



CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN ÓPTICA, A.C.

Topógrafo Corneal Semiesférico basado en la prueba de Hartmann



MAESTRÍA EN OPTOMECATRÓNICA

Asesor:

Dr. Daniel Malacara Doblado

Estudiante:

Ing. José Abel de la Fuente Arriaga

Agosto de 2017

León, Guanajuato, México

DEDICATORIA

Mi esposa Andrea,
por su amor, apoyo incondicional y comprensión
durante cada uno de los pasos de esta aventura que vivimos juntos.
Es sin duda ella mi más grande motivo de vivir.

Mis padres Araceli y Joaquín,
por su ejemplo, consejos y apoyo incondicional.

Mis hermanos Joaquín, Araceli y Luz,
por sus palabras de aliento en los momentos que pase sin su compañía.

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar agradeciendo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca que me otorgó durante el desarrollo de los seis cuatrimestres de la Maestría en Optomecatrónica, así como al Centro de Investigaciones en Óptica, A.C, por los recursos humanos y tecnológico para el desarrollo del proyecto.

También quiero agradecer a mis mentores y amigos, el Dr. Edgardo Manuel Felipe Riverón, el Dr. Daniel Malacara Doblado y el Dr. Alejandro Téllez Quiñones por su apoyo incondicional en cada una de las etapas del desarrollo de este proyecto; quien con su atención, disponibilidad y orientación me ayudaron a realizar el trabajo siempre de la mejor manera.

Finalmente, quiero agradecer al M. Diego Torres Armenta, al M. Ricardo Valdivia Hernández y al Dr. Bernardino Barrientos García por su ayuda incondicional para el desarrollo de este proyecto. Grandes amigos que siempre ocuparán un lugar en mi mente.

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo de un equipo optométrico basado en la prueba de Hartmann, apropiado para medir la topografía de la superficie anterior de la córnea humana y su frente de onda. Por las características físicas del equipo lo llamamos “Topógrafo Corneal Semiesférico”. La precisión fue medida mediante la simulación y puesta en práctica de la herramienta con pacientes reales, resolviendo la superficie anterior, el frente de onda y la curvatura tangencial de la córnea con resultados comparables al topógrafo corneal Atlas 9000.

ABSTRACT

This paper presents the development of an optical device based on the Hartmann test, suitable for measuring the topography of the anterior surface of the human cornea and its wavefront. The optical device is called “Semi-spherical Corneal Surveyor” due to its physical characteristics. The accuracy of the instrument was measured by using the simulation and implementation of the tool with real resources, by measuring the anterior surface, the wavefront, and the tangential curvature of the cornea. Our instrument was capable to obtain results comparable to the Atlas 9000 corneal surveyor.

ÍNDICE GENERAL

1 INTRODUCCIÓN	
1.1 El problema a resolver.....	9
1.2 Justificación.....	11
1.3 Hipótesis.....	12
1.4 Objetivos	13
1.4.1 Objetivo general	13
1.4.2 Objetivos particulares.....	13
1.5 Especificación del problema	14
1.6 Consideraciones generales	15
1.7 Tipo de investigación	16
1.8 Medios utilizados	16
1.9 Apoyos y contribuciones.....	17
1.9.1 Apoyos	17
1.9.2 Contribuciones	17
1.10 Organización del documento.....	18
2 ESTADO DEL ARTE.....	19
2.1 Antecedentes del topógrafo corneal	20
2.2 Antecedentes de la prueba de Hartmann en ciencias de la visión	23
2.3 Estado del arte	25
3 MARCO TEÓRICO.....	27
3.1 El ojo humano	27
3.1.1 Componentes anatómicos.....	28
3.1.2 Defectos de refracción.....	31
3.2 Topógrafo corneal	34
3.2.1 Mapas corneales	35
3.2.2 Mapas de código de colores	37
3.3 Fundamentos de la óptica geométrica	38
3.3.1 Definición de rayo de luz	38
3.3.2 Frente de onda	39
3.3.3 Principio de Fermat	42
3.3.4 Ley de refracción.....	42
3.3.5 Ley de reflexión	44
3.3.6 Formación de imágenes en lentes y espejos esféricos.....	45
3.4 Prueba de Hartmann	52

3.4.1	Configuración de la pantalla de Hartmann.....	53
3.4.2	El frente de onda y sus aberraciones	57
3.5	Procesamiento digital de imágenes	59
3.5.1	Representación y definición de una imagen digital.....	59
3.5.2	Propiedades de las imágenes digitales.....	60
3.5.3	Imágenes en colores	61
3.5.4	Imágenes en tono de gris.....	62
3.5.5	Imágenes binarias.....	63
3.5.6	Filtrado espacial en imágenes.....	63
3.5.7	Histograma	64
3.5.8	Umbralado.....	66
3.5.9	Morfología matemática	66
4	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA	68
4.1	Prueba de Hartmann.....	69
4.1.1	Aberración del frente de onda de la córnea	69
4.2	Arreglo de Hartmann con pantalla semiesférica	71
4.2.1	Descripción.....	71
4.2.2	Simulación.....	73
4.2.3	Fabricación.....	79
4.3	Fuente de luz multicromática	80
4.3.1	Configuración de los LED.....	80
4.3.2	Control de los LED	81
4.4	Bosquejos del topógrafo corneal	83
4.5	Procesamiento digital de las imágenes.....	88
4.5.1	Captura de las imágenes	89
4.5.2	Preprocesado	90
4.5.3	Segmentación	91
4.5.4	Representación y descripción.....	92
4.6	Descripción general del sistema.....	94
4.6.1	Interfaz gráfica del usuario.....	94
4.7	Pruebas y resultados finales	96
5	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	104
5.1	Conclusiones	104
5.2	Trabajos futuros.....	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Antecedentes del topógrafo corneal.....	22
Figura 3.1 Globo ocular derecho visto desde arriba.....	29
Figura 3.2 Zonas topográficas de un ojo derecho: (a) Superficie dividida en cuadrantes: (a. y b.) zonas temporales superior e inferior, (c. y d.) zonas nasales superior e inferior; (b) Superficie del ojo dividida en regiones concéntricas: a. zona central, b. zona paracentral, c. zona periférica y d. zona limbo.....	31
Figura 3.3 Ojo miope	32
Figura 3.4 Ojo hipermetrope	33
Figura 3.5 Ojo astigmático.....	33
Figura 3.6 Espectro electromagnético.....	39
Figura 3.7 Frente de onda asociado a una fuente puntual en un medio homogéneo [38]	40
Figura 3.8 Frente de onda asociado a una fuente puntual en un medio inhomogéneo [38]	40
Figura 3.9 Frente de onda plano después de interactuar con: (a) una lente convergente, (b) una lente divergente, (c) un espejo cóncavo y (d) un espejo convexo. El frente de onda plano es de color azul, mientras que el frente de onda producido por la interfaz es de color rojo	42
Figura 3.10 Representación geométrica de la ley de refracción.....	43
Figura 3.11 Representación geométrica de la ley de reflexión	44
Figura 3.12 Tipos de reflexión: (a) reflexión difusa y (b) reflexión especular	45
Figura 3.13 Curvas de Gauss: (a) superficies convergentes y (b) divergentes.....	46
Figura 3.14 Sección transversal de lentes delgadas	48
Figura 3.15 Distancia focal de una lente: (a) lente positiva y (b) lente negativa	48
Figura 3.16 Formación de imágenes con una lente positiva	49
Figura 3.17 Formación de imágenes con una lente divergente	50
Figura 3.18 Formación de imágenes con un espejo cóncavo	51
Figura 3.19 Formación de imágenes con un espejo convexo.....	52
Figura 3.20 Prueba de Hartmann para reflexión en un espejo cóncavo [29].....	54
Figura 3.21 Prueba de Hartmann para refracción en una lente convergente [29]	54
Figura 3.22 Pantalla de Hartmann: (a) arreglo radial, (b) arreglo helicoidal y (c) arreglo cuadrado	56
Figura 3.23 Representación de la convención de las coordenadas en las imágenes digitales.....	60
Figura 3.24 Planos de una imagen en colores y en tonos de gris	61
Figura 3.25 Imagen original en colores; componente roja (R), componente verde (G) y componente azul (B).....	62
Figura 3.26 Imagen en niveles de gris.....	62
Figura 3.27 Imagen binaria	63
Figura 3.28 Histograma.....	64
Figura 3.29 Histograma de la imagen en tonos de gris	65
Figura 3.30 Histogramas de las componentes roja, verde y azul de una imagen de color	65
Figura 3.31 Elementos de estructura cuadrado y romboidal de 3x3 píxeles, donde en cada uno se muestra su punto inicial (u origen) C_0	67
Figura 4.1 Corte transversal del arreglo óptico del topógrafo corneal semiesférico.....	72

Figura 4.2 La recta l dada en forma paramétrica por $l(t) = p + td$, tiene la dirección d y pasa por el extremo de p 73

Figura 4.3 Topógrafo semiesférico en el espacio tridimensional 75

Figura 4.4 Acercamiento de la línea del rayo 76

Figura 4.5 Acercamiento de la línea del rayo 77

Figura 4.6 Simulación de la pantalla semiesférica de Hartmann 78

Figura 4.7 Bosquejo de la pantalla semiesférica: (a) orificio de captura y (b) receptáculos para los LED 79

Figura 4.8 Plano de la pantalla semiesférica en pulgadas 80

Figura 4.9 Espectro visible por el ojo humano 81

Figura 4.10 Pantalla semiesférica 81

Figura 4.11 Circuito eléctrico de tres LED conectados al Arduino ONE 82

Figura 4.12 PCB del control de los LED: (a) control de la parte izquierda y (b) control de la parte derecha 82

Figura 4.13 Funcionamiento del topógrafo corneal 83

Figura 4.14 Bosquejo de la pantalla semiesférica 84

Figura 4.15 Sujetadores laterales de la pantalla 84

Figura 4.16 Gabinete del topógrafo corneal 85

Figura 4.17 Tapa anterior del topógrafo corneal 85

Figura 4.18 Tapa superior del topógrafo corneal 86

Figura 4.19 Base de sujeción de la cámara 86

Figura 4.20 Base de fijación de la cámara 87

Figura 4.21 Cámara digital de color 87

Figura 4.22 Ensamble del topógrafo corneal 88

Figura 4.23 Manchas luminosas del Hartmanngrama 90

Figura 4.24 Transformación de la corrección gamma 91

Figura 4.25 Imagen después del preprocesado 91

Figura 4.26 Manchas segmentadas y relacionadas con los colores: (a) amarillo; (b) azul, (c) rojo y (d) verde 92

Figura 4.27 Representación de los centroides de las manchas 93

Figura 4.28 Ventana de acceso principal 95

Figura 4.29 Ventana de selección manual de las manchas en el patrón de Hartmann 96

Figura 4.30 Ventana de selección manual de las manchas en el patrón de Hartmann 96

Figura 4.31 Patrón de Hartmann en la simulación 97

Figura 4.32 (a) Superficie simulada; (b) Superficie estimada; (c) La diferencia entre ellas 97

Figura 4.33 Ojo derecho del paciente 1: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 99

Figura 4.34 Ojo izquierdo del paciente 1: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 100

Figura 4.35 Ojo derecho del paciente 2: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 101

Figura 4.36 Ojo izquierdo del paciente 2: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 101

Figura 4.37 Ojo derecho del paciente 3: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 102

Figura 4.38 Ojo izquierdo del paciente 3: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico 102

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Este capítulo tiene como propósito contextualizar al lector del uso del topógrafo corneal en el campo médico, en general se describe el alcance del documento y se da una breve explicación o resumen del mismo; también se explican algunos antecedentes importantes para el posterior desarrollo del tema central, así como la justificación, hipótesis y objetivos principales para el desarrollo del proyecto.

1.1 El problema a resolver

La vista es considerada por mucho el sentido más importante para una vida activa independiente. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS) hasta el 2014 había en el mundo aproximadamente 285 millones de personas con alguna discapacidad visual. Se habla de discapacidad visual cuando existe una disminución significativa de la agudeza visual, o bien, una disminución significativa del campo visual.

En México, hasta el 2014 y según el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), había alrededor de 72 millones de persona con alguna discapacidad visual (58.4% de la población total del país), de los cuales aproximadamente 48 millones (43.24%) requerían de algún servicio optométrico a causa de errores de refracción no corregidos. Entre estos, mencionaremos los casos de miopía, hipermetropía, astigmatismo y presbicia, así como la presencia de problemas corneales tales como lesiones, distrofias y condiciones poco comunes. La estadística nos conduce hacia un notable estado de desasosiego por la persistencia de este tipo de afecciones, además de un justificado interés por colaborar en investigación biomédica dentro del país.

En la consulta médica donde se analiza la superficie corneal, el especialista en oftalmología se apoya de un microscopio binocular con lámpara de hendidura; sin embargo, en los casos donde se precisa de un análisis de proporción, se emplean equipos concretos de medición como el aberrómetro, el queratómetro, el paquímetro o el topógrafo corneal, todos apropiados para analizar la superficie de la córnea y diagnosticar posibles desviaciones.

El alto costo de los equipos y de los servicios de mantenimiento posventa, los convierte en equipos inusuales en clínicas públicas de primer nivel, en gran medida porque las compañías que los fabrican residen fuera del país, repercutiendo en el precio final factores como gastos de envío, gastos de importación y cambio de moneda; de la misma forma la mayoría de los equipos compuestos por equipos de cómputo poseen considerable depreciación a mediano plazo (de uno a cinco años), ya que se encuentran asociados a equipos previsibles de ser obsoletos por su limitada capacidad de memoria y de sus periféricos de fábrica.

Por otra parte, en México las unidades médicas se agrupan en tres rubros de acuerdo al nivel de atención que brindan: las unidades, clínicas o centros de salud que corresponden al primer nivel de atención de la salud; los hospitales y los centros médicos, que son las unidades médicas de segundo y tercer nivel de atención, respectivamente. Según una evaluación realizada en el 2008 por la Secretaría de Salud, en el país más del 95% de las unidades médicas pertenecen al primer nivel de atención de la salud; por lo que estas unidades no poseen los aparatos médicos especializados para detectar patologías corneales. La poca oferta del servicio especializado y la alta demanda de estos equipos dificultan el diagnóstico oportuno de cualquier anomalía.

En el presente, el mercado de los topógrafos corneales se limita al topógrafo corneal mediante anillos de Plácido, cuyo funcionamiento se basa en la proyección de anillos concéntricos luminosos sobre la córnea; sin embargo, esta metodología puede presentar algunos errores en la reconstrucción topográfica de la córnea.

Por otro lado, la metodología basada en los anillos de Plácido no es la única forma de medir la curvatura corneal, ya que también puede hacerse por medio de la prueba de Hartmann o a través de algunas otras pruebas ópticas, no obstante esta clase de topógrafo es complejo y requiere alta precisión en su fabricación y en su calibración. Algunos de los problemas que copiosamente presentan los topógrafos basados en Hartmann, son debido a la desfavorable configuración de su fuente de iluminación y a la repetida detección de falsos positivos por parte del algoritmo del sistema de software, cuando es apreciable la deformación corneal.

Con el fin de trabajar en la mejora de los sistemas de medición actuales y en la búsqueda de implementar investigaciones patrocinadas en equipos biomédicos dentro del país, el presente trabajo pretende aportar a la comunidad científica y médica un primer prototipo mexicano de topógrafo corneal semiesférico basado en la prueba óptica de Hartmann. Para ello es preciso plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Es posible desarrollar en el país un nuevo tipo de topógrafo corneal con base en la prueba geométrica de Hartmann, que resuelva los inconvenientes técnicos presentados por los equipos comerciales actuales y con ello añadirle al equipo un valor agregado?

1.2 Justificación

Existe un notable interés por parte del Laboratorio Nacional de Óptica de la Visión del Centro de Investigaciones en Óptica A.C. (CIO), en León, Guanajuato, para reunir las investigaciones patrocinadas pertinentes dentro del país para el desarrollo de nuevos equipos biomédicos y así poder ser autosustentables. El CIO cuenta ya con más de 36 años de experiencia generando conocimiento y formando capital humano en el campo de la Óptica.

En el presente, el mercado de los topógrafos corneales se limita al topógrafo corneal basado en los anillos de Plácido, pero esta metodología puede presentar algunos errores en la reconstrucción topográfica de la córnea. Por ello, con la investigación y el desarrollo de pruebas ópticas llevadas a cabo en el CIO, se ha pensado en la posibilidad de implementar una metodología alternativa basada en la prueba óptica de Hartmann para resolver estos inconvenientes y posiblemente generar nuevas inquietudes de investigación.

Desde principios del siglo XIX la prueba geométrica de Hartmann ha sido utilizada para evaluar la calidad de superficies ópticas, pero no fue hasta finales del siglo XX cuando comenzó a utilizarse para evaluar la superficie corneal. Los topógrafos basados en esta prueba han implicado una copiosa producción científica de artículos y libros especializados; no obstante, a la fecha no hay reporte alguno de la implementación de un topógrafo corneal basado en la prueba Hartmann que haya superado la etapa de evaluación del prototipo, por lo que se hace pertinente intentar desarrollar en el país un nuevo equipo biomédico de este tipo. Con el desarrollo de este tipo de instrumento médico buscamos resolver un problema social, subsanando la demanda de los servicios de topografía corneal en unidades médicas de primer nivel dentro del país.

El sesionar o licenciar los derechos de este equipo abre la oportunidad al CIO de desarrollar una gama de activos intangibles para extender el funcionamiento del equipo. El desarrollo y fabricación del equipo resulta ser viable y factible en el plan de negocios que se llevó a cabo también en este trabajo.

El campo de acción y posible mercado para este equipo optométrico se resume de la siguiente forma: para el análisis pre- y posoperatorio de la cirugía refractiva láser, se han reportado desde el año 2009 más de 28 millones de operaciones en el mundo; para el diagnóstico y seguimiento de lesiones o enfermedades corneales, el Centro Nacional de Trasplantes (CENETRA) reveló que para el año 2016 existen 7 mil 732 personas en espera de recibir un trasplante de córnea, a causa de no haberse atendido problemas relacionados con patologías corneales; en la adaptación de lentes de contacto, se estima que actualmente 130 millones de personas en el mundo los utilizan.

1.3 Hipótesis

1. Con ayuda de un topógrafo basado en la prueba de Hartmann, será posible medir córneas con alta deformación que produzcan rayos reflejados de forma oblicua y que introducen un error en la reconstrucción topográfica en los topógrafos tipo Plácido.
2. El topógrafo corneal semiesférico basado en la prueba Hartmann será capaz de medir la curvatura de la superficie anterior de la córnea y obtener resultados semejantes a los del topógrafo comercial tipo Plácido.
3. Al utilizar una pantalla de Hartmann con una matriz de LED multicromática, se facilitará la detección de las manchas que se reflejan sobre la córnea, por lo que los algoritmos del

sistema de software serán más simples y presentarán una considerable disminución de la detección de falsos positivos en córneas con gran deformación.

4. Un diseño semiesférico de la pantalla de Hartmann permitirá normalizar el camino óptico de cada uno de los puntos de luz, por lo que las manchas reflejadas por la córnea presentarán mayor contraste en su definición.
5. El nuevo diseño de la pantalla de Hartmann hará posible lograr un equipo médico de 2 a 3 veces menor en tamaño que los equipos comerciales, convirtiéndolo en un equipo más fácil de utilizar, fabricar, y transportar.

1.4 Objetivos

Los objetivos son los siguientes:

1.4.1 Objetivo general

- Desarrollar el diseño de un topógrafo corneal con base en la metodología de la prueba geométrica de Hartmann, que resuelva algunos de los inconvenientes presentados por los topógrafos corneales actuales.

1.4.2 Objetivos particulares

- Revisar el estado del arte del topógrafo corneal basado en la prueba de Hartmann, identificar posibles mejoras y diseñar un nuevo topógrafo corneal.
- Diseñar, simular y fabricar una pantalla de Hartmann con geometría semiesférica, optimizar su tamaño y la cantidad de puntos de iluminación para muestrear una mayor superficie de la córnea.

- Diseñar un sistema de software de control para operar la matriz de los LED en la pantalla de Hartmann, así como para medir la curvatura, el mapa de elevación, el frente de onda y los coeficientes de aberración de la superficie corneal.
- Diseñar y fabricar una estructura en forma de gabinete para acomodar la pantalla de Hartmann, los circuitos electrónicos y la cámara fotográfica.

1.5 Especificación del problema

En el presente, el mercado de los topógrafos corneales se limita al topógrafo corneal mediante anillos de Plácido, cuyo funcionamiento se basa en la proyección de anillos concéntricos luminosos sobre la córnea, a diferencia de los basados en la pantalla de Hartmann que proyectan puntos luminosos equiespaciados. Una de las desventajas más notables del topógrafo tipo Plácido yace en su incapacidad para discriminar rayos que se reflejan en la córnea de forma oblicua, a causa de la simetría circular de los anillos con los que no es posible reconstruir la trayectoria de los rayos reflejados por la superficie corneal cuando su diferencia con una superficie de revolución es alta; en consecuencia, se introduce un error en la reconstrucción topográfica de la córnea.

Actualmente, los diseños documentados de topógrafos basados en la prueba de Hartmann son complejos y requieren alta precisión en su fabricación y en su calibración (mecánica fina).

Un problema muy común en la prueba de Hartmann que se presenta en el diseño de los topógrafos corneales comerciales, es la copiosa detección de manchas falsas en el Hartmanngrama (falsos positivos). En vista de que los puntos de iluminación en la pantalla de Hartmann son monocromáticos y semejantes entre sí, clasificar cada una de las manchas reflejadas por la córnea en el Hartmanngrama se vuelve una tarea difícil y a su vez aumenta su complejidad conforme incrementa el número de puntos y la deformación de la córnea.

Debido a que los diseños de topógrafos tipo Hartmann actuales presentan pantallas con geometrías muy singulares, en su mayoría geometrías derivadas de la cónica, el patrón del Hartmanngrama reflejado por la córnea exhibe manchas con tamaños desiguales y en algunos casos con acoplamientos entre ellas.

1.6 Consideraciones generales

Para el desarrollo de un topógrafo corneal basado en la pantalla de Hartmann, se han tomado en cuenta las siguientes consideraciones generales:

- El CIO cuenta ya con más de 36 años de experiencia generando conocimiento en el campo de las pruebas ópticas y la fotónica. La pantalla de Hartmann ha sido una de las pruebas más ampliamente estudiadas con óptica geométrica y ha derivado en una copiosa producción de artículos y libros especializados.
- La prueba de Hartman fue creada originalmente para evaluar la calidad de superficies ópticas tales como lentes y espejos; sin embargo, al ser la córnea una superficie de reflexión especular, puede evaluarse como si se tratase de un espejo convexo.
- En el presente, el mercado del topógrafo corneal está limitado al uso del topógrafo basado en los anillos de Plácido. Este equipo llega al país a través de empresas transnacionales como ZEISS, NIDEK, SCHWIND, SOUER, TOMEY, entre otras. A la fecha no existe ninguna empresa mexicana que desarrolle este tipo de equipos, lo cual es una oportunidad de negocios para nuestro prototipo.
- En el reciente desarrollo de los topógrafos corneales basados en la prueba de Hartmann se han conseguido resultados similares a los conseguidos con los topógrafos corneales comerciales basados en Plácido; sin embargo, dado que los topógrafos Hartmann pertenecen a una tecnología joven y en proceso de desarrollo, aún no es admitida ni consolidada en el mercado médico como confiable. El desarrollo de este nuevo prototipo brinda una oportunidad al CIO de integrarse al mercado de los topógrafos corneales.
- El prestigio y respaldo científico del CIO, nos brinda la oportunidad de formar canales de distribución y relación con clientes potenciales, con la asistencia a congresos, con las publicaciones científicas y con las capacitaciones.
- Ha habido un incremento de la inversión por parte del gobierno de Guanajuato y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología para el desarrollo de nuevos productos en el campo de la Salud.

1.7 Tipo de investigación

Según Roberto Hernández Sampieri en su libro llamado “Metodologías de la investigación” [1], los alcances del proceso de investigación cuantitativa puede pertenecer a cuatro grupos que son el alcance exploratorio, correlacional, descriptivo y explicativo, de los cuales consideramos nuestra investigación recae en la siguiente clasificación:

Enfoque cuantitativo:

- Mide fenómenos;
- Utiliza estadística;
- Prueba hipótesis;
- Es secuencial;
- Es deductivo;
- Es probatorio;
- Analiza la realidad objetiva;
- Tienen precisión, réplica y predicción.

Alcance exploratorio:

- Investiga problemas poco estudiados;
- Indaga desde una perspectiva innovadora;
- Ayuda a identificar conceptos promisorios;
- Prepara el terreno para nuevos estudios.

Alcance explicativo:

- Determina la causa de los fenómenos;
- Genera un sentido de entendimiento;

1.8 Medios utilizados

Medios documentales

Documentos impresos:

Biblioteca del CIO, Centro de Investigaciones en Óptica A.C.

Documentos electrónicos:

Editoriales:

Elsevier, Spring, IEEE, WILEY, OSA The Optical Society, JSTOR

Google Patents, Patentscope, European Patent, Latipat Espacenet.

Medios experimentales

Laboratorio Nacional de Óptica de la Visión, CIO A.C.

Topógrafo corneal ATLAS 9000

Taller mecánico, Centro de Investigaciones en Óptica A.C.

Taller electrónico, Centro de Investigaciones en Óptica A.C.

1.9 Apoyos y contribuciones

Son los siguientes:

1.9.1 Apoyos

Los autores de este proyecto agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo de la beca para el estudio de posgrado, y al Laboratorio Nacional de Óptica de la Visión del Centro de Investigaciones en Óptica A.C. por el recurso humano y económico para llevar a cabo el prototipo.

1.9.2 Contribuciones

El prototipo del topógrafo corneal es el resultado del trabajo multidisciplinario en el que

participaron el Dr. Daniel Malacara Doblado como director del proyecto y asesor en la parte de pruebas ópticas; el Dr. Alejandro Téllez Quiñones como asesor matemático; el Dr. Edgardo Manuel Felipe Riverón como asesor en el procesamiento digital de las imágenes; y el Dr. Eduardo Garduño Calderón, Presidente Honorario del Colegio de Oftalmólogos del Estado de México, como asesor en la parte médica de la investigación.

1.10 Organización del documento

El protocolo de tesis está compuesto por cinco capítulos: en el capítulo 1 Introducción, se describen y justifican los objetivos del proyecto de la investigación; en el capítulo 2 Estado del arte, se resumen los antecedentes de la invención, presidiendo los equipos de topografía corneal y los equipos basados en la prueba de Hartmann; en el capítulo 3 Marco teórico, se explican los principios teóricos que debe manejar el lector para comprender el funcionamiento de la invención, desde el punto de vista anatómico con la descripción de los componentes del ojo humano, los mapas corneales y código de colores utilizados de forma estándar por los topógrafos corneales comerciales, los principios básicos de la óptica geométrica, así como la descripción de la prueba de Hartmann y el procesamiento digital de imágenes; en el capítulo 4 Solución del problema, se explica al lector cada una de las partes que componen al topógrafo corneal, iniciando por la parte óptica, la electrónica, la mecánica y la del sistema de software; finalmente, en el capítulo 5 se precisan las conclusiones del trabajo y los proyectos futuros.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se brinda una breve descripción de los antecedentes del equipo optométrico conocido como topógrafo corneal. En forma narrativa, el primer título menciona el primer trabajo de topografía realizado por los científicos Jesse Ramsden y Joseph Banks en 1779 [9], hasta llegar gradualmente a los trabajos basados en los anillos de Plácido, al primer equipo digital propuesto por Stephen Klyce en 1987 [23] y a los equipos comerciales actuales como el Atlas, el Orbscan y el Pentacam.

Por otra parte, en el siguiente epígrafe se resumen los antecedentes de la prueba de Hartmann utilizada en ciencias de la visión, donde sintetizamos algunos trabajos de equipos optométricos como el lensómetro, el aberrómetro y finalmente el topógrafo corneal, de donde se desprenden los trabajos de referencia para el desarrollo de este proyecto.

Finalmente, en el último epígrafe se brinda, desde un punto de vista crítico, el estado del arte de los topógrafos corneales actuales y de los problemas que presentan.

2.1 Antecedentes del topógrafo corneal

La córnea es uno de los elementos anatómicos refractivos más importantes del ojo humano debido a que proporciona dos terceras partes de su poder óptico [2-4]. Examinar la curvatura de la córnea es un procedimiento preceptivo en la práctica clínica cuando se presenta adaptación de lentes de contacto, diagnóstico y seguimiento de afecciones corneales, y cirugías refractivas. Esto se logra por medio de equipos especializados como el aberrómetro [5, 22], el queratómetro [2, 7] y el topógrafo corneal [2, 6], todos apropiados para analizar la superficie anterior de la córnea y diagnosticar posibles desviaciones.

