lleva a cabo utilizando un ajuste polinómico de interferogramas [Malacara et al., 2005] que se ha estudiado en el pasado para obtener la figura de superficie del frente de onda aberrado [Rimmer et al., 1972]. Es posible realizar este ajuste empleando cualquier conjunto de funciones analíticas, como el método de mínimos cuadrados para encontrar los coeficientes de cada función del conjunto. Pero tradicionalmente se emplean los polinomios de Zernike debido a que presentan la propiedad de ortogonalidad sobre la pupila circular y la mayoría de los interferogramas tienen simetría circular [Rimmer et al., 1972; Wang y Silva, 1980]. Pueden utilizar también otro conjunto de polinomios ortogonales para analizar los interferogramas provenientes de un sistema con abertura anular [Swantner y Lowrey, 1980]. Sin embargo, no es fácil encontrar un conjunto de polinomios ortogonales para cada abertura diferente. Además, los polinomios de Zernike no son ortogonales sobre los puntos digitalizados por submuestreo o con digitalización no uniforme correspondientes a los interferogramas obtenidos de sistemas ópticos con abertura circular. Debido a que los polinomios de Zernike están definidos para un espacio continuo, así como su condición de ortogonalidad definida por la integral. Es bien conocido que las funciones de aberración ortogonales son útiles en el análisis de los frentes de onda, sobre todo en la descomposición de los datos interferométricos.

Born y Wolf [1997] trataron la minimización de la variancia del frente de onda utilizando los polinomios de Zernike para un frente de onda simétrico bilateral dentro de un límite circular ó abertura circular. Su tratamiento se extiende fácilmente a frentes de onda asimétricos generales definidos sobre el círculo unitario.

Tatian[1974], Mahajan [1981], y Barakat [1980] dedujeron conjuntos polinómicos ortogonales sobre aberturas circulares que tienen oscurecimientos centrales con oscuridad arbitraria. Swantner y Lowrey [1980] derivaron las fórmulas para los errores de la diferencia de camino óptico y errores de la varianza del frente de onda, que resultan si se utilizan los polinomios de Zernike para interpretar interferogramas de un sistema con oscurecimientos centrales. Para las aberturas circulares no oscurecidas y para las

aberturas obscurecidas con obscurecimientos circulares centrales, Hayslett y Swantner [1980] han mostrado que la reducción de los datos puede lograrse con una buena exactitud sin la necesidad de una ortogonalización digital.

Loomis [1980], empezando con un conjunto arbitrario de polinomios, describió un algoritmo basado en el procedimiento de ortogonalización de Gramm-Schmidt, para crear polinomios que son ortogonales en un conjunto de datos. En su programa llamado FRINGE y sus subsecuentes, el conjunto base es una selección de 36 polinomios de Zernike. Malacara et al. [1990] han propuesto que el procedimiento común es ajustar los puntos medidos para un polinomio $x-y$ y entonces transformarlo a una combinación lineal de polinomios de Zernike. No todos los autores concuerdan con este procedimiento y en otras publicaciones [Swantner y Lowrey, 1980; Hayslett y Swantner, 1980; Loomis, 1978] los polinomios de Zernike se aplican directamente.

Todo el software actual para el análisis de interferogramas, incluyendo los que miden la fase del interferograma, emplean los polinomios de Zernike directamente o como base de un conjunto de ortogonalización de Gramm-Schmidt, desde mediados de 1970's. Sin embargo en el interferómetro de desplazamiento lateral es conveniente el ajuste de polinomios $x-y$ al un desdoblamiento de la fase [Rimmer y Wyant, 1975].

3.5 EL CRITERIO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El criterio de mínimos cuadrados se ha utilizado durante muchos años en el ajuste de funciones analíticas. Matemáticamente, este puede representarse como [Piskunov, 2004; Bolshavov y Gaidáyev, 1977]:

$$\sum_{i=1}^N \left[W(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^M H_j(x_i, y_i) \right]^2 = \gamma \quad (3.4)$$

Donde

W es la fase medida sobre los puntos digitalizados,

H_j los polinomios utilizados en el ajuste

N el número de puntos digitalizados y

M el número de polinomio utilizado en el ajuste.

Teniendo que cumplir la condición de que el número γ debe ser el menor posible. El polinomio H_j se especifica como el conjunto de funciones analíticas, que pueden ser ortogonales o no, multiplicadas por un coeficiente obtenido mediante el criterio establecido, explicado en textos matemáticos. De manera que empleando el conjunto de polinomios de Zernike el criterio de mínimos cuadrados queda expresado de la forma:

$$\sum_{i=1}^N \left[W(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^M A_j Z_j(x_i, y_i) \right]^2 = \gamma \quad (3.5)$$

$\gamma = \min$

3.6 LAS FUENTES DE ERRORES EN EL AJUSTE POLINÓMICO

Hay cuatro fuentes principales de errores en el ajuste polinómico [Kim, 1982]:

- El número de polinomios es mucho más pequeño que el número de puntos digitalizados.
- El error de digitalización es inevitable en la medida del vector de la fase W .
- Debido al error de ajuste, la solución calculada se desvía de la proyección real.
- La representación polinómica debida los puntos digitalizados pueden diferir de la representación polinómica en la abertura continua.

3.7 LAS VENTAJAS DE USAR LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

En el pasado, los polinomios de Zernike se han usado para el análisis de interferogramas de abertura circular. Las ventajas de usar los polinomios ortogonales son:

- El error del ajuste llega a ser despreciable utilizan los polinomios ortogonales.
- El error en cada coeficiente de un polinomio no es amplificado por error aleatorio en el espacio del polinomio S_z (la proyección del error de la digitalización y el error del ajuste). Por consiguiente, los coeficientes de los polinomios ortogonales son insignificantes (tienen menos error) que aquéllos de los polinomios no ortogonales.
- El error rms de la superficie del frente de onda sobre la abertura continua puede estimarse fácilmente.

3.8 LA MEJOR REFERENCIA Y LA REFERENCIA RELATIVA

En las pruebas ópticas, la información del frente de onda obtenida de los interferogramas nunca es igual al error de figura de la superficie que se desea corregir. Normalmente se introduce una inclinación (tilt) grande para facilitar la digitización, donde es inevitable algún error de alineación. Por consiguiente, es necesario substraerse una cantidad del frente de onda de referencia punto a punto para obtener el frente de onda de superficie.

La mejor referencia del frente de onda Rb es el que minimiza el error rms del frente de onda de superficie sobre los puntos digitalizados después de substraerse el frente de onda de referencia. Esta mejor referencia Rb puede obtenerse sólo por ajuste con los polinomios de la referencia. Sin embargo, si los polinomios no son ortogonales, el frente de onda de referencia obtenido del ajuste polinómico total es diferente del frente de onda de referencia más adecuado al que se conoce frente de onda de referencia relativa Rr . El mejor frente de onda de la superficie Sb y el frente de onda de la superficie relativa Sr son obtenidos al substraer la mejor referencia y el frente de onda de referencia relativa.

Aun cuando el mejor frente de onda de referencia minimiza el error del frente de onda de superficie sobre los puntos digitalizados, el frente de onda de referencia relativo se subtrae para análisis de interferogramas de la abertura circular con los polinomios de Zernike. La razón es que el frente de onda de referencia relativo minimiza el frente de onda de la superficie sobre la abertura continua, y este frente de onda continuo de la superficie utiliza durante la corrección de la superficie. La diferencia entre la referencia mejor y la referencia relativa es provocada del número finito de puntos digitalizados. Sin embargo, si se digitalizan uniformemente un número adecuado de puntos, esta diferencia puede ser despreciable.

3.9 RECONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE ONDA CON ANÁLISIS DE FOURIER

Un camino completamente diferente para el análisis de interferogramas sin utilizar interpolación entre franjas es proporcionado por el análisis de Fourier. Este método ha sido estudiado extensamente [Takeda et al., 1982; Womack, 1983 y 1984]

Macy [1985], Roddier[1988], Malacara et al. [2005] describieron la obtención las deformaciones del frente de onda utilizando análisis de Fourier. Takeda y otros autores han

propuesto una técnica capaz de analizar la franja automáticamente. El método de ajuste sinusoidal fue presentado por Mertz [1983]. Estas dos técnicas determinan la topografía de un frente de onda. El método de Takeda se determina en una dimensión y Macy realizó la extensión a dos dimensiones. Esta extensión, sin embargo, todavía es esencialmente un análisis de un segmento de datos en una dimensión. El método de Mertz para funciones sinusoidales es bidimensional. Ambos métodos trabajan de manera similar inclinando substancialmente el frente de onda del interferómetro. Las franjas agregadas por el acto de inclinación actúan como un portador heterodino espacial en el que se remueven, seguido del análisis del patrón de franjas.

Este proceso heterodino separa, en el plano transformado, los componentes de frecuencia positivos y negativos de la intensidad del sinusoidal del interferograma y de algunas de las contribuciones de intensidad inesperadas. Filtrándose para retener sólo los componentes de frecuencia positivos, de esta manera puede recuperarse la fase adyacente.

Hay varias ventajas al agregar la inclinación al frente de onda, puede obtenerse una distinción entre la elevación y depresión. En este caso los efectos debido a la iluminación no uniforme son reducidos. Inclinando el frente de onda es posible enderezar las franjas y les da una separación predeterminada relativamente uniforme [Teague, 1983], que facilita el uso de algoritmos de visión por computadora. Estos algoritmos tienen gran dificultad para localizar de las franjas irregularmente espaciadas encorvadas y anchas de interferogramas que tienen un ángulo de inclinación muy pequeño. Además, estos dos nuevos métodos utilizan la información de la fase entre los centros de las franjas.

