



CENTRO DE INVESTIGACIONES EN OPTICA, A.C.

Estudio de la resolución difractiva de la placa zonal de
Fresnel y propuestas para sus mejoras

Presenta

Juan Manuel Franco Sánchez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Óptica)

Asesor:

Dr. Moisés Cywiak Garbarcewicz

León, Gto., Diciembre 2012

(Tesis definitiva. Incluye cambios sugeridos por revisores de tesis)

Agradecimientos

Quiero externar mi más profundo agradecimiento a mis padres y hermanos, quienes siempre me han apoyado en las malas y en las peores, y también a perseverar y trabajar por los retos que se presentan en la vida.

Agradezco a mi asesor el Dr. Moisés Cywiak Garbarcewicz por sus grandes enseñanzas, paciencia, sinceridad, franqueza, regaños y sobre todo su apoyo incondicional. Al Dr. Mauricio Flores por la materia de “Óptica física” fundamental para quienes andamos en este camino de la óptica, Muchas Gracias. Muchas gracias también los profesores de la maestría.

A los sinodales de este trabajo de tesis, Dr. David Moreno y Dr. Arquímedes Morales, por sus grandes aportaciones para culminar este proyecto de tesis.

A mis amigos y compañeros del CIO en especial a Joel, Octavio, Moi; Ulises, Adrian. Gracias

A todas las personas de DFA y biblioteca; Dr. Francisco Cuevas, a Guille, Marlene, Lorena, Fabiola, Laura, Anabel, José Juan, Rocío, Ángeles Sánchez, Ana y Sivani GRACIAS por su profesionalismo y disposición de servicio.

Finalmente, agradezco al CONACYT por haberme otorgado la beca durante mi periodo de estudiante en este Centro de Investigación.

Índice

Resumen	1
Capítulo 1: Introducción	2
Capítulo 2: Ondas y propagación de la luz	5
2.1 Integral de Propagación de Fresnel	5
2.2 Transformada de Fourier.....	6
2.3 Transformada de Fresnel.....	7
2.3.1 Integral de Propagación de Fresnel para una distribución de amplitud tipo rendija	7
2.3.2 Haz gaussiano	12
Capítulo 3: Representación de una función mediante superposición de funciones gaussianas	18
3.1 Descripción analítica	18
3.2 Demostración analítica de la representación por superposición	21
Capítulo 4: Placas zonales de Fresnel y propuesta para mejorar su desempeño	26
4.1 Modelo analítico de las placas zonales de Fresnel	26
4.2 Ciclo de trabajo para una placa zonal de Fresnel	29
4.3. Representación de las placas zonales de Fresnel mediante superposición de funciones gaussianas	30
Capítulo 5: Conclusiones y Perspectivas	41
Bibliografía:.....	43

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio analítico de placas zonales, también llamadas lentes de Fresnel y una propuesta para mejorar sus propiedades de enfocamiento. Este estudio se realiza para una región de longitud de onda muy corta, los rayos X. Este estudio tiene la finalidad de coadyuvar en el desarrollo de los microscopios de rayos X modernos. Se ha demostrado que es posible describir con buena precisión el funcionamiento de estas componentes mediante la integral escalar de difracción de Fresnel. Sin embargo, realizar dichos cálculos representa un complejo problema ya que no es posible realizarlos de manera exacta mediante integrales conocidas. Una manera alternativa, para realizar los cálculos de manera numérica, es utilizando la superposición de haces gaussianos. Esta técnica presenta la ventaja de que un frente de onda puede ser representado con muy buena precisión mediante una descomposición de pequeñas ondas gaussianas. En este trabajo se presenta la metodología para el cálculo del patrón de difracción mediante la superposición de haces gaussianos así como los cálculos respectivos de las modificaciones propuestas para tornar más eficaz las características de las placas zonales de Fresnel.

Palabras clave: Difracción, placa zonal de Fresnel, elementos ópticos difractivos.

Capítulo 1: Introducción

La capacidad de enfoque y características de formación de imágenes de los elementos ópticos se puede representar con buena precisión mediante la difracción, que de manera inherente se produce debido a las propiedades ondulatorias de la luz que interactúan con dichas componentes. Su diseño, análisis y cálculo se pueden sustentar mediante el estudio de lo que se denomina óptica difractiva (OD) [1-5]. Dentro de los elementos ópticos se han desarrollado algunos que aprovechan de manera especial la difracción, y para diferenciarlos respecto a los elementos ópticos convencionales se les denomina elementos ópticos difractivos. Estos componentes funcionan de manera similar a los de una lente convencional que se diseña considerando sus propiedades refractivas. Los elementos ópticos difractivos son diseñados tomando como base alguna estructura periódica fundamental y aprovechando la naturaleza ondulatoria de la luz, la cual al interactuar con las ondas luminosas cambia la dirección de propagación de la luz en el interior del elemento difractivo de manera controlada. La luz emergente, al recombinarse, forma ondas que se apegan hasta cierto grado a las características fijadas en el diseño. Estas características son descritas de manera analítica mediante la teoría de la difracción [6]. Como se ha indicado, las lentes difractivas son diseñadas usando un patrón fundamental: serie de anillos radiales o zonas de ancho decreciente y se les denomina placas zonales [7].

Los elementos ópticos difractivos poseen propiedades que les permiten modelar a las lentes refractivas, ya que presentan ciertas características de enfocamiento de la luz que permiten producir imágenes similares a las lentes refractivas. Sin embargo debido a la presencia de armónicos dichas imágenes son algo deficientes. A pesar de este hecho, es necesario resaltar que las lentes difractivas son de gran ventaja frente a las lentes refractivas especialmente cuando la fuente de iluminación es de muy corta longitud de onda, como es el caso de los rayos X [8], donde las lentes refractivas no pueden ser empleadas de manera directa. Una ventaja adicional que presentan las lentes difractivas consiste en la posibilidad de compartir diferentes elementos difractivos en el mismo sustrato (es decir, sobre una misma placa), sin que interfieran entre sí, permitiendo diseñar por ejemplo arreglos de micro-lentes [9-12]. Adicionalmente, los elementos ópticos difractivos pueden actuar

simultáneamente como lentes, separadores de haces y filtros, así también como correctores de frentes de ondas [11-12]. Otra característica importante de los elementos ópticos difractivos es que permiten generar patrones de difracción distintos a los elementos refractivos. Como ejemplo, mediante los elementos de óptica difractiva es posible obtener una lente con distancia focal muy pequeña, para lo cual la óptica convencional está restringida por los radios de curvatura y diámetros de los mismos.

En este trabajo se presenta un estudio analítico de placas zonales, también llamadas lentes de Fresnel y una propuesta para mejorar sus propiedades de enfocamiento. Este estudio se realiza para una región de longitud de onda muy corta, los rayos X [8]. Este estudio tiene la finalidad de coadyuvar en el desarrollo de los microscopios de rayos X modernos. Se ha demostrado que es posible describir con buena precisión el funcionamiento de estas componentes mediante la integral escalar de difracción de Fresnel [7]. Sin embargo, realizar dichos cálculos representa un complejo problema ya que no es posible realizarlos de manera exacta mediante integrales conocidas. Por ello, es necesario recurrir a métodos numéricos. Sin embargo tampoco son aplicables debido a las altas frecuencias que presentan estas componentes y a la existencia de una fase cuadrática presente en la integral de Fresnel, la cual oscila fuertemente causando errores en los patrones de difracción calculados.

Una manera alternativa, para realizar los cálculos de manera numérica, es utilizando la superposición de haces gaussianos reportados en [13]. Esta técnica presenta la ventaja de que un frente de onda puede ser representado con muy buena precisión mediante una descomposición de pequeñas ondas gaussianas. En este trabajo se presenta la metodología para el cálculo del patrón de difracción mediante la superposición de haces gaussianos así como los cálculos respectivos de las modificaciones propuestas para tornar más eficaz las características de las placas zonales de Fresnel.

La presentación de este trabajo se divide en capítulos de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan los principios analíticos de la propagación de la luz, en el capítulo 3 se muestra el principio analítico del método de superposición de gaussianas, en el capítulo 4 se presentan los resultados del análisis de las placas zonales de Fresnel y los cálculos

numéricos correspondientes a los patrones de difracción en una vecindad de la región focal. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y perspectivas y mejoras del trabajo presentado.

Capítulo 2: Ondas y propagación de la luz

2.1 Integral de Propagación de Fresnel

La integral de Fresnel permite determinar la distribución de amplitud de la propagación de una onda desde un plano objeto ($x-y$) hasta un plano imagen ($\xi-\eta$). Ambos planos son paralelos entre sí y están separados una distancia z como se muestra en la figura 2.1.

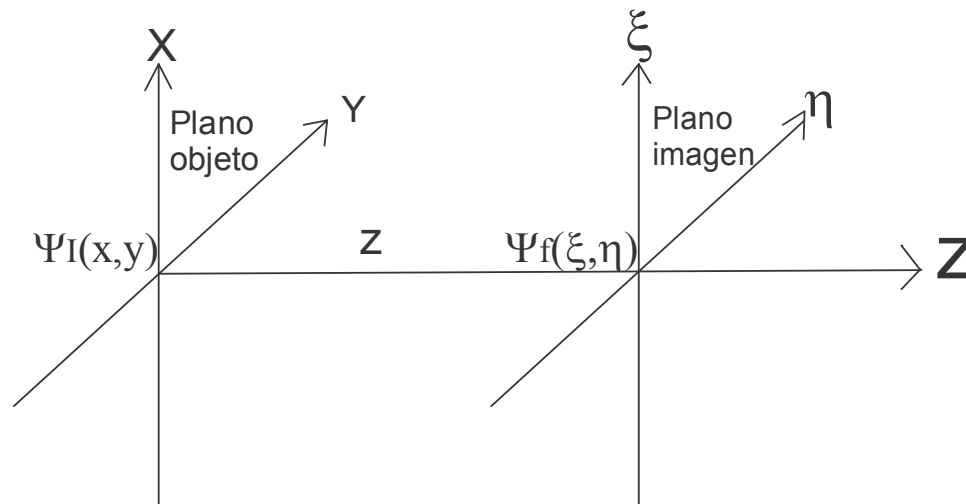


Figura 2.1. Distribución de amplitud inicial Ψ_i en el plano ($x-y$) y su correspondiente distribución final Ψ_f en el plano ($\xi-\eta$).

La integral de Fresnel está dada por la expresión matemática siguiente,

$$\Psi_f(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{i\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i(x, y) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} dx dy \quad (2.1)$$

donde i es la unidad imaginaria definida $i = \sqrt{-1}$, y λ es la longitud de onda de la luz de iluminación.

La integral de Fresnel representada por la ecuación (2.1) físicamente puede ser interpretada de acuerdo al principio de propagación de ondas pequeñas (wavelets) de Huygens. En este principio se considera que el frente de onda puede representarse por una superposición de ondas esféricas, en el cual cada onda pequeña contribuye de manera aditiva y coherente a la formación del frente de onda propagante. Los términos cuadráticos en la ecuación (2.1)

representan estos frentes de onda esféricos en una aproximación de primer orden en una serie de Taylor [14]. La sumatoria, a su vez, queda representada por las integrales en dicha ecuación.

Con el fin de propagar ondas cilíndricas, se introduce la integral de Fresnel. Este caso puede visualizarse, ya sea en una dimensión, o de una manera más general como el tratamiento analítico de la propagación para ondas cilíndricas. En este trabajo éste será el tratamiento analítico utilizado.

La integral de Fresnel unidimensional (o cilíndrica) queda dada por la ecuación (2.2),

$$\Psi_f(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i(x) \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-\xi)^2]\right\} dx \quad (2.2)$$

2.2 Transformada de Fourier

Una herramienta matemática utilizada ampliamente en las ciencias ópticas, entre otras, es la transformada de Fourier, la cual encuentra su aplicación en el cálculo de los patrones de difracción mediante la integral de Fresnel. Sea $f(x)$ una función arbitraria, en general compleja, que depende del parámetro x . Su transformada de Fourier se define como,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi ux) dx = \mathfrak{F}\{f(x)\} \quad (2.3)$$

En el caso de que la integral dada en la ecuación (2.3) exista, entonces es posible calcular la transformada inversa, la cual está dada por la expresión (2.4),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(i2\pi ux) dx = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\} \quad (2.4)$$

Físicamente, la transformada de Fourier puede visualizarse como la representación del espectro de frecuencias de la función $f(x)$, por lo que la variable u representa el eje de frecuencias o el espacio denominado de Fourier [15-19].

2.3 Transformada de Fresnel

La integral de Fresnel dada por la ecuación (2.2) puede ser reescrita en función de la transformada de Fourier, mostrada en la ecuación (2.5),

$$\Psi_f(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \xi^2\right) \mathfrak{F}\left\{\Psi_i(x) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \xi^2\right)\right\} \quad (2.5)$$

El representar la transformada de Fresnel de la forma dada en la ecuación (2.5) permite tener una visualización alternativa de su significado físico. Dado que la transformada de Fourier de un producto resulta ser una convolución de las transformadas de las funciones involucradas, de la ecuación (2.5) puede observarse que la transformada de Fresnel involucra la convolución de una fase cuadrática con la transformada de Fourier de la función objeto. Adicionalmente, el utilizar las técnicas de Fourier, permite realizar los cálculos de una manera más eficiente aprovechando las herramientas que ya se han desarrollado específicamente para cálculos de Fourier [15-19].

A continuación se presentan ejemplos unidimensionales de la aplicación de la integral de propagación de Fresnel para algunas distribuciones de amplitud típicas en el plano objeto y sus correspondientes distribuciones en el plano imagen.

2.3.1 Integral de Propagación de Fresnel para una distribución de amplitud tipo rendija

En la figura (2.2) muestra la distribución de amplitud de una rendija (rectangular) en el plano objeto ($x - y$).

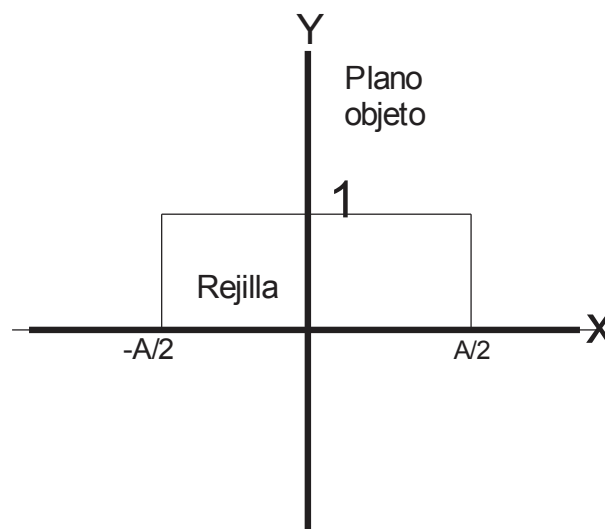


Figura 2.2. Distribución de amplitud tipo rendija en el plano objeto ($x-y$).

