



CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN ÓPTICA, A.C.

“HACIA UNA NUEVA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS MODOS VECTORIALES INCE-GAUSS HELICOIDALES”



*«Versión definitiva.
Incluye cambios sugeridos por revisores»*

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta: Dayver Didian Daza Salgado

Director de Tesis: Dr. Carmelo Rosales-Guzmán

Vo. Bo.

*León · Guanajuato · México
Agosto de 2023*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer el Centro de Investigaciones en Óptica A.C., a su comunidad, y en especial a todo el cuerpo de investigadores y docentes que con su excelente labor, capacitación y orientación, me brindaron la oportunidad de especializarme en este importante área de la Física.

Al Dr. Carmelo Rosales-Guzmán por la confianza depositada en mí y al grupo de Luz Estructurada por cada aporte brindado.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por el apoyo económico aportado mes a mes, sin el cual, hubiese sido imposible culminar este proyecto.

Finalmente, a mis compañeros y amigos del Centro de Investigaciones en Óptica por su hospitalidad y valiosa amistad.

Resumen

Los *modos vectoriales* surgen de la superposición coherente de dos modos de luz con valores diferentes en dos o más de sus grados de libertad (amplitud, fase, polarización, frecuencia, etc.). En particular, la superposición no separable de dos modos transversales ortogonales en sus grados de libertad espacial y de polarización, producen modos de luz con una distribución de polarización no homogénea, con aplicaciones potenciales en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería.

En este trabajo de grado se propone una nueva forma de representar los modos vectoriales Ince-Gauss helicoidales utilizando una superficie elipsoidal en lugar de la tradicional esfera de Poincaré de orden superior, pues esta última no relaciona la geometría del modo espacial con algún parámetro propio de la esfera. Ahora bien, esta representación está basada en la asociación del parámetro de elipticidad ϵ de los modos IG con la excentricidad e de un elipsoide; lo anterior, a partir de relacionar las coordenadas esféricas con las que se construye la esfera de Poincaré de orden superior con la ecuación de un elipsoide, por lo que se logra una representación que considera tanto la geometría del modo espacial como sus características de polarización. Esta nueva representación permite describir de manera completa los modos vectoriales Laguerre-Gauss helicoidales, Ince-Gauss helicoidales y Hermite-Gauss helicoidales en términos de sus grados de libertad espacial y de polarización.

Finalmente se muestra un arreglo experimental con elementos ópticos, que incluye un modulador espacial de luz de cristal líquido para generar hologramas de fase. Los hologramas modulan los modos en amplitud y fase, permitiendo la generación de los modos vectoriales **HIG**. Los resultados experimentales se obtienen mediante medidas de intensidad, utilizadas para calcular los parámetros de Stokes y la elipse de polarización en cada punto del haz. Luego, se representan los modos vectoriales resultantes en la nueva superficie generalizada.

Contenido

Agradecimientos	I
Resumen	II
Lista de Acrónimos	IX
Lista de Símbolos	X
1. Introducción	1
2. Generalidades de la Luz Estructurada	5
2.1. Ecuación Paraxial de Helmholtz	5
2.2. Grados de Libertad de la Luz	9
2.3. Modos Espaciales	9
2.3.1. Modos Gaussianos	10
2.3.2. Modos Gaussianos de Orden Superior	11
2.3.3. Modos Hermite-Gauss	12
2.3.4. Modos Laguerre-Gauss	13
2.3.5. Modos Ince-Gauss	15
2.3.6. Modos Ince-Gauss Helicoidales	18
2.4. Polarización	21
2.4.1. Elipse de Polarización	22
2.4.2. Parámetros de Stokes	26
2.5. Introducción a los Modos Vectoriales	30
2.5.1. Estados de Polarización Espacialmente Inhomogéneos: Modos Vectoriales	30
2.5.2. Modos Vectoriales Ince-Gauss Helicoidales	32
3. Representación Geométrica de los Grados de Libertad de la Luz	37
3.1. Representación Geométrica de la Polarización	37
3.1.1. Representación Geométrica por Medio de la Elipse de Polarización	37
3.1.2. Representación de la Luz Polarizada en el Plano Complejo Circular	39
3.1.3. Esfera de Poincaré	41
3.2. Representación Geométrica de la Luz con Momento Angular Orbital . .	45
3.3. Representación Geométrica de los Modos Vectoriales	48

3.4. Otras Representaciones de Modos Vectoriales	51
3.4.1. Esfera Generalizada de Poincaré. Esfera G.	51
3.4.2. Sistema de Esferas de Poincaré de 5-Dimensiones	52
4. Representación Generalizada de los Modos Vectoriales Ince-Gauss Helicoidales	56
4.1. Elipsoide Como Nueva Representación Geométrica de los modos vectoriales Ince-Gauss Helicoidales	57
4.1.1. Geometría Elipsoidal Elemental	57
4.1.2. Posición Sobre la Superficie de un Elipsoide	59
4.2. Representación de los Modos Vectoriales HIG Sobre una Superficie Elipsoidal	60
4.2.1. Ejemplo 1: $\epsilon = 0$	63
4.2.2. Ejemplo 2: $\epsilon = 6$	64
4.2.3. Ejemplo 3: $\epsilon \rightarrow \infty$	65
5. Generación Experimental de Modos Vectoriales HIG	69
5.1. Montaje Experimental	69
5.2. Medición de Intensidad y Parámetros de Stokes	70
6. Conclusiones	77
Referencias	80
Bibliografía	80

Índice de figuras

2.1.	Simulación de los modos $HG_{u,n}$ para $(u, n) = (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, 1)$ y $(2, 2)$. Fila superior, distribución de intensidad, fila inferior, correspondiente a la fase.	13
2.2.	Simulación de los modos $LG_{q,l}$ para $(q, l) = (0, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)$ y $(3, 1)$. Fila superior, distribución de intensidad, fila inferior, correspondiente estructura de fase.	15
2.3.	Sistema de coordenadas elípticas, donde la coordenada radial está dada por $\xi \in [0, \infty)$ y la coordenada angular está dada por $\eta \in [0, 2\pi)$.	16
2.4.	Simulación de los modos IG en intensidad y fase. La primera columna muestra los modos IG pares en intensidad y fase, la segunda los modos impares en intensidad y fase, la tercera columna muestra los modos HIG resultantes de la combinación (suma) de los modos pares e impares en intensidad y fase. Cada fila muestra un modo diferente según el valor de p .	19
2.5.	Simulación de intensidad y fase de los modos HIG . En la primera columna se pueden apreciar los modos HLG en intensidad y fase cuando $\epsilon = 0$, en la segunda columna están los modos HIG en intensidad y fase, cuando $\epsilon = 5$, y la última columna deja ver los haces HHG en intensidad y fase cuando $\epsilon = \infty$.	20
2.6.	La Fila superior muestra los vectores de Jones correspondientes a los principales estados de polarización, donde, PLH: polarización lineal horizontal, PLV: polarización lineal vertical, PLD: polarización lineal diagonal, PLA: polarización lineal antidiagonal, PCD: polarización circular a derecha y PCI: polarización circular a izquierda. La fila inferior muestra gráficamente el estado de oscilación del campo eléctrico sobre el perfil transversal de haz gaussiano. La flecha indica el sentido de oscilación; blanco, polarización lineal, rojo y verde polarización circular a derecha y a izquierda respectivamente.	22
2.7.	Representación geométrica de una onda con polarización elíptica en la EP, donde Ψ representa el ángulo de orientación de la elipse.	24
2.8.	EP donde se puede apreciar los ángulos Ψ , χ y α ; con E_{0x} y E_{0y} como los semiejes de la elipse.	26
2.9.	Magnitud del campo eléctrico a partir de sus componentes cartesianas.	28
2.10.	Estados de polarización más comunes y sus parámetros de Stokes, donde $I_0 = 2E_0^2$ es la intensidad del campo eléctrico normalizada.	29
2.11.	Distribución de los estados de polarización en un modo escalar. (a) luz con PLH. (b) luz con PCD. (c) luz con PCI. (d) luz con PEI a izquierda.	30

2.12. Generación de MV. (a) adición de dos modos ortogonales con estados de polarización ortogonales. (b) diferencia de dos modos ortogonales con estados de polarización ortogonales. Los círculos naranjas y verdes dentro de cada modo hacen referencia a PCD y PCI, respectivamente, las líneas blancas radiales en l modo resultante hacen referencia a PL.	31
2.13. Simulación de los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h+}$ y fase compleja de Stokes. La distribución de la polarización se superpone al modo espacial.	33
2.14. Simulación de los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h-}$ y fase compleja de Stokes. La distribución de la polarización se superpone al modo espacial.	34
3.1. Elipse de polarización (EP). Estados de polarización para diferentes valores de δ , α , Ψ , y χ	38
3.2. Representación de diferentes estados de polarización sobre el plano complejo circular. En este caso, las líneas radiales y continuas representan los contornos equi-azimutales, mientras que los círculos con circunferencias discontinuas representan los contornos equi-elípticos.	41
3.3. Construcción de la esfera de Poincaré considerando el plano complejo circular a través de una proyección estereográfica.	42
3.4. (a) Representación geométrica de los estados de polarización de la luz sobre la esfera de Poincaré. Un estado de polarización puede ser localizado a partir de dos coordenadas, a saber, 2Ψ y 2χ . (b) En los polos norte (1) y sur (5) se encuentran los estados de PCD y PCI respectivamente, en el ecuador se encuentran todos los estados de PL (3, 7 y 10) y en los demás puntos (2, 4, 6, 8, 9 y 11), se encuentran los estados de PEL.	44
3.5. Efectos del momento angular sobre la materia. En (a) fotón con momento angular de espín (SAM). El SAM hace girar a una partícula sobre su propio eje, por otro lado, en (b) fotón con momento angular orbital (OAM). El OAM hace girar una partícula sobre el eje de de propagación del haz.	46
3.6. Representación geométrica de haces LG_0^1 sobre la esfera de Bloch. (a) El superíndice en los parámetros de Stokes en los ejes hace referencia a la carga topológica $l = 1$ y orden radial $q = 0$. (b) Los modos LG se ubican en los polos mientras que los modos HG se ubican en el ecuador de la esfera.	47
3.7. Representación geométrica de los MV \mathbf{HLG}_0^1 sobre las esferas H según las coordenadas $(2\theta, 2\delta)$. Los puntos del 1 al 4 representan los haces con estados de polarización que cambian de forma según la variación del ángulo θ , mientras que los puntos del 5 al 7 muestran los haces vectoriales completamente enredados, que como se puede ver, solo comprenden estados de PL que varía de orientación según el ángulo δ . Por otro lado, Las formas en naranja (círculos y elipses) son estados de polarización con sentido de giro a derecha mientras que las formas verdes (círculos y elipses) son estados de polarización con sentido de giro a izquierda. Las líneas blancas son estados de PL.	50