3.10 RECONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE ONDA CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

Las redes neuronales han empezado a usarse para la medición de aberraciones en algunos sistemas ópticos. Yasuno et al. [2002] han aplicado las redes neuronales para determinar el coeficiente de aberración esférica de un objetivo cofocal para una respuesta de intensidad axial. Barrett y Saandier [1993] reportaron un diseño de redes neuronales para estimar las aberraciones ópticas del telescopio espacial Hubble. Montera et al. [1997] usaron redes neuronales para estimar y reducir los efectos del ruido en la reconstrucción del

frente de onda debido al sensor. Gou et al. [2006] aplicaron las redes neuronales en la reconstrucción de frentes de onda en el ojo humano, empleando un sensor Hartmann-Shack. Las redes en general son entrenadas para calcular coeficientes de bajo orden de Zernike reduciendo ampliamente los efectos del ruido.

En general puede emplearse cualquier técnica con el fin de obtener el frente de onda a partir de un interferograma y los procedimientos para el análisis de franjas interferométricas. Se analizaron las ventajas de emplear un conjunto de polinomios ortogonales para realizar la reconstrucción de los frentes de onda y el principio de ajuste polinomial. En esta tesis se emplean un conjunto de polinomios ortogonales ajustados por mínimos cuadrados para la reconstrucción de frentes de onda a partir de datos interferométricos.

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE FRENTES DE ONDA A PARTIR DE DATOS INTERFEROMETRICOS

En este capítulo se describe el algoritmo y funcionamiento de los programas que permiten obtener los polinomios de Zernike y ajustar datos interferométricos a un conjunto de polinomios de cuasi-Zernike ortogonales en el espacio discreto. El termino cuasi-Zernike se le asigna al conjunto de funciones ortogonales formadas a partir de los polinomios de Zernike empleando el método de Gram-Schmidt. A partir del conjunto de polinomios de cuasi-Zernike se obtiene una combinación lineal de polinomios de Zernike que permitan reconstruir el frente de onda en evaluación.

El objetivo del trabajo de maestría fue crear una serie de librerías para MATLAB y programas ejecutables desde la plataforma de Windows, útiles para cualquier usuario que desee emplear las subrutinas o archivos ejecutables en el análisis de interferogramas y reconstrucción de frentes de onda. A continuación se presenta la descripción de los resultados obtenidos.

4.1 PROGRAMA PARA LA REPRESENTACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE

El programa de polinomios de Zernike *Zernikepol.m* es una subrutina que construye una representación matemática de cada polinomio individual. Este genera una matriz de polinomios de Zernike para el círculo unitario en coordenadas polares. Su connotación para llamarlo en la plataforma de MATLAB es empleando el comando:

```
>>Zernikepol(r)
```

Donde r (el orden aparente) es el término de polinomio de Zernike que se desea obtener. Los parámetros empleados en el programa son:

- n = grado radial u "orden del polinomio" (un entero positivo)
- f = frecuencia azimutal, (un entero negativo o positivo, magnitud $\leq n$)

Algunos autores como Malacara [1992] emplean la letra l , para denotar la frecuencia azimutal.

Utilizando la Ec. 2.37, que indica como formar el producto de funciones radiales y arregladas. Para conseguir el polinomio radial empleamos la Ec. 2.36, usando el valor absoluto de la frecuencia azimutal. Para estas ecuaciones se requirió el empleo de la subrutina: *factorial.m* que entrega factorial del un número asignado.

Empleando las funciones empíricas propuestas por Malacara [1992], a partir de un orden aparente denotado por r . Encontramos:

$$n = \text{siguiente entero mayor que } \left\{ \frac{-3 + [9 + 8(r-1)]^{1/2}}{2} \right\} \quad (4.1)$$

$$m = r - \frac{(n+1)n}{2} - 1 \quad (4.2)$$

$$f = n - 2m \quad (4.3)$$

En el programa se emplea la rutina *ceil* que tiene la función descrita en la Ec.4.1 como “siguiente entero mayor que”. La Ec. 2.36 es únicamente válida para $f > 0$, pero el mismo resultado se aplica para $f < 0$.

Esta rutina de MATLAB genera los polinomios de Zernike en coordenadas polares reportados en la literatura [Malacara, 1992], y además puede generar polinomios de cualquier orden.

4.2 PROGRAMA DE LA REPRESENTACIÓN DE POLINOMIOS DE ZERNIKE Y GRAFICACIÓN.

Debido a que los arreglos numéricos en las computadoras personales son rectangulares y no circulares o polares. Es más conveniente usar una representación en monomios (x, y) . Debido esto se creó el programa *Zernikerec.m*, el cual genera una matriz para el círculo polinomial de Zernike en coordenadas polares. En los textos clásicos de óptica [Malacara, 1992] se adopta la convención de que el eje y como referencia meridional para especificar los ángulos. De manera que:

$$y = r \cos(\theta) \quad \text{y} \quad x = r \sin(\theta). \quad (4.4)$$

Aunque algunos autores prefieren el formalismo matemático [Mahajan, 1998], y toman como referencia meridional al eje x . Adoptando la nomenclatura más común en la literatura Ec. 4.4, la Ec. 2.37 se transforma a coordenadas cartesianas en:

$$\begin{aligned} W(\rho, \varphi) &= \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} R_n^{n-2m}(\rho) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \left\{ (n-2m)\varphi \right. \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_j^m \sum_k^{m-j} (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} n-2m \\ 2i+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-j \\ k \end{bmatrix} \frac{(n-j)!}{j!(m-j)!(n-m-j)!} x^{2(i+k)+p} y^{n-2(i+j+k)-p} \end{aligned} \quad (4.5)$$

En la subrutina de *Zernikerec.m* se calcula a partir del orden aparente (Ecs. 4.1, 4.2 y 4.3), los valores del grado radial n , la frecuencia azimutal f y el parámetro m . Implementando la Ec. 4.5 y utilizando la Tabla 4.1 para obtener los valores de p y q . Esta rutina de MATLAB genera los polinomios de Zernike reportados en el libro de Malacara [1992], y además puede generar cualquier otro orden de los polinomios de Zernike.

Se emplearon modificaciones de las subrutinas creadas para hacer un programa que despliegue la expresión matemática del polinomio y la gráfica. La rutina de nombre *grafzenik.m*, solicita el orden aparente (r) y el número de puntos que contiene cada eje de la gráfica resultante. La subrutina *pol.m* es muy semejante a la subrutina *Zernikerec.m*, pero esta no calcula la expresión matemática sino el valor numérico del polinomio de Zernike en el círculo unitario. La subrutina *deplegazernike.m* es idéntica a la subrutina *Zernikepol.m*, y tiene la función de desplegar el polinomio de Zernike en coordenadas polares, que es mostrado en el título de la gráfica. El resultado de esta subrutina se puede observar en la Fig. 4.1.

Debido a que esta subrutina esta limitada al uso de MATLAB, se creó una interfase gráfica dando como resultado el programa *Zernike.exe*, que únicamente requiere la instalación de la máquina virtual de MATLAB. La máquina virtual es un software libre al publico que puede obtenerse desde Internet e instalado en cualquier máquina con plataforma Windows. El programa esta compilado en lenguaje C reescrito a partir de las subrutinas de MATLAB. El resultado se muestra en la Fig. 4.2.

Tabla 4.1 Valores de p y q para la Ec. 4.5

Termino	n par	n impar
seno $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{n-2m}{2} - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{n-2m-1}{2} \end{matrix}$
coseno $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$	$\begin{matrix} 0 \\ -\frac{n-2m}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -\frac{n-2m+1}{2} \end{matrix}$

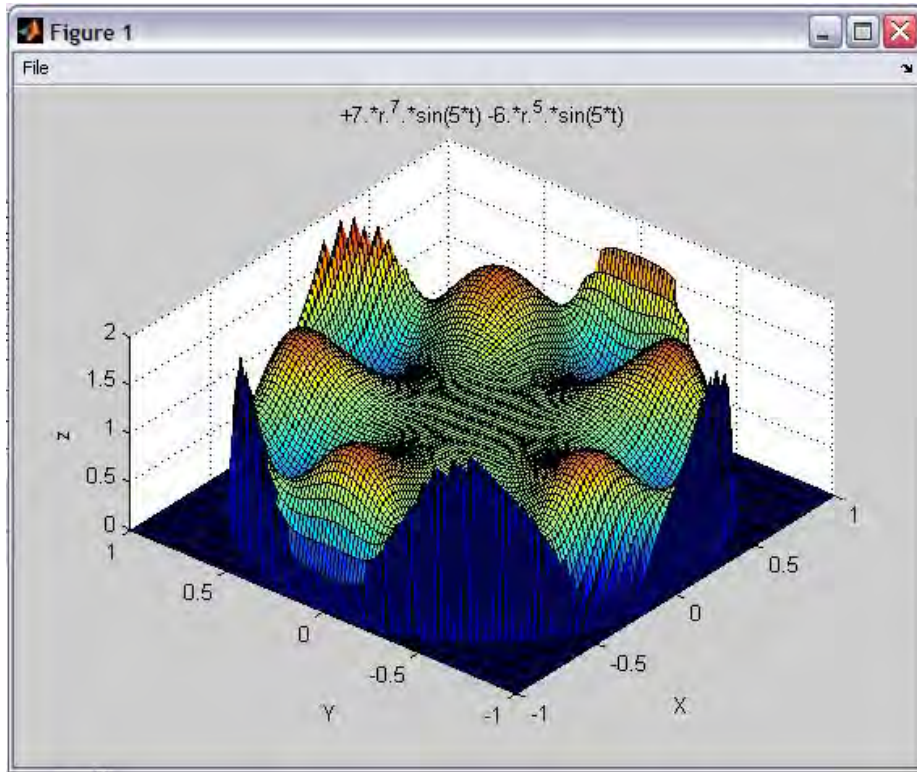


Figura 4.1 Resultado entregado por el programa *delegazernike.m* al proponer como variables 100 puntos y orden aparente 30.