La correspondiente distribución de amplitud en el plano imagen ($\xi - \eta$) se muestra en la siguiente ecuación,

$$\Psi_f(\xi) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x}{A}\right) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - \xi)^2]\right\} dx \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.6), función $f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{A}\right)$ se define de la manera usual, esto es, unitaria en el intervalo $[-A/2, A/2]$ y cero fuera del intervalo.

La ecuación (2.6) no puede resolverse de manera analítica por lo que lo que se procede a utilizar algún método numérico para su evaluación aproximada. La distribución en intensidad en el plano imagen para una rendija de 1 mm colocada en el plano objeto, utilizando técnicas de Fourier, se muestra en las figuras (2.3) a (2.6) para distintas distancias de observación.

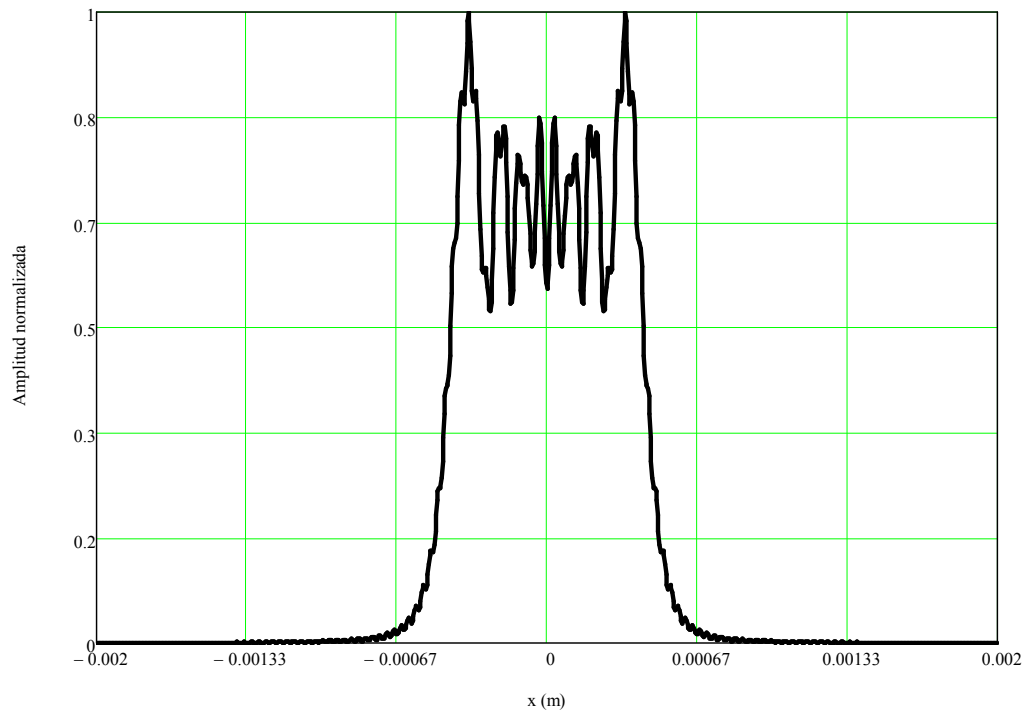


Figura 2.3. Distribución de intensidad en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 5 cm.

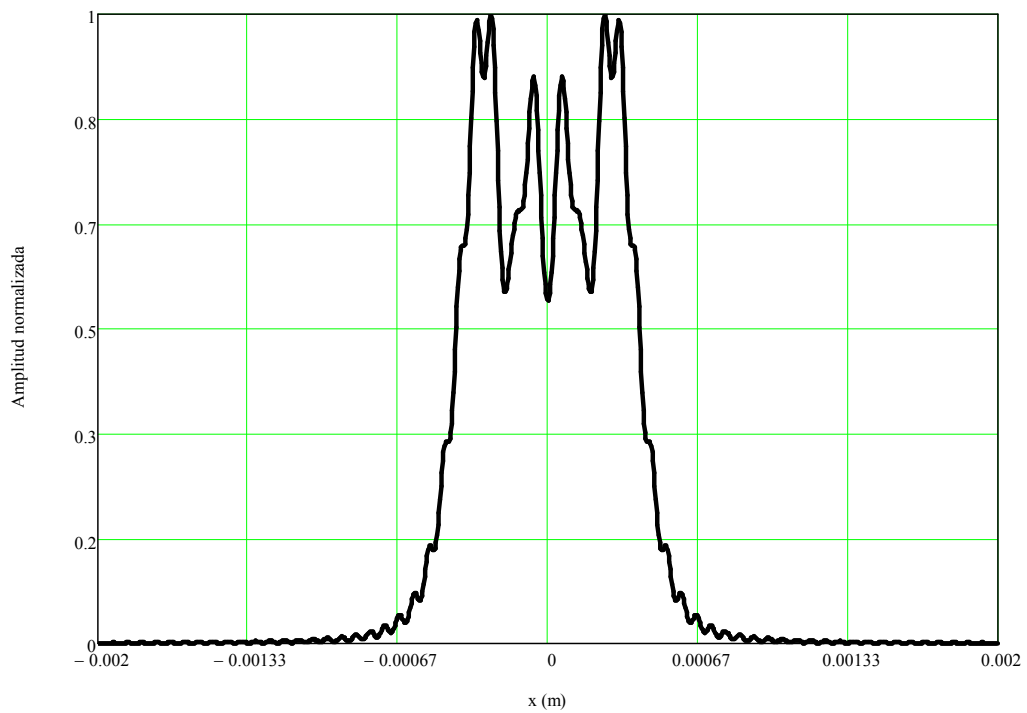


Figura 2.4. Distribución de intensidad en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 10 cm.

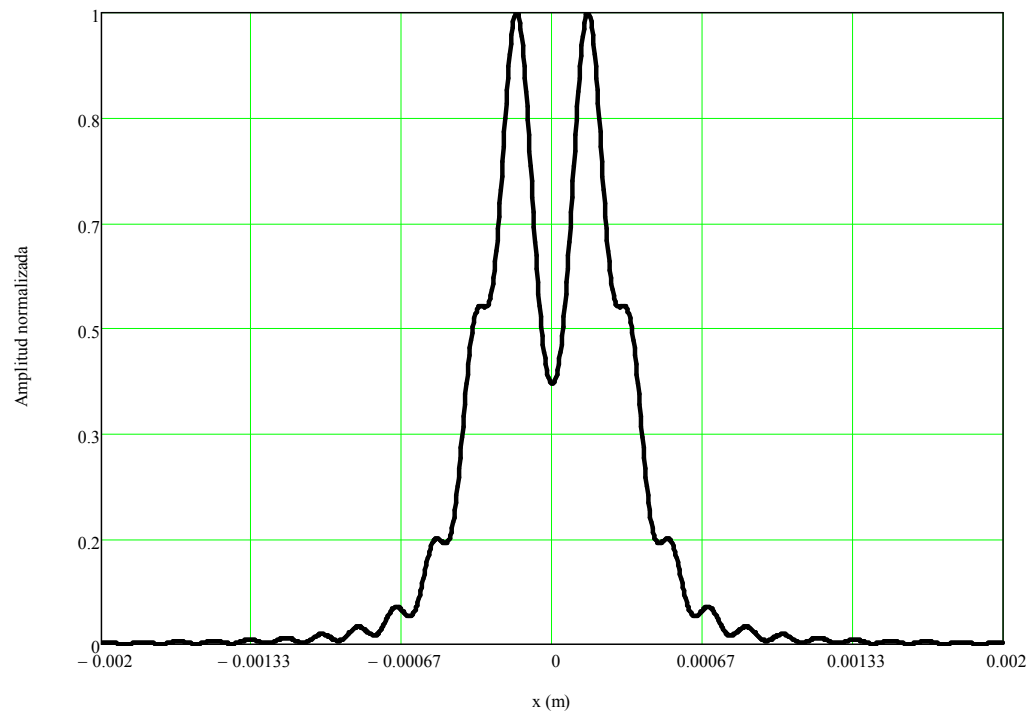


Figura 2.5. Distribución de intensidad en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 25 cm.

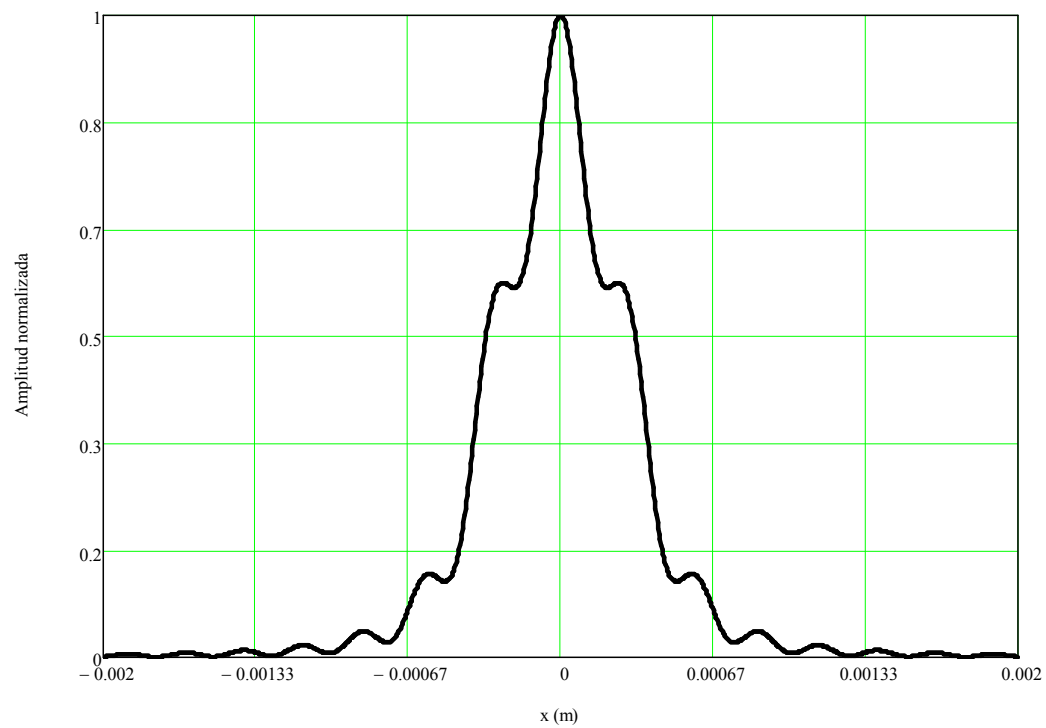


Figura 2.6. Distribución de intensidad en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 40 cm.

Se notará que para casos muy alejados del plano objeto, la función de distribución asemeja una función $\text{sinc}(x)$, la cual se define de acuerdo a la ecuación (2.7),

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.8) representa la denominada difracción Fraunhofer o de campo lejano. En este campo, puede aproximarse por la expresión (2.8),

$$\Psi_f(\xi) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \xi^2\right) \mathfrak{F}\{\Psi_i(x)\} \quad (2.8)$$

Utilizando el principio de Fraunhofer para la distribución rectangular del plano objeto, la amplitud en el plano imagen puede aproximarse como muestra la ecuación (2.9),

$$\Psi_f(\xi) = \frac{A \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \xi^2\right) \text{sinc}\left(A \frac{\xi}{\lambda z}\right) \quad (2.9)$$

La distribución de amplitud en el plano imagen, con distancia de separación de 1 m, se muestra en la figura (2.7).

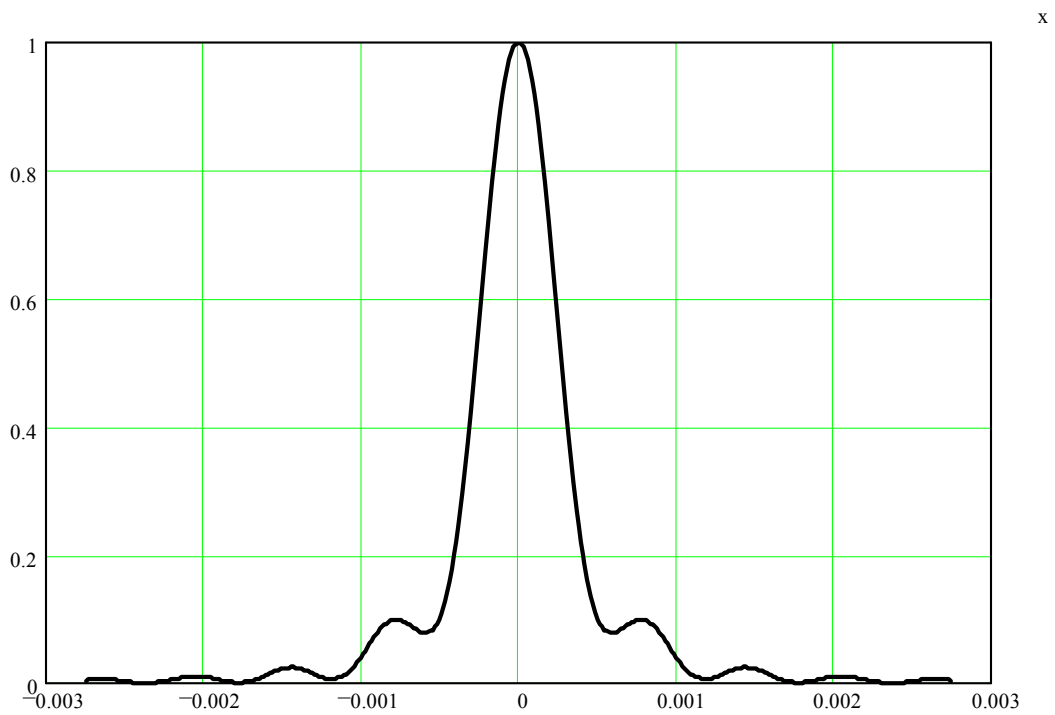


Figura 2.7. Distribución de intensidad tipo sinc en el plano imagen para una rendija. El plano imagen está ubicado a 1 m.