3.8.	Haces vectoriales híbridos representados en la <i>esfera G</i> . En este caso se considera que $l = 1$. Así, los puntos en los polos de la esfera, en los extremos del eje G_{3R}^l representan una base que varía continuamente. Por otro lado, el cascarón verde ($R = 0.5$) representa las esfera H con $l \equiv 1$, mientras que el cascarón amarillo ($R = 1$), representa las esferas H para $l = -1$; es decir, los anteriores cascarones son la representación geométrica de los haces vectoriales puros. Finalmente, el cascarón rojo ($R = 0.75$), es la representación de los haces vectoriales híbridos. Adaptada con permiso de [1] © The Optical Society.	52
3.9.	Sistema de esferas de Poincaré de 5-dimensiones. Cada esfera, es una esfera G que puede ser ubicada en las coordenadas (m, θ) sobre órbitas que toman valores $m \geq 1$. Siendo ubicada la esfera en el plano, los MV puros y los modos MV se pueden ubicar con las coordenadas $(R, 2\Psi, 2\chi)$. Adaptada con permiso de [2], bajo el número de licencia: RNP/23/MAR/064721	53
4.1.	Geometría de una elipse.	57
4.2.	Geometría que relaciona las coordenadas cartesianas con las coordenadas de un elipsoide. En este caso $a = b$	58
4.3.	MV representados sobre una esfera H.	61
4.4.	Comportamiento de r en términos del ángulo θ para tres diferentes valores de e cuando $a = 1$	63
4.5.	(a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon = 0$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0$, lo que corresponde a una esfera. (b) MV HIG _{5,5;0} . Como se puede apreciar, estos modos se reducen a los modos HLG _{0,5}	64
4.6.	(a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon = 6$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0.44$, lo que corresponde a un elipsoide oblató. (b) MV HIG _{5,5;6}	65
4.7.	(a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon \rightarrow \infty$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0.5$, lo que corresponde a un elipsoide oblató. (b) MV HIG _{5,5;∞} . Como se puede apreciar, estos modos se reducen a los modos HHG _{5,5,∞}	66
5.1.	Arreglo experimental empleado en la generación y caracterización de MV, donde, OM: objetivo de microscopio; $L_i, i = 1, 2, 3$: lente; $SLM - T$: modulador espacial de luz de transmisión; FE: filtro espacial; PL: polarizador lineal; $P(\lambda/2)$: placa retardadora de fase $\lambda/2$; DHP: divisor de haz polarizado; $E_i, i = 1, 2$: espejo; $P(\lambda/4)$: placa retardadora de fase $\lambda/4$; CCD: dispositivo de carga acoplada; ZPS: zona de polarimetría de Stokes, la doble flecha punteada indica que las placas son elementos adicionales que son usados en el momento de tomar las medidas de intensidad. Cada doble flecha continua indica el sentido de oscilación del campo eléctrico.	70
5.2.	MV HIG _{6,4;ϵ} generados experimentalmente. Primera fila distribución de intensidad sin polarizador lineal frente a la CCD, segunda fila con polarizador lineal frente a la CCD.	71
5.3.	Comparación de medidas de intensidad reales (a) con las simuladas (b) de un modo vectorial HIG _{1,5;12} . I_H : intensidad con PLH; I_D : intensidad con PLD; I_R : intensidad con PCD; I_I : intensidad con PCI.	72

5.4. Comparación de medidas de los parámetros de Stokes reales (a) con los simulados (b) de un modo vectorial HIG _{1,5;12}	73
5.5. Resultados experimentales de MV HIG _{5,3;ε} . En este caso cambiaron los valores de ε y θ, mientras que siempre δ = 0.	74
5.6. (a) Representación geométrica de los MV sobre el elipsoide de orden superior. (b) MV HIG _{5,3;6} ^{h+} generador experimentalmente.	75

Lista de Acrónimos

HOPS	High Order Poincaré Sphere
<i>SLM</i>	Spatial Light Modulator
<i>DMD</i>	Digital Micromirror Device
<i>MV</i>	Modos vectoriales
<i>EH</i>	Ecuación de Helmholtz
<i>EPH</i>	Ecuación Paraxial de Helmholtz
<i>LG</i>	Modo Laguerre-Gauss
<i>IG</i>	Modo Ince-Gauss
<i>HG</i>	Modo Hermite-Gauss
<i>HLG</i>	Modo Laguerre-Gauss helicoidal
HLG	Modo vectorial Laguerre-Gauss helicoidal
<i>HIG</i>	Modo Ince-Gauss helicoidal
HIG	Modo vectorial Ince-Gauss helicoidal
<i>HHG</i>	Modo Hermite-Gauss helicoidal
HHG	Modo vectorial Hermite-Gauss helicoidal
<i>PCD</i>	Polarización circular a derecha
<i>PCI</i>	Polarización circular a izquierda
<i>PL</i>	Polarización lineal
<i>PEI</i>	Polarización elíptica
<i>EP</i>	Elipse de polarización
<i>OV</i>	Vórtice óptico
<i>SAM</i>	Spin angular momentum
<i>OAM</i>	Orbital angular momentum
<i>HPS</i>	Hybrid Poincaré sphere

Lista de Símbolos

θ	Ángulo polar en la esfera de Poincaré de orden superior
δ	Ángulo azimutal en la esfera de Poincaré de orden superior
ϵ	Elipticidad
e	Excentricidad
μ_0	Permeabilidad magnética
i	Unidad imaginaria
ϵ_0	Permitividad del vacío
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	Campo eléctrico
$E_0(\mathbf{r}, t)$	Magnitud del campo eléctrico
∇	Operador nabra
c	Rapidez de la luz en el vacío
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	Campo magnético
λ	Longitud de onda
\mathbf{k}	Vector de onda
k	Magnitud del vector de onda
$\hat{\mathbf{e}}_i$	Vector unitario/base de polarización
$q(\cdot)$	Rango de Rayleigh
$\zeta(\cdot)$	Fase de Gouy
$W(\cdot)$	Anchura del haz
ρ^2	Plano del haz
$I_{i,j}$	Intensidad de un modo
l	Carga topológica
χ	Ángulo de elipticidad en la elipse de polarización
Ψ	Ángulo de orientación en la elipse de polarización
Z_{ij}	Plano complejo
σ	Momento angular de espín
L	Momento angular orbital
r	Distancia desde el origen de coordenadas a la superficie de un elipsoide
a	Semi-eje mayor de un elipsoide

Capítulo 1

Introducción

El término *luz estructurada*, se refiere a aquellos campos de luz que son modificados y/o manipulados en su parte espacial y temporal; estando la primera relacionada a la manipulación de la amplitud (intensidad), la fase (frente de onda) y la polarización, mientras que la segunda se refiere al control del espectro temporal y de frecuencia [3]. Lo anterior supone, que todos aquellos campos de luz que no pueden ser caracterizados ni descritos por los modelos convencionales de la óptica (rayos ópticos y ondas planas, por decir algunos) pueden ser considerados dentro del modelo de la luz estructurada [3, 4]. Este campo, ha experimentado un desarrollo significativo en las últimas dos décadas [5, 6] debido a su potencial teórico y experimental que permite diversas aplicaciones en áreas como las comunicaciones ópticas mediante la codificación de información en el modo resultante [7], la manipulación de partículas a partir de la aplicación de fuerzas del modo vectorial a la partícula en cuestión [8], la óptica cuántica en aplicaciones de seguridad [9], la microscopía óptica [10], entre otras.

Como ya se menciona, los modos (o haces) vectoriales de luz (MV), son un resultado de la manipulación de los grados de libertad espacial y de polarización de la luz, cuya combinación genera un campo óptico, donde dichos grados de libertad, están clásicamente enredados, es decir, existe una co-dependencia entre el grado de libertad espacial y de polarización, lo que da cabida a una distribución de la polarización en el modo espacial que está organizada espacialmente, de modo que en cada punto del modo transversal hay un estado de polarización único y diferente a los demás estados de polarización presentes en los otros puntos del modo vectorial [11]. Para lograr la generación de campos de luz estructurada, se han utilizado diferentes campos de luz y modos característicos transversales (modos espaciales). Algunos de estos modos son soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz representada en diferentes sistemas coordenados, como lo son, los modos Laguerre-Gauss, Hermite-Gauss, Ince-Gauss, Mathieu-Gauss, Bessel-Gauss, entre otros; mientras que también se tienen soluciones a la ecuación de Helmholtz, como es el caso de las ondas Bessel, Airy, Weber, Mathieu, entre otras [12], y por último, se pueden considerar modos que no son soluciones a una ecuación de onda, como es el caso de los haces helico-cónicos [13, 14].

Los MV se caracterizan por poseer una distribución de polarización organizada espacialmente *no-homogénea* [15]. Así, los MV pueden ser generados a partir de la implementación de alguna técnica experimental bajo la construcción de un arreglo expe-

rimental acorde a la misma [16, 17, 18], en la que se consideran elementos especiales, tales como, dispositivos moduladores espaciales [19], dispositivos digitales de microespejos [20], q-plates [21], mascarar difractantes, entre otros, los cuales se encargan de modular la luz en su parte espacial e incluso en polarización.

