



CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN OPTICA, A.C.

**“MEDICIÓN DE TEMPERATURA EN OBJETOS DE
FASE MEDIANTE UN INTERFERÓMETRO DE
MACH-ZEHNDER Y UN INTEFERÓMETRO DE
WOLLASTON”**



Tesis que para obtener el grado de Maestro en Optomecatrónica

Presenta: Lic. Joao Francisco Trujillo Martinez

Director de Tesis: Dr. Bernardino Barrientos García

León · Guanajuato · México

Enero 2022

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Justificación	1
1.2. Antecedentes	1
1.3. Estado del arte	2
1.4. Resumen	3
1.5. Objetivo	3
2. TEORIA	5
2.1. EL CAMPO ELÉCTRICO	5
2.1.1. Principio de superposición	5
2.2. COHERENCIA	6
2.2.1. Coherencia	6
2.2.2. Visibilidad de franjas	7
2.2.3. Coherencia temporal y coherencia Espacial	9
2.3. POLARIZACIÓN	12
2.3.1. Polarización lineal	12
2.4. BIRREFRINGENCIA	15
2.4.1. Teoría básica	15
2.5. INTERFERÓMETRO DE MACH-ZEHNDER	19
2.5.1. Desarrollo	19
2.5.2. Arreglo	19
2.5.3. Descripción del interferómetro Mach-Zehnder	21
2.5.4. Funcionamiento del divisor de haz (BS)	22
2.5.5. Método de Fourier	23
2.5.6. Fase envuelta y fase desenvuelta	26
2.6. INTERFERÓMETRO DE WOLLASTON	27
2.6.1. Prisma de Wollaston	27
2.6.2. Ángulo de desviación entre haces emergentes	28
2.6.3. Interferómetro de Wollaston	31
2.7. BIBLIOGRAFÍA	32
3. SIMULACIONES NUMÉRICAS	34
3.1. Simulación de una flama con decaimiento exponencial	34
3.1.1. Teoría básica	34

3.1.2. Generación de los interferogramas	38
3.1.2.1. Interferómetro Mach-Zehnder	38
3.1.2.2. Errores	42
3.1.2.3. Interferogramas del Interferómetro de Wollaston	43
4. RESULTADOS EXPERIMENTALES	53
4.1. Interferómetro Mach-Zehnder	53
4.1.1. Arreglo experimental	53
4.1.2. Errores entre valores ajustados y datos experimentales del interferómetro Mach-Zehnder	58
4.1.3. Segunda medición	58
4.1.4. Tercera medición (con turbulencia).	61
4.2. Interferómetro de Wollaston	64
4.2.1. Arreglo experimental	64
4.2.2. Errores entre datos ajustados a una función Gaussiana y datos experimentales	69
5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	70
5.1. A1 Constantes utilizadas	72
5.2. A2 Gráficas con ruido aleatorio	73
5.2.1. Interferómetro Mach-Zehnder	73
5.2.2. Interferómetro Wollaston	78

Índice de figuras

2.2.1. Comportamiento de la fase de una fuente cuasi-monocromática	10
2.2.2. Diferencia de fase	11
2.2.3. Coherencia de una fuente cuasi-monocromática.	12
2.3.1. Campo eléctrico y magnético en una onda plana polarizada linealmente.	13
2.3.2. El eje de polarización del polarizador, definirá si el vector de campo eléctrico de las ondas se transmitirá con o sin pérdidas.	13
2.3.3. Luz polarizada incidiendo en la (a) dirección del eje del polarizador. (b) A 90° con el eje del polarizador (se anula el campo) [31].	14
2.3.4. Relación entre el campo eléctrico transmitido y un polarizador lineal.	14
2.4.1. Modelo mecánico de una nube esférica negativa “fijando” una carga positiva por pares de resortes con diferentes constantes k [1].	15
2.4.2. Superficie del vector de onda.	18
2.5.1. Interferómetro Mach-Zehnder.	20
2.5.2. Medio que produce un desplazamiento δ en la fase del haz (recordar que α es complejo).	22
2.5.3. Un haz que incide por arriba o por abajo de un BS refleja y transmite parte del haz original.	22
2.5.4. Izquierda: a) Espectro de Fourier del patrón de franjas. b) Selección de un solo espectro.	25
2.5.5. a) Distribución de una fase con discontinuidades debidas al cálculo del valor principal; b) Distribución de fases de compensación para corregir las discontinuidades en a); c) Perfil continuo de la distribución de la fase.	26
2.6.1. Prisma de Wollaston.	27
2.6.2. Ángulo entre dos haces	28
2.6.3. Haz polarizado paralelamente al plano de incidencia atravesando un prisma de Wollaston para el que se cumple que $n_e > n_o$	29
2.6.4. Esquema del segundo haz.	30
2.6.5. Esquema básico del Interferómetro de Wollaston	31
3.1.1. Simulación de (a) Distribución proyectada del índice de refracción. (b) Un perfil gaussiano de (a).	35
3.1.2. Cortes horizontales de haces de luz atravesando el objeto de fase (plano x-z), cada uno con su propio patrón de intensidad Gaussiano.	36
3.1.3. (a) Fase $\Delta\phi$ generada. (b) Vista de un perfil Gaussiano.	37
3.1.4. (a) La temperatura generada ronda los 1000°C en la base de la flama. (b) Vista de un perfil Gaussiano.	37
3.1.5. (a) Distribución de la densidad. (b) Un perfil en la base, muestra una densidad mínima de 0.2277kg/m^3	38
3.1.6. Patrones de intensidad generados (a) antes y (b) después de atravesar un objeto de fase (una flama).	39
3.1.7. (a) Lóbulos separados en la transformada de Fourier de los interferogramas (a) I_u y (b) I_d	39
3.1.8. (a) Fase obtenida mediante el método de Fourier. (b) Comparación en radianes (eje vertical) con la simulada.	40

3.1.9. (a) Cambio de índice de refracción obtenido por método de Fourier. (b) Comparación con el ajustado a una función Gaussiana.	40
3.1.10.(a) Temperatura obtenida por el MF. (b) Comparación de un perfil con el ajustado a una función Gaussiana.	41
3.1.11.(a) Densidad obtenida por el MF. (b) Comparación con un perfil de la simulación	41
3.1.12.Comparación de los radios del modelo simulado y los obtenidos por la función de ajuste en la fase $\Delta\phi$ obtenida por el MF.	42
3.1.13.Eschema del comportamiento de dos rayos que interfieren a la salida del Prisma de Wollaston.	44
3.1.14.Prisma de Wollaston desplazado horizontalmente	46
3.1.15.Intensidades en el interferómetro de Wollaston (a) de referencia y (b) deformada.	48
3.1.16.(a) Vista completa de la fase generada. (b) Perfil cerca de la base.	48
3.1.17.(a) Fase $\Delta\phi$ desvuelta obtenida por el MF. (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana.	49
3.1.18.(a) Cambio de índice de refracción Δn_{rec} obtenido por la integración numérica de $\Delta\phi_w$ (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana.	50
3.1.19.(a)Distribución de temperatura obtenido a partir del Método de Fourier. (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana.	50
3.1.20.(a) Distribución de densidad obtenido a partir del Método de Fourier (b) Comparación con un perfil del modelo simulado (derecha).	51
3.1.21.Comparación del radio (en mts) de la simulación (verde) y el recuperado (negro) en el MF.	51
4.1.1. Arriba:Vista completa del interferómetro Mach-Zender. Abajo: Esquema del interferómetro (no está a escala).	54
4.1.2. a) Interferograma de referencia. b) Deformado. c) Resta de ambos.	55
4.1.3. Arriba: Transformadas de Fourier de los interferogramas. Abajo: Filtrado aplicado.	56
4.1.4. Fase obtenida de las imágenes y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	56
4.1.5. Cambio en índice de refracción y comparación de un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	57
4.1.6. Distribución completa de la temperatura de la flama y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	57
4.1.7. Distribución de la densidad y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	58
4.1.8. Arriba: Transformadas de Fourier de los interferogramas de referencia y deformado. Abajo: Fase obtenida (izquierda) y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana. (derecha).	59
4.1.9. Distribuciones de: a) Densidad y comparación con la simulación. b) Temperatura y comparación con la simulación. c) Densidad y su comparación con los valores ajustados a una función gaussiana.	60
4.1.10.Arriba: Interferogramas de referencia y deformado. Abajo: Resta de ambas imágenes.	61
4.1.11.Arriba: Transformadas de Fourier de imagen de referencia y deformada. Abajo: Fase obtenida y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	62
4.1.12.Parámetros físicos recuperados del flujo turbulento y su comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana. a) Índice de refracción. b) Temperatura. c) Densidad.	63
4.2.1.Arriba:Arreglo experimental (interferómetro de Wollaston). Abajo:Esquema del arreglo (solo ilustrativo).	65
4.2.2. Superior Izquierda: Interferograma de referencia. Superior derecha: Interferograma deformado. Abajo centro: Resta de interferogramas.	66
4.2.3. Transformadas de Fourier de los interferogramas. Izquierda: De referencia. Derecha: Deformado	66
4.2.4. Fase desvuelta (Izquierda) y comparación de un perfil con otro perfil de los valores ajustados a una función gaussiana (derecha).	67
4.2.5. Cambio del índice de refracción y comparación de un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.	68

4.2.6. Campo de temperatura obtenido en la simulación y experimentalmente (arriba). Comparación entre perfiles real el ajustado a una función gaussiana (abajo).	68
4.2.7. Distribución de la densidad del objeto de fase y comparación entre perfiles real y el ajustado a una función gaussiana.	69
5.2.1. Ruido de $\frac{20}{100} 2\pi rad$	73
5.2.2. Ruido de $\frac{40}{100} 2\pi rad$	74
5.2.3. Ruido de $\frac{60}{100} 2\pi rad$	75
5.2.4. Ruido de $\frac{80}{100} 2\pi rad$	76
5.2.5. Ruido de $\frac{90}{100} 2\pi rad$	77
5.2.6. Ruido de $\frac{20}{100} 2\pi rad$	78
5.2.7. Ruido de $\frac{40}{100} 2\pi rad$	79
5.2.8. Ruido de $\frac{60}{100} 2\pi rad$	80
5.2.9. Ruido de $\frac{80}{100} 2\pi rad$	81

Índice de Tablas

3.1.	Errores al introducir un error aleatorio en el interferómetro de Mach-Zehnder.	43
3.2.	Errores en términos porcentuales al introducir un ruido aleatorio.	52
4.1.	Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).	58
4.2.	Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).	60
4.3.	Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).	63
4.4.	Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales con el interferómetro de Wollaston.	69
5.1.	Constantes utilizadas.	72

AGRADECIMIENTOS

A las personas que toda o buena parte de mi vida han estado conmigo en las buenas y en las malas, en especial a mi madre, quien sin importar el paso del tiempo, me ha brindado su incondicional apoyo. A mi asesor, Dr. Bernardino Barrientos García, quien con paciencia, experticia y disposición, me brindó su apoyo y conocimiento durante el desarrollo de la presente tesis. A mis hermanos, quienes a su modo personal, siempre me han apoyado y para quienes siempre estaré. A mis sinodales, Dr. Gilberto Gómez Rosas y Dr. Jorge Luis Flores Núñez. A Diana Navarro, quien de corazón me acompañó de forma incondicional en este importante y proceso. A mi padre, quien de alguna manera, siempre lo tengo presente. A mis amigos, por el aporte intelectual o en especie y que de manera voluntaria o involuntaria han hecho en mi persona. Al Centro de Investigaciones en Óptica A.C. (CIO), por brindarme profesores de primera, un espacio confortable, personal capacitado y la oportunidad de estudiar y mejorar en todo sentido. A quienes no menciono, pero que saben que los llevo en mi mente y son parte de mí. Mi más amplio reconocimiento al CONACYT, por cumplir a cabalidad su mandato, por generar y auspiciar condiciones necesarias para el desarrollo científico y tecnológico de México.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Justificación

Hoy en día, es innegable que la metrología [1], juega un papel más determinante en la industria, la implementación de instrumentos u herramientas cada vez más precisas puede determinar en buena parte el margen de pérdidas o ganancias económicas desde un sector completo hasta una pequeña industria. Es en este sentido que en la medición de la temperatura entre otros parámetros físicos con una técnica eficiente, precisa y sobre todo no invasiva, resultará una especial ventaja en utilizar objetos de fase axisimétricos, ya que un objeto con esta característica permitirá reconstruir con un nuevo método, un objeto tridimensional y sus parámetros físicos a partir de una sola imagen bidimensional tomada por una única cámara.

1.2. Antecedentes

Las complejas interacciones químicas [2][3] que ocurren durante el proceso de combustión, son el resultado de una reacción entre un elemento combustible que se combina con otro elemento comburente. El proceso anterior es un proceso exotérmico, lo cual significa que desprende calor y luz (además de óxido). Por lo anterior, la temperatura es una consecuencia del proceso que resulta clave medir en muchos contextos, especialmente en la industria, para la cual resulta crucial medir cada vez con mayor precisión este parámetro físico, lo que sin lugar a dudas permitirá una mejora en los dispositivos, disminución de costos energéticos, optimización de los recursos, disminución de emisiones de gases de efecto invernadero, etc.

1.3. Estado del arte

El primer termómetro que se realizó [4], fue implementado por GALILEO GALILEI (1564-1642). Era un tubo de vidrio con un bulbo lleno de vino llamado termoscopio (indicaba la temperatura a través del cambio de volumen). Posteriormente su colega SANCTORIUS SANCTORIUS añadió una escala de temperatura.

Hoy en día, la física electrónica [5] es la “punta de lanza” en cuanto a la medición de la temperatura. Existen diversos y diferentes dispositivos para medir la temperatura, algunos de ellos:

1.- *Instrumentos de medición de temperatura superficial*: Son por infrarrojos y adecuados para hacer mediciones *in situ* para aplicaciones industriales o del sector de la alimentación.

2.- *Cámaras termográficas*: Se basan en la radiación de cuerpo negro. Transforman el flujo radiante emitido por el objeto bajo prueba en una imagen termográfica.

3.- *Termómetros de inmersión*: Para medir temperaturas de sustancias líquidas y viscoplásticas.

4.- *Termopares*: Son sensores compuestos de dos metales diferentes unidos en un extremo. Al calentar o enfriar esta unión, se produce una pequeña *diferencia de potencial* que es proporcional a la temperatura. Algunos termopares están compuestos de un conductor positivo de níquel-cromo y uno negativo de níquel-aluminio. Existen también algunos termopares calibrados para altas temperaturas ($\sim 2300^{\circ}\text{C}$), estos hechos de aleaciones de metales preciosos (platino/rodio y tungsteno/renio).

5.- *Holografía digital*: Está técnica permite la medición de cambios pequeños de temperatura, cambios que para algunos instrumentos comunes sería imperceptible. Consiste por ejemplo, en la generación del holograma [6][7] de un objeto de fase (transparente) a una temperatura inicial, y posteriormente (quizás unos segundos) un nuevo holograma. La diferencia de fase entre ambos hologramas, nos daría el cambio de temperatura entre el estado inicial y final. El anterior proceso, podría replicarse durante un intervalo de tiempo y obtener el cambio de temperatura en cada instante.

6.- *Deflexión de franjas (Schlieren)*: Es una técnica que permite obtener la forma de un objeto, comparándolo con un fondo más claro que él [8][9][10], mediante la medición de la desviación que experimentan los rayos de luz al atravesar un medio transparente. Es una técnica que permite calcular diversas cantidades físicas, entre ellas la temperatura, gradientes de densidad o índice de refracción.

Los anteriores instrumentos si bien son instrumentos bastante precisos, tienen dos principales desventajas (según la aplicación); Solo proporcionan temperaturas en un solo punto o solo funcionan para objetos opacos. Por otro lado, algunas de las ventajas que pueden ofrecer técnicas

interferométricas como los interferómetros de Mach-Zehnder y de Wollaston, es que no son invasivos (por lo que no son fuente de perturbación), ofrecen una visión de campo completo y pueden ser significativamente menos costosos que muchos de sus contrapartes electrónicos.

1.4. Resumen

Se implementarán de manera independiente, las técnicas de interferometría [11] de Mach-Zehnder y de interferometría de Wollaston. Lo anterior para obtener información importante del comportamiento termodinámico de un objeto de fase axisimétrico. Debido a la naturaleza interferométrica de ambos métodos, serán necesarios dos haces que interfieran. Por lo anterior, ambas técnicas se mostrarán sensibles al ruido externo, sin embargo, al requerir la interferometría de Wollaston una sola trayectoria para los dos haces que interfieren, se espera que sea esta técnica, una técnica más robusta que la técnica interferométrica de Mach-Zehnder, la cual la hará más propicia para su implementación en un entorno industrial.

1.5. Objetivo

El presente trabajo tiene como objetivo obtener con un interferómetro de Wollaston y uno de Mach-Zehnder, la medición algunos parámetros físicos como la temperatura y densidad de un objeto de fase. Para lo anterior, primeramente se implementarán los correspondientes arreglos experimentales para analizar objetos de fase de alrededor de 10 cm. Se realizarán simulaciones numéricas del objeto de fase (una flama axisimétrica) a las que se le aplicará el método de Fourier para obtener la fase entre las imágenes obtenidas. Por último, se realizan comparaciones entre los modelos simulados de ambos métodos con las mediciones reales.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Yoshizawa, Handbook of optical metrology: principles and applications, CRC Press (2009).
- [2] C.K. Law, Combustion physics, Cambridge, Cap. 6 (2006).
- [3] J. Buckmaster, and T., Takeno, Modeling in combustion science, Germany, Springer (1994).
- [4] D. Sherry, "Thermoscopes, termometers, and the foundations of measurement", Studies in History and Philosophy of Science 42 509–524 (2011).
- [5] G. Cuniberti, K. Richter, Introducing molecular electronics, Berlin, Springer, Lecture notes in physics 680 (2005).

- [6] S. Grilli, P. Ferraro, S. De Nicola, A. Finizio, G. Pierattini, and R. Meucci, "Whole optical wavefields reconstruction by Digital Holography", 9, 6 OPT Express 294-302 (2001).
- [7] B. Somavilla, "Estudio para la aplicación de la holografía digital a la caracterización de tejidos biológicos", Santander, Tesis de Licenciatura en Tecnologías de la Comunicación, Octubre (2017).
- [8] G. Toker, Holographic interferometry, Florida, CRC Press (2012).
- [9] H. Richard, M. Rael, "Principle and applications of the Background Oriented Schlieren (BOS) method", Measurement Science and Technology 12 1576- 1585 (2001).
- [10] G. Indebetouw, "Profile Measurement Using Projection of Running Fringes", Appl. Opt., 17(18), 2930-2933 (1978).
- [11] P. Hariharan, Basics of interferometry, USA, Academic Press (2007).

Capítulo 2

TEORIA

2.1. EL CAMPO ELÉCTRICO

2.1.1. Principio de superposición

Es en este concepto en que básicamente se basa la teoría de la interferencia óptica. La superposición lineal de campos electromagnéticos, dice [1][2] que en un punto del espacio donde varias fuentes convergen, la suma total de campo eléctrico \mathbf{E} será la suma vectorial

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \quad (2.1.1)$$

que es una consecuencia del hecho de que las *ecuaciones de Maxwell* [3] (en el vacío) son ecuaciones diferenciales lineales. Si hay materia de por medio, este principio se cumple solo en buena medida y para altas intensidades se producen efectos no lineales analizados en el campo de la óptica no lineal [4].

Analicemos el caso de dos ondas planas \vec{E}_1 y \vec{E}_2 dependientes de la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ y del tiempo t , cada una respectivamente con amplitudes iniciales ε_1 y ε_2 , vectores de onda $\vec{\kappa}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \hat{u}$ y $\vec{\kappa}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \hat{u}$ (donde \hat{u} denota la dirección de propagación), linealmente polarizadas y ambas con la misma frecuencia de oscilación $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (de periodo T) tales que

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{\varepsilon}_1 e^{i(\vec{\kappa}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} \\ \vec{E}_2 &= \vec{\varepsilon}_2 e^{i(\vec{\kappa}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Si se tiene que la diferencia de fases $\phi_1 - \phi_2 = cte$, se tienen fuentes *mutuamente coherentes*. Como $I \propto |\vec{E}|^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\ &= |\vec{\varepsilon}_1|^2 + |\vec{\varepsilon}_2|^2 + 2\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \cos\theta \\ &= I_1 + I_2 + 2\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \cos\theta \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

donde

$$\theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2 \quad (2.1.4)$$

El término $2\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \cos\theta$ o termino de interferencia según el valor de θ , nos indicará como será el valor de I con respecto a $I_1 + I_2$ (mayor o menor). Como $\theta = \theta(\vec{r})$, ocurrirán variaciones espaciales periódicas de intensidad llamadas *franjitas de interferencia* [2].

Si las fuentes son mutuamente incoherentes, el término $\phi_1 - \phi_2$ cambia aleatoriamente en el tiempo. Si $\cos\theta = 0$, no hay interferencia. Tampoco habrá interferencia en el caso de que tengan polarizaciones mutuamente ortogonales, ya que $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$.

Como se verá posteriormente en el desarrollo de la presente tesis, el término $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, será de suma importancia al ser este término el que contiene la información necesaria para el cálculo y simulación de diversos parámetros físicos.

2.2. COHERENCIA

2.2.1. Coherencia

Una de las principales aplicaciones [5][6] de la interferometría, es la de poder medir parámetros físicos haciendo uso del fenómeno de la *interferencia* que bien puede darse entre dos o más ondas electromagnéticas, de las cuales al menos una de ellas, contiene información necesaria del parámetro físico que se desea conocer.

Hoy en día, resulta casi imposible determinar el número de configuraciones de instrumentos mediante los cuales podemos sacar provecho del fenómeno de la interferencia. Lo que sí es posible, es consultar [7][8] algunas de las configuraciones básicas de interferómetros de las cuales se derivan prácticamente todos los demás.

La *coherencia* es la estabilidad de la fase de una onda en el tiempo y en el espacio, dicho de otra manera y considerando la luz una *onda electromagnética*, hablar de *luz coherente* implica estar

formada por *ondas luminosas* con fase coherente que por consecuencia conservan una relación de fase constante. Es decir, si conocemos el valor del *campo eléctrico* en cierto instante en un punto, será posible predecir su valor en un momento posterior. La *fente ideal* de luz coherente sería aquella que emitiese *luz monocromática*, en contraposición a esa fuente ideal tenemos una fuente de *luz blanca*, es decir, aquella que tiene presente todas las frecuencias posibles y que en consecuencia hacen impredecible la evolución en el tiempo de la onda en un punto dado.

En términos de la teoría ondulatoria y la naturaleza electromagnética de la luz, es posible estudiar los fenómenos de la interferencia por medio de las ecuaciones de Maxwell. Al cumplir estas ondas con el *principio de superposición*, la resultante \vec{E} en un punto en el espacio donde dos o más ondas de luz se superponen, es igual a la suma vectorial de las perturbaciones individuales que lo conforman. De forma breve: *la interferencia óptica se puede decir que es una interacción de dos o más ondas de luz que producen una irradiancia resultante, la cual se desvía de la suma de las irradiancias componentes.*

Desde el punto de vista matemático, el concepto de coherencia está estrechamente relacionado con el *análisis de Fourier* [9][10], ya que una *coherencia perfecta*, corresponde a una *función delta* en el espacio de la frecuencia; y una *no coherencia* a un espectro constante de frecuencias. Debido a que ninguno de los dos límites de la coherencia son físicamente alcanzables, todos los experimentos o situaciones que intervienen en el *mundo real*, son producidos en algún punto entre estos dos extremos ideales. Resultará pertinente mencionar, que a bajas frecuencias como las *radio frecuencias* o *microondas*, ondas de alta coherencia pueden ser generadas por osciladores electrónicos conduciendo corrientes en antenas. Para producir altas frecuencias como en el infrarrojo o ultravioleta, pueden ser utilizados átomos individuales o acelerar partículas cargadas. Por último, es posible generar ondas con alta coherencia, forzando átomos a emitir simultáneamente dentro de la cavidad de un láser.

2.2.2. Visibilidad de franjas

La realidad es que si bien es posible alcanzar un alto grado de coherencia entre dos campos, las fuentes no son completamente monocromáticas, tampoco con diferencias de fase constante. Por lo anterior, el flujo de luz en un punto cambia rápidamente, por lo que tiene mayor sentido definir la irradiancia como una cantidad promedio en el tiempo. Para dos campos eléctricos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , la irradiancia o intensidad I se puede expresar como [11]

$$I = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \left\langle \left| \vec{E}_1 \right|^2 + \left| \vec{E}_2 \right|^2 + 2\text{Re}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^*) \right\rangle \quad (2.2.1)$$

los paréntesis $\langle \rangle$ denotan un tiempo promedio de tipo

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.2.2)$$

donde $\langle f \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle$ serían funciones promediadas en un tiempo T . Si reescribimos la Ecuación 2.2.1 de la forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\text{Re}(E_1 E_2^*) \quad (2.2.3)$$

Para un gran número de experimentos de interferencia, ambos campos provienen de la misma fuente, por lo que difieren debido a la diferencia de su camino óptico. Así que si t es el tiempo que dura una señal en recorrer una trayectoria 1, y $t + \tau$ el tiempo que le lleva a otra señal recorrer una trayectoria 2, podemos reescribir el término de interferencia de la Ecuación 2.2.3 en la forma

$$2\text{Re} \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle = 2\text{Re} \Gamma_{12}(\tau) \quad (2.2.4)$$

término denominado *función de correlación* o *función de coherencia mutua* entre dos campos.

Una función normalizada, denominada *grado de coherencia parcial* que en terminos generales resulta más conveniente [11], es aquella para la cual

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.2.5)$$

donde $\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t) E_2^*(t - \tau) \rangle$ es llamada la *función de coherencia mutua* o *función de correlación* de los campos E_1 y E_2 y donde además por definición [11] $\sqrt{\Gamma_{11}(0)} = I_1$ y $\sqrt{\Gamma_{22}(0)} = I_2$. La irradiación puede ser expresada ahora como

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \text{Re} \gamma_{12}(\tau) \quad (2.2.6)$$

para la cual tendremos que

$$\begin{aligned} |\gamma_{12}(\tau)| = 1 & \quad (\text{completamente coherente}) \\ 0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1 & \quad (\text{parcialmente coherente}) \\ |\gamma_{12}(\tau)| = 0 & \quad (\text{completamente incoherente}) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

La intensidad de un patrón de franjas, varía entre dos posibles valores I_{max} e I_{min} , que de acuerdo a la Ecuación 2.2.6, vienen dados por

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2}; \quad I_{min} = I_1 + I_2 - 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2} \quad (2.2.8)$$

Con las ecuaciones anteriores, es posible definir la relación

$$\Upsilon = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.2.9)$$

como la *visibilidad de franjas*. Sustituyendo las Ecuaciones 2.2.8 en la Ecuación 2.2.9 tendremos que

$$\Upsilon = \frac{I_1 + I_2 + 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2} - I_1 - I_2 + 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2 + 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2} + I_1 + I_2 - 2|\Upsilon_{12}|\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.2.10)$$

puede expresarse también como

$$\Upsilon = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\Upsilon_{12}|}{I_1 + I_2} \quad (2.2.11)$$

Un caso particular se tiene cuando $I_1 = I_2$, con lo que $\Upsilon = |\Upsilon_{12}|$ significa que la visibilidad de franjas es igual al módulo del grado de coherencia.

2.2.3. Coherencia temporal y coherencia Espacial

Una manera de relacionar el grado de coherencia con las características de la fuente, es mediante el uso de una fuente hipotética de luz cuasi-monocromática con las siguientes características: La oscilación con su correspondiente campo varian sinusoidalmente durante un tiempo τ_0 , cambiando de manera abrupta de fase. La Figura 2.2.1 muestra una secuencia del proceso anterior que podría repetirse de forma indefinida [11].