2.3.2 Haz gaussiano

La distribución de amplitud de un frente de onda gaussiano con semiancho r_0 , localizado en el plano objeto $(x-y)$ centrado en el origen está dada por la ecuación (2.10). La distribución de amplitud de este haz se muestra gráficamente en la figura (2.8).

$$\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{r_0^2}\right) \quad (2.10)$$

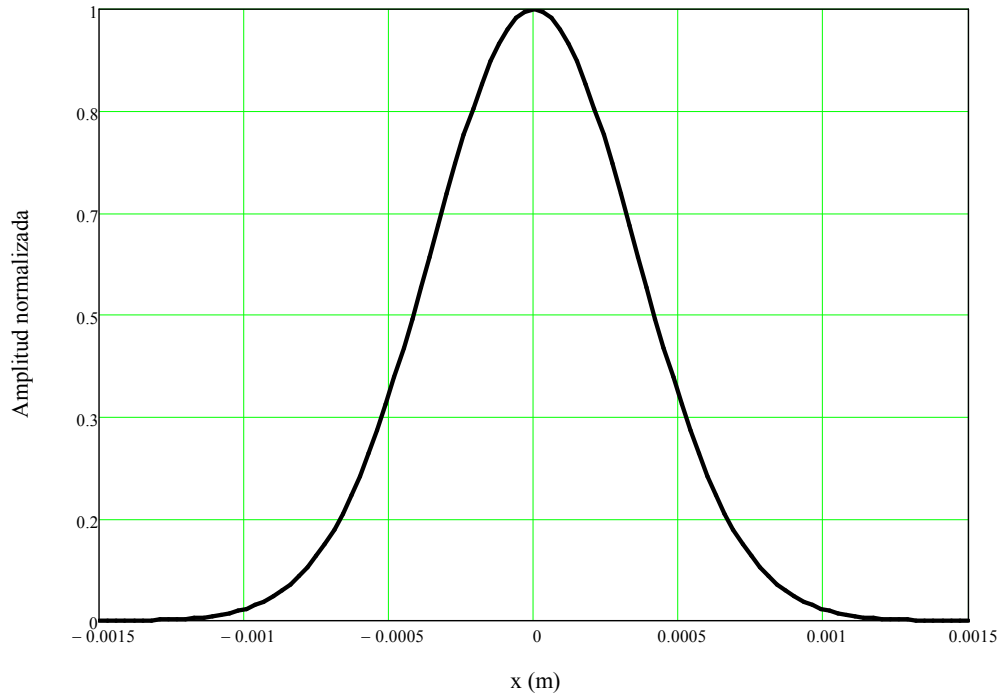


Figura 2.8. Distribución de amplitud de un haz gaussiano normalizado centrado en origen en plano objeto ($x-y$).

Sustituyendo la ecuación (2.10) en la integral de propagación de Fresnel (2.2) para una dimensión se obtiene la siguiente expresión,

$$\Psi_f(\xi) = \frac{A \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{r_0^2}\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} (x - \xi)^2\right) dx \quad (2.11)$$

La integral mostrada en la ecuación (2.11) puede resolverse de manera exacta. El resultado obtenido está dado por la ecuación (2.12),

$$\Psi(\xi) = \frac{A\pi r_0^2}{\lambda z - i\pi r_0^2} \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{i} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \xi^2\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 r_0^2 \lambda z}{\lambda z - i\pi r_0^2} \left(\frac{\xi}{\lambda z}\right)^2\right) \quad (2.12)$$

El resultado anterior puede escribirse de una manera más compacta, separando las exponenciales que contengan términos únicamente reales y las que contengan sólo términos imaginarios, se obtiene la ecuación (2.13),

$$\Psi(\xi) = A \exp\left(-\frac{\xi^2}{R_0^2}\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \exp\left(i \frac{\xi^2}{R_c^2}\right) \quad (2.13)$$

Cada factor en la ecuación (2.13) corresponde a una propiedad física de haz. El primer y segundo factor corresponde a la amplitud del campo electromagnético y su distribución radial sobre el plano imagen respectivamente. Estos factores se encargan de cumplir la conservación de la energía del haz, pues conforme se propaga éste, se vuelve más ancho y su amplitud disminuye, distribuyendo la energía en un área más grande conforme se aleja de la cintura del haz. El tercero es la fase longitudinal (en la dirección de propagación). Por último, el cuarto término consiste de una exponencial con argumento imaginario que representa, como se ha indicado anteriormente de la aproximación parabólica de Fresnel, una onda esférica, en este caso divergente.

Los parámetros que describen un haz gaussiano y que cambian durante su propagación, son el semiancho del haz (o diámetro del haz) y el radio de curvatura que se encuentra en la exponencial real y en la exponencial imaginaria cuadrática respectivamente.

En el semiancho del haz, ecuación (2.14) se observa el aumento del valor inicial r_0 , a un valor R_0 dado por la ecuación (2.14),

$$R_0 \equiv r_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 r_0^4}} \quad (2.14)$$

Una gráfica del semiancho del haz gaussiano en función de la distancia de propagación se presenta en la figura (2.9),

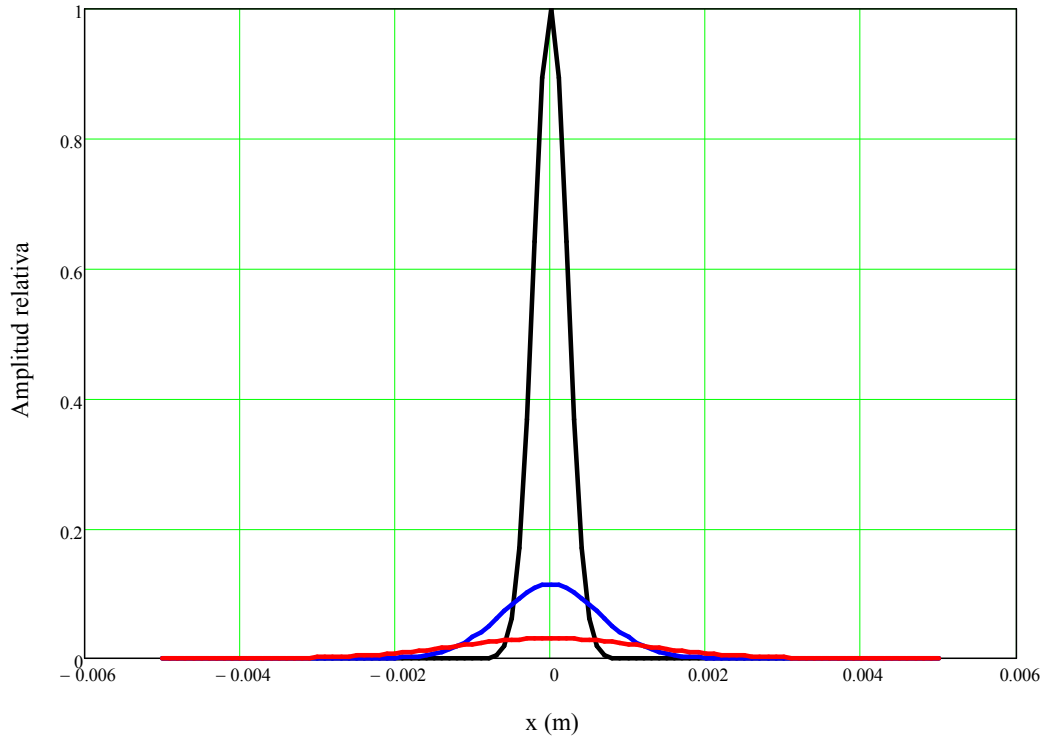


Figura 2.9. Distribución de intensidades del haz gaussiano en función de la distancia de propagación z . En $z=0$ m, traza negra, para $z=5$ m traza azul. Por último para 10 m traza en rojo.

De la exponencial imaginaria (fase cuadrática) de la ecuación (2.13) puede observarse que el radio de curvatura queda dado por la ecuación (2.15),

$$R_c(z) \equiv \left[1 + \frac{r_0^4 \pi^2}{4\lambda^2 z^2} \right] \quad (2.15)$$

Con las definiciones introducidas por las ecuaciones (2.14) y (2.15) el haz gaussiano puede escribirse de manera más compacta como en la ecuación (2.16)

$$\Psi_f(\xi) = A \exp \left[-\frac{\xi^2}{R_0^2} \right] \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda R_c} \xi^2 \right] \quad (2.16)$$

En la figura (2.10) se muestra la variación del radio de curvatura en función de la distancia de propagación.

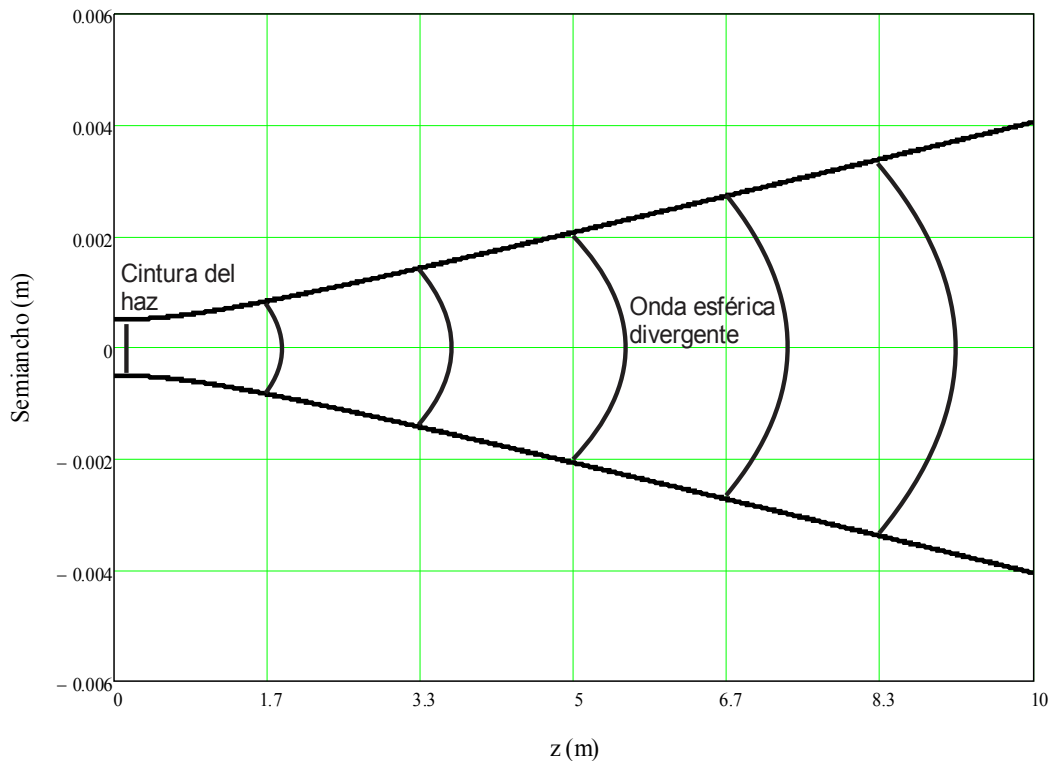


Figura 2.10. Variación del radio de curvatura del haz gaussiano en función de la distancia z de propagación.

En la figura anterior se hace notar que en el plano objeto el frente de onda del haz gaussiano tiene el comportamiento de una onda plana, y lo que mantiene la característica gaussiana es su perfil descrito por su distribución de amplitud e intensidad. Una vez que el haz gaussiano es propagado a una distancia determinada, el haz presenta una fase cuadrática, lo cual indica que el haz es una onda esférica que mantiene su confinamiento espacial dada por la envolvente gaussiana representada por la exponencial real de la ecuación (2.16).

Dada la simetría de la propagación de un haz gaussiano, es posible calcular la amplitud de distribución para valores negativos de z . Con el fin de conocer el perfil de la amplitud de la onda gaussiana para el caso convergente, como sería en el caso de utilizar una lente positiva para enfocar un haz gaussiano, es posible realizar un reflejo de la onda divergente dispuesta del lado derecho del plano objeto hacia el eje negativo, en el lado izquierdo. En la figura (2.11) se muestra el comportamiento general de la propagación de un haz gaussiano.

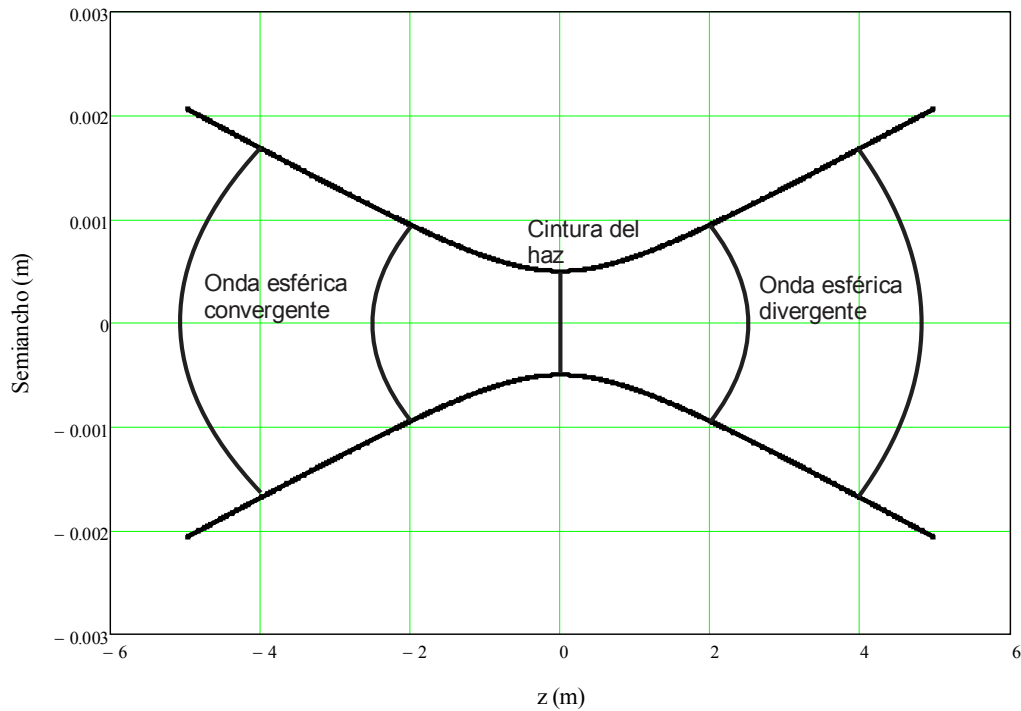


Figura 2.11. Comportamiento general de la propagación de un haz gaussiano, donde se ha incluido la reflexión del caso divergente para obtener la correspondiente parte convergente.

Se puede observar en la figura anterior que la cintura del haz queda colocada precisamente donde el haz gaussiano tiene el comportamiento de una onda plana, ya que su radio de curvatura en este plano es infinito, de acuerdo a la ecuación (2.15) para $z=0$. Como se ha mencionado previamente la propagación del haz gaussiano muestra simetría alrededor del plano donde se ubica la cintura del haz, en nuestro caso este plano es el plano objeto.

Capítulo 3: Representación de una función mediante superposición de funciones gaussianas

3.1 Descripción analítica

El método de la superposición de gaussianas permite representar una función arbitraria mediante un número finito de gaussianas como se demostrará a continuación en este capítulo. Sin embargo, aunque esta aseveración parece razonable (en principio), surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿será posible representar mediante una superposición de gaussianas una función con un ancho de banda ilimitado? Si la respuesta resultara positiva, por ende, entonces funciones de ancho limitado en frecuencia también podrán ser así representadas.

El cuestionamiento anterior puede aclararse de una manera intuitiva. Para este fin consideraremos una función típica, de ancho de banda ilimitada, la función rectángulo $Rect(x, A)$, definida igual a uno si $-A/2 \leq x \leq A/2$, y cero en caso contrario.