Las propiedades espaciales y de polarización que caracterizan los MV de luz son complejas y generalmente requieren de herramientas formales (métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales, álgebra vectorial, entre otras), conceptuales, experimentales y visuales para ser comprendidas. En este sentido, se han desarrollado formas que permiten comprender de mejor manera todo lo referente a los modos vectoriales de luz. Para dar un ejemplo, se tiene el caso de la luz polarizada; es bien sabido, que es posible concebir una infinidad de modos de luz con polarización homogénea, cada uno con una característica única y que sin una herramienta para visualizarlos sería complicado sugerir y generar aplicaciones de la luz polarizada. En respuesta a esto, Poincaré creó una superficie esférica que permite agrupar todos y cada uno de los estados de polarización de la luz sobre la misma, de tal forma que es posible acceder visualmente y de manera más sencilla a información de la luz polarizada. Esta esfera, también muestra el comportamiento de la luz polarizada cuando esta es afectada por elementos polarizadores, pues basta con verificar la esfera de Poincaré, ubicar una pareja de coordenadas $(2\chi, 2\Psi)$ sobre su superficie, e inmediatamente se puede saber como dicho o dichos elementos afectan a la luz en polarización sin la necesidad de hacer cálculos exhaustivos, pues dichas coordenadas ubican un estado de polarización de la luz asociado a los ángulos χ, Ψ .

Ahora bien, de manera similar, es posible concebir ayudas visuales que pueden ser aplicadas al campo de la luz estructurada para estudiar el comportamiento en los grados de libertad espacial y de polarización de los MV, y el caso más conocido en dicho ámbito, es la esfera de Poincaré de orden superior [22] (HOPS, por sus siglas en inglés) o esfera G [23], que es una representación de la luz polarizada más general que la tradicional esfera de Poincaré para luz con polarización homogénea. *Grosso modo*, tal representación geométrica de los MV, permite acceder de manera visual al comportamiento en los grados de libertad espacial y de polarización de los MV, a partir de un conjunto de coordenadas (θ, δ) , cada una con una función muy específica asociadas con la amplitud y la fase de las componentes del modo vectorial, de tal manera que cada punto en la HOPS, es por lo tanto, un modo vectorial específico, de tal forma que la HOPS representa los cambios en polarización de un modo vectorial cuando este pasa a través de elementos polarizadores. La HOPS es entonces una excelente ayuda en aplicaciones que involucren la generación y caracterización de los MV, pues permite comprender las propiedades de dichos modos en relación a su distribución de intensidad, así como de polarización. Cabe recalcar, que esta no es la única representación de los MV, pues hay un gran número de estas como se verá más adelante que consideran otras propiedades de la luz entre sus características.

Aunque la HOPS es suficiente para representar las características de polarización de los MV, no da información precisa en relación al modo espacial que se representa sobre dicha superficie, es decir, la HOPS es indistinta al sistema de coordenadas en el que se encuentre el modo espacial que se representa sobre la misma. Lo anterior su-

pone una desventaja si se quisiese saber de manera directa la geometría del modo que se representa; es por esta razón, que surge la necesidad de cambiar el paradigma referente a la HOPS y migrar a una representación geométrica más general que involucre, además de las características de polarización, las características geométricas del modo.

En este trabajo de grado, se propone una nueva representación geométrica de los MV con geometría elíptica, más exactamente, los MV *Ince-Gauss helicoidales*, los cuales, como se verá en la sub-sección 2.3.6 son una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas elípticas-cilíndricas y cuya forma espacial depende del parámetro de elipticidad ϵ característico de la geometría elíptica; a su vez, los MV *Ince-Gauss helicoidales* son una transición suave entre los MV *Laguerre-Gauss helicoidales* cuando $\epsilon = 0$ y los MV *Hermite-Gauss helicoidales* cuando $\epsilon \rightarrow \infty$.

Esta nueva representación, se caracteriza por ser un elipsoide que se achata en los polos cuando su parámetro de excentricidad e varía en función de ϵ , lo que da cabida a que la nueva representación se ajuste espacialmente a la geometría del modo en cuestión, siendo una esfera cuando $\epsilon = 0$ y un elipsoide cuando $0 < \epsilon < \infty$. Esto sin duda, supone una mejora visual a la tradicional representación de MV sobre la HOPS y da cabida a una nueva forma de ver los MV tanto en polarización como en su forma espacial, ya que dado que la nueva representación incorpora el parámetro de elipticidad de los MV *Ince-Gauss helicoidales*, esta se adapta a la geometría de los modos permitiendo acceder de manera más precisa al modo que se pretende representar sin afectar en lo absoluto las características de polarización de los MV.

Dado lo anterior, es necesario hacer un exhaustivo estudio del formalismo que comprende la generación y posterior representación de los MV, de tal forma, que en el capítulo 2, se presentan brevemente las generalidades de la luz estructurada, considerando la deducción formal de la ecuación paraxial de Helmholtz, así como el concepto de los grados de libertad espacial y polarización, además de los elementos más importantes referentes a los MV. En el capítulo 3, se hace fuerte énfasis en las diferentes representaciones gráficas de la luz polarizada, desde la elipse de polarización, hasta una representación de los MV que consiste en un sistema de esferas de Poincaré de orden superior de 5-Dimensiones, considerando además, la representación geométrica del momento angular de la luz. Por otro lado, el capítulo 4 presenta la nueva forma de representar los MV *Ince-Gauss helicoidales* sobre una superficie elipsoidal en el que se muestran tres ejemplos para diferentes valores de ϵ y se representan los modos resultantes sobre diferentes superficies. El capítulo 5, muestra el proceso experimental mediante el cual se generan MV *Ince-Gauss helicoidales*, de tal manera que los MV generados experimentalmente se muestran sobre la nueva representación geométrica donde se resalta la utilidad de dicha nueva representación. Finalmente en el capítulo 6, se abordan las conclusiones de la investigación llevada a cabo recalcando las características de la nueva representación y la posibilidad de mejorarla.

Capítulo 2

Generalidades de la Luz Estructurada

En el ámbito de la óptica el término «luz estructurada» o *luz compleja* se ha vuelto algo habitual, pues las utilidades que presenta este campo de la óptica a nivel teórico, fenomenológico y aplicativo son innumerables, como es el caso de las trampas ópticas [24], comunicaciones ópticas [25, 26] y procesamiento de imágenes en microscopía óptica [27], por mencionar algunas. Por otro lado, la incursión de este campo no se limita solamente a nivel de óptica clásica, sino que también se puede considerar a nivel cuántico como por ejemplo, en el diseño de técnicas experimentales que permiten la generación de modos gaussianos de orden superior con reducción de ruido en amplitud [28, 29] y en el almacenamiento de información cuántica [7]. Ahora bien, el término *luz estructurada* se refiere a los campos de luz que han sido modificados, reformados, personalizados, etc., en todos sus grados de libertad tales como: modo espacial, amplitud, fase, polarización, espectro temporal, frecuencia, entre otros, siendo los grados de libertad espacial y de polarización los más explotados para la generación de estructuras complejas de luz. Lo anterior, teóricamente por medio de la superposición no separable de modos de luz ortogonales en su parte de espacial y de polarización (ver 2.5), y experimentalmente por medio de dispositivos especiales tales como los Moduladores Espaciales de Luz (*SLM's* por sus siglas en inglés), los Dispositivos Digitales de Micro-espejos (*DMD's* por sus siglas en inglés), las *q-plates* [30], rejillas de polarización [31] o las meta-superficies [32]. Esto quiere decir que se pueden manipular parámetros físicos propios de la luz de tal manera que es posible transformar la luz y obtener propiedades tales como la fase intermodal, la fase geométrica, la transición entre modos escalares y vectoriales, entre otras que no se consideran en la óptica convencional y que tienen múltiples aplicaciones e información adicional sobre la naturaleza de la misma. A continuación, se detallan las principales características de la luz estructurada, desde las suposiciones físico-matemáticas, hasta la descripción del grado de libertad espacial y de polarización.

2.1. Ecuación Paraxial de Helmholtz

Las funciones que satisfacen una ecuación de onda espacial, son denominados *modos característicos transversales* (en lo que sigue, modos espaciales), y en este caso, son de interés los modos espaciales que se pueden conseguir a partir de dar solución a la ecuación paraxial de Helmholtz. Para obtener dichos modos, primero es importante

entender la necesidad de reducir la ecuación de onda convencional a la ecuación paraxial de Helmholtz, pues esta última surge de una serie de consideraciones. Así las cosas, se parte de un campo de luz (onda plana) monocromático, cuya dependencia temporal puede ser expresada por medio de la función exponencial compleja $\exp(-i\omega t)$ donde ω representa la frecuencia, e i la unidad imaginaria, esto es,

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.1)$$

donde $a(\mathbf{r})$ es la amplitud de la onda que está directamente relacionada con la intensidad y depende del vector posición \mathbf{r} y \mathbf{k} es el vector de onda que define la dirección de propagación de la onda y cuya magnitud esta dada por $|\mathbf{k}| \equiv k = 2\pi/\lambda$.

La ecuación (2.1) es una función armónica, y por lo tanto satisface la ecuación de onda [33]. Lo anterior se puede apreciar a partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío para ondas de luz monocromáticas, las cuales están dadas por [34] ,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2d)$$

donde, μ_0 es la permeabilidad magnética y ϵ_0 es la permitividad del vacío. Para obtener la ecuación de onda, se aplica el operador rotacional en ambos lados de la ecuación (2.2b). Dicha transformación resulta como,

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \nabla \times \left[-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]. \quad (2.3)$$

Ahora bien, haciendo uso de la propiedad,

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

en la parte izquierda de la ecuación (2.3) junto con la ecuación (2.2d), se tiene,

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Considerando ahora la ecuación (2.2a), en la expresión anterior, la *ecuación de onda para el campo eléctrico* estará dada entonces por,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

donde $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ y $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)| = c|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|$. Esta ecuación diferencial puede ser modificada vía el uso de la expresión (2.1) suponiendo que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{e}}_i$, donde $i = x, y, z$. Considerando solamente la parte escalar del campo, se tiene,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t)] = \frac{a(\mathbf{r})}{c^2} \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) i^2 \omega^2 \exp(-i\omega t),$$

por otro lado,

$$\nabla^2[a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t)] = \exp(-i\omega t) \nabla^2[a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})].$$

Igualando las últimas dos expresiones considerando la ecuación (2.6), y teniendo en cuenta que $E(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, se consigue,

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) = -E(\mathbf{r})k^2, \quad (2.7)$$

donde $k^2 = \omega^2/c^2$. La ecuación (2.7) es conocida como la *Ecuación de Helmholtz*, en adelante EH. Dicha ecuación es muy importante en el campo de la óptica, pues describe la propagación de una onda luminosa monocromática no paraxial en un espacio uniforme y admite soluciones en variables separables en 11 sistemas de coordenadas [12]. Lo anterior supone que existen campos electromagnéticos que se propagan sin cambiar su forma (perfil, envolvente), además, se puede observar que al no considerar la variable t , la EH solo describe distribuciones de campos estacionarios. Las soluciones de EH son *ondas*, tales como ondas planas, ondas Bessel, ondas Weber, ondas Mathieu, entre otras [12].