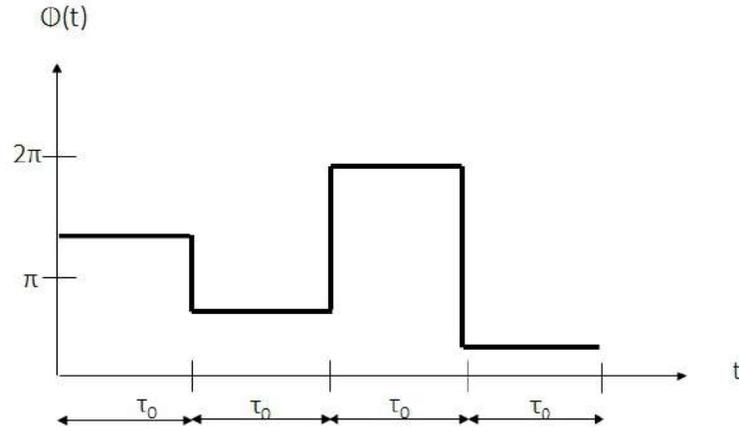


Figure 2.2.1: Comportamiento de la fase de una fuente cuasi-monocromática

En la gráfica anterior, τ_0 corresponde al *tiempo de coherencia* y el cambio de fase se distribuye de manera aleatoria entre 0 y 2π .

Un campo cuasi-monocromático puede expresarse mediante la dependencia temporal

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)} \quad (2.2.12)$$

donde $\phi(t)$ es una función escalón aleatoria.

Supongamos que el haz de la Ecuación 2.2.12 de algún modo se dividiera en dos para posteriormente encontrarse e interferir. A continuación, asumimos que $|E_1| = |E_2| = |E|$ para evaluar el grado de coherencia de manera que

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t)E^*(t+\tau) \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} \quad (2.2.13)$$

y por la Ecuación 2.2.12

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \langle e^{i\omega\tau} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]} \rangle \\ &= e^{i\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]} dt \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

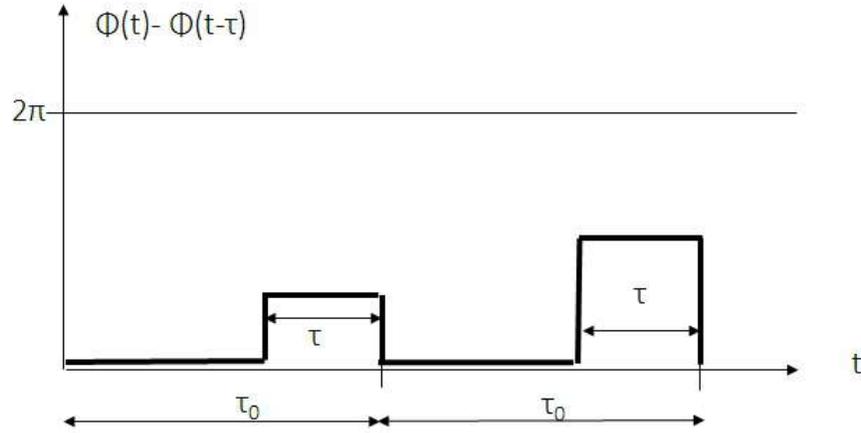


Figure 2.2.2: Diferencia de fase

La Figura 2.2.2 muestra la cantidad $\phi(t) - \phi(t + \tau)$. En primer intervalo, la diferencia de fase es igual a cero en el intervalo $0 < t < \tau_0 - \tau$, mientras que en $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$ tomará un valor aleatorio entre 0 y 2π . Con lo anterior, la integral 2.2.14 resulta trivial siendo

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t) - \phi(t+\tau)]} dt = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0 - \tau} dt + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} dt = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} - \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta} \quad (2.2.15)$$

donde Δ es una diferencia de fase aleatoria por lo que en todos los intervalos el valor de la integral será el mismo salvo el término aleatorio, que al sumar sus contribuciones para cada intervalo da exactamente cero.

La función de autocorrelación normalizada para una fuente cuasi-monocromática se puede expresar como

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{i\omega\tau} & \tau < \tau_0 \\ &= 0 & \tau \geq \tau_0 \\ |\gamma(\tau)| &= 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & \tau < \tau_0 \\ &= 0 & \tau \geq \tau_0 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

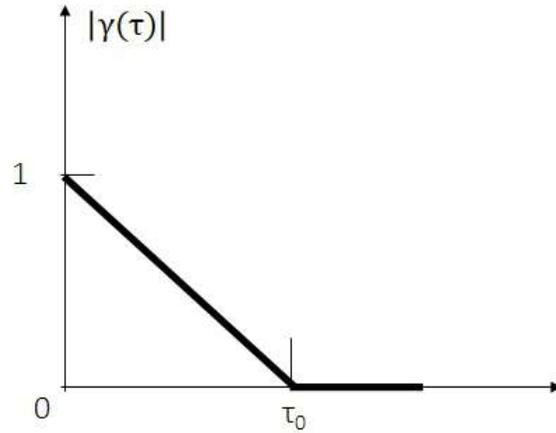


Figure 2.2.3: Coherencia de una fuente cuasi-monocromática.

De la Figura 2.2.3, se observa que la visibilidad tiende a cero a medida que τ tiende a τ_0 , lo que implica que la diferencia de camino entre ambos haces, no debe exceder el valor

$$c\tau_0 = l_c$$

para poder obtener franjas de interferencia. El término l_c se denomina longitud de coherencia.

2.3. POLARIZACIÓN

2.3.1. Polarización lineal

La polarización de la luz, es una propiedad de las ondas electromagnéticas ampliamente estudiado y aprovechado en un gran número de aplicaciones [12][13], por lo que de un buen entendimiento del tema es importante para un uso en más y mejores aplicaciones.

Si consideramos una onda electromagnética plana cuyos campos \vec{E} y \vec{H} están dados de acuerdo a:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{2.3.1}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Si las amplitudes de los vectores \vec{E}_0 y \vec{H}_0 son constantes y reales, se dice que la onda es linealmente polarizada (Figura 2.3.1).

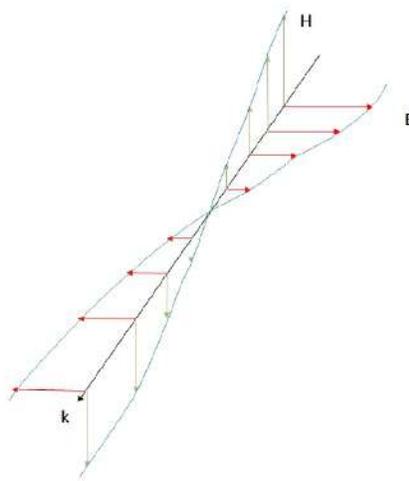


Figure 2.3.1: Campo eléctrico y magnético en una onda plana polarizada linealmente.

Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares uno con respecto al otro en cualquier momento y punto. Convencionalmente se designa la dirección del campo eléctrico como la dirección de polarización. En la naturaleza, por lo general se produce luz cuyos campos eléctricos oscilan de manera aleatoria, por lo que se dice que es luz no polarizada. Por lo anterior, si se quiere producir luz polarizada a partir de luz no polarizada, es posible con el uso de dispositivos de absorción selectiva (Figura 2.3.2).

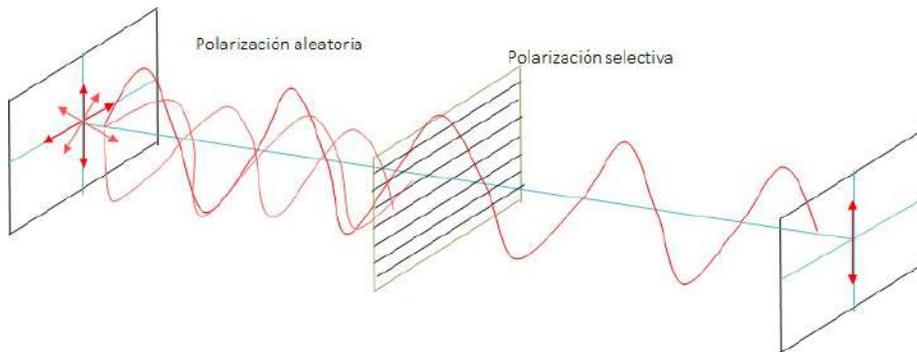


Figure 2.3.2: El eje de polarización del polarizador, definirá si el vector de campo eléctrico de las ondas se transmitirá con o sin pérdidas.

Algunos de los métodos para polarización más efectivos son los que se basan en el principio de doble refracción. Otros dispositivos hacen uso del fenómeno del dicroísmo, que consiste en un material con absorción óptica anisotrópica, o sea, que una componente de polarización es más fuertemente absorbida que otra (un ejemplo es la turmalina). Edwin Land (1928), desarrolló un producto comercial llamado Polaroid. Un polarizador, consiste actualmente en un material

que transmite de manera selectiva cierta dirección de oscilación del campo eléctrico de una onda electromagnética (Figura 2.3.3).

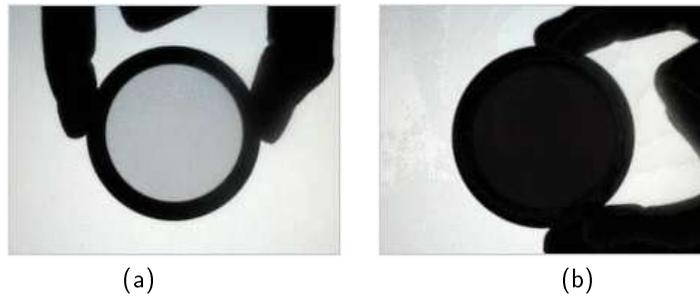


Figure 2.3.3: Luz polarizada incidiendo en la (a) dirección del eje del polarizador. (b) A 90° con el eje del polarizador (se anula el campo) [31].

Si consideramos el caso de luz incidente no polarizada sobre un polarizador (ideal), en la Figura 2.3.4 veremos que si existe un ángulo θ entre el campo eléctrico incidente y el eje de polarización del polarizador, solo parte del campo eléctrico se transmitirá.

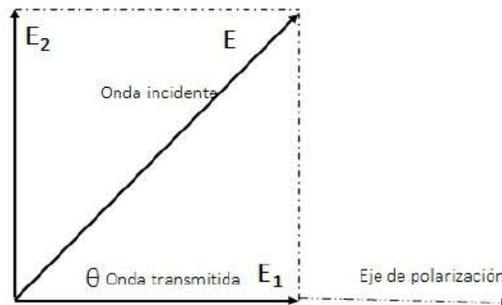


Figure 2.3.4: Relación entre el campo eléctrico transmitido y un polarizador lineal.

La transmisión del campo eléctrico incidente será de acuerdo con

$$E_1 = E \cos \theta \quad (2.3.2)$$

y su respectiva intensidad

$$I_1 = I \cos^2 \theta \quad (2.3.3)$$

donde I es la intensidad de la onda incidente. Y ya que para luz polarizada todos los valores

de θ son igualmente probables, el factor de transmisión que un polarizador lineal tiene es justo el promedio del valor $\cos^2\theta$, o sea, $\frac{1}{2}$.

2.4. BIRREFRINGENCIA

2.4.1. Teoría básica

Existen muchas sustancias cristalinas, incluso biológicas [14], que son ópticamente anisotrópicas, o sea, que sus propiedades ópticas no son las mismas respecto a la dirección de polarización. La Figura 2.4.1 muestra una aproximación mecánica de materiales anisotrópicos, en la cual un par de resortes para cada dirección positiva y negativa de los ejes x, y, z mantienen el equilibrio de una carga positiva en cada dirección de manera diferente. Lo anterior debido a que cada par de resortes tendrían diferentes constantes de restitución.

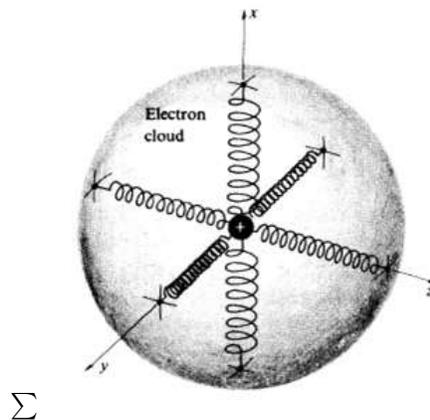


Figure 2.4.1: Modelo mecánico de una nube esférica negativa “fijando” una carga positiva por pares de resortes con diferentes constantes k [1].

Resulta evidente por lo tanto, que para un material con estas características, un electrón que se desplace de su posición de equilibrio en uno u otro eje, oscilará a frecuencias diferentes para cada eje. Como una de las consecuencias del anterior comportamiento, será que la velocidad de una onda de luz en un cristal, dependerá tanto de la dirección de su propagación como de su polarización.

Hay por lo general, dos posibles valores para la velocidad de fase para una dirección de propagación dada. Un cristal así se denomina *doblemente refractivo o birrefringente*.

Si el desplazamiento de un electrón viene dado bajo la acción de un campo eléctrico \mathbf{E} , entonces este dependerá tanto de la dirección como de la magnitud del campo eléctrico. Lo anterior también será cierto para la polarización resultante \mathbf{P} .

Según la literatura que se consulte [11], podemos expresar la dependencia de \mathbf{P} sobre \mathbf{E} mediante una relación tensorial de la forma

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E} \quad (2.4.1)$$

que de manera explícita tiene la forma

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

donde $\hat{\chi}$ es el tensor de susceptibilidad.

Ahora, el correspondiente vector de desplazamiento \mathbf{D} , vendrá dado por

$$\vec{D} = \epsilon_0 (I + \hat{\chi}) \vec{E} = \hat{\epsilon} \vec{E} \quad (2.4.3)$$

donde I es una matriz unitaria y $\hat{\epsilon}$ es el *tensor dieléctrico*.

Para un cristal ordinario no-absorbente, el tensor $\hat{\chi}$ resulta simétrico [11], por lo que se tendrá un conjunto de ejes coordenados denominados, *ejes principales* tales que

$$\hat{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

donde los términos de la diagonal se denominan *susceptibilidades principales* a las cuales les corresponderá las cantidades $K_{11} = 1 + \chi_{11}, \dots, \dots$, denominadas *constantes dieléctricas principales*.

La ecuación general de onda $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ puede ser escrita en términos de la Ecuación 2.4.1 de forma que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \hat{\chi} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.4.5)$$

de donde se puede deducir que el cristal puede propagar ondas planas monocromáticas de la forma clásica $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ siempre y cuando el vector de propagación \vec{k} satisfaga

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\chi} \vec{E} \quad (2.4.6)$$

que escrita en termino de sus componentes nos daría las tres ecuaciones [11]

$$\begin{aligned} (-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ k_y k_x E_x + (-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_y + k_y k_z E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Para comprender la interpretación física de las anteriores ecuaciones, se puede analizar un caso en particular para el cual una onda se propaga en dirección de uno de los ejes principales, por ejemplo el eje x . Lo anterior implicaría que $k_y = k_z = 0$ y $k_x = k$ reduciendo las Ecuaciones 2.4.7 a una forma mucho más simple:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} E_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

dado que \vec{E} es perpendicular al eje x , podemos ver en la primer ecuación que necesariamente $E_x = 0$ (y al ser ω y χ_{11} diferentes de cero). Si en la segunda ecuación, consideramos que $E_y \neq 0$ y en la tercera que $E_z \neq 0$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{22}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{22}} \quad (2.4.9)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{33}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{33}} \quad (2.4.10)$$

La velocidad de fase de una onda es $\frac{\omega}{k}$, por lo que tendremos dos posibilidades para ésta: $\frac{c}{\sqrt{K_{22}}}$ para los puntos del vector \vec{E} sobre el eje 'y' y $\frac{c}{\sqrt{K_{33}}}$ si el vector \vec{E} (o parte de él) está sobre el eje 'z'.

Ahora, para generalizar cualquier dirección del vector \mathbf{k} , habrá dos posibles valores para la magnitud de k con dos posibles valores para la velocidad de fase, así introduciendo tres índices principales de refracción n_1, n_2 y n_3 definidos por

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \sqrt{1 + \chi_{11}} = \sqrt{K_{11}} \\
 n_2 &= \sqrt{1 + \chi_{22}} = \sqrt{K_{22}} \\
 n_3 &= \sqrt{1 + \chi_{33}} = \sqrt{K_{33}}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.11}$$

La existencia de una solución no trivial para \vec{E} en la Ecuación 2.4.7, hace necesario que el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero. Por lo anterior y sustituyendo los valores de la Ecuación 2.4.11 tendremos

$$\begin{vmatrix}
 \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\
 k_y k_x & \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\
 k_z k_x & k_z k_y & \left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2
 \end{vmatrix} = 0
 \tag{2.4.12}$$

que podemos visualizar mediante una superficie en 3D en el espacio \mathbf{k} , de manera que la .Figura 2.4.2 nos permite visualizar esta superficie llamada *superficie del vector de onda*.

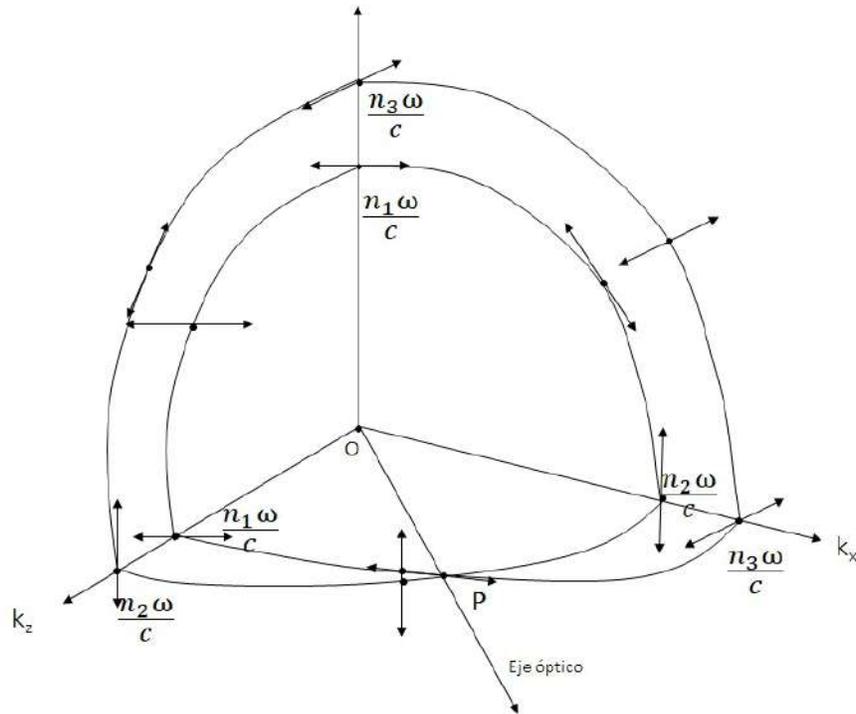


Figure 2.4.2: Superficie del vector de onda.

Para clarificar la construcción de la anterior superficie, consideremos el plano xy tal que $k_z = 0$ simplifique el determinante de la Ecuación 2.4.12 reduciéndolo al término

$$\left[\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2\right] \left\{ \left[\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - k_y^2\right] \left[\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - k_x^2\right] - k_x^2 k_y^2 \right\} = 0 \quad (2.4.13)$$

que está formado por el producto de dos cantidades de las cuales uno o ambos pueden ser igual a cero. Si elegimos el primer factor, tendremos que

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 \quad (2.4.14)$$

representa la ecuación de una circunferencia. Mientras que si se iguala el segundo factor a cero tendremos que

$$\frac{k_x^2}{(n_2\omega/c)^2} + \frac{k_y^2}{(n_1\omega/c)^2} = 1 \quad (2.4.15)$$

representa la ecuación de una elipse.

Un análisis similar en el plano xz y yz , arrojará resultados similares. La intersección de la superficie k con cada plano será un círculo y una elipse como se ve en la Figura 2.4.2, que a su vez representa el caso general para el cual $n_1 \neq n_2 \neq n_3$.

2.5. INTERFERÓMETRO DE MACH-ZEHNDER

2.5.1. Desarrollo

Publicado por Ludwig Zehnder en 1891 y refinado por Ludwig Mach en 1892, el interferómetro de Mach-Zehnder se usa en el estudio de la dinámica de los gases[15][16][28]. Es un instrumento que mide las variaciones de fase entre haces de luz colimados cuya fuente es común. A diferencia del interferómetro de Michelson, el interferómetro de Mach-Zehnder es bastante configurable [17] ya que cada uno de los trayectos de los haces separados es recorrido una sola vez.

2.5.2. Arreglo

El interferómetro de Mach-Zehnder, es un instrumento óptico de división de amplitud. Éste está conformado básicamente de dos divisores de haz (BS1 y BS2 por sus siglas en inglés) y dos espejos (M1 y M2) y un detector (cámara CCD). Al incidir un láser en el BS1, éste se divide en dos haces que recorran respectivamente una distancia $L_1 = d_1 + d_2$ y $L_2 = d_3 + d_4$ para finalmente interferir en el BS2 formando un patrón de interferencia, el cual es captado por la cámara.

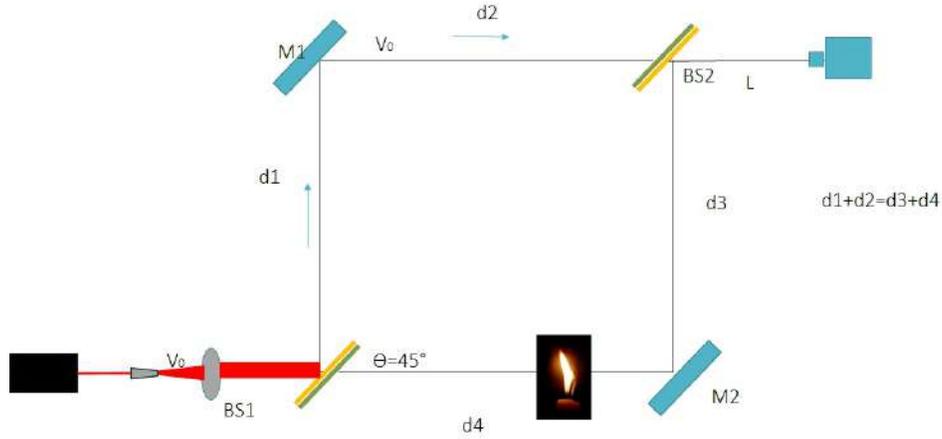


Figure 2.5.1: Interferómetro Mach-Zehnder.

Si no hay nada que obstaculice los caminos L_1 y L_2 entonces $L_1 - L_2 = 0$, y si algún objeto transparente (como una flama, una lente o agua) es colocado en alguno de los “brazos” (el otro no se verá afectado) del interferómetro, entonces $L_1 - L_2 \neq 0$ por lo que el patrón de interferencia cambiará sustancialmente de manera que para una distribución del índice refracción $n(z)$ [18], la *longitud de camino óptico* (OPL), viene dada por

$$OPL = \int_0^h n(z) dz = nh \quad (2.5.1)$$

si el índice de refracción es constante y donde h es el grosor del medio transparente y z es la dirección de propagación del haz. Ciertamente en nuestro análisis, el índice de refracción no será constante sino que será descrita de acuerdo a una función Gaussiana, es decir

$$\begin{aligned} OPL &= \Delta n_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2+z^2)}{r_0^2}} dz \\ &= \Delta n_0 e^{-\frac{x^2}{r_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z^2)}{r_0^2}} dz \\ &= \sqrt{\pi} r_0 \Delta n_0 e^{-\frac{x^2}{r_0^2}} \\ &= \sqrt{\pi} r_0 \Delta n \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

con un cambio índice de refracción inicial Δn_0 que varía en la dirección x y un radio r , la diferencia de fase $\Delta\phi$ vendrá dada por

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\pi r_0} \Delta n \quad (2.5.3)$$

que nos indica que la diferencia de fase y el índice de refracción, salvo una constante, vienen a ser representada por la misma función gaussiana!!

La ecuación 2.5.3, representará la distribución gaussiana línea por línea en un mapa de intensidades, por lo que será posible extraer el radio de cada gaussiana para reconstruir un volumen con las distribuciones de cada uno de los parámetros físicos recuperados, por ejemplo, índice de refracción, cambio de fase, densidad o temperatura.

2.5.3. Descripción del interferómetro Mach-Zehnder

Para describir la manera en que un fotón se propaga [18] por el interferómetro, es necesario tomar en cuenta que un fotón puede tomar cualquiera de los dos caminos L_1 o L_2 en los que se divide el haz del láser, por lo que tenemos un número que nos dice la probabilidad de estar en un rayo en particular de los dos en los que se dividió. Por lo anterior, podemos elegir dos números α y β que representan la amplitud de probabilidad y además, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, así, resultaría razonable escribirlos forma de un vector columna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, de manera que podemos normalizar cada una de las amplitudes, a decir:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.5.4)$$

Un estado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puede de manera arbitraria describir un fotón que viaja a través de L_1 (la probabilidad de ir por L_2 es cero), y un estado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a un fotón que viaja por L_2 . Por lo anterior, es posible representa la superposición de ambos estados como

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

Si en uno de los trayectos, introducimos un medio o un dispositivo (digamos transparente) que introduzca en el haz, un cambio δ (donde $\delta \in \mathbb{R}$) en su fase.

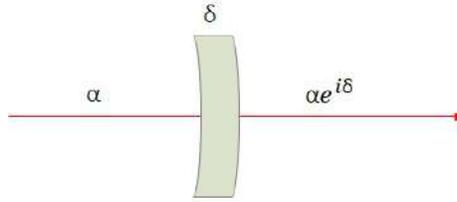


Figure 2.5.2: Medio que produce un desplazamiento δ en la fase del haz (recordar que α es complejo).

Es importante notar que la norma de un número complejo no se altera al multiplicarlo por una fase, o sea, $|\alpha| = |\alpha e^{i\delta}|$. Lo anterior nos indica que el dispositivo no absorbe ningún fotón, solo modifica sus fases.

2.5.4. Funcionamiento del divisor de haz (BS)

Como ya se mencionó, un divisor de haz tiene la particularidad de reflejar parte de la amplitud un haz y transmitir otra parte (supondremos un 50% y 50%).

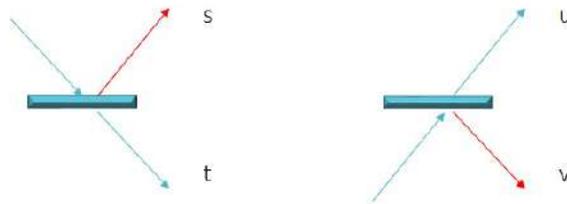


Figure 2.5.3: Un haz que incide por arriba o por abajo de un BS refleja y transmite parte del haz original.

Como se puede ver en la Figura 2.5.3, sin importar si un fotón α incide un BS por arriba, estando en un estado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o un fotón β por abajo, en un estado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, éste podrá ser ya sea reflejado o transmitido, siendo los estados $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, respectivamente. Con lo anterior, podemos superponer cada uno de los estados, de manera que

$$\alpha \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

de donde podemos ver que el efecto del BS sobre cualquier estado α o β de un fotón, es multiplicarlo por una “matriz de acción”. Dado que cada estado satisface:

$$|s|^2 + |t|^2 = 1 \quad y \quad |u|^2 + |v|^2 = 1 \quad (2.5.7)$$

Por lo que

$$|s|^2 = |t|^2 = |u|^2 = |v|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.5.8)$$

Una ecuación que satisface las todas las propiedades ya descritas es, y en la que tenemos una matriz actuando sobre un cierto estado

$$BS = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.5.9)$$

pero, si consideramos que nuestro interferómetro de Mach-Zehnder consta de dos BS, bien podemos definir las ecuaciones de BS1 y BS2 como

$$BS1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad BS2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

que representan las ecuaciones características de los divisores de haz que comúnmente se utilizan en un experimento.

Dado que serán ondas electromagnéticas las que atravesarán el interferómetro (figura 2.5.2), podremos saber las características de interferencia de los haces de luz al atravesar al interferómetro antes y después de colocar el objeto de fase. Por lo anterior, se necesitará un método para conocer la diferencia de fase entre un haz de referencia y uno deformado.