Para iniciar, intentaremos tomar un número limitado (mínimo posible) de funciones gaussianas. En este caso tomaremos tres gaussianas. Cada gaussina tendrá el mismo ancho y las situaremos de la siguiente manera: una estará centrada en el origen, otra centrada en $-A/2$ y la última centrada en $+A/2$. Se notará que bajo estas condiciones, las gaussianas se estarán situando siguiendo un criterio similar al criterio de Rayleigh; es decir, la función gaussiana colocada a la izquierda se ubica con su valor $1/e$ coincidiendo con el máximo de la gaussiana a su derecha, figura 3.1.

Es importante destacar que el criterio que utilizaremos es que la amplitud de cada gaussiana sea igual al valor de la función en el punto en que está centrada la gaussiana. En nuestro sencillo ejemplo, este valor es la unidad.

Entonces, la superposición de gaussianas con las condiciones ya indicadas puede analíticamente escribirse de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{\left(x + \frac{A}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{A}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (3.1)$$

Se notará la inclusión de un factor multiplicativo $1/\sqrt{\pi}$ en la ecuación (3.1). En el desarrollo que se presenta a continuación se mostrará la necesidad de dicho factor. Se notará adicionalmente que debido a que se propone que las funciones gaussianas sigan un criterio semejante al de Rayleigh, impone que el semiancho de cada función gaussiana sea igual a $\sigma = A/2$.

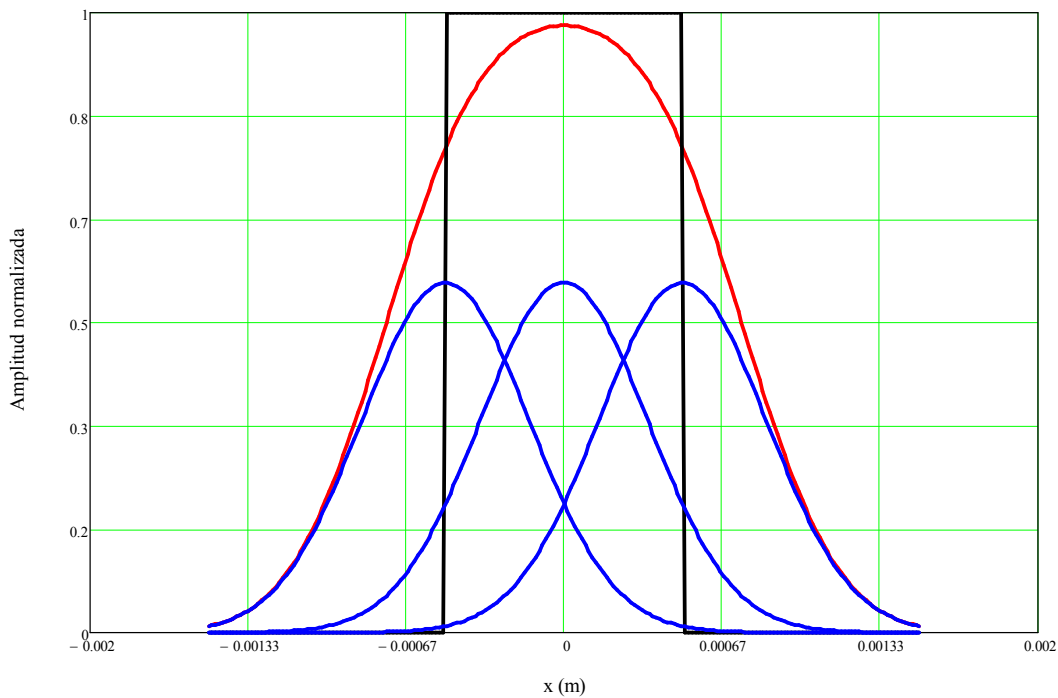


Figura 3.1. Distribución de amplitud del ejemplo representado por la ecuación (3.1). La traza en rojo corresponde a la superposición de las funciones gaussianas y la traza en negro corresponde la función rectángulo.

Para continuar, supongamos que ahora se superponen cinco funciones gaussianas. Extendiendo las ideas ya descritas, ahora, $\sigma = A/4$ y la superposición está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{\left(x + \frac{2A}{4}\right)^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(x + \frac{A}{4}\right)^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{A}{4}\right)^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{2A}{4}\right)^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (3.2)$$

La figura 3.2 muestra de manera gráfica la distribución de amplitud de la ecuación (3.2)

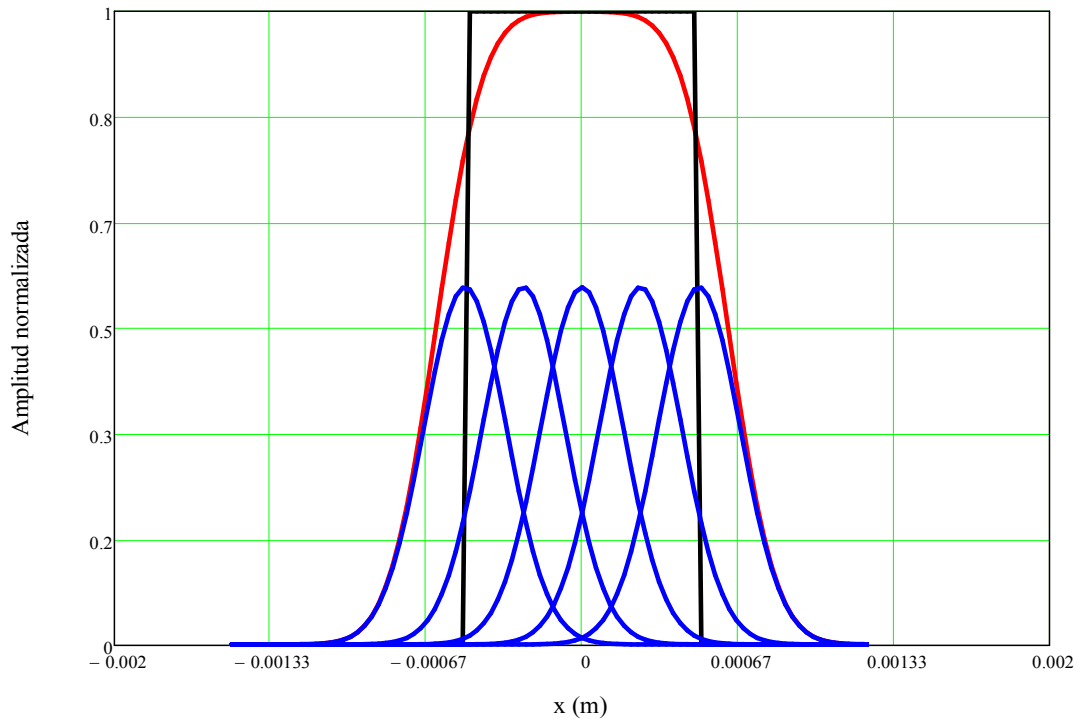


Figura 3.2. Distribución de amplitud del ejemplo representado por la ecuación (3.1). La traza en rojo corresponde a la superposición de las cinco funciones gaussianas y la traza en negro corresponde la función rectángulo.

Continuando de esta manera, observamos que la función rectángulo se va representando cada vez con mayor fidelidad a medida que el número de funciones gaussianas se incrementa en la representación por superposición. Por ejemplo, la figura (3.3) representa la función rectángulo mediante una superposición de 50 gaussianas. En la figura (3.3) se muestra en color rojo la función rectángulo original y en color negro la aproximación obtenida mediante la superposición.

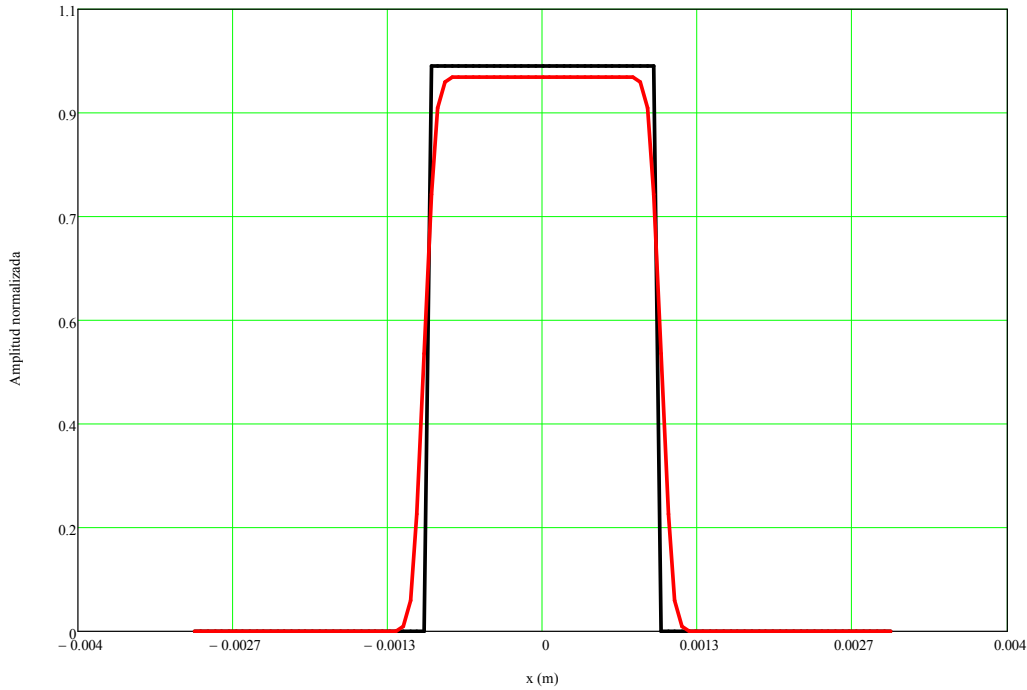


Figura 3.3. Distribución de amplitud (traza roja) del ejemplo representado por 50 funciones gaussianas.

En general, para N número de gaussianas se obtiene la ecuación (3.3),

$$f(x) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(- \frac{\left(x - n \frac{A}{N-1} \right)^2}{\left(\frac{A}{N-1} \right)^2} \right) \quad (3.3)$$

En la ecuación (3.3) $\sigma = A/(N-1)$. Aunque en nuestro ejemplo N se eligió impar para fines descriptivos, a medida que su valor se incrementa, el ser par o impar pierde significancia, permitiendo elegir este número libremente.

3.2 Demostración analítica de la representación por superposición

En esta sección mostraremos de manera analítica que la superposición de gaussianas puede representar adecuadamente (con precisión razonable) una función de ancho de banda ilimitada. Para este fin compararemos las transformadas de Fourier de la función rectángulo y la compararemos con la transformada de Fourier de su correspondiente representación mediante funciones gaussianas.

Recordando que si $F(u)$ representa la transformada de Fourier de una función $f(x)$, entonces,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i2\pi ux) dx \quad (3.4)$$

Dado que la transformada de Fourier es un operador lineal, podemos encontrar la transformada de Fourier de la sumatoria descrita por la ecuación (3.3), de la siguiente manera,

$$F(u) = \sqrt{\pi} \frac{A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \exp\left(-i \frac{2\pi n Au}{N-1}\right) \quad (3.5)$$

Para ayudar a clarificar el desarrollo analítico, en la ecuación siguiente mostramos de manera explícita los términos de la sumatoria;

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi} A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left[e^{\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot \left[\frac{N-1}{2}\right]\right)} + \dots + e^{\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot 2\right)} + e^{\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot 1\right)} + 1 + e^{-\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot 1\right)} + e^{-\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot 2\right)} + \dots + e^{-\left(\frac{i2\pi Au}{N-1} \cdot \left[\frac{N-1}{2}\right]\right)} \right] \quad (3.6)$$

A continuar, utilizaremos la propiedad de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \cdot \text{sen}\theta$, que nos permite reescribir la ecuación (3.6) de la siguiente manera,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi} A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left[1 + 2 \left\{ \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot 1\right) + \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot 2\right) + \dots + \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot \left[\frac{N-1}{2}\right]\right) \right\} \right] \quad (3.7)$$

Se observa que dada las propiedades de paridad de la sumatoria, los términos correspondientes a las funciones senoidales se eliminan quedando únicamente las funciones cosenoidales.

La ecuación (3.7) se puede reescribir sumado y restando 1 de la siguiente manera,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi} A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left[-1 + 2 \left\{ 1 + \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot 1\right) + \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot 2\right) + \dots + \text{Cos}\left(\frac{2\pi Au}{N-1} \cdot \left[\frac{N-1}{2}\right]\right) \right\} \right] \quad (3.8)$$

Definimos $\alpha = \frac{2\pi Au}{N-1}$ y aprovechamos la propiedad de la exponencial,

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} = \cos\theta, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta} + e^{i\beta}\} = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} + \operatorname{Re}\{e^{i\beta}\}, \quad (3.9a)$$

Para finalmente obtener,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi}A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left[-1 + 2 \operatorname{Re}\left\{1 + e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} + e^{i3\alpha} + \dots + e^{i\frac{N-1}{2}\alpha}\right\}\right]. \quad (3.10)$$

Ahora usamos la siguiente serie finita para $x = e^{i\alpha}$:

$$\frac{1-x^{M+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^M \quad (3.11)$$

Con lo anterior e identificando $M = \frac{N-1}{2}$ se obtiene,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi}A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left[-1 + 2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1-x^{\left(\frac{N-1}{2}+1\right)}}{1-x}\right\}\right]. \quad (3.12)$$

A continuación reescribimos la ecuación (3.12) en términos de $x = e^{i\alpha}$, y multiplicamos el numerador y el denominador del argumento de la parte real de por el factor $1 - e^{-i\alpha}$. Se obtiene,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi}A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left\{-1 + 2 \operatorname{Re}\left[\frac{1 - e^{-i\alpha} - e^{i\frac{N+1}{2}\alpha} + e^{i\frac{N-1}{2}\alpha}}{2 - e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}\right]\right\} \quad (3.13)$$

Ahora tomamos la parte real como lo indica la ecuación (3.13). Se obtiene,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi}A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left\{ -1 + 2 \left[\frac{1 - \cos(\alpha) - \cos\left(\frac{N+1}{2}\alpha\right) + \cos\left(\frac{N-1}{2}\alpha\right)}{2 - 2\cos(\alpha)} \right] \right\} \quad (3.14)$$

Para finalizar utilizamos las propiedades trigonométricas usuales:

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u-v) &= \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u-v) - \cos(a+b) &= 2\sin(u)\sin(v) \quad , \quad (3.15) \\ 1 - \cos(\theta) &= 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

y haciendo los cambios de variable; $u = N\alpha/2$ y $v = \alpha/2$, se obtiene,

$$F(u) = \frac{\sqrt{\pi}A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \left\{ \frac{2\sin\left[\frac{N\alpha}{2}\right]\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\} \quad (3.16)$$

Reintegrando el valor $\alpha = \frac{2\pi Au}{N-1}$, obtenemos,

$$F(u) = \sqrt{\pi} \frac{A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \frac{\sin\left(\frac{N}{N-1}\pi Au\right)}{\sin\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)} \quad (3.17)$$

Es importante notar que la ecuación (3.17) se obtiene de manera exacta, sin aproximaciones. Adicionalmente esta ecuación no impone restricción alguna al parámetro N . Podemos entonces elegir N de manera arbitraria. Si tomamos N con un valor muy grande, lo que equivale a asignar un número grande de gaussianas a la representación por superposición entonces, en el límite escribimos la ecuación (3.17) así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\pi} \frac{A}{N-1} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) \frac{\sin\left(\frac{N}{N-1}\pi Au\right)}{\sin\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)} \right] \quad (3.18)$$

Utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)^2\right) &= 1 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Sen}\left[\frac{N}{N-1}\pi Au\right] &= \text{Sen}[\pi Au], \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\text{Sen}\left(\frac{\pi Au}{N-1}\right)\right] &= \pi Au \end{aligned} \quad (3.19)$$

y considerando que para funciones bien portadas como es nuestro caso,

$$\lim_{x \rightarrow b} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b} g(x), \quad (3.20)$$

Nos permite escribir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(u) = \sqrt{\pi} A \frac{\text{Sen}(\pi Au)}{\pi Au} \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es de lo más relevante, ya que indica que la transformada de Fourier de la representación mediante la superposición coincide exactamente con la transformada de Fourier de la función de banda ilimitada bajo representación, cuando el número de funciones gaussianas es muy grande. Adicionalmente, se notará la existencia de un factor proporcional $\sqrt{\pi}$ que deberá ser considerado en la implementación numérica.