En el año 1779 los científicos Jesse Ramsden y Joseph Banks [9], iniciaron el desarrollo de nuevas técnicas para medir la curvatura de la córnea y así comprobar la teoría de adaptación corneal en el proceso de acomodación visual propuesta por Johannes Kepler (1571 - 1630). El diseño propuesto por Ramsden y Banks, y más tarde retomado por Everard Home en 1795 [24], consistió esencialmente en un mecanismo de duplicación de imágenes y de un telescopio de magnificación, que comparaba el tamaño de la imagen de muestra contra la imagen reflejada por la córnea [9]. Eventualmente, después de revisar la paridad de las imágenes con ayuda de regla y compás, ninguno de los científicos encontró cambios significativos de la córnea durante el proceso de acomodación visual [9, 24]; no obstante fueron los primeros en utilizar el principio que asume a la córnea como un medio esférico convexo con reflexión especular, por lo que su radio de curvatura puede determinarse mediante la ley de reflexión [3, 7].

En el año 1801, el científico inglés Thomas Young describió el efecto óptico del astigmatismo, el cual asume que la córnea tiene un par de meridianos ortogonales de mayor y menor potencia óptica [12, 13].

En el año 1855, el fisiólogo alemán Hermann Helmholtz diseñó el primer instrumento para medir el astigmatismo corneal. Este equipo fue llamado oftalmómetro, y estaba compuesto por una mirilla óptica y dos cristales planos situados en un ángulo particular para duplicar las imágenes reflejadas por la córnea [10]. El equipo consiguió mediciones precisas de la córnea incluso con movimientos involuntarios del paciente durante la prueba [7].

Entre los diseñadores posteriores se encontraron los oftalmólogos Louis Javal y August Schiötz, quienes en 1881 convirtieron el diseño original de Helmholtz en un aparato más fácil de usar en la práctica clínica [11]. El nuevo instrumento incluía una nueva configuración de miras móviles que

permitían al dispositivo girar sobre su eje y medir múltiples meridianos corneales. Los equipos optométricos de Javal & Schiotz y de Helmholtz son adecuados para medir la superficie anterior de la córnea cuando se precisa de ajuste de lentes de contacto y en bajos niveles de astigmatismo; de lo contrario, las mediciones pueden fallar en superficies con cicatrización excesiva, desórdenes ectásicos y con alta deformación astigmática [8].

Estos equipos fueron renombrados más tarde como queratómetros; inicialmente fueron diseñados para medir la curvatura de los meridianos en la zona central de la córnea, cuyo diámetro es de 4 mm y es la parte más esférica, simétrica y ópticamente importante de la córnea [3], lo cual es una desventaja si se desean conocer los radios de la zona contigua a la periferia. Estas limitaciones condujeron al desarrollo del queratoscopio o topógrafo corneal; equipo capaz de medir la curvatura en la zona central, paracentral y periférica de la córnea, cuyos diámetros comprenden 11 mm [3, 8].

La técnica de la queratoscopía fue explicada por primera vez en 1820 por el médico Ferdinand Cuignet, citado por Brody [14] y en 1847 por el médico inglés Henry Goode [15], pero no fue hasta 1880 cuando el médico portugués Antonio Plácido fotografió la córnea con ayuda de una pantalla plana de anillo concéntricos [17], extendiendo así el concepto de la técnica a fotoqueratoscopía.

Notables trabajos derivaron de la técnica de Plácido, en su mayoría basados en geometrías alternativas de la pantalla original para disminuir el desenfoque periférico de la córnea y aumentar el área de análisis de la superficie. En el año 1896 el científico Allvar Gullstrand perfeccionó la queratoscopia e introdujo un topógrafo cuya pantalla de Plácido coincidía con el eje óptico de una cámara fotográfica, y logró desarrollar un análisis matemático del perfil corneal [16]. En 1984 Stephen Klyce inicio el concepto de videoqueratoscopía con ayuda de un sistema de cómputo y una cámara de video digital. El primer mapa codificado por colores de la córnea fue publicado en ese mismo año [23].

Desde principios del siglo XX ha habido un notable interés de los científicos por utilizar técnicas alternativas para medir el frente de onda y la curvatura en lentes convexos, siendo la prueba geométrica de Hartmann una de las más estudiadas.

Algunos prototipos de topógrafo corneal que se han beneficiado de estos estudios son los siguientes: en el año 2001 Mejía-Barbosa y Malacara-Hernández desarrollaron un topógrafo corneal elipsoidal con 252 perforaciones y una fuente de iluminación integrada por fibras ópticas. La geometría de la pantalla garantizaba que todos los puntos del patrón estuvieran enfocados al llegar al objetivo de la cámara, de modo que al colocar la córnea de un paciente, la imagen virtual era una

cuadrícula distorsionada que daba cuenta de las variaciones topográficas de la córnea [19]; en 2015 Rodríguez-Rodríguez *et al.* presentaron un topógrafo formado por tres pantallas LCD cuyo patrón de puntos podía ser modificado digitalmente sin comprometer la mecánica del equipo [20]; en 2015 Campos-García *et al.* presentaron un topógrafo con una pantalla en forma de cono con una distribución radial de puntos [21].

En el presente, el mercado de los topógrafos corneales que reconstruyen la superficie anterior de la córnea se limita al topógrafo corneal mediante anillos de Plácido, como en el caso del equipo Atlas, aunque existen también equipos optométricos para evaluar la superficie posterior de la córnea, como el Orbscan que utiliza un haz con forma de hendidura para evaluar la superficie [25] y el Pentacam que utiliza una cámara de alta resolución y un haz rotatorio para evaluar la superficie posterior de la córnea desde un vértice dado[18]. Por nuestro interés de completar este trabajo consideramos importante mencionar estas tecnologías; sin embargo, para nuestro estudio no son de mucho interés, debido a que la curvatura posterior de la córnea se mide con principios técnicos diferentes a los de la reflexión especular de la córnea.

Con base en los antecedentes ya mencionados, en forma de resumen mostramos en la figura 2.1 una línea de tiempo con los antecedentes del topógrafo corneal desde su inicio en 1779 hasta el año 2017.

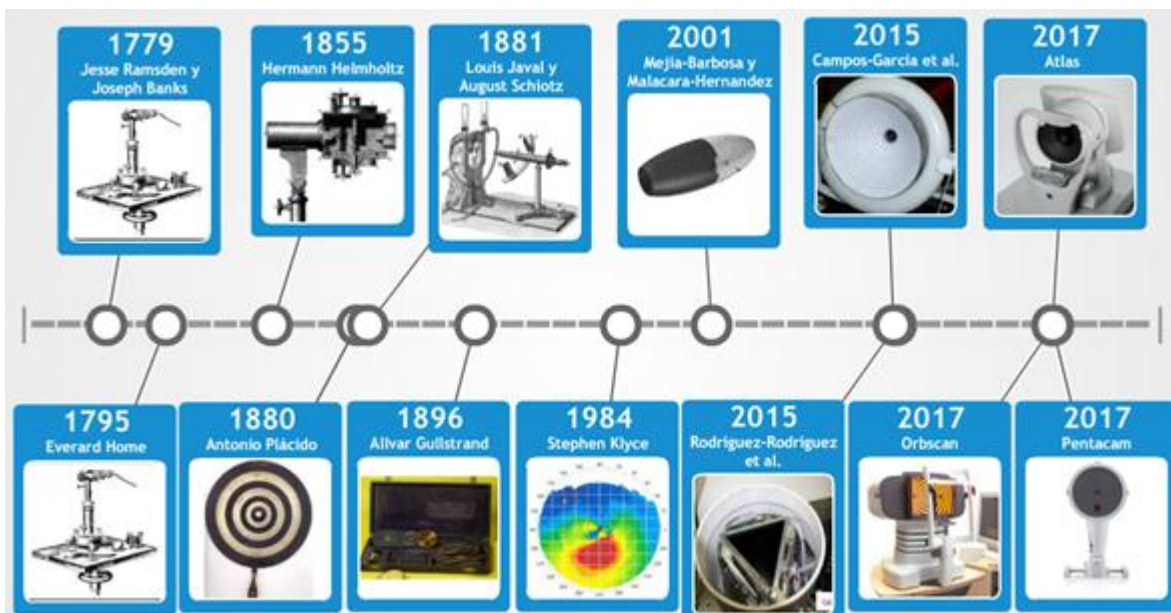


Figura 2.1 Antecedentes del topógrafo corneal

2.2 Antecedentes de la prueba de Hartmann en ciencias de la visión

La prueba geométrica de Hartmann fue inventada a principios del año 1900 por el astrofísico alemán Johannes Hartmann, quien diseñó la prueba para medir la calidad óptica de un espejo astronómico [26]. La técnica pertenece a la clasificación de pruebas geométricas diseñadas para obtener el frente de onda de una superficie óptica mediante el análisis del desplazamiento de las manchas reflejadas o refractadas. La prueba está compuesta por una fuente de iluminación, una pantalla con perforaciones, una superficie de estudio y un plano de observación. Al conocer las desviaciones de las manchas reflejadas por la superficie de estudio con respecto a las manchas de referencia de una superficie ideal, es posible determinar la inclinación del frente de onda con el modelo propuesto por Nijboer en 1942 [27] o con el propuesto por Rayces en 1964 [28].

A lo largo del tiempo la prueba clásica de Hartmann ha presentado innumerables cambios en su configuración, con la intención de potencializar su función y medir la aberración del frente de onda en superficies ópticas convexas. La prueba geométrica de Hartmann se ha distinguido de las demás pruebas por su simplicidad y baja sensibilidad a las vibraciones [30], atributos que le han sido muy útiles para poder emplearse en equipos especializados en óptica médica como en el lensómetro [29], el topógrafo corneal [2, 6] y el aberrómetro ocular [5].

El lensómetro es un equipo optométrico apropiado para determinar la potencia óptica de lentes oftálmicas [2]. En este contexto, la configuración de la prueba de Hartmann está compuesta por una cámara fotográfica, una pantalla perforada, una lente colimadora y una pantalla de observación para visualizar las manchas del patrón de Hartmann, también llamado hartmanngrama, antes y después de ubicar la lente de estudio entre la pantalla de observación y la lente colimadora. A partir de la comparación de los patrones de Hartmann se determina el frente de onda y la potencia refractiva de la lente de estudio [29]. En 1992 Malacara-Hernández y Malacara-Hernández diseñaron una pantalla de Hartmann con cuatro perforaciones para probar la calidad de superficies ópticas y detectar aberraciones primarias [31]. Este trabajo fue utilizado en 1998 por un lensómetro digital para adecuar las lentes antes de la medición [35]. En 2006 Trujillo-Schiaffino *et al.* lograron obtener la potencia refractiva de una lente oftálmica progresiva mediante la relación trigonométrica entre la posición de las manchas de referencia y las manchas obtenidas con la lente de estudio [32]. En 2014 Mejia-Barbosa [34] y más tarde en 2016 Lin-ling y Jing-chi publicaron diferentes técnicas para este mismo propósito [33], y en 2016 Salas-Peimbert *et al.* publicaron un trabajo

complementario para medir el mapa distribuido de potencias en una lente sin necesidad de obtener el frente de onda [36].

El topógrafo corneal es un instrumento médico apropiado para medir la curvatura de la córnea a fin de detectar posibles anomalías. Desde principios del siglo XIX la prueba de Hartmann ha sido utilizada para evaluar la calidad de superficies ópticas, pero no fue hasta finales del siglo XX cuando comenzó a utilizarse para evaluar la superficie corneal. El topógrafo basado en la prueba de Hartmann ha implicado una copiosa producción científica de artículos especializados tal como el topógrafo elipsoidal de Mejía-Barbosa y Malacara-Hernández en 2001 [19]; el topógrafo con LCD de Rodríguez-Rodríguez *et al.* [20], y el topógrafo cónico de Campos-García *et al.* en 2015 [21]. La relación entre estos equipos está ligada a la configuración de la prueba nula de Hartmann donde las manchas en la pantalla de observación forman una cuadrícula perfecta al no existir aberraciones en el sistema óptico [37]. Esta configuración es apropiada para medir frentes de onda planos en lentes o espejos, e incluso aberraciones en el frente de onda del ojo humano.

En el campo de la aberrometría, las aberraciones oculares se pueden medir por medio de un arreglo de microlentes denominado sensor de Hartmann-Shack [2]. Dentro del sensor, las microlentes están dispuestas como una cuadrícula equiespaciada, de modo que cuando un frente de onda plano incide sobre el arreglo de microlentes, cada una de ellas enfoca la porción del frente de onda que pasa a través de ella en un punto que corresponde a su foco paraxial; si dicho frente de onda es plano, se formará un arreglo cuadrangular de puntos equiespaciados o de lo contrario se formará una cuadrícula distorsionada de puntos.

Ya sea con la prueba nula de Hartmann o con el sensor de Hartmann-Shack, es posible calcular las aberraciones del frente de onda de la córnea y su superficie. El orden de las aberraciones calculadas depende del modelo matemático que se utilice en los ajustes y de la relevancia de cada uno de los términos dentro del modelo polinomial, que para las aberraciones primarias puede ser el polinomio de Taylor (polinomio de coordenadas cartesianas) [38] y el polinomio tratado por Malacara-Doblado y Ghozeil [30], o para aberraciones de orden superior el polinomio de Zernike, que constituye una base matemática adecuada para representar las aberraciones oculares. En el año 2000 se adoptó el polinomio de Zernike como estándar para su uso en óptica oftálmica [30, 38].

2.3 Estado del arte

Una prueba óptica es un método de medición empleado para determinar los errores de fabricación de una superficie óptica por medio de la evaluación de sus aberraciones ópticas y de la comparación entre los parámetros ópticos medidos y los establecidos durante la etapa de diseño.

Al analizar una superficie óptica, se requiere seleccionar un método de prueba que permita obtener resultados confiables y precisos. La gama de pruebas que pueden ser utilizadas para analizar una superficie óptica se clasifican en dos tipos: las pruebas interferométricas y las pruebas clásicas no interferométricas. Las interferométricas utilizan la longitud de onda como patrón de referencia para realizar las mediciones. Por el contrario, las pruebas no interferométricas, o también conocidas como geométricas, se basan en el análisis del camino óptico mediante el trazo de rayos de luz [39].

Dentro de las pruebas interferométricas se encuentran principalmente las que usan el interferómetro de Twyman-Green, el interferómetro de Fizeau, los interferómetros de camino común y de desplazamiento lateral [30]; por otra parte, dentro de las pruebas no interferométricas se encuentran la prueba de Foucault, la prueba de Ronchi, la prueba de Hartmann y la de Hartmann-Shack [30].

En la actualidad, el mercado de los topógrafos corneales que reconstruyen la curvatura anterior de la córnea se limita al topógrafo corneal mediante anillos de Plácido, cuyo funcionamiento se basa en la proyección de anillos concéntricos luminosos sobre la córnea; sin embargo, una de las desventajas más notables de estos equipos yace en su incapacidad para discriminar rayos que se reflejan en la córnea de forma oblicua [29]; en consecuencia, se introduce un error en la reconstrucción topográfica de la córnea.

Debido a que la prueba de Hartmann ha sido una técnica ampliamente estudiada desde principios de 1900 para evaluar superficies ópticas, ésta ha ido mejorando en el tiempo de procesamiento, agilizando la reducción de datos y siendo cada vez más fácil de implementar sin perder la precisión [39]. A principios del siglo XX los científicos han comenzado a desarrollar prototipos de topógrafos corneales basados en la prueba de Hartmann [19, 20, 21, 30, 37].

Existe una notable cantidad de trabajos que utiliza la prueba nula de Hartmann para medir superficie convexas, como es el caso de Campos-García *et al.* quienes diseñaron una pantalla nula de Hartmann con geometría cilíndrica en el 2000 [41, 42]; Avendaño-Alejo *et al.* quienes diseñaron

una pantalla nula de Ronchi-Hartmann para probar lentes en 2010 [43] y de Domínguez *et al.* quienes diseñaron un sistema de software configurable para probar sistemas ópticos (por sus siglas en inglés SCOTS) en 2011 [40]. La mayoría de estos autores han contribuido en los prototipos de topógrafos basado en Hartmann; sin embargo aún hay muchas ideas que no se han orientado al desarrollo del equipo biomédico en el área de la óptica de la visión.

Capítulo 3

MARCO TÉORICO

En este capítulo se brindan las bases para facilitar el entendimiento del equipo en el capítulo siguiente, por lo que se comienza por analizar el funcionamiento del ojo humano desde el punto de vista de la óptica, así como describir sus componentes anatómicas y los defectos refractivos más comunes. Se describen también los elementos que forman parte de un topógrafo corneal estándar y sus fundamentos básicos en la óptica geométrica.

Finalmente, se aborda el tema de la representación y definición de una imagen digital, así como sus propiedades y las operaciones lógicas para su tratamiento

3.1 El ojo humano

Desde el surgimiento del ser humano, hace ya más de dos millones de años, éste siempre ha contado con herramientas biológicas intrínsecas para adaptarse a su entorno, percibiendo e interpretando el mundo por medio de sus sentidos de la vista, el olfato, el gusto, el tacto y la audición, cada uno de ellos asociado a un órgano sensorial que transforma los estímulos en impulsos nerviosos.

La vista es considerada como el sentido más especializado y complejo del ser humano, por lo que se le considera como el más importante de todos. A través de la vista se percibe, al menos, alrededor del 70% de la información presente en el mundo que nos rodea, confiando el resto a los demás sentidos. El órgano de la vista, mediante las estructuras anatómicas del globo ocular, transforma las vibraciones electromagnéticas de la luz en impulsos nerviosos que se transmiten al cerebro. A este proceso fisiológico también se le conoce como visión.

Desde el punto de vista de la óptica, el comportamiento fisiológico del globo ocular es análogo a los principios de formación de imágenes en los sistemas ópticos convergentes, donde los rayos de luz reflejados por un objeto y refractados por una lente, coinciden en un punto focal antes de formar la imagen invertida del objeto. La relación exacta entre las estructuras anatómicas del ojo humano y la formación de las imágenes, es explicada por Malacara-Hernández [2] y Puell-Marón [3], que la resumen de la siguiente forma: la luz que incide sobre la superficie ocular es refractada por la córnea hasta la cámara anterior y posterior del globo ocular, comprendidas desde la superficie posterior de la córnea hasta el iris y desde la pupila hasta el cristalino, respectivamente, el que más tarde mediante el proceso fisiológico de la acomodación visual la hace llegar a través de la cámara vítrea, hasta la retina, donde finalmente la imagen es formada y detectada por un conjunto de células fotosensibles que la transforman en estímulos nerviosos que se envían, con la ayuda del nervio óptico, hasta el cerebro.

3.1.1 Componentes anatómicos

La Fig. 3.1 muestra las estructuras anatómicas del ojo humano derecho visto desde arriba. La descripción y proporción de los elementos que intervienen en la formación de las imágenes están ampliamente descritos en [2, 3]: la córnea, que consiste en una lente cóncava convexa transparente cuya función es proteger las estructuras intraoculares y refractar la luz hacia el interior del globo ocular. Su poder refractivo de 43 dioptrías (unidad equivalente a la potencia de una lente con distancia focal es de 1 m) es producido por su curvatura y por su índice de refracción de 1.3771, mayor que el del aire; el humor acuoso, que es un líquido viscoso, transparente y con un índice de refracción de 1.3374, que ocupa el espacio de las cámaras anterior y posterior del ojo humano, mientras que el humor vítreo tiene un índice de refracción de 1.406 en su parte central y 1.386 en su parte externa, ocupa el espacio de la cámara vítrea; el cristalino, consistente en una lente biconvexa y flexible, cuya curvatura cambia para enfocar objetos cercanos en el proceso de acomodación visual, el cual tiene un poder refractivo próximo a las 19 dioptrías y un índice de refracción de entre

1.36 y 1.41. Por otra parte, el iris es una membrana opaca y de color diverso, ubicada en la parte anterior del cristalino, cuya abertura en su centro llamada pupila tiene la función de controlar la cantidad de luz que llega a la retina; su tamaño es de entre 3.5 y 4.0 mm bajo condiciones normales de iluminación y es controlada por la expansión y contracción del iris a causa de un autoreflejo producido por la intensidad luminosa; el músculo ciliar se encuentra situado en el interior del ojo, tiene forma de anillo y está adherido al cristalino mediante un ligamento suspensorio conocido como zónula de Zinn; su función es flexionar o liberar al cristalino, para cambiar su poder convergente en el proceso de la acomodación visual.

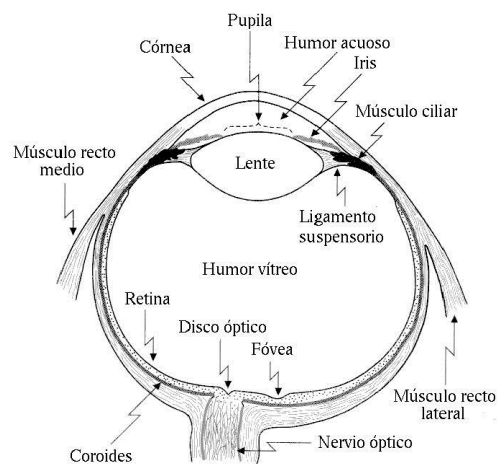


Figura 3.1 Globo ocular derecho visto desde arriba

La parte exterior del globo ocular, o la cubierta, se compone de tres capas de tejido: la capa más externa avascular es la esclerótica, que es un tejido fibroso, denso y de color blanco con una función protectora, se prolonga desde el polo posterior del globo ocular hasta la zona del limbo de la córnea, que es la zona más alejada del ápice corneal; la capa media vascular, también conocida por úvea, tiene a su vez tres partes diferenciadas: la coroides, muy vascularizada, reviste la parte posterior interna del globo ocular, continúa hasta el cuerpo ciliar, formado por los procesos ciliares encargados de producir el humor vítreo, hasta llegar al iris; y la capa sensorial interna conocida como retina, la cual es sensible a la luz por medio de fotorreceptores con forma de conos y bastoncillos. La retina es el lugar donde se forman las imágenes.

Sobre la retina también se encuentra la fóvea, que es una pequeña depresión situada en el centro de la mácula lútea. La fóvea es el área donde se enfocan los rayos luminosos provenientes del cristalino, es responsable de la nitidez en la visión central y la visión del color. Por otra parte, el

nervio óptico, que es el conducto que se encuentra en la parte posterior del globo ocular compuesto por fibras nerviosas y vasos sanguíneos provenientes de la retina; es el encargado de transmitir la información visual hasta el cerebro.

Dentro de los componentes impulsores del globo ocular se encuentran los seis músculos extraoculares, conformados por el músculo recto superior, el inferior, el medio, el lateral, el oblicuo superior y el inferior.

3.1.1.1 Anatomía de la córnea

La córnea es el primer elemento refractivo del globo ocular, protege las estructuras intraoculares y refracta la luz hacia su interior, contribuye con 43 de las 58 dioptrías del ojo humano, es altamente transparente y tiene forma de lente cóncava convexa con radios de curvatura de 7.80 mm en su cara anterior y 6.80 mm en la cara posterior, lo que determina su forma de menisco cóncavo donde los bordes son más gruesos que el centro. Su espesor central es de 0.6 mm y de 0.7 mm en su parte periférica; vista de frente la córnea tiene un diámetro aproximado de 12 mm en su parte horizontal y 11 mm en la vertical [3]. Su estructura anatómica se compone del epitelio, la capa de Bowman, el estroma, la membrana de Descemet y el endotelio, además de una capa adicional de película lagrimal que lubrica y humedece la superficie de la córnea.

La topografía de la superficie anterior de la córnea puede ser dividida en cuadrantes o en regiones concéntricas para su identificación. En el primer caso la córnea se secciona tal como si se tratase de un plano cartesiano rectangular cuyo centro coincide con el eje pupilar; si trazamos una línea vertical imaginaria por el centro de cada una de las pupilas, las partes cercanas a la nariz se denominan zonas hemicorneales nasales y las partes de mayor tamaño cercanas al lóbulo se denominan zonas hemicorneales temporales; si hacemos este mismo procedimiento con una línea horizontal en cada pupila, las córneas se dividen en las zonas hemicorneales superiores e inferiores, siendo estas últimas las de mayor tamaño. Por otra parte, cuando las líneas se cruzan perpendicularmente entre sí, cada córnea se divide en cuatro partes dispuestas por la zona nasal superior e inferior y la temporal superior e inferior; en el caso de las regiones concéntricas, la topografía corneal se separa rotacionalmente tal como si se tratase de un plano polar, donde las regiones son delimitadas por cuatro anillos concéntricos cuyos centros coinciden con el eje pupilar, el más pequeño delimita a la zona central de la córnea de entre 3 y 4 mm de diámetro, seguido por

la zona paracentral de entre 7 y 8 mm, la zona periférica de 11 mm y finalmente la zona limbo de 12 mm [4]. Las zonas topográficas de un ojo derecho se muestran en la figura 3.2.

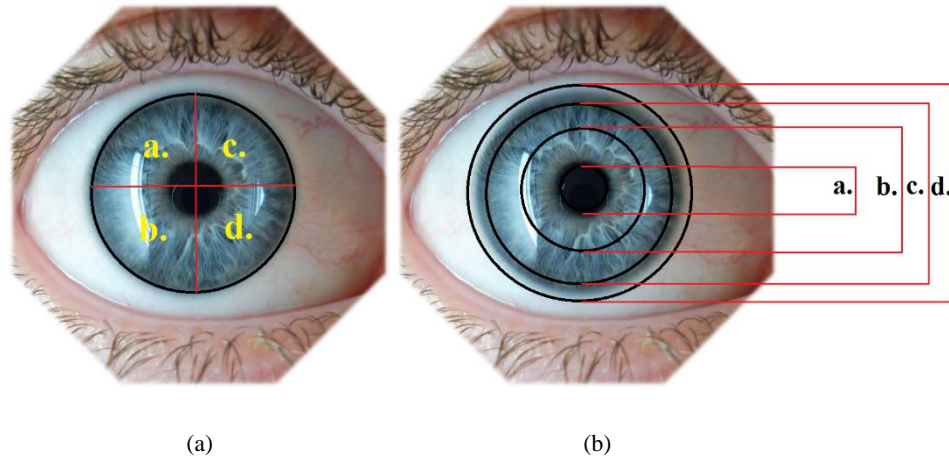


Figura 3.2 Zonas topográficas de un ojo derecho: (a) Superficie dividida en cuadrantes: (a. y b.) zonas temporales superior e inferior, (c. y d.) zonas nasales superior e inferior; (b) Superficie del ojo dividida en regiones concéntricas: a. zona central, b. zona paracentral, c. zona periférica y d. zona limbo.

La superficie anterior de la córnea generalmente es esferocilíndrica (tórica), se caracteriza por un aumento progresivo del radio de su curvatura desde el ápice corneal hasta la zona del limbo. La córnea es esférica sólo dentro de su zona central, la cual es considerada la región óptica ocular más importante debido a que su diámetro es análogo al de la pupila bajo condiciones normales de iluminación y contribuye con la formación de las imágenes retinianas en visión diurna [3]. Para efectos prácticos de los topógrafos corneales, una primera aproximación consideran a la córnea como una superficie esférica de 7.8 mm de radio [19-22, 29-32], con un índice de refracción equivalente al índice estándar del queratómetro de 1.3375 (SKI) (por sus siglas en inglés *Standard Keratometric Index*) [6].

3.1.2 Defectos de refracción

En la óptica de la visión, el término error refractivo se refiere a un trastorno fisiológico del sistema ocular que produce un desenfoque total o parcial de las imágenes que se forman sobre la retina. Los

errores refractivos en el ojo humano son producidos comúnmente por la diversidad anatómica de sus componentes.

Generalmente se asume que un ojo normal está enfocado al infinito cuando el proceso de acomodación visual está relajado, por lo que se dice que el ojo es emétrope cuando no tiene defectos refractivos y cuando su forma y dimensiones logran enfocar los rayos luminosos sobre la retina; en contraste, se dice que el ojo es amétrope cuando los rayos provenientes del infinito no se enfocan sobre la retina, sino delante o detrás de ella.

Uno de los principales trastornos responsables de producir ametropía en personas de entre 40 y 50 años de edad es la presbicia, también conocida como vista cansada. En concreto, la presbicia es un defecto fisiológico ocular asociado a la disminución progresiva de la acomodación por la pérdida natural de la elasticidad del cristalino. En los primeros años de vida de un ser humano la amplitud de la acomodación es de alrededor de 14 dioptrías situando el punto próximo a 7 cm del ojo; con el aumento de la edad esta amplitud de acomodación comienza a disminuir, de tal forma que a los 36 años ha reducido unas 7 dioptrías y a los 45 años la amplitud de acomodación es de sólo 4 dioptrías, situando el punto próximo a 25 cm; cuando se alcanzan los 60 años ya sólo existe 1 dioptría de acomodación con un punto aproximado a 1 m. Un paciente con presbicia puede ver con claridad objetos cercanos únicamente con la ayuda de lentes convergentes, por lo que la solución es prescribir una lente bifocal para corregir los defectos refractivos en la visión cercana sin producir efectos negativos en la visión lejana [3].