2.5.5. Método de Fourier

En diversas mediciones ópticas [19], se obtienen patrones de interferencia de la forma:

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos [2\pi f_0 x + \phi(x, y)] \quad (2.5.11)$$

donde $\phi(x, y)$ contiene información que es deseada en cierto experimento y $a(x, y)$ y $b(x, y)$

son variaciones el nivel de iluminación de fondo y la modulación, respectivamente. Por lo general, estos dos parámetros contienen variaciones espaciales menores que la frecuencia portadora, f_0 .

La ecuación 2.5.11 constituye franjas de interferencia de dos frentes de onda inclinados entre ellos, es posible establecer esta inclinación para obtener un patrón de interferencia de acuerdo a

$$g_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos [2\pi f_0 x] \quad (2.5.12)$$

Como primer punto, se establece un patrón de franjas según la Eq. 2.5.11, mediante un dispositivo de adquisición se transfiere a una computadora. Por conveniencia, reescribimos el patrón de interferencia de la forma [19]

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(2\pi i f_0 x) + c^*(x, y) \exp(-2\pi f_0 x) \quad (2.5.13)$$

donde

$$c(x, y) = (1/2)b(x, y) \exp [i\phi(x, y)] \quad (2.5.14)$$

y $c^*(x, y)$ es el complejo conjugado de $c(x, y)$.

Ahora, aplicando el algoritmo FFT a la Eq. 2.5.13, tendremos que:

$$G(f, y) = A(f, y) + C(f - f_0, y) + C^*(f + f_0, y) \quad (2.5.15)$$

Al ser las variaciones espaciales $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ más lentas si se comparan con la frecuencia espacial f_0 , los espectros de Fourier en la Eq. 2.5.15 son separados por la frecuencia portadora f_0 como se aprecia en la Figura 2.5.4a). Para reconstruir una señal, podemos seleccionar uno de los dos espectros en la portadora, digamos $C(f - f_0, y)$.

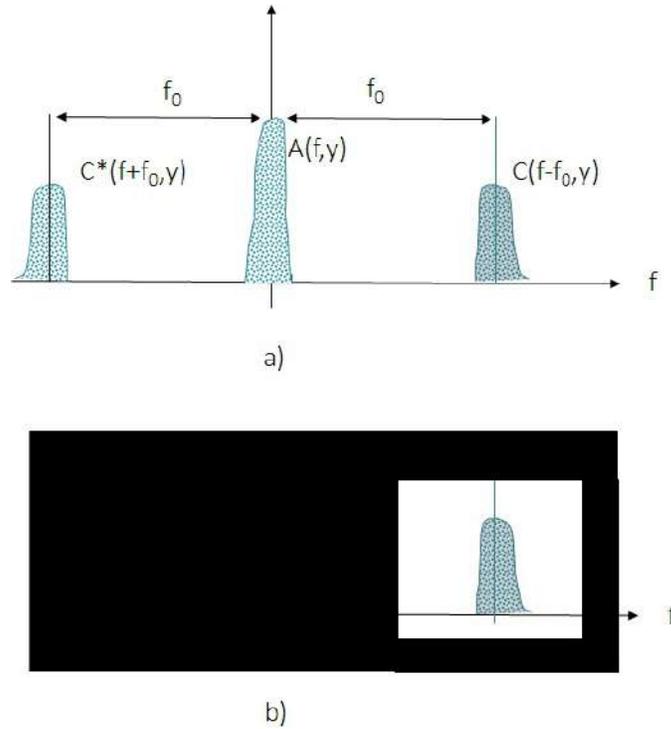


Figure 2.5.4: Izquierda: a) Espectro de Fourier del patrón de franjas. b) Selección de un solo espectro.

Cabe mencionar que en el paso anterior, las variaciones de la intensidad de fondo $a(x, y)$ han sido filtradas. Nuevamente, mediante el algoritmo FFT es posible calcular la *transformada inversa de Fourier* con respecto a f para así obtener $0.5b(x, y)e^{i\phi(x, y)+i2\pi f_0 x}$ definida por la Eq. 2.5.14. Posteriormente se calcula

$$\log[c(x, y)] = \log[(1/2)b(x, y)] + i\phi(x, y). \quad (2.5.16)$$

Al comparar las ecuaciones 2.5.11 y 2.5.16, podemos ver que en la Ecuación 2.5.16, $\phi(x, y)$ aparece en la parte imaginaria de manera ya independiente de las variaciones de amplitud de $b(x, y)$ en la parte real.

Realizando de manera análoga el mismo análisis para el patrón de referencia y restando los resultados se deduce que

$$\begin{aligned} \tan(\phi_d - \phi_u) &= \frac{\tan(\phi_d) - \tan(\phi_u)}{1 + \tan(\phi_d)\tan(\phi_u)} \\ &= \frac{\sin(\phi_d)\cos(\phi_u) - \sin(\phi_u)\cos(\phi_d)}{\cos(\phi_d)\cos(\phi_u) - \sin(\phi_u)\sin(\phi_d)} \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

se tendrá que la diferencia de fase buscada entre la referencia y la imagen deformada, $\phi_d - \phi_u$ es

$$\Delta\phi = \phi_d - \phi_u = \arctan\left(\frac{\sin(\phi_d)\cos(\phi_u) - \sin(\phi_u)\cos(\phi_d)}{\cos(\phi_d)\cos(\phi_u) - \sin(\phi_u)\sin(\phi_d)}\right) \quad (2.5.18)$$

2.5.6. Fase envuelta y fase desenvuelta

La fase obtenida mediante el método de Fourier, está indeterminada en un factor de 2π , ya que en casi todos los casos, la fase numéricamente estimada, da un valor principal para $\phi(x, y)$ que va de $-\pi$ a π .

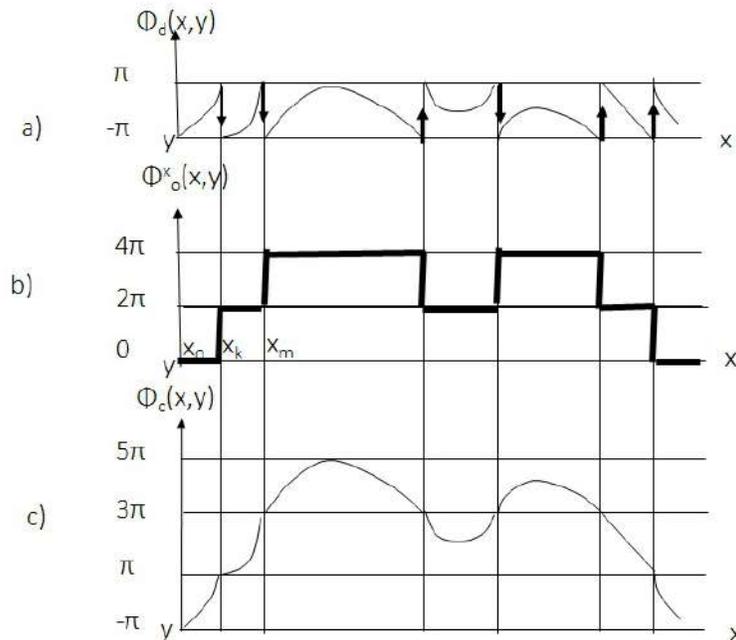


Figure 2.5.5: a) Distribución de una fase con discontinuidades debidas al cálculo del valor principal; b) Distribución de fases de compensación para corregir las discontinuidades en a); c) Perfil continuo de la distribución de la fase.

Como se observa en la Figura 2.5.5, es posible crear una función de distribución de fase de compensación $\phi_o(x, y)$ que pueda ser sumada a la función de distribución discontinua $\phi_d(x, y)$ (o wrapped phase), de manera que obtengamos una función continua $\phi_c(x, y)$ de forma que:

$$\phi_c(x, y) = \phi_d(x, y) + \phi_o(x, y) \quad (2.5.19)$$

nos regrese la fase ya desenvuelta (o unwrapped phase). Cabe mencionar, que existen diversos métodos [20][21] de desenvolvimiento de la fase, estos pueden ser incluso según la forma o la obtención de los patrones de interferencia generados.

2.6. INTERFERÓMETRO DE WOLLASTON

2.6.1. Prisma de Wollaston

Las propiedades birrefringentes de algunos materiales como la calcita, ha abierto un gran campo dentro de la investigación y el desarrollo científico [22][23][24][25]. Es por ello que comprender el fenómeno, es de suma importancia en el presente trabajo.

Un prisma de Wollaston (Figura 2.6.1) es un divisor de haces polarizados que preserva tanto los rayos ordinarios (O) como los extraordinarios (E). Por lo general son fabricados de *calcita* o *cuarzo*.

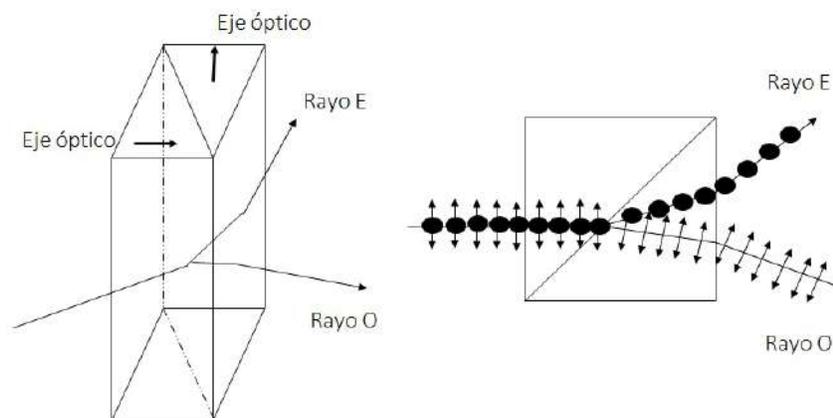


Figure 2.6.1: Prisma de Wollaston.

Un prisma de Wollaston está formado por dos prismas iguales de base triangular cuyos ejes ópticos son perpendiculares. En un medio de *calcita*, el rayo E es más rápido que el rayo O al ser el índice de refracción extraordinario $n_e = 1.4864$ y el ordinario $n_o = 1.6584$. En la interfase

(o superficie de contacto), el rayo E del primer prisma se convierte en un rayo O y se redirige hacia la dirección normal. Y de manera inversa el rayo O del primer prisma se convierte en un rayo E del segundo prisma y redirigido hacia fuera de la normal. Ambos haces divergen del prisma obteniendo dos rayos polarizados perpendicularmente. El ángulo de la cuña donde incide el rayo, determina el ángulo de divergencia de los dos rayos. Comercialmente se dispone de prismas con ángulos de divergencia entre los 0.5° hasta 45°.

2.6.2. Ángulo de desviación entre haces emergentes

Ahora se deducirá el ángulo de desviación entre dos rayos que emergen del prisma. El ángulo en cuestión, es como se observa en la Figura 2.6.2, el ángulo γ .

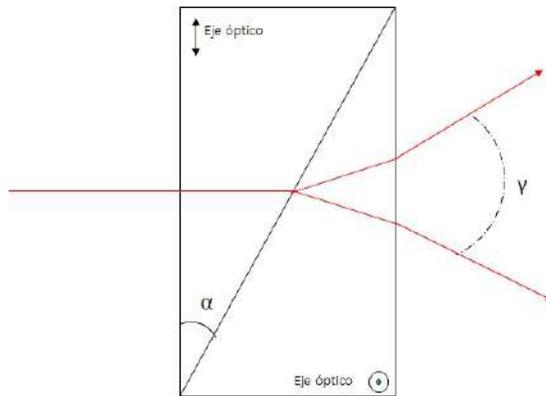


Figure 2.6.2: Ángulo entre dos haces

De acuerdo a la Ley de Snell

$$n_i \text{sen}(\theta_i) = n_t \text{sen}(\theta_t) \quad (2.6.1)$$

donde n_i, n_t representan el índice de refracción del medio desde el que incide y al que se transmite respectivamente. Análogamente θ_i, θ_t son los ángulos de incidencia y transmitido respectivamente.

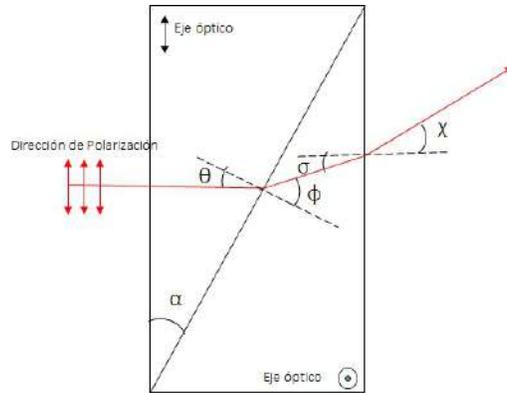


Figure 2.6.3: Haz polarizado paralelamente al plano de incidencia atravesando un prisma de Wollaston para el que se cumple que $n_e > n_o$.

En este primer análisis (Figura 2.6.3), se considerará el índice de refracción incidente al índice de refracción extraordinario n_e de la primer sección del prisma y a el índice de refracción transmitido al índice ordinario n_o de la segunda parte del prisma. De manara análoga, se denominará a $\theta_i = \theta$ y $\theta_t = \phi$. Con lo anterior se tendrá que [15]

$$n_e \text{sen}(\theta) = n_o \text{sen}(\phi) \quad (2.6.2)$$

y dado que la incidencia es normal a la superficie, podemos asumir que $\theta = \alpha$, de manera que

$$\text{sen}(\phi) = \frac{n_e}{n_o} \text{sen}(\alpha) \approx \frac{n_e}{n_o} \alpha \quad (2.6.3)$$

si suponemos que el ángulo α es pequeño, de manera que sea posible utilizar la aproximación $\text{sen}(\alpha) \approx \alpha$. La anterior aproximación, implica al mismo tiempo que el ángulo ϕ también es pequeño, de manera que es posible asumir también que $\text{sen}(\phi) \approx \phi$. De manera similar, un análisis mediante la Ley de Snell entre la segunda parte del prisma y el aire (con índice de refracción n_{air}), permitirá deducir que

$$n_o \text{sen}(\sigma) = n_{air} \text{sen}(\chi) \quad (2.6.4)$$

donde con el uso de geometría básica, se puede probar que $\sigma = \phi - \alpha$, de manera que la ecuación anterior pueda representarse como

$$\text{sen}(\chi) = \frac{n_o}{n_{air}} \text{sen}(\phi - \alpha) \quad (2.6.5)$$

de acuerdo a la resta de ángulos para el seno donde $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$, y con la Ecuación 2.6.3 se tendrá que

$$\text{sen}(\chi) = \alpha \left(\frac{n_e - n_o}{n_{air}} \right) \quad (2.6.6)$$

de donde se puede considerar que $n_{air} \approx 1$, por lo que la ecuación anterior puede ser representada simplemente por

$$\chi = \alpha(n_e - n_o) \quad (2.6.7)$$

De manera análoga al caso anterior, se puede analizar el segundo haz (Figura 2.6.4)

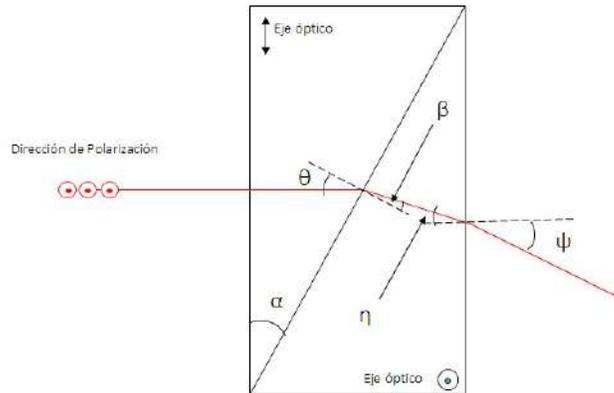


Figure 2.6.4: Esquema del segundo haz.

considerando que en la primera sección del prisma, el índice de refracción considerado será n_o , en la segunda parte será n_e y el ángulo de salida será ψ . Con lo anterior y un análisis similar al realizado para χ se deduce que [15]

$$\psi = \alpha(n_e - n_o) \quad (2.6.8)$$

Con el resultado anterior y la Ecuación 2.6.7, se puede observar que

$$\gamma = 2\alpha(n_e - n_o) \quad (2.6.9)$$

es el ángulo de desviación del prisma de Wollaston.

2.6.3. Interferómetro de Wollaston

Podemos partir del diseño anterior del interferómetro de Mach-Zehnder, de forma que utilicemos solamente uno de los brazos como se observa en la Figura 2.6.5.

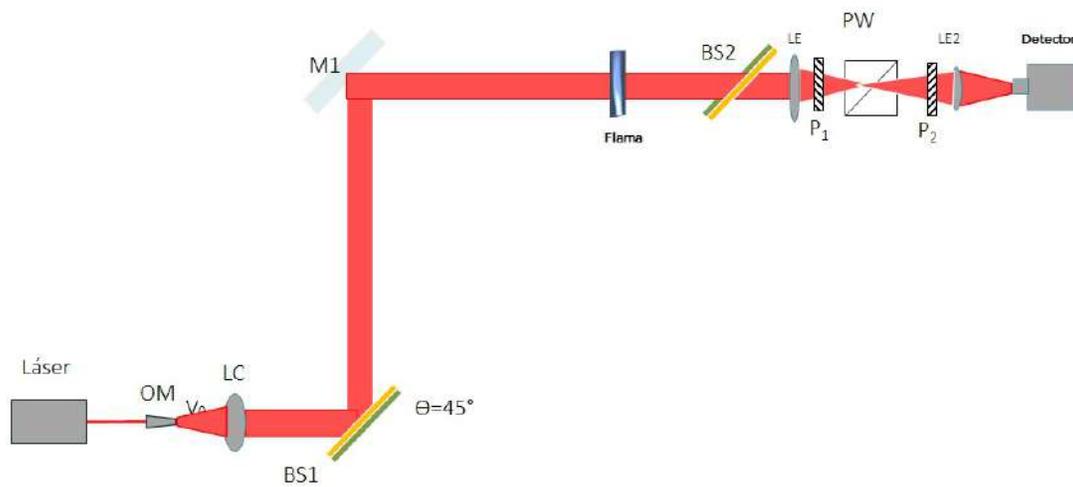


Figure 2.6.5: Esquema básico del Interferómetro de Wollaston

A la salida del BS2, se coloca una lente (LE) que enfoque un poco antes del centro del prisma de Wollaston, posteriormente un polarizador P_1 (analizador) para generar luz polarizada en cierta dirección. Una vez que salen del Prisma de Wollaston (PW), ambos haces emergerán polarizados perpendicularmente uno del otro, por lo que no interferirán uno con el otro y el detector no captará franjas de interferencia. Por lo anterior, se coloca un segundo polarizador P_2 con la finalidad de que ambos rayos coincidan en una misma polarización, de forma que ahora si puedan interferir uno con otro para generar un patrón de interferencia al que una lente a la salida (LE2) llevará hasta el detector para que este sea susceptible a análisis [26][27].

2.7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Hecht, Optics , USA, Addison-Wesley (2002).
- [2] J. Griffiths, Introduction to electrodynamics, USA, Prentice Hall (1999).
- [3] J. D. Jackson, Classical electrodynamics, USA, John Wiley & Sons Inc. (1999).
- [4] N. Sánchez, Non-Linear equations in classical and quantum field theory, France, Springer-Verlag (1984).
- [5] A. Stella, G. Guj, and S. Giammartini, "Measurement of axisymmetric temperature fields using reference beam and shearing interferometry for application to flames," Exp. Fluids, 29, 1-12, 2000.
- [6] K. Gasvik, Optical metrology, England, John Wiley and Sons (2002).
- [7] D. Malacara, Optica basica, México, Fondo de Cultura Economica (2004).
- [8] D. Malacara, Optical shop testing, 3rd Ed., John Wiley and Sons, USA (2007).
- [9] P. Franklin, Fourier Methods, USA, McGraw-Hill (1949).
- [10] S. Bochner, K. Chandrasekharan, Fourier Transforms, UK, Princeton University Press (1949).
- [11] G. Fowles, Introduction to modern optics, NY, Dover Publications Inc. (1975).
- [12] E. Muñoz, G. López, R. Espinosa, "Polarization properties of a single polygon of the cuticle of the scarab beetle *C. mutabilis* studied by micropolarimetry", Opt Communications, 434, 65-69 (2019).
- [13] I. Saucedo, "Aplicaciones polarimétricas para la identificación de adulteraciones en la miel de abeja", CIO, Tesis de doctorado en ciencias (Óptica) (2012).
- [14] M. Briones, " Sistema de tomografía óptica coherente espectral sensible a polarización para el estudio de birrefringencia en corneas porcinas", CIO, Tesis de Maestría en Optomecatrónica (2010).
- [15] W. Merzkirch, Flow visualization, USA, Academic press (1987).
- [16] N. A. Fomin, Speckle Photography for Fluid Mechanics Measurements, Berlin, Springer (1998).
- [17] L. Tapia, "Diseño y fabricación de interferómetros Mach-Zehnder mediante la técnica de escritura láser", CIO, Tesis de Maestría en Optomecatrónica (2021).
- [18] B. Zwiebach, Quantum physics, Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare (2016).
- [19] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, "Fourier-transform method of fringe- pattern analysis for computer-based topography and interferometry", JOSA A 72(1), 156-160 (1982).
- [20] M. Servin, J.A. Quiroga, J. Padilla, "Fringe Pattern Analysis for Optical Metrology: theory, algorithms and applications", Wiley-VCH. Forthcoming 2014.
- [21] Hariharan, P., "Interference: A Primer, in Basics of Interferometry", Burlington, Academic Press, 3-12 (2007).
- [22] R. Flack, "A simple method of analysing axisymmetric data from a Wollaston prism schlieren interferometer", J. Phys. E: Sci. Instrum., 14, 409-411 (1981).
- [23] R. D. Small, V. A. Sernas and R. H. Page, "Single beam schlieren interferometer using a Wollaston prism", App. Opt. 11,4, 858-862 (1972).
- [24] Z. Shuang, W. Fu-Quan, Z. Dong-Sheng, Z. Xing, W. Ji-Xi, X. Mei and Z. Wei-Gang, "Temperature influence on divergence angles of quartz cristal Wollaston prism", Chi. Phys. Lett., 25,7, 2470-2472 (2008).
- [25] S. G. Kim, "Polarization phase-shifting technique in shearographic system with a Wollaston prism", Jou. Opt. Soc. Korea, 8,3, 122-126 (2004).
- [26] Biss. M. M., Settles G.S., Staymates, M.E. and Sanderson, R. S., "Dierential schlieren-interferometry with a simple adjustable Wollaston -like prism", App. Opt. 47,3, 328-335 (2008).

[27] Pluta, M., "A double refracting interference microscope with variable image duplication and half-shade eyepiece," J. Phys. E: Sci. Instrum., 2,2, 685-690 (1969).

[28] R. Chevalerias, Y. Latron and C. Veret, "Methods of interferometry applied to the visualization of flows in wind tunnels", JOSA, 47,8, 703-706 (1957).

[29] Barrientos, B., "Apuntes de Clase Metrologia Optica I", Division de Optica, Centro de Investigaciones en Optica A.C., Septiembre-Diciembre (2009).

[30] Mehla, J. and Black, Z., "Errors associated with interferometric measurement of convective heat transfer coefficients," App. Opt., 16,6, 1720-1726 (1977).

[31] https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_polarizador#/media/Archivo:Animation_polariseur_2.gif, consultado el 20-01-2021.

Capítulo 3

SIMULACIONES NUMÉRICAS

Hoy en día, las herramientas computacionales de las que disponemos, nos permiten analizar o simular un experimento para determinar su viabilidad antes siquiera de montarlo. Por otro lado y como es en el caso de la presente tesis, nos permiten comparar con un alto grado de precisión, un experimento simulado por ordenador con uno realizado físicamente en el laboratorio. Las presentes simulaciones fueron realizadas con ayuda del software **MatLab R2018a**.

3.1. Simulación de una flama con decaimiento exponencial

3.1.1. Teoría básica

En la Figura 3.1.1, es posible ver la distribución del índice de refracción Δn en una flama que decae exponencialmente, siendo su descripción matemática

$$\Delta n = -\Delta n_0 \exp(-y/y_{max}) \exp - \left[\frac{(x - x_0)^2}{r^2} \right] \quad (3.1.1)$$

donde x_0 representa el centro de la distribución, Δn_0 el cambio de índice de refracción inicial entre el objeto y el aire, y_{max} es la altura de la flama y r es el radio de la Gaussiana.

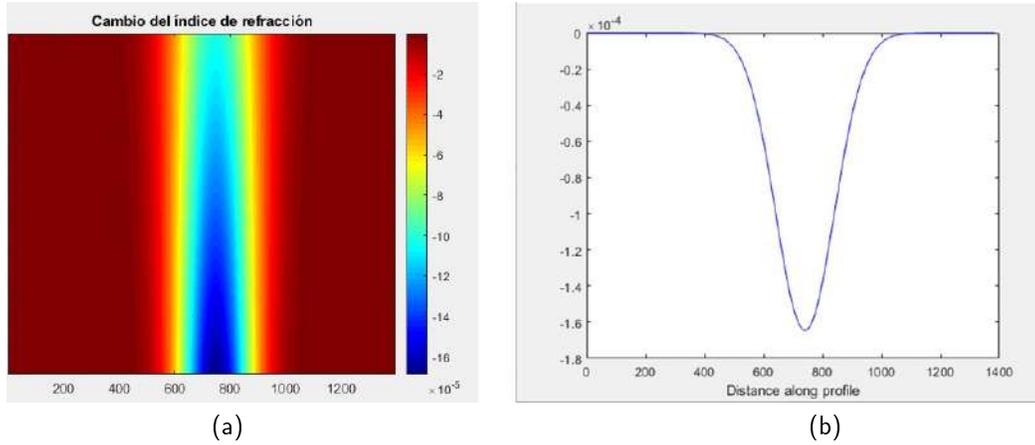


Figure 3.1.1: Simulación de (a) Distribución proyectada del índice de refracción. (b) Un perfil gaussiano de (a).

Así mismo, se tiene que $\Delta n_0 = 1.685 \times 10^{-4}$ en la Ecuación 3.1.1, y se calculó considerando la temperatura máxima $T_{max} = 1273.15 \text{ K}$ y la temperatura ambiente $T_0 = 293.15 \text{ K}$ de acuerdo con la igualdad

$$\Delta n_0 = (n_0 - 1) \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}} \right) \quad (3.1.2)$$

donde a su vez, $n_0 = 1.00022$ (Apéndice A1), es el índice de refracción del aire utilizado y correspondiente a las condiciones específicas del experimento. Cabe mencionar que el signo negativo del Δn , es debido a la transición de un medio con un índice de refracción menor a uno mayor, o sea, $n < n_0$.

Un análisis más detallado de lo que sucede al cruzar el láser del aire con índice de refracción $n(z)$ a la flama (con un correspondiente $\Delta n = n - n_0$), lo podemos ver en la Figura 3.1.2. Cada corte transversal representa en el detector a un patrón que se asume que está representado por una función Gaussiana del tipo, $f(x) = ae^{-(x-b)^2/c^2}$. Donde a representa el punto más alto de la gaussiana, b representa su centro, y en nuestro caso $c = r$, es el radio en cada una de las gaussianas y que deben ser considerados individualmente renglón por renglón, en el cálculo de los parámetros que nos interesan (temperatura y densidad).