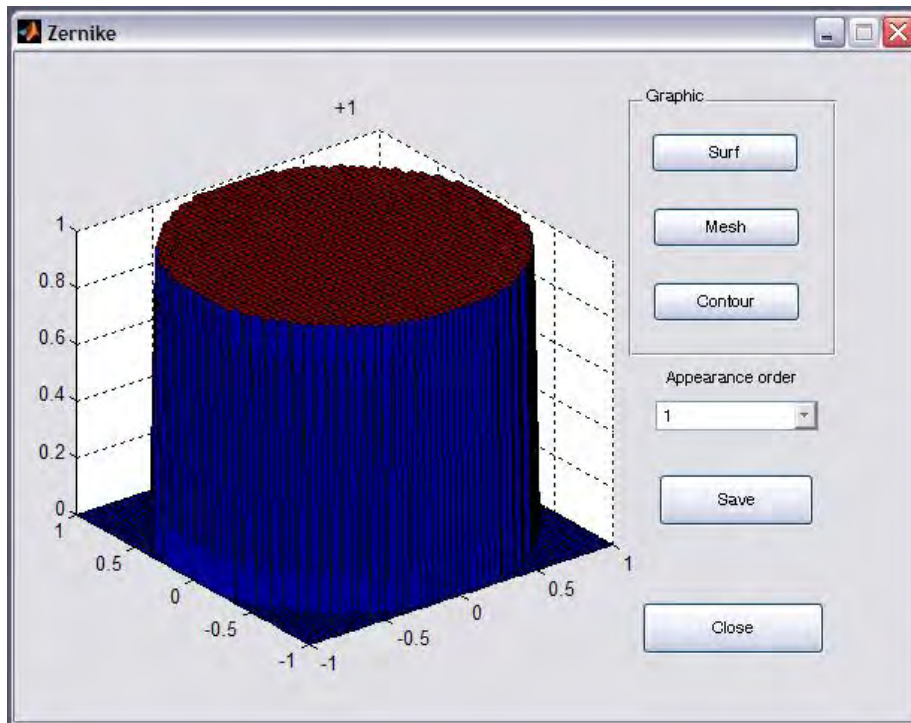


Figura 4.2 Interfase grafica que presenta la grafica del polinomio y su representación matemática.

Como se observa en la Fig. 4.2 se tienen distintos tipos de graficas (botones Mesh, Surf y Countour). Se pueden guardar los datos (boton Save) en formato xls (Excel) para que puedan abrirse en cualquier otro programa. El menú despegable “Appearance order”, asigna el orden aparente del polinomio, el máximo aceptado por el programa es 30.

4.3. PROGRAMA DE RECONSTRUCCIÓN DEL FRENTE DE ONDA CON CUASI-POLINOMIOS DE ZERNIKE

Los programas *Zernike2.exe* y *union.m* ajustan los datos interferométricos almacenados en un archivo *xls*, a un conjunto de polinomios utilizando el método reportado por Malacara et al. [1990]. Se emplea una técnica de ajuste de datos por mínimos cuadrados, empleando los polinomios de Zernike para crear un nuevo conjunto de ortogonales polinomios.

Debido al conjunto reducido de datos y la no uniformidad en el muestreo, los polinomios de Zernike no cumplen la propiedad de ortogonalidad. Pero a partir de los polinomios podemos crear un nuevo conjunto de polinomios ortogonales para los datos discretizados, nombrados como polinomios de cuasi-Zernike. Que deben ser ortogonales entre cada termino polinomico y representar ser la mejor aproximación al frente de onda muestreado.

Partiendo del frente de onda determinado por la Ec. 2.37, reescribiendo la expresión de forma:

$$W(r, \theta) = \sum_{j=1}^L A_j U_j(r, \theta) \quad (4.6)$$

Donde U_j representa el j-esimo polinomio de Zernike y A_j es el coeficiente de aberración presente en un frente de onda. La variable L representa el orden del arreglo que esta dado en función de k , que es el grado del polinomio:

$$L = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (4.7)$$

Considerando los dos conjuntos de funciones, los polinomios de Zernike (U_j) y el conjunto de polinomios ortogonales (V_i) en el espacio discreto que deseamos obtener, donde todos los puntos discretizados tienen el mismo peso. Siguiendo el procedimiento de Gram-Schmidt, se obtienen las expresiones:

$$V_1(r, \theta) = U_1(r, \theta) \quad (4.8)$$

$$V_2(r, \theta) = U_2(r, \theta) + D_{2,1}V_1(r, \theta) \quad (4.9)$$

⋮

$$V_j = U_j + \sum_{s=1}^{j-1} D_{j,s}V_s \quad (4.10)$$

Con $j=1,2,\dots,L$. Donde definimos los polinomios de cuasi-Zernike V_i en términos de combinaciones de los polinomios de Zernike.

A partir de la condición de ortogonalidad Ec. 2.19 se desprende:

$$D_{j,p} = -\frac{\sum_{i=1}^N U_j V_p}{\sum_{i=1}^N V_p^2} \quad (4.11)$$

Con $j=2,3,\dots,L$ y $p=1,2,\dots,j$. Obteniendo cada coeficiente $D_{j,s}$, que obliga a satisfacer la condición de ortogonalidad para cada termino del conjunto de polinomios de cuasi-Zernike V_i .

Representando la nueva función de aberración como:

$$W(r, \theta) = \sum_{j=1}^L B_j V_j(r, \theta) \quad (4.12)$$

La cual es ortogonal en el círculo unitario discretizado del interferograma. Para encontrar los valores de los coeficientes B_j utilizamos el criterio de mínimos cuadrados Ec. 3.2, y debido a la ortogonalidad de los polinomios V_j obtenemos:

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^N z_i V_j}{\sum_{i=1}^N V_j^2} \quad (4.13)$$

Teniendo los elementos para representar el frente de onda a partir de un conjunto de polinomios ortogonales de cuasi-Zernike. Debido al empleo cotidiano de los polinomios de Zernike en la representación de frentes de onda ópticos, es conveniente obtener la combinación lineal de estos, transformando la Ec 4.10 en:

$$V_j = U_j + \sum_{s=1}^{j-1} C_{j,s}U_s \quad (4.14)$$

Donde $j = 2, 3, \dots, L$ y

$$C_{j,s} = \sum_{i=1}^{j-s} D_{j,j-i} C_{j-i,s} \quad (4.15)$$

En los que

$$C_{j,j-1} = D_{j,j-1} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, L$$

$$\text{y } C_{i,i} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, j-1$$

Después de una serie de comparaciones simples de las Ecs. 4.12, 4.14, 4.15 y 4.6, obtenemos los coeficientes A_j de la Ec 4.6:

$$A_j = B_j + \sum_{p=j+1}^L B_p C_{p,j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, L-1$$

$$\text{y } A_L = B_L$$

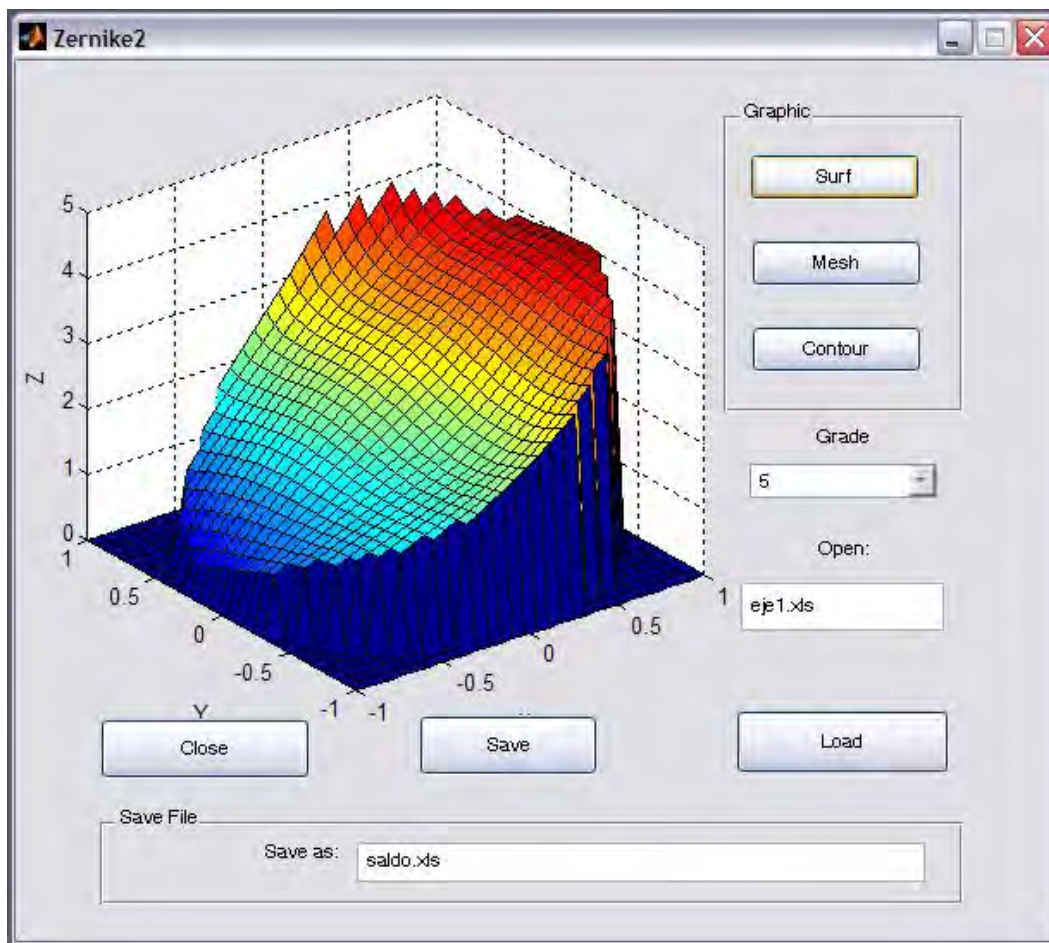


Figura 3.3 Programa de reconstrucción del frente de onda a partir de datos interferométricos.