Otro padecimiento refractivo es la miopía, donde el ojo relajado, sin acomodación, enfoca a los objetos lejanos que vienen del infinito delante de la retina (ver la figura 3.3). Un ojo miope tiene exceso de potencia, ya que su longitud axial es excesivamente larga en relación con su distancia focal, por lo que no puede enfocar objetos lejanos, pero en cambio sí puede ver con claridad los objetos cercanos sin necesidad de acomodación visual. La miopía disminuye ligeramente guiñando los ojos para conseguir una hendidura que incremente la profundidad del foco, o bien se corrige usando lentes negativas [2].



Figura 3.3 Ojo miope

Por otra parte, en la hipermetropía los objetos lejanos, que vienen de infinito, son enfocados detrás de la retina (ver la figura 3.4), por lo que en ésta se forman círculos de difusión y aparece una imagen borrosa. Un ojo hipermetrope es poco potente para su longitud axial, por lo que un paciente con este padecimiento puede ver con claridad objetos simplemente aumentando su potencia mediante la acomodación, lo que produce que el ojo nunca se encuentre relajado, es decir sin acomodación, ni siquiera para enfocar objetos lejanos; el adulto hipermetrope joven dispone de suficiente acomodación para hacer eso de forma inconsciente y si su visión es normal, puede que no sospeche la presencia del error refractivo. La hipermetropía se corrige usando lentes positivas [2].

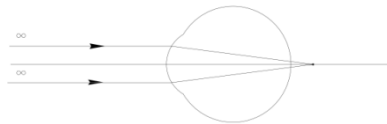


Figura 3.4 Ojo hipermetrope

En los ojos emétopes y amétopes vistos hasta ahora, las zonas más importantes del sistema ocular se han considerado como superficies totalmente esféricas, por lo que el haz refractado por el ojo converge hacia el eje óptico y forma un punto imagen Gaussiano; sin embargo, cuando las superficies refractivas presentan diferente curvatura en sus meridianos, no pueden formar una imagen de un punto objeto. Este tipo de superficies con un valor mínimo y un valor máximo de curvatura en meridianos perpendiculares entre sí se llaman astigmáticas (ver la figura 3.5). Es muy común que la superficie de la córnea se deforme y adquiera una forma toroide o esferocilíndrica; bajo estas condiciones, los rayos en el plano paralelo al eje de la lente tienen diferente foco que los rayos en el plano perpendicular. Se dice que se tiene astigmatismo con la regla cuando el meridiano vertical es más convergente que el horizontal; este tipo de astigmatismo es el más común. Por otro lado, el astigmatismo es contra la regla cuando el meridiano horizontal tiene la mayor convergencia. El astigmatismo se corrige por medio de lentes con forma esferocilíndrica, aunque en algunos casos puede requerirse cirugía y trasplante de córnea [2, 4].



Figura 3.5 Ojo astigmático

Existen también desórdenes patológicos en el globo ocular, como es el caso del queratocono, que debido a cambios estructurales la córnea se adelgaza en su centro, pierde resistencia y se protruye hacia adelante. En la mayoría de los casos, las personas con queratocono temprano notan visión borrosa, ya que los síntomas no son muy diferentes a los de cualquier defecto refractivo. A medida que la enfermedad progresa, la visión se deteriora, la agudeza visual empeora cualquiera que sea la distancia, y la visión nocturna suele ser pobre; algunos pacientes desarrollan hipersensibilidad a la luz, fatiga ocular, picazón en el ojo, además de imágenes múltiples y halos luminosos muy molestos. Los casos poco severos son tratados con lentes de contacto rígidas; sin embargo, si la visión no se restablece hay que plantear la cirugía, normalmente un trasplante de córnea o la inserción de anillos intracorneales [2].

La topografía corneal ha recibido un destacado impulso en los últimos años, que va desde ser un dispositivo de investigación hasta un instrumento utilizado por optometristas y oftalmólogos diariamente en sus consultas, puesto que puede utilizarse en la adaptación de lentes de contacto y en el diagnóstico y seguimiento de afecciones como el queratocono, la miopía, la hipermetropía, el astigmatismo, entre otros padecimientos.

3.2 Topógrafo corneal

El topógrafo corneal es un instrumento médico apropiado para medir la curvatura de la córnea con el fin de detectar posibles anomalías. Examinar la curvatura de la córnea es un procedimiento preceptivo en la práctica clínica cuando se presenta la necesidad de la adaptación de lentes de contacto, del diagnóstico y seguimiento de afecciones corneales y de cirugías refractivas. Esto se logra por medio de equipos especializados como el aberrómetro, el queratómetro y el topógrafo corneal, todos apropiados para analizar la superficie anterior de la córnea y diagnosticar posibles desviaciones.

En la actualidad, el mercado de los topógrafos corneales y de otros instrumentos optométricos ha implementado esquemas para estandarizar sus resultados consistentemente, de modo que puedan ser interpretados y comparados de la misma forma, aun cuando provengan de diferente tecnología. Estos esquemas estandarizados son los mapas corneales y los mapas de código de colores.

3.2.1 Mapas corneales

Los topógrafos corneales de última generación (como el Atlas, el Orbscan y el Pentacam), pueden ofrecer datos confiables y reproducibles de la superficie anterior de la córnea a través de su representación en mapas corneales estandarizados. En el presente, el mercado de los topógrafos está reducido casi exclusivamente al topógrafo corneal de reflexión especular de Plácido, cuyo funcionamiento se basa en la proyección de anillos concéntricos luminosos sobre la córnea, y recientemente a los topógrafos basados en la prueba de Hartmann que se apoyan en la proyección de puntos de luz equiespaciados [19-21]. No obstante, sea cual sea la metodología utilizada por el topógrafo, los resultados deben presentarse conforme a mapas corneales estereotipados para facilitar y estandarizar su interpretación. Estos mapas pueden representar la curvatura, el poder refractivo, la elevación y el frente de onda de la córnea. Clásicamente los siete mapas principales son [45, 47]:

Mapa axial. También llamado sagital o frontal, es el mapa más utilizado por los especialistas para diferenciar córneas esféricas, astigmáticas o con anatomías irregulares. Este mapa permite medir la curvatura dióptrica de la córnea con respecto al centro de una esfera ideal, por lo que sus resultados son precisos sólo en la zona central; conforme la medición se aleja hacia las zonas marginales con diferente curvatura se pierde confiabilidad.

Mapa tangencial. También llamado meridional o verdadero, es el mapa que mide la curvatura dióptrica de la córnea a lo largo de sus meridianos; sus resultados son equivalentes a la distancia entre el punto corneal y el vértice de la circunferencia osculatriz, a diferencia del mapa axial en el que el centro de los radios no siempre coincide con una esfera ideal. Este mapa es preciso y sensible en las zonas marginales de la córnea, pero pierde precisión en la zona central, por lo que es útil para medir y valorar deformaciones en la periferia dando una vista clara de la forma corneal en pacientes con queratocono; además, es útil para medir el tamaño de la córnea y determinar la forma en el diseño de lentes de contacto.

Mapa refractivo. Se deriva del mapa axial. Este mapa hace uso de la ley de Snell para calcular el poder refractivo corneal mediante el índice estándar del queratómetro (SKI); además provee una interpretación cuantitativa de la calidad de la visión del paciente, por lo que se utiliza antes y después de una cirugía corneal para cuantificar los efectos posicionados.

Mapa de elevación. Este mapa es para muchos especialistas uno de los mapas más precisos, ya que a diferencia de los mapas sagital y tangencial que están sujetos a distorsiones producidas por la

inferencia radial en el cálculo de la curvatura, este mapa mide la desviación de la córnea mediante su relación con una superficie de referencia ideal (BSF) (por sus siglas en inglés *Best Fit Sphere*).

Mapa del frente de onda. Este mapa muestra las aberraciones oculares por medio de un frente de onda deformado por la córnea, además de una gráfica de barras con la contribución de las aberraciones del polinomio de Zernike. Es utilizado por aberrómetros y topógrafos corneales para medir las desviaciones en el sistema ocular.

Mapa tridimensional. Permite visualizar la córnea de un modo más realista, ya que el mapa puede ser rotado y modificado por el operador en la forma deseada. Algunos instrumentos como el topógrafo Oculus y el Haag-Streit CTK 922 ofrecen un análisis tridimensional cinético de la córnea.

Mapa de irregularidades. Este mapa se utiliza después de una intervención refractiva láser para detectar anomalías que puedan explicar una baja agudeza visual. Su funcionamiento se basa en calcular la mejor corrección esfero cilíndrica para la córnea, además de ofrecer un índice de excentricidad (una medida de asfericidad) que mide la cantidad de astigmatismo después de la cirugía.

Mapa de fotoqueratoscopio. Permite al especialista reconocer visualmente una córnea irregular mediante los anillos de Plácido reflejados en su superficie. Este tipo de mapa es uno de los más antiguos, ya que extendió el concepto de la queratoscopia a la fotoqueratoscopia.

En toda medición corneal existen factores que pueden intervenir sobre el mapa topográfico y que en su momento se deben considerar para obtener resultados confiables [4]. El factor más importante es el que está relacionado con la película lagrimal, ya que las imágenes del topógrafo se forman por el reflejo especular que ocurre en la película, la cual debe ser totalmente uniforme, por lo que puede causar errores de digitalización si el paciente experimenta lagrimeo excesivo. Por otra parte, otro factor está relacionado con la abertura y la tensión de los párpados, así como con el tamaño de las pestañas, ya que también son responsables de ciertas anomalías topográficas sobre todo en la parte superior. El párpado tenso puede provocar aplanamiento corneal en su borde y valores de curvatura más cerradas por el abombamiento de la redistribución epitelial.

3.2.2 Mapas de código de colores

Además de la representación de los mapas corneales, los topógrafos comerciales actuales representan la información topográfica conforme a un código de colores para estandarizar su interpretación. Estos constituyen el método preferido por los especialistas para medir la curvatura, el poder dióptrico, la elevación y las aberraciones del frente de onda en la córnea.

En 1987 Stephen Klyce *et al.* introdujeron el concepto de los mapas de colores para facilitar la interpretación de los videoqueratoscopios [44], pero no fue hasta 1999 cuando el ANSI (por sus siglas en inglés *American National Standards Institute*) dio a conocer los mapas de colores como una escala universal para permitir a los especialistas comparar los mapas topográficos de diferentes equipos optométricos [46]. Los mapas de colores se representan con base a tres escalas principales [45]:

La escala absoluta. Se caracteriza por asignar a cada radio de curvatura el mismo color invariablemente, lo que la hace ideal para comparar la evolución de una afección ocular y para detectar características distintivas de un ojo anormal. La escala más utilizada por los topógrafos corneales actuales es la propuesta por Klyce *et al.* [44], donde cada color representa un intervalo de potencias; los colores violeta y azul representan colores fríos con potencias bajas, correspondientes a superficies casi planas; los colores verde y amarillo corresponde a colores aplicados a córneas con anatomía normal y de potencias medias; y los colores cálidos, como anaranjado y rojo, corresponden a potencias altas como superficies inclinadas.

La escala relativa. También llamada normalizada o de color adaptable, ajusta su rango de colores de acuerdo con la variación de la curvatura corneal. Este mapa es el más adecuado para observar pequeños cambios en la córnea; además, tiene la ventaja de ofrecer un mayor detalle topográfico que la escala absoluta, ya que los niveles de incremento son más pequeños y brindan una mayor resolución. Por otra parte, en esta escala el especialista debe verificar el significado de los colores de acuerdo con la nueva escala, por lo que una córnea normal puede parecer anormal, mientras que una patológica puede aparentar ser normal al ojo de una persona inexperta.

Escala ajustable. Este tipo de escala permite un ajuste personalizado por parte del especialista, por lo que el rango de detalle que cubre es mayor; esto es favorable para detectar patologías muy avanzadas, pero regularmente impide apreciar pequeños detalles si se desconocen los rangos dióptricos involucrados.

3.3 Fundamentos de la óptica geométrica

La Óptica desde el punto de vista de la Sociedad Óptica de América (por sus siglas en inglés, *OSA-Optical Society of America*) corresponde a la rama de la Física que estudia los fenómenos de emisión, propagación y absorción de la luz en los cuerpos.

Las teorías acerca de la luz son en general muy complicadas de entender, porque a lo largo del tiempo han habido teorías muy contrastantes entre sí; incluso en forma rigurosa, aún en nuestros tiempos no se tiene una respuesta determinante que la defina por completo.

La óptica instrumental fue la primera que comenzó a desarrollarse por su utilidad práctica, para lo que fue preciso hacer uso de la óptica geométrica que se basa fundamentalmente en las leyes de reflexión y refracción, así como en la aproximación de la luz como un rayo (y no como una onda, en la óptica física). A esta clase de óptica se le conoce como óptica de primer orden u óptica de Gauss.

3.3.1 Definición de rayo de luz

La concepción de la óptica geométrica está ligada con la invención de las lentes y de los espejos, así como con la deducción de sus propiedades para la formación de imágenes. Definir a la luz ha sido por sí mismo una tarea controversial desde el principio de los tiempos, debido a lo cual científicos como Malacara-Hernández se han dado a la tarea de resumir su evolución [2], al destacar trabajos como el de la teoría corpuscular de Newton que comprendió a la luz como un flujo de partículas microscópicas vibrando en un medio de propagación conocido como éter, así como el trabajo del físico Augustin Fresnel, quien en 1823 dispuso de la teoría ondulatoria para definir a la luz como una onda, y finalmente el trabajo de Clerk Maxwell, quien en 1831 describió a la luz como una onda transversal compuesta por un campo eléctrico y un campo perpendicular magnético.

En el sentido estricto de la óptica física, la luz se define como una onda electromagnética armónica que se propaga en el vacío. En la figura 3.6 se muestra el espectro electromagnético agrupado en tres dominios principales: el dominio eléctrico formado por perturbaciones de circuitos electrónicos fabricados por el hombre como las ondas radio, las de televisión, las de microondas,

entre otras; el dominio óptico formado por ondas de luz infrarroja, ultravioleta y la luz en la región visible; y el dominio de alta energía compuesto por los rayos X y los gamma [2].

Tipo de onda electromagnética		Límites aproximados de sus longitudes de onda	
Dominio electrónico	Ondas de radio y TV	1 000 m	0.5 m
	Microondas	50 cm	0.05 mm
	Infrarrojo lejano	0.5 mm	0.03 mm
	Infrarrojo cercano	30 μm	0.72 μm
Dominio óptico	Luz visible	720 nm	400 nm
	Ultravioleta	400 nm	200 nm
	Extremo ultravioleta	2 000 Å	500 Å
Física de alta energía	Rayos X	500 Å	1 Å
	Rayos gamma	1 Å	.01 Å

donde las unidades usadas aquí son:

1 micra = 1 μm = 10^{-6} m
 1 Å ngstrom = 1 Å = 10^{-10} m
 1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m

Figura 3.6 Espectro electromagnético

Por otra parte, en la óptica geométrica la luz siempre se ha definido como un rayo vector con una dirección semejante a la de una onda de luz, por lo que era frecuente suponer que un rayo de luz era un caso particular de onda en la óptica física, hasta que en 1831 el matemático Rowan Hamilton validó esta teoría y probó que un rayo luminoso puede usarse con bastante precisión en óptica física si la frecuencia de la onda de luz es muy alta [48].

3.3.2 Frente de onda

Se denomina frente de onda (WF) (por sus siglas en inglés *Wave Front*) al lugar geométrico donde los puntos del medio son alcanzados por una onda en un instante dado; asimismo se define como una superficie imaginaria que se expande en el espacio a lo largo del tiempo, y cuyos puntos comparten la misma distancia óptica (también llamado camino óptico) desde la fuente de propagación. La ley de Malus-Dupin, citada por Malacara-Hernández [2], plantea que un frente de onda es invariablemente perpendicular a la dirección de propagación de la onda de luz.

Para entender este concepto de forma más clara, es preciso saber que el camino óptico de la luz (L) es el producto de la distancia recorrida (d) y el índice de refracción del medio (n), por lo que los frentes de onda provenientes de una fuente puntual (S) en un medio inhomogéneo (con un solo índice de refracción) siguen trayectorias omnidireccionales radialmente a una distancia óptica constante, por lo que en un instante dado los puntos se integrarán y formaran un frente de onda esférico como el que se muestra en la figura 3.7.

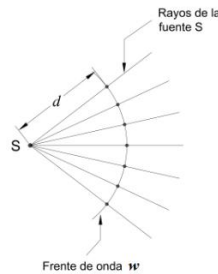


Figura 3.7 Frente de onda asociado a una fuente puntual en un medio homogéneo [38]

Por otra parte, cuando la fuente de luz está en un medio inhomogéneo (en el que el índice de refracción no es constante) los rayos de luz siguen trayectorias curvas y la distancia óptica no permanece constante, por lo se producirá un frente de onda complejo. Aunque todos los rayos tienen la misma distancia óptica, no todos tienen la misma distancia física como se aprecia en la figura 3.8.

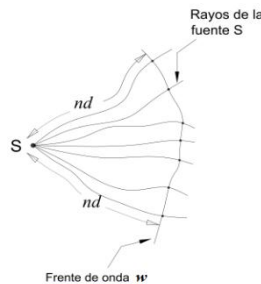
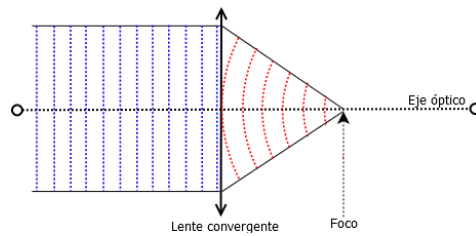


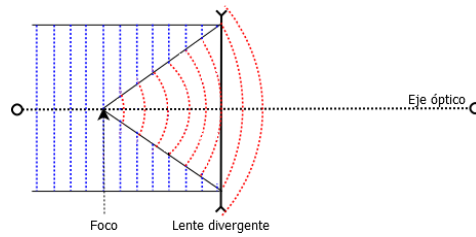
Figura 3.8 Frente de onda asociado a una fuente puntual en un medio inhomogéneo [38]

De la misma forma en la que un objeto cambia su tamaño cuando se observa a través de una lente, el frente de onda cambia su forma y proporción cuando se refracta por una lente, o se refleja por un espejo. En la figura 3.9a se muestra en color azul un frente de onda plano que incide en la superficie anterior de la lente, y en color rojo el frente de onda refractado por una lente convergente; al ser la lente más gruesa en el centro que en su borde, el haz de rayos refractados tiene mayor

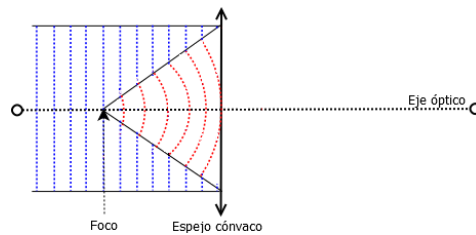
distancia física en su parte central, produciendo un frente de onda esférico cuyo radio de curvatura es positivo (su vértice está en el eje de las abscisas positivas); en el caso de una lente divergente (3.9b), la parte central de la lente es más estrecha que en su borde, por lo que se produce un frente de onda esférico con radio negativo; en contraste, en el caso de un espejo cóncavo (3.9c), la distancia física de reflexión en el borde es mucho menor que en su parte central, por lo que se produce un frente de onda esférico convergente con radio negativo; finalmente en un espejo convexo (3.9d), la distancia física en el centro es mucho menor que en su borde, produciendo un frente de onda divergente y esférico con radio positivo.



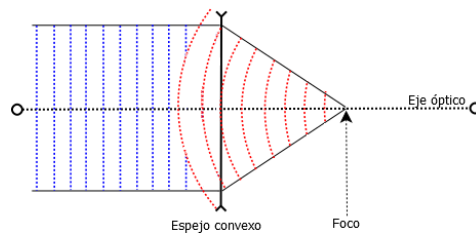
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.9 Frente de onda plano después de interactuar con: (a) una lente convergente, (b) una lente divergente, (c) un espejo cóncavo y (d) un espejo convexo. El frente de onda plano es de color azul, mientras que el frente de onda producido por la interfaz es de color rojo

Medir el frente de onda de una superficie óptica es una práctica habitual en pruebas ópticas, puesto que su objetivo es recuperar la desviación del frente de onda mediante la comparación con un frente ideal. A la desviación del frente de onda se le conoce como función de aberración del frente de onda (WAF) (por sus siglas en inglés *Wave Aberration Function*); recientemente se ha utilizado esta métrica en ciencias de la visión para el análisis de la córnea, pues al ser una superficie de reflexión especular puede evaluarse como si se tratase de un espejo convexo.

3.3.3 Principio de Fermat

El principio de Fermat propone que un rayo de luz va de un punto a otro por el camino que le tome el menor tiempo posible. Dado que la velocidad de la luz es constante, el camino óptico en el tiempo mínimo es igual al producto de la distancia recorrida por el rayo y el índice de refracción del medio, por lo que su interpretación exacta consiste en propagar la función de desplazamiento del rayo con ayuda de la derivada. Este principio es considerado fundamental para demostrar las leyes básicas de la óptica geométrica.

En un medio homogéneo el índice de refracción es constante y no depende de la dirección, por lo que el camino mínimo entre dos puntos seguirá una trayectoria en línea recta, mientras que en un medio inhomogéneo el índice de refracción varía de un punto a otro, por lo que seguirá una trayectoria curva con un camino óptico extremo o estacionario [2].

3.3.4 Ley de refracción

La refracción se define como el cambio de dirección y velocidad de un rayo de luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios con diferente índice de refracción. Este fenómeno ocurre cuando el rayo incide sobre una superficie óptica de forma oblicua.

El principio de refracción se divide en dos leyes [2]: en la primera se enuncia que el rayo incidente sobre una superficie refractora está en un plano común con el rayo refractado y la recta normal a la superficie, por lo que su geometría es coplanar; por otra parte, la segunda ley es conocida como la ley de Snell-Descartes, la cual se utiliza para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar una lente. La ley enuncia que el producto del seno del ángulo de incidencia (denotado como θ_1) que forma un rayo con la recta normal a la superficie, con el índice de refracción del medio de origen (n_1), es igual al producto del seno del ángulo refractado (θ_2) que forma con la normal, con el índice del medio de destino (n_2). En la figura 3.10 y en la ecuación (1) se presenta esta ley de forma geométrica.

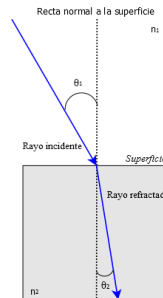


Figura 3.10 Representación geométrica de la ley de refracción

$$n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2 \quad (1)$$

Al incidir un rayo de luz desde un medio con un índice de refracción mayor al del destino ($n_1 > n_2$), el ángulo de refracción será menor con relación al ángulo de incidencia ($\theta_2 < \theta_1$); por otra parte, si un rayo parte de un medio con un índice de refracción menor al de destino ($n_1 < n_2$), entonces el ángulo de refracción será mayor ($\theta_2 > \theta_1$). Conforme el ángulo de refracción se reduce y el rayo refractado tiende hacia la recta normal, la luz pierde velocidad y la distancia recorrida disminuye.

Para ayudar a entender el fenómeno de refracción, se puede utilizar la analogía de un socorrista que se desplaza en línea recta desde la costa hacia el mar; cuando lo hace en un medio poco denso, como el aire, mantendrá una velocidad constante, sin embargo, al entrar al agua que es un medio más denso que el aire, disminuirá su velocidad y la distancia recorrida a lo largo del tiempo (en óptica, el rayo refractado tendería hacia la recta normal); por otra parte, cuando el socorrista intente

regresar a la costa, pasará de un medio con alta densidad a otro más ligero, lo que aumentará su velocidad y la posibilidad de recorrer mayor distancia a lo largo del tiempo (en óptica, el rayo refractado se alejaría de la recta normal).

En general el índice de refracción no es una magnitud constante, ya que aumenta conforme disminuye la longitud de onda de la luz; sin embargo, debido a que la máxima sensibilidad del ojo está dada por la luz de color amarillo cuya longitud de onda es equivalente al promedio del espectro en el rango visible, por convención, el índice de refracción se especifica para ese color.

3.3.5 Ley de reflexión

La reflexión se define como el cambio de dirección que experimenta la luz al reflejarse contra la superficie de un cuerpo, es decir, al incidir a una superficie sin atravesarla.

El principio de reflexión se divide a su vez en dos leyes [2]: la primera enuncia que cualquier rayo incidente sobre una superficie óptica comparte un plano común con la recta normal y con el rayo reflejado; por otra parte, la segunda ley dice que la magnitud del ángulo de reflexión (θ_2) es igual a la del ángulo de incidencia (θ_1) con relación a la recta normal. En la figura 3.11 y en la ecuación 2 se representa de manera gráfica y precisa esta ley.

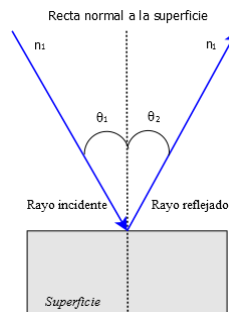


Figura 3.11 Representación geométrica de la ley de reflexión

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (2)$$

La reflexión de la luz puede ocurrir en dos escenarios distintos: en el primero de ellos la reflexión se produce de forma difusa cuando la luz incide sobre una superficie rugosa y se difunde en muchas direcciones, por lo que un objeto ordinario puede verse desde muchos ángulos distintos (ver la figura 3.12a); por otra parte, se dice que la reflexión es especular cuando un rayo de luz incide sobre una superficie pulimentada como un espejo, por lo que solo se puede advertir cuando se está en el plano que satisface la primera ley de reflexión (ver la figura 3.12b).

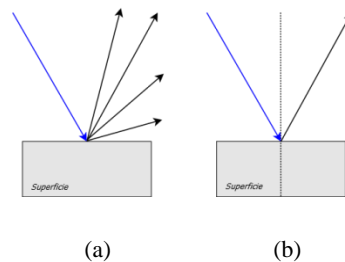


Figura 3.12 Tipos de reflexión: (a) reflexión difusa y (b) reflexión especular

3.3.6 Formación de imágenes en lentes y espejos esféricos

La formación de imágenes en óptica geométrica se concreta con base en tres actores principales: el objeto, formado por fuentes puntuales de iluminación; la imagen, como representación visual del objeto; y la componente óptica que desvía los rayos de luz mediante óptica de primer orden (también llamada óptica de Gauss).

La óptica de primer orden asume que todos los ángulos relacionados con el eje óptico son pequeños, por lo que están dentro de una zona llamada paraxial. En esta aproximación se sustituyen las funciones trigonométricas del seno y la tangente por el ángulo mismo, por lo que es posible calcular puntos conjugados entre la imagen y el objeto. Aunque esta óptica no es exacta, es muy útil para calcular la distancia focal de una lente y la posición de las imágenes [2].

Una alternativa para hacer exacta la aproximación paraxial es utilizar superficies no esféricas, llamadas también asféricas, cuyos puntos marginales siempre convergen en un punto de forma natural [2]; no obstante, producir este tipo de lentes no es sencillo ni económico, por lo que su fabricación se limita casi exclusivamente a lentes de alta potencia en óptica médica.

La convención de signos que se utiliza en óptica geométrica señala que un radio de curvatura es positivo si su centro está a la derecha del origen cartesiano, y negativo si está a la izquierda, de la misma forma en que sucede con las distancias de la componente óptica y la relación objeto-imagen, donde la distancia objeto es positiva si el objeto se encuentra del lado del que proviene la luz, y la distancia imagen es positiva si la imagen se encuentra del lado de la lente opuesta a lado de donde proviene la luz; para el caso de los ángulos de incidencia, de reflexión y de refracción, estos son positivos si su pendiente es mayor que la pendiente de la normal, y negativos en caso contrario; finalmente, la longitud focal es positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes [49].