Como se ha indicado, cuando se utiliza un número finito de funciones gaussianas, la aproximación será razonable de acuerdo a los requisitos de cada situación de interés. Por ejemplo, encontramos que 50 gaussianas utilizadas para representar una función rectángulo proporciona una representación con un error de menos del 1%.

Como comentario final, es importante resaltar que también se pueden representar funciones complejas. Para este fin es necesario utilizar dos representaciones, una para la parte real y otra para la imaginaria.

Capítulo 4: Placas zonales de Fresnel y propuesta para mejorar su desempeño

En este capítulo se presenta la formulación analítica para el modelado de las placas zonales de Fresnel así como el modelo matemático que permitirá realizar una mejora en sus propiedades ópticas, particularmente en su capacidad de formación de imágenes. Esta característica es de particular importancia para los microscopios basados en rayos-X. Para este fin será necesario mejorar la respuesta de la función de punto extendido de las placas zonales en sus diferentes planos focales. El mejorar la respuesta de la función de punto extendido permitirá mejorar la calidad de formación de imágenes de las placas zonales como se muestra más adelante en este capítulo.

4.1 Modelo analítico de las placas zonales de Fresnel

Para iniciar con el modelo analítico, consideremos primeramente una función periódica, con periodo igual a T . Por lo anterior, la función a la que denotaremos como $f(x)$ cumple la siguiente propiedad, $f(x) = f(x + T)$.

Como la función considerada es periódica, entonces de acuerdo a las propiedades de Fourier [19] dicha función puede ser representada por la siguiente serie,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{T} x\right), \quad (4.1.a)$$

donde i es la unidad imaginaria. a_n son los coeficientes de Fourier y n representa números enteros.

La ecuación (4.1a) puede ser invertida para encontrar los coeficientes a_n de la siguiente manera,

$$a_n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi n}{T} x\right). \quad (4.1.b)$$

La ecuación (4.1.a) será utilizada para representar un tren de pulsos rectangulares de ancho A y periodo T ; donde $T > A$. Se debe notar que esta representación es válida porque la sumatoria en la ecuación (4.1.a) se extiende desde menos hasta más infinito, permitiendo representar una función de ancho de banda ilimitada como es el caso del tren de pulsos mencionado. Entonces, el tren periódico lo podemos representar de la siguiente forma,

$$f(x) = \frac{A}{T} + \frac{A}{T} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi A/T)}{n\pi} \exp(i2\pi nx/T). \quad (4.2)$$

En la ecuación (4.2), $\text{sinc}(x) = \text{sen}(\pi x)/(\pi x)$, representa la así llamada función seno cardinal.

A continuación tomamos en consideración que en la integral de Fresnel, ecuación (2.2), aparece una fase de orden cuadrática, la cual significa la presencia de una onda esférica divergente. Dicho factor nos sugiere que en nuestra representación dada por la ecuación (4.2) debe existir un factor que permita compensar dicha fase divergente proporcionando la posibilidad de encontrar términos de enfoque. Para este fin se sugiere realizar un cambio de variable en el eje x de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{A}{T} + \frac{A}{T} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi A/T)}{n\pi} \exp\left(-i \frac{\pi n}{\lambda p} x^2\right). \quad (4.2b)$$

La ecuación (4.2b) es la representación analítica de las llamadas placas zonales de Fresnel.

De acuerdo con la ecuación (4.2b), dicha placa zonal debe tener propiedades de enfoque a las distancias $p, p/2, p/3...$ Estas distancias reciben los nombres de segundo foco, tercer foco, etc. Cuando la distancia es igual a p , a este plano se le conoce como plano focal principal.

Para calcular el patrón de difracción debido a las placas zonales de Fresnel, se procede a sustituir la ecuación (4.2b) en la integral unidimensional de difracción de Fresnel, ecuación (2.2) de la siguiente manera,

$$\Psi_f(\xi) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A}{T} + \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi A/T)}{n\pi} \exp\left(-i\frac{\pi n}{\lambda p}x^2\right) \right] \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-\xi)^2]\right\} dx. \quad (4.3)$$

Como hemos mencionado, en este trabajo nos limitaremos a un análisis unidimensional sin que esto signifique una pérdida de generalidad de los resultados aquí presentados. La generalización a dos dimensiones es directa y por simplicidad de la presentación no se presentará en este trabajo.

En la figura (4.1) se muestra la gráfica correspondiente a la ecuación (4.2b) para un valor de $A = T/2$. La gráfica representa la transmitancia de la placa zonal para los valores siguientes: $P = 1m, \lambda = 0.1nm$. La longitud de onda seleccionada corresponde a un valor típico de rayos X de 12.4 KeV que es comúnmente utilizado en microscopios de este tipo.

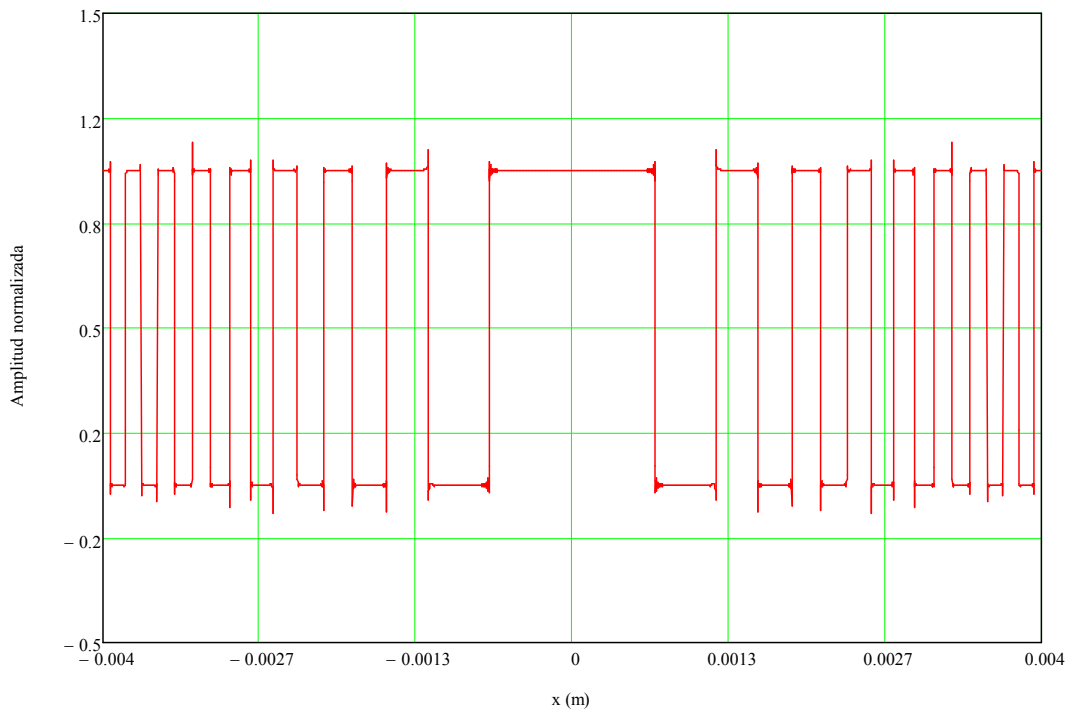


Figura 4.1. Placa zonal de Fresnel típica para rayos X, con diámetro $D = 80 \mu m$, longitud focal $P = 1 m$, $\lambda = 0.1 nm$. (12.4 KeV).

Antes de proceder con el cálculo de los patrones de difracción de interés, en la siguiente subsección se hará una descripción referente al ciclo de trabajo de las placas zonales.

4.2 Ciclo de trabajo para una placa zonal de Fresnel

El ciclo de trabajo de la placa zonal lo definiremos mediante el parámetro A de la manera siguiente. Cuando $A = T/2$, el ciclo de trabajo es igual a uno y coincide con la placa zonal convencional. Cuando $A < T/2$, el ciclo de trabajo será menor que uno. Dada la originalidad de este trabajo, hacemos notar que esta definición no está aún estandarizada y fue recientemente introducida en [20].

Adicionalmente, por simplicidad de los cálculos, con el fin de caracterizar placas zonales con diferentes ciclos de trabajo de manera relativa (para comparación entre placas) definimos el factor F de la manera siguiente $F = A/(T/2)$. De tal manera que $F = 1$ significa un ciclo de trabajo igual a uno y un factor F menor que uno implica un ciclo de trabajo menor que uno. En porcentaje, por ejemplo un factor $F = 0.9$ significa un ciclo de trabajo del 90 %, mientras un factor unitario significa un ciclo de trabajo del 100%.

La figura 4.1 mostrada anteriormente representa una placa zonal con ciclo de trabajo del 100%. Para fines comparativos, la figura 4.2 presenta la gráfica de una placa zonal con un ciclo de trabajo del 50%.

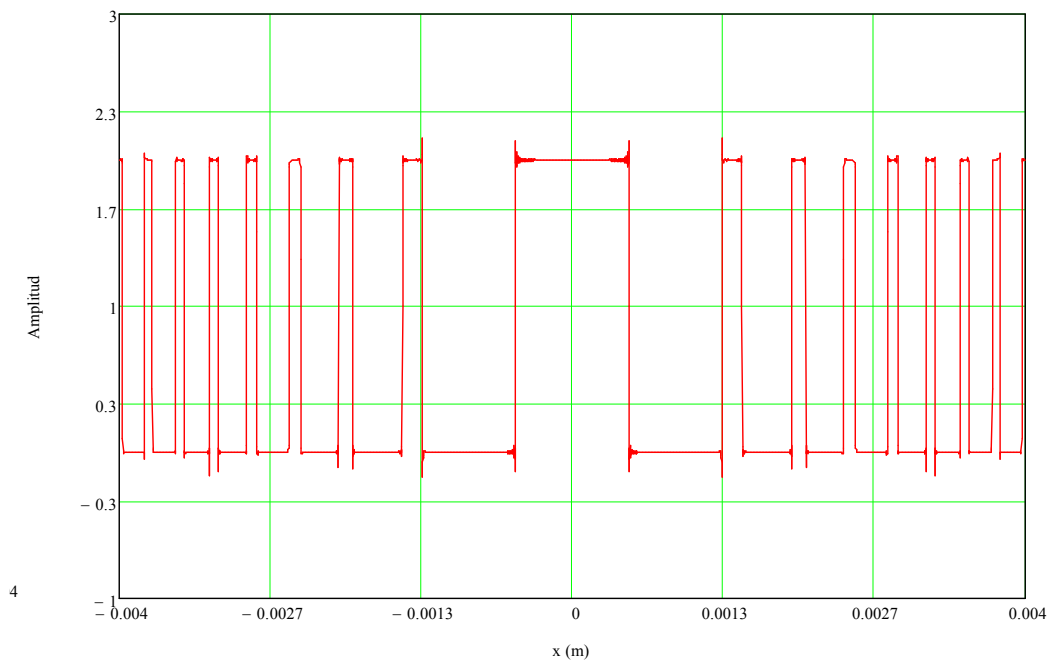


Figura 4.2. Placa zonal de Fresnel con ciclo de trabajo del 50%. Diámetro $D=80\ \mu\text{m}$, longitud focal $P=1\ \text{m}$, $\lambda=0.1\ \text{nm}$. (12.4 KeV).

En la subsección siguiente procedemos a representar las placas zonales mediante superposición de onditas gaussianas con el fin de calcular los patrones de difracción de interés.

4.3. Representación de las placas zonales de Fresnel mediante superposición de funciones gaussianas

Con el fin de propagar de manera eficiente [13] una distribución de amplitud localizada en un plano objeto, es posible representar dicha distribución mediante una superposición de haces u onditas gaussianas. Se puede apreciar de manera intuitiva que el grado de dificultad para realizar el cálculo de manera directa de la propagación de las placas zonales de Fresnel es bastante complejo. Primero, debido a que la serie es en principio infinita, el tiempo de procesamiento sería impráctico. Obviamente, se puede sacrificar algo de precisión truncando la serie hasta cierto número finito de términos. Sin embargo, aún truncando la serie la propagación resulta bastante compleja debido a los términos de fase cuadrática en dicha serie, lo cual implicaría utilizar un gran número de puntos de muestreo convirtiendo el problema en impráctico. En contraste, al tener una representación adecuada de las placas zonales en el plano objeto mediante la superposición de funciones gaussianas y dado que la integral de Fresnel es un operador lineal, se garantiza que la propagación calculada será tan precisa como lo sea su representación en el plano objeto. El problema de la propagación, se reduce entonces en tener una representación adecuada de las placas zonales en el plano objeto mediante superposición de funciones gaussianas. Esto es posible, como se mostró en el capítulo anterior, utilizando una superposición siguiendo un criterio similar al de Rayleigh.