Que permite ajustar los datos interferométricos directamente en polinomios de Zernike. Implementando el algoritmo en los programas *union.m* y *Zernike2.exe* (Fig. 3.3). Estos programas permiten calcular los coeficientes de los polinomios de Zernike, realizar la reconstrucción del frente de onda y calcular el error eficaz (error rms) del ajuste. Estos datos pueden almacenarse en archivos de extensión *xls*, con las nomenclaturas *file.xls* para los datos del frente reconstruido, *afile.xls* para los coeficientes de los polinomios de Zernike y *rmsfile.xls* para el error eficaz (rms).

Los dos programas ejecutables son complementarios para poder analizar y reconstruir frentes de onda a partir de datos interferométricos digitalizados. Los datos más relevantes pueden guardarse para su lectura en otro tipo de programas. Aunque los programas ejecutables tienen una presentación más agradable para los usuarios, se encuentran limitados en capacidad de procesamiento y puntos de graficación con respecto a las subrutinas de MATLAB sin interfase gráfica.

CONCLUSIONES

Día con día las necesidades en la industria y la investigación se van acrecentando. En este sentido con mayor frecuencia se necesitan sistemas computacionales automatizados para analizar los distintos resultados obtenidos. Durante este trabajo se ha presentado el desarrollo de una serie de subrutinas y programas ejecutables que tiene el único fin de facilitar a los usuarios el análisis automático de datos interferométricos.

Tanto las subrutinas de MATLAB como los programas ejecutables presentan ventajas y desventajas. Entre las principales ventajas, para las subrutinas de MATLAB, podemos mencionar la mayor velocidad en los procesos y por lo tanto se pueden procesar mayor número de datos en menor tiempo además de poder obtener una mayor resolución en los datos. La desventaja radica en la necesidad de conocer el entorno de MATLAB.

Los programas ejecutables solo requieren un conocimiento básico del sistema operativo Windows, pero la misma interfase gráfica hace lento el procesamiento de datos. La ventaja radica en que pueden instalarse en cualquier maquina sin tener instalado el MATLAB, únicamente instalando la Maquina Virtual que es libre para cualquier persona desde el sitio Web de Mathworks.

La reconstrucción de interferogramas a partir de polinomios ortogonales tiene grandes ventajas discutidas, en la sección 3.7, y el ajuste de mínimos cuadrados nos beneficia al reducir equitativamente los errores en cada punto, asignando el mismo peso a cada punto.

Como trabajo futuro es necesario trabajar directamente con el interferograma realizando la esqueletización y digitalización automática de los datos interferométricos. Además de poder añadirle algunas subrutinas que permitan usar los métodos de Fourier y redes neuronales para obtener frentes de onda, ampliando así sus aplicaciones.

ANEXO

A.1 PROGRAMA DE LA ESQUELETIZACIÓN DE UN INTERFEROGRAMA

El programa *sket.m* (Fig. A.1) es una serie de subrutinas de procesamiento de imágenes [Gonzalez y otros, 2004]. En primer lugar se modifica la intensidad de la imagen utilizando la ecualización del histograma. Posteriormente parte se esqueletiza el interferograma.

La ecualización del histograma permite uniformizar los niveles de gris de la imagen, es decir, en imágenes que están muy concentradas en determinados niveles de gris, se aumenta el contraste. Además tiene una opción que permite transformar a escala de grises el interferograma esta dado en escala de colores.

La esqueletización, como parte del análisis se efectuó removiendo los píxeles en los límites del objeto pero sin permitir a los objetos que se separen. Los píxeles restantes son los correspondientes al esqueleto de la imagen.

Para mostrar el resultado se presenta la esqueletización sumada con la imagen ecualizada en el primer paso. Además permite guardar la imagen para que posteriormente pueda digitalizarse manualmente o computacionalmente. En este trabajo se digitalizó manualmente la imagen.

Debido a problemas de resolución mostrada en la interfase se le pidió al programa abrir en una ventana nueva, donde se muestra el resultado de la esqueletización. De esta forma fue posible observar los resultados y verificar su calidad.

Con el botón “Load image” se carga la imagen que se encuentra con la ruta y/o nombre del archivo imagen, la imagen se muestra en la parte superior de la Fig. A.1. Al activar la bandera “ Transfer to gray scale image” transforma a escala de grises la imagen. La barra deslizable controla el ajuste de intensidad aplicado a la imagen. Estas dos últimas funciones se aplican al oprimir el botón “Apply”, mostrando los resultados en la gráfica inferior izquierda de la Fig. A.1. Y el botón “Skelet” activa la subrutina de esqueletización y en la gráfica inferior derecha de la Fig. A.1 se puede observar el resultado de esqueletización. El botón “Close” cierra toda aplicación.

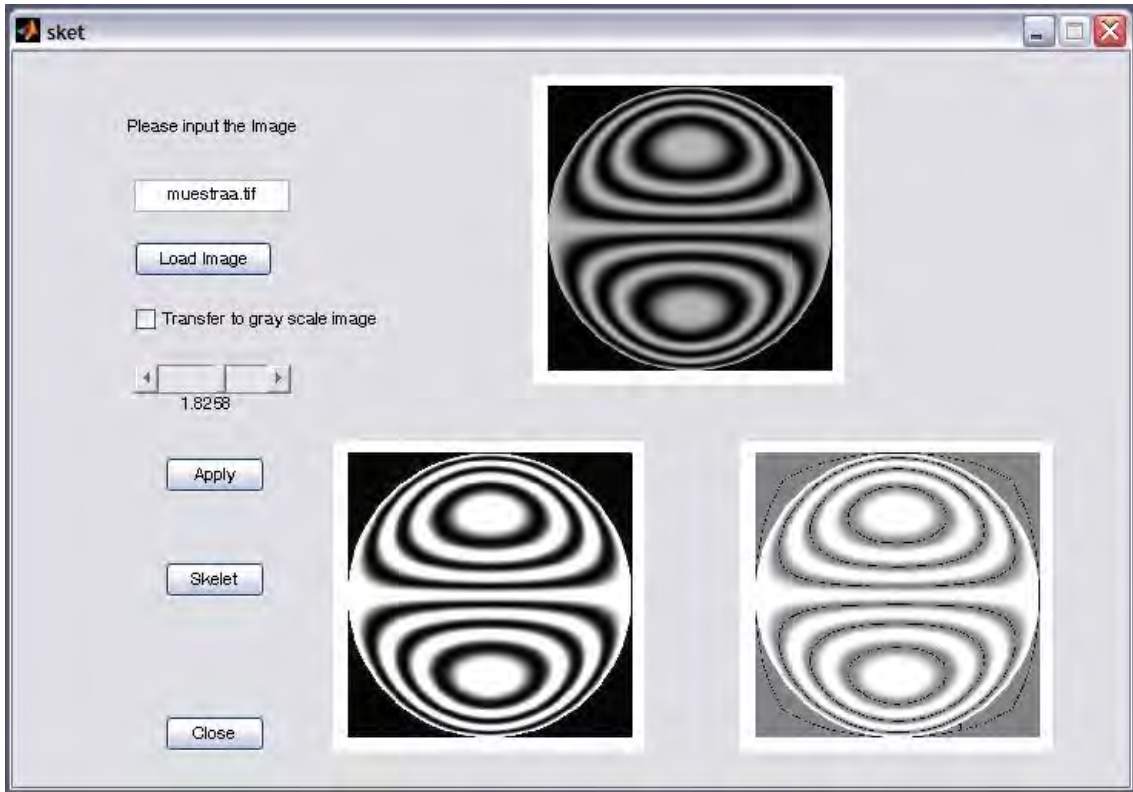


Figura A.1. Programa para el ajuste de intensidad y esqueletización del interferograma.

A.2 POLINOMIOS DE ZERNIKE

Se presenta a continuación algunos polinomios de Zernike en su representación cartesiana y polar con su gráfica. Estos resultados obtenidos con los programas *Zernikerec.m*, *Zernikepol.m* y *grafzernike.m*. La primera columna es el dato, la segunda la representación polar y la tercera la representación en monomios.