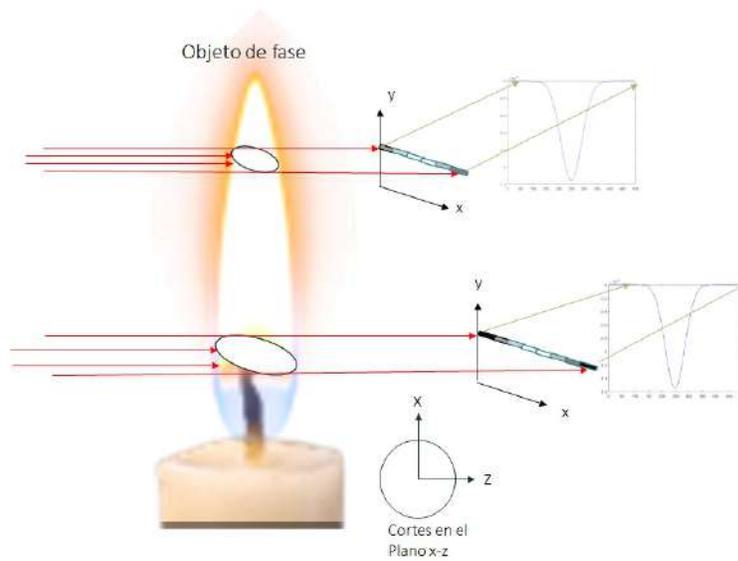


Figure 3.1.2: Cortes horizontales de haces de luz atravesando el objeto de fase (plano x-z), cada uno con su propio patrón de intensidad Gaussiano.

Un campo eléctrico que se propaga a lo largo del eje z se representa como $\epsilon = A_0 e^{ikz} = A_0 e^{i\phi}$. Si se denomina ϕ_d (a su vez es el δ al que se hace referencia en la Figura 2.5.2) a la fase del campo eléctrico que atraviesa el objeto de fase y ϕ_u a la fase del campo eléctrico a través del aire, de manera que:

$$\begin{aligned}\phi_d &= k_c \int n dz \\ \phi_u &= k_c \int n_0 dz\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

donde $k_c = \frac{2\pi}{\lambda}$ representa el número de onda en el vacío.

Siendo la diferencia de fase $\Delta\phi$ (Figura 3.1.3) el parámetro que nos interesa, ya que es de ahí que es posible obtener la información de los parámetros físicos que buscamos. Sabiendo que $\Delta n = n - n_0$, podemos considerar que

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \sqrt{\pi} \Delta n\tag{3.1.4}$$

de acuerdo a la Ecuación 2.5.3.

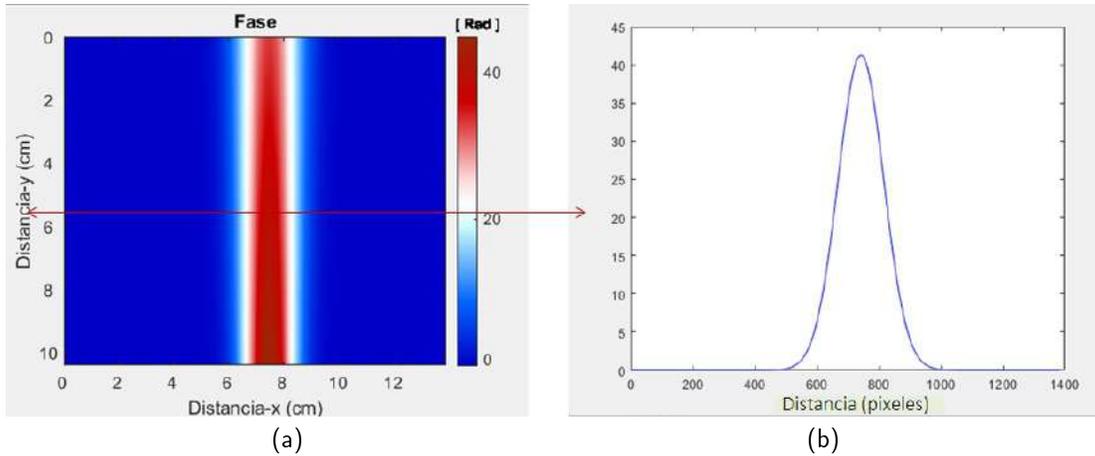


Figure 3.1.3: (a) Fase $\Delta\phi$ generada. (b) Vista de un perfil Gaussiano.

Una vez obtenidos $\Delta\phi$ y Δn , es posible extraer información sobre la temperatura (Figura 3.1.4) utilizando la ecuación 3.1.5, según la cual

$$T = \frac{T_0(n_0 - 1)}{(n - 1)} \quad (3.1.5)$$

Un mapa completo de la distribución de la temperatura de una flama, permite observar que la temperatura máxima es del orden de los $1270K$ ($\sim 1000^\circ C$).

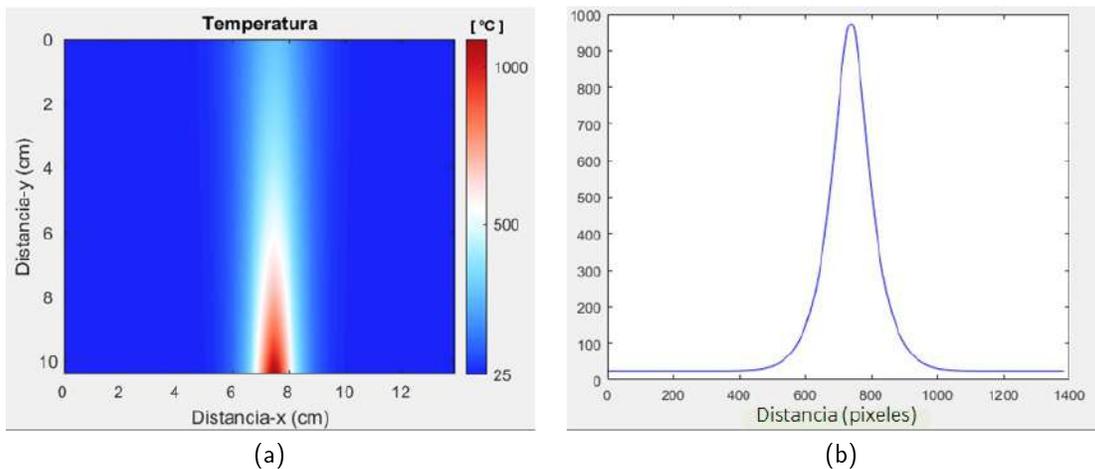


Figure 3.1.4: (a) La temperatura generada ronda los $1000^\circ C$ en la base de la flama. (b) Vista de un perfil Gaussiano.

Se puede realizar un análisis cuantitativo (Figura 3.1.5) de la densidad generada a partir de la ecuación 3.1.6 también llamada de Glaston-Dale, para la cual:

$$\rho = \frac{(n - 1)}{\kappa} \quad (3.1.6)$$

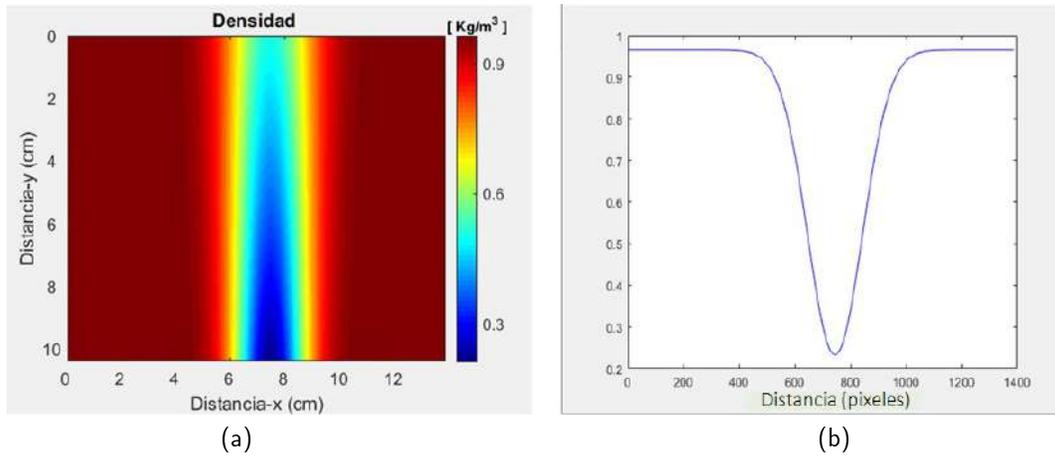


Figure 3.1.5: (a) Distribución de la densidad. (b) Un perfil en la base, muestra una densidad mínima de $0.2277kg/m^3$

donde $\kappa = 2.259 \times 10^{-4} m^3/kg$ (para las condiciones del experimento) es llamada la constante de Glaston-Dale.

3.1.2. Generación de los interferogramas

3.1.2.1. Interferómetro Mach-Zehnder

Los patrones de intensidad para los estados deformado (I_d) y de referencia (I_u) se pueden generar mediante las Ecuaciones 2.5.11 y 2.5.12. El resultado se puede ver en la figura 3.1.6. El cambio de fase se asume igual que el descrito en la Sección 3.1.1.

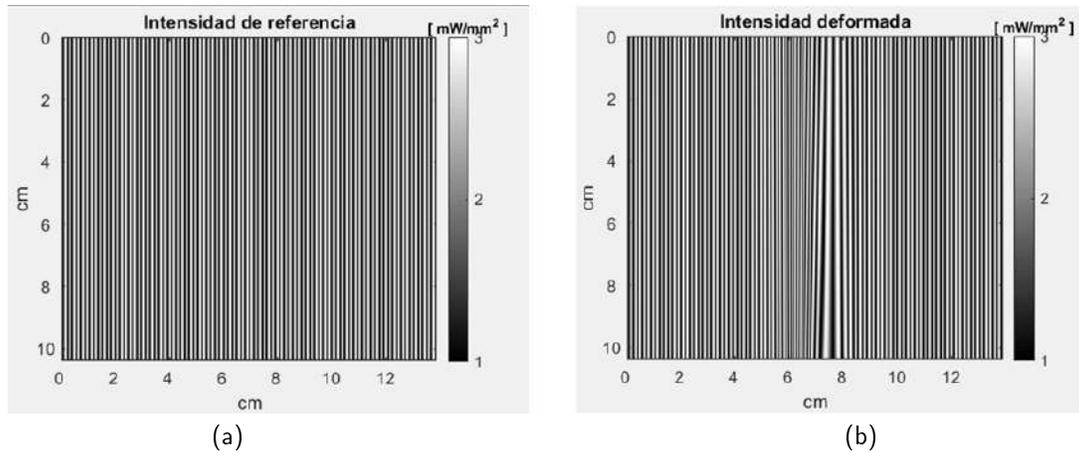


Figure 3.1.6: Patrones de intensidad generados (a) antes y (b) después de atravesar un objeto de fase (una flama).

Una vez generados los interferogramas, aplicaremos el método de Fourier para extraer nuestra incógnita de interés $\Delta\phi$, que contiene la información de los parámetros físicos que queremos conocer.

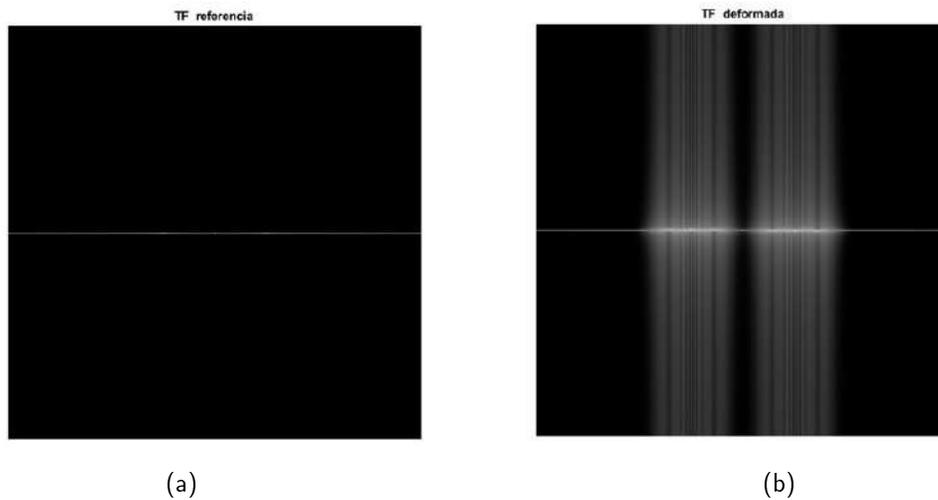


Figure 3.1.7: (a) Lóbulos separados en la trasformada de Fourier de los interferogramas (a) I_u y (b) I_d .

Una vez filtrados cada uno de los lóbulos de las transformadas, encontramos la fase envuelta (Sección 3.5), y posteriormente aplicamos algún algoritmo de desenvolvimiento para encontrar la fase deseada (unwrapped phase). La fase ya desenrollada es la que se muestra en la Figura 3.1.8, al mismo tiempo, es posible ver en un corte de perfil, que la fase simulada y la obtenida mediante el método de Fourier, son prácticamente iguales (Tabla 3.1).

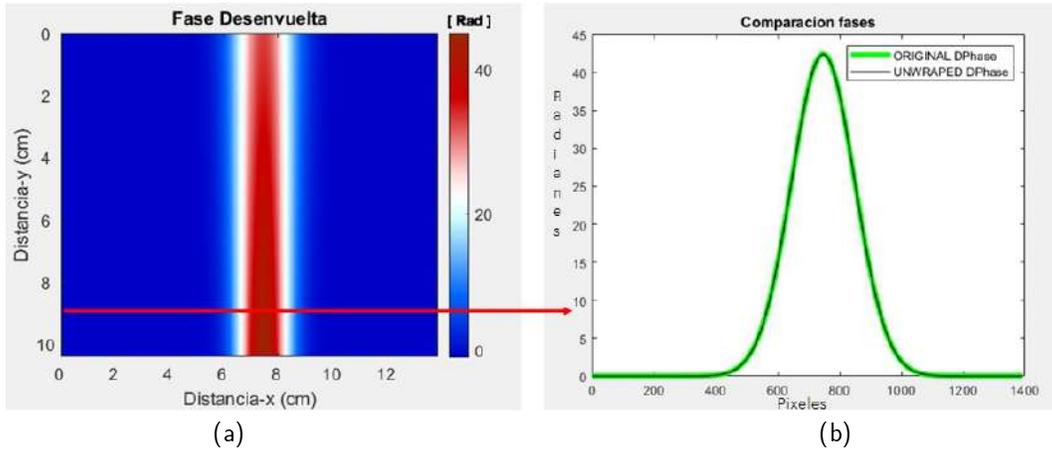


Figure 3.1.8: (a) Fase obtenida mediante el método de Fourier. (b) Comparación en radianes (eje vertical) con la simulada.

A diferencia de la simulación, para la cual a partir de una distribución Δn conocido, se calculó $\Delta\phi$ (Ecuación 3.1.4), es con la fase desenvuelta, con la que reconstruimos o recuperamos los parámetros de nuestro interés. Por lo anterior y despejando Δn en la Ecuación 3.1.4, encontramos que este luce de acuerdo a lo mostrado por la Figura 3.1.9, en la cual, también es posible ver la comparación de dos perfiles a la misma altura (primer cuarto de la figura), la cual muestra que el perfil de la simulación (verde) coincide en gran medida con el obtenido por el método de Fourier (Tabla 3.1).

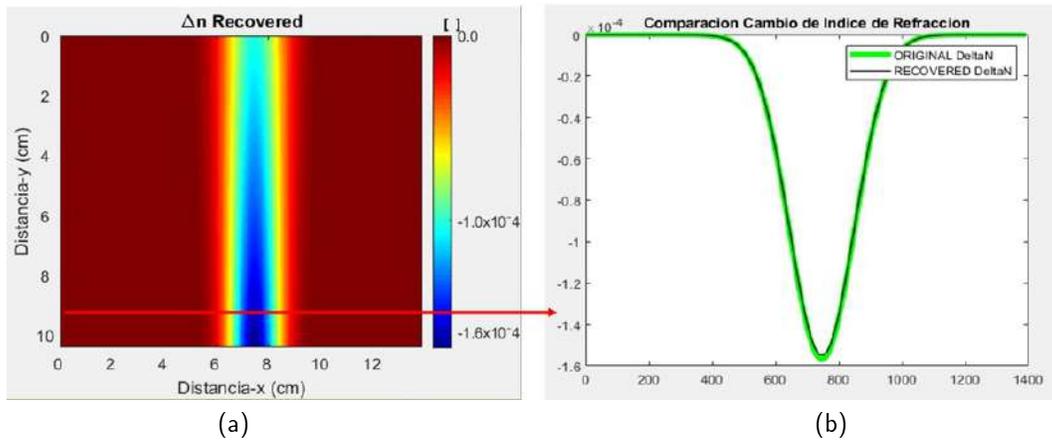


Figure 3.1.9: (a) Cambio de índice de refracción obtenido por método de Fourier. (b) Comparación con el ajustado a una función Gaussiana.

Como se hizo previamente haciendo uso de la Ecuación 3.1.5, recuperaremos la temperatura, la cual podemos ver en la Figura 3.1.10 que a su vez, muestra una temperatura máxima de 1000°C en la parte baja y central de la flama.

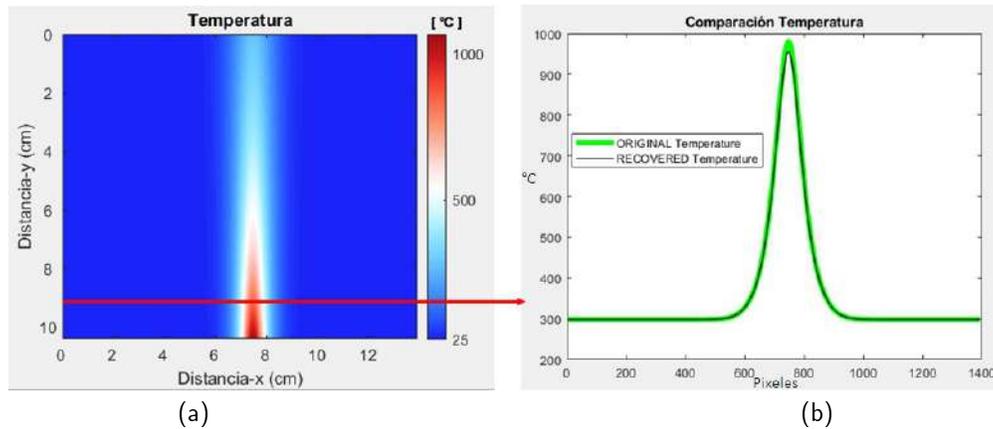


Figure 3.1.10: (a) Temperatura obtenida por el MF. (b) Comparación de un perfil con el ajustado a una función Gaussiana.

Nuevamente, con el uso de la ecuación de Glaston-Dale (Ecuación 3.1.6), podemos recuperar la densidad que se observa en la Figura 3.1.11, donde podemos ver de acuerdo a la comparación de un perfil de la densidad obtenida por el método de Fourier y otro perfil de la simulación en la misma posición, que son prácticamente iguales salvo un error.

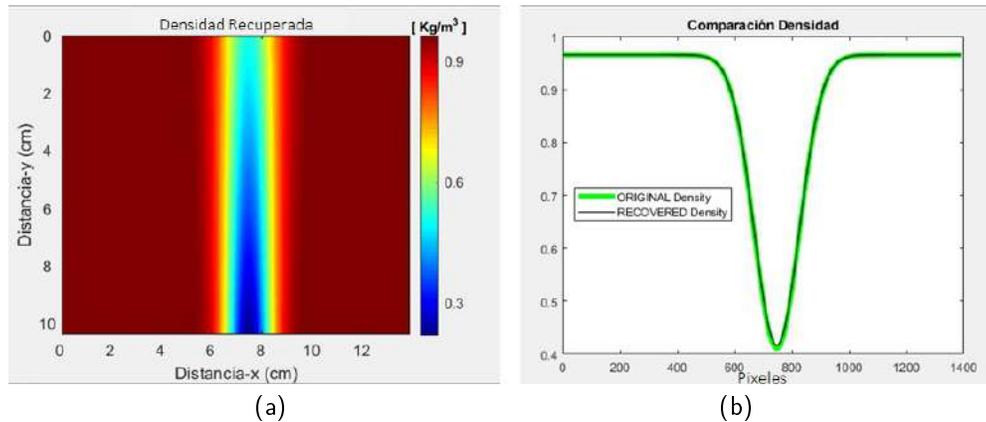


Figure 3.1.11: (a) Densidad obtenida por el MF. (b) Comparación con un perfil de la simulación

Un parámetro importante tanto a la hora de simular los parámetros físicos del modelo como a la hora de recuperarlos después de aplicar el método de Fourier, es la forma en que varía el radio (o desviación estándar). La Ecuación 3.1.1, representa el comportamiento de Δn en cada una de las filas de la matriz de simulación, para las cuales les corresponde un valor particular de r , particularmente para la simulación:

$$r = r_0 e^{-y/y_{max}} \quad (3.1.7)$$

donde $r_0 = 0.01m$. Sin embargo, una vez aplicado el Método de Fourier (MF), no es posible recuperar nuevamente esta función directamente para lograr una recuperación apropiada de los parámetros físicos. Por lo anterior, una vez que recuperamos la fase $\Delta\phi$ por el MF, podemos aplicar una función de ajuste (fitting function) del tipo $f(x) = a_1 e^{\left(\frac{x-a_2}{a_3}\right)^2}$ a cada uno de los renglones de la fase recuperada, para extraer el valor de a_3 de cada función ajustada. Estos valores a_3 corresponden análogamente a los valores de r en la Ecuación 3.1.7 del modelo simulado.

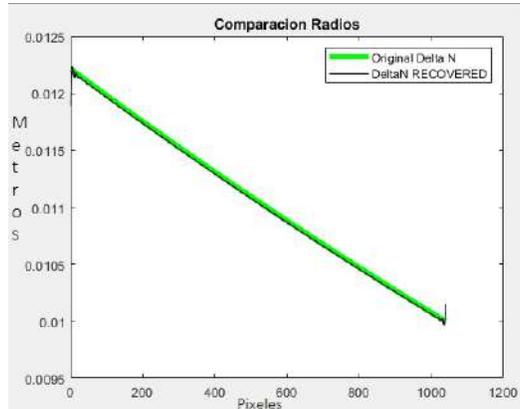


Figure 3.1.12: Comparación de los radios del modelo simulado y los obtenidos por la función de ajuste en la fase $\Delta\phi$ obtenida por el MF.

Como se puede observar en la Figura 3.1.12, si bien las funciones de ajuste son una buena aproximación de la simulación original, esta tiene algunas desviaciones o errores sobre todo en los bordes.

3.1.2.2. Errores

La Tabla 3.1, muestra en términos porcentuales (%), los errores en los parámetros físicos extraídos al introducir un ruido aleatorio (RN por sus siglas en inglés) en la Ecuación 3.1.8, de manera que ahora sea de la forma

$$I_d = 2 + \cos(2\pi u_0 x + \Delta\phi + RN) \tag{3.1.8}$$

siendo el ruido aleatorio un porcentaje del máximo ruido en la fase $2\pi \text{ rad}$. Los errores, fueron calculados siguiendo como primer paso la fórmula

$$error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\Delta\phi_{gen_{m,n}} - \Delta\phi_{rec_{m,n}}|^2}{MN}} \quad (3.1.9)$$

donde $\Delta\phi_{gen_{m,n}}$ representa el término de la fase obtenido ya sea en un modelo teórico simulado o real, y $\Delta\phi_{rec_{m,n}}$ es el término de la fase obtenido por el método de Fourier. Con lo anterior, el error se presenta en términos porcentuales utilizando ahora

$$Error = \frac{error}{MAX(\Delta\phi_{gen_{m,n}})} 100\% \quad (3.1.10)$$

representando $MAX(\Delta\phi_{gen_{m,n}})$ es el valor máximo de la fase moduladora generada ya sea por simulación o con datos reales. La misma fórmula aplica para el cálculo de los errores en Δn , ρ , T , y R .

La Tabla 3.1 muestra los errores en las reconstrucciones para diferentes valores de ruido aleatorio introducido en los interferogramas del interferómetro Mach-Zehnder

Table 3.1: Errores al introducir un error aleatorio en el interferómetro de Mach-Zehnder.

% of 2π	$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	ρ (%)	T (%)	R (%)
0	2.879	2.480	1.216	1.098	0.326
10	3.003	2.604	1.226	1.104	0.276
20	3.822	3.385	1.243	1.121	0.629
30	4.92	4.52	1.234	1.126	0.657
40	7.331	6.754	1.244	1.208	0.803
50	11.655	10.662	1.518	1.405	1.944
60	33.282	29.707	2.161	2.239	2.094
70	34.115	29.730	2.278	2.315	2.959
80	90.24	78.44	8.96	6.88	10.587
85	188.46	152.56	15.5	12.11	2479.95
90	258.71	217.82	23.99	17.878	4317.69

Como se puede apreciar en la tabla arriba, conforme el ruido introducido aumenta, resulta cada vez más complicado recuperar la fase entre los interferogramas, tanto que para errores en la fase por arriba del 70% (Apéndice A2), resulta prácticamente imposible recuperar la fase $\Delta\phi$.

3.1.2.3. Interferogramas del Interferómetro de Wollaston

En el interferómetro de Wollaston, un rayo rojo se descompone en dos con diferentes polarizaciones al salir del prisma. Otro rayo (en verde) produce también otro par de rayos. Un rayo de cada par de rayos coinciden en el espacio y por tanto interfieren. Como podemos ver en la Figura 3.1.13 (detalle Apéndice A1), dos rayos r_1 y r_2 cercanos, que atraviesan un objeto de

fase a diferentes alturas, cruzan zonas con un índice de refracción que difiere de acuerdo a un diferencial de altura δx , a decir, r_1 cruza una zona con un índice de refracción $n(x)$ y r_2 una zona con un índice de refracción $n(x + \delta x)$. Los rayos r_1 y r_2 corresponden a dos rayos con diferentes polarizaciones.

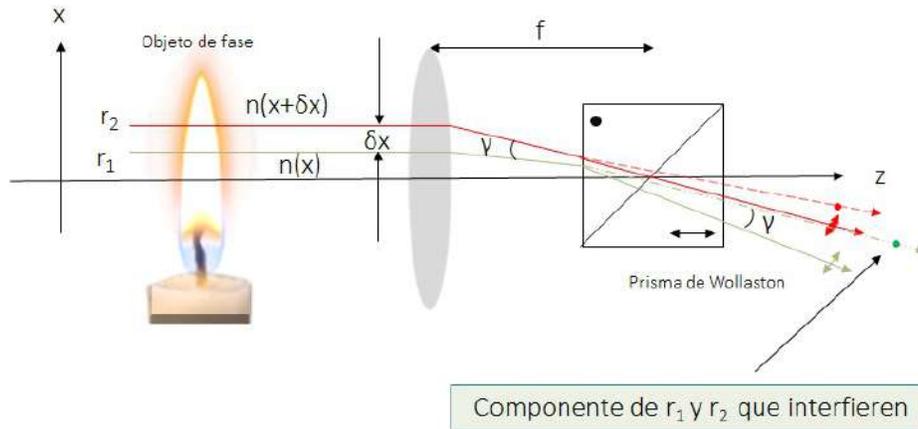


Figure 3.1.13: Esquema del comportamiento de dos rayos que interfieren a la salida del Prisma de Wollaston.

Cada uno de los rayos, experimentará un camino óptico (OPD) diferente, siendo estos:

$$OPD_1 = \int n(x) dz \quad (3.1.11)$$

$$OPD_2 = \int n(x + \delta x) dz$$

Nuevamente, la intensidad con la que ambos rayos van a interferir será de la forma $I = a + b \cos(\phi_2 - \phi_1)$, donde $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ es al mismo tiempo

$$\Delta\phi = \int [n(x + \delta x) - n(x)] dz \quad (3.1.12)$$

que a su vez, podemos representarla como

$$\Delta\phi = \int \frac{\partial n(x)}{\partial x} \delta x dz \quad (3.1.13)$$

donde podemos ver que ahora, la diferencia de fase para un interferómetro de Wollaston es proporcional a la derivada del índice de refracción. Por lo anterior, podemos utilizar nuevamente el hecho de que $n = n_0 + \Delta n$ para reescribir la Ecuación 3.1.13, de manera que tendremos que

$$\Delta\phi = \delta x \int \frac{\partial(\Delta n)}{\partial x} dz \quad (3.1.14)$$

donde Δn es el mismo de la Ecuación 3.1.1.