Aunque la EH supone una importante simplificación a la ecuación de onda, sigue siendo compleja de solucionar (más no imposible), es por esto, que se debe simplificar aún más atendiendo al comportamiento real de las ondas. Para lograr esto, es necesario recurrir al concepto de *paraxialidad*, el cual supone que el vector de propagación de la onda electromagnética y el eje de propagación (eje óptico) subtienden un ángulo muy pequeño. Ahora bien, en el caso de la óptica ondulatoria, el espectro angular de los haces de luz paraxiales, consiste en ondas planas que son paraxiales a la dirección de propagación del haz, que en este caso, se ha elegido como el eje z [35]. Dado lo anterior, se debe considerar una solución que dependa explícitamente de un factor de fase $\exp(ikz)$, donde,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Dado lo anterior, la componente con mayor peso de la magnitud del vector de onda paraxial, está en la dirección z , lo que supone que,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}.$$

Así las cosas, la solución que se propone, debe ser de la forma,

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) \exp(-ik_z z), \quad (2.8)$$

que es una onda plana, donde $E_0(\mathbf{r})$ es la amplitud del campo. La ecuación (2.8), dice que la magnitud del campo eléctrico $E(\mathbf{r})$ se puede interpretar como una onda que viaja en la forma $\exp(-ik_z z)$. Ahora bien, dicha onda puede tener variaciones de amplitud y fase a partir de $E_0(\mathbf{r})$. Un aspecto importante a tener en cuenta en relación al comportamiento del perfil transversal del haz $E_0(\mathbf{r})$ es que, para haces bien colimados, su valor cambiará muy lentamente con z a medida que el haz se propaga, crece

y/o cambia de forma debido a efectos de absorción y/o difracción [36]. En otras palabras, esto quiere decir que $E(\mathbf{r})$ tiene una variación muy suave/lenta en distancias del orden de $\lambda = 2\pi/k_z$, de tal manera que su naturaleza de onda plana no se perturbe.

Así las cosas, reemplazando la ecuación (2.8) en la ecuación (2.7) y realizando las operaciones correspondientes, se tiene que,

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) = \exp(-ik_z z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} - k_z^2 \right] E_0(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-ik_z z) k_z^2.$$

Simplificando algebraicamente la expresión anterior, se consigue que,

$$\nabla_T^2 E_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik_z \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

donde, $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador laplaciano en coordenadas cartesianas referido al plano transversal. En este punto, es necesario recurrir a la *aproximación paraxial*, la cual supone que las variaciones de $E_0(\mathbf{r})$ son solo importantes para pequeños rangos angulares cercanos a cero y medidos respecto al eje de propagación. Dado lo anterior, se supone que $E_0(\mathbf{r})$ varía lentamente respecto de z , es decir, el frente de onda es paraxial respecto del eje de propagación. Esto significa, que la propagación del haz dentro de una distancia $\Delta z = \lambda$, provocará un cambio transversal del haz $\Delta E_0(\mathbf{r})$ mucho más pequeño que el mismo haz $E_0(\mathbf{r})$, es decir, $\Delta E_0(\mathbf{r}) \ll E_0(\mathbf{r})$. Ahora bien, ya que $\Delta E_0(\mathbf{r}) = [\partial E_0(\mathbf{r})/\partial z]\Delta z = [\partial E_0(\mathbf{r})/\partial z]\lambda$, se tiene que,

$$\frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} \ll \frac{E_0(\mathbf{r})}{\lambda} = \frac{k_z}{2\pi} E_0(\mathbf{r}).$$

Si el perfil transversal haz, varía lentamente en z la derivada de $\partial E_0(\mathbf{r})/\partial z$ debe también variar lentamente dentro de la distancia λ , esto es,

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} \ll k_z^2 E_0(\mathbf{r}).$$

Por lo tanto, $\partial^2 E_0(\mathbf{r})/\partial z^2$ puede ser despreciado en comparación de $k\partial E_0(\mathbf{r})/\partial z$ en la ecuación (2.9), dando lugar a una ecuación diferencial parcial dada por:

$$\nabla_T^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

la cual se conoce como *Ecuación Paraxial de Helmholtz*, en adelante EPH. Cabe recalcar que la expresión (2.10) se construye con base a la aproximación paraxial, la cual supone que la dirección del frente de onda del haz forma un ángulo muy pequeño con el eje óptico, lo que significa que la dirección de propagación del frente de onda se mantienen más o menos paralela al eje de propagación y por lo tanto, el vector de propagación debe ser casi paralelo al eje de z durante su trayectoria. La aproximación paraxial se utiliza muy a menudo para trazar trayectorias de haces de luz a primer orden y en óptica gaussiana. La solución más simple a la ecuación (2.10) es una onda paraboloidal que es la aproximación paraxial de una onda esférica, sin embargo, una de las soluciones más interesantes y útiles es el haz gaussiano 2.3.1.

2.2. Grados de Libertad de la Luz

En la óptica física convencional, una onda de luz se caracteriza por tener una estructura en la que las diferentes variables y parámetros determinan la forma final de la misma, por ejemplo, la onda plana armónica dada por,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta\right) \hat{\mathbf{e}}_i,$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_z$ es el vector de unitario asociado a la dirección de propagación de la onda. $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, es una función de las coordenadas espaciales y del tiempo, sin embargo, puede ser modificada a partir de manipular su amplitud $a(\mathbf{r})$, su polarización $\hat{\mathbf{e}}_i$, longitud de onda λ , su frecuencia angular ω y la fase δ . Estos parámetros que pueden ser manipulados, reciben el nombre de *grados de libertad* y permiten la descripción completa de un campo óptico, además de que son fundamentales para la generación y caracterización de modos vectoriales. Ahora bien, en lo que concierne a los MV abordados en este trabajo de grado y su generación en el contexto del laboratorio, se deben considerar dos grados de libertad, el grado de libertad espacial y el grado de libertad de polarización, los cuales serán brevemente detallados a continuación.

2.3. Modos Espaciales

El concepto más general asociado a los modos espaciales de luz, está vinculado a la solución de la ecuación de onda, en este caso, la EPH [12, 25]. Ahora bien, los modos pueden ser descritos en términos de propiedades de ortogonalidad y coherencia, esto es, si se consideran dos cualesquiera soluciones a la EPH, entonces la integral del producto de dichas funciones sobre todo el espacio es cero (ortogonales), excepto en regiones donde los modos se superponen (interferencia); así, los modos de luz son soluciones ortogonales a una ecuación de onda y pueden o no, presentar interferencia. Dado lo anterior, las soluciones a la EPH son de naturaleza espacial y se denominan (*modos espaciales*) transversales a la dirección de propagación de la onda o haz. Por otro lado, el *grado de libertad espacial* se manifiesta a través de los modos espaciales, los cuales dependen del sistema de coordenadas en el que se de solución a la ecuación de onda, es decir, los modos espaciales pueden ser interpretados como patrones espaciales de luz que surgen de dar solución a la ecuación de onda en un determinado sistema de coordenadas, tales como las coordenadas cartesianas, cilíndricas, elípticas, paraboidales, etc. [12, 37].

Los patrones de luz que se obtienen dependen del sistema de coordenadas en el que se solucione la ecuación de onda, como es el caso de los modos Hermite-Gauss (*HG*), los cuales surgen de dar solución a la EPH en coordenadas cartesianas, los modos Laguerre-Gauss (*LG*), que surgen de solucionar la EPH en coordenadas cilíndricas y los modos Ince-Gauss (*IG*), los cuales surgen de dar solución a la EPH en coordenadas cilíndricas-elípticas y son una transición suave entre los modos *LG* y *HG* [38]. Claramente, solucionar la EH y la EPH en otros sistemas de coordenadas dará otros modos espaciales con propiedades y características únicas. En lo que sigue, se hará

una breve mención a los parámetros más importantes de la solución más fundamental a la EPH, pues estos, aparecen en todas las demás soluciones jugando un papel fundamental en su entendimiento.

2.3.1. Modos Gaussianos

Como se mencionó con anterioridad, es importante conocer las principales características de la solución más sencilla de la EPH (2.10), ya que en función de esta, las demás soluciones que se mostrarán serán más sencillas de abordar. Por lo tanto, se comienza proponiendo una solución de la forma [33],

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\psi_0}{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.11)$$

siendo $\psi(\mathbf{r})$ una función con las mismas características del campo eléctrico $E(\mathbf{r})$ y donde ψ_0 es una constante. Ahora bien, lo anterior supone en principio una onda esférica de amplitud ψ_0 cuyo frente de onda se *aproxima* a un plano a medida que se propaga a lo largo del eje z . Dicha aproximación será válida si la onda plana resulta de una onda paraboloidal cuyo frente de onda es plano en $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{e}}_z$. Así, bajo esta suposición, la ecuación (2.11) puede ser modificada expandiendo en una *serie de Taylor* el argumento de la fase como sigue,

$$|\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = z(1 + \alpha^2)^{1/2} = z \left(1 + \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right), \quad (2.12)$$

donde se debe cumplir que,

$$\alpha^2 = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \ll 1.$$

Por lo tanto, conservando solo los términos de orden 2 en la ecuación (2.12), se tiene que,

$$|\mathbf{r}| \approx z \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}. \quad (2.13)$$

Finalmente, reemplazando la expresión (2.13) en el término de fase correspondiente en la ecuación (2.11), se obtiene,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\psi_0}{z} \exp \left[-ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right],$$

donde se ha sustituido $z \approx r$ en la amplitud porque este término es menos sensible a los cambios de fase, es decir, a las variaciones de x e y . Así, la función de onda bajo la aproximación paraboloidal o *Fresnel* toma la forma,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\psi_0}{z} \exp(-ikz) \exp \left[-ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right], \quad (2.14)$$

donde el término $\exp(-ikz)$ se refiere a una onda plana que está modulada por el factor $\psi_0/z \exp \left[-ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right]$. Cuando z se hace muy grande, el factor de fase paraboloidal

se aproxima a cero, por lo que la fase total de la onda pasa a ser kz . Así, puesto que la magnitud de la onda varía lentamente con z , la onda esférica se aproxima finalmente a una onda plana [33].