Grado aparente	Representación polar	Representación rectangular
Grado aparente =1	+1	+1

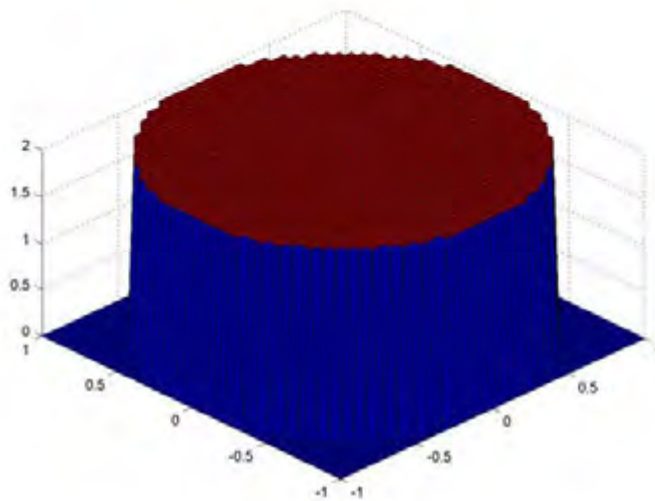


Figura A.2. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 1.

Grado aparente =2	+1.*r.*sin(1*t)	+1.*x
-------------------	-----------------	-------

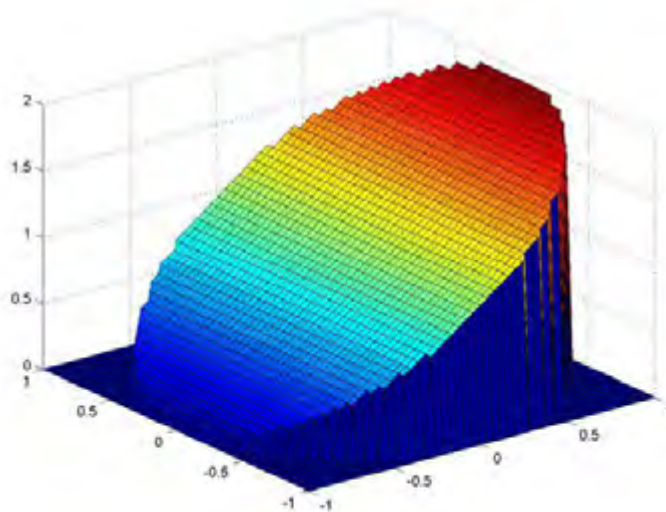


Figura A.3. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 2.

Grado aparente =3	+1.*r.*cos(1*t)	+1.*y
-------------------	-----------------	-------

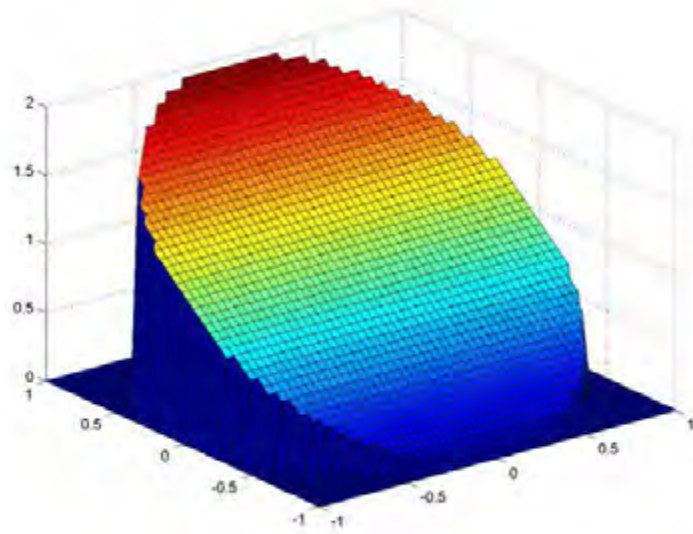


Figura A.4. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 3.

Grado aparente =4	+1.*r.^2.*sin(2*t)	+2.*x.*y
-------------------	--------------------	----------

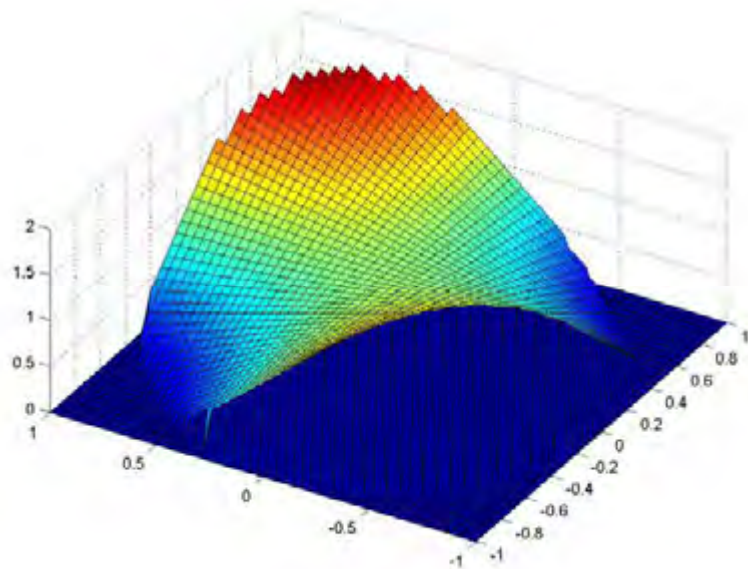


Figura A.5. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 4.

Grado aparente =5	$+2.*r.^2 - 1$	$+2.*y.^2 + 2.*x.^2 - 1$
-------------------	----------------	--------------------------

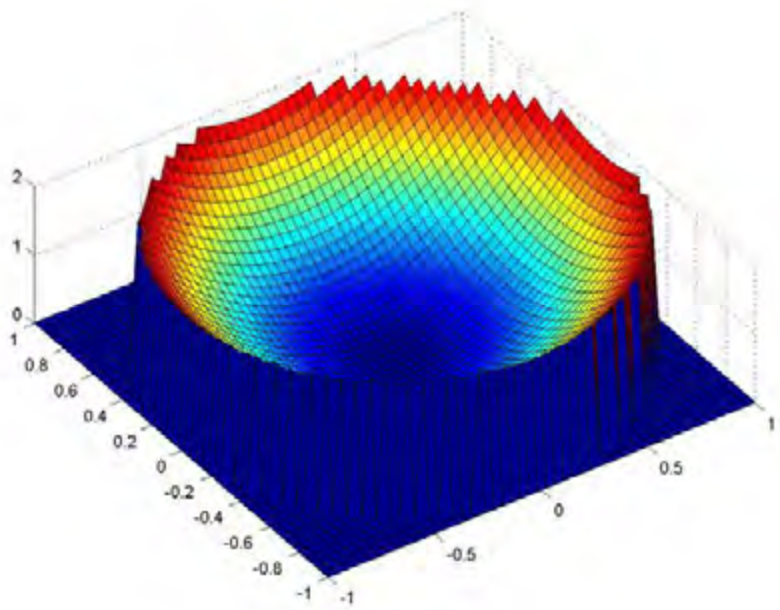


Figura A.6. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 5.

Grado aparente =6	$+1.*r.^2.*\cos(2*t)$	$+1.*y.^2 - 1.*x.^2$
-------------------	-----------------------	----------------------

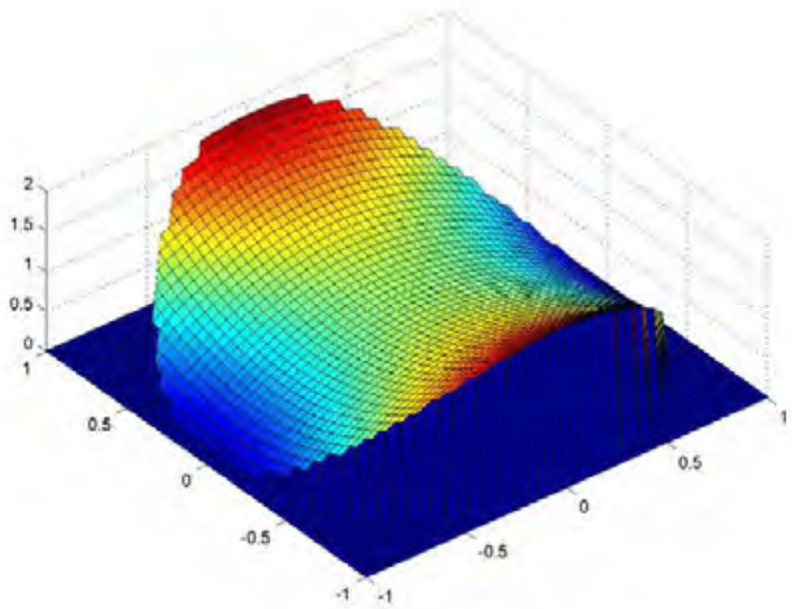


Figura A.7. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 6.