En el proceso de formación de imágenes, los objetos y las imágenes pueden clasificarse como en las curvas de Gauss (ver la figura 3.13) [2]:

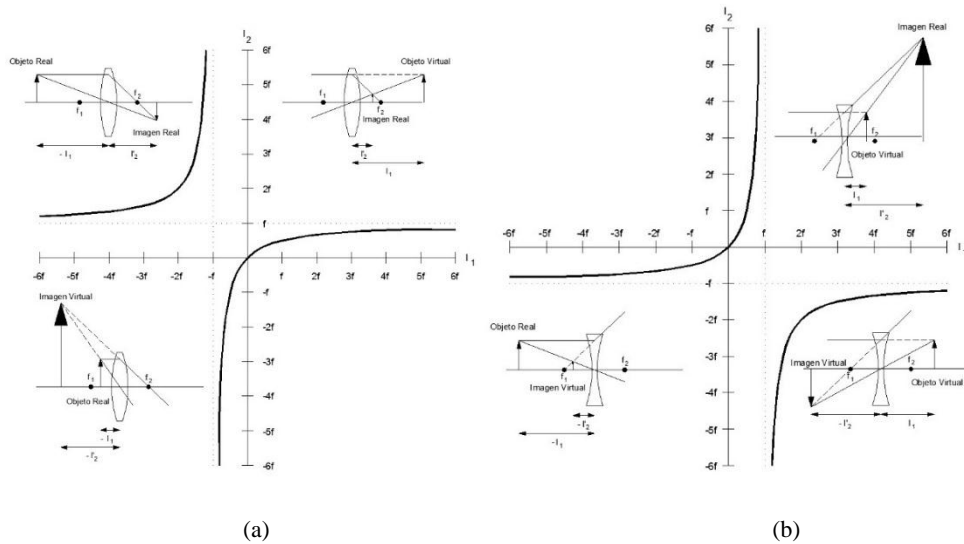


Figura 3.13 Curvas de Gauss: (a) superficies convergentes y (b) divergentes

Objeto real. El objeto es real cuando la distancia de entre la lente y el objeto (l_1) para la primera superficie refractora es negativa, es decir cuando el objeto está a la izquierda del sistema óptico (ver las figuras 3.13 a y b). El objeto es real cuando a la izquierda de la lente está el objeto físico mismo o una imagen formada ahí por otro sistema óptico.

Objeto virtual. Si se considera otro sistema colocado entre el sistema óptico de la figura 3.13a que cambia la posición, el tamaño y la orientación de la imagen; por simple convención se dice que la imagen formada por el primer sistema es el objeto del cual forma una imagen el segundo sistema.

Como el objeto del segundo sistema está a la derecha de él se plantea que es un objeto virtual. En este caso l_1 es positiva, como se puede observar en las figuras 3.13 c y d.

Al igual que el objeto, la imagen también puede ser real o virtual.

Imagen real. Es la imagen formada en un sistema óptico mediante la intersección en un punto de los rayos convergentes procedentes del objeto puntual después de atravesar el sistema. Una imagen real se puede observar colocando una pantalla en el lugar donde se forma la imagen, o bien observándola directamente con el ojo. En este caso la distancia de la imagen a la superficie posterior de la interfaz óptica (l_2) es positiva (ver las figuras 3.13 a y d).

Imagen virtual. Sucede cuando los rayos que parten de un punto del objeto divergen después de pasar por el sistema óptico, en cuyo caso los rayos tendrán un punto aparente de convergencia que coincide con la proyección de los rayos divergentes hacia un punto detrás de la superficie, formando así una imagen virtual. Este tipo de imágenes no se pueden observar sobre una pantalla, y la distancia l_1 es siempre negativa.

En el contexto de óptica de la visión, usualmente se asume que las superficies refractivas son esféricas y centradas sobre un eje óptico común, así como que los índices de refracción son constantes en cada medio; esto da una familia de modelos conocidos como ojos esquemáticos paraxiales exactos en la región central de la córnea; de esta familia se obtiene el modelo del ojo reducido, que a pesar de su simplicidad, describe adecuadamente la óptica del ojo en la mayoría de las situaciones [3].

3.3.6.1 Formación de imágenes en lentes convergentes y divergentes

Una lente delgada es un objeto transparente (normalmente de vidrio) limitado por dos superficies generalmente esféricas y paralelas a su centro. Se dice que una lente es positiva cuando es más gruesa en su parte central y más estrecha en los bordes, por lo que hace converger los rayos de luz en un punto; por otra parte, se dice que una lente es negativa cuando es más delgada en su parte central y más gruesa en los bordes, por lo que hace divergir todo rayo paralelo al eje óptico que le incida.

Las caras de una lente pueden ser cóncavas, convexas o planas, por lo que las configuraciones más comunes para lentes positivas son las lentes biconvexas, planoconvexas y los meniscos

convexo-cóncavos convergentes cuya parte central es más gruesa que en su borde, mientras que las lentes negativas puede ser bicóncavas, plano-cóncavas y los meniscos convexo-cóncavos divergentes cuya parte central es más delgada que en su borde. En la figura 3.14 se muestran las secciones transversales de las lentes delgadas.

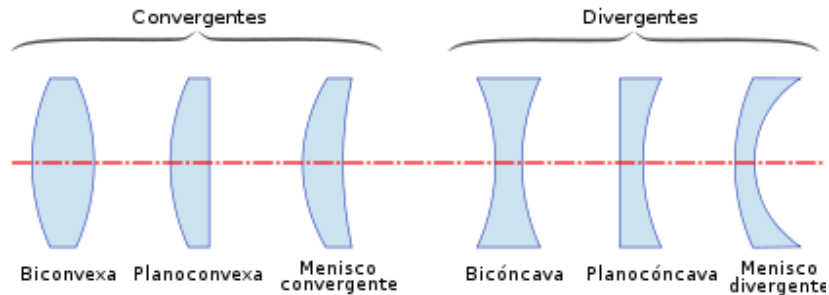


Figura 3.14 Sección transversal de lentes delgadas

El foco de una lente (denotado como F) es el punto de convergencia de los rayos luminosos al incidir de forma paralela al eje óptico. El punto focal en una lente positiva puede observarse físicamente en el plano imagen si el objeto está lo suficientemente alejado de la lente (ver la figura 3.15a); por el contrario, en una lente negativa el foco es un punto hipotético donde convergen la prolongación de los rayos refractados (ver la figura 3.15b).

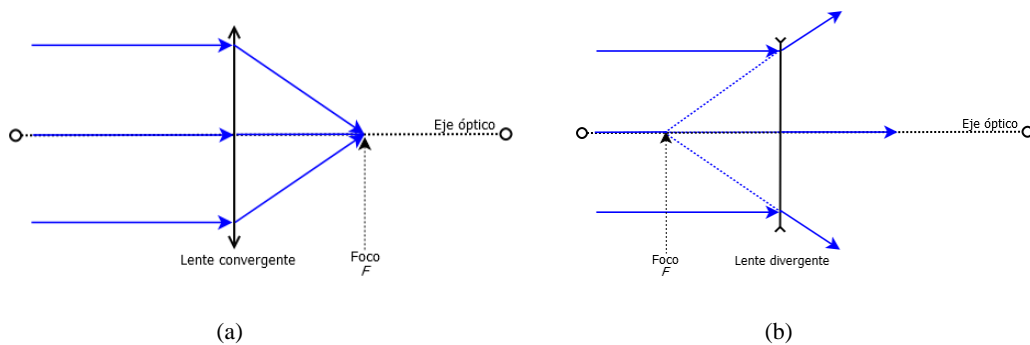


Figura 3.15 Distancia focal de una lente: (a) lente positiva y (b) lente negativa

Las lentes están diseñadas para tener distinto grado de refracción y poder converger o divergir un haz de luz incidente en una imagen, por lo que esta diferencia puede interpretarse como la potencia óptica de la lente (denotada como P). En la ecuación (3) se muestra la fórmula del

fabricante de lentes, que ayuda a obtener la potencia óptica en función de los radios de curvatura (r_1 y r_2) y del índice de refracción (n). Esta fórmula es válida únicamente para lentes delgadas que se encuentran rodeadas de aire y consideran a todos los rayos incidentes como paraxiales.

$$P = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3)$$

Sin duda, el dispositivo óptico más importante por su capacidad para formar imágenes es la lente, por lo que al conocer su potencia, o bien su distancia focal y la distancia al objeto, es posible calcular la posición de la imagen con ayuda de la ecuación (4), donde l_2 es la distancia imagen y l_1 la distancia objeto. Esta ecuación nos permite determinar la posición de la imagen en forma rápida y sencilla, en comparación al trazo geométrico de rayos.

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \quad (4)$$

La ecuación anterior es válida tanto para lentes convergentes como divergentes, siempre y cuando se utilice la convención de signos establecida en el epígrafe anterior.

En la figura 3.16 se muestra la relación geométrica en la formación de imágenes con una lente positiva, donde se puede observar que el objeto está en la parte izquierda del sistema con una distancia objeto negativa, por lo que es un objeto real; de forma contraria la distancia imagen es positiva y la imagen es real.

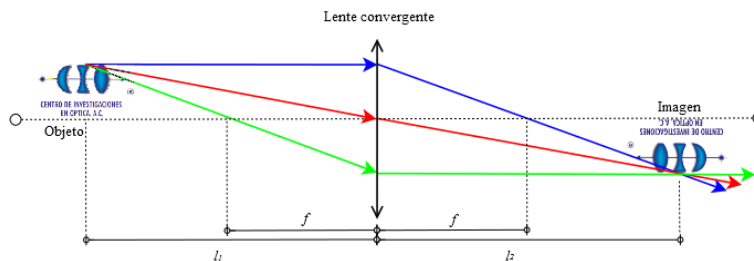


Figura 3.16 Formación de imágenes con una lente positiva

Por otra parte, en la figura 3.17 se muestra la relación geométrica en la formación de imágenes con una lente negativa, donde se puede observar que el objeto está en la parte izquierda del sistema y del centro cartesiano, por lo que la distancia objeto es negativa; lo mismo sucede con la imagen que se encuentra en la misma región que el objeto real detrás de la lente, por lo que se define como una imagen virtual.

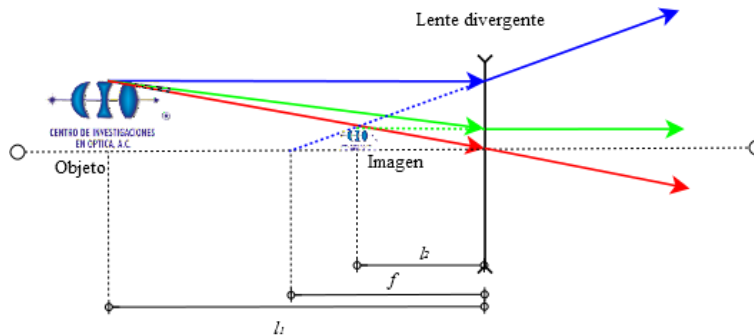


Figura 3.17 Formación de imágenes con una lente divergente

En cualquiera de los dos casos, la imagen también puede formarse por medio del trazo de tres rayos principales: el primer rayo se traza paralelo al eje óptico, por lo que al ser refractado por la lente, pasa por el punto focal situado detrás de ella (rayo de color azul); el segundo rayo se dibuja a través del punto focal colocado en el mismo lado de la lente que el objeto, por lo que emerge de la lente paralelo al eje (rayo de color verde); y finalmente se hace pasar por el centro de la lente, en donde las dos superficies son esencialmente paralelas entre sí; por ser un punto nodal, el rayo emerge de la lente con el mismo ángulo con el que entró (rayo de color rojo) [49].

3.3.6.2 Formación de imágenes en espejos cóncavos y convexos

Un espejo es una superficie cubierta en su cara posterior por una capa de mercurio o por una plancha de metal, en la que se reflejan la luz y las imágenes de los objetos que hay delante. Un espejo esférico puede clasificarse como convexo si la reflexión se lleva a cabo en la superficie exterior de la curva, de manera que el polo de la superficie del espejo queda del lado del observador; por otra parte, un espejo esférico es cóncavo si la superficie refractora se encuentra en la superficie interna de la esfera, de modo que el centro del espejo esté del lado del observador.

Para entender el funcionamiento de la formación de imágenes en un espejo, consideremos un objeto que se encuentra a una distancia muy lejana y cuyos rayos son paralelos al eje óptico; si el espejo es pequeño con relación a su radio de curvatura, los rayos reflejados formarán un ángulo pequeño paraxial después de reflejarse, por lo que todos ellos cruzaran en el foco del espejo que se encuentra a la mitad del camino del radio de curvatura ($f = r/2$). En la ecuación 5 se muestra la relación aproximada entre la potencia de la lente, el punto focal y las distancias objeto e imagen.

$$P = \frac{1}{f} = -\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \quad (5)$$

Si comparamos la ecuación anterior con la ecuación para la formación de la imagen en los lentes, veremos que la única diferencia es que l_2 tiene signo contrario debido a la reflexión.

En la figura 3.18 se muestra la relación geométrica en la formación de imágenes con un espejo cóncavo, donde se puede observar que el objeto y la imagen están en la parte izquierda del sistema y del centro cartesiano, por lo que las distancias objeto e imagen son negativas, lo que produce un objeto y una imagen real.

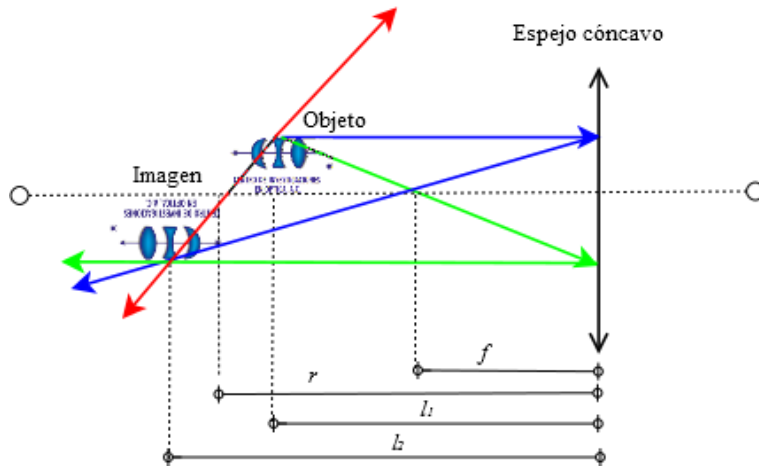


Figura 3.18 Formación de imágenes con un espejo cóncavo

Por otra parte, en la figura 3.19 se muestra la relación con un espejo convexo, donde se observa que el objeto está en la parte izquierda del sistema y del centro cartesiano, por lo que la distancia

objeto tiene una distancia negativa y es real, por otra parte la distancia imagen es positiva, produciendo una imagen virtual detrás del espejo en la prolongación de los rayos refractados.

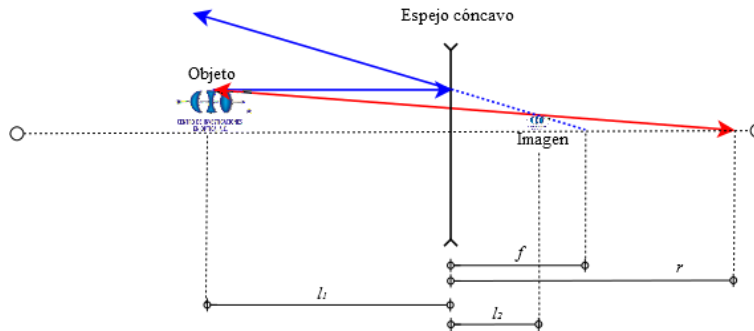


Figura 3.19 Formación de imágenes con un espejo convexo

El análisis utilizado para los espejos cóncavos puede aplicarse también a los espejos convexos, aunque deben definirse con cuidado las cantidades implicadas. Por ejemplo: si un conjunto de rayos paralelos inciden sobre un espejo convexo, los rayos reflejados divergen, pero parecen provenir del punto focal situado detrás del espejo; en efecto, no importa donde esté colocado el objeto del lado reflejante del espejo, pues la imagen siempre será virtual y derecha. Por lo que la ecuación anterior es válida para el espejo, pero la longitud focal debe considerarse negativa, al igual que el radio de curvatura.

De forma gráfica la formación de imágenes se puede explicar al igual que con las lentes delgadas, partiendo del trazo de tres rayos principales, donde la única diferencia es la que sustituye a la regla de que un rayo que pasa por el centro de una lente no se desvía; en este caso la regla es que un rayo que llega al centro de un espejo esférico, se refleja de manera simétrica con respecto al eje óptico.

3.4 Prueba de Hartmann

La prueba geométrica de Hartmann fue inventada a principios del año 1900 por el astrofísico alemán Johannes Hartmann, quien la diseñó para medir la calidad óptica de los espejos primarios de un telescopio astrofísico [26]. La técnica pertenece a la clasificación de pruebas geométricas utilizadas para obtener el frente de onda de una superficie óptica.

En la actualidad existen innumerables procedimientos para determinar el frente de onda de una superficie, con lo que es posible obtener resultados con diferente grado de precisión. La gama de pruebas se clasifican en dos tipos: las pruebas interferométricas y las pruebas clásicas no interferométricas. Las interferométricas utilizan la longitud de onda de la luz como patrón de referencia para realizar las mediciones en óptica física; por el contrario, las pruebas no interferométricas, también conocidas como geométricas, se basan en el análisis del camino óptico mediante el trazo de rayos de luz en óptica geométrica [39].

La prueba geométrica de Hartmann se ha distinguido de las demás pruebas por su simplicidad y baja sensibilidad a los cambios de la atmósfera y a las vibraciones [30, 51], atributos que le han sido muy útiles para poder emplearse en equipos especializados en óptica médica, como en el lensómetro [29], el topógrafo corneal [2, 6] y el aberrómetro ocular [5]. Debido a que la prueba puede utilizarse para evaluar lentes y espejos, convergentes o divergentes, existen configuraciones que aparentemente no se relacionan con la prueba clásica, pero cuyo funcionamiento se basa en los mismos principios y pueden considerarse como variantes de la configuración original.

Para hacer de la prueba de Hartmann una técnica más eficiente, se requiere implementar en un equipo de cómputo una serie de algoritmos que detecten y clasifiquen las manchas del patrón de Hartmann (Hartmanngrama) y faciliten el cálculo de la aberración del frente de onda.

3.4.1 Configuración de la pantalla de Hartmann

La primera configuración de la prueba de Hartmann, conocida como configuración clásica, permite medir la aberración del frente de onda de un espejo cóncavo mediante una pantalla opaca con orificios equiespaciados posicionada en su pupila de entrada, donde más tarde se hace incidir un haz de luz proveniente de una fuente de iluminación situada en su centro de curvatura [30]. En la figura 3.20 se muestra la configuración (vista desde arriba) de la prueba de Hartmann para evaluar espejos cóncavos.

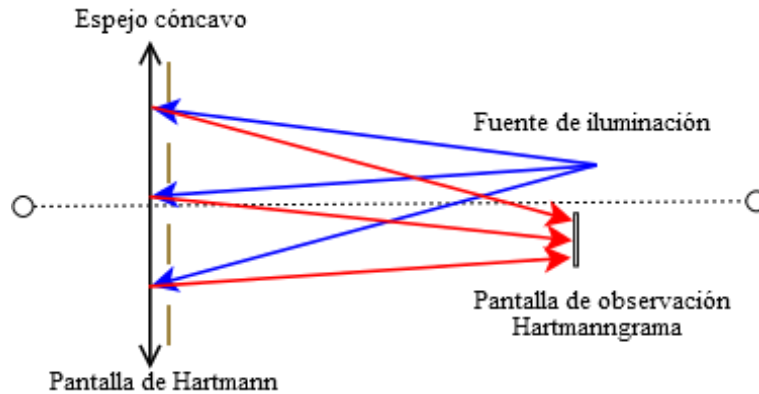


Figura 3.20 Prueba de Hartmann para reflexión en un espejo cóncavo [29]

En la ilustración anterior el frente de onda proveniente de la fuente de iluminación diverge con forma esférica y con dirección al espejo de prueba, atraviesa la pantalla de Hartmann, incide en la superficie del espejo y finalmente refleja como un patrón de manchas (Hartmannngrama) hasta la pantalla de observación posicionada fuera del eje óptico y de una región envolvente de los rayos paraxiales y no paraxiales, llamada cáustica [2], pero dentro del foco para que todas las manchas puedan ser resueltas y los puntos no se inviertan unos con otros [30]. Acercar el plano imagen al foco Gaussiano sólo dificultará la detección de las manchas en el Hartmannngrama, y alejarlo demasiado introducirá una componente lineal de aberración transversal que producirá aberración esférica en el frente de onda [32].

La configuración de la prueba de Hartmann para el análisis de lentes convergentes, requiere un frente de onda colimado que converja en un punto focal al ser refractado por la lente de prueba. En este análisis la pantalla de Hartmann se coloca en el plano de la pupila de salida de la lente y la pantalla de observación muy cerca de su foco. En la figura 3.21 se muestra la sección transversal de la configuración de Hartmann para evaluar lentes convergentes.

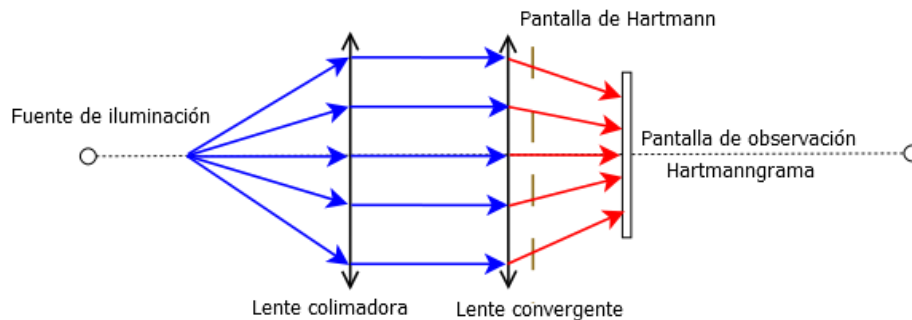


Figura 3.21 Prueba de Hartmann para refracción en una lente convergente [29]

Como se puede apreciar en las configuraciones anteriores, el patrón de Hartmann siempre se forma en un plano imagen real dentro o fuera del punto focal, porque las dos superficies de prueba son convergentes y forman una imagen real; sin embargo, esto no siempre es así, en el caso de superficies divergentes, donde el plano imagen se forma detrás de la superficie de prueba, por lo que es necesario usar una configuración diferente para obtener un patrón de Hartmann en un plano imagen real; para este fin se hace uso de la denominada prueba nula de Hartmann que consta de una pantalla agujereada de forma táctica para proyectar los rayos de luz sobre la superficie de prueba y generar un patrón de manchas tradicional [37].

Evaluar estas superficies es más complicado de lo que parece, pues con una fuente puntual los rayos siempre se propagan de forma apartada lo que dificulta su análisis; por esta razón Mejía-Barbosa y Malacara-Hernández [19] diseñaron una pantalla elipsoidal para analizar un espejo convexo, para que todos los puntos del patrón estén enfocados al incidir sobre una superficie perfecta; de otro modo se formará una imagen virtual distorsionada que da cuenta de las variaciones de la superficie; Rodríguez-Rodríguez *et al.* presentaron un equipo formado por tres pantallas LCD cuyo patrón de puntos podía ser modificado digitalmente sin comprometer el diseño mecánico [20]; por otro lado Campos-García *et al.* presentaron un equipo con una pantalla en forma de cono con una distribución radial de puntos [21].

Sin importar la configuración de la prueba, analizar el patrón permite reconstruir el frente de onda de la superficie para determinar sus aberraciones, por lo que el próximo paso es determinar la posición de los puntos, especialmente su centro geométrico, para compararlos contra los puntos de un frente de onda ideal generados por una superficie perfecta. Al comparar cada punto del patrón de Hartmann con su punto correspondiente en el patrón de referencia, se miden las aberraciones de rayo, que son los desplazamientos o aberraciones transversales denotados como TA_x y TA_y , a lo largo de la direcciones de las abscisas y de las ordenadas, o bien en su forma polar como TA_θ y TA_r a lo largo de su dirección y magnitud, respectivamente. En la mayor parte de las veces, las aberraciones de rayo se miden en el plano imagen fuera de foco como la diferencia de la matriz de manchas ideales y el Hartmangrama, por lo que teóricamente también es posible medirlas en relación a un único punto en el origen cartesiano, cuando el plano imagen está directamente en el foco junto con el punto de referencia ideal.

Dado que en la prueba de Hartmann el elemento de mayor importancia es la pantalla agujereada, a lo largo del tiempo se han desarrollado distintas configuraciones de puntos para analizar la

superficie de forma más uniforme y continua, por lo que Malacara-Hernández [30] y Gantes-Núñez [39] explican los tres tipos de pantallas más utilizados con base en la distribución de sus orificios (ver la figura 3.22).

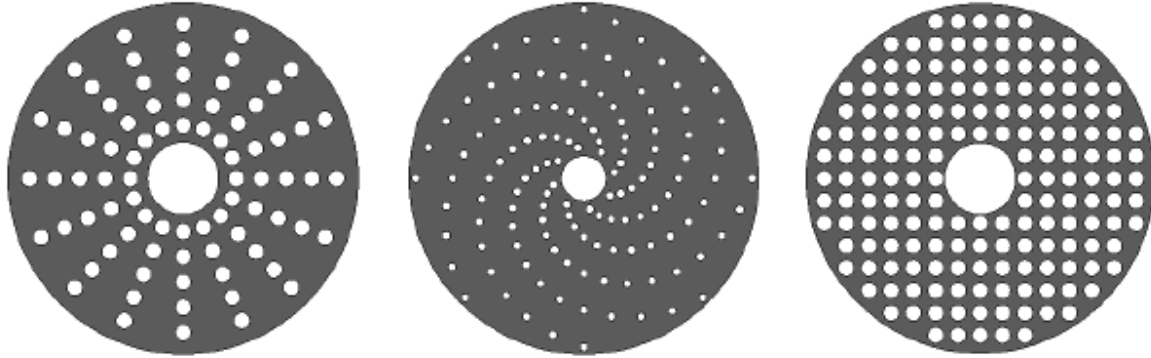


Figura 3.22 Pantalla de Hartmann: (a) arreglo radial, (b) arreglo helicoidal y (c) arreglo cuadrado

En la distribución radial la mediciones de las aberraciones de rayo pueden hacerse en coordenadas polares, lo que disminuye el tiempo de procesamiento, aunque en las zonas periféricas de la pantalla los puntos están más separados con respecto a sus vecinos centrales, por lo que las zonas en la superficie de prueba no se examinan de manera uniforme; en la distribución helicoidal los agujeros aparecen un poco más uniformes que en la distribución radial, pero continúa presentando el problema de la distribución radial que no examina la superficie de manera uniforme; finalmente, en la distribución cuadrada los orificios están dispuestos de manera equidistante, por lo que puede utilizarse el sistema de coordenadas cartesiano para su análisis. Esta distribución supone una mejora con respecto a las anteriores, ya que permite realizar un muestreo uniforme.

El número de agujeros en la pantalla de Hartmann sugiere el nivel de precisión de la prueba, por lo que al muestrear la superficie con un número mayor de puntos incrementamos la posibilidad de interpolar valores intermedios entre manchas, y detectar cambios menores en la superficie. Una limitación para seguir aumentando el número de agujeros en la pantalla la provoca la difracción, pues sus efectos se tornan importantes conforme los agujeros disminuyan su tamaño; en contraste, desde el punto de vista de la óptica geométrica, aumentar el tamaño de los agujeros producirá solapamiento entre ellos, de modo que imposibilitará la medición [50]. Morales y Malacara-Hernández propusieron en 1983 un modelo matemático para calcular el espacio de separación entre los agujeros [51].

3.4.2 El frente de onda y sus aberraciones

La relación exacta entre la aberración del frente de onda y las aberraciones de rayo fue descrita por primera vez en 1942 por el modelo de Nijboer [27] y más tarde en 1946 reformulado de forma más exacta por Rayces [28].

La aberración del frente de onda se puede medir una vez determinadas las aberraciones transversales de rayo, mediante las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x,y)}{r} ; \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = -\frac{TA_y(x,y)}{r} \quad (6)$$

donde $W(x,y)$ es la función de aberración del frente de onda en el espacio tridimensional; r es la distancia del frente de onda en la pupila de salida hasta el plano imagen de Hartmann; TA_x y TA_y son las componentes de la aberración de rayo en el eje de las abscisas y en el de las ordenadas, respectivamente. Es importante tener presente que con la ecuación (6), se calcula la aberración del frente de onda en la pupila de salida, mediante las aberraciones de rayo en el plano imagen.

Determinar la función de las aberraciones del frente de onda se puede lograr por medio de las metodologías zonal y modal [37]. La metodología zonal consiste en medir las aberraciones transversales del patrón de Hartmann y resolver las ecuaciones diferenciales de Nijboer (o de Rayces) por medio de la integración numérica trapezoidal [30], mientras que en la metodología modal se resuelve la ecuación de forma analítica con base en una función de aberración polinómica, de modo que los datos obtenidos en la prueba de Hartmann correspondan a las derivadas parciales de sus funciones. La función de aberración del frente de onda se puede aproximar mediante las aberraciones de primer orden (también llamadas aberraciones de Seidel) que miden el cambio de posición y de tamaño de la imagen con aproximación paraxial [2], por medio de un polinomio en coordenada cartesianas (también llamado de Taylor) [38] o con el polinomio de Kingslake, citado por Malacara-Hernández en [50]; o para aberraciones de alto orden con polinomios ortogonales de Zernike [30].