Ahora bien, el modo gaussiano, surge de considerar una modificación a la coordenada longitudinal en la solución (2.14), esto es, un haz paraboloidal centrado fuera del origen, donde se tiene que $q(z) = z - \xi$, con, $\xi = -iz_0$ para obtener el modo gaussiano, por lo tanto,

$$q(z) = z + iz_0, \quad (2.15)$$

donde $q(z)$ es una función compleja entendida como *radio complejo* del haz y z_0 es el llamado *rango de Rayleigh*. Dado lo anterior, considerando solamente factor de fase paraboloidal, la ecuación (2.14) se convierte en,

$$\psi'(\mathbf{r}) = \frac{\psi_0}{q(z)} \exp \left[-ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el nuevo valor de $q(z)$, se separa la amplitud de la fase de la envolvente compleja, por lo tanto,

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi W^2(z)}, \quad (2.17)$$

donde λ es la longitud de onda, $R(z)$ es el radio de curvatura del frente de onda y $W(z)$ se refiere a la anchura del haz.

Finalmente, sustituyendo la ecuación (2.17) en la ecuación (2.16) y haciendo uso de la ecuación (2.14), se obtiene

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp(-ikz) \exp \left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (2.18)$$

con

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right],$$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right), \quad W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{1/2},$$

donde $\zeta(z)$ es la fase de Gouy y W_0 es el radio de la cintura del haz. La ecuación (2.18) se conoce como *modo gaussiano de amplitud compleja*.

2.3.2. Modos Gaussianos de Orden Superior

De manera general, un *modo gaussiano de orden superior* (HOGB, por sus siglas en inglés), puede ser escrito como sigue

$$\Psi_{m,n}(q_i, q_j, z) = F_{m,n}(q_i, q_j, z) \psi'(q_i, q_j, z) \exp(-ikz), \quad (2.19)$$

donde (q_i, q_j) son las coordenadas transversales del sistema coordenado en el que se soluciona la EPH. La ecuación (2.19) junto con la ecuación (2.18) forman un conjunto ortogonal y completo de soluciones a la EPH, en otras palabras, cualquier otro haz puede expresarse como una superposición de estos haces [39]. Así las cosas, la distribución de amplitud de campo para modos gaussianos de orden superior, $\Psi_{m,n}(q_i, q_j, z)$, puede escribirse como el producto de las funciones $F_{m,n}$ que proporcionan la modulación de un modo relativa al sistema de coordenadas en el que se resuelve el EPH, modulada por la amplitud compleja del modo gaussiano $\psi(\mathbf{r})$ (ecuación 2.18) [12, 33]. A continuación, se consideran tres soluciones de orden superior a la EPH, las cuales se relacionan y que serán representadas sobre la nueva superficie geométrica propuesta para describir sus propiedades modales y de polarización.

2.3.3. Modos Hermite-Gauss

La EPH en coordenadas cartesianas (x, y, z) está dada por la expresión (2.10). Ahora bien, otro tipo de solución a esta ecuación diferencial está dada por la siguiente función de prueba [33],

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \mathcal{X} \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] \mathcal{Y} \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] \exp[i\mathcal{Z}(z)] \psi(\mathbf{r}),$$

donde \mathcal{X} , \mathcal{Y} y \mathcal{Z} son funciones idénticas, de variable real y con simetría cartesiana que en principio son desconocidas, además dicha solución está modulada por la envolvente gaussiana [33]. Dado lo anterior, la solución a la ecuación (2.10), está dada por,

$$\begin{aligned} HG_{u,n}(\mathbf{r}) = & \psi_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] H_u \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] \times \dots \\ & \dots \times \exp \left[i \left(-kz - k \frac{\rho^2}{2R(z)} + (u+n+1)\zeta(z) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde,

$$H_p \left[\frac{\sqrt{2}q_i}{W(z)} \right] = \mathcal{H}_p \left(\frac{\sqrt{2}q_i}{W(z)} \right) \exp \left(\frac{-2q_i^2}{W^2(z)} \right), \quad \text{con } q_i \equiv x, y,$$

es conocida como *función Hermite gaussiana* de orden p , y \mathcal{H}_p son los denominados *polinomios de Hermite* [33]. La ecuación (2.20) es una solución a la EPH en coordenadas cartesianas. El haz de amplitud complejo dado por la expresión (2.20) es conocido como *modo Hermite-Gauss* de orden (u, n) , donde u y n indican el número de *lugares* de intensidad nula o de nodos a lo largo de los ejes x e y , respectivamente. El orden del modo está dado por $U = u + n$. Cuando se tiene el orden $(0, 0)$, se consigue el modo gaussiano fundamental (2.18) [33, 38].

Un aspecto importante de este tipo de haces, es que cada uno de los términos que componen el modo HG están en fase, de manera similar a una onda plana, esto es, todos los puntos de un frente de onda que están en fase, están separados una distancia λ , lo que supone que a lo largo del eje óptico no hay cantidad de movimiento y por lo tanto, no tienen asociado un OAM.

La intensidad de un haz $HG_{u,n}$ viene dada por $I_{u,n} = |HG_{u,n}|^2$, y toma la forma,

$$I_{u,n} = |\psi_0|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] H_u^2 \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] H_n^2 \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right]. \quad (2.21)$$

La Figura 2.1 muestra diferentes distribuciones de intensidad y fase de los modos $HG_{u,n}$ para diferentes valores de u y n .

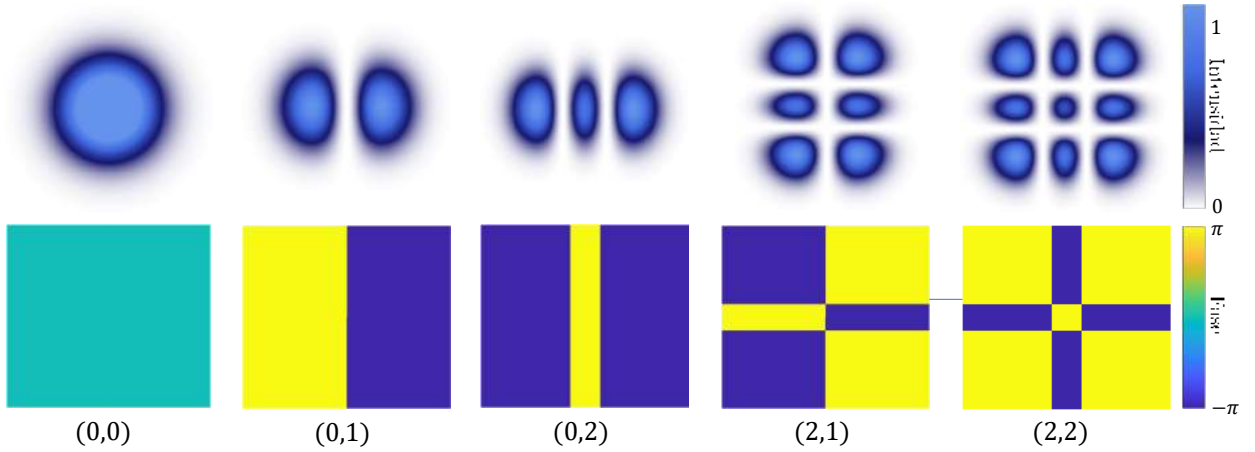


Figura 2.1: Simulación de los modos $HG_{u,n}$ para $(u, n) = (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, 1)$ y $(2, 2)$. Fila superior, distribución de intensidad, fila inferior, correspondiente a la fase.

Los modos HG mostrados en la Figura 2.1 son simulados en $z = 0$. Estos dejan ver que cuando $u = n = 0$ se obtiene el modo gaussiano fundamental, mientras que cuando $u < n$, la intensidad del modo se distribuye a lo largo de la coordenada x ; si $u = n$, entonces la intensidad se distribuye de igual manera en x e y y se observa una especie de contorno cuadrado.