Grado aparente =7	$+1.*r.^3.*\sin(3*t)$	$+3.*x.*y.^2 -1.*x.^3$
-------------------	-----------------------	------------------------

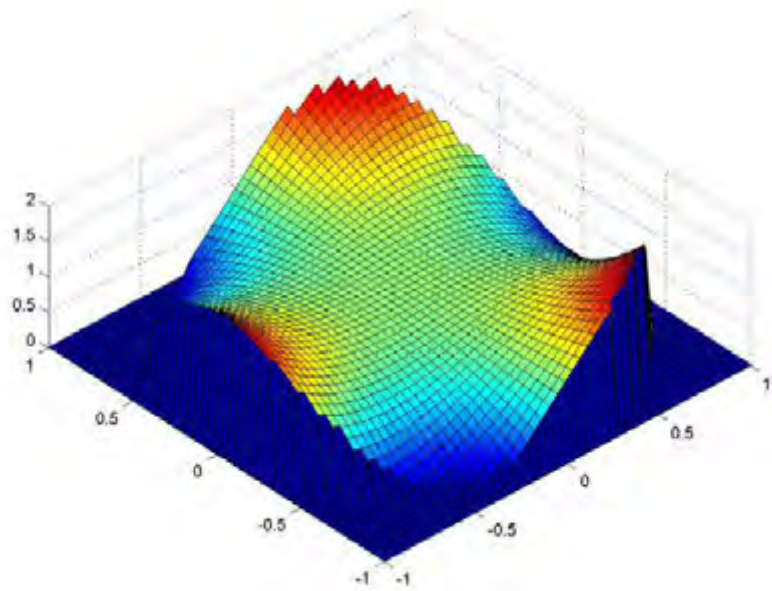


Figura A.8. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 7.

Grado aparente =8	$+3.*r.^3.*\sin(1*t) -2.*r.*\sin(1*t)$	$+3.*x.*y.^2 +3.*x.^3 -2.*x$
-------------------	--	------------------------------

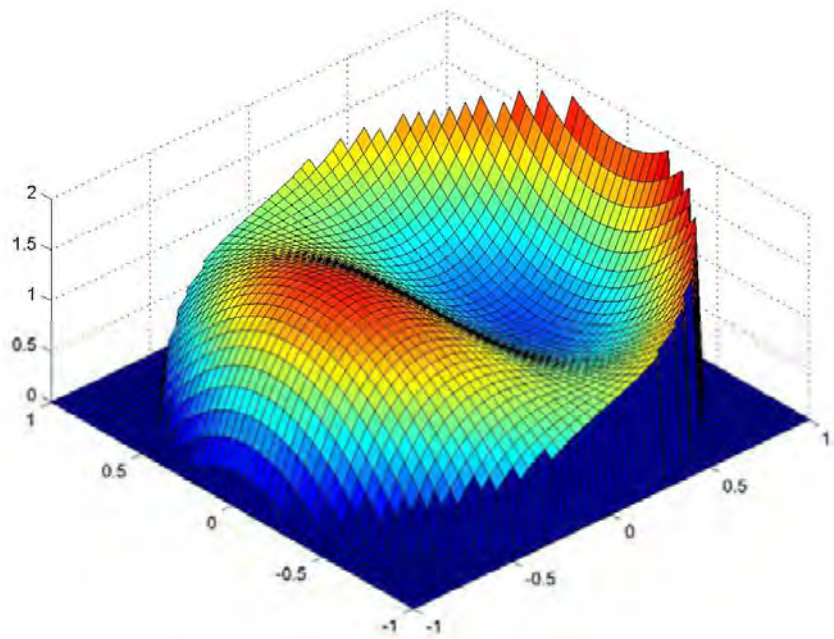


Figura A.9. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 8.

Grado aparente=9	$+3.*r.^3.*\cos(1*t) - 2.*r.*\cos(1*t)$	$+3.*y.^3 + 3.*x.^2.*y - 2.*y$
------------------	---	--------------------------------

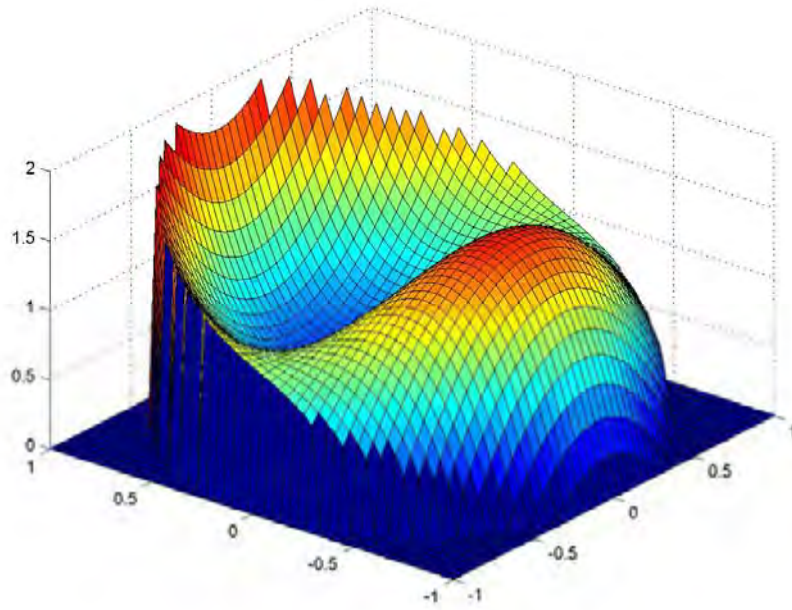


Figura A.10. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 9.

Grado aparente=10	$+1.*r.^3.*\cos(3*t)$	$+1.*y.^3 - 3.*x.^2.*y$
-------------------	-----------------------	-------------------------

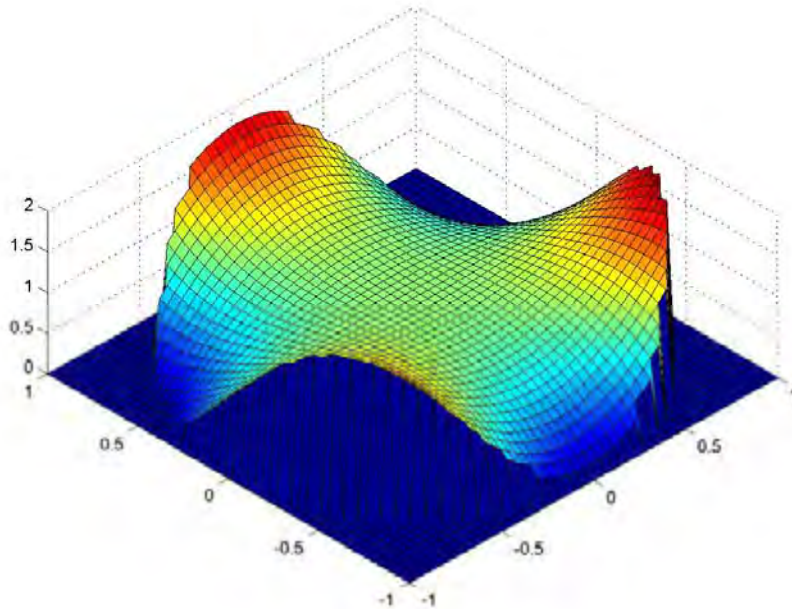


Figura A.11. Gráfica del polinomio de Zernike de grado 10.

A.3 RECONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS FRENTE DE ONDA

Se presenta a continuación dos ejemplos de los resultados obtenidos con el programa Zernike2.exe, se presenta el interferograma del cual se obtuvieron los datos interferometricos y la gráfica de la reconstrucción del frente de onda

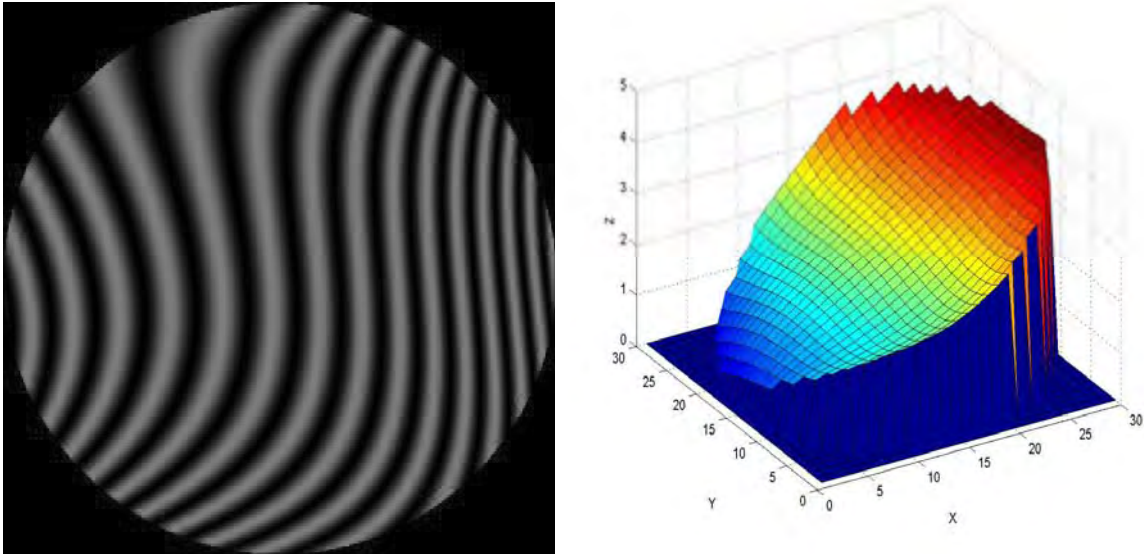


Figura A.12. Primer ejemplo de reconstrucción de frente de onda. En la izquierda se muestra el interferograma donde se obtuvieron los datos y en la derecha podemos observar el frente de onda reconstruido.