En la figura (4.3) se presenta la gráfica de la placa zonal de Fresnel con ciclo de trabajo del 100% usando la superposición de 3000 funciones gaussianas y 3000 puntos de muestreo. El ciclo de trabajo para este caso es de uno; $P=1$ m, $\lambda=0.1$ nm

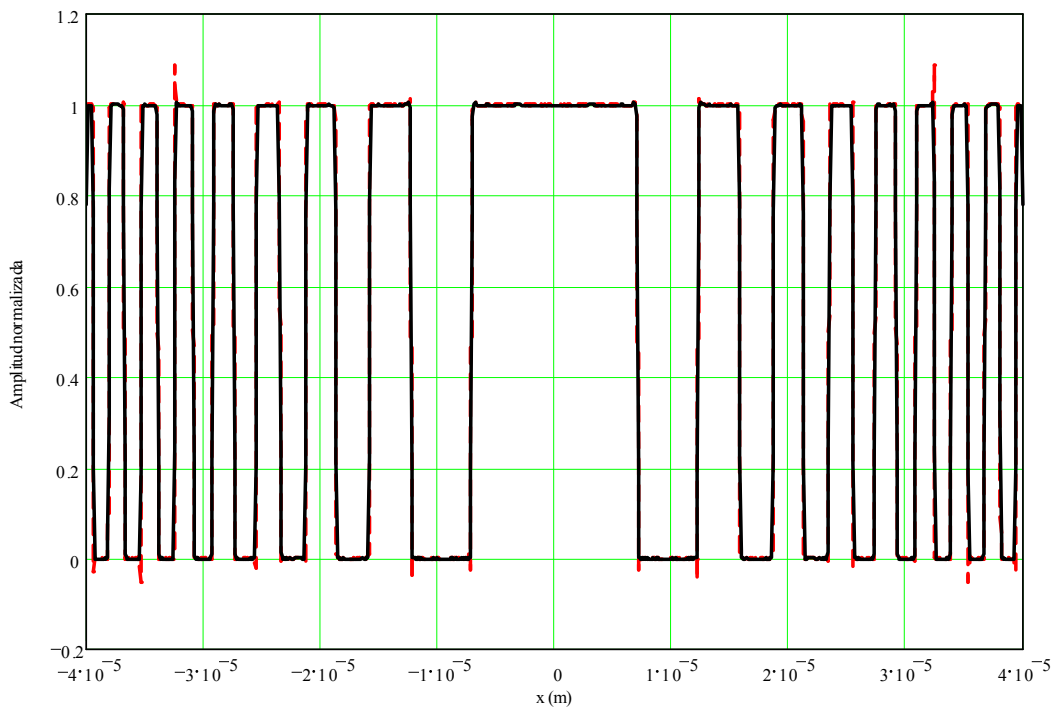


Figura 4.3. Placa zonal de Fresnel (traza en color rojo) y su representación mediante la superposición de gaussianas (traza en negro). $P=1$ m, $\lambda=0.1$ nm

En la gráfica de la figura 4.3 se puede apreciar que la superposición de funciones gaussianas representa con razonable precisión las placas zonales de Fresnel. Adicionalmente, como la superposición actúa también como un filtro sobre las frecuencias muy altas, como ventaja adicional, los sobretiros debido a trincar la serie resultan adecuadamente filtrados. De esta manera mostramos una ventaja adicional que nos aporta la superposición de funciones gaussianas ayudando a eliminar ruidos indeseables de alta frecuencia que de otra manera hubiera tenido que eliminarse mediante alguna técnica adicional.

Una vez que se tiene la representación adecuada en el plano objeto de la placa zonal de Fresnel, procedemos a realizar la integral de Fresnel de una manera indirecta mediante la superposición de onditas gaussianas. En la figura (4.4a) se muestra la distribución de intensidades en el primer plano focal, es decir a una distancia P . En esta gráfica, se puede apreciar la función de punto extendido de la placa zonal en el plano focal principal. Se puede apreciar el pico central de máxima amplitud que es donde se concentra la energía luminosa.

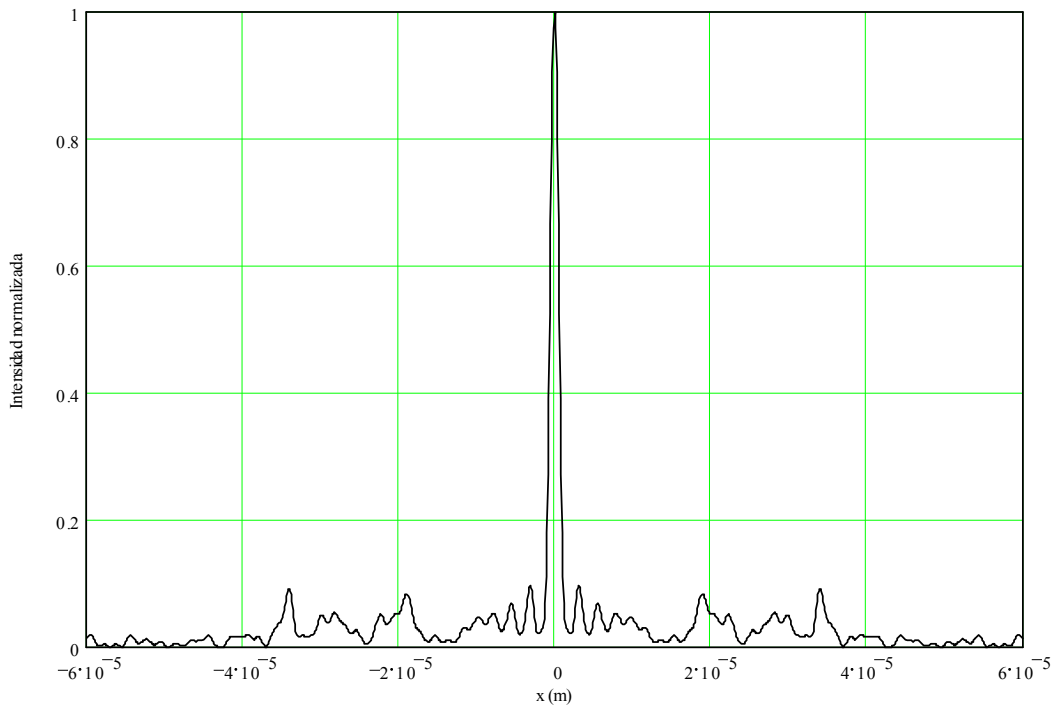


Figura 4.4a. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el plano focal principal $P=1$ para el factor $=1$.

A continuación procedemos a calcular la distribución de intensidad en los planos focales secundarios ($P/2$) y terciario ($P/3$). Estas distribuciones corresponden a las funciones de punto extendido en los planos focales mencionados. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras (4.4b) y (4.4c).

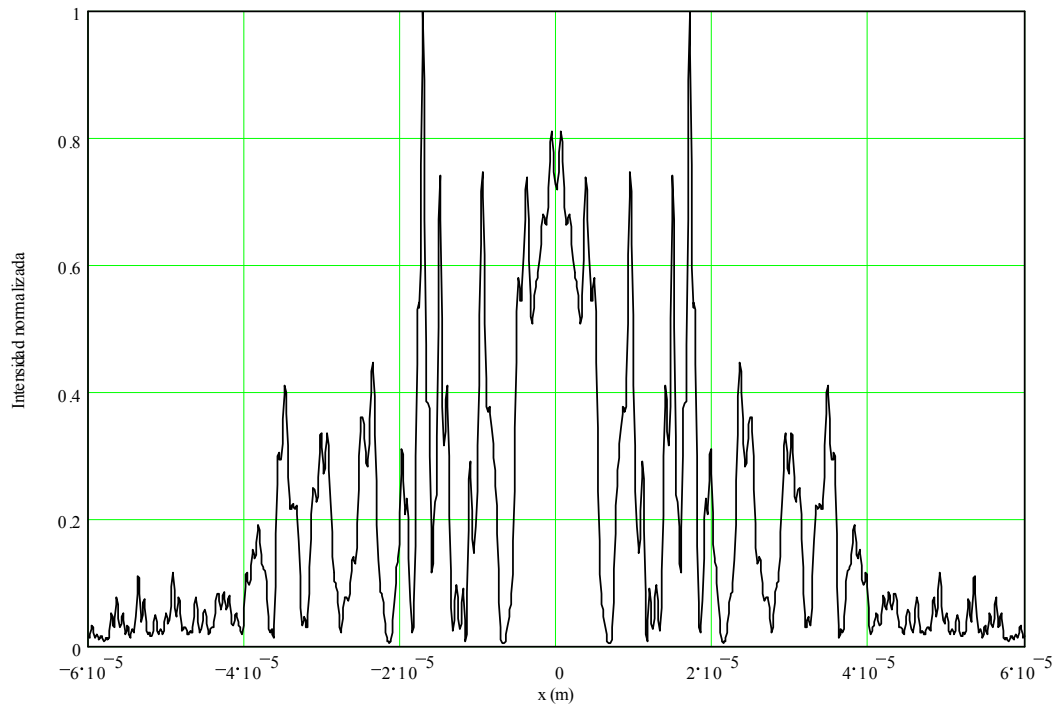


Figura 4.4b. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el segundo plano focal ($P/2$) para el factor=1.

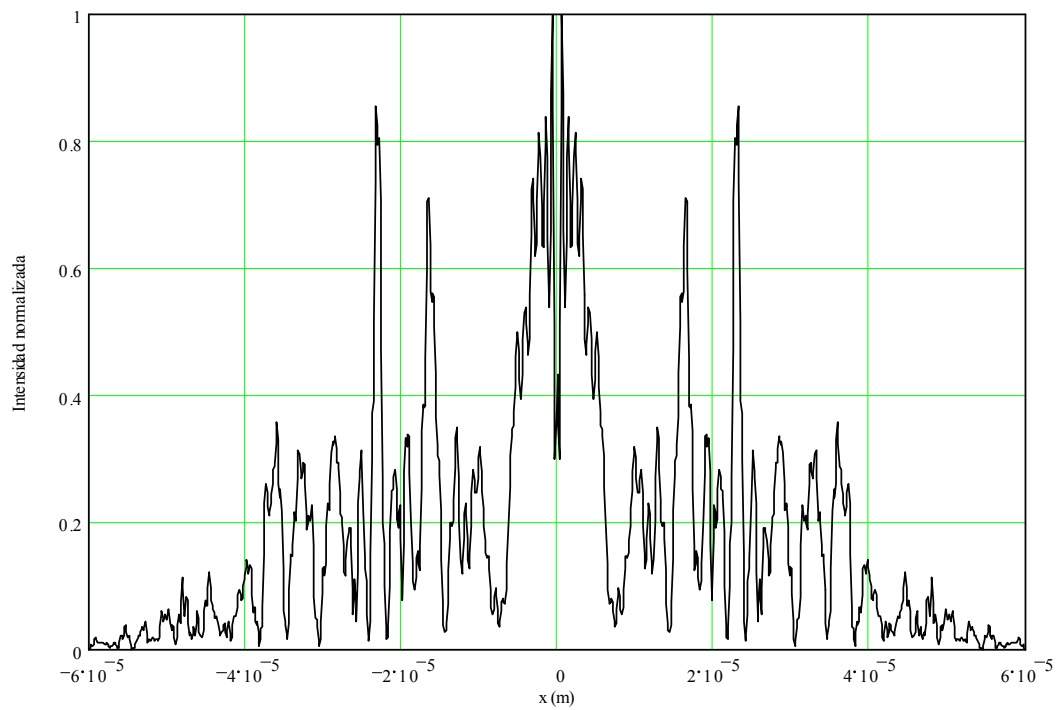


Figura 4.4c. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el tercer plano focal $P/3$ para el factor=1.

De las figuras (4.4a) hasta (4.4c) puede apreciarse que para la placa zonal con ciclo de trabajo del 100% (factor =1), la función de punto extendido está bien definida (equivalentemente, espacialmente concentrada) en el plano focal primario y no así en los otros planos focales. Por consecuencia, las placas zonales con factor = 1 podrán ser utilizadas como formadoras de imágenes, únicamente para el valor de distancia focal principal (P). En contraste, para los valores de distancia focal secundaria y mayores, las placas zonales no podrán formar adecuadamente imágenes, siendo esto una limitante de dichas placas zonales.

Para ilustrar la deficiencia mencionada, procedemos a calcular la imagen formada de un objeto de prueba. Dicho objeto consiste en dos fuentes puntuales separadas $40\mu\text{m}$, situadas en un plano objeto localizado a una distancia de 10m atrás de la placa zonal. Dicho plano objeto es iluminado mediante un frente de onda plano. Para calcular la localización del plano imagen, utilizamos la ecuación del fabricante de lentes como comúnmente se realiza.

$$\frac{1}{d1} + \frac{1}{d2} = \frac{1}{f}. \quad (4.4)$$

En la ecuación (4.4) $d1$, $d2$ representan la distancia del plano objeto y del plano imagen respectivamente. f , representa la distancia focal que dependerá del foco de la placa zonal bajo estudio. Por ejemplo, para el plano focal principal $f = P$, y así sucesivamente.

Las figuras (4.5a) hasta (4.5c) muestran gráficas normalizadas de las distribuciones de intensidades en el plano imagen correspondiente a cada valor de los focos mencionados ($P, P/2, P/3$). Se puede apreciar con claridad que la imagen es razonablemente adecuada solamente para el caso del foco principal. Esto es debido a que, como puede apreciarse en la gráfica 4.4a, la placa zonal con factor = 1, tiene bien definida su función de punto extendido solamente en el plano focal principal. En contraste, para los dos planos correspondientes a las imágenes secundaria y terciaria, dado que las funciones de punto extendido correspondientes (figuras 4.4b y 4.4c) no están apropiadamente localizadas, las imágenes que se obtienen no permiten reconocer las fuentes puntuales que deberían formarse en dichos planos.

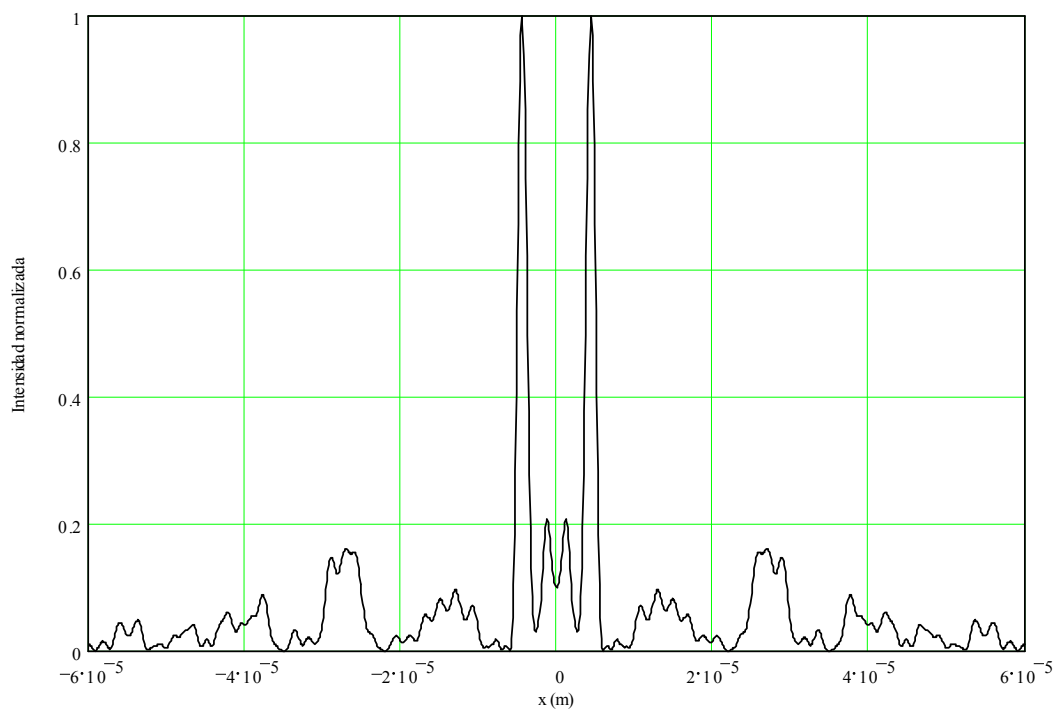


Figura 4.5.a) Imagen generada correspondiente al foco principal ($f = P$), factor=1.