2.3.4. Modos Laguerre-Gauss

La EPH escrita en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , está dada por

$$\frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r})}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{r})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r})}{\partial \phi^2} - 2ik \frac{\partial \Gamma(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.22)$$

donde ρ es la coordenada radial, ϕ es la coordenada angular y z es la coordenada longitudinal. Ahora bien, dicha ecuación puede ser resuelta proponiendo una solución de prueba de la forma (2.19), dada por

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \mathcal{G} \left[\frac{r}{W(z)} \right] \exp[i\mathcal{P}(\phi)] \exp[i\mathcal{Z}(z)] \psi(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

donde \mathcal{G} , \mathcal{P} y \mathcal{Z} son funciones idénticas, de variable real y con simetría cilíndrica que en principio son desconocidas, además dicha solución está modulada por la envolvente gaussiana de manera similar al caso anterior. La solución a la ecuación (2.22),

está dada por,

$$\begin{aligned}
 LG_{q,l}^{e,o}(\mathbf{r}) = & \psi_0 \frac{W_0}{W(z)} \left(\frac{\cos l\phi}{\sin l\phi} \right) \left(\frac{\rho}{W(z)} \right)^l L_p^l \left[\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \times \dots \\
 & \dots \times \exp \left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - il\phi + i(l+2q+1)\zeta(z) \right],
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde,

$$L_q^l(x) = \left(\frac{x^{-l}e^x}{q!} \right) \left(\frac{d^q}{dx^q} \right) [x^{l+q}e^{-x}],$$

son los polinomios generalizados de Laguerre. El conjunto de haces de amplitud compleja dados por la expresión (2.24) es conocido como *modos Laguerre-Gauss* par (*e*) e impar (*o*) de orden (*q*, *l*) y son una solución a la EPH en coordenadas cilíndricas, donde *q* = 0, 1, 2, 3, ... es el parámetro radial y *l* = ±0, 1, 2, 3, ... es el parámetro azimutal. Cuando el orden es (0, 0), se tiene al modo gaussiano fundamental (2.18). Los modos *LG* son conocidos como vórtices ópticos; lo anterior, debido a la importante presencia del término de fase helicoidal $\exp(il\phi)$ que cambia con el ángulo azimutal ϕ a lo largo del eje óptico. Este término de fase, actúa sobre la onda de tal manera que los puntos sobre el frente de onda que están diametralmente opuestos, están desfasados por un factor de π , lo que significa que el frente de onda sigue un patrón helicoidal a lo largo del eje *z*, de modo que en el centro del perfil transversal del frente de onda, todas las fases diferentes provocan un torque a lo largo del eje de propagación, lo que lleva a la característica singularidad de fase a lo largo del eje del haz, lo que se puede ver como un punto central de intensidad nula en el perfil transversal. Por otro lado, a cada posible vórtice óptico, se le asocia un número entero que puede ser positivo o negativo y que recibe el nombre de *carga topológica* (*l*), el cual se asocia a número de torsiones sobre una distancia de la longitud de onda λ [40]. El número de anillos que se pueden obtener en un vórtice óptico o modo *LG* está dado por *q* + 1 para *l* ≠ 0.

La intensidad $I_{l,p}^{e,o} = |LG_{q,l}^{e,o}|^2$ de los modos *LG* está dado por,

$$I_{q,l}^{e,o} = |\psi_0|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \left[\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right]^{2l} L_p^l \left[\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]^2 \exp \left[\frac{-2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \tag{2.25}$$

La Figura 2.2 tal muestra diferentes distribuciones de intensidad y fase de los modos $LG_{q,l}$ para diferentes valores de *q* y *l*.

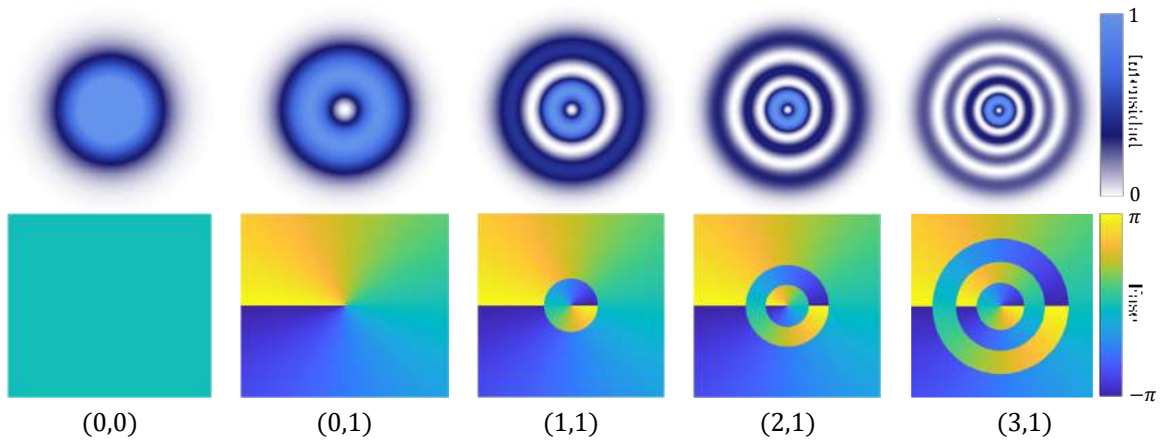


Figura 2.2: Simulación de los modos $LG_{q,l}$ para $(q, l) = (0, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)$ y $(3, 1)$. Fila superior, distribución de intensidad, fila inferior, correspondiente estructura de fase.

En la Figura 2.2, se puede apreciar que cuando $q = l = 0$ se obtiene el modo gaussiano fundamental, mientras que cuando $p > l$ aumenta el número de anillos del modo. Para modo con $-l$, la distribución de intensidad se mantiene inalterada y la fase se invierte.

2.3.5. Modos Ince-Gauss

Un tipo de modos gaussianos de orden superior, que surgen de dar solución a la EPH en coordenadas elípticas-cilíndricas son los modos *Ince-Gauss*. En este caso, se transforma la EPH (2.10) haciendo uso del cambio de coordenadas (ver Figura 2.3) dadas por,

$$\begin{aligned} x &= f(z) \cosh \xi \cos \eta \\ y &= f(z) \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z, \end{aligned}$$

donde $f(z) = f_0 W(z)/W_0$ es la distancia o separación semi-focal (excentricidad) del sistema coordinado con f_0 como la separación inicial en $z = 0$. Considerando el cambio de coordenadas anterior, la EPH en coordenadas elípticas-cilíndricas queda de la forma [38],

$$\frac{1}{f^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial \eta^2} \right] + 2ik \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.26)$$

Ahora bien, esta ecuación puede ser resuelta proponiendo una solución de prueba de la forma (2.19) y aplicando el método de separación de variables, con lo cual se tiene,

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\xi) \mathcal{N}(\eta) \exp [i\mathcal{Z}(z)] \psi(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{r} = (\xi, \eta, z)$; $\mathcal{E}(\xi)$, $\mathcal{N}(\eta)$ y $\mathcal{Z}(z)$ son funciones de variable real. Ahora, sustituyendo la solución de prueba (2.27) en la ecuación (2.26) y teniendo en cuenta la envolvente gaussiana $\psi(\mathbf{r})$, se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias [38], las

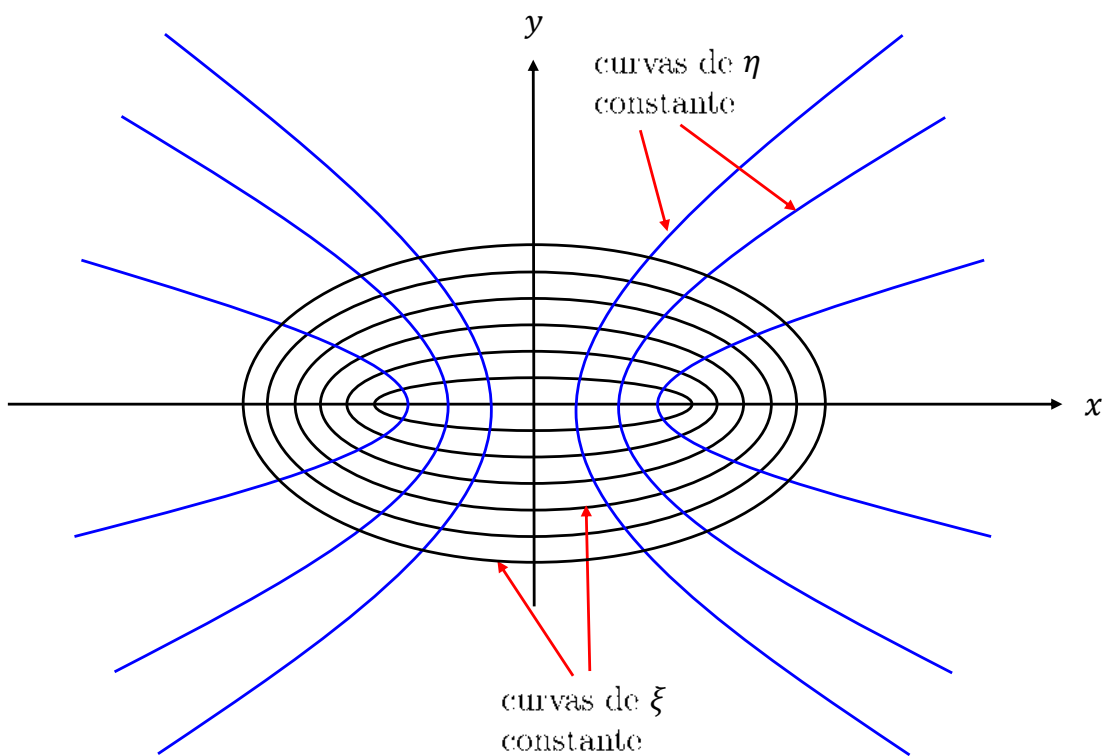


Figura 2.3: Sistema de coordenadas elípticas, donde la coordenada radial está dada por $\xi \in [0, \infty)$ y la coordenada angular está dada por $\eta \in [0, 2\pi)$.

cuales están dadas por,

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\xi^2} - \epsilon \sinh 2\xi \frac{d\mathcal{E}}{d\xi} - (a - p\epsilon \cosh 2\xi)\mathcal{E} = 0, \quad (2.28a)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{N}}{d\eta^2} - \epsilon \sin 2\eta \frac{d\mathcal{N}}{d\eta} - (a - p\epsilon \cos 2\eta)\mathcal{N} = 0, \quad (2.28b)$$

$$-\left(\frac{z^2 + z_R^2}{z_R}\right) \frac{d\mathcal{Z}}{dz} = p, \quad (2.28c)$$

con a y p como constantes que surgen debido al proceso de solución mediante el método de separación variables y $\epsilon = 2f_0^2/W_0^2$ como el parámetro de *elipticidad*, característico de la geometría elíptica. Generalmente [38, 41], se da solución solo a la expresión (2.28b) (que es conocida como ecuación de Ince) tanto para \mathcal{E} como para \mathcal{N} , esto, haciendo el cambio de variable $\xi = i\eta$. Lo anterior, debido a que es posible encontrar soluciones radiales \mathcal{E} a partir de soluciones angulares \mathcal{N} haciendo el argumento imaginario. Así las cosas, las soluciones a la ecuación (2.28b) se conocen como los *polinomios de Ince*, los cuales pueden ser encontrados a partir de hacer uso de alguna de

las siguientes funciones de prueba [41],

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\eta) &:= C_e(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos(2r\eta), \\ \mathcal{N}(\eta) &:= C_o(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos[(2r+1)\eta], \\ \mathcal{N}(\eta) &:= S_e(\eta) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin(2r\eta), \\ \mathcal{N}(\eta) &:= S_o(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \sin[(2r+1)\eta], \end{aligned}$$

donde $C_{e,o}$ y $S_{e,o}$ hacen referencia a los polinomios de Ince par (e) o impar (o), respectivamente. Ahora bien, para obtener los polinomios de Ince, es necesario hacer uso de alguna de las relaciones anteriores y solucionar la ecuación (2.28b), lo cual lleva a una serie de relaciones de recurrencia, las cuales permiten encontrar el valor de la constante A_r para cada valor de r . Dichas relaciones de recurrencia, pueden expresarse como un problema de valores propios dado por,

$$MA_i = a_i A_i,$$

donde los valores propios de M corresponden a los valores de a en la ecuación diferencial (2.28b) y los vectores propios son los coeficientes A_i para la solución de prueba elegida [41].