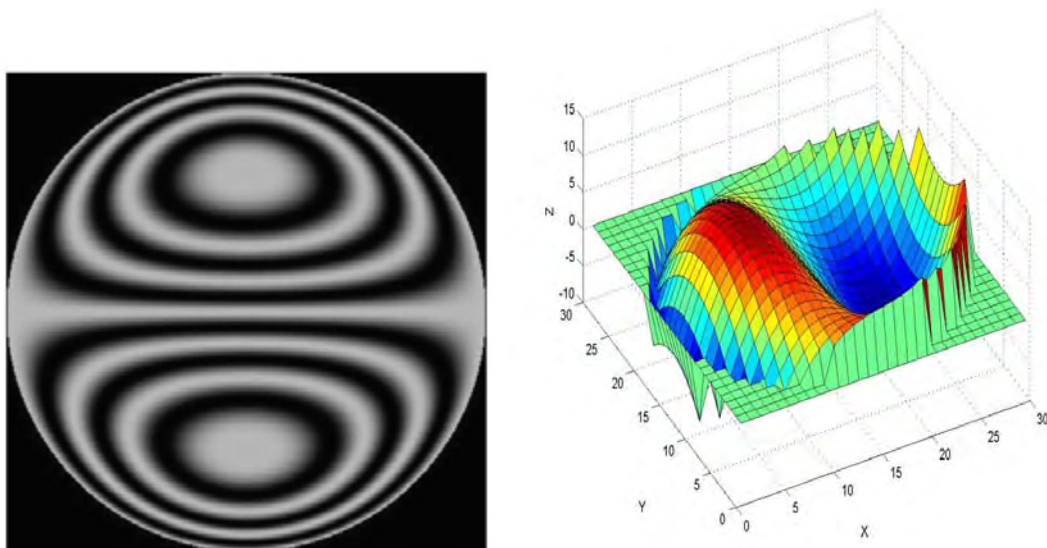


Figura A.13. Segundo ejemplo de reconstrucción de frente de onda. En la izquierda se muestra el interferograma donde se obtuvieron los datos interferometricos y en la derecha podemos observar el frente de onda reconstruido.

REFERENCIAS

CAPÍTULO 1

Born, M., Wolf, E. (1999), *Principles of Optics*, 7ª edición. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Briers, J.D., “Interferometric Testing of Optical Systems and Components: a Review,” *Opt. and Laser Tech.* **4**, 28 (1972).

Bünnagel, R., “Investigation of the Use of a Liquid Surface Mirror for a Flat Plane Reference,” *Z. Angew. Phys.* **8**, 342 (1956).

Cornejo, A. (1992), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 321-365.

Creath, K., Wyant, J. C. (1992), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*, (2nd ed.), New York: John Wiley & Sons, pp. 599–652.

Fischer, R. E., Tadic-Galeb, B. (2000), *Optical System Design*, New York: Mc Graw Hill Professional.

Feder, D.P., “Automatic Optical Design,” *Appl. Opt.* **2**, 1209 (1963).

Fontane, S. D., *Optics Cooke Book*, Optical Society of America, 1991.

Fritz, B. S.,” Absolute calibration of an optical flat,” *Opt. Eng.* **23**, 379 (1984).

Golden, L.J., “Zenike test 1: Analytical aspects,” *Appl. Opt.* **16** (1977) 205.

Ghozeil, I. (1992), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 367-396.

Ingalls, R.A., *Amateur Telescope Making*, Vol 1-3, Williman-Bell, Richmond, 1996.

Hopkins, H. H., *Wave Theory of Aberrations*, Oxford, 1950.

Karrow, H.H., *Fabrication Methods for Precision Optics*, New York: Wiley, 1993

Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, 1978

Loomis, J. S.,” Computer-generated holography and optical testing,” *Opt. Eng.* **19**, 679 (1980).

Malacara, D. (1992a), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 51-94.

Malacara, D. (1992b), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 173–206.

Malacara, D., Malacara, Z. (2004), *Handbook of Optical Design*. Marcel Dekker. USA.

Malacara, D., Servin, M., Malacara, Z. (2005), *Interferogram Análisis for optical testing*. Marcel Dekker. USA.

Mantravadi, M. V. (1992a), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 1-49.

Mantravadi, M. V. (1992b), in D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 123–172.

Offner, A. y Malacara, D. (1992), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 427-454.

Ojeda, J. (1992), en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, pp. 265-320.

Parks, R., "Traditional Optical Fabrication Methods," en *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. X, Shannon S.R. y J.C. Wyant, ed., Academic Press, San Diego, 1987

Shannon, R. t R., *The Art and Science of Lens Design*, Cambridge University Press, 1997.

Schwider, J. (1990), en E. Wolf (Ed.), *Progress in Optics*, Vol. 29. Amsterdam: North Holland, pp. 271-359.

Schultz, G., Schwider, J. (1976), en E. Wolf (Ed.), *Progress in Optics*, Vol. 13. Amsterdam: North Holland, pp. 93-167.

Scott, R. M., "Optical Manufacturing," en *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. III, Kingslake, R., ed., Academic Press, New York, 1965.

Shannon, R. R., *The Art and Science of Lens Design*, Cambridge University Press, 1997.

Slyusarev, G. G., *Aberration and optical design theory*, Macmillan, 1984.

Smartt, R. N., Steel, W. H., "Theory and Application of Point Diffraction Interferometers," *Jpn. J. Appl. Phys.* **14** (1975) 351.

Smith, W. J., *Modern Lens Design*, McGraw-Hill, Inc., 1992.

Wynne, C. G., Wormell, P., "Lens Design by Computer," *Appl. Opt.* **2** (1963) 123.

Zschommler, W., *Precision Optical Glassworking*, MacMillan, London, 1984

Zernike, F., en *Optical Image Evaluation*. Proc. NBS Semicon. Sym. (1954) 1.

CAPÍTULO 2

Bezdidko, S.N., “The use of Zernike Polynomials in Optics,” *Sov. J. Opt. Technol.* **41** (1974) 425.

Bezdidko, S.N., “Determination of the Zernike Polynomial Expansion Coefficients of the Wave Aberration,” *Sov. J. Opt. Technol.* **42** (1975) 426.

Bezdidko, S.N., “Calculation of the Strehl coefficient and determination of the best-focus plane in the case of polychromatic light,” *Sov. J. Opt. Technol.* **42** (1975) 514.

Bezdidko, S.N., “Numerical method of calculating the Strehl coefficient using Zernike polynomials,” *Sov. J. Opt. Technol.* **43** (1977) 222.

Bezdidko, S.N., “Study of the Properties of Zernike’s Orthogonal Polynomials,” *Proc. SPIE* **5174** (2003) 250.

Barakat, R., “Optimum Balance Wave-Front Aberrations for Radially Symmetric Amplitude Distributions: Generalizations of Zernike Polynomials,” *J. Opt. Soc. Am.* **70** (1980) 739.

Bhatia, A. B., Wolf, E., “On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets,” *Proc. Camb. Phil. Soc.* **50** (1954) 40.

Born, M., Wolf, E. (1999), *Principles of Optics*, 7^a edición. Cambridge, UK: Cambridge University Press

Buchdahl, H.A. (1954), *Optical Aberration Coefficients*, London/Oxford: Oxford University Press.

Cornejo-Rodriguez, A., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992, pp. 321–365.

Dai, G.M., “Zernike aberration coefficients transformed to and from Fourier series coefficients for wavefront representation,” *Opt. Lett.* **31**, 501 (2006).

Fischer, R. E., Tadic-Galeb, B. (2000), *Optical System Design*, New York: Mc Graw Hill Professional.

Hopkins, H.H. (1950), *Wave Theory of aberrations*. London/Oxford: Oxford University Press.

Kim, C. J., Shannon, R.R., en R. Shannon y J. Wyant (Eds.), *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. X, Academic Press, New York, 1987, pp. 193–221.

Kintner, E.C., “On the Mathematical Properties of the Zernike Polynomials” *Optica Acta* **23** (1976) 499.

Kintner, E.C., “Some comments on the use of the Zernike polynomials in optics,” *Optics Común.* **18** (1976) 235.

Kintner, E.C., Sillitto, R., “A New ‘Analytic’ Method for Computing the Optical Transfer Function,” *Optica Acta* **23** (1976) 607.

Kintner, E.C., “On the Mathematical Properties of the Zernike Polynomials *Optica Acta* **23** (1976) 679.

Linfoot, E. H., *Recent Advances in Optics*, Clarendon Press, Oxford, 1955.

Mahajan, V.N., en R.R. Shannon (Ed.), *Engineering and Laboratory Notes*, Opt. Soc. America, Vol. 17, 1994, p. S-21.

Mahajan, V.N., “Zernike Polynomials and Optical Aberrations,” *Appl. Opt.* **34** (1995) 8060.

Mahajan, V.N. (1998), *Optical Imaging and Aberrations: Part I Ray Geometrical Optics*. SPIE Press Monograph Vol PM45. Bellingham, WA:SPIE.

Mahajan, V.N. (2001), *Optical Imaging and Aberrations: Part II Wave Diffraction Optics*. SPIE Press Monograph Vol PM103. Bellingham, WA:SPIE.

Malacara, D., DeVore, S.L., en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, 1992, pp. 455-499.

Malacara, D., Z. Malacara (2004), *Handbook of Optical Design*, Marcel Dekker. USA.

Malacara, D., M. Servín, Z. Malacara (2005), *Interferogram Análisis for Optical Testing*, Taylor & Francis, New York.

Mantravadi, M. V., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992, pp. 1–49.

Marèchal, F., en *Optical Image Evaluation. Proc. NBS Semicen. Sym.* (1954) 9.

Myrick, D.R., “A Generalization of the Radial Polynomials of F. Zernik,” *J. SIAM Appl. Math.* **14** (1966) 476.