El polinomio de Kingslake, que aproxima a las aberraciones de Seidel (exceptuando las aberraciones de distorsión y curvatura) se representa de la siguiente forma:

$$W(x,y) = A + Bx + Cy + D(x^2 + y^2) + E(x^2 - y^2) + Fxy + G(x^2 + y^2)y + H(x^2 + y^2)x \quad (7)$$

El procesamiento implica la manipulación de las imágenes vistas como señales digitales, para extraer la información más elemental subyacente. El análisis se encamina a determinar ciertas estructuras de una imagen mediante la captura, el preprocesado, la segmentación, la representación y la descripción de sus elementos [52]. Los coeficientes a estimar en la ecuación (7) tienen el siguiente significado:

A. Término pistón. Es una constante que representa un cambio en el camino óptico del frente de onda, pero sin ocasionar ningún cambio ni deterioro de la imagen. En algunas ocasiones este término es omitido en el polinomio.

B. Inclinación del eje y. Inclinación del frente de onda cuando la imagen se desplaza hacia el eje x.

C. Inclinación del eje x. Inclinación del frente de onda cuando la imagen se desplaza hacia el eje y.

D. Defoco. Esta es considerada la aberración más simple; tiene su origen en la incapacidad del sistema óptico de enfocar la imagen en el plano Gaussiano; puede ocurrir por el desplazamiento axial de alguna de las lentes del sistema o porque el plano imagen está en una posición diferente a la posición del foco.

E. Astigmatismo. Resulta de una asimetría en el frente de onda con superficie esferocilíndrica, la cual puede ocurrir en un sistema óptico con simetría rotacional cuando el punto objeto está fuera del eje o cuando alguna de las superficies del sistema tiene forma tórica.

F. Coma. Esta deformación se manifiesta únicamente para puntos fuera del eje óptico, pues se debe a que la amplificación paraxial es diferente a la amplificación marginal, por lo que al estar el objeto fuera del eje óptico, la imagen es amplificada de forma variable resultando en una imagen con forma de coma.

G. Aberración esférica. Esta aberración es representada por una deformación rotacionalmente simétrica a causa de la forma esférica de las lentes; es considerada por muchos autores como la más importante de las aberraciones porque produce diversos puntos de convergencia, ya que la posición del foco depende de la altura del rayo sobre la superficie refractora; si el ángulo de los rayos con

respecto al eje óptico es muy grande, la envolvente de los rayos refractados forman una región llamada caustica.

3.5 Procesamiento digital de imágenes

La precisión de las pruebas de Hartmann reside principalmente en medir la posición de los centroides de cada una de las manchas en el patrón de Hartmann, por lo que es importante describir los principios básicos del procesamiento digital de imágenes.

Entre las aproximaciones más importantes en óptica geometría está el haber situado la función trigonométrica del seno del ángulo por el valor del ángulo en radianes, lo que se conoce como aproximación paraxial. Esta aproximación es muy buena para aberturas y campos pequeños, pero es necesario tomar en cuenta más términos de la serie del seno cuando estos crecen, haciendo más grandes los ángulos. Aunque esta óptica no es exacta, es muy útil para las áreas de la ciencia de la visión sobre todo en la prescripción de lentes y para la detección de anomalías corneales.

Geoméricamente, el polinomio de la ecuación 7 representa una superficie; su forma puede ser simple o compleja, según el número de monomios que componen el polinomio, por lo que podemos decir que la superficie que describe el polinomio es la suma de un conjunto de superficies más simples. Es común describir las superficies simplemente por sus coeficientes ordenados en algún tipo de histograma, en lugar de escribir la ecuación.

3.5.1 Representación y definición de una imagen digital

El término imagen digital se refiere a una función bidimensional de intensidad luminosa $I(x, y)$, donde x y y son las coordenadas espaciales y el valor de I en un punto (x, y) es proporcional al brillo (nivel de gris) de la imagen en ese punto.

La imagen digital se puede considerar como una matriz cuyos índices de filas y columnas identifican un punto de la imagen y el valor del elemento correspondiente en la matriz indica la intensidad de ese punto. Los miembros de una distribución digital de este tipo se denominan elementos de la imagen o más comúnmente píxeles (proviene del término en inglés *picture*

element).

Por defecto, la representación espacial de un píxel con coordenadas (0,0) es localizado en la esquina superior izquierda de la imagen. Nótese que en la siguiente representación, en la figura 3.23, el valor de x se incrementa de izquierda a derecha y el valor de y de arriba a abajo.

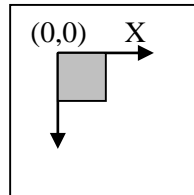


Figura 3.23 Representación de la convención de las coordenadas en las imágenes digitales

3.5.2 Propiedades de las imágenes digitales

Una imagen digital tiene tres propiedades fundamentales: resolución espacial, resolución de niveles y número de planos [52].

3.5.2.1 Resolución espacial

La resolución espacial de una imagen es el número de píxeles por fila y por columna por unidad de longitud. Una imagen de m filas y n columnas tiene un total de $n \times m$ píxeles.

3.5.2.2 Resolución de niveles

La resolución de niveles de una imagen, también llamada profundidad del píxel, indica el número de niveles de gris con los que se representa la imagen. La profundidad del píxel es el número de bits por píxel usado para definir la intensidad que representa. Para una cantidad de bits n , el píxel puede tomar 2^n valores diferentes. Por ejemplo, si n es igual a 8 bits, un píxel puede tomar 256 valores distintos en el rango de 0 a 255.

3.5.2.3 Número de planos

El número de planos en una imagen es el número de arreglos de píxeles que la componen. Una imagen en tonos de gris, en un tipo de representación, está compuesta de un solo plano que mediante una paleta envía un mismo valor para tres planos de color, mientras una imagen de color verdadero (*true color*) está compuesta de tres planos de píxeles con valores diferentes: el de la componente roja (*R-Red*), la verde (*G-Green*) y la azul (*B.-Blue*). El tamaño de una imagen de color, en esta configuración, es tres veces el tamaño de una imagen de niveles de gris. La figura 3.24 muestra los planos de una imagen en colores y en tonos de gris.

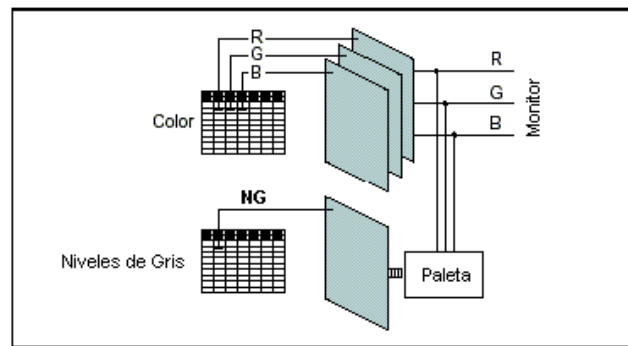


Figura 3.24 Planos de una imagen en colores y en tonos de gris

3.5.3 Imágenes en colores

El ojo humano, al tener solamente tres tipos de receptores de color distintos (los conos), uno que detecta el rojo, otro el verde y otro el azul, es capaz de captar una gran variedad de colores diferentes. Además, posee un tipo de receptor de intensidad, los bastoncillos.

Una imagen *RGB* es una imagen asociada a los colores rojo (R), verde (G) y azul (B). Ver la figura 3.25.



Figura 3.25 Imagen original en colores; componente roja (R), componente verde (G) y componente azul (B)

3.5.4 Imágenes en tono de gris

Si la intensidad de las componentes roja, verde y azul de cada píxel en una imagen en colores son iguales, se forma una imagen sin color (acromática) en tonos o niveles de gris.

Una imagen en tonos (o niveles) de gris es una imagen bidimensional donde cada píxel sólo representa un valor de intensidad acotado entre 0 y $2^n - 1$, donde n es la cantidad de bits utilizados para representar el valor de intensidad de cada píxel. Por convención, en el caso de 8 bits (un byte) el cero representa el negro y el 255 representa el blanco.

En general, el valor de intensidad o nivel de gris se obtiene promediando los valores de las tres componentes R, G y B de un píxel. La figura 3.26 muestra una imagen en tonos de gris.



Figura 3.26 Imagen en niveles de gris

3.5.5 Imágenes binarias

Los píxeles en una imagen binaria contienen sólo dos valores de intensidad en forma normalizada: 0 para el negro y 1 para el blanco, los que equivalen a los niveles 0 y 255, respectivamente, por estar cada píxel asociado a un byte (ver la figura 3.27).



Figura 3.27 Imagen binaria

3.5.6 Filtrado espacial en imágenes

Los filtros espaciales alteran los valores de los píxeles con respecto a la variación de la intensidad luminosa en su vecindad. Estos filtros pueden ser sensibles a la presencia o ausencia de una variación en la luminancia asociada a la intensidad durante la captura. Los filtros espaciales son utilizados con varios propósitos, tales como la detección de bordes, la reducción o eliminación de ruidos (suavizado), etc.

Los filtros espaciales se dividen en dos categorías principales, según la frecuencia de las señales que permiten pasar [54]:

1. Filtros pasa-altas, que permiten el paso de altas variaciones de la luminancia presentes en la imagen. Usualmente acentúan los bordes de los objetos.
2. Filtros pasa-bajas, que sólo permiten el paso de pequeñas variaciones de la luminancia. Estos filtros tienden a suavizar las imágenes, al eliminar ruidos, detalles y reducir los bordes de los objetos.

3.5.7 Histograma

El histograma de una imagen muestra la distribución cuantitativa o frecuencia de ocurrencia de los píxeles de la imagen con respecto a los niveles de gris. Provee una descripción global de la apariencia de una imagen y ayuda a separar las diversas partes que la forman, tales como los objetos y el fondo.

3.5.7.1 Definición de histograma

El histograma es una función H definida sobre la base del número de píxeles que tiene cada nivel k , dentro del rango de valores en la escala de grises o en cada canal de color R, G, o B de la imagen (8):

$$H(k) = n_k \quad (8)$$

donde k es el k -ésimo nivel, n_k es el número de píxeles en el nivel k y $\sum n_k = n$ es el número total de píxeles en la imagen. La figura 3.28 muestra un ejemplo esquemático del histograma de una imagen.

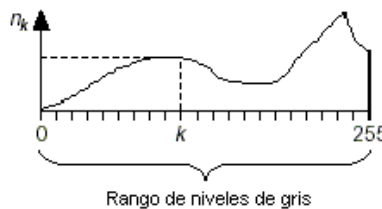


Figura 3.28 Histograma

El eje horizontal (abscisas) indica el rango dinámico de niveles de gris k desde 0 a 255, mientras que el eje vertical (ordenadas) indica el número n_k de píxeles en la imagen con cada nivel k .

En una imagen en tonos de gris de 8 bits, hay 256 posibles valores de luminancia, y por lo tanto, el histograma mostrará los 256 valores que representan la distribución del total de los píxeles de la imagen entre estos niveles de gris (ver la figura 3.29).

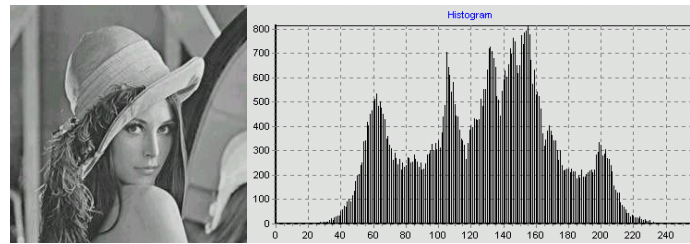


Figura 3.29 Histograma de la imagen en tonos de gris

En una imagen de color de 24 bits, puede haber 256 valores posibles para la componente Roja, 256 para la Verde y 256 para la Azul (ver la figura 3.30).

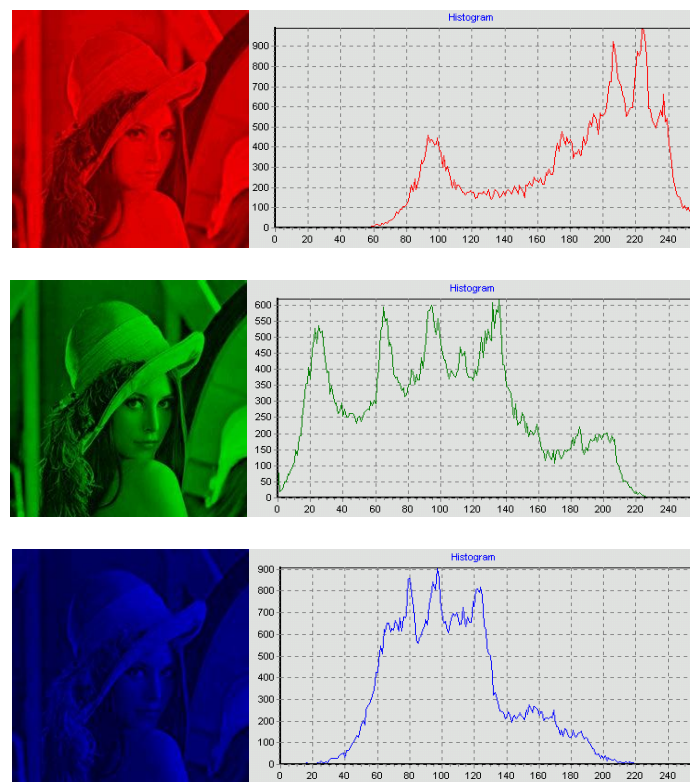


Figura 3.30 Histogramas de las componentes roja, verde y azul de una imagen de color

3.5.8 Umbralado

El umbralado es una herramienta para segmentar la imagen sobre la base de las acentuadas diferencias de los tonos de gris de los píxeles adyacentes de las regiones de interés y el fondo de la imagen.

Este proceso consiste en dividir una imagen en dos regiones: una para las regiones de interés y otra para el fondo. En forma normalizada, el umbralado establece en 1 todos los píxeles que pertenecen a un intervalo de los niveles de gris, llamado intervalo de umbralado, y en 0 a todos los restantes píxeles de la imagen.

El uso más común del histograma es para determinar el valor de umbral al que se realizaría el umbralado, con el fin de transformar una imagen en tonos de gris a binaria. El propósito de esta operación es el de tratar de extraer las áreas de interés para su análisis posterior.

3.5.9 Morfología matemática

El término morfología en biología se refiere al estudio de las formas y estructuras en plantas y animales. En el análisis digital de imágenes se utiliza el mismo término en el contexto de la morfología matemática, herramienta utilizada en el pre- y posprocesamiento de las imágenes.

Actualmente el uso de la morfología matemática en el análisis de imágenes se ha expandido mundialmente con un crecimiento sustancial, tanto en el campo teórico como en el aplicado.

El alcance de los métodos morfológicos es tan amplio como el propio procesamiento de imágenes; éste incluye: segmentación, restauración, detección de bordes, análisis de texturas, análisis de partículas, esqueletizado, análisis de formas, compresión, análisis de componentes principales, entre otros [53]. Los métodos morfológicos han sido aplicados en diferentes áreas con resultados satisfactorios, por ejemplo, en la visión de robots, en el análisis de imágenes de microscopios, en imágenes médicas, en la biología, la metalurgia y en la lectura automática de caracteres.

La morfología matemática está basada en operadores que al combinarse pueden actuar sobre formas complejas, descomponiéndolas en partes que tienen sentido y en partes que les son extrañas.

Las operaciones morfológicas simplifican las imágenes y conservan las principales características de la forma de los objetos.

La principal idea es la de explorar una imagen con otra imagen menor, llamada elemento de estructura, para cuantificar la manera en que éste se ajusta o no en la imagen de estudio.

La operación fundamental de la morfología matemática es la *Erosión*, a partir de la cual se define otra denominada *Dilatación* como su dual. Luego, por combinación de éstas, surgen otras dos operaciones también fundamentales, la *Apertura* y la *Clausura* [52, 53].

El elemento de estructura actúa como un operador sobre una imagen para producir un resultado. La forma y tamaño del elemento de estructura es escogido de acuerdo a un conocimiento previo acerca de las estructuras geométricas relevantes y no relevantes presentes en la imagen.

Cada elemento de estructura requiere la definición de un punto de origen (o de referencia) para su aplicación como operador morfológico. Esto permite que el elemento de estructura se pueda relacionar de una forma particular con los píxeles de la imagen. La figura 3.31 muestra dos elementos de estructura.

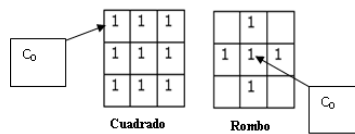


Figura 3.31 Elementos de estructura cuadrado y romboidal de 3x3 píxeles, donde en cada uno se muestra su punto inicial (u origen) C_0 .

Capítulo 4

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En el presente, el mercado de los topógrafos corneales se limita casi exclusivamente al topógrafo corneal mediante los anillos de Plácido, cuyo funcionamiento se basa en la proyección de anillos concéntricos luminosos sobre la córnea. Una de las desventajas más notables de estos equipos yace en su incapacidad para resolver rayos reflejados por la córnea de forma oblicua, pues la simetría circular de los anillos impide reconstruir su trayectoria cuando la superficie corneal difiere de una superficie de revolución. Por esta razón, en córneas con alta deformación se introduce un error en su reconstrucción topográfica [29].

Los equipos optométricos basados en la prueba de Hartmann han implicado una abundante contribución en material de lectura especializada; no obstante, después de casi 16 años de la publicación del primer trabajo, los equipos aún continúan en etapa de prototipo posiblemente por la alta complejidad en su fabricación. Entre los factores más importantes que afecta la precisión de los equipos basados en Hartmann, está la errada detección de las manchas en el Hartmanngrama (que producen falsos positivos). En vista de que los puntos de iluminación en la pantalla son monocromáticos y semejantes entre sí, detectar y clasificar cada una de las manchas reflejadas por la córnea se vuelve una tarea difícil que aumenta su complejidad conforme se incrementa el número de puntos y mayor es la deformación de la córnea [55].

Otro factor que afecta la precisión del equipo es la geometría de la pantalla. Los diseños actuales de topógrafo corneal usualmente presentan pantallas derivadas de la cónica, donde cada uno de los puntos de iluminación (o conjunto de ellos) presentan variación en la distancia a la córnea y a la cámara de video, lo que origina manchas en el Hartmanngrama de diferentes tamaños. Para solucionar este inconveniente Mejía-Barbosa *et al.* [19] y Campos-García *et al.* [21], diseñaron un par de pantallas con puntos de iluminación de tamaño variable, de modo que al reflejar en una superficie esférica como lo es la córnea, se consigue un patrón de manchas de tamaño uniforme sobre la cámara de video. Esta configuración evidentemente aumenta la complejidad de fabricación de los equipos, ya que cualquier error puede ocasionar manchas superpuestas entre sí o un Hartmanngrama con alto grado de difracción.

4.1 Prueba de Hartmann

La función de aberración del frente de onda se puede determinar por medio de las metodologías zonal y modal de Hartmann [37]. La metodología zonal consiste en medir las aberraciones transversales del patrón de Hartmann (denotadas como TA) y resolver las ecuaciones diferenciales de Nijboer (o de Rayces) por medio de integración numérica, mientras que en la metodología modal, las ecuaciones se resuelven de forma analítica, aproximando la aberración del frente de onda a una función polinómica.

En la actualidad el polinomio de Zernike es el estándar para reportar las aberraciones ópticas del ojo humano [57]; no obstante, para efectos de la práctica clínica, donde las aberraciones primarias disminuyen con la prescripción de anteojos, o bien para detectar patologías corneales, es posible obtener la aberración del frente de onda ($W(x,y)$), el frente de onda ($w(x,y)$) y la superficie de la córnea ($s(x,y)$) mediante la metodología modal con el polinomio de Kingslake (Cap. 3, Ec. 7) [30].

4.1.1 Aberración del frente de onda de la córnea

Para la reconstrucción topográfica de la córnea con el topógrafo semiesférico, se utilizan las ecuaciones diferenciales de Nijboer (Cap. 3, Ec. 6) [27] que están formadas por las derivadas parciales de la función de aberración del frente de onda $W(x,y)$; por la distancia r del ápice corneal a

la cámara de video; y por las aberraciones transversales de rayo (TA_x , TA_y) del Hartmanngrama de referencia y el medido en la córnea humana. El Hartmanngrama de referencia se puede resolver mediante el trazo de rayos simulando la superficie del espejo ideal y la pantalla de Hartmann, o físicamente con ayuda de un espejo con proporciones similares a la córnea humana. Para el proyecto se empleó un espejo convexo de 8 mm de radio con calidad óptica alrededor de $\lambda / 20$.

La relación entre las ecuaciones de Nijboer (Cap. 3, Ec. 6) y el polinomio de Kingslake (Cap. 3, Ec. 7) como función de aberración del frente de onda $W(x,y)$, da lugar a las siguientes ecuaciones.

$$B + (2D + 2E)x + Fy + 2Gxy + 3Hx^2 + Hy^2 = -\frac{TA_x(x,y)}{r} \quad (9)$$

$$C + Fx + (2D - 2E)y + 2Hyx + Gx^2 + 3Gy^2 = -\frac{TA_y(x,y)}{r} \quad (10)$$

donde se aprovecha la técnica numérica de mínimos cuadrados para hacer un ajuste con la distribución de datos relacionados con los segundos miembros de las ecuaciones 9 y 10, de modo que los coeficientes se estiman mediante las variables auxiliares α y β , respectivamente (Ec. 11).

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= B & \beta_1 &= C \\ \alpha_2 &= 2D + 2E & \beta_2 &= F \\ \alpha_3 &= F & \beta_3 &= 2D - 2E \\ \alpha_4 &= 2G & \beta_4 &= 2H \\ \alpha_5 &= 3H & \beta_5 &= G \\ \alpha_6 &= H & \beta_6 &= 3G \end{aligned} \quad (11)$$

Los coeficientes de aberración del frente de onda se calculan mediante las siguientes fórmulas (Ec. 12). Algunos coeficientes pueden obtenerse por medio de una o más fórmulas.

$$B = \alpha_1$$

$$C = \beta_1$$

$$\begin{aligned}
 D &= (\alpha_2 - 2E) / 2; (\beta_3 + 2E) / 2 \\
 E &= (\alpha_2 - 2D) / 2; (-\beta_3 + 2D) / 2 \\
 F &= \alpha_3; \beta_2 \\
 G &= \alpha_4 / 2; \beta_5 \\
 H &= \alpha_5 / 3; \alpha_6; \beta_4 / 2
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

En los sistemas ópticos basados en la prueba nula de Hartmann, la función de aberración de onda W coincide con una diferencia en frente de onda, es decir, la diferencia entre w y s' , siendo s' una semiesfera perfecta de referencia. En el caso de espejos convexos (o la córnea en nuestro estudio), la función W se aproxima a la diferencia entre la superficie anterior de la córnea s y una semiesfera de referencia s' [38], tal y como se expresa en la siguiente ecuación (Ec. 13):

$$s(x,y) = W(x,y) + s'(x,y) \tag{13}$$

4.2 Arreglo de Hartmann con pantalla semiesférica

El funcionamiento de la pantalla nula de Hartmann parte del principio básico de reflexión en espejos, donde los rayos provenientes de una fuente puntual en el infinito inciden sobre un espejo convexo y forma una imagen virtual en la prolongación de los rayos reflejados (como se muestra en la figura 3.19 del capítulo 3).

4.2.1 Descripción

En el caso particular del topógrafo semiesférico, se remplace el espejo convexo por una esfera especular similar a la córnea humana y se invierte el sentido de los rayos de luz para tener un plano imagen en la cámara de video. En la figura 4.1 la pantalla de Hartmann se representa como un semicírculo de radio R de 30 mm, con una abertura de 10 mm en su parte lateral; la córnea humana

se representa como un círculo de radio r de 8 mm cuyo punto focal, situado a la mitad de su radio de curvatura ($r/2$), coincide con el radio de la pantalla R ; finalmente, la línea de color azul representa un rayo de luz que incide sobre la córnea y se refleja hacia la cámara de video. La línea punteada de color rojo representa la prolongación del rayo reflejado detrás de la córnea.

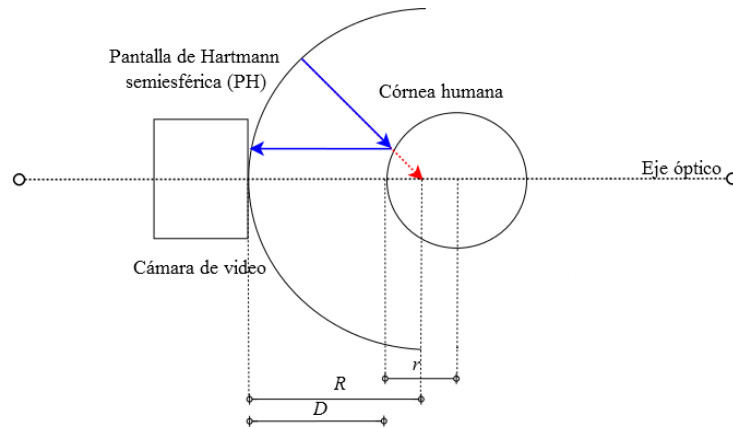


Figura 4.1 Corte transversal del arreglo óptico del topógrafo corneal semiesférico

El diseño semiesférico de la pantalla permite que el camino óptico de los puntos de iluminación sean constantes y forme un patrón de Hartmann de tamaño uniforme, por lo que ya no es necesario ajustar restrictivamente el tamaño de las perforaciones en la pantalla, como en los diseños de los topógrafos anteriores.

A diferencia de los topógrafos corneales tipo Plácido que se distinguen por ser equipos de notable proporción, el topógrafo corneal semiesférico tiene casi una tercera parte de su tamaño, lo que le permite adaptarse cómodamente a la porción orbitaria del rostro humano y reducir el ruido ambiental en las imágenes durante la medición.

El topógrafo semiesférico posee un filtro óptico que permite el paso sólo de los rayos que apuntan hacia el foco de la córnea. Cuando se utilizan fuentes de iluminación difusas, como en el caso de los LED, el filtro concede una región axial donde siempre se cumple el principio de reflexión del topógrafo. Debido a que los rayos emitidos por los LED siguen trayectorias omnidireccionales, siempre existe un grupo de rayos cuya dirección apunta al foco de la córnea, lo que produce cierta holgura al momento de hacer la medición sin afectar la precisión de los resultados. Al alejarse de la distancia convenida en el diseño original, únicamente cambia la región de la córnea a muestrear.

Los puntos en la pantalla están dispuestos de manera equidistante formando una cuadrícula, por lo que puede resolverse por interpolación todo tipo de rayos reflejados por la córnea dentro de su zona periférica de 11 mm^2 , así como los rayos de la zona limbo por extrapolación, mediante el muestreo de 56 puntos separados entre sí alrededor de 0.1 mm .

4.2.2 Simulación

En óptica geométrica el trazo de un rayo de luz suele aproximarse para una superficie de revolución como una recta en el plano (\mathbb{R}^2) en un solo meridiano; no obstante, para medir la forma de superficies más complejas, como la córnea humana, los rayos deben representarse como líneas rectas en el espacio tridimensional (\mathbb{R}^3).

Modelar con geometría analítica el comportamiento de un rayo en el espacio $\{x, y, z\}$ no es una tarea simple, por lo que es preciso simplificar su representación y reescribir la función de la recta como un vector paramétrico. El cálculo vectorial suele usarse en óptica geométrica para simular el trazo de rayos [55].

Para entender este concepto más fácilmente, en la figura 4.2 se presenta la recta en su forma vectorial como la combinación lineal de un vector posición p que parte del origen del plano hasta el punto de inicio de la recta y un vector director d que indica su dirección de propagación, el cual puede dibujarse como un vector trasladado y contenido en la recta misma.

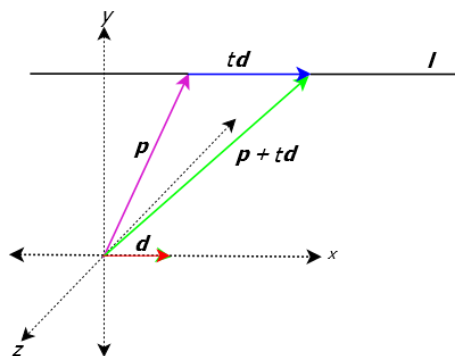


Figura 4.2 La recta l dada en forma paramétrica por $l(t) = p + td$, tiene la dirección d y pasa por el extremo de p

Conforme el parámetro t recorre el conjunto de los números reales, los puntos de la forma $t\mathbf{d}$ son los múltiplos del vector \mathbf{d} , y por tanto recorren todos los puntos de la recta con dirección \mathbf{d} . Como cada punto de la recta $l(t)$ es el final de la diagonal de un paralelogramo con lados $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$ para algún valor real de t , se comprueba que todos los puntos de l son de la forma $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$. Por tanto, la recta se expresa paraméricamente mediante la ecuación $l(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$. Según t vaya creciendo ($t > 0$), el punto $l(t)$ se mueve alejándose de \mathbf{p} en el sentido que marca \mathbf{d} o conforme t decrece ($t < 0$), $l(t)$ se mueve alejándose de \mathbf{p} en el sentido de $-\mathbf{d}$ [56].