Dado lo anterior, la solución a la ecuación (2.27) consiste en una pareja de haces modulados por una envolvente gaussiana que se conocen como *modos Ince-Gauss* (*IGM*, por sus siglas en inglés), y están dados por,

$$\begin{aligned} IG_{p,m;\epsilon}^e(\mathbf{r}) &= \frac{CW_0}{W(z)} C_p^m(i\xi; \epsilon) C_p^m(\eta; \epsilon) \exp\left[\frac{-\rho^2}{W^2(z)}\right] \times \dots \\ &\dots \times \exp\left[i\left(kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - (p+1)\zeta(z)\right)\right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} IG_{p,m;\epsilon}^o(\mathbf{r}) &= \frac{SW_0}{W(z)} S_p^m(i\xi; \epsilon) S_p^m(\eta; \epsilon) \exp\left[\frac{-\rho^2}{W^2(z)}\right] \times \dots \\ &\dots \times \exp\left[i\left(kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - (p+1)\zeta(z)\right)\right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde C_p^m y S_p^m son los polinomios de Ince par e impar respectivamente, con $0 \leq m \leq p$ para funciones pares y $1 \leq m \leq p$ para funciones impares; el índice azimutal m corresponde a número de líneas nodales hiperbólicas, mientras que el índice radial p se asocia al número de líneas nodales elípticas a partir de $(p-m)/2$ y además p y m siempre tienen la misma paridad [38]. Por otro lado, C y S son constantes de normalización. Cuando $C_0^0(\eta; \epsilon) = 1$, esto es, $(0,0)$ se tiene el modo gaussiano fundamental [38]. Los demás parámetros involucrados en las soluciones fueron previamente comentados en la sub-sección 2.3.1. La Figura 2.4 muestra la distribución de intensidad y fase de los

modos IG pares e impares.

La intensidad de los modos IG está dada por $I_{m,n}^{o,e} = |IG_{m,n}^{o,e}|^2$, esto es,

$$I_{m,n}^{e,o} = \mathcal{A}^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} [D_m^n(i\xi; \epsilon)]^2 [D_m^n(\eta; \epsilon)]^2 \exp\left[\frac{-2\rho^2}{W^2(z)}\right], \quad (2.31)$$

donde \mathcal{A} puede ser C o S dependiendo de si la solución es par o impar, respectivamente.

Estos haces suelen ser conocidos en la literatura como *modos Ince-Gauss escalares* (SIGM, por sus siglas en inglés), pues surgen de dar solución a la EPH en forma escalar, por lo que presentan un único estado de polarización en su perfil transversal, además, forman la tercera familia de soluciones ortogonales a la EPH en coordenadas elípticas (junto con los modos Laguerre-Gauss y los modos Hermite-Gauss), lo que significa que cualquier campo paraxial puede ser expresado como una superposición de modos IG [38]. Lo anterior, es una característica bastante importante, ya que los modos IG son una transición «suave» entre los modos LG cuando $\epsilon = 0$ y los modos HG cuando $\epsilon = \infty$. Se ahondará con más detalle sobre este aspecto más adelante.

2.3.6. Modos Ince-Gauss Helicoidales

La superposición coherente de los modos pares e impares, da cabida a los *modos Ince-Gauss Helicoidales* ($HIGM$, por sus siglas en inglés), los cuales se escriben como sigue [42],

$$HIG_{p,m;\epsilon}^{h\pm}(\mathbf{r}) = IG_{p,m;\epsilon}^e(\mathbf{r}) \pm i IG_{p,m;\epsilon}^o(\mathbf{r}), \quad (2.32)$$

donde $h\pm$ hace referencia a la suma o resta de los modos e i es fase helicoidal entre los modos que se superponen y rota elípticamente alrededor de la línea definida por $(|x| \leq f, 0, z)$ y el signo en la ecuación (2.32) define la dirección de rotación [38]. Los modos HIG están solo definidos para $m > 0$ dado que la solución impar $IG_{p,m;\epsilon}^o$ no está definida para $m = 0$. Un aspecto importante de estos modos, es que muestran anillos elípticos de intensidad los cuales contienen varios vórtices en líneas paralelas al eje óptico. Estas características, anillos, vórtices y elipticidad pueden modularse en el proceso de generación de los haces [42].

La Figura 2.4, muestra la distribución de intensidad y fase de los modos $IG_{p,m;\epsilon}^e$, $IG_{p,m;\epsilon}^o$ y $HIG_{p,m;\epsilon}^{h+}$ para $p = 3, 5, 7$, $m = 1$ y $\epsilon = 5$ en $z = 0$. En este caso, las distribuciones para las soluciones pares e impares son diferentes debido a la fase en cada caso como era de esperar, mientras que el modo completo que resulta de la superposición de dichos modos, deja ver el vórtice central de intensidad nula, característico de los vórtices ópticos debido a la fase helicoidal, mientras que los otros puntos de intensidad nula, están asociados a los puntos donde las componentes real e imaginaria son cero. En general, el número de anillos está dado por la relación $1 + (p - m)/2$. y tienen m vórtices físicamente separados, cada uno con una carga topológica dada por la unidad.

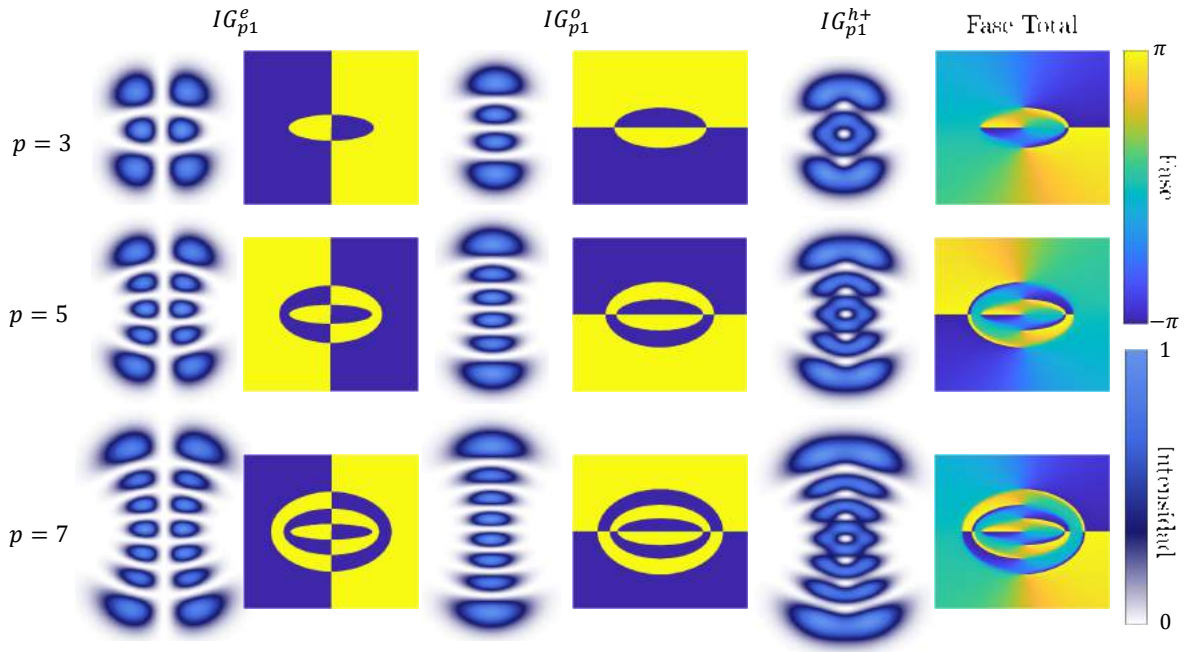


Figura 2.4: Simulación de los modos IG en intensidad y fase. La primera columna muestra los modos IG pares en intensidad y fase, la segunda los modos impares en intensidad y fase, la tercera columna muestra los modos HIG resultantes de la combinación (suma) de los modos pares e impares en intensidad y fase. Cada fila muestra un modo diferente según el valor de p .