Nienhuis, K., B.R.A. Nijboer, “The Diffraction Theory of Optical Aberrations Part III: General Formulae for Small Aberrations Experimental Verification of the Theoretical Results,” *Physica* **14** (1949) 590.

Nijboer, B.R.A., "The Diffraction Theory of Optical Aberrations Part I: General Discussion of the Geometrical Aberrations," *Physica* **10** (1943) 679.

Nijboer, B.R.A., "The Diffraction Theory of Optical Aberrations Part II: Diffraction Pattern in the Presence of Small Aberrations," *Physica* **13** (1947) 605.

Prata, A., Rusch, W.V.T., "Algorithm for Computation of Zernike Polynomials Expansion Coefficients," *Appl. Opt.* **28** (1989) 749.

Rimmer, M.P., Wyant, J.C., "Evaluation of Large Aberrations Using a Lateral-Shear Interferometer Having Variable Shear," *Appl. Opt.* **14** (1975) 142.

Roddier, F., C. Roddier, "Wavefront Reconstruction Using Iterative Fourier Transform," *Appl. Opt.* **30**, 1325 (1991).

Tango W.J., "The Circle Polynomials of Zernike and Their Application in Optics," *Appl. Phys.* **13** (1977) 327.

Wang, J.Y., Silva, D.E., "Wave-front Interpretation with Zernike Polynomials," *Appl. Opt.* **19** (1980) 1510.

Welford, W.T. (1997), *Aberrations of Optical Systems*, Adam Hilger Series on Optics and Optoelectronics. Bristol: AdamHilger.

Wolf, E., *Reports on Progress in Physics*, Calrendon Press, Oxford, 1955.

Wünsche, A, "Generalized Zernike or Disc Polynomials," *J. Comput. Appl. Math.* **174** (2005) 135.

Wyant, J.C., Creath, K. (1992), en R. R. Shannon and J.C. Wyant (Eds.), *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. XI, Academia Press, New York, 1992, pp. 1-55.

Zernike, F., "Beugungstheorie des Sneiderverfahrens und Seiner verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode," *Physica* **1** (1934) 689.

Zernike, F., Brinkman, H.C., "Hyperspharische Funktionen und die in Spharischen Bereichen Orthogonalen Polynome," *Ver. Akad. Wet. Amst.* **38** (1935) 11.

Zernike, F., Nijboer, B.R.A., en *Theory of optical imagines*, Rev. Opt. Theor. Instrum. (1949) 679.

Zernike, F., en *Optical Image Evaluation*, Proc. NBS Semicen. Sym. (1954) 1.

CAPÍTULO 3

Barakat, R., "Optimum balance wave-front aberrations for radially symmetric amplitude distributions: generalizations of Zernike polynomials," *J. Opt. Soc. Am.* **70** (1980) 739.

Barrett, T. K., D. G. Sandier, "Artificial neural network for the determination of Hubble Space Telescope aberration from stellar images," *Appl. Opt.* **32** (1993)1720.

Born, M., E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, New York, 1980.

Cornejo-Rodriguez, A., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992, pp. 321–365.

Cubalchini, R., "Modal wave-front estimation from phase derivative measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **69** (1979) 972.

Gerald, C.F., P.O. Wheatley, *Análisis numérico con aplicaciones*, Pearson Education, México, 2000.

Guo, H., N. Korablinova, Q. Ren, J. Bille, "Wavefront reconstruction with artificial neural networks" *Opt. Express* **14** (2006) 6456

Freischlad, K. R., C. L. Koliopoulos, "Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **3** (1986) 1852.

Fried, D. L., "Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase difference measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977) 370.

Frost, R. L., C. K. Rushforth, and B. S. Baxter, "Fast FFT-based algorithm for phase estimation in speckle imaging," *Appl. Opt.* **18** (1979) 2056.

Hayslett, C. R., W. H. Swantner, "Wave-front derivation by three computer programs," *Appl. Opt.* **19** (1980) 3401.

Herrmann, J., "Least-squares wave front errors of minimum norm," *J. Opt. Soc. Am.* **70** (1980) 28.

Herrmann, J., "Cross coupling and aliasing in modal wavefront estimation," *J. Opt. Soc. Am.* **71** (1981) 989.

Hudgin, R. H., "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977) 375.

Hunt, B. R., "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences," *J. Opt. Soc. Am.* **69** (1979) 393.

Kim, C.J., "Polynomial Fit of Interferograms," *Appl. Opt.* **21** (1982) 4521.

Kincaid, D., W. Cheney, *Análisis numérico, Las matemáticas del cálculo científico*, Addison Wesley Iberoamericana, E.U.A., (1994).

Korwan, D., en *Precision Surface Metrology*, ed. J. C. Wyant, *Proc. SPIE* **429** (1983) 194.

Loomis, J., en *Optical Interferograms-Reduction and Interpretation*, eds. A. H. Guenther y D. H. Liebenberg, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, Pa., 1978, pp. 71-86.

Macy, W.W., Jr., "Two dimensional fringe pattern analysis," *Appl. Opt.* **22** (1983) 3898.

Mahajan, V. N., "Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils," *J. Opt. Soc. Am.* **71** (1981) 75.

Malacara, D., J. M. Carpio-Valadez, and J. J. Sanchez-Mondragon, "Wave-front fitting with discrete orthogonal polynomials in a unit radius circle," *Opt. Eng.* **29** (1990) 672.

Malacara, D., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992, pp. 51-94.

Malacara, D., en *Handbook of Optics II*, Mc Graw Hill, U.S.A., 1995, pp 30.1-30.26.

Malacara, D., M. Servín, Z. Malacara (2005), *Interferogram Análisis for Optical Testing*, Taylor & Francis, New York.

Mantravadi, M. V., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992a, pp. 1-49.

Mantravadi, M. V., en *Optical Shop Testing*, ed. D. Malacara, Wiley, New York, 1992b, pp. 123-172.

Mieth, U., W. Osten, "Three methods for interpolation of phase values between fringe pattern skeletons," *Proc. SPIE* **1121** (1990)151.

Montera, D. A., B. M. Welsh, M. C. Roggemann, and D. W. Ruck, "Prediction of wave-front sensor slope measurements with artificial neural networks," *Appl. Opt.* **36** (1997) 675.

Noll, R. J., "Phase estimates from slope-type wave-front sensors," *J. Opt. Soc. Am.* **68** (1978) 139.

Omura, K., T. Yatagai, "Phase measuring Ronchi test," *Appl. Opt.* **27** (1988) 523.

Piskunov, N., *Calculo diferencial e integral*, Limusa, México, 2004

Rimmer, M. P., C. M. King, and D. G. Fox, "Computer Program for the Analysis of Interferometric Test Data," *Appl. Opt.* **11** (1972) 2790.

Rimmer, M. P., J. C. Wyant, "Evaluation of large aberrations using a lateral shear interferometer having variable shear," *Appl. Opt.* **14** (1975) 142.

Roddier, F., "Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics," *Appl. Opt.* **29** (1988) 1223.

Robinson, D. W., G. T. Reid (1993), *Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement Techniques*, Institute of Physics Publishing, Great Britain.

Servin, M., D. Malacara, and J. L. Marroquin, "Wave-front recovery from two orthogonal sheared interferograms," *Appl. Opt.* **35** (1996) 4343.

Southwell, W. H., "Wave-front estimation from wave-front slope measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **70** (1980) 998.

Sumita, H., "Orthonormal expansion of the aberration difference function and its application to image evaluation," *Jpn. J. Appl. Phys.* **8** (1969) 1027.

Swantner, W. H., W. H. Lowrey, "Zernike-Tatian polynomials for interferogram reduction," *Appl. Opt.* **19** (1980) 161.

Takeda, M., H. Ina, S.Kobayashi. "Fourier transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J.Opt. Soc. Am.* **72** (1982) 156.

Tatian, B., "Aberration balancing in rotationally symmetric lenses," *J. Opt. Soc. Am.* **64** (1974) 1083.

Teague, M. R., Deterministic phase retrieval: a Green's function solution," *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 1434.

Wan, D.S., D.T. Lin, "Ronchi test and a new phase reduction algorithm," *Appl. Opt.* **29** (1990) 3255.

Wang, J. Y., D. E. Silva, "Wave-front interpretation with Zernike polynomials" *Appl. Opt.* **19** (1980)1510.

Yasuno, Y., T. Yatagai, T. F. Wiesendanger, A. K. Ruprecht, and H. J. Tiziani, "Aberration measurement from confocal axial intensity response using neural network," *Opt. Express* **10** (2002) 1451.

CAPÍTULO 4

Mahajan, V.N. (1998), *Optical Imaging and Aberrations: Part I Ray Geometrical Optics*. SPIE Press Monograph Vol PM45. Bellingham, WA:SPIE.

Malacara, D., DeVore, S.L., en D. Malacara (Ed.), *Optical Shop Testing*. New York: John Wiley, 1992, pp. 455-499.

Malacara, D., J. M. Carpio-Valdéz, J.J. Sánchez-Mondragón, “Wavefront fitting with discrete orthogonal polynomials in a unit radius circle,” *Opt. Eng.* **6** (1990) 672.

Creating Graphical User Invefaces, The Math Works, United States, 2005.

ANEXO

Gonzalez, R.C., R.E. Woods, S.L. Eddins (2004), *Digital Image Processing using MATLAB*. Pearson Prentice Hall. United States of America.