Como un rayo de luz rectilíneo puede expresarse mediante la función $l(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las ecuaciones paramétricas que lo describen son las siguientes (Ec. 14).

$$\begin{aligned}
 l(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{d} \\
 l(x,y,z) &= (p_x, p_y, p_z) + t(d_x, d_y, d_z) \\
 l(x,y,z) &= (p_x + td_x, p_y + td_y, p_z + td_z) \\
 x(t) &= p_x + td_x \\
 y(t) &= p_y + td_y \\
 z(t) &= p_z + td_z
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

La simulación del topógrafo comienza por definir las funciones de la pantalla de Hartmann y de la córnea humana, tal como se expresa en las ecuaciones (15) y (16), respectivamente:

$$f_p(x, y) = -\sqrt{-x^2 - y^2 + R^2} + R \tag{15}$$

$$f_c(x, y) = -\sqrt{-x^2 - y^2 + r^2} + D \tag{16}$$

donde R es el radio de curvatura de la pantalla de Hartmann; r es el radio de curvatura de la córnea y D es la distancia que debe desplazarse la córnea para que su foco coincida con el radio R ($D = R + r/2$). La representación en el espacio tridimensional del topógrafo se muestra en la figura 4.3, donde se aprecia una semiesfera pequeña de color rosa que simula a la córnea humana, una

semiesfera de color azul que representa la pantalla de Hartmann y un cuadrado de color amarillo en el origen que representa la cámara de video.

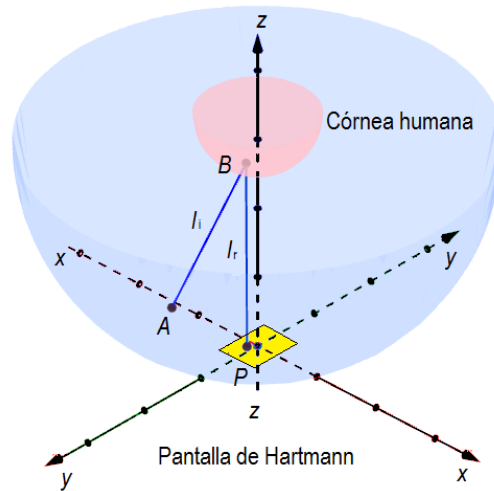


Figura 4.3 Topógrafo semiesférico en el espacio tridimensional

En la figura también se aprecia el trazo de un rayo de luz formado por dos vectores: el segmento (o vector trasladado) I_r que parte del punto P en la cámara de video hasta llegar a la córnea en el punto B , y el segmento I_i que parte del punto B hasta llegar a la pantalla de Hartmann en el punto A . Este último punto señala la coordenada del receptáculo donde más tarde se introducirá un LED.

Al hacer un acercamiento al origen del plano (ver la figura 4.4), observamos que el vector I_r está formado por un vector posición $\mathbf{p}_1 (p_x, p_y, 0)$ que parte del origen del plano hasta el punto P y un vector director $\mathbf{d}_1 (0, 0, 1)$ paralelo al eje z . Esto permite interpretar al segmento I_r como un vector trasladado y contenido o dibujado en tal línea recta

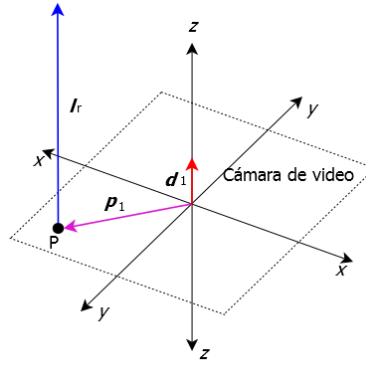


Figura 4.4 Acercamiento de la línea del rayo

Para calcular el punto de intersección del vector l_r con la córnea en el punto B, sus coordenadas pueden determinarse mediante la expresión $B = p_1 + t_1 d_1$, donde t_1 está dado por la ecuación (17). De ese modo, las coordenadas resultantes se muestran en la ecuación (18).

$$t_1 = -\sqrt{-p_{1x}^2 - p_{1y}^2 + r^2 + D} \quad (17)$$

$$B_x = p_{1x}$$

$$B_y = p_{1y} \quad (18)$$

$$B_z = t_1$$

La segunda ley del principio de reflexión dice que la magnitud del ángulo de reflexión es igual a la del ángulo de incidencia con relación a la recta normal; en su forma vectorial la relación se expresa como se muestra en la siguiente ecuación (19) [2].

$$d_2 = d_1 - 2(d_1 \cdot n)n \quad (19)$$

donde d_1 es el vector unitario a lo largo de la dirección del rayo l_r , d_2 el vector unitario a lo largo de la dirección del rayo l_i y n el vector unitario a lo largo de la normal a la córnea.

Para encontrar la intersección del rayo I_2 con la pantalla, es decir el punto A , es preciso calcular el vector unitario d_2 . Para esto el vector normal a la superficie corneal se obtiene por medio de las siguientes ecuaciones.

$$d_n = \left(\frac{\partial f c(B_x)}{\partial x}, \frac{\partial f c(B_y)}{\partial y}, -1 \right)$$

$$n = \left(\frac{d_{nx}}{\|d_n\|}, \frac{d_{ny}}{\|d_n\|}, \frac{d_{nz}}{\|d_n\|} \right)$$

(20)

Al hacer un acercamiento a la córnea (ver la figura 4.5), observamos que para encontrar las coordenadas del punto $A = (A_x, A_y, A_z)$, recurrimos a la ecuación de la recta que pasa por el punto $p_2 = B$ y que tiene la dirección d_2 .

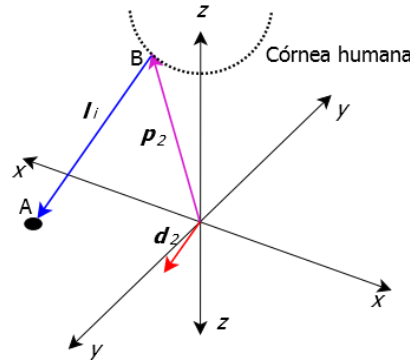


Figura 4.5 Acercamiento de la línea del rayo

La intersección del rayo con la pantalla de Hartmann, se obtiene por medio de la fórmula general de la ecuación cuadrática (21) y las ecuaciones (22).

$$a = (d_{2x}^2 + d_{2y}^2 + d_{2z}^2)t_2^2$$

$$b = (2p_{2x}d_{2x} + 2p_{2y}d_{2y} + 2p_{2z}d_{2z} - 2d_{2z}R)t_2$$

$$c = p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2 - 2p_{2z}R$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(21)

$$A_x = p_{2x} + t_2(d_{2x})$$

$$A_y = p_{2y} + t_2(d_{2y});$$

(22)

$$A_z = p_{2z} + t_2(d_{2z})$$

En la figura 4.6 se muestran los 56 puntos de la simulación en el espacio tridimensional. Los puntos de color amarillo corresponden a las manchas en la cámara de video (el Hartmanngrama) comprendidos dentro de un círculo de 10 mm, los de color rosa a la córnea humana y los de color azul los receptáculos en la pantalla de Hartmann.

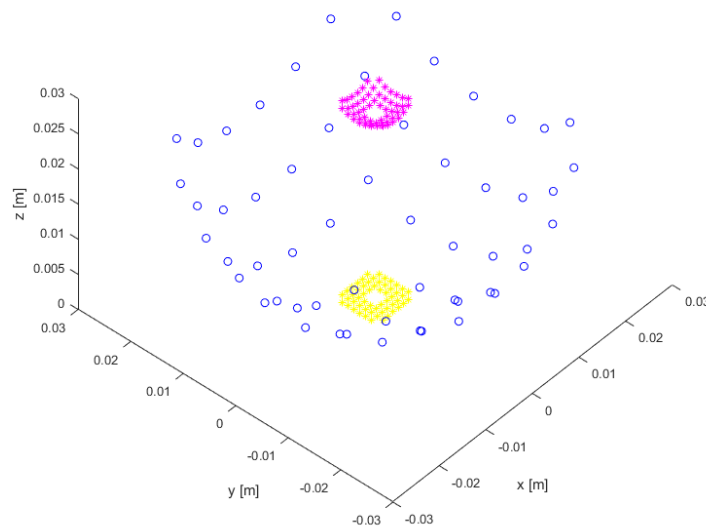


Figura 4.6 Simulación de la pantalla semiesférica de Hartmann

4.2.3 Fabricación

La fabricación de la pantalla comienza por un bosquejo estructural como el que se muestra en la figura 4.7, donde se puede apreciar la pantalla semiesférica con dos acotaciones que señalan las partes esenciales para su operación: (a) corresponde al orificio de captura de la imagen ubicado en el polo de la pantalla semiesférica, por medio del cual la cámara digital captura el patrón de Hartmann una vez que fue reflejado por la córnea; y (b) corresponde a los orificios en la pantalla de Hartmann que sirven como receptáculos para los LED, proporcionándoles soporte y alineación hacia su vértice y hacia el foco de la córnea una vez que el paciente se ubica frente al equipo.

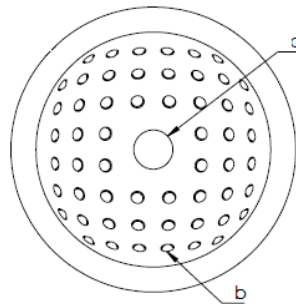


Figura 4.7 Bosquejo de la pantalla semiesférica: (a) orificio de captura y (b) receptáculos para los LED

Los planos de la pantalla se muestran en la figura 4.8, que señalan las medidas del bosquejo en el sistema de unidades estándar (pulgadas), así como un pequeño bisel alrededor de la pantalla para sujetarla al gabinete del equipo. La pantalla se fabricó con ayuda en una impresora de sinterización selectiva láser (por sus siglas en inglés *Selective Laser Sintering*, SLS), que utiliza polvo cerámico y un láser para formar figuras en 3D con una precisión de hasta 50 micras. Se utilizó SLS por la fragilidad de la pantalla, pues el polvo que no se sinteriza durante la impresión sirve de soporte para la pieza. La impresión en 3D es la mejor opción para minimizar el tiempo y los gastos en la fabricación.

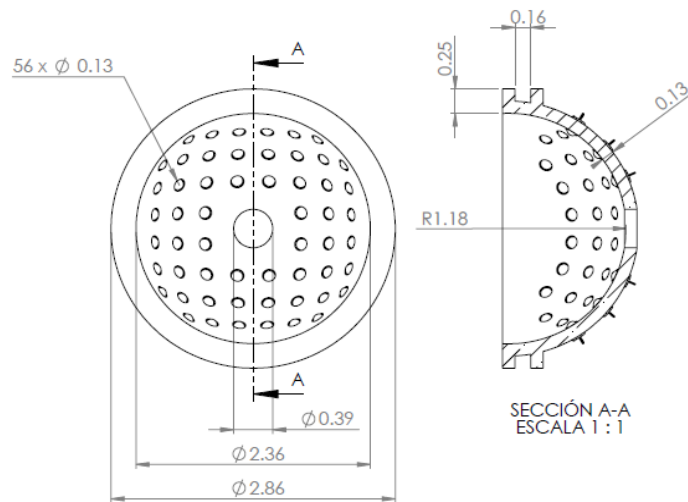


Figura 4.8 Plano de la pantalla semiesférica en pulgadas

4.3 Fuente de luz multicromática

El topógrafo semiesférico de este trabajo integra en su diseño una pantalla de iluminación multicromática que facilita la detección de los puntos en la etapa de procesamiento digital de las imágenes.

4.3.1 Configuración de los LED

En el equipo se utilizan 56 LED que se introducen en los receptáculos de la pantalla (figura 4.7b), formando ocho filas de seis y ocho diodos, según el nivel de la pantalla en la que se encuentren. La matriz de LED se compone de cuatro colores distintos: los tres primarios en la mezcla aditiva de los colores (rojo, verde y azul) y uno secundario (amarillo), colocados adecuadamente en la pantalla, de modo que la diferencia de su longitud de onda en el espectro electromagnético sea contrastante, y la posibilidad de detectar un falso positivo, o negativo, disminuya. El patrón de colores se repite simétricamente en el lado contrario de la pantalla.

La configuración multicromática inicia con el color amarillo, continúa con el azul, el rojo y termina con el verde. Si observamos con cuidado el espectro de la figura 4.9, podemos comprobar que el color de cada uno de los LED próximos está en el lado opuesto del espectro.



Figura 4.9 Espectro visible por el ojo humano

En la figura 4.10 se muestra la pantalla semiesférica con la matriz de LED ya colocada dentro de los receptáculos.

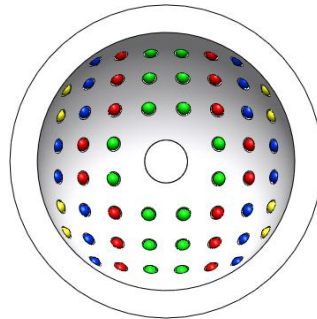


Figura 4.10 Pantalla semiesférica

4.3.2 Control de los LED

El control de la pantalla de iluminación se realiza de forma síncrona con la captura de las imágenes. El muestreo de una córnea humana equivale a la toma de 16 imágenes en alrededor de 4 s, tiempo en el que el paciente permanece inmóvil y mirando al centro de la pantalla para la medición.

Para el control de los LED se utiliza una placa de prototipo Arduino *ONE*, que se conecta a un equipo de cómputo donde es controlado por una interfaz de usuario desarrollada en Matlab. Esta versión de Arduino *ONE* ofrece una corriente máxima de 40 mA y una tensión de 5 v en cada pin de salida. Para conectar grupos de 3 y 4 LED en paralelo se incrementa la tensión en cada pin de

salida con un adaptador de alimentación externo controlado por transistores NPN – 2N3019. Para el proyecto se utilizaron 56 LED que se conectan a 16 pines de salida del Arduino ONE; la figura 4.11 muestra el circuito eléctrico de 3 LED conectados a una de las salidas del Arduino ONE.

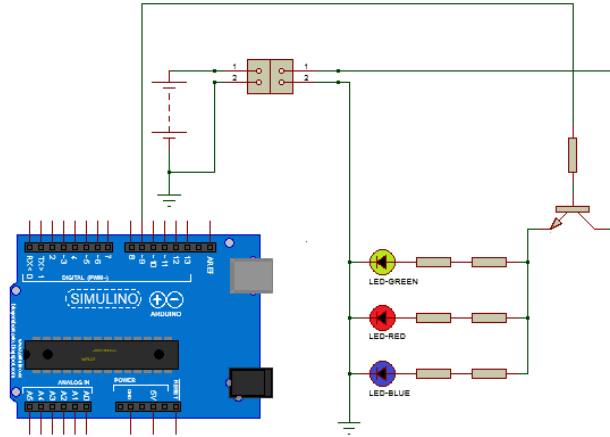


Figura 4.11 Circuito eléctrico de tres LED conectados al Arduino ONE

En la Figura 4.12 se muestran las placas de circuito impreso (en inglés conocido como *Printed Circuit Board*, PCB), relacionadas con el control de los LED en la parte derecha e izquierda de la pantalla de Hartmann.

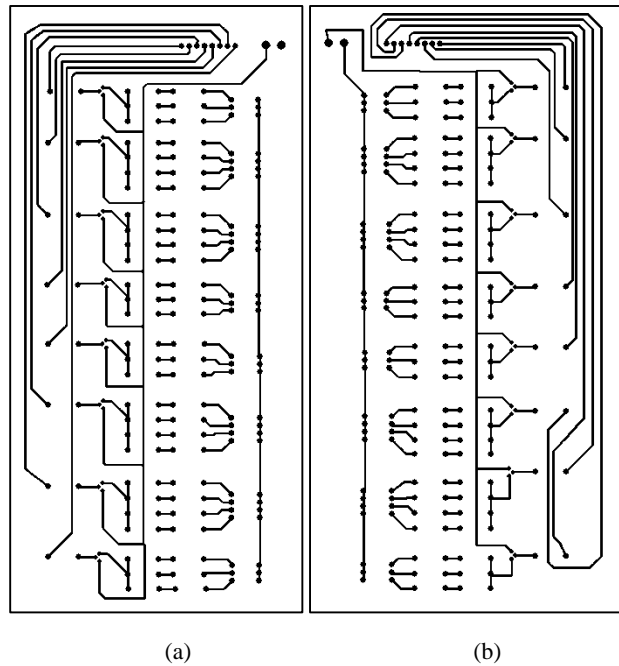


Figura 4.12 PCB del control de los LED: (a) control de la parte izquierda y (b) control de la parte derecha

Un factor a tomar en cuenta es que el voltaje de operación y la corriente de consumo de los LED cambian de acuerdo al color, por lo que su potencia luminosa también lo hace. Para resolver este inconveniente se normalizó la potencia luminosa a 420 nW con ayuda de cuatro potenciómetros cuya resistencia para el LED de color amarillo es de 1.85 k Ω , para el de color azul ultra brillante de 607 k Ω ; para el color rojo de 3.5 k Ω y para el verde de 2.35k Ω . En el PCB de la figura 4.11 cada resistencia se representó como la combinación de dos resistencias en serie.

4.4 Bosquejos del topógrafo corneal

El funcionamiento del topógrafo corneal semiesférico se muestra en la figura 4.13, donde se aprecian los tres elementos principales: un paciente sentado frente al equipo de medición cuya porción orbitaria de su rostro coincide con la pantalla semiesférica de Hartmann; el equipo optométrico sujeto a una base de elevación en forma de tijera y a una mesa holográfica; y un operador que controla la medición con ayuda de un equipo de cómputo.

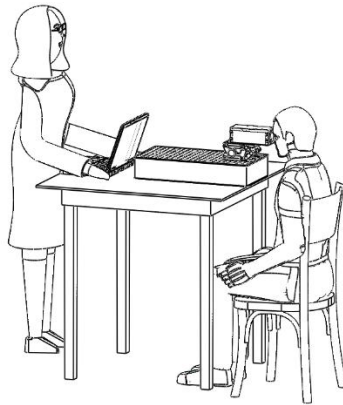


Figura 4.13 Funcionamiento del topógrafo corneal

La base ajustable de elevación en forma de tijera, la mesa holográfica y la mesa de madera, son complementos de sujeción que usamos únicamente para ilustrar el funcionamiento del equipo; sin embargo, debido a que estos complementos no fueron diseñados originalmente por nosotros, ni son trascendentales para el funcionamiento del topógrafo corneal, no se describen en este documento.

El bosquejo de las piezas que componen al topógrafo corneal se describe a continuación:

Pieza 1: Pantalla semiesférica de Hartmann (ver la figura 4.14).

1a: Orificio de captura de la imagen por medio del cual la cámara digital captura el patrón de Hartmann (Hartmanngrama) reflejado por la córnea.

1b: Orificios en la pantalla de Hartmann que sirven como receptáculos para los LED, proporcionándoles soporte y alineación hacia su vértice y hacia el foco de la córnea una vez que el paciente se ubica frente al equipo.

1c: Bisel de sujeción de la pantalla semiesférica.

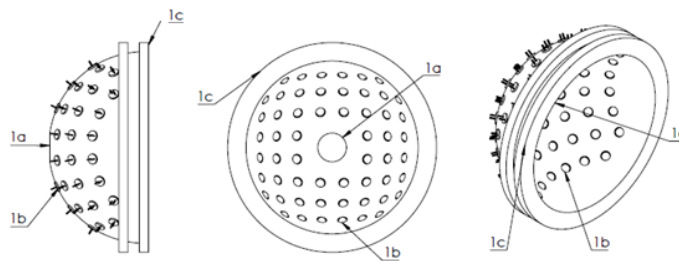


Figura 4.14 Bosquejo de la pantalla semiesférica

Pieza 2: Sujetadores de la pantalla de Hartmann con forma de horquilla. Cada pieza tiene un pequeño bisel que se ajusta a la muesca de la pantalla semiesférica (ver la figura 4.15).

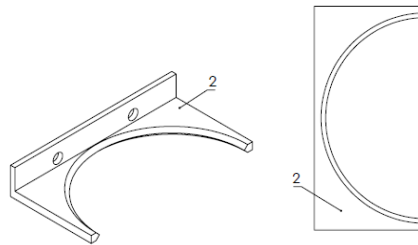


Figura 4.15 Sujetadores laterales de la pantalla

Pieza 3: El gabinete del equipo es una estructura metálica cuya función es albergar y proteger los componentes internos del topógrafo; su estructura hermética para la luz constituye una cámara oscura con un único punto de entrada: el orificio de captura de la imagen (1a). Su diseño reduce al mínimo la entrada de luz ambiental y la probabilidad de capturar imágenes con bajo contraste y alto nivel de saturación (ver la figura 4.16).

3a: Ranuras paralelas y equidistantes a una ranura central. Su función es facilitar el desplazamiento axial del gabinete sobre la superficie de sujeción y permitir la fijación del equipo en una posición cómoda para realizar los estudios requeridos.

3b: Ranura central del gabinete para el desplazamiento axial de la cámara digital sobre la superficie de sujeción, para que ésta pueda fijarse en una posición que garantice la correcta formación de las imágenes en el sensor fotoeléctrico CMOS (del inglés *Complementary Metal-Oxide-Semiconductor*).

3c: Espacio para el puerto de interconexión con la computadora, conector USB hembra.

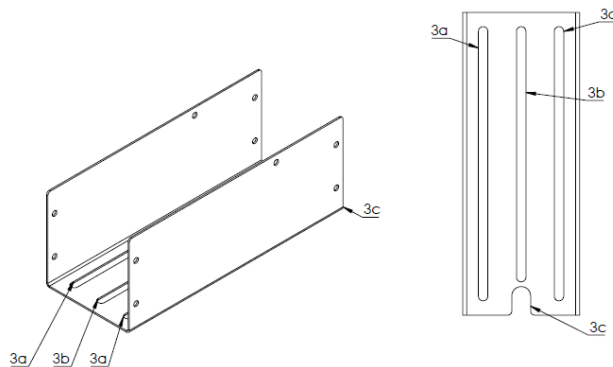


Figura 4.16 Gabinete del topógrafo corneal

Pieza 4: Tapa anterior del topógrafo corneal (ver la figura 4.17).

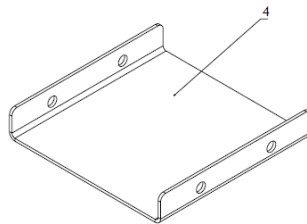


Figura 4.17 Tapa anterior del topógrafo corneal

Pieza 5: Tapa superior del topógrafo corneal (ver la figura 4.18).

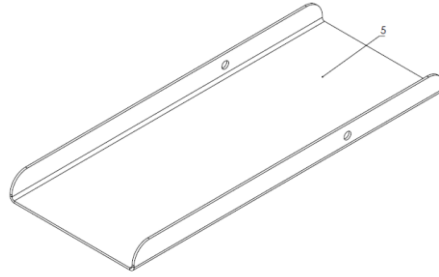


Figura 4.18 Tapa superior del topógrafo corneal

Pieza 6: Base de sujeción de la cámara con el tamaño conveniente para lograr que el centro del sensor de la cámara quede alineado con el centro de la pantalla de Hartmann, de modo que se formen imágenes equidistantes en el patrón de Hartmann. Esta base fue diseñada de modo que tanto el gabinete del topógrafo como la cámara digital, pudieran ajustarse axialmente de forma independiente, sobre todo para poder remplazar el objetivo de la cámara por alguno otro de diferente tamaño y características (ver la figura 4.19).

6a: El orificio de sujeción permite fijar la cámara a la base de la mesa, al pasar a través de la ranura central del gabinete (**3b**)

6b: La muesca inferior de la base de sujeción es una saliente que sirve como guía de desplazamiento sobre la ranura intermedia del gabinete del topógrafo (**3b**).

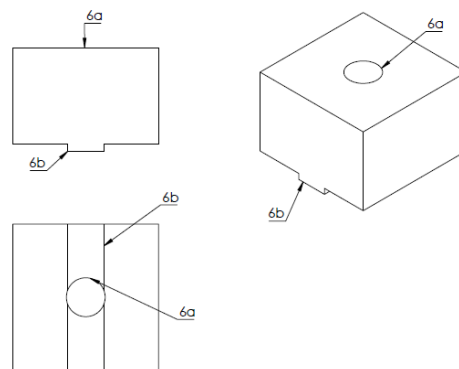


Figura 4.19 Base de sujeción de la cámara

Pieza 7: Base para fijar la cámara a la base de sujeción (pieza 6), con el fin de ajustar su posición a una distancia de enfoque óptima conforme a los orificios de fijación inferiores de la cámara utilizada (ver la figura 4.20).

7a: Ranura que permite el ajuste axial de la cámara, para acercarla o alejarla del orificio ubicado en el polo de la pantalla semiesférica de Hartmann.

7b: Arreglo de perforaciones para la sujeción de la cámara. Consiste en múltiples perforaciones que permiten ajustar de forma manual la base con los orificios de fijación inferiores de la cámara.

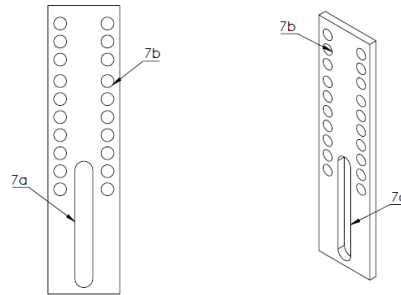


Figura 4.20 Base de fijación de la cámara

Pieza 8: Cámara digital de color para capturar el patrón de Hartmann. Los colores simplifican el análisis del Hartmanngrama por medio del reconocimiento de las manchas multicromáticas provenientes de la pantalla de LED (ver la figura 4.21).

8a: Objetivo óptico con zoom que permite el ajuste mecánico del enfoque de la imagen; este ajuste se lleva a cabo solo una vez con ayuda de una esfera de referencia de 8 mm de radio (que es el radio promedio de la córnea humana), cuyo punto focal debe coincidir con el centro de la pantalla de Hartmann.

8b: Sensor CMOS de la cámara digital. Se utilizará un CMOS de alta resolución espacial, de modo que puedan ser detectadas pequeñas variaciones de los puntos del patrón de Hartmann que se obtenga.

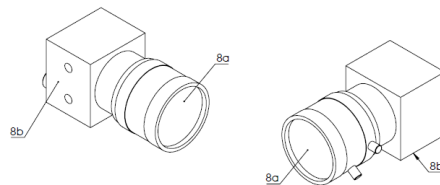


Figura 4.21 Cámara digital de color

En la figura 4.22 se muestra el ensamble de todas las piezas descritas anteriormente.

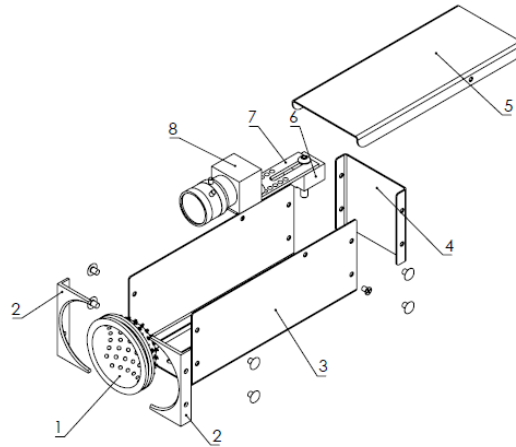


Figura 4.22 Ensamble del topógrafo corneal

4.5 Procesamiento digital de las imágenes

Gran parte de la precisión de la prueba de Hartmann yace en su capacidad para discriminar la posición de las manchas luminosas en el Hartmanngrama. Originalmente, para su registro, esta tarea se desarrollaba manualmente mediante placas fotográficas y un microscopio óptico; no obstante, con la aparición de las computadoras y de los sensores fotoeléctricos como el CMOS y el CCD (del inglés *Charge Coupled Device*), la prueba se renovó con la ayuda del procesamiento digital de imágenes.