Con la información hasta aquí obtenida, queda obtener los interferogramas. El primer interferograma de referencia no deformado, se obtiene como ya se hizo en la sección anterior. El patrón de interferencia deformado por el paso de la luz por el objeto de fase, si bien se obtiene como se hizo en la Ecuación 2.5.11, este toma ahora la forma:

$$I_d = a + b \cos(2\pi f_0 x + \frac{2\pi}{\lambda} \delta x \int_0^L \frac{\partial(\Delta n)}{\partial x} dz) \quad (3.1.15)$$

donde poniendo de manera explícitamente el término del argumento del coseno, se tiene que:

$$I_d = a + b \cos(2\pi f_0 x + \frac{2\pi}{\lambda} \delta x \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \Delta n_0 e^{\frac{y}{y_{max}}} e^{-\frac{x^2+z^2}{r^2}} dz) \quad (3.1.16)$$

donde al realizar las operaciones indicadas en el argumento del coseno, la Ecuación 3.1.16 queda como:

$$I_d = a + b \cos(2\pi f_0 x + \frac{2\pi r}{\lambda} \delta x \sqrt{\pi} \frac{\partial(\Delta n)}{\partial x}) \quad (3.1.17)$$

y donde $\frac{\partial(\Delta n)}{\partial x} = -\frac{2x}{r^2} \Delta n$ y $\delta x = f_0 \gamma$. En esta simulación, se consideró una distancia focal $f_0 = 0.28m$ y un ángulo de salida del prisma $\gamma = \frac{0.5\pi}{180} rad$ (0.5°).

Si como se muestra en la Figura 3.1.13, si el centro del prisma y el punto focal de la segunda lente coinciden y si hay una distribución homogénea a través de la trayectoria seguida por el haz de luz, no existirá una diferencia de fase entre dos rayos. Por lo anterior, no sería posible generar un patrón de franjas de interferencia, o de manera análoga, se dice que se tiene un patrón de franja de ancho infinito.

El anterior inconveniente en cuanto a la posible falta de franjas de interferencia, se soluciona desplazando (horizontal o verticalmente) el prisma como se precia en la Figura 3.1.14, de manera que ahora los haces seguirán trayectorias con una diferencia de camino óptico entre ellos, generando franjas de anchura finita.

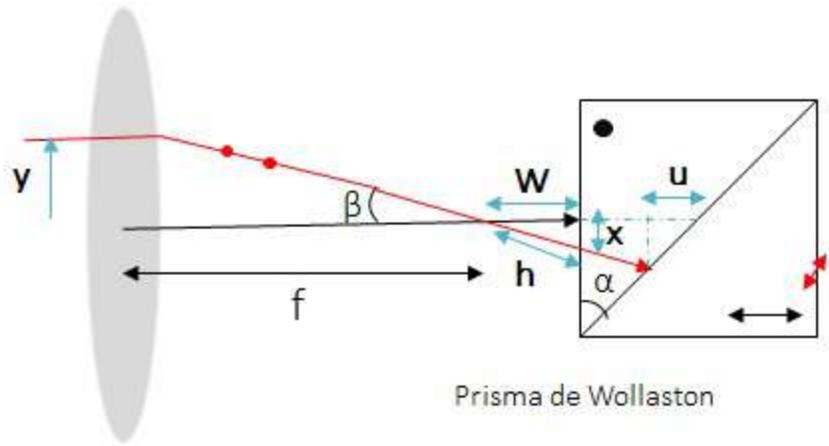


Figure 3.1.14: Prisma de Wollaston desplazado horizontalmente

La diferencia de camino óptico para dos rayos conjugados, después de desplazar el prisma una distancia W como se indica en la Figura 3.1.14, se puede despreciar el ángulo entre ellos para tener que ambos haces recorren la misma distancia iniciando en la posición Y , pasando por el punto focal f hasta incidir en el prisma. Siendo

$$\tan\beta = \frac{y}{f} \quad (3.1.18)$$

y por simple inspección se observa que el haz incide por debajo de la línea media del prisma una distancia x . Como consecuencia de lo anterior, cada rayo se propagará una distancia de menor dimensión que u en la primera sección del prisma y mayor que u en la segunda sección del prisma. Siendo aproximadamente

$$u = x \tan(\alpha) \quad (3.1.19)$$

donde recordemos que α es el ángulo de cuña del prisma. Por otro lado, también

$$x = W \tan(\beta) = \frac{y}{f} W \quad (3.1.20)$$

y utilizando la aproximación paraxial $\alpha \approx \tan(\alpha)$, obtenemos que

$$u = \alpha W \frac{y}{f} \quad (3.1.21)$$

que nos permite obtener que el camino óptico para un rayo con polarización perpendicular al

plano de incidencia es

$$l_1 = n_o \left(\frac{a}{2} - \alpha W \frac{y}{f_0} \right) + n_e \left(\frac{a}{2} + \alpha W \frac{y}{f_0} \right) \quad (3.1.22)$$

donde a es el ancho del prisma. De manera análoga, para el rayo con polarización perpendicular al primero, se tiene que el camino óptico viene dado por

$$l_2 = n_e \left(\frac{a}{2} - \alpha W \frac{y}{f_0} \right) + n_o \left(\frac{a}{2} + \alpha W \frac{y}{f_0} \right) \quad (3.1.23)$$

de manera que la diferencia de camino óptico (OPD) viene dada por

$$\Delta l = 2\alpha(n_e - n_o)W \frac{y}{f_0} = \gamma W \frac{y}{f_0} \quad (3.1.24)$$

y la correspondiente fase óptica resulta ser

$$\phi_p = \frac{2\pi\gamma W y}{f_0 \lambda_0} \quad (3.1.25)$$

En la anterior ecuación se puede observar que todos los terminos son constantes, exepcto y , indicando que la fase varía linealmente. Con lo anterior, se puede deducir que la posición de los máximos de intensidad corresponden con

$$y_m = \frac{m\lambda_0 f_0}{\gamma W} \quad (3.1.26)$$

con m un número entero. Estas variaciones de intensidad corresponden con franjas rectas y paralelas al eje X, que es equivalente a incluir una señal portadora (carrier frequency). Finalmente, la distancia comprendida entre dos máximos consecutivos viene dada por

$$\delta y = \frac{\lambda_0 f_0}{\gamma W} \quad (3.1.27)$$

que nos indica que si queremos un mayor número de franjas, se debe aumentar ya sea W o γ .

Con las consideraciones anteriores, La Figura 3.1.15 nos muestra la manera en que se distribuye el patrón de intensidad.

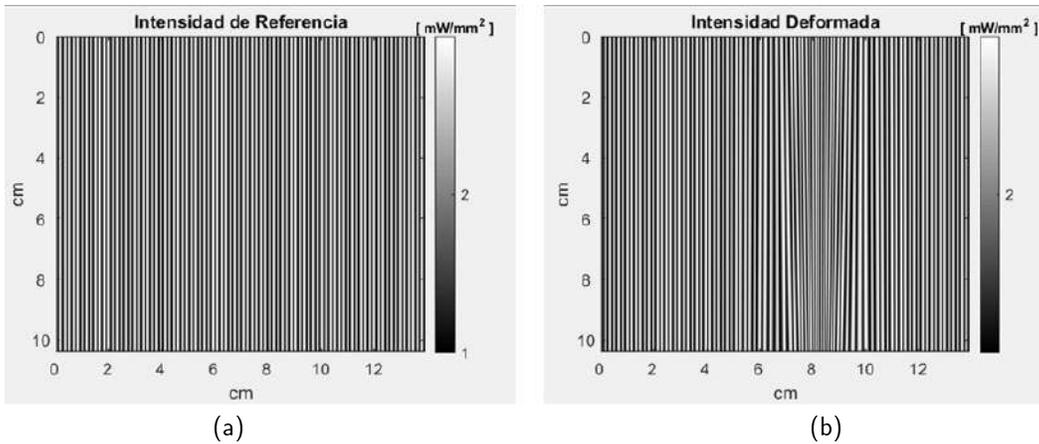


Figure 3.1.15: Intensidades en el interferómetro de Wollaston (a) de referencia y (b) deformada.

Si bien, la Figura 3.1.3 representa para el interferómetro de Wollaston el mismo modelo de flama con decaimiento exponencial, no será así para la fase, ya que como se analizó previamente, esta será proporcional a la derivada del índice de refracción Δn .

En la Figura 3.1.16, se puede observar un panorama completo del comportamiento de la fase $\Delta\phi$ simulada en el interferómetro de Wollaston, así como una vista de un perfil en donde claramente se observa que ya no es gaussiano debido a la derivada implicada del índice de refracción.

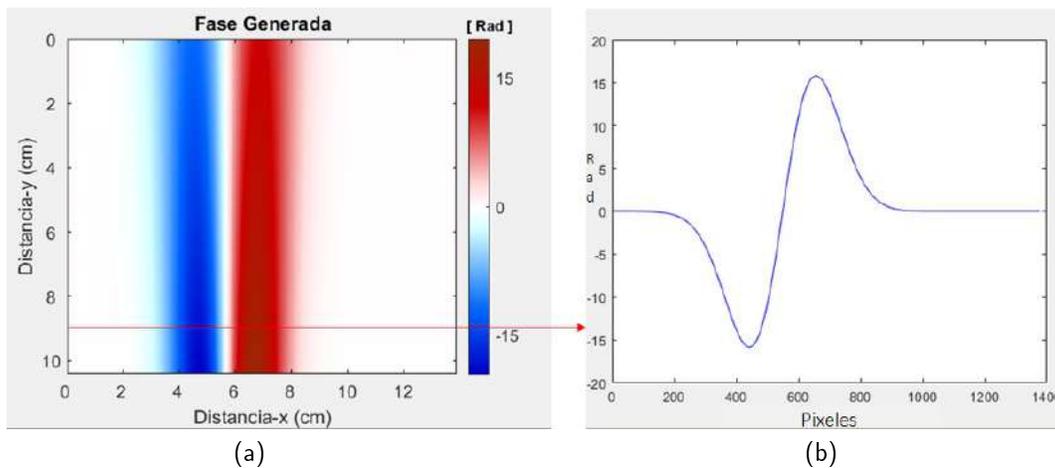


Figure 3.1.16: (a) Vista completa de la fase generada. (b) Perfil cerca de la base.

Una vez aplicado el Método de Fourier en los interferogramas de la Figura 3.1.15 y extraer la fase entre ellos, podemos corroborar nuevamente la eficacia del método.

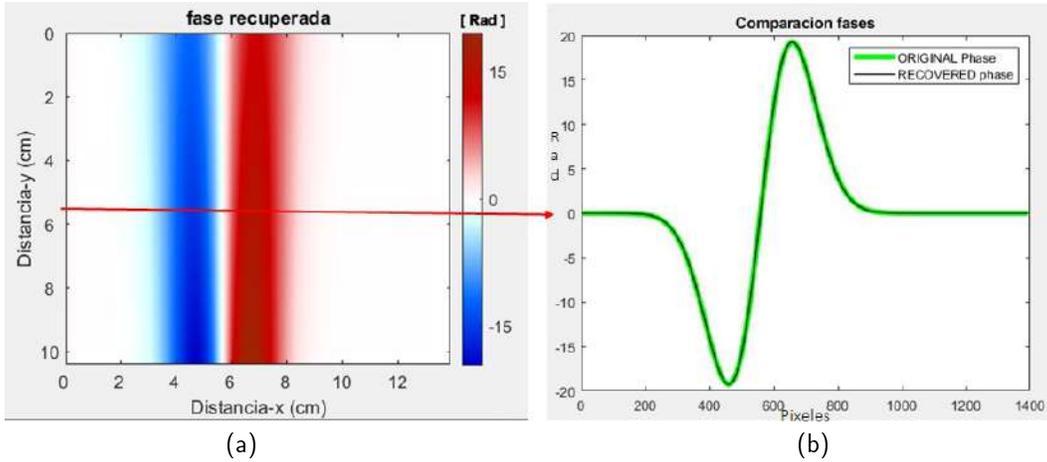


Figure 3.1.17: (a) Fase $\Delta\phi$ desenvuelta obtenida por el MF. (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana..

La Figura 3.1.17 da cuenta de la eficacia del Método de Fourier nuevamente, ya que una comparación entre un perfil de la fase generada (simulada) y la recuperada por el MF, muestra que salvo un pequeño error en ausencia de ruido, ambos perfiles se encuentran superpuestos.

Es nuevamente a partir de la fase desenvuelta $\Delta\phi_w$, que podemos recuperar los parámetros físicos que nos interesan. Para recuperar el cambio de índice de refracción Δn_{rec} , es decir, nuestro modelo inicial salvo un error, debemos retomar parte del argumento de la Ecuación 3.1.17 para así obtener

$$\Delta n_{rec} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta x} \frac{1}{r} \int \Delta\phi_w dx \quad (3.1.28)$$

en donde al ser $\Delta\phi_w$ una matriz, $\int \Delta\phi_w dx$ representa una integración numérica sobre cada uno de los renglones.

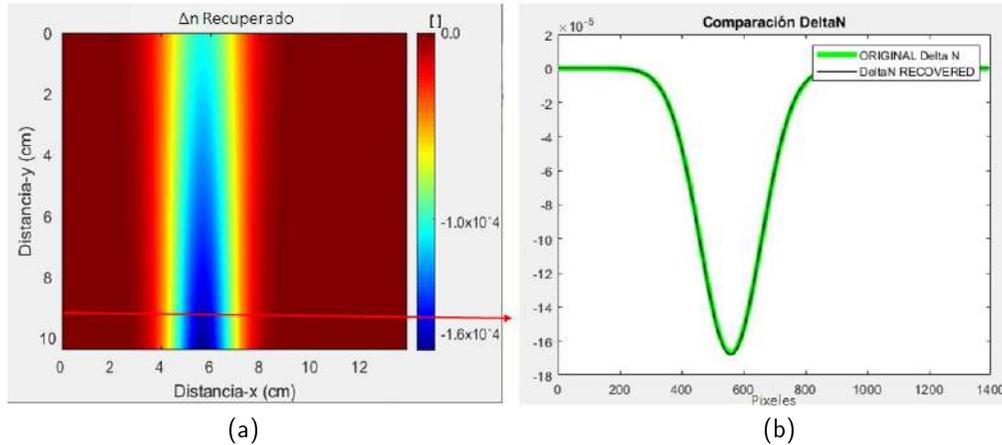


Figure 3.1.18: (a) Cambio de índice de refracción Δn_{rec} obtenido por la integración numérica de $\Delta\phi_w$ (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana.

Para obtener los demás parámetros (temperatura, densidad y cambio de índice de refracción) se sigue el mismo procedimiento que se siguió con el interferómetro de Mach-Zehnder. En la Figura 3.1.19 es posible ver que salvo un error, el Método de Fourier nos permite con muy buena aproximación, recuperar a partir de la fase desenvuelta obtenida, y que mediante un interferómetro de Wollaston nos permite medir.

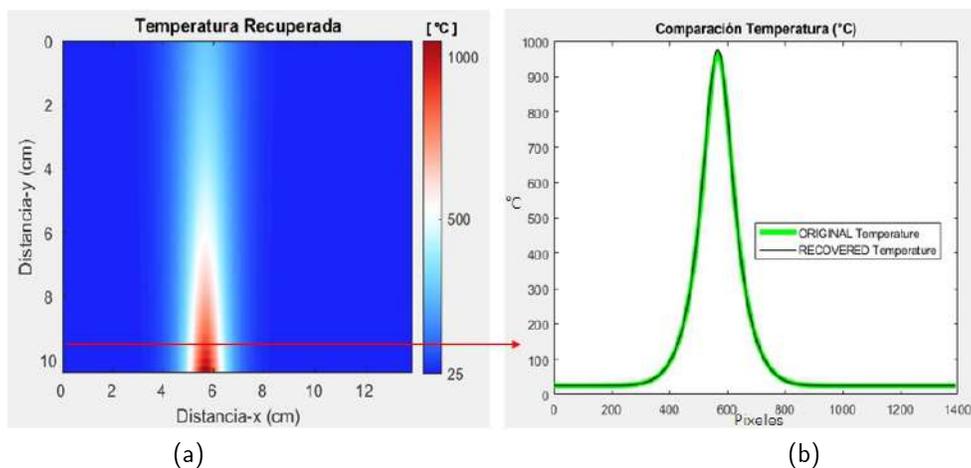


Figure 3.1.19: (a) Distribución de temperatura obtenido a partir del Método de Fourier. (b) Comparación con un perfil del modelo ajustado a una función Gaussiana.

Podemos nuevamente a partir de la ecuación de Glaston-Dale, obtener un mapa de la distribución de la densidad, la cual se puede ver en la Figura 3.1.20 con una respectiva comparación entre un perfil de la densidad obtenida a partir del método de Fourier y uno obtenido por simulación. Los perfiles muestran el parámetro *densidad* obtenido por Fourier, es una buena aproximación

del generado en la simulación.

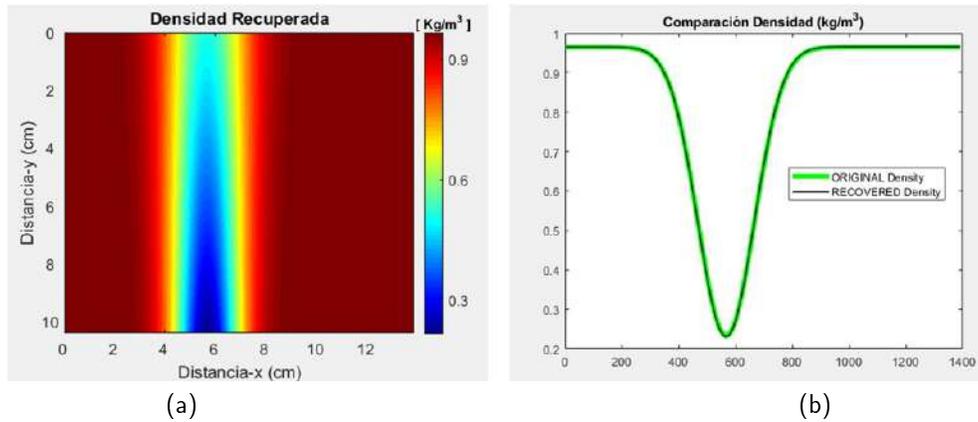


Figure 3.1.20: (a) Distribución de densidad obtenido a partir del Método de Fourier (b) Comparación con un perfil del modelo simulado (derecha).

En cada renglón de la matriz que representa la Ecuación 3.1.28, su correspondiente valor de r , puede ser encontrado utilizando

$$\Delta n' = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta x} \int \Delta\phi_w dx \quad (3.1.29)$$

ahora, un ajuste de la forma $f(x) = a_1 e^{\left(\frac{x-a_2}{a_3}\right)^2}$ permite extraer cada término a_3 que corresponde al valor particular de r para cada renglón descrito por Δn_{rec} .

Una vez hecho lo anterior, es posible mediante la Ecuación 3.1.28 comparar estos radios .

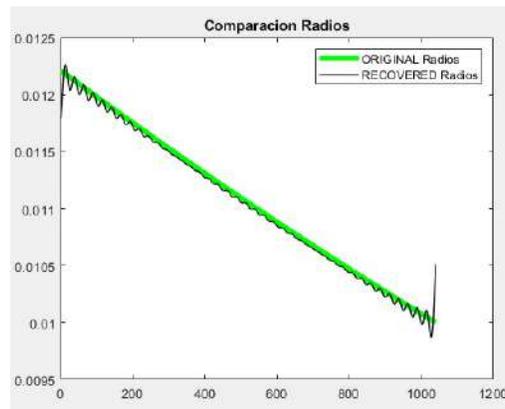


Figure 3.1.21: Comparación del radio (en mts) de la simulación (verde) y el recuperado (negro) en el MF.

La Tabla 3.2 muestra los errores para diferentes valores de ruido aleatorio introducido en los interferogramas producidos en el interferómetro de Wollaston en términos porcentuales obtenidos por las Fórmulas 3.1.9 y 3.1.10.

Table 3.2: Errores en términos porcentuales al introducir un ruido aleatorio.

% of 2π	$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	ρ (%)	T (%)	R (%)
0	5.078	2.556	0.658	0.685	0.198
10	5.171	2.497	0.649	0.677	0.174
20	5.920	2.637	0.669	0.690	0.232
30	13.127	4.359	1.353	1.386	1.151
40	12.003	4.706	1.151	1.141	0.968
50	12.800	3.697	1.034	1.053	0.868
60	17.462	4.404	1.090	1.053	0.888
70	26.272	8.901	2.276	2.125	1.827
80	115.093	21.485	9.470	10.100	4.740
85	230.356	627.019	184.364	1159.941	60.767
90	-	-	-	-	-

Para valores por arriba del 80% de 2π , ya es prácticamente imposible recuperar algo de la imagen, parámetros físicos y errores (Apéndice A2). Lo anterior nos demuestra que este interferómetro es un dispositivo con mayor robustez.

Capítulo 4

RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.1. Interferómetro Mach-Zehnder

4.1.1. Arreglo experimental

Si bien ya se mostró en secciones pasadas la configuración básica del interferómetro de Mach-Zehnder, la Figura 4.1.1 muestra una vista completa del arreglo óptico utilizado en la presente tesis.

Los componentes utilizados en el arreglo experimental son:

- (1) Láser de 633 nm (30 mw).
- (2) Objetivo de microscopio (40X).
- (3) Lente colimadora (de 10 cm de diámetro 50 cm de distancia focal).
- (4) Divisor de haz (BS1).
- (5) Espejo (M1).
- (6) Objeto transparente (flama de vela de cera).
- (7) Espejo (M2).

- (8) Divisor de haz (BS2).
- (9) Lente (de 10 cm de diámetro y 54 cm de distancia focal).
- (10) Lente biconvexa (2.5 cm de diámetro y 3 cm de distancia focal).
- (11) Cámara Lumenera USB 2.0 (1040x1392 pixeles, exposición de $90\mu s$, ganancia 2, con una región de observación de 10cm x 10cm).

Para formar los interferogramas de referencia y deformado, los haces de luz se dividen en dos en el primer divisor de haz (BS1) viajando uno de los haces hacia el primer espejo (M1) y el otro haz hacia el segundo espejo (M2), para posteriormente interferir y llegar a una lente (9) que dirija los patrones de franjas formados por la interferencia hacia el detector (11).

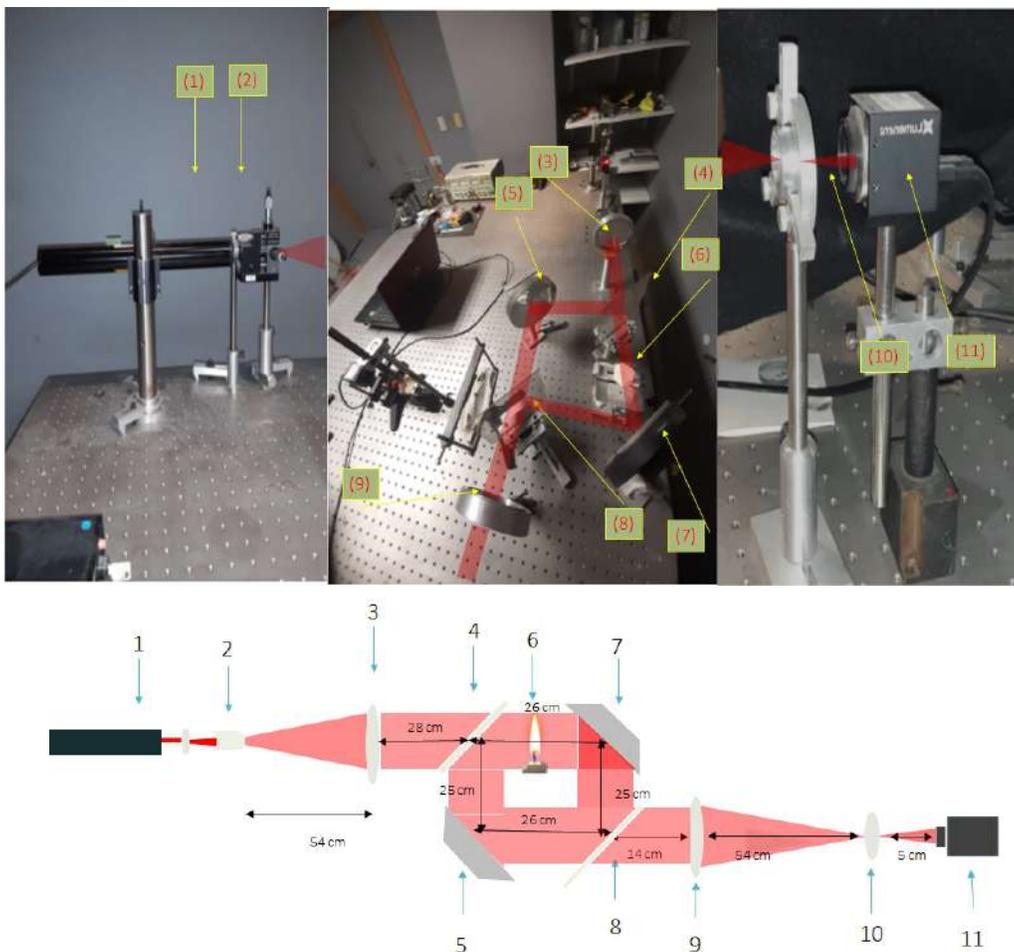


Figure 4.1.1: Arriba: Vista completa del interferómetro Mach-Zehnder. Abajo: Esquema del interferómetro (no está a escala).

Los patrones de franjas que incidieron en el detector, se mostraron en la pantalla de la computadora pudiendo visualizarlos como se aprecia en la Figura 4.1.2. Como puede verse, el patrón de franjas se ve alterado (deformado) debido al cambio en el índice de refracción que atraviesa uno de los haces. La resta de ambos interferogramas nos permite dar en primer instancia una forma del objeto de fase por el que atraviesa uno de los haces.

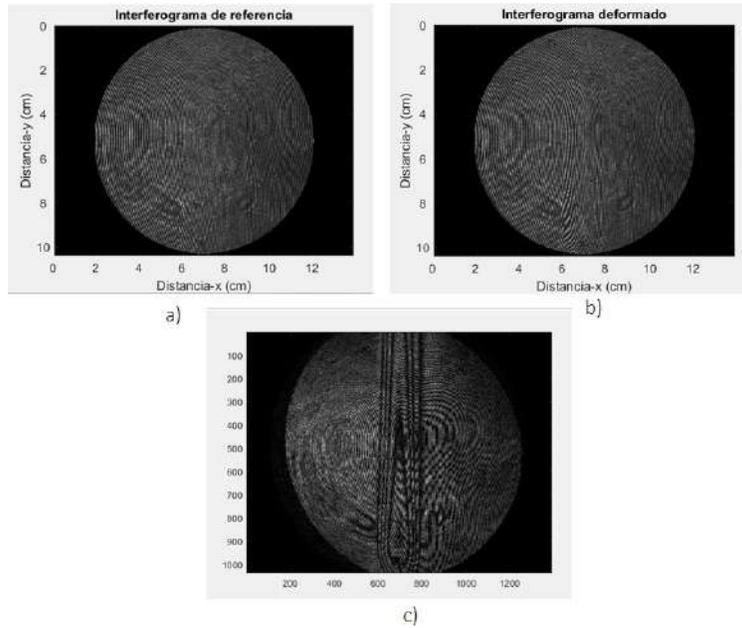


Figure 4.1.2: a) Interferograma de referencia. b) Deformado. c) Resta de ambos.

Como lo exige el método, se obtienen las transformadas de Fourier de cada uno de los interferogramas. En la Figura 4.1.3 se aprecian como era de esperar, tres lóbulos. Dos de ellos se filtran mediante un filtro rectangular, de dejando en este caso cada uno de los lóbulos derechos de las transformadas de Fourier de la imagen de referencia y deformada.