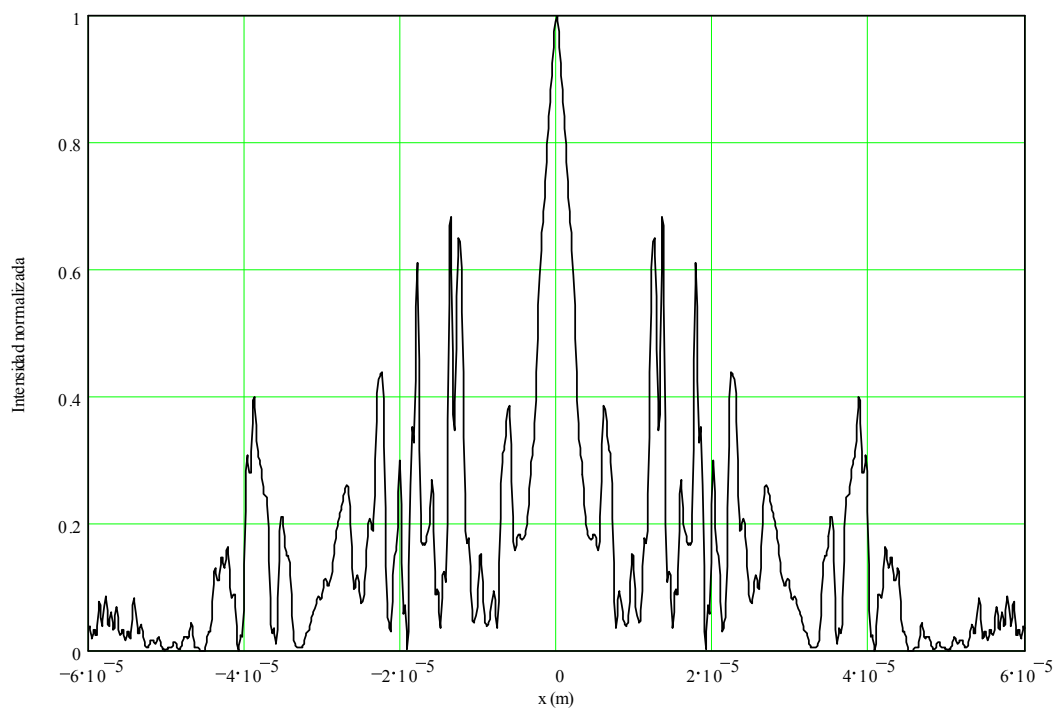


Figura 4.5.b) Imagen generada para el segundo plano focal ($f = P/2$), factor=1.

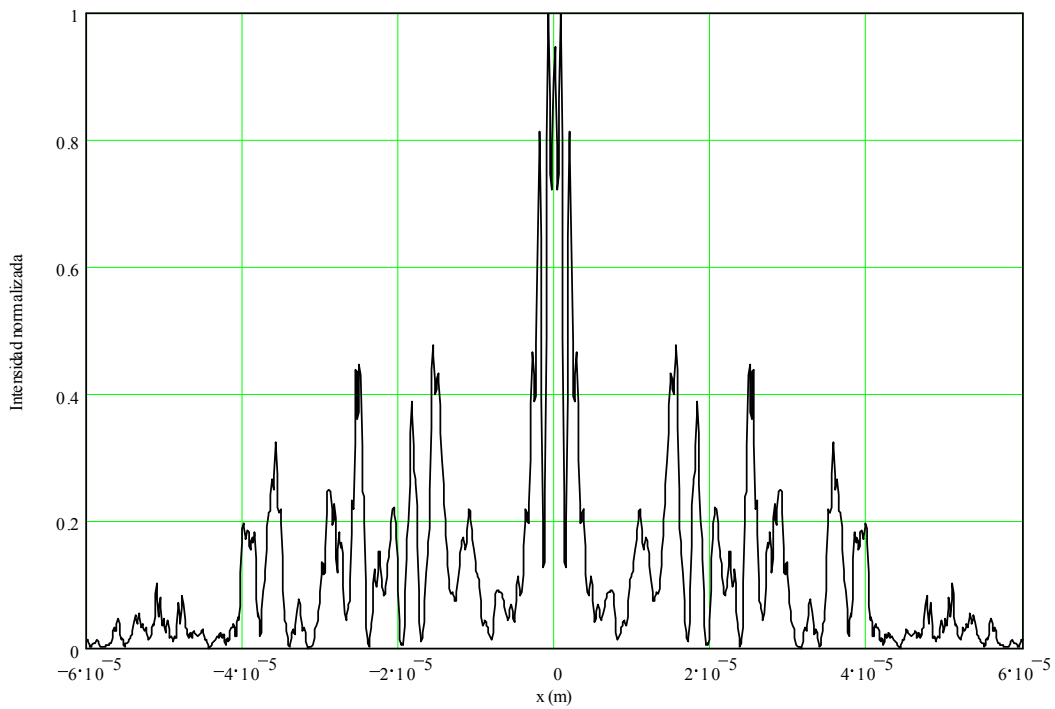


Figura 4.5.c) Imagen generada para el plano focal terciario ($f = P/3$), factor=1.

Con el fin de mostrar que al reducir el ciclo de trabajo, se obtiene una mejor respuesta de las placas zonales, realizamos los cálculos de la función de punto extendido para placas zonales con un factor = $\frac{1}{2}$, ó ciclo de trabajo del 50%. En las gráficas de la 4-6a) hasta la 4.6c) se muestran las respuestas correspondientes a los planos primario, secundario y terciario.

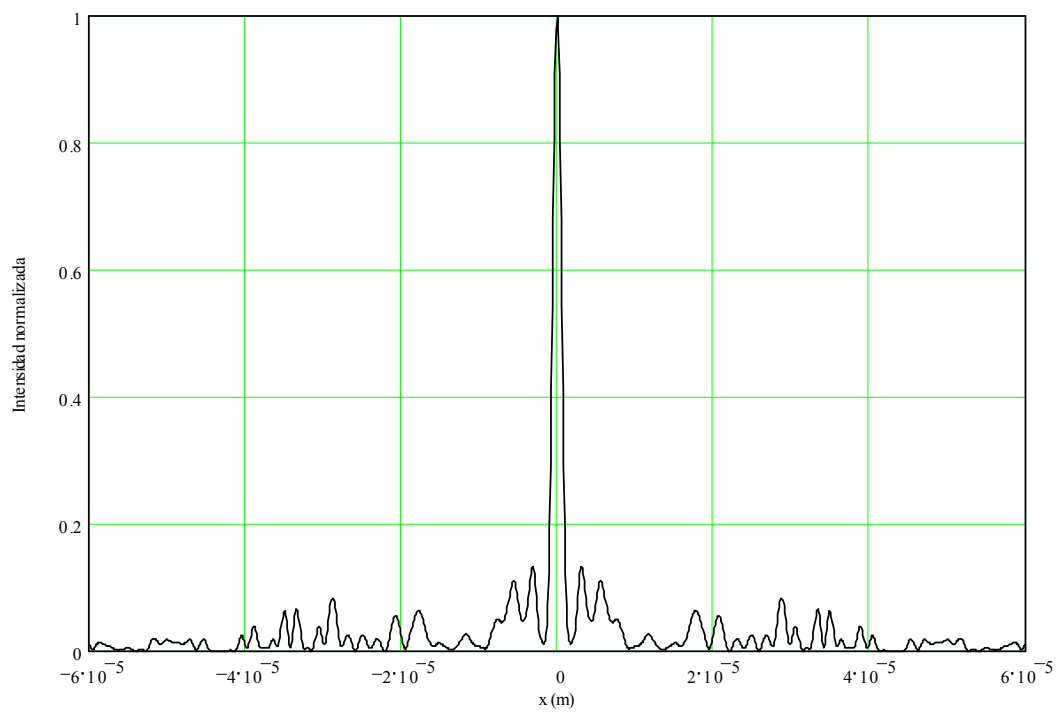


Figura 4.6a. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el primer plano focal P para el factor=1/2

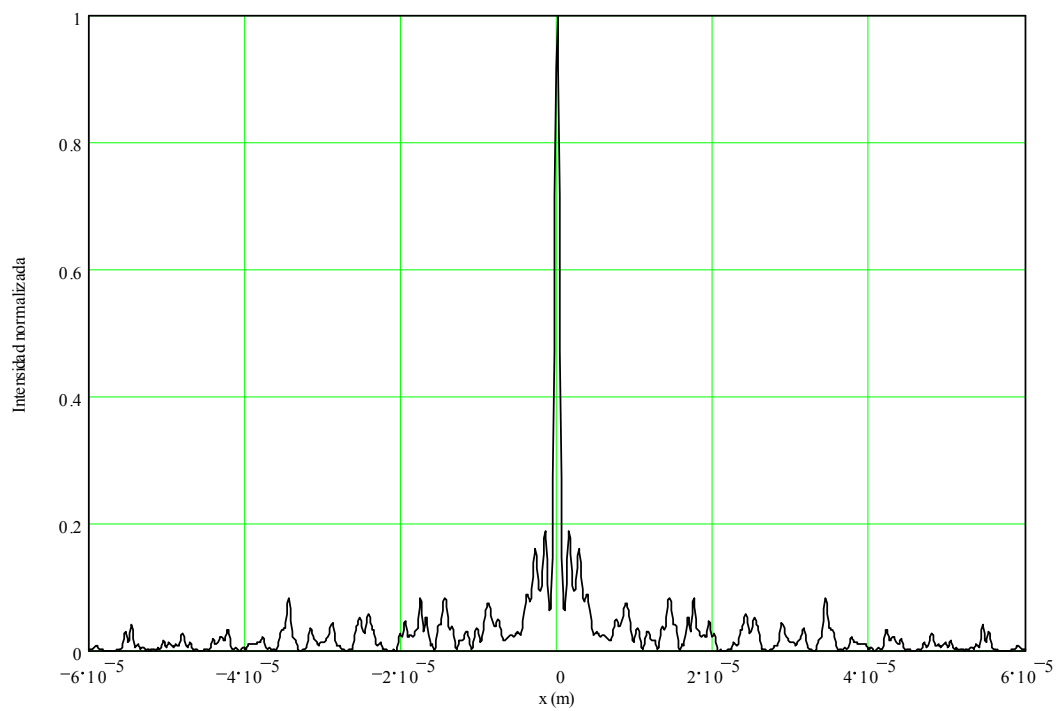


Figura 4.6b. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el segundo plano focal $P/2$ para el factor=1/2.

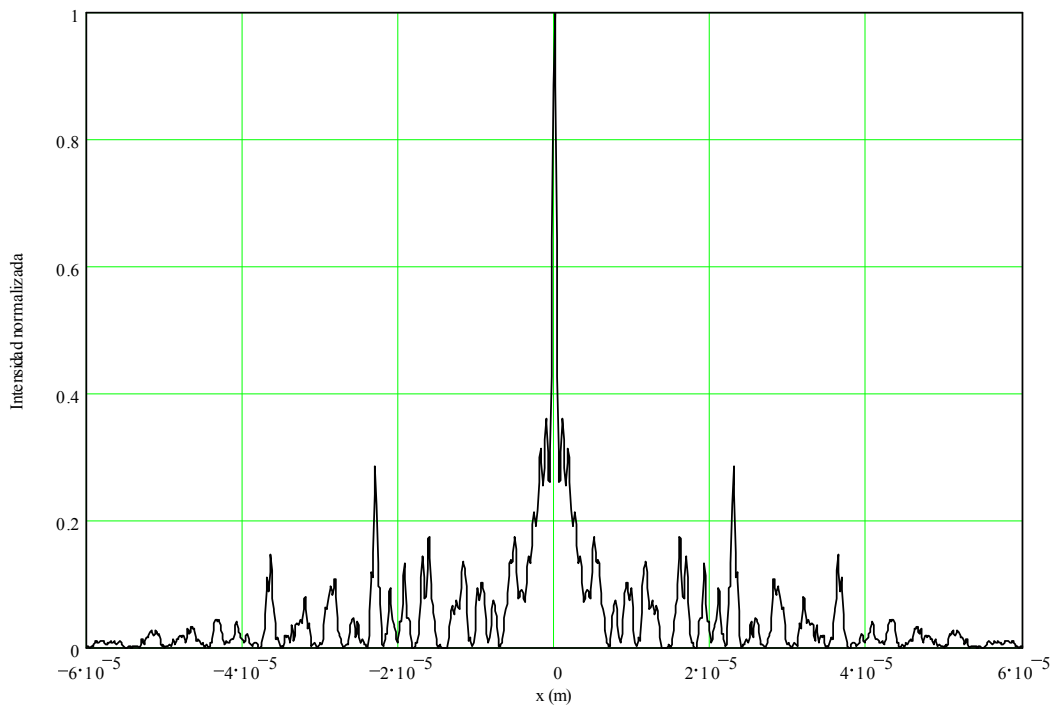


Figura 4.6c. Distribución de intensidades de la función de punto extendido en el tercer plano focal $P/3$ para el factor=1/2.

Como puede apreciarse de las gráficas 4.4a) hasta 4.4c) en comparación a las gráficas 4.6a) hasta 4.6c), las funciones de punto extendido para las placas zonales con ciclo de trabajo del 50% (factor =1/2), están espacialmente localizadas, siendo superiores a las correspondientes a las placas zonales con ciclo de trabajo del 100% (factor = 1) ya que, en estas las funciones de punto extendido no están espacialmente localizadas en sus focos secundario y terciario.

Con el fin de mostrar la formación de imágenes mediante las placas zonales con ciclo de trabajo del 50% realizamos los cálculos de las imágenes de manera similar al caso anterior. En las figuras 4.7a) hasta 4.7b) se muestran las gráficas normalizadas de las distribuciones de intensidades en los respectivos planos imagen obtenidas.