La desviación de las manchas en el patrón de Hartmann cuenta con una pequeña distorsión producida por la difracción de la luz al pasar a través de los orificios, por lo que las manchas se pueden localizar mediante su centroide [58]. Cuando el algoritmo de reconocimiento es preciso, las manchas y el fondo oscuro del patrón se pueden diferenciar casi en su totalidad, en cuyo caso los centroides estimados corresponden a las posiciones verdaderas de las manchas en el Hartmanngrama; por el contrario, cuando existe una considerable cantidad de ruido fotoeléctrico y la diferencia de intensidad del fondo y de las manchas es mínima, el procesamiento de extracción se complica y pueden llegar a presentarse fallas en la detección.

Entre las técnicas más utilizadas para la detección de las manchas de Hartmann se encuentran las de umbralado y de ventaneo; ambas buscan diferenciar el objeto y el fondo del patrón mediante un valor de umbral, o punto de corte de intensidad, que transforma a la imagen original en una imagen

binaria cuyos objetos se representan por píxeles de color blanco (*foreground*) y el fondo por píxeles de color negro (*background*). En el contexto de la prueba de Hartmann, las técnicas de umbralado encuentran un valor de intensidad que discrimina la totalidad de las manchas. Estas técnicas se vuelven imprecisas cuando la intensidad de la imagen no es uniforme; por otra parte, las técnicas de ventaneo buscan detectar las manchas mediante un proceso iterativo de umbralado con regiones de interés, que disminuyen la influencia del ruido.

Recientemente, se han propuesto otras técnicas basadas en el análisis de la discontinuidad de las manchas en el patrón de Hartmann, como la técnica de Jiménez-López [58] que detecta cambios bruscos de intensidad con ayuda de filtros pasa-altas, como el gradiente o de Canny [52, 54], y mediante operaciones morfológicas de relleno [53]; y el trabajo de Gantes-Núñez [39] que propone dos técnicas basadas en las operaciones morfológica *top-hat*, erosión, dilatación y el método de umbralado de Otsu [59], además de permitir la detección manual de regiones de interés en el Hartmanngrama.

La metodología que proponemos en este trabajo para el reconocimiento de las manchas, se compone de la captura de las imágenes, el preprocesado, la segmentación, la representación y la descripción de las manchas. La misma fue aplicada a 96 imágenes de las dos córneas de 3 pacientes reales.

4.5.1 Captura de las imágenes

La metodología fue probada en seis córneas humanas de tres pacientes y en grupos de 16 imágenes para cada córnea. Las imágenes fueron tomadas con una cámara de video profesional Edmun EO-0413, con un sensor CMOS de 1/3" de color, de 0.3 megapíxeles y con salida en formato JPG.

Para su captura, la cámara se calibró con ayuda del *toolkit* de Matlab, que mediante un patrón con forma de tablero de ajedrez, ajusta los parámetros de la cámara para representar cualquier punto del mundo real sobre un plano imagen ya normalizado.

En la captura, cada elemento de la matriz denominado *pixel*, tiene un valor asignado que se corresponde con el nivel de luminosidad de la escena captada; dicho valor es el resultado de la cuantización y combinación de la intensidad en las tres bandas de color del modelo RGB.

La figura 4.23 muestra el patrón de Hartmann de una de las 16 imágenes, que corresponde a la porción de la tercera fila en la pantalla de Hartmann de la figura 4.10.



Figura 4.23 Manchas luminosas del Hartmanngrama

Cómo se aprecia en la imagen, el fondo es totalmente oscuro debido a que la captura se realiza con el topógrafo bien ajustado a la porción orbitaria del rostro del paciente, de modo que las únicas manchas en la imagen son las relacionadas con los LED. La imagen se presenta con una resolución espacial de 752x480 píxeles, con niveles de gris en el rango de 0 a 255, donde el 0 representa el negro absoluto y el 255 el blanco absoluto.

4.5.2 Preprocesado

El preprocesado de la imagen está compuesto por un filtro pasa-bajas para suavizar el ruido y disminuir efectos no deseados producidos por el muestreo, la cuantización y la transmisión, o bien por perturbaciones en el sistema como partículas de polvo o reflejos indeseados por la película lagrimal del ojo; así como un proceso de realce para destacar ciertos detalles de la imagen.

Para el suavizado de la imagen se emplea un filtro promedio iterativo de 3x3, que reduce la entropía de la imagen hasta que la diferencia absoluta es menor que 0.1, disminuye la aleatoriedad de imagen y normaliza la intensidad de los píxeles del fondo, así como los de las manchas monocromáticas.

Para el realce, la corrección gamma modifica el histograma mediante una serie de funciones que expanden los niveles de gris [52]. Las imágenes del topógrafo presentan histogramas muy similares entre sí, cuyas frecuencias son muy altas en el rango de 0 a 50 (debido al fondo negro) y muy bajas en los niveles de gris relacionados con las manchas de color (de 51 a 255).

Para normalizar la intensidad de los píxeles del fondo y aumentar el brillo y contraste de las manchas, el histograma se corrige con la transformación *gamma* de la figura 4.24, donde se normalizan las frecuencias relacionadas con el fondo oscuro y se intensifica, en forma logarítmica, el brillo de las manchas.

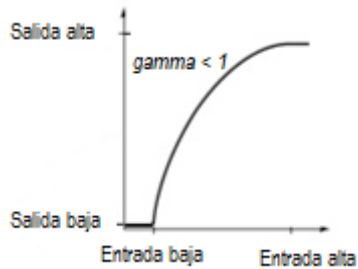


Figura 4.24 Transformación de la corrección gamma

En la figura 4.25 se muestra la imagen de la figura 4.23 después del preprocesado, cuyos colores son más claros y uniformes entre sí; además presentan mayor contraste con relación al fondo de la imagen.



Figura 4.25 Imagen después del preprocesado

4.5.3 Segmentación

Para la segmentación de las manchas luminosas en la imagen, su detección se limita a una región de interés de 300x40 píxeles, cuyo centro coincide con el nivel de gris máximo en cada uno de los

planos del modelo de color. La detección del color se consigue mediante la correspondiente detección de los tres niveles de gris de cada plano en el modelo de color RGB.

Para disminuir el riesgo de segmentar manchas incorrectas, como resultado de algún punto aislado en la imagen, éstas se comprueban sobre la base de su posición, teniendo en cuenta previamente el orden y la secuencia de los colores en cada imagen.

Las manchas segmentadas de la figura 4.25 se muestran en la figura 4.26.

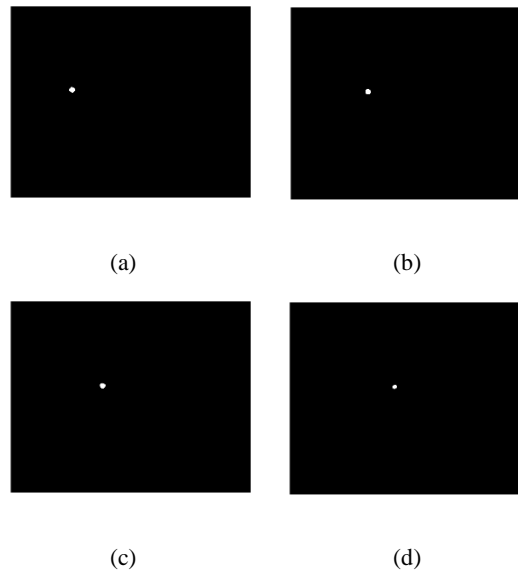


Figura 4.26 Manchas segmentadas y relacionadas con los colores: (a) amarillo; (b) azul, (c) rojo y (d) verde

4.5.4 Representación y descripción

La desviación de las manchas en el patrón de Hartmann cuenta con una pequeña distensión producida por la difracción de la luz, por lo que las manchas se representan mediante la distinción de su centroide (ver figura 4.27).

Para su descripción, estas sufren un cambio de escala que parte de las coordenadas en la matriz con origen en el vértice superior izquierdo de la imagen (ver la figura 3.23 del capítulo 3), hasta las coordenadas cartesianas con origen en el centro de la imagen (Ec. 22).

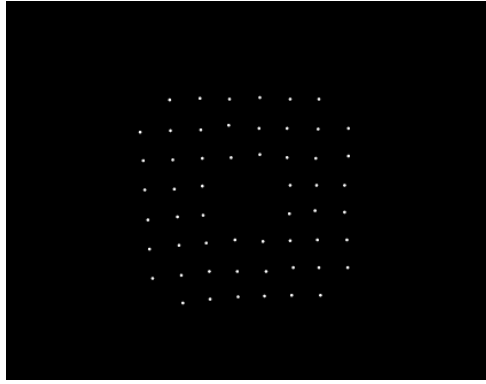


Figura 4.27 Representación de los centroides de las manchas

$$x = -\left(\frac{Lx}{2}\right) + (n - 1)dx$$

$$y = -\left(\frac{Ly}{2}\right) + (M - m)dy$$

$$dx = \frac{Lx}{N - 1}$$

$$dy = \frac{Ly}{M - 1}$$

(22)

donde x y y son las coordenadas de las manchas en el plano cartesiano (en metros, [m]); n y m las coordenadas de las manchas en la matriz (en pixeles, [px]); Lx y Ly corresponden al tamaño de la imagen [m]; M y N al tamaño de la matriz [px].

4.6 Descripción general del sistema

El topógrafo corneal semiesférico es un equipo optométrico integrado por elementos ópticos, eléctricos y mecánicos, controlados mediante un sistema de cómputo desarrollado en Matlab R2016a.

4.6.1 Interfaz gráfica del usuario

El sistema de software tiene una ventana de acceso principal para controlar la cámara de video, la captura de las imágenes y los módulos de estudio de la córnea. La ventana se divide en cinco secciones estratégicas (ver la figura 4.28).

1. La primera versión del equipo puede efectuar sobre la córnea humana cinco estudios: la relación de puntos (representada en el sistema como *Point Relation*) acopla los puntos del patrón de Hartmann de referencia y los de la córnea de estudio en su punto central, lo que permite apreciar las aberraciones transversales de rayo en una sola imagen (figura 4.30 (1)); los coeficientes de Seidel (*Seidel Coeficients*) reproducen los coeficientes de aberración de primer orden mediante una gráfica de barras (figura 4.30 (2)); la aberración del frente de onda (*Wavefront Aberration*) expone un frente de onda plano deformado por la córnea de estudio (figura 4.30 (3)); la superficie de elevación (*Surface of Elevation*) mide la desviación de la córnea mediante su relación con una superficie de referencia ideal (figura 4.30 (4)); y la curvatura tangencial (*Tangential Curvature*) expone un mapa con la curvatura dióptrica de la córnea a lo largo de sus meridianos (figura 4.30 (5)).
2. Botones de control: Iniciar cámara (representado en el sistema como *Start Camera*), ejecuta el encendido de la cámara de video y de la matriz de LED; Capturar (*Capture*), se encarga de controlar la secuencia de captura de las imágenes y del encendido, y apagado sistemático de los LED; Comenzar estudio (*Begin Study*), controla la llamada a los módulos de estudio conforme a la lista de estudio de la sección 1.

3. Región para examinar la córnea del paciente y el patrón de Hartmann. El operador puede ajustar la posición del paciente antes de iniciar la captura.
4. Apartado formado por dos columnas con 16 botones numerados de forma ascendente. En este apartado se seleccionan las imágenes de la prueba (botones en color verde) y del patrón de referencia (botones en color azul), mediante una ventana emergente que permite la selección manual de las manchas (figura 4.29 (1))
5. A través del menú Archivo (*File*) se controla el almacenamiento y la apertura de las imágenes relacionadas con los estudios; con el menú Herramientas (*Tools*) se gestiona la resolución del equipo, el control manual de los LED, la selección personalizada de los coeficientes de Seidel, así como la relación de los puntos a muestrear en el mapa tangencial.

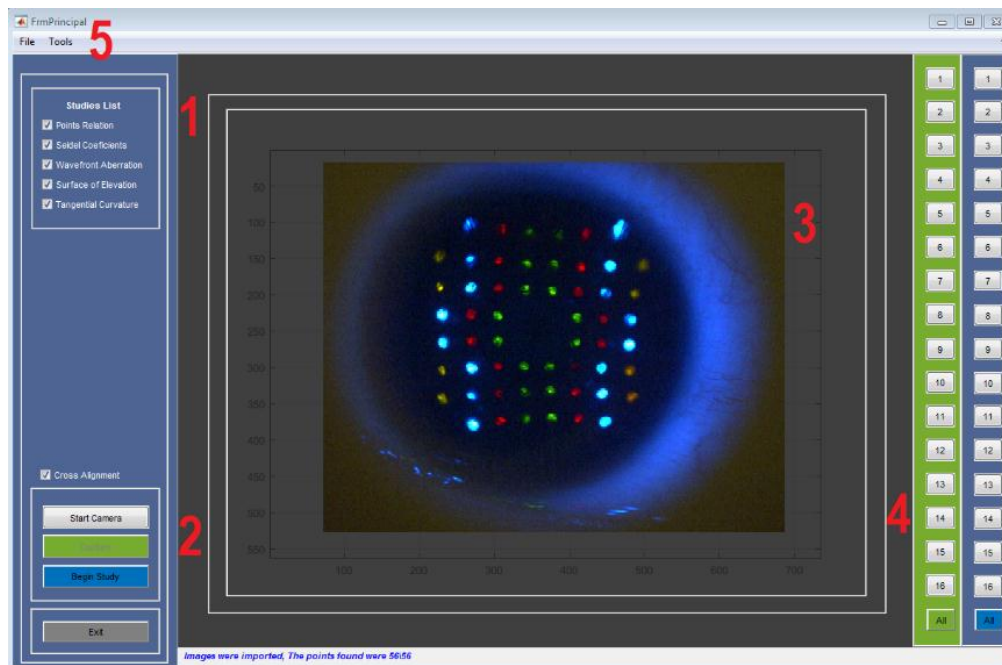


Figura 4.28 Ventana de acceso principal

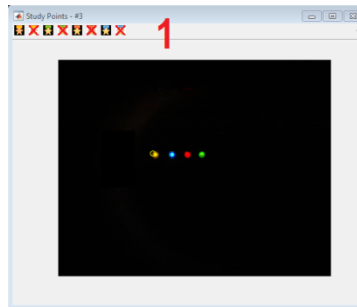


Figura 4.29 Ventana de selección manual de las manchas en el patrón de Hartmann

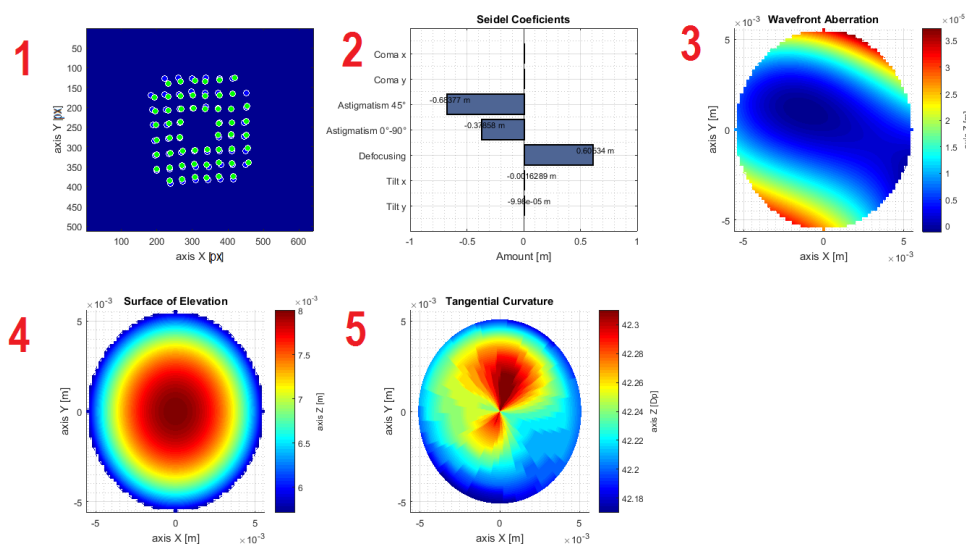


Figura 4.30 Ventana de selección manual de las manchas en el patrón de Hartmann

4.7 Pruebas y resultados finales

El funcionamiento del topógrafo corneal semiesférico fue comprobado mediante la medición de dos pruebas: las pruebas simuladas para predecir el comportamiento del sistema y los efectos que se produjeron en su operación; y las pruebas prácticas, para comparar los resultados de tres pacientes evaluados con el topógrafo semiesférico y con el equipo optométrico Atlas 9000, que es uno de los equipos optométricos más nuevos para analizar la superficie corneal ya que cuenta con 22 anillos de Plácido, una luz infrarroja no invasiva de 950 nm, una cámara de 1.3 megapíxeles con un rango de medición de 15 a 95 D \pm 0.05 D, lo que significa que tiene una precisión de 10 micras [60].

La primera prueba consistió en medir la exactitud del equipo mediante la simulación de una córnea distorsionada con el polinomio de Taylor (polinomio de coordenadas cartesianas) [38], que funge como un polinomio de deformación que se compara con la superficie calculada en la Ec. 13, una vez que se hayan examinado su Hartmanngrama.

En la figura 4.31 se muestra el patrón de Hartmann simulado con la córnea distorsionada. Los círculos azules pertenecen a un patrón de Hartmann de referencia y los círculos verdes al patrón estimado con la córnea deformada por el polinomio de Taylor.

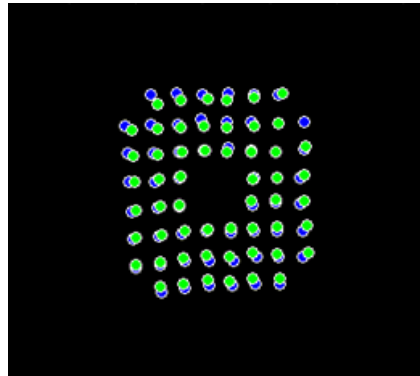


Figura 4.31 Patrón de Hartmann en la simulación

La relación de la superficie corneal simulada y la superficie estimada mediante el Hartmanngrama se muestran en la figura 4.32 a y b, respectivamente.

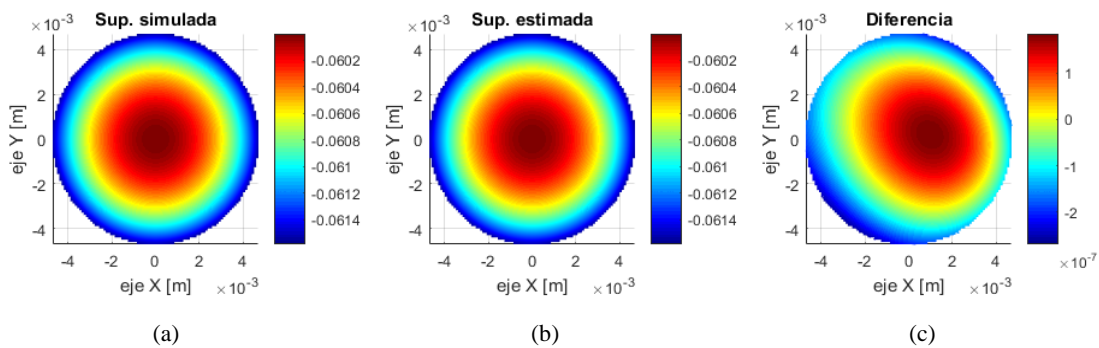


Figura 4.32 (a) Superficie simulada; (b) Superficie estimada; (c) La diferencia entre ellas

Cómo se aprecia en la figura 4.32 c, la disparidad entre las dos superficies está en el rango de la décima parte de una micra, siendo mayor en la parte central y paracentral de la córnea. Estas

desviaciones son ocasionadas principalmente por errores de truncamiento y redondeo al usar aproximaciones numéricas en los ajustes, en lugar de usar procedimientos matemáticos exactos. El error absoluto y el error relativo medio de la prueba evaluada en 50 córneas con los primeros diez coeficientes de Taylor reproducidos al azar, fue de 0.104×10^{-6} m y de $0.388 \times 10^{-3}\%$, respectivamente.

Dado que la pantalla de Hartmann está compuesta por 56 LED distribuidos como una matriz cuadrada de puntos equidistantes, al analizar córneas con potencias ópticas mayor o menores a la media de 42 D, los rayos pueden llegar a reflejar fuera del círculo concéntrico de la pantalla, y en consecuencia no ser detectados por la cámara de video. Por esta razón, los puntos más cercanos al centro de la medición tienen un nivel de confianza más alto. Conforme disminuye o incrementa la potencia de la córnea, las manchas del Hartmanngrama se alejan del centro de la cámara. La relación de potencias puede ser dividida conforme a las primeras tres regiones topográficas de la córnea: la zona central tienen un rango de 33.5 a 60.25 D; la zona paracentral de 39.75 a 53 D; y la zona periférica de 41.5 a 49.5 D.

La prueba práctica consistió en comparar cualitativamente el frente de onda y el mapa tangencial obtenidos con el topógrafo semiesférico y los estimados con el topógrafo comercial Atlas 9000. En las figuras 4.33 - 4.38, en los incisos a y c se muestran las imágenes obtenidas por el topógrafo comercial y en los incisos b y d los obtenidos por el prototipo semiesférico de nuestro desarrollo.

Para cada uno de los tres pacientes se analizaron los dos ojos, el ojo derecho etiquetado como OD (*oculus dexter*) y el ojo izquierdo como OS (*oculus sinister*). La escala de colores utilizada es la del Atlas 9000 que de forma estándar es la escala absoluta, propuesta por Klyce *et. al* [4], donde cada color representa un intervalo de potencias; por otra parte, la escala del topógrafo semiesférico fue la escala relativa, ya que es la más adecuada para observar pequeños cambios en la córnea, además de que tiene la ventaja de ofrecer un mayor detalle topográfico que la escala absoluta, porque los niveles de incremento son más pequeños y brindan una mayor resolución.

Paciente 1:

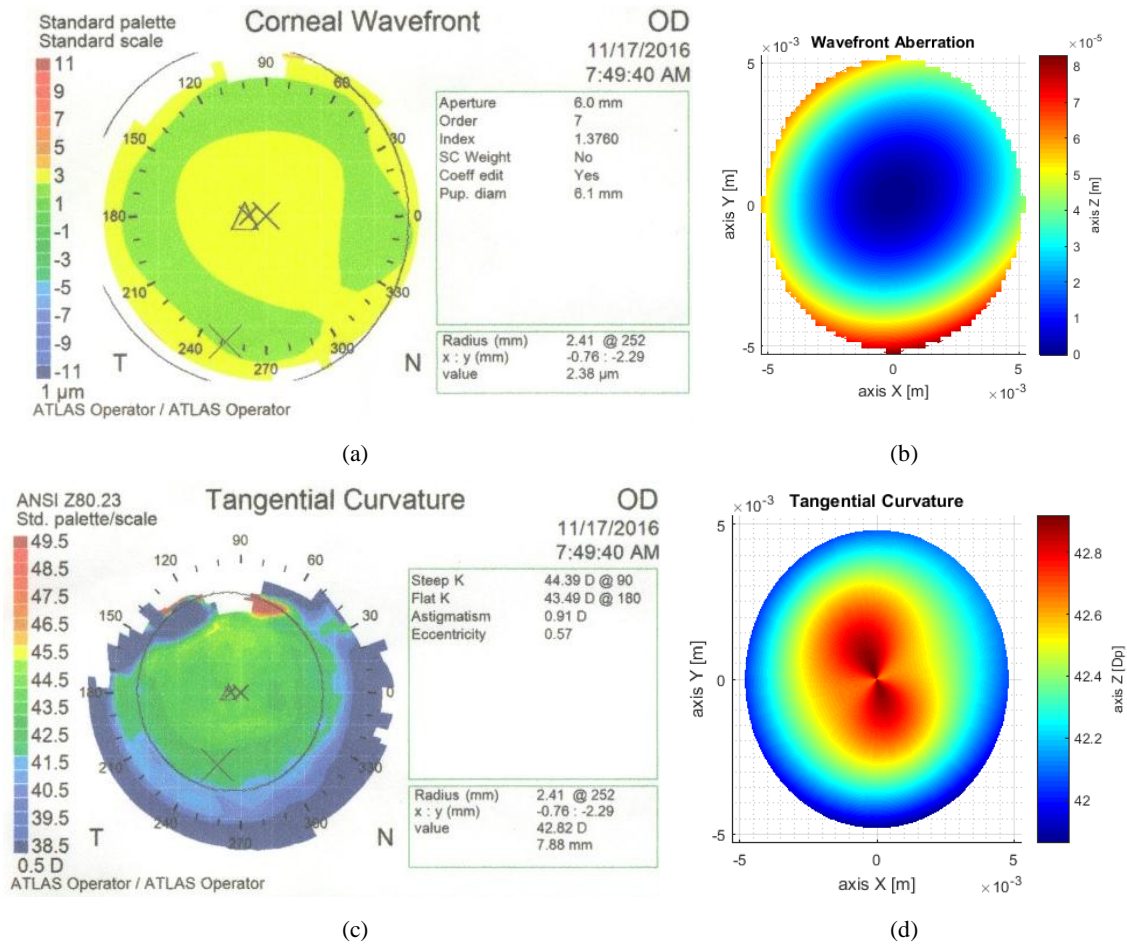
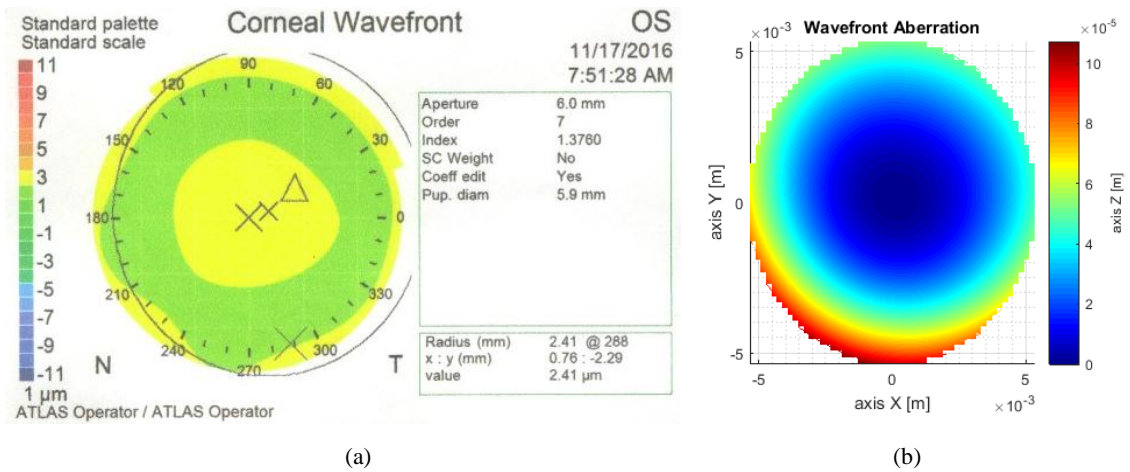
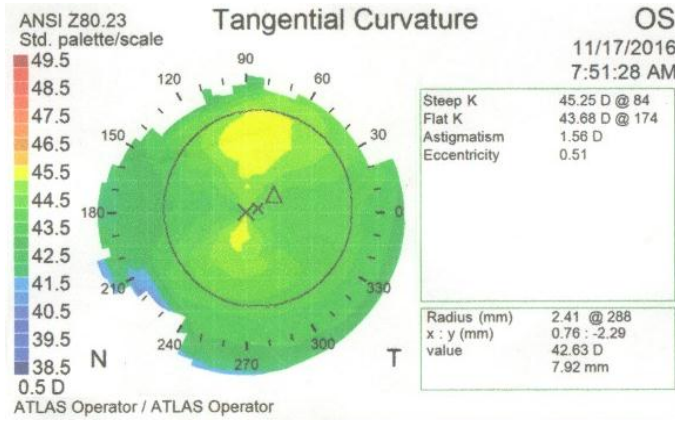
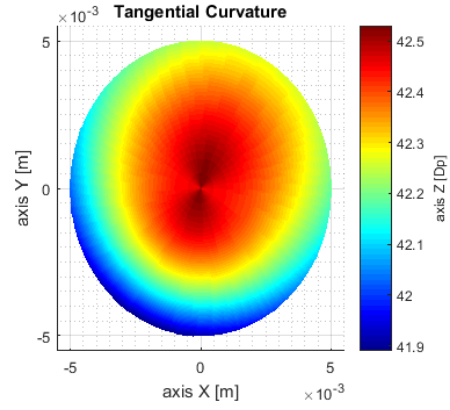


Figura 4.33 Ojo derecho del paciente 1: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico





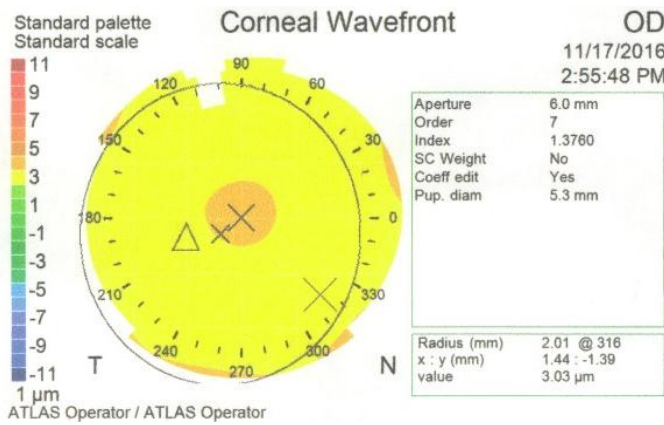
(c)



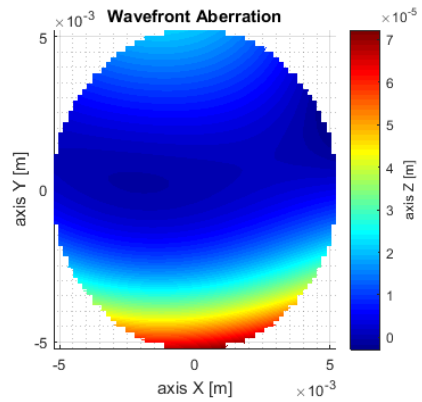
(d)

Figura 4.34 Ojo izquierdo del paciente 1: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico

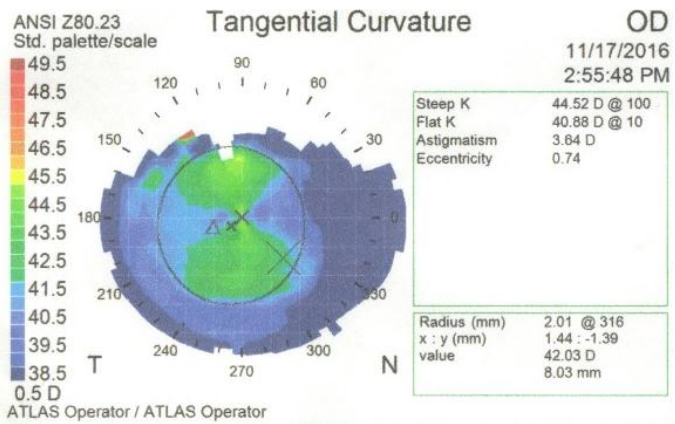
Paciente 2:



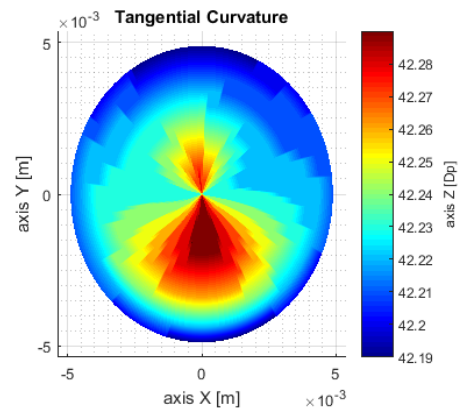
(a)



(b)

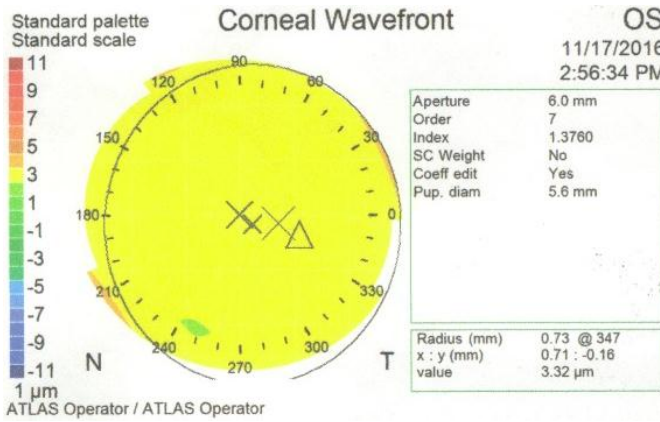


(c)

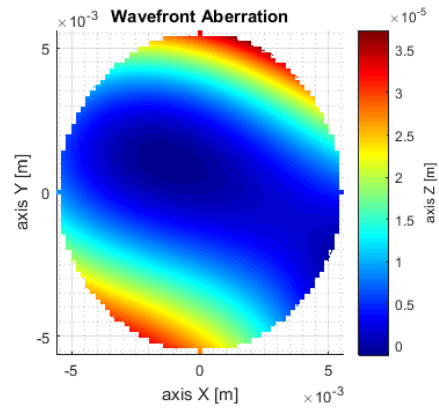


(d)

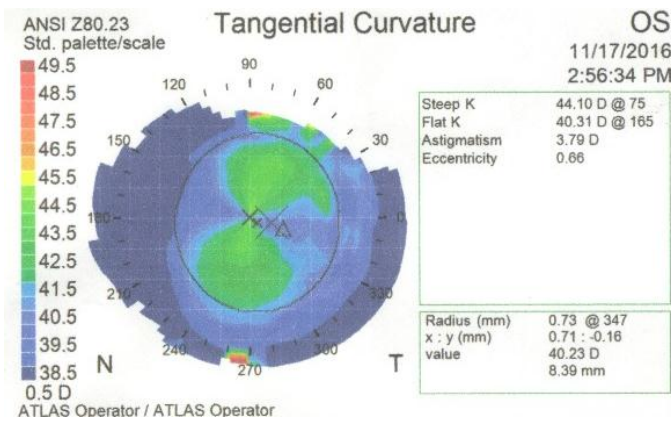
Figura 4.35 Ojo derecho del paciente 2: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico



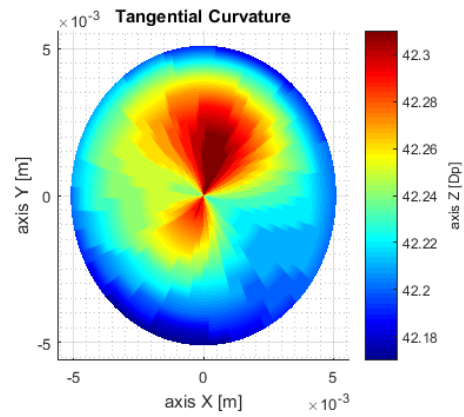
(a)



(b)



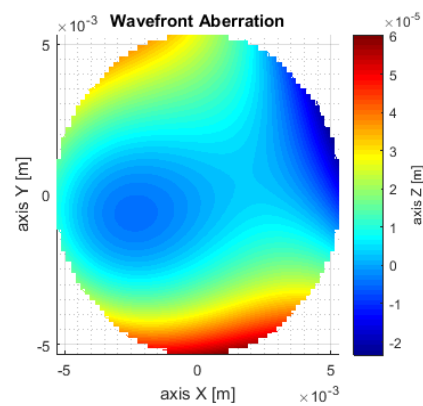
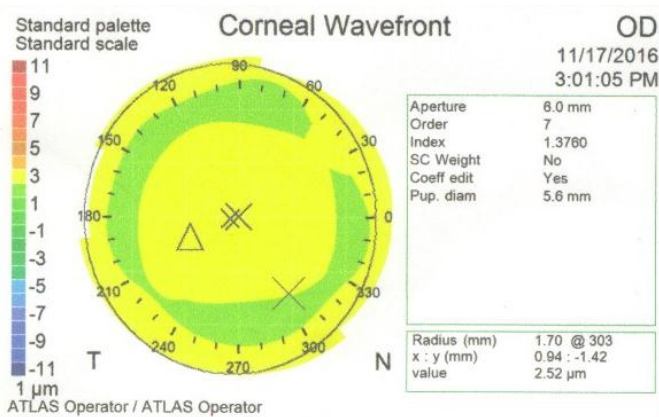
(c)



(d)

Figura 4.36 Ojo izquierdo del paciente 2: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico

Paciente 3:



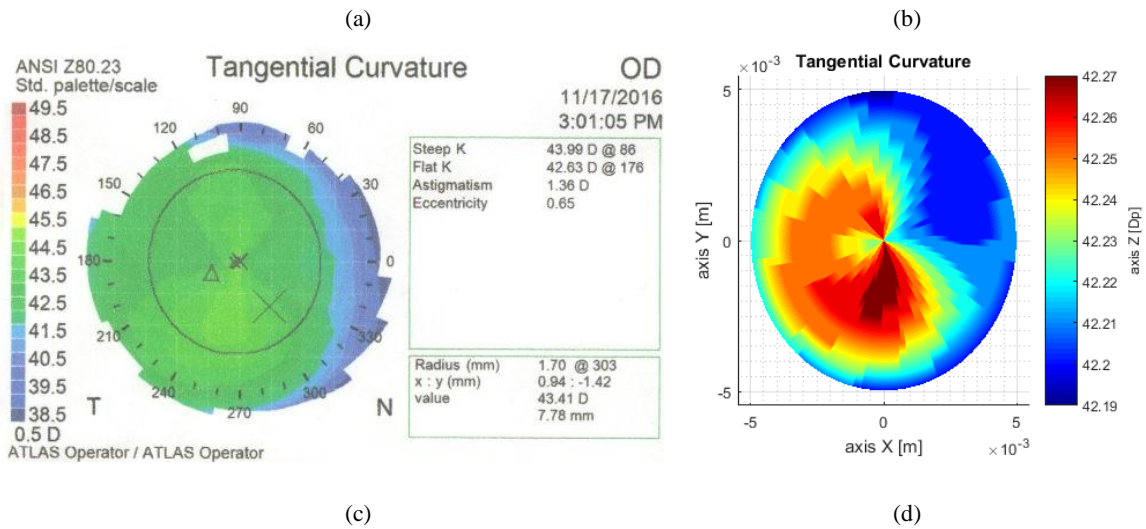


Figura 4.37 Ojo derecho del paciente 3: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico

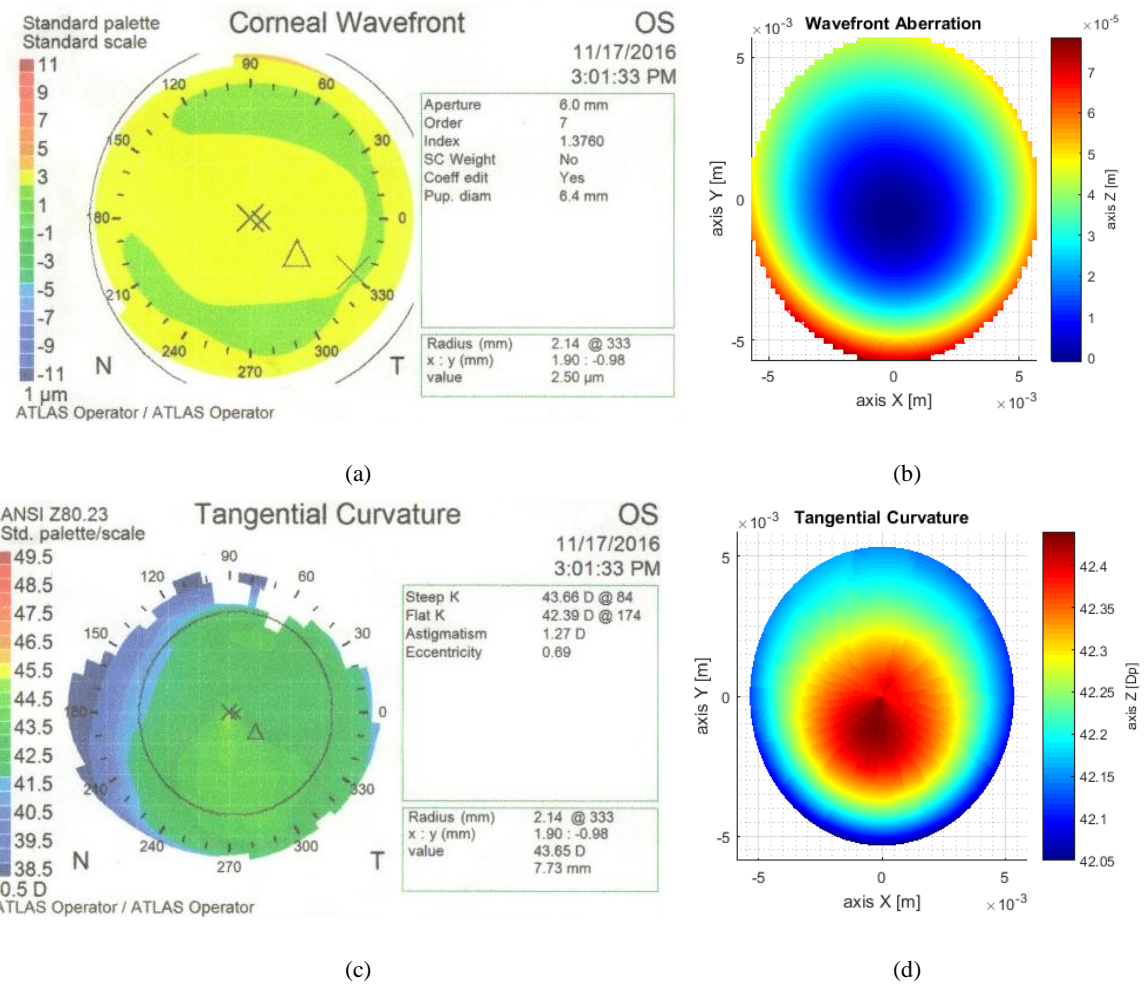


Figura 4.38 Ojo izquierdo del paciente 3: (a y c) frente de onda y curvatura tangencial del Atlas 9000; (b y d) frente de onda y curvatura tangencial del topógrafo semiesférico

Los resultados finales del topógrafo semiesférico son alentadores, sin embargo, el signo de los puntos en el frente de onda de la córnea fueron contrarios a los resultados brindados por el Atlas 9000, ya que los puntos más altos en la superficie obtenida por el topógrafo semiesférico equivalen a los puntos más bajos en el frente de onda del topógrafo comercial. Esto posiblemente es provocado por la dirección en que este último equipo muestra el frente de onda, ya que puede ser vista desde la perspectiva del operador o del paciente y por la diferencia del frente de onda utilizado por el equipo Atlas 9000 (frente de onda esférico) y por el topógrafo semiesférico (frente de onda plano). Por otra parte, la superficie tangencial obtenida con el topógrafo semiesférico, que casualmente deriva del frente de onda, muestra gran similitud con los mapas obtenidos por el topógrafo comercial Atlas, tanto en la morfología de la superficie como en la potencia de cada uno de los puntos.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El presente trabajo fue desarrollado con la intención de presentar al campo científico y al campo médico un nuevo prototipo optoelectrónico basado en la prueba de Hartmann, apropiado para medir la topografía de la superficie anterior de la córnea humana y su frente de onda.

En el campo técnico este tipo de instrumento se conoce como topógrafo corneal, su función es básicamente medir la curvatura de la córnea humana a fin de detectar posibles anomalías; es utilizado por especialistas en el campo oftalmológico, previo a la cirugía refractiva láser, a la adaptación de lentes de contacto, y al diagnóstico y seguimiento de lesiones o enfermedades corneales. Por las características físicas de nuestro equipo, decidimos llamarlo: “Topógrafo Corneal Semiesférico”.

5.1 Conclusiones

- A través de la distribución cuadrada y equidistante de iluminadores en la pantalla semiesférica del topógrafo, fue posible discriminar mediante simulación, córneas con

potencias de 33.5 a 68.25 D en la su zona central; 39.75 a 53 D en su zona paracentral; y 41.5 a 49.5 D en su zona periférica. Este rango puede aumentar si así también lo hace el número de LED en la pantalla. El topógrafo comercial Atlas 9000 registra un rango de precisión de 15 a 95 D, por lo que nuestro equipo se encuentra muy por debajo de estos indicadores; sin embargo, dado que una córnea humana parcialmente plana a causa de una cirugía refractiva tiene alrededor de 36 D y los pacientes con queratocono (con córneas abombadas) tienen alrededor de 67 D, los límites de nuestro topógrafo están dentro de la media y son aceptables para la práctica clínica.

- El topógrafo corneal semiesférico fue capaz de resolver, mediante simulación, la curvatura de la superficie anterior de la córnea con un error relativo de $0.388 \times 10^{-3}\%$ y de forma práctica mediante la comparación cualitativa del frente de onda y la curvatura tangencial del topógrafo tipo Plácido Atlas 9000, logrando gran similitud con los mapas obtenidos por el topógrafo comercial, tanto en la morfología de la superficie como en la potencia de cada uno de los puntos.
- El topógrafo semiesférico puede resolver de forma confiable la superficie corneal dentro de la región periférica de la córnea (11 mm de diámetro partiendo del centro pupilar), consiguiendo sobrepasar fácilmente la región central que es considerada la región óptica ocular más importante. Equipos como el Atlas 9000 pueden muestrear la córnea hasta la zona limbo.
- Al utilizar una pantalla de Hartmann con una matriz de LED multicromática, se facilitó la detección de las manchas que se reflejan sobre la córnea, por lo que los algoritmos del sistema de software fueron más simples y presentaron pocos errores durante la detección de las manchas. Por lo regular los falsos positivos se encuentran en la zona periférica de la córnea, debido a reflejos indeseados producidos por la película lagrimal y por la obstrucción de las pestañas; sin embargo, el software de control se diseñó para permitir seleccionar manualmente las manchas del patrón.
- Se diseñó y validó mediante simulaciones un sistema de software de control para operar la matriz de los LED en la pantalla de Hartmann y para medir la curvatura, el mapa de elevación, el frente de onda y los coeficientes de aberración de la superficie corneal.
- La geometría de la pantalla semiesférica de Hartmann normalizó el camino óptico de cada uno de los puntos de luz, por lo que las manchas reflejadas por la córnea siempre presentaron alto contraste en su definición. Además se optimizó el tamaño del equipo para

muestrear una mayor superficie de la córnea, por lo que se logró fabricar un equipo médico de 2 a 3 veces menor en tamaño que los equipos comerciales, convirtiéndolo en un equipo más fácil de utilizar, fabricar y transportar.

5.2 Trabajos futuros

- Realizar una comparación cuantitativa de los resultados del topógrafo semiesférico y de algunos topógrafos comerciales basados en los anillos de Plácido. En el caso del equipo Atlas 9000 es preciso buscar la manera de extraer la matriz de potencias para corresponderla con la obtenida por el topógrafo semiesférico, o bien mediante la comparación de puntos estratégicos de las imágenes.
- Una vez que la técnica para el análisis de proporción sea implementada, se deberá calcular el tamaño de la población, el margen de error y el nivel de confianza para llevar a cabo las mediciones con el equipo.
- Ratificar de forma práctica los resultados obtenidos con el topógrafo semiesférico mediante la simulación, a fin de comprobar la desviación teórica-práctica entre los errores absoluto y relativo de la prueba y el rango de precisión en dioptrías del equipo.
- Aumentar el número de puntos de iluminación en la pantalla de Hartmann para tener un rango de precisión en dioptrías más amplio y por lo tanto mayor resolución en la medición.
- Enriquecer el funcionamiento del sistema (de software) con más mapas corneales y código de colores.
- Implementar un algoritmo que junto con el topógrafo semiesférico pueda medir de aberración del frente de onda con base en los polinomios de Zernike.

Referencias

1. R. Hernández-Sampieri, C. Fernández-Collado, M.D. Baptista-Lucio, *Metodología de la investigación*, ed. por J.M. Chacón, 5.^a ed. (México, 2010) <ISBN 978-92-75-32913-9>.
2. D. Malacara-Hernández, *Óptica básica*, ed. por Ediciones Científicas Universitarias, 3.^a ed. (México, 2016) <ISBN 978-607-16-3215-9>.
3. M.C. Puell-Marín, *Óptica fisiológica, el sistema óptico del ojo y la visión binocular*, ed. por Universidad Complutense de Madrid, 1.^a ed. (España 2011) <ISBN 1-4135-6363-5>.
4. T. Shukair Harb, *Estudio de topografía corneal y estudio refractivo en niños de tres a quince años*, ed. T.Shukair Harb, 1.^a ed. (Madrid, 2011) <ISBN: 978-84-694-0086-9>.
5. L.N. Thibos, R.A. Applegate, S. Marcos, 'Aberrometry: the past, present, and future of optometry', *Optom. Vis. Sci.*, 80.1 (2003), 1–2.
6. Y. Mejía-Barbosa, D. Malacara-Hernández, 'A review of methods for measuring corneal topography', *Optom. Vis. Sci.*, 78.4 (2001), 240–253.
7. R. Gutmark, D. Guyton, 'Origins of the keratometer and its evolving role in ophthalmology', *Surv. Ophthalmol.*, 55.5 (2010), 481-197.
8. A. Kilic, C.J. Roberts, *Corneal topography: From theory to practice*, ed. por A. Kilic, C. J. Roberts, 1.^a ed. (USA, 2013) <ISBN 978-90-6299-230-0>.
9. J. Ramsden, J. Banks, 'The description of two new micrometers', *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 69 (1779), 419–31.
10. H. Helmholtz, 'Über die accommodation des auges'. *Alchiv. fur Ophthalmologie*, 1.2 (1855), 1–74.
11. L. Javal, A. Schiötz, 'Un ophthalmomètre pratique', *Annales d'oculistique*, 86 (1881), 5-21.
12. J. Durban-Fornieles, 'Queratometría, topografía corneal', *Facultad de Ciencias*, 1-17.
13. T. Young, 'On the mechanism of the eye'. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 91.1 (1801), 23–88.
14. J. Brody, S. Waller, M. Wagoner, 'Corneal topography: history, technique and clinical uses', *Int. Ophthalmol. Clin.*, 34(3) 1994, 197–207.
15. H. Goode, 'On a peculiar defect of vision', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8 (1847), 493-496.
16. A. Gullstrand, 'Photographic-ophthalmometric and clinical Investigations of corneal refraction', *Optometry & Vision Science*, 43.3 (1966), 143-197.
17. A. Plácido, 'Novo instrumento de exploração da cornea', *Periodico d'Oftalmológica Practica*, 5 (1880), 27-30.
18. M.W. Belin, S.S. Khachikianm, R. Ambrosio, *Tomografía corneal basada en la elevación*, ed. por Samuel Boyd, 2^a ed. (Panamá, 2012) <ISBN 978-9962-678-54-0>
19. Y. Mejía-Barbosa, D. Malacara-Hernández, 'Object surface for applying a modified Hartmann test to measure corneal topography', *Applied Optics*, 40.31 (2001), 5778–5786.
20. M. Rodríguez-Rodríguez, A. Jaramillo-Núñez, R. Díaz-Urbe, 'Dynamic point shifting with null screens using three LCDs as targets for corneal topography', 54.22 (2015), 6698–6710.
21. M. Campos-García, C. Cossio-Guerrero, V.I. Moreno-Oliva, *et al.*, 'Surface shape evaluation with a corneal topographer based on a conical null-screen with a novel radial point distribution', *Applied Optics*, 54.17 (2015), 5411–5419.
22. J. G.-Vargas, 'Comparación entre los anillos de plácido y la prueba de Hartmann modificada como método de medida de la superficie corneal', *Ciencia y tecnología para la salud visual y ocular*, 10 (2008), 73–80.
23. S. Klyce, 'Computer-assisted corneal topography. high-resolution graphic presentation and analysis of keratoscopy'. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 25.12 (1984), 1426-1435.
24. E. Home, 'The croonian lecture on muscular motion', *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 86 (1795), 1-26.

25. S.N. Rao, T. Raviv, P.A. Majmudar, *et al.*, 'Role of Orbscan 11 in screening keratoconus suspects before refractive corneal surgery', *Ophthalmology*, 109.9 (2002), 1642-1646.
26. J. Hartmann, 'Bermerkungen über den Bau und die Justirung', *Zeitschrift für Instrumentalkunde*, 51.20 (1900), 47-58.
27. Nijboer, 'Thesis Groningen University', (1942).
28. J.L. Rayces, 'Exact relation between wave aberration and ray aberration', *Optica Acta: International Journal of Optics*, 11.2 (1964), 85-88.
29. Y. Mejía-Barbosa, 'La prueba de Hartmann en ciencias de la visión', *Ciencia & Tecnología para la Salud Visual y Ocular*, 10.1 (2012), 149-65.
30. D. Malacara-Hernández, *Optical shop testing*, ed. por D. Malacara, 3.^a ed. (USA, 2007) <ISBN 978-0-471-48404-2>.
31. D. Malacara-Hernández, Z. Malacara-Hernández, 'Testing and centering of lenses by means test with four holes', *Optical Engineering*, 31.7 (1992), 1551-1555.
32. G. Trujillo-Schiaffino, D. Malacara-Doblado, D.P. Salas-Peimbert, *et al.*, 'Simple Hartmann test data interpretation for ophthalmic lenses', *Review of Scientific Instruments*, 77.4 (2006).
33. Q. Lin-ling, Y. Jing-chi, 'Research on Hartmann test for progressive addition lenses', *Optical Test and Measurement Technology and Equipment*, 7283 (2009), 728318-728318-728315.
34. Y. Mejía-Barbosa, 'Extrapolation, interpolation, and identification of spots in Hartmann patterns', *Applied Optics*, 53.26 (2014), 6073-6088.
35. M. Abitbol, E. Tederry, E. Meimoun, 'Methods and apparatus for measuring and mapping ophthalmic elements', US 09/018, 360, US5855074 A.
36. D. P. Salas-Peimbert, G. Trujillo-Schiaffino, D. Malacara-Hernández, *et al.*, 'Ophthalmic lenses measurement using Hartmann test', *5th Iberoamerican meeting on optics and 8th latinamerican meeting on optics, lasers, and their applications*, 5622 (2004), 102-106.
37. D. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, 'What is a Hartmann test?', *Applied Optics*, 54.9 (2015), 2296-2301.
38. Y. Mejía-Barbosa, 'El frente de onda y su representación con polinomios de Zernike', *Ciencia & tecnología para la salud visual y ocular*, 9.2 (2012), 145-66.
39. F.J. Gantes-Núñez, 'Análisis y reducción de datos en pruebas de Hartmann y Shack Hartmann', Centro de Investigaciones en Óptica, Maestría en Ciencias Ópticas, (2015).
40. M.Z. Dominguez, L. Wang, P. Su, *et al.*, 'Software configurable optical test system for refractive optics', *International Commission for Optics (ICO 22)*, 8011 (2011), 80116Q-80116Q-6.
41. M. Campos-García, R. Díaz-Urbe, 'Null-Screen testing of fast convex aspheric surfaces', *Applied Optics*, 39.16 (2000), 2670-2677.
42. M. Campos-García, R. Bólado-Gomez, R. Díaz-Urbe, 'Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen', *Applied Optics*, 47.6 (2008), 849-59.
43. M. Avendaño-Alejo, D. Gonzáles-Utrera, N. Qureshi, *et al.*, 'Null Ronchi- Hartmann test for a lens', *Optics Express*, 18.20 (2010), 21131-21137.
44. L.J. Maquire, D.E. Singer, S.D. Klyce, 'Graphic presentation of computer-analyzed keratoscope photographs', *Arch Ophthalmol*, 105.2 (1987), 223-230.
45. J.G. Vargas, 'Comparación entre los anillos de Plácido y la prueba de Hartmann modificada como método de medida de la superficie corneal', *Ciencia y Tecnología para la Salud Visual y Ocular*, 10.1 (2008), 73-80.
46. American National Standard Ophthalmics, 'Corneal Topography Systems', *Optical Laboratories Association, American National Standards Institute*, ANSI Z80.23 (1999)
47. D. Anderson, 'Understanding Corneal Topography', *Paraoptometric Resource Center*, 1(2000), 1-12.

48. W.R. Hamilton, 'Second Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays', *Transactions of the Royal Irish Academy*, 16.2 (1831), 93-125.
49. D.C. Giancoli, *Física principios con aplicación*, ed. por B. Grasso-Mack, 4.^a ed. (Méx., 1997) <ISBN 0-13-102153-2>.
50. A. Muñoz, L. Porras, S. Aquino, *et al.*, 'Implementación de la prueba de Hartmann para el estudio de texturas de superficies metálicas', *Revista Latinoamérica de Metalurgia y Materiales*, 31.1 (2011), 85-90.
51. A. Morales, D. Malacara-Hernández, 'Geometrical parameters in the Hartmann test of aspherical mirrors', *Applied Optics*, 22.24 (1983), 3957-3959.
52. G.P. Martinsanz, J.M. de la Cruz-García, *Visión por computadora*, ed. por Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V, 2.^a ed. (Méx., 2008) <ISBN 987-970-15-1356-9>.
53. P. Soille, *Morphological Image Analysis Principles and Applications*, ed. Springer, 2.^a ed. (USA, 2004) <ISBN 978-3-662-05088-0>.
54. R.C. Gonzalez, R.E. Woods, S.L. Eddins, *Digital Image Processing Using Matlab*, ed. Por Mc Graw Hill Education, 2.^a ed. (USA, 2010) <ISBN 978-0070702622>