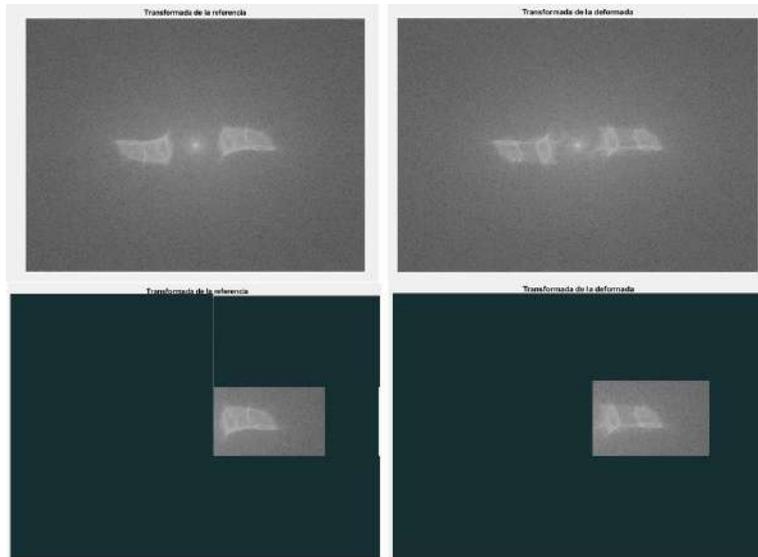


Figure 4.1.3: Arriba: Transformadas de Fourier de los interferogramas. Abajo: Filtrado aplicado.

Mediante la Ecuación 2.5.18, se obtiene la fase envuelta ($\Delta\phi_w$), y utilizando un algoritmo de desenvolvimiento (que consiste en calcular la diferencia de fase entre dos pixeles, si ésta es mayor que π , se suman 2π , y si es menor, se restan 2π) de la fase, se obtuvo la fase desenuelta $\Delta\phi$ tal como se muestra en la Figura 4.1.4 y donde es posible ver que el valor máximo de la fase entre los interferogramas oscila los 40 rad.

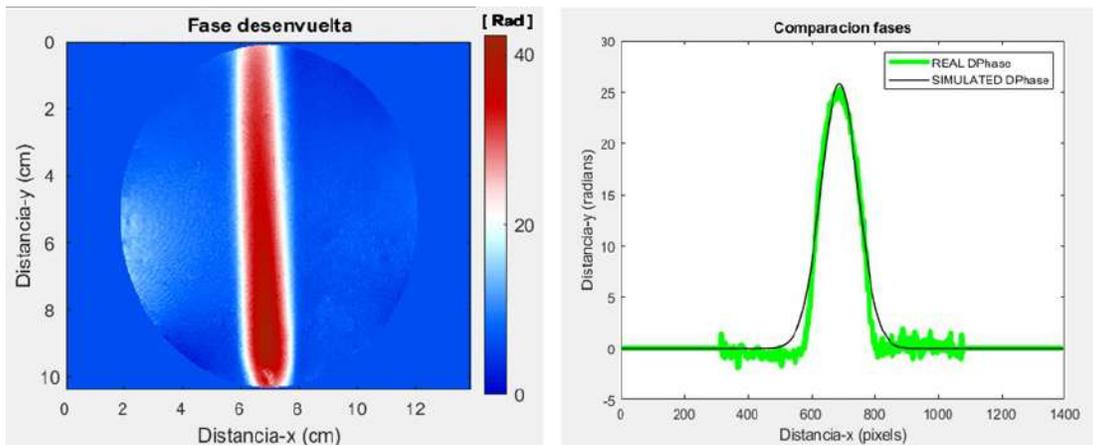


Figure 4.1.4: Fase obtenida de las imágenes y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

Una vez obtenida la fase entre los interferogramas, utilizando la Ecuación 3.1.4, se despeja Δn de manera que

$$\Delta n = \frac{\lambda}{2\pi r_0 \sqrt{\pi}} \Delta \phi \quad (4.1.1)$$

proporciona los valores para el cambio del índice de refracción. Se muestra en la Figura 4.1.5, que el valor mínimo en el cambio del índice de refracción $\Delta n_0 = 1.6 \times 10^{-4}$ es congruente con el valor resultante a un ajuste gaussiano el cual arroja

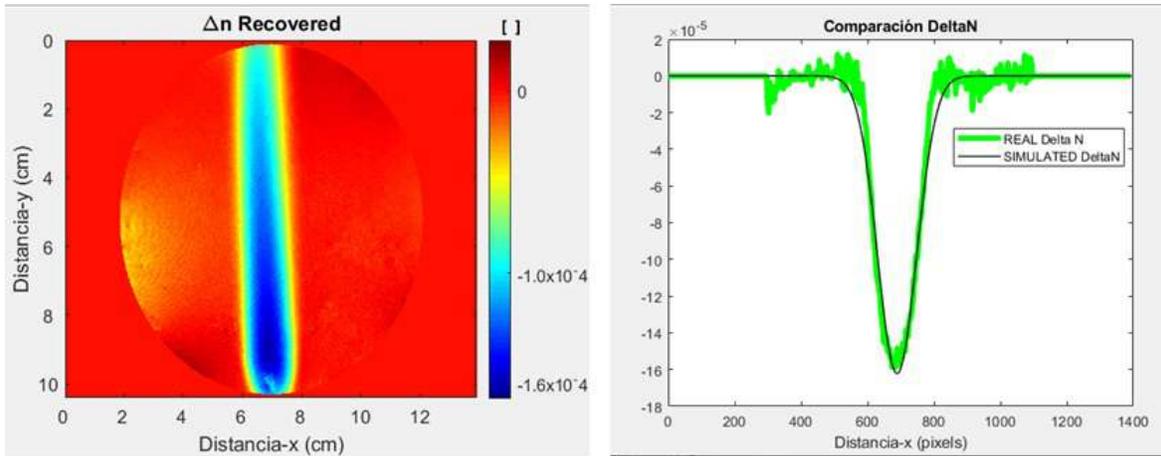


Figure 4.1.5: Cambio en índice de refracción y comparación de un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

Ahora, considerando que $\Delta n + n_0 = n$, la Ecuación 3.1.5 proporciona la Figura 4.1.6 que muestra el mapa de temperaturas del objeto transparente. Como se puede ver, el mapa de temperatura muestra que la temperatura máxima en la flama está alrededor de los 1300 K, lo que es consistente con la simulación que arroja una temperatura máxima de 1298.15 K.

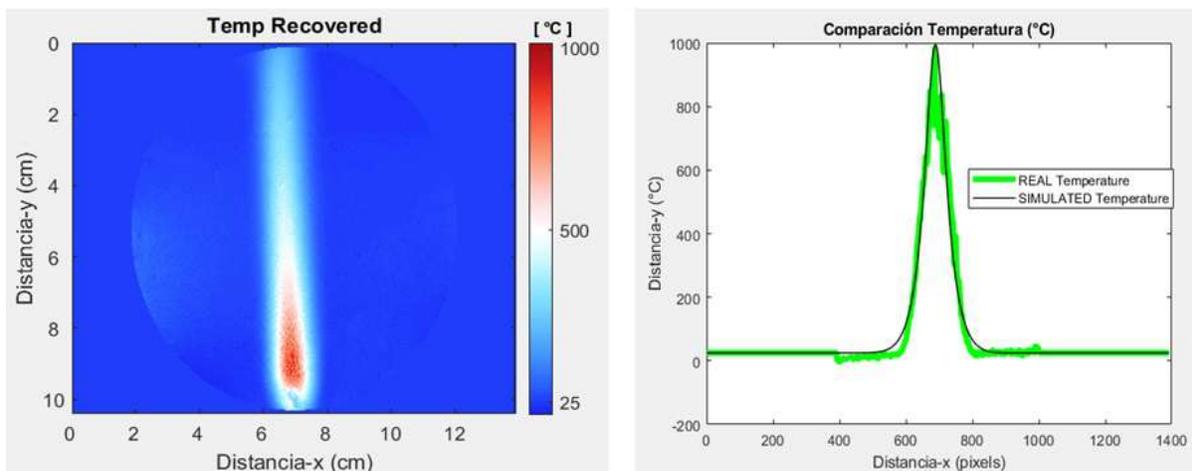


Figure 4.1.6: Distribución completa de la temperatura de la flama y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

Para obtener la distribución de la densidad del objeto de fase, la ecuación de Glaston-Dale (Ec. 3.1.6) resulta la adecuada. La Figura 4.1.7 muestra la forma en que la densidad se distribuye. La densidad mínima obtenida es de 0.224 kg/m^3 y la máxima de 0.965 kg/m^3 .

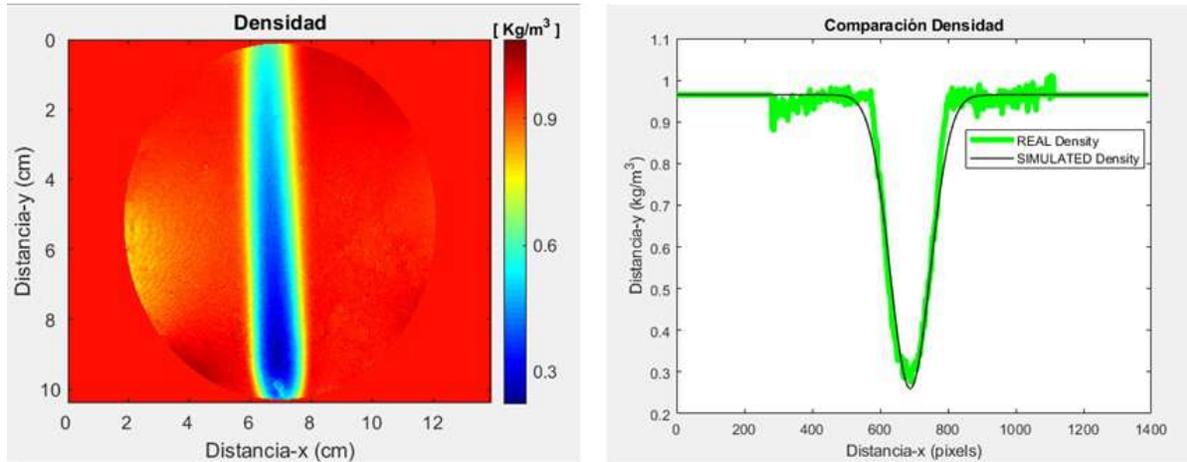


Figure 4.1.7: Distribución de la densidad y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

4.1.2. Errores entre valores ajustados y datos experimentales del interferómetro Mach-Zehnder

La Ecuación 3.1.9 y 3.1.10 permitieron evaluar el error porcentual entre el modelo numérico y las imágenes experimentales. Las fórmulas de errores evaluadas en la zona más efectiva del objeto de fase (sin los alrededores), muestran que los errores (Tabla 4.1) entre cada uno de los parámetros físicos reales y simulados, son pequeños.

Table 4.1: Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).

$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	T (%)	ρ (%)
4.9	4.4	2.9	2.9

Cabe mencionar que en cada una de los perfiles de comparación, se considera el tamaño del sensor en pixeles en la base (1392 pixeles) y el valor numérico correspondiente a cada parámetro físico en la altura.

4.1.3. Segunda medición

Ahora se analiza una segunda imagen con la finalidad de corroborar el método y comparar con la primer medición. La Figura 4.1.8 muestra las transformadas de Fourier de las imágenes de referencia y de la deformada, así como de la fase $\Delta\phi$ entre ambas imágenes y la comparación con un perfil de la simulación.

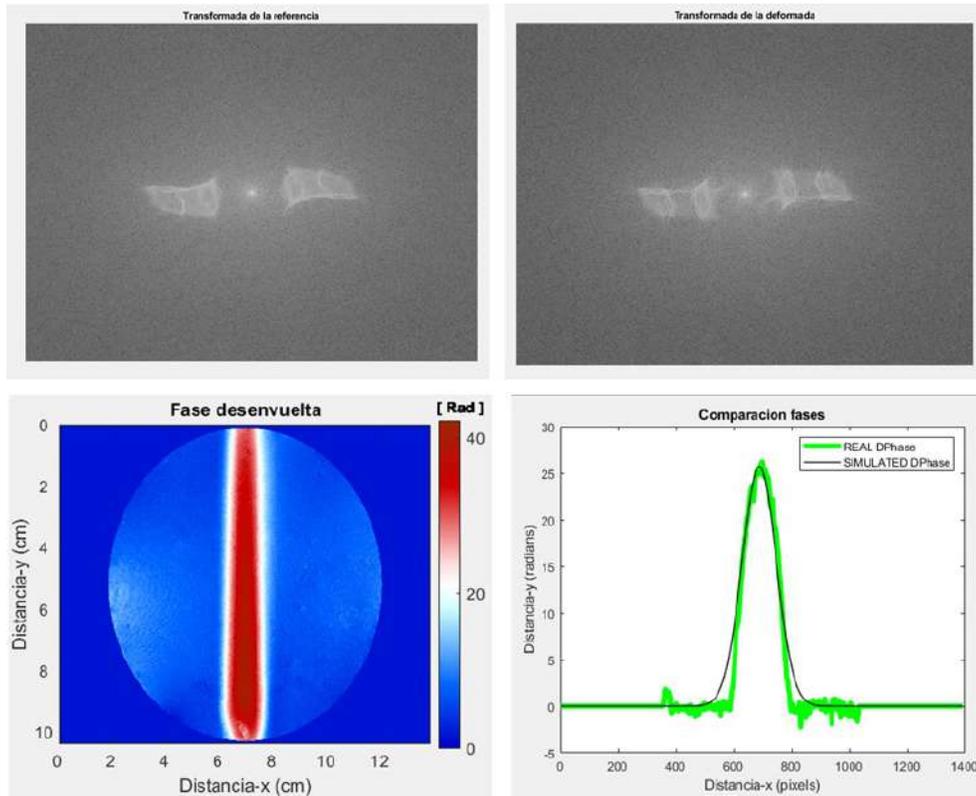


Figura 4.1.8: Arriba: Transformadas de Fourier de los interferogramas de referencia y deformado. Abajo: Fase obtenida (izquierda) y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana. (derecha).

La Figura 4.1.9 muestra en primer lugar, la distribución del cambio del índice de refracción Δn , de la temperatura ($^{\circ}C$) y de la densidad (kg/m^3), todos los anteriores, acompañados de su respectiva comparación con un perfil de la simulación numérica.

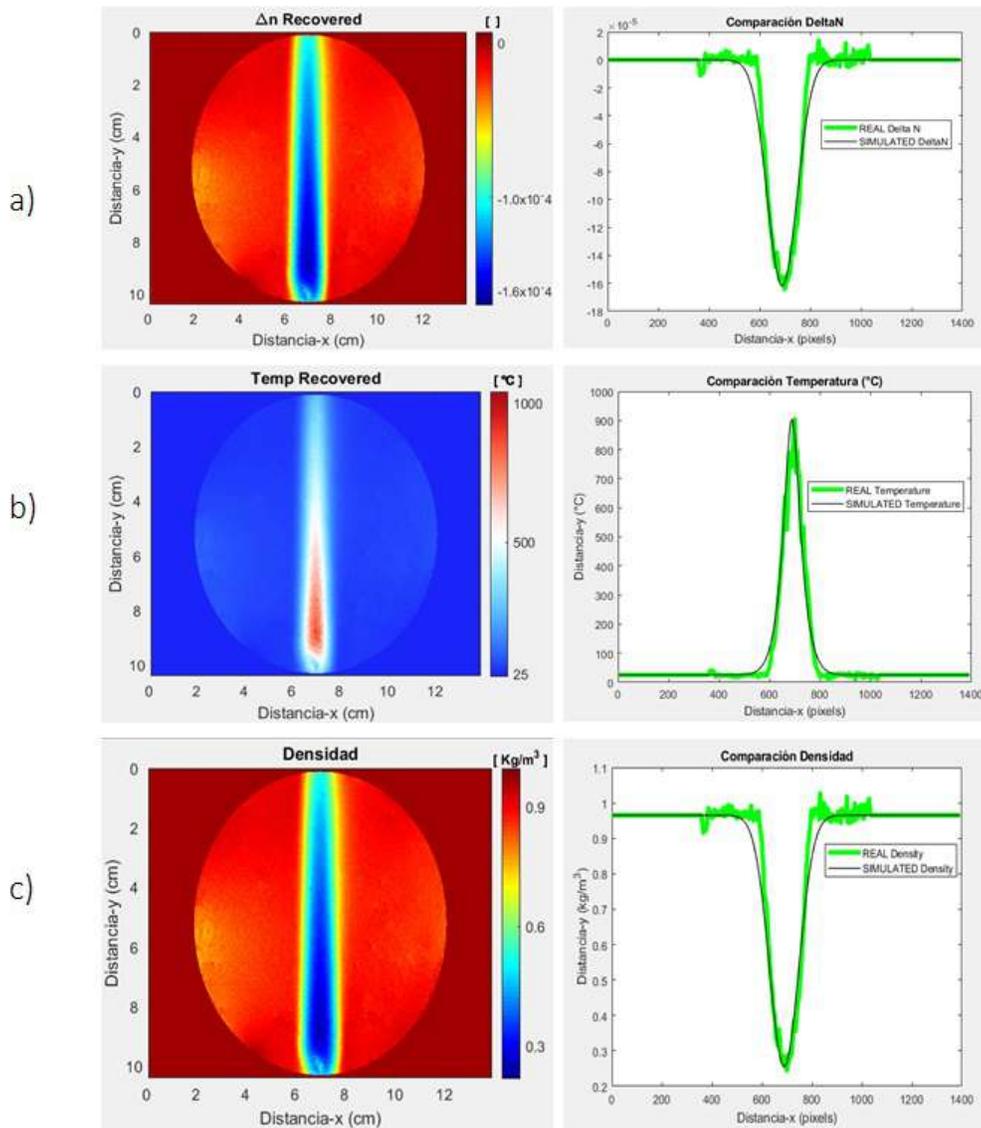


Figura 4.1.9: Distribuciones de: a) Densidad y comparación con la simulación. b) Temperatura y comparación con la simulación. c) Densidad y su comparación con los valores ajustados a una función gaussiana.

Los errores relacionados con la segunda medición son los mostrados en la Tabla 4.2, estos errores son realmente mínimos entre otras razones, debido a que la flama se muestra claramente vertical, lo cual corresponde al modelo simulado.

Table 4.2: Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).

$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	T (%)	ρ (%)
1.8	1.7	1.1	1.1

Si bien, los errores mostrados por la primer y segunda imagen son pequeños, se observa que para la segunda medición, los errores son menores que los de la primer medición. Lo anterior es consistente con el hecho de que en la primer medición se puede observar una ligera inclinación que como era de esperarse, se vió reflejada en el cálculo de los errores.

4.1.4. Tercera medición (con turbulencia).

Para probar el método añadiendo un un poco de turbulencia (ruido), se agita ligeramente el espacio circundante a la flama. La Figura 4.1.10 muestra los interferogramas de referencia y deformado producidos, así como de la resta de ambas imágenes donde es posible apreciar que la forma del flujo, ya no es laminar sino turbulento.

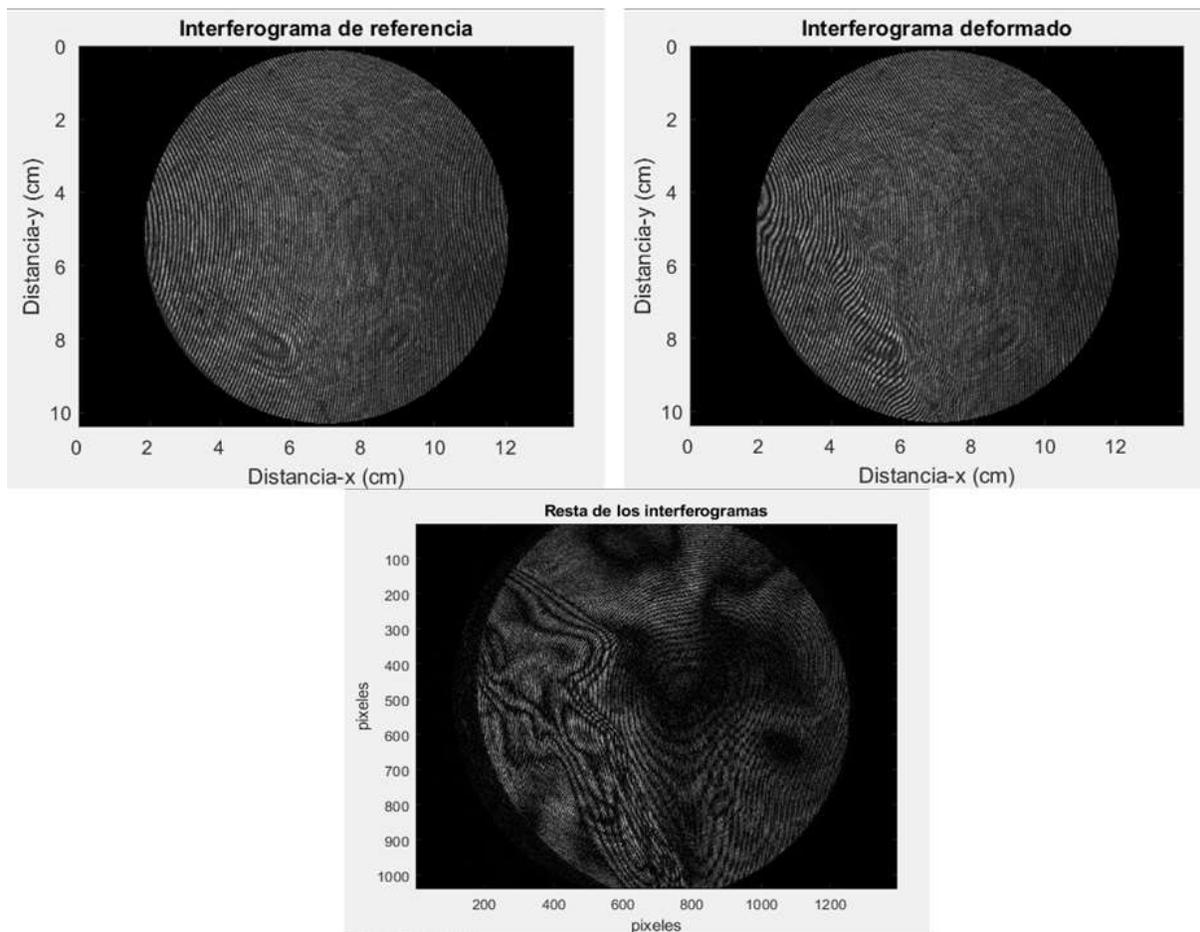


Figura 4.1.10: Arriba: Interferogramas de referencia y deformado. Abajo: Resta de ambas imágenes.

La transformada de Fourier de la imagen deformada, ahora luce con un aspecto algo diferente con respecto a las imágenes de la primer y segunda medición, siendo ahora la fase obtenida la que se muestra en la Figura 4.1.11.

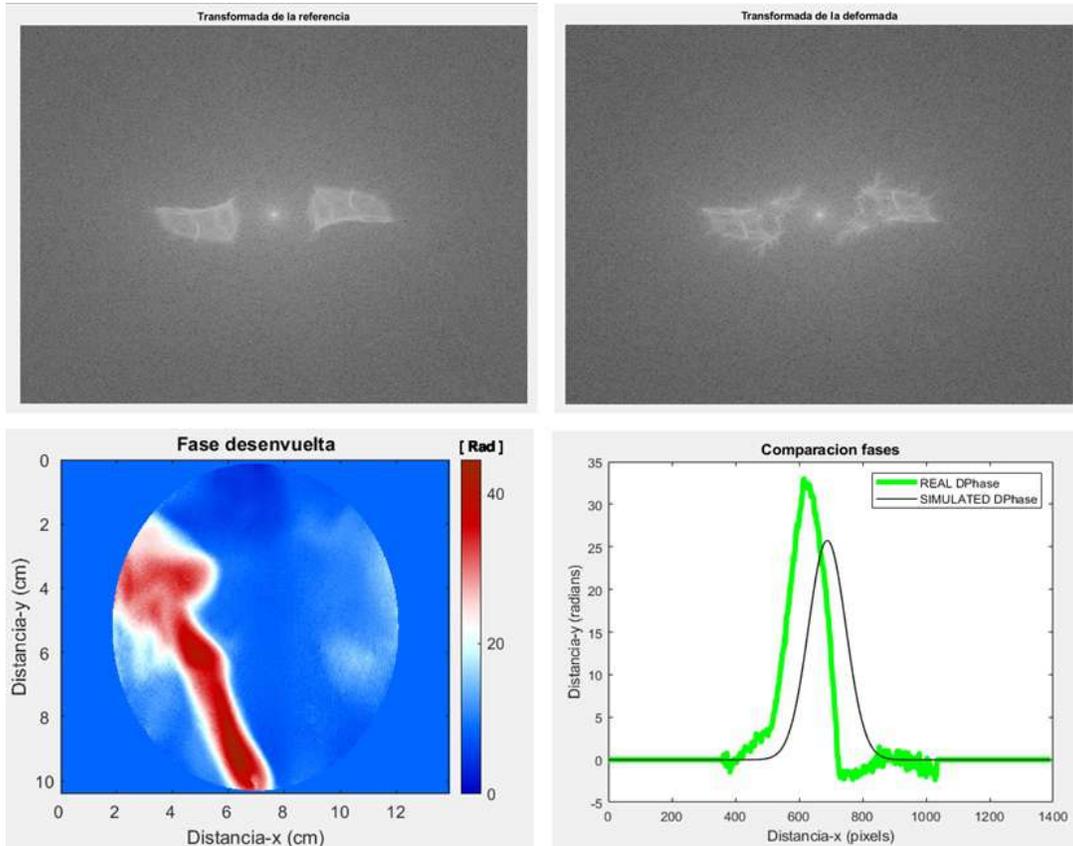


Figura 4.1.11: Arriba: Transformadas de Fourier de imagen de referencia y deformada. Abajo: Fase obtenida y comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

Finalmente, las distribuciones del cambio del índice de refracción, temperatura y densidad, se muestran en la Figura 4.1.12, cada uno con su comparación con la simulación numérica.