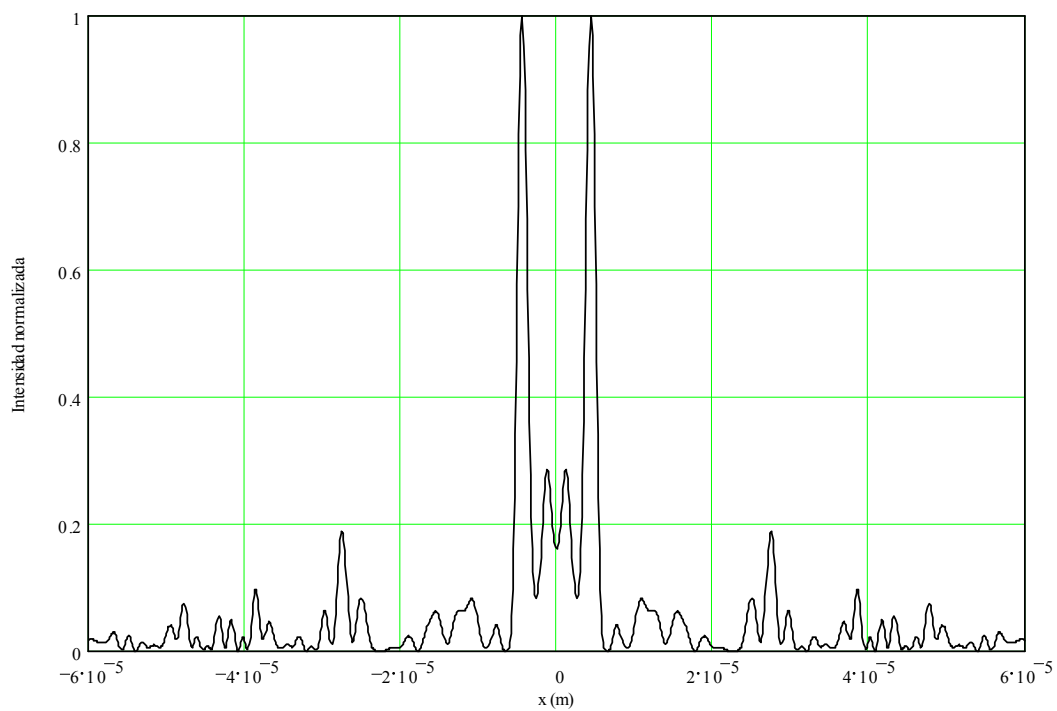


Figura 4.7.a) Imagen generada para el plano focal principal ($f = P$), factor=1/2.

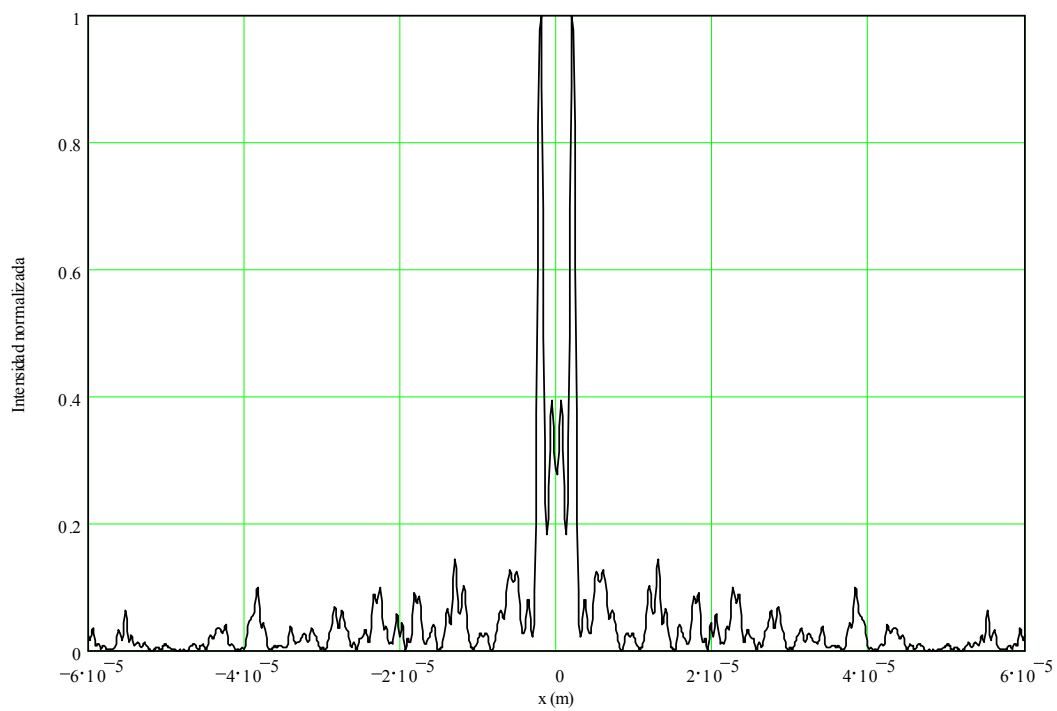


Figura 4.7.b) Imagen generada para el segundo plano focal ($f = P/2$), factor=1/2

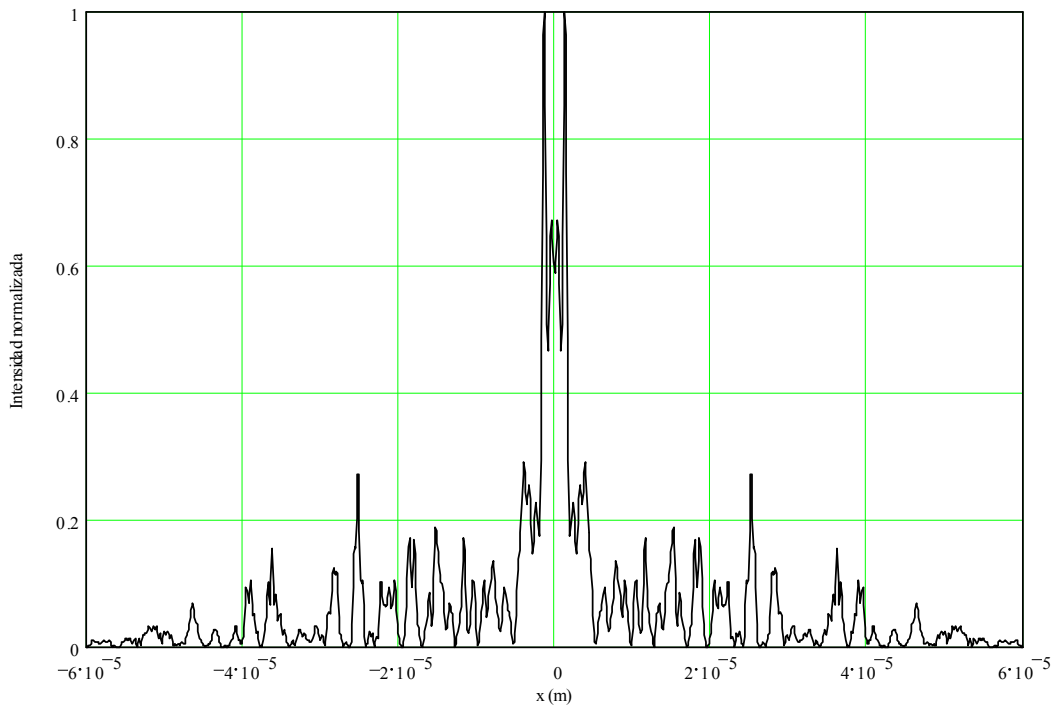


Figura 4.7.c) Imagen generada para el plano focal terciario ($f = P/3$), factor=1/2.

Al comparar las imágenes formadas correspondientes a la placa zonal con ciclo de trabajo del 100 % (factor =1) de las figuras 4.5a) hasta 4.5c) con las imágenes de las figuras 4.7a) hasta 4.7c) se puede claramente apreciar que la placa zonal con menor ciclo de trabajo (menor valor del factor) genera imágenes mejor definidas en los planos secundarios y terciarios sin afectar básicamente las características de las placas zonales correspondientes al plano focal principal. En microscopía de rayos X, este resultado es de relevancia ya que al generar imágenes con distancias focales menores, repercute de manera directa en resoluciones laterales menores de las imágenes formadas.

Capítulo 5: Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo hemos presentado una metodología para mejorar el desempeño óptico de las placas zonales de Fresnel. Esta mejora está basada en lograr que la función de punto extendido que corresponde a dichas placas se presente más concentrada en el espacio, es decir, que dicha respuesta sea más espigada y ocupe menos espacio lateral. Al lograr estas condiciones, las placas zonales presentan mejores características como generadoras de imágenes. El resultado anterior, se sustenta en realizar un cambio del ciclo de trabajo de las placas zonales.

Calculamos patrones de difracción y patrones de imágenes correspondientes a placas zonales convencionales y a placas zonales a las que se les alteró su ciclo de trabajo. Para ser catalogadas, les hemos asignado a las placas zonales convencionales un valor de su ciclo de trabajo igual al 100%. Equivalentemente para estas placas hemos definido un factor relativo de uno. En contraste, a las placas zonales a las que se les alteró su ciclo de trabajo les hemos asignado valores menores al 100% o equivalentemente factores menores a la unidad.

Para realizar los cálculos de los patrones de difracción y de imágenes de las placas zonales, utilizamos la técnica de superposición de onditas gaussianas, que representa el campo del plano objeto mediante superposición de gaussianas para luego ser propagado mediante la integral de Fresnel, la cual resulta ser un operador lineal para este proceso.

A las funciones de punto extendido entre las placas zonales convencionales con aquellas que se alteraron disminuyéndoles su ciclo de trabajo, encontramos que las funciones de punto extendido correspondientes a las placas zonales con menor ciclo de trabajo presentan las mejores propiedades. En consecuencia, mostramos que las placas zonales con ciclos de trabajo menores son capaces de generar imágenes mejor definidas en los planos secundarios y terciarios sin afectar básicamente las características de las placas zonales correspondientes al plano focal principal.

También demostramos mediante los cálculos de propagación descritos, que la placa zonal convencional tiene bien definida su función de punto extendido solamente en el plano focal principal y que al alterar el ciclo de trabajo, no presenta una pérdida significativa de sus

propiedades a la vez que permite mejorar sus características como formadora de imágenes en los planos correspondientes a los planos focales secundario y terciario.

Los resultados obtenidos resultando de relevancia, por ejemplo, en microscopía de rayos X. este resultado ofrece la posibilidad de generar imágenes mejor definidas en las correspondientes a los planos secundario y terciario permitiendo una mejor resolución espacial de las imágenes formadas mediante estos dispositivos.

Perspectivas

Dado que los resultados mostrados están sustentados hasta ahora únicamente de manera analítica, consideramos importante llevar a cabo la construcción de una placa zonal de Fresnel con un ciclo de trabajo menor, probablemente del 50%, para una longitud de onda de un laser en el visible. De esta manera será posible verificar que los resultados calculados, efectivamente se cumplen en el laboratorio.

Adicionalmente sería conveniente realizar un estudio de otras modificaciones posibles para facilitar la fabricación de las placas zonales mejoradas ya que cambiar el ciclo de trabajo resulta un reto para los desarrolladores de tecnología. Esto es debido a que al disminuir el ciclo de trabajo, físicamente implica zonas más delgadas y por ende más difíciles de ser realizadas.

Por último, desde el punto de vista teórico, queda pendiente realizar cálculos con carácter no escalar, es decir, donde se consideren posibles consecuencias de la propagación vectorial de la luz. Sin embargo, parecería ser que de momento la teoría que soporta la representación mediante superposición de haces gaussianos no sería precisa por lo que habría que trabajar en esta dirección.

Bibliografía:

- [1] J. A. Cox, T. Werner, J. Lee, S. Nelson, B. Fritz, y J. Bergstrom, "Diffraction efficiency of binary optical elements," in *Computer and Optically Formed Holographic Optics*, I. N. Cindrich and S. H. Lee, eds., Proc. SPIE, 1211, pp 116–124 (1990).
- [2] Yasuyuki Unno, "Point-Spread Function for Binary Diffractive Lenses Fabricated with Misaligned Masks," *Appl. Opt.* (37), pp 3401-3407 (1998).
- [3] M. B. Stern; Holz S., M.; Medeiros, S. S.; Knowlden, R. E, "Fabricating binary optics: Process variables critical to optical efficiency," *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures*, (9), no.6, pp.3117-3121, (1991).
- [4] J. M. Miller, M. R. Taghizadeh, J. Turunen, y Neil Ross, "Multilevel-grating array generators: fabrication error analysis and experiments," *Appl. Opt.* (32), pp. 2519-2525 (1993).
- [5] M. G. Moharam, Drew A. Pommet, Eric B. Grann, y T. K. Gaylord, "Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach", *J. Opt. Soc. Am. A* 12, pp 1077-1086 (1995).
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics 3rd*, Roberts & Company Publishers, (2005).
- [7] E. Hecht, *Optica*, 3rd Addison Wesley, (2000).
- [8] K Iizuka, *Engineering Optics 2nd*, Springer-Verlag, (1983).
- [9] T.W. Stone and B. J. Thompson, *SPIE Optical Engineering Press*, (34), (1991).
- [10] K. Bergman, N. Bonadeo, I. Brener, and K. Chiang. *SPIE*, (in Design, test, Integration, and Pack again of MEMS/MOEMS (2001).
- [11] E. Goldstein, L. Y. Lin, and J. Walker, "Lightwave micromachines for optical networks," *Opt. Photonics News* (2001).

- [12] F. J. González, J. Alda, B. Illic, and G. Boreman, “Infrared antennas coupled to lithographic Fresnel zone plate lenses,” *Appl. Opt.* 43, pp 6067–6073 (2004).
- [13] M. Cywiak, Servín M, F. Mendoza, “Wave-front propagation by Gaussian superposition”, *Opt. Communications*, 195, pp 351-359, (2001).
- [14] L. Leithold, *Calculo con geometría analítica*, Edi Harla 6^{ed} ().
- [15] E. G. Steward, *An Introduction Fourier Optics*, Ellis Horwood Limited, (1983).
- [16] Hareesh V. Tippur “Coherent gradient sensing: a Fourier optics analysis and applications to fracture”, *Applied optics*, (31), No. 22, (1992).
- [17] F. W. Campbell y J. G. Robson, J. “Physiol. Application of Fourier analysis to the visibility of gratings”, 197, pp. 551-566, (1968).
- [18] M. Cywiak, “Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing”, *Optics Express*, (17), Issue 13, pp. 10564-10572, (2009).
- [19] Hsu, P. Hwei, *Análisis de Fourier*, Prentice Hall, (2009).
- [20] M. Idir, M. Cywiak, A. Morales, y M. H. Modi, “X-ray optics simulation using Gaussian superposition technique”, (19), Issue 20, pp. 19050-19060 (2011).