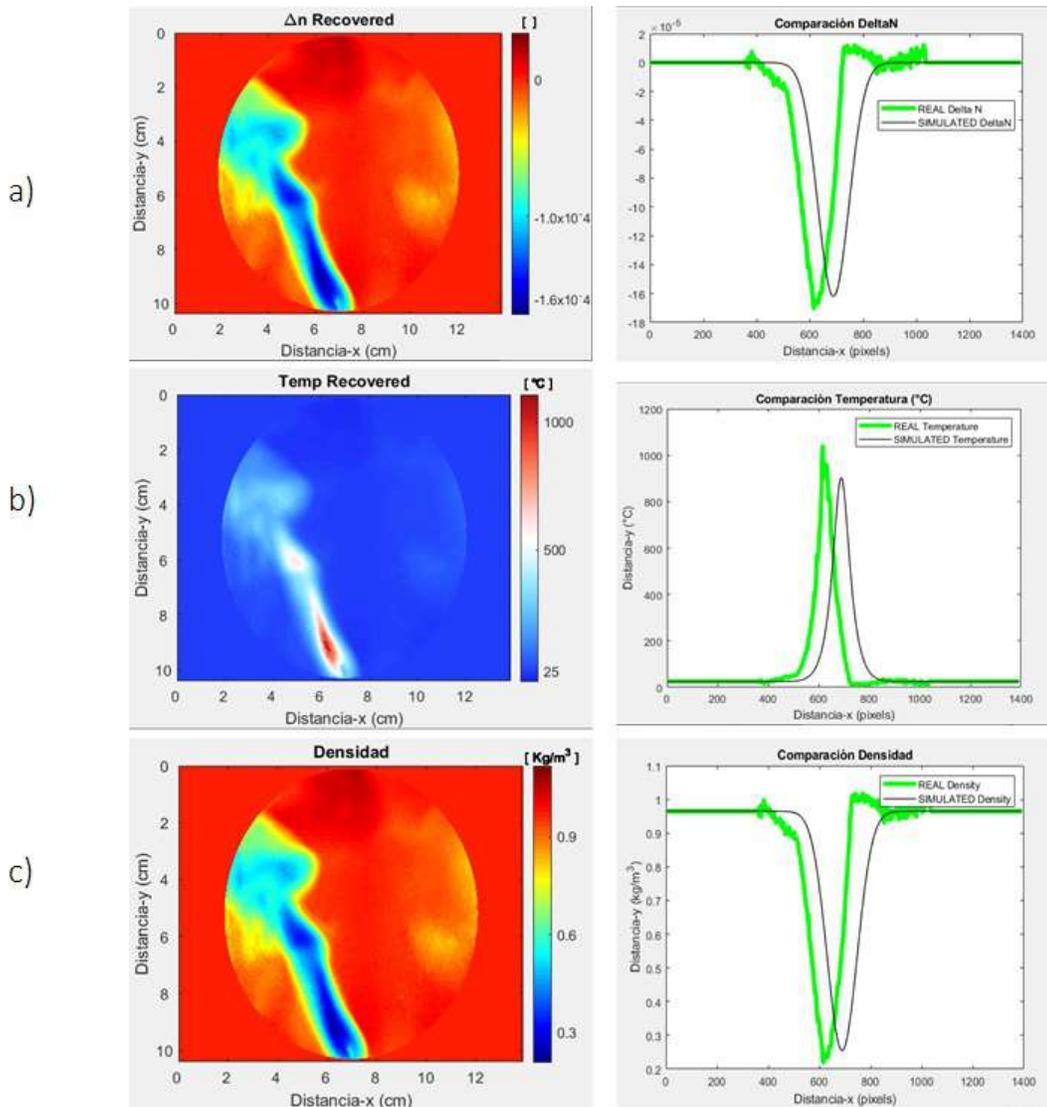


Figura 4.1.12: Parámetros físicos recuperados del flujo turbulento y su comparación con un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana. a) Índice de refracción. b) Temperatura. c) Densidad.

La Tabla 4.3 muestra los errores de las mediciones del objeto de fase que ya no es axisimétrico debido a la turbulencia.

Table 4.3: Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales (Mach-Zehnder).

$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	T (%)	ρ (%)
15.4	17.1	11.6	6.5

A pesar de haber introducido ruido a la imagen deformada, aún fue posible reconstruirla debido a que como se esperaba, un ruido equivalente a un 20 %, sería perfectamente tolerado

por el interferómetro de Mach-Zehnder.

4.2. Interferómetro de Wollaston

4.2.1. Arreglo experimental

Ya se habló en la sección 5.2 a grandes rasgos de la óptica básica para la conformación de un interferómetro de Wollaston, sin embargo, es a la hora de montarlo que se logra entender que existen tantas variantes del interferómetro, como diversidad de recursos e instrumentos de los que se dispone en el laboratorio. Para la construcción del arreglo utilizado en la presente tesis, se utilizaron los componentes que se aprecian en la Figura 4.2.1 y que a continuación se enumeran:

- (1) Láser de 633 nm (30 mw).
- (2) Lente plano convexa de 1 cm de diámetro (para abrir un poco el haz del láser).
- (3) Objetivo de microscopio (40X).
- (4) Lente colimadora de 10 cm de diámetro.
- (5) Divisor de haz (BM1).
- (6) Objeto transparente (flama de vela de cera).
- (7) Espejo (M1).
- (8) Divisor de haz (BM2).
- (9) Lente plano-convexa de 12 cm de diámetro ($f=28\text{cm}$)
- (11) Prisma de Wollaston (de calcita y ángulo de separación de 0.5°).
- (10,12) Placas polarizadoras (P1 y P2 colocadas a los extremos del prisma con sus respectivos ejes de polarización perpendiculares).
- (13) Cámara Lumenera USB 2.0 (1040x1392 pixeles, 1040x1392 pixeles, exposición de $90\mu s$, ganancia 2, con una región de observación de 10cm x 10cm).

La Figura 4.2.1 muestra la disposición de las piezas para el montado del interferómetro de Wollaston, que básicamente es uno de los brazos del interferómetro Mach-Zehnder con la salida

del haz del BS2 dirigido a la lente biconvexa (8) que a su vez dirige el haz a otra lente colimadora (9) para finalmente pasar por el primer polarizador (P1) que entrega al prisma de Wollaston (10) un haz polarizado. Al salir del prisma dos haces con ejes de polarización perpendiculares entre sí, el segundo polarizador alinea parte de ambos haces, dándoles la posibilidad de interferir y generar patrones de franjas.

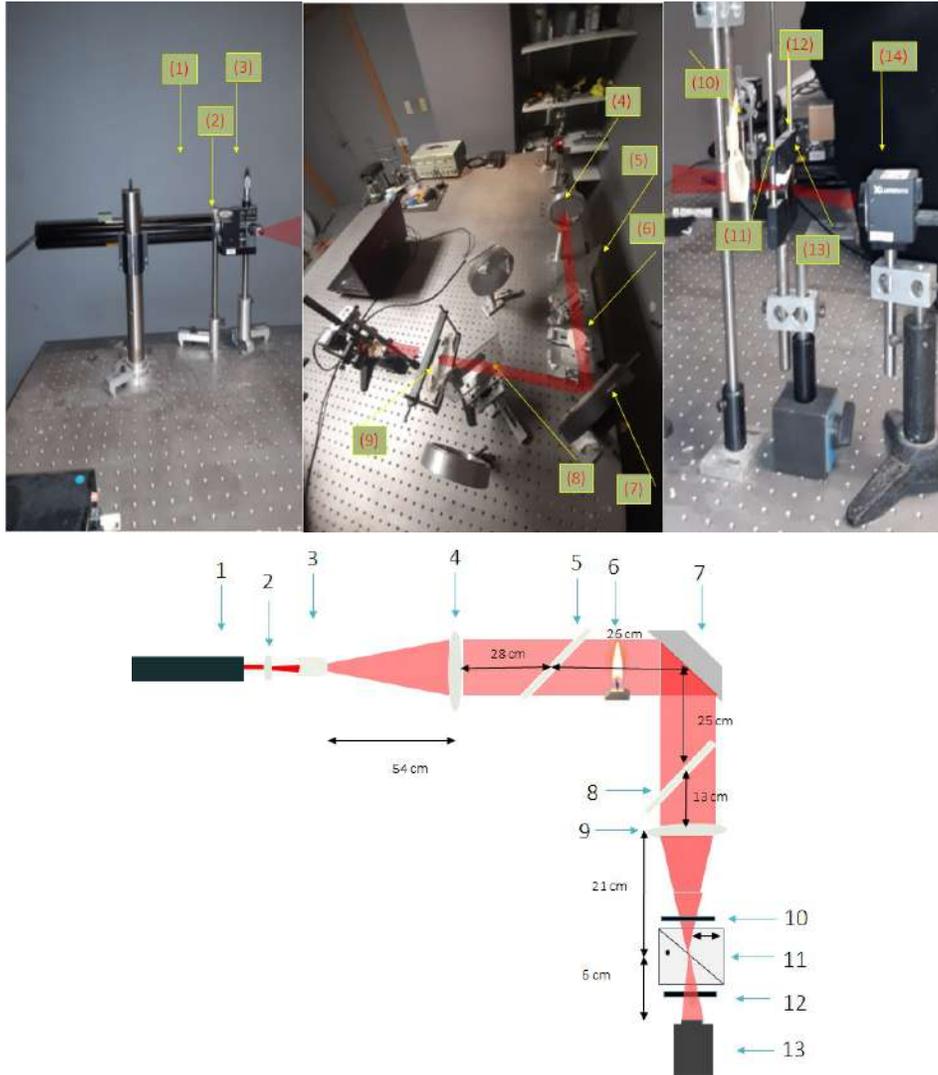


Figure 4.2.1: Arriba: Arreglo experimental (interferómetro de Wollaston). Abajo: Esquema del arreglo (solo ilustrativo).

Una vez montado el dispositivo experimental, se tomaron las imágenes (Figura 4.2.2) necesarias para ser analizadas numéricamente de acuerdo al método de Fourier. Es importante destacar, que es muy importante que el patrón de franjas debe ser en lo posible lo más recto posible para así obtener transformadas de Fourier con lóbulos bien definidos para su filtrado.

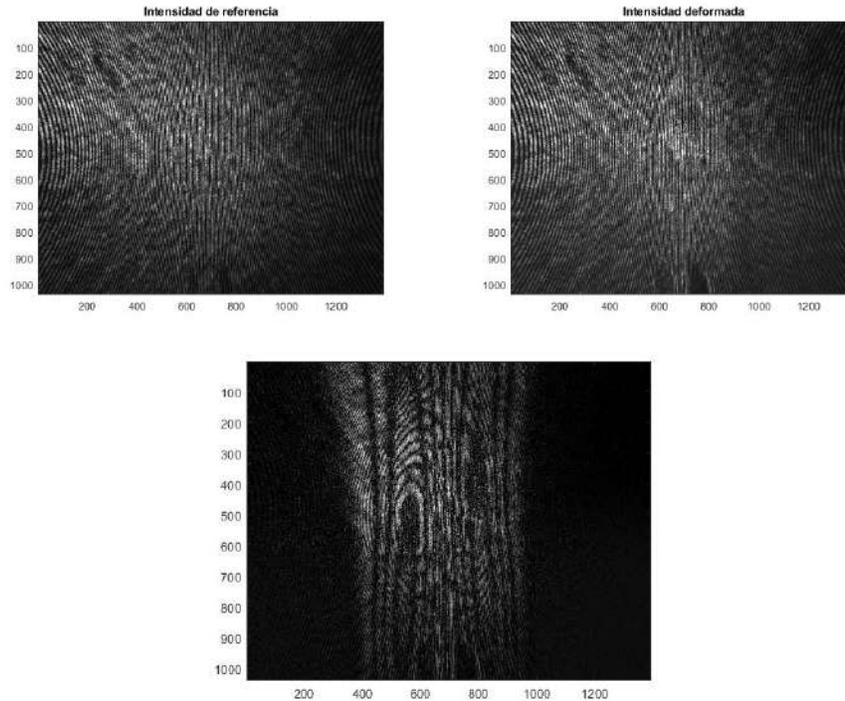


Figure 4.2.2: Superior Izquierda: Interferograma de referencia. Superior derecha: Interferograma deformado. Abajo centro: Resta de interferogramas.

Como ya se vió en secciones previas, el siguiente paso consiste en obtener las Transformadas de Fourier de los interferogramas de referencia y deformado. Lo anterior se muestra en la Figura 4.2.3.

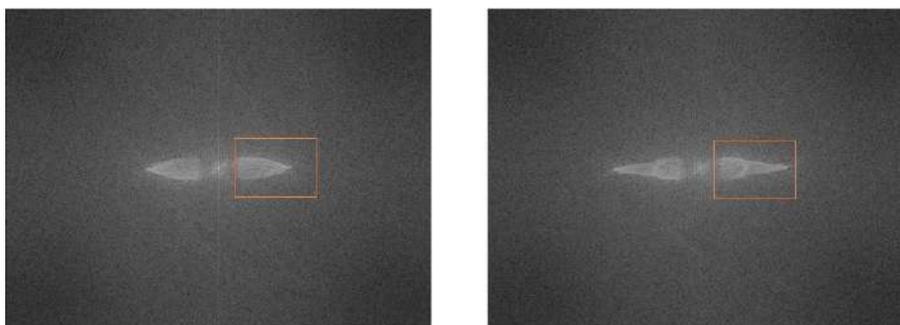


Figure 4.2.3: Transformadas de Fourier de los interferogramas. Izquierda: De referencia. Derecha: Deformado

Con la ayuda de una máscara diseñada para filtrar uno de los lóbulos (derecho), se eliminan los datos que para fines prácticos no nos serán de utilidad. Una vez hecho lo anterior, se obtiene la fase (desenvuelta) entre ambos interferogramas y que contiene implícitamente toda la información

necesaria sobre los parámetros físicos que se pretenden cuantificar.

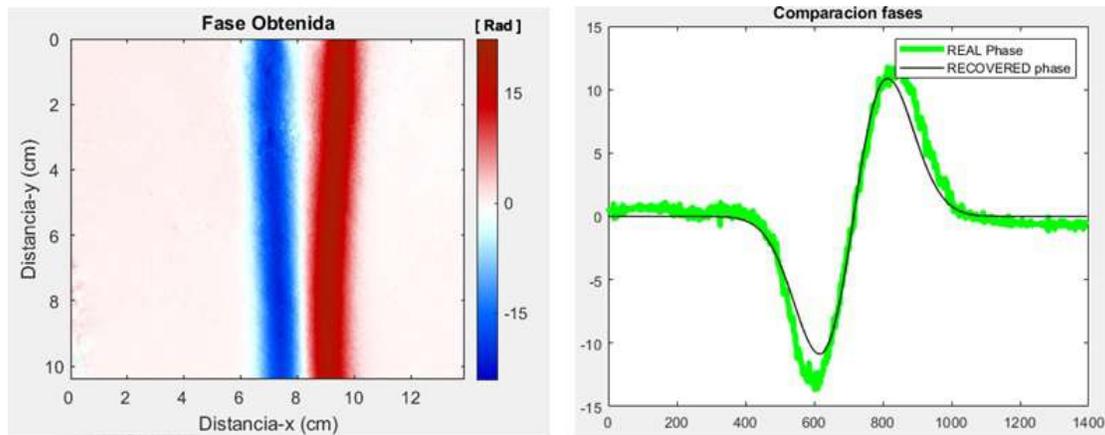


Figure 4.2.4: Fase desenvuelta (Izquierda) y comparación de un perfil con otro perfil de los valores ajustados a una función gaussiana (derecha).

La Figura 4.2.4 nos permite ver la fase desenvuelta entre ambos interferogramas, así como una comparación entre un perfil de la fase real y uno de la simulación numérica. Como es posible apreciar, ambas fases son muy similares, lo que nos permite dar cuenta de la buena aproximación numérica es la simulación con respecto a la imagen real.

En lo que respecta al cambio del índice de refracción (Δn), hay que recordar que la fase es proporcional a la derivada de éste. Por lo anterior, será necesario realizar una integración numérica a lo largo de cada renglon de la fase encontrada mediante el método de Fourier (Ecuación 3.1.28) con la finalidad de recuperar este parámetro físico (Δn) al surgir un objeto de fase donde antes no lo había. El valor mínimo obtenido del cambio de índice es $\Delta n_{min} = -1.689 \times 10^{-4}$ que resulta prácticamente el mismo que el valor de la simulación $\Delta n_0 = -1.684 \times 10^{-4}$.

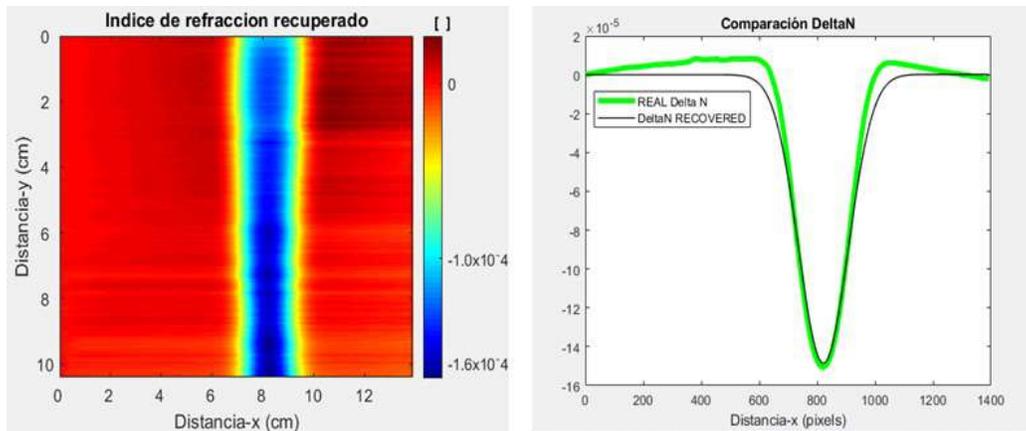


Figure 4.2.5: Cambio del índice de refracción y comparación de un perfil de los valores ajustados a una función gaussiana.

Por otro lado, considerando que $n = \Delta n + n_0$ en la Ecuación 3.1.5 se obtiene el campo de temperaturas mostrade en la Figura 4.2.6 que nos muestra que la temperatura máxima es de 1284 K, lo que de acuerdo a la literatura existente corresponde a una flama con las características de la utilizada en la presente tesis.

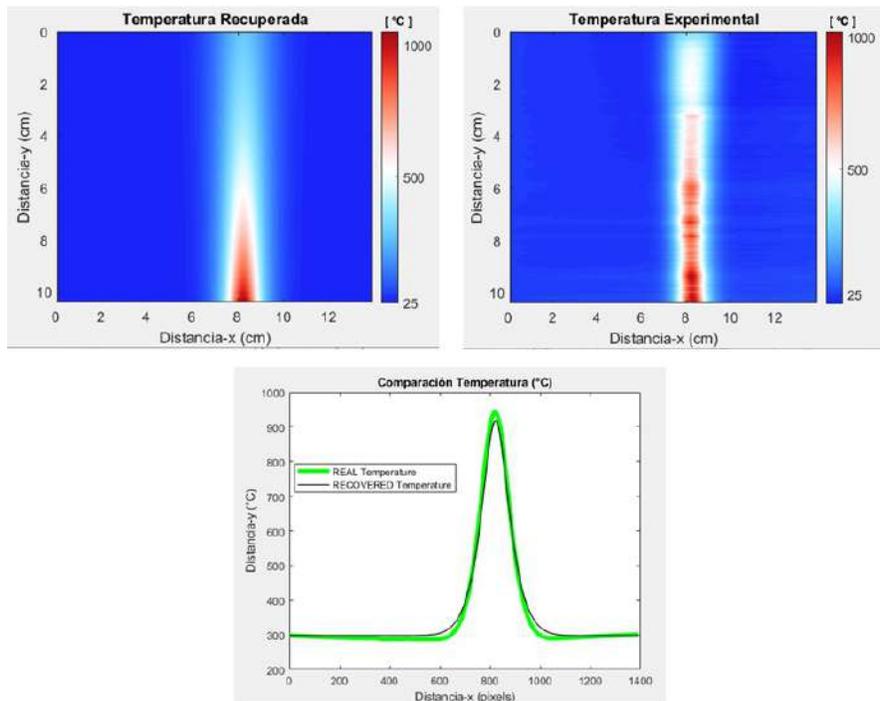


Figure 4.2.6: Campo de temperatura obtenido en la simulación y experimentalmente (arriba). Comparación entre perfiles real el ajustado a una función gaussiana (abajo).

La Ecuación 3.1.6, permitirá obtener la distribución de la densidad en la flama. La densidad

del aire correspondiente a la temperatura y ubicación del laboratorio (25°C y 1800 mts. sobre el nivel del mar) es de 0.965 kg/m^3 , que es la que predomina en los alrededores del objeto de fase. La densidad mínima obtenida fue de 0.224 kg/m^3 (Figura 4.2.7).

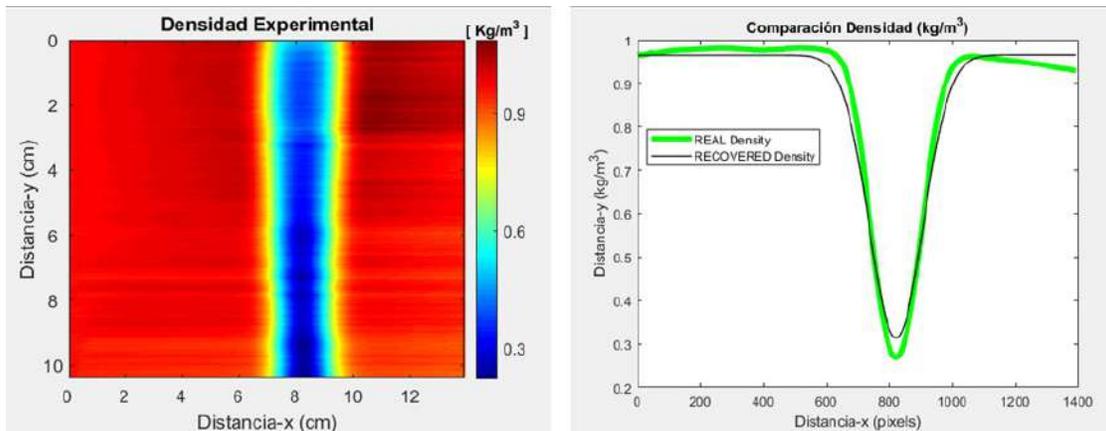


Figure 4.2.7: Distribución de la densidad del objeto de fase y comparación entre perfiles real y el ajustado a una función gaussiana.

4.2.2. Errores entre datos ajustados a una función Gaussiana y datos experimentales

Con la fórmula de errores dada por la Ecuación 3.1.10, se obtuvieron los errores mostrados en la en la Tabla 4.4. Tales errores corresponden a la comparación entre el modelo ajustado a una función gaussiana y el obtenido por interferogramas experimentales. Los errores son significativamente pequeños, lo que nos dice que el modelo por simulación es una buena aproximación de la realidad.

Table 4.4: Errores porcentuales entre los valores ajustados a una función gaussiana y los datos experimentales con el interferómetro de Wollaston.

$\Delta\phi$ (%)	Δn (%)	T (%)	ρ (%)
9.7	0.036	0.193	0.19

Como consecuencia de lo anterior se puede decir que éste es un dispositivo robusto. Lo anterior, resulta del hecho de que ambos haces que interfieren viajan siguiendo la misma trayectoria, por lo que cualquier perturbación del medio queda exactamente cancelada.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La presente tesis tuvo como primer propósito, la implementación de dos dispositivos experimentales, un interferómetro de Mach-Zehnder y un interferómetro de Wollaston con la misma finalidad pero utilizando principios diferentes. Ambos dispositivos, tuvieron como primer objetivo la medición de la fase entre dos interferogramas por medio de la técnica de Fourier para posteriormente obtener los parámetros físicos intrínsecos en la generación de dicho desfase, tal como el cambio del índice de refracción entre un medio con un índice de refracción constante (aire) y una flama con un índice de refracción que varía con la posición. Posteriormente se calcularon otros parámetros físicos, a decir, las distribuciones de temperatura y de densidad del objeto de fase.

Los resultados arrojan que el interferómetro de Mach-Zehnder se muestra más sensible a la presencia de ruido exterior que el de Wollaston. Prueba de lo anterior, son los resultados en los errores obtenidos al momento de comparar cada uno de los parámetros físicos. También, es importante generar el mayor número de posible de imágenes, ya que el patrón de franjas no es estático sino que cambia a intervalos de tiempo bastante pequeños (cerca de 10 ms) y obtener las imágenes idóneas resulta un proceso que requiere un tiempo considerable.

En contraposición de lo anterior, está el interferómetro de Wollaston que resulta en cuanto su implementación, más robusto que el de Mach-Zehnder, motivo por el cual sería una mejor opción dentro de un ambiente industrial que requiera de un dispositivo robusto. Pero como suele ocurrir en la mayoría de los dispositivos que resultan mejores con respecto a otros, el interferómetro de Wollaston resulta limitado en cuanto al tamaño del prisma utilizado, ya que si la frecuencia de la portadora no es la adecuada, es posible que los lóbulos en la transformada de Fourier no puedan separarse lo suficiente para filtrarlos. Por otro lado, está el costo de estos prismas que podría encarecer significativamente este interferómetro con respecto a otros, sin contar además la dificultad de conseguir el prisma adecuado con el ángulo de desviación apropiado.

Para un trabajo futuro, se pretende profundizar el estudio de las presentes técnicas ópticas de medición de temperatura, así como medir el grado de precisión de cada una de las técnicas y realizar una comparación entre ellas. También la factibilidad de implementarlas en un entorno real industrial y la publicación de los resultados.

APÉNDICE

5.1. A1 Constantes utilizadas

Es importante señalar que las constantes utilizadas (Tabla 5.1) tanto en la simulación numérica como dentro de análisis de los interferogramas reales, fueron obtenidas ya sea, de manera directa utilizando instrumentos de medición, por medio de tablas o mediante las especificaciones de los fabricantes.

Table 5.1: Constantes utilizadas.

Símbolo	Valor	Descripción
ρ_0	0.965 kg/m^3	densidad del aire
n_0	1.00022	Índice de refracción del aire
Δn_0	1.6×10^{-4}	Cambio del índice de refracción en la interfase
κ	$2.259 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$	Constante de Glaston-Dale para el aire
f_0	0.54 m	Distancia focal
δx	$f_0 \gamma = 0.0044 \text{ m}$	Desplazamiento
r_0	0.007 m	Radio inicial
γ	0.5°	Ángulo de desviación del prisma de Wollaston
T_{min}	25°C	Temperatura ambiente
T_{max}	1000°C	Temperatura máxima de la flama

5.2. A2 Gráficas con ruido aleatorio

5.2.1. Interferómetro Mach-Zehnder

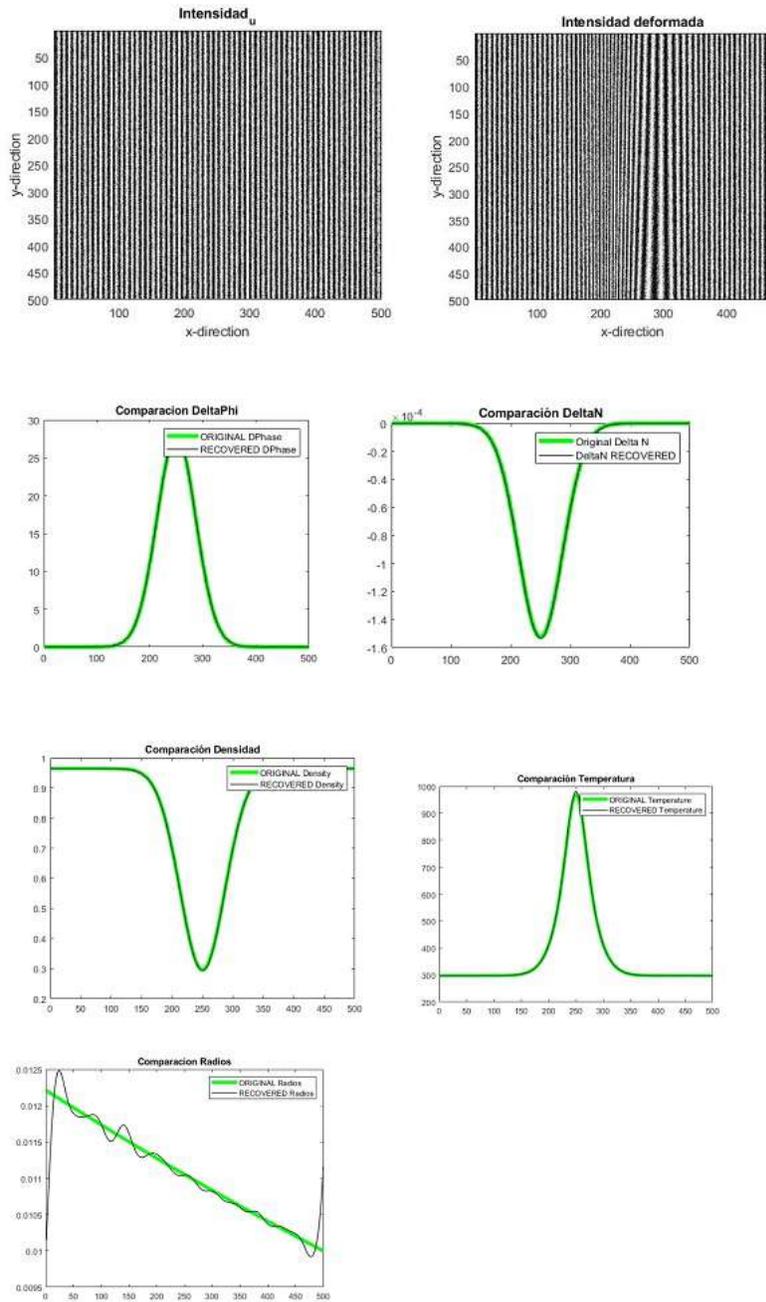


Figure 5.2.1: Ruido de $\frac{20}{100} 2\pi rad$

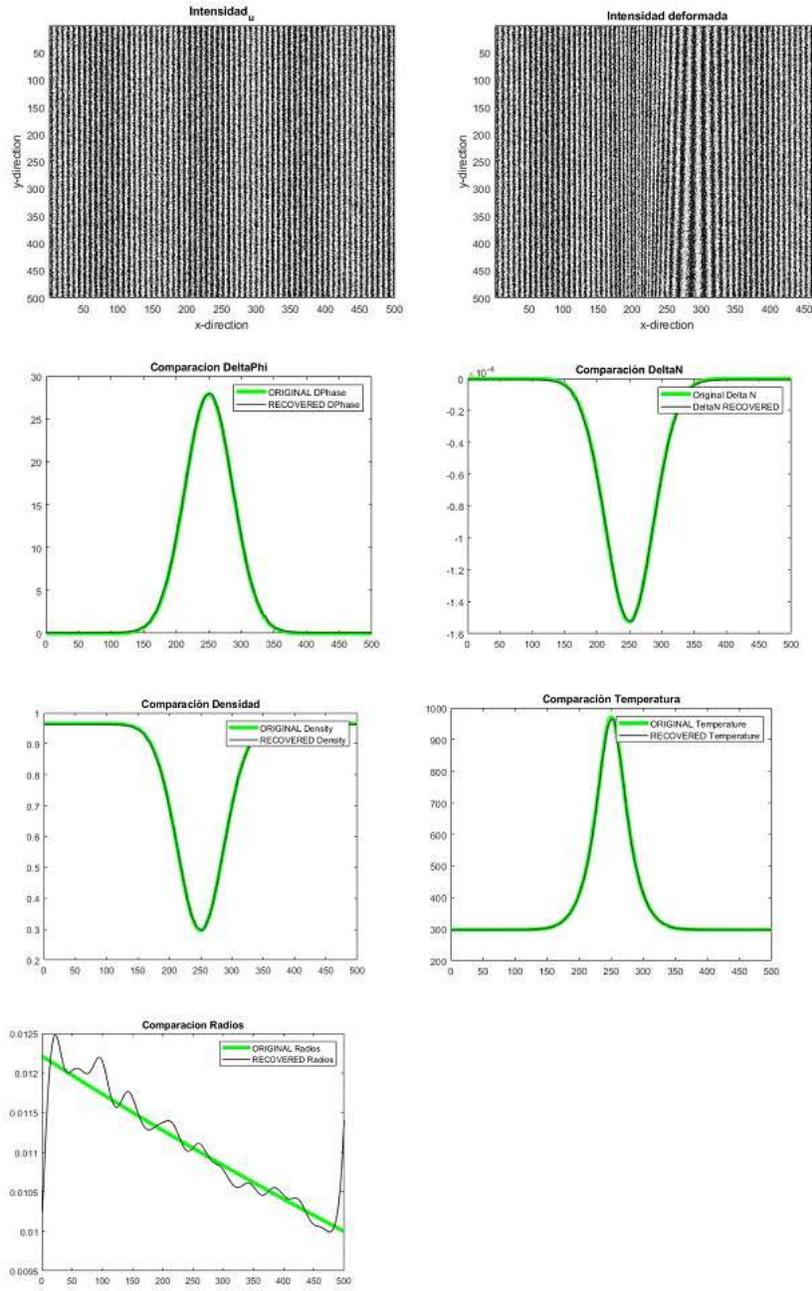


Figure 5.2.2: Ruido de $\frac{40}{100} 2\pi rad$

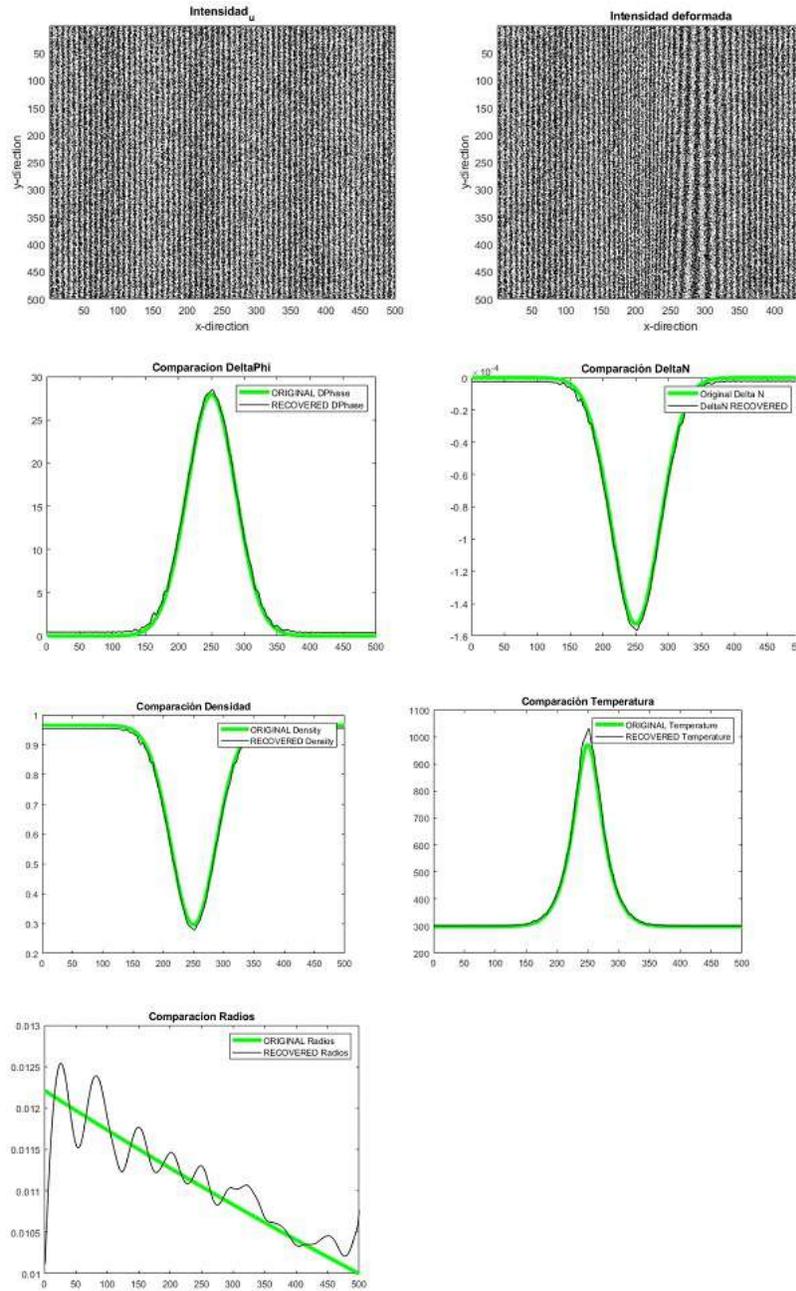


Figure 5.2.3: Ruido de $\frac{60}{100} 2\pi rad$

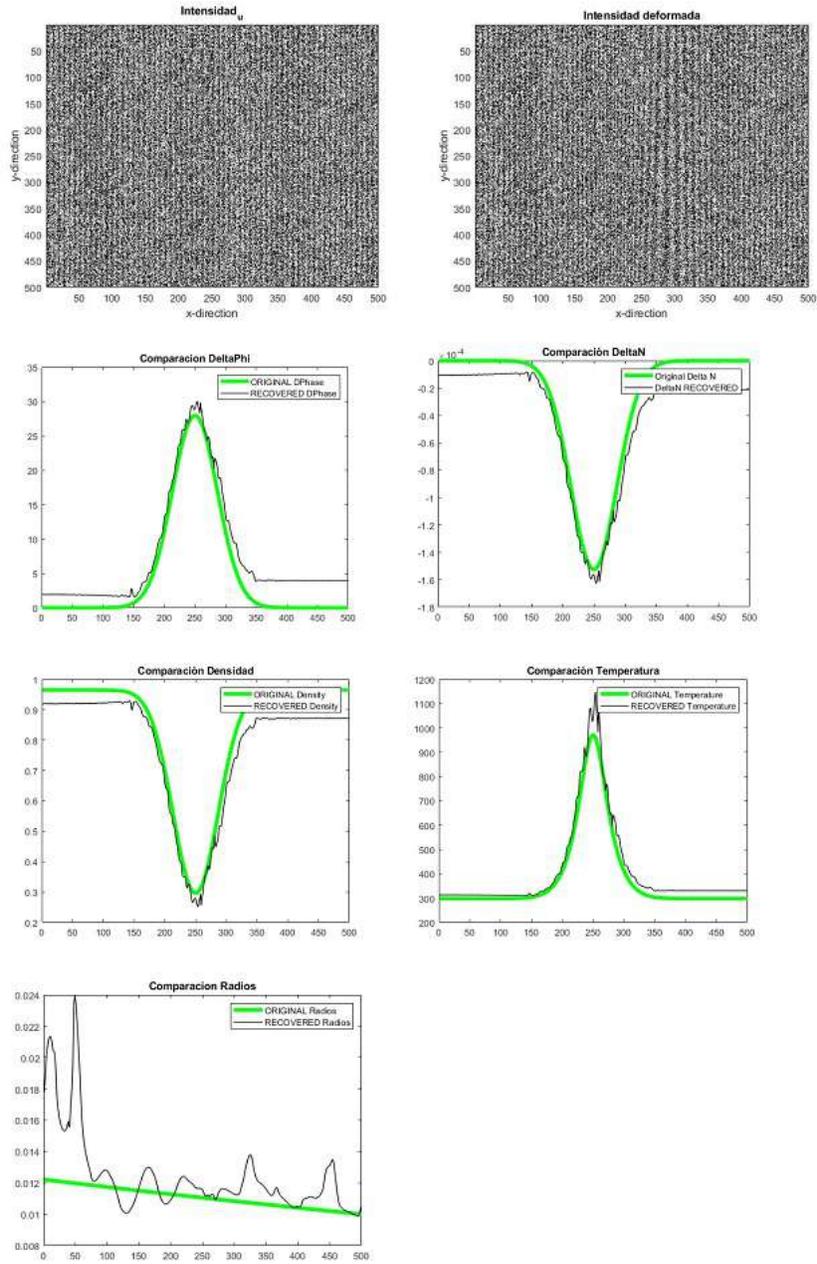


Figure 5.2.4: Ruido de $\frac{80}{100} 2\pi rad$

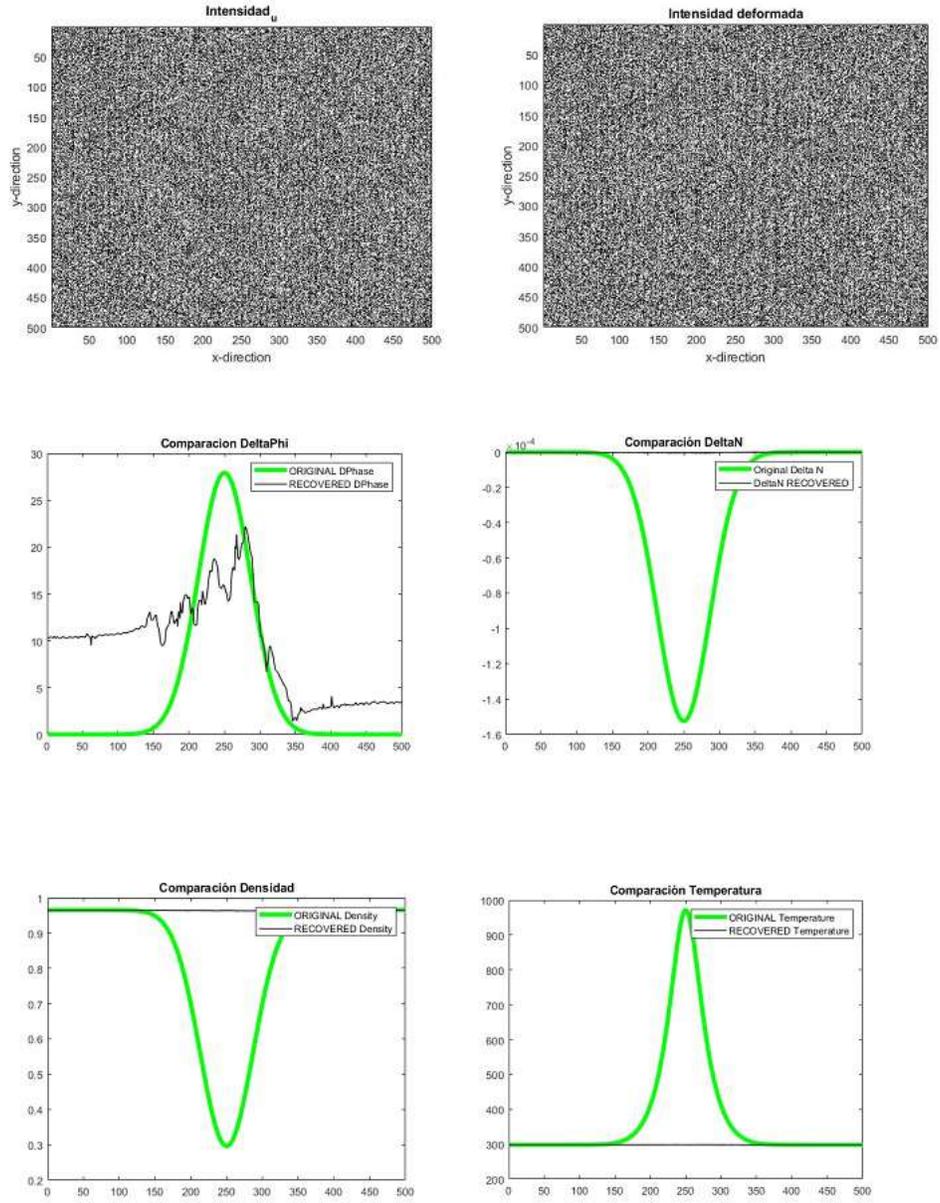


Figure 5.2.5: Ruido de $\frac{90}{100} 2\pi \text{ rad}$

5.2.2. Interferómetro Wollaston

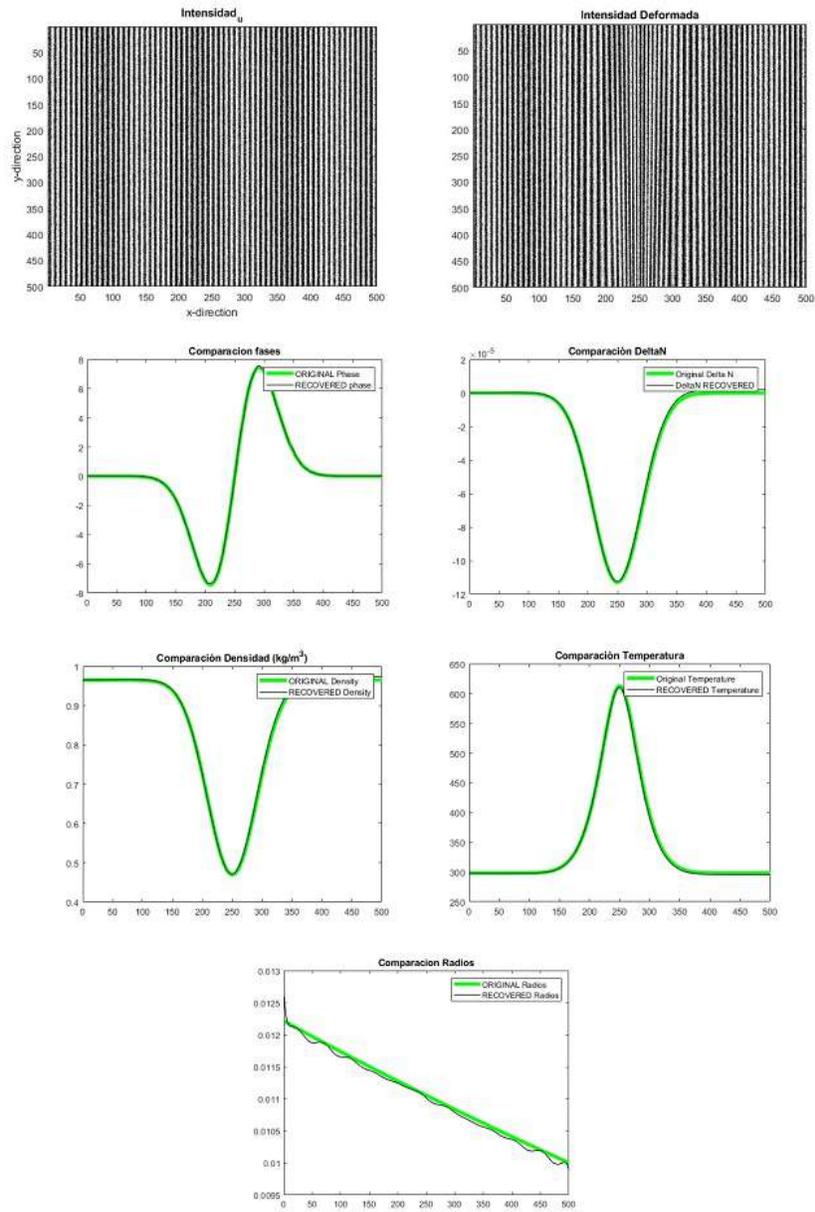


Figure 5.2.6: Ruido de $\frac{20}{100} 2\pi \text{ rad}$

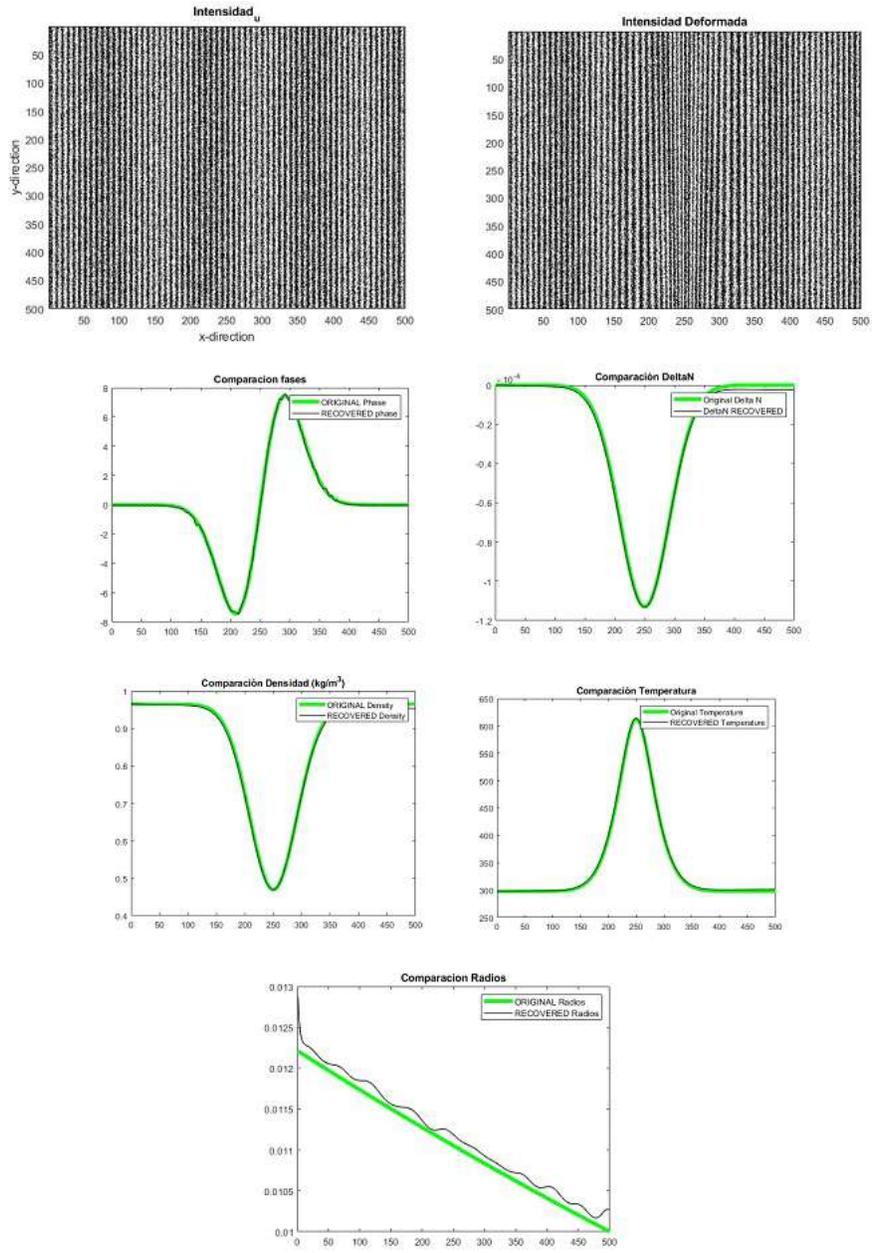


Figure 5.2.7: Ruido de $\frac{40}{100} 2\pi rad$

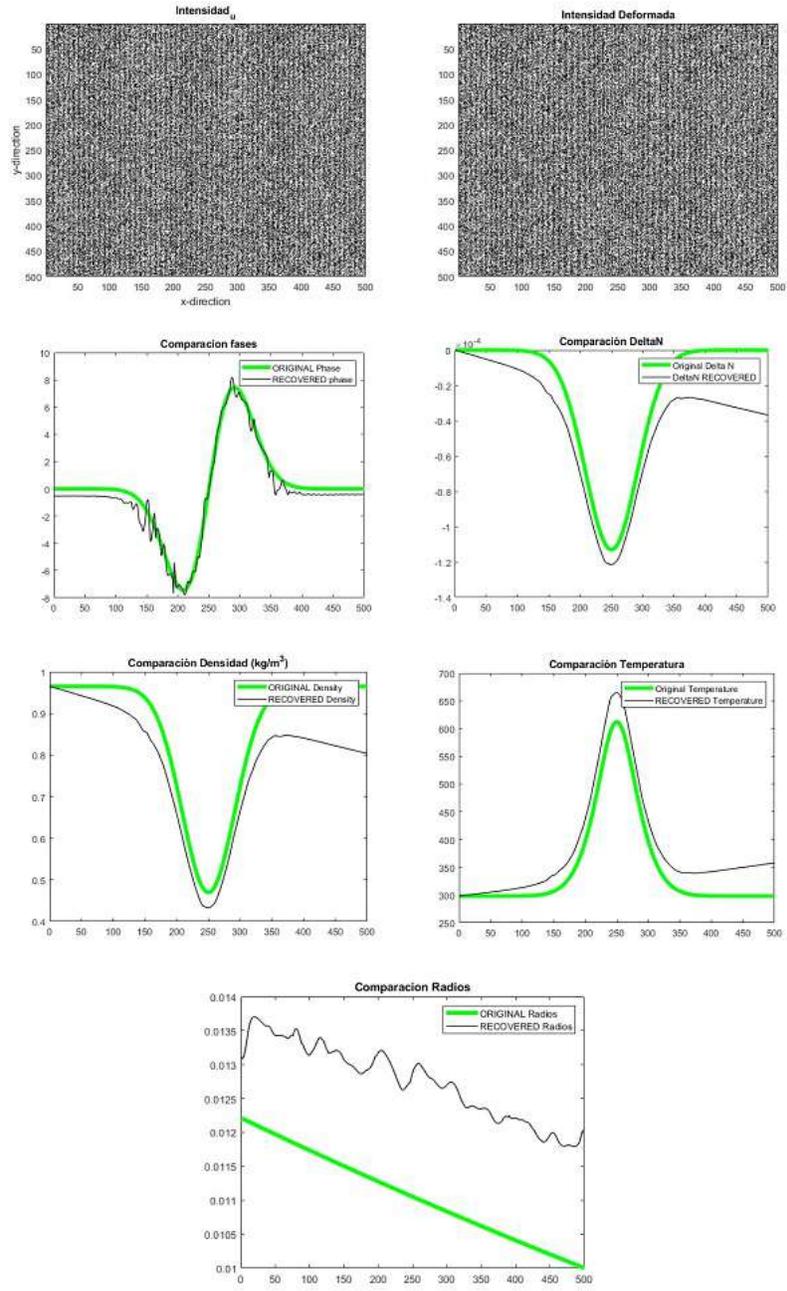


Figure 5.2.8: Ruido de $\frac{60}{100} 2\pi rad$

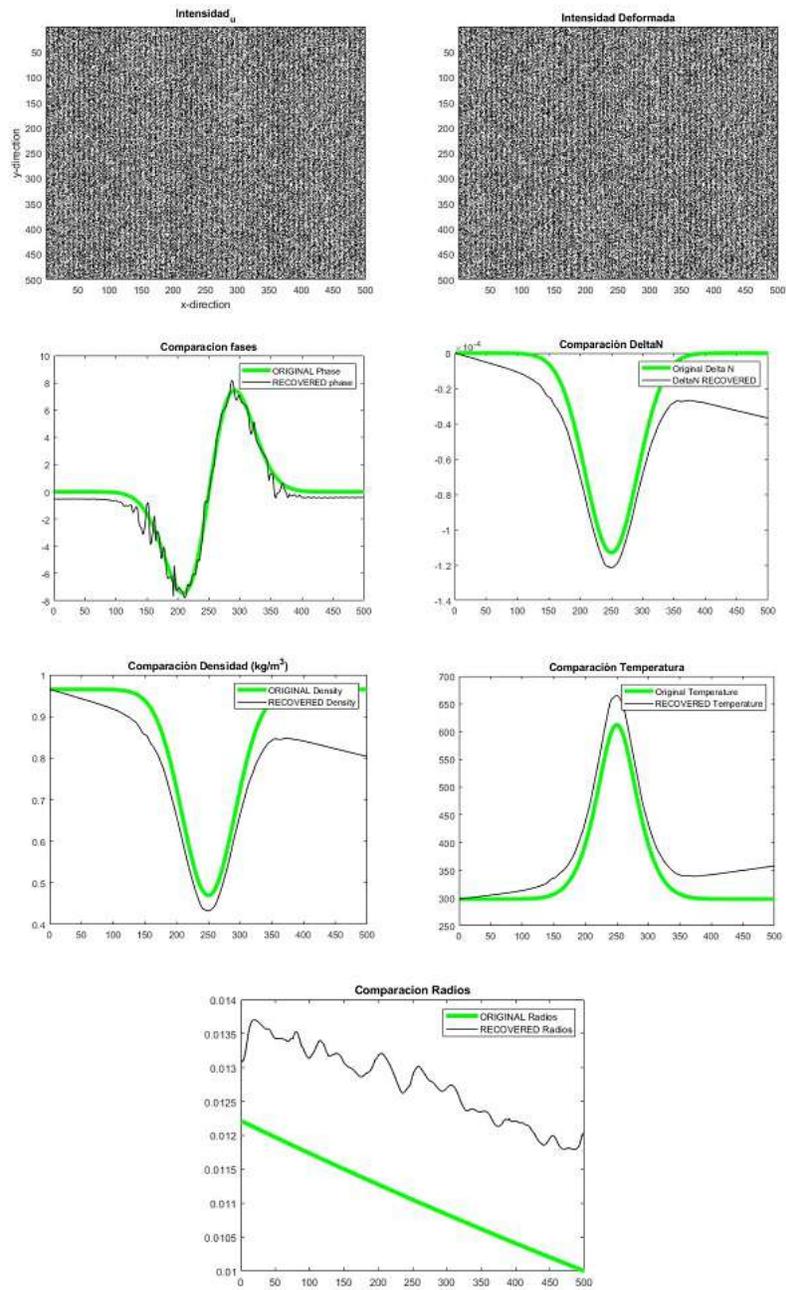


Figure 5.2.9: Ruido de $\frac{80}{100} 2\pi rad$