Como se mencionó con anterioridad, los modos IG son una transición suave entre los modos LG a los modos HG cuando el parámetro de elipticidad ϵ varía de 0 a ∞ , respectivamente. Esto es, existe entonces una relación entre las tres familias de soluciones a la EPH, pues estos modos se pueden expresar como una combinación lineal de los otros. Dicha relación se puede escribir como sigue [38, 43],

$$IG_{p,m}^{e,o}(\mathbf{r}, \epsilon) = \sum_{p,l} A_{p,l} (LG_{p,l}^{e,o}(\mathbf{r})) = \sum_{a,b} B_{a,b} (HG_{u,n}(\mathbf{r})), \quad (2.33)$$

donde las constantes $A_{q,l}$ y $B_{a,b}$ resultan de solucionar las integrales de superposición (comparación) en cada caso, y que están dadas por [38, 43],

$$A_{p,l} = \iint_{-\infty}^{\infty} LG_{q,l}^{e,o} \overline{IG_{p,m}^{(e,o)'}} dV \quad \text{y,} \quad B_{ab} = \iint_{-\infty}^{\infty} HG_{u,n} \overline{IG_{p,m}^{(e,o)'}} dV.$$

Ahora bien, la relación de transición entre las tres soluciones anteriormente mencionadas está ligada a la variación del parámetro de elipticidad ϵ , esto es, los modos IG tienden a los modos LG cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de tal manera que cuando $\epsilon = 0$, la geometría de los haces es cilíndrica y se obtienen los haces LG . En este caso, se debe considerar que $m = l$ y que $p = 2q + l$. Por el contrario, cuando $\epsilon \rightarrow \infty$, los modos IG tienden a los modos HG , de tal manera que cuando $\epsilon = \infty$ la geometría de los haces es cartesiana y se obtienen los modos HG . En este caso, se debe considerar que $u = m$ y $n = p - m$ cuando los modos IG son pares, mientras que, $u = m - 1$ y $n = p - m + 1$ cuando los modos IG son impares.

De manera similar al caso de los modos *HIG*, es posible construir los modos *Laguerre-Gauss Helicoidales* (*HLG*, por sus siglas en inglés), los cuales están dados por,

$$HLG_{q,l}^{h\pm}(\mathbf{r}) = LG_{q,l}^e \pm iLG_{q,l}^o, \quad (2.34)$$

y los haces *Hermite-Gauss Helicoidales* (*HHG*, por sus siglas en inglés), los cuales están dados por [44],

$$HHG_{p,m}^{h\pm}(\mathbf{r}) = HG_{l,2q}^e \pm iHG_{l-1,2q+1}^o, \quad (2.35)$$

para $q = 0, 1, 2, 3, \dots$ y $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, donde $p = 2q + l$ y $l = m$, siendo q y l el índice radial y azimutal de los modos *LG*, respectivamente. La Figura 2.5, presenta algunas distribuciones de intensidad y fase de los haces *HIG* para diferentes valores de p , m y ϵ en $z = 0$.

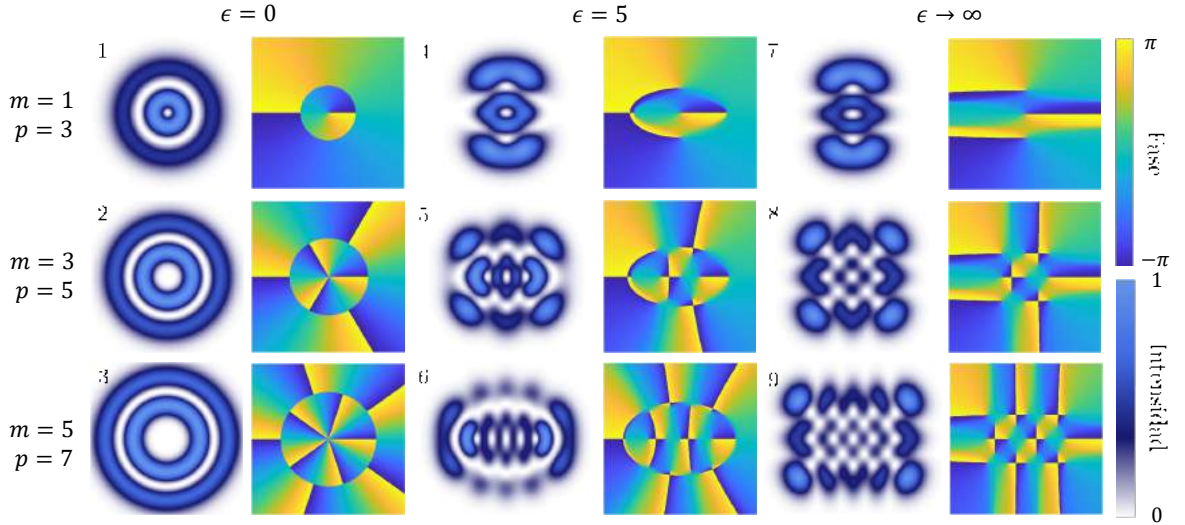


Figura 2.5: Simulación de intensidad y fase de los modos *HIG*. En la primera columna se pueden apreciar los modos *HLG* en intensidad y fase cuando $\epsilon = 0$, en la segunda columna están los modos *HIG* en intensidad y fase, cuando $\epsilon = 5$, y la última columna deja ver los haces *HHG* en intensidad y fase cuando $\epsilon = \infty$.

La Figura 2.5 muestra las distribuciones de intensidad de los haces *LG*, *IG* y *HG* helicoidales como una transición suave entre estos. Los modos *HLG* surgen cuando $\epsilon = 0$ y pueden ser caracterizados de igual forma que los modos *LG*. Así, para los valores (p, m) en $(1, 2, 4)$ se tienen los modos *HLG* con $(q, l) = (1, 1); (1, 3); (1, 5)$, respectivamente. Los modos *HIG* (4, 5, 6) surgen cuando $1 < \epsilon \ll \infty$, y se caracterizan porque presentan una geometría elíptica, además de que la singularidad de fase central se incrementa y se distribuye en varios puntos del haz. Los valores de los órdenes son los correspondientes a (p, m) en la imagen. Finalmente los modos *HHG* (7, 8, 9) surgen cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ y se caracterizan porque adquieren una geometría cartesiana (cuadrada) y singularidades de fase en varios puntos del haz representadas de igual manera que en los casos anteriores por medio de zonas de intensidad nula [44]; en este caso, para los valores (p, m) en $(7, 8, 9)$ se tienen los modos *HHG* con los correspondientes (p, m) mostrados en la imagen.

2.4. Polarización

La polarización es una importante característica de la luz, que se refiere a la variación en el tiempo de la dirección en la que oscila el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en el punto \mathbf{r} en el plano perpendicular a la propagación de la onda y describe la naturaleza vectorial de la luz. Este campo, se puede escribir formalmente como,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.36)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda y ω es la frecuencia. Por otro lado,

$$\mathbf{E}_0 = E_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_x + E_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_y + E_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_z$$

con $E_x(\mathbf{r}, t)$, $E_y(\mathbf{r}, t)$ y $E_z(\mathbf{r}, t)$ son las componentes del campo eléctrico en (x, y, z) respectivamente, y $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$ son los vectores unitarios asociados a la dirección de oscilación del campo eléctrico. Así, el estado de polarización determina la dirección de oscilación del campo eléctrico, donde solo la parte real de la ecuación (2.36) es físicamente relevante.

Ahora bien, una forma conveniente de representar los estados de polarización es a través de la *notación de Jones* o *vectores de Jones*, para ello, la ecuación (2.36) (si las componentes están fuera de fase y si se considera que la onda se propaga en dirección z) se escribe como,

$$\mathbf{E}(z, t) = [E_x(z)e^{i\alpha_x}\hat{\mathbf{e}}_x + E_y(z)e^{i\alpha_y}\hat{\mathbf{e}}_y]e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}-\omega t)}, \quad (2.37)$$

que es lo mismo que,

$$\mathbf{E}(z, t) = e^{i\alpha_x} [E_x(z)\hat{\mathbf{e}}_x + E_y(z)e^{i\alpha}\hat{\mathbf{e}}_y]e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}-\omega t)}, \quad (2.38)$$

donde $\alpha = \alpha_y - \alpha_x$ es la fase retardada entre las componentes de polarización. Como los vectores unitarios son fijos, no es necesario retener estos vectores en la expresión matemática de la onda, por lo que es posible expresar la ecuación (2.38) como un vector columna normalizado, además, como la onda es monocromática, es decir, todos los puntos del frente de onda oscilan sinusoidalmente con la misma frecuencia, dicha información temporal también se puede suprimir, y finalmente si se considera que las medidas se realizarán en el plano $z = 0$, entonces,

$$\mathbf{E}(0) = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y e^{i\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\alpha} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

donde E_x y E_y representan las componentes de polarización del campo eléctrico a lo largo de las direcciones x y y y θ es al ángulo entre dichas componentes, respectivamente. Este vector contiene la información esencial sobre la polarización del campo.

Estados de Polarización de la Luz

En la ecuación (2.39), los valores de E_x y E_y junto con el valor de α determinan el estado de polarización de la luz. Dado lo anterior, los estados de polarización degenerados se pueden apreciar en la Figura 2.6.

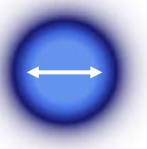


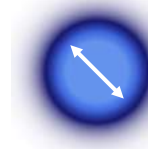
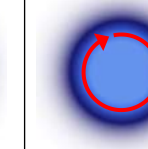
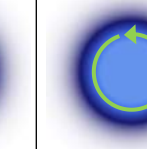
PLH	PLV	PLD	PLA	PCD	PCI
$\mathbf{E}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
					

Figura 2.6: La Fila superior muestra los vectores de Jones correspondientes a los principales estados de polarización, donde, PLH: polarización lineal horizontal, PLV: polarización lineal vertical, PLD: polarización lineal diagonal, PLA: polarización lineal antidiagonal, PCD: polarización circular a derecha y PCI: polarización circular a izquierda. La fila inferior muestra gráficamente el estado de oscilación del campo eléctrico sobre el perfil transversal de haz gaussiano. La flecha indica el sentido de oscilación; blanco, polarización lineal, rojo y verde polarización circular a derecha y a izquierda respectivamente.

Por otro lado, el grado de libertad de polarización resulta ser sumamente importante y de los principales en luz estructurada, más exactamente en la generación de MV, ya que en conjunto con el modo espacial es posible construir una pareja de estados clásicamente enredados, es decir, los grados de libertad espacial y de polarización están acoplados de manera no separable localmente. Cada estado (haz), se caracteriza por una distribución de polarización homogénea que le da la denominación de *modo escalar*, y que dan cabida a la generación de los MV, esto es, modos que se caracterizan por la configuración no-homogénea de la polarización en su perfil transversal. A continuación, se ahondará en la teoría de la polarización a través de la EP y de la esfera de Poincaré, relegando las respectivas representaciones geométricas al capítulo 3.

2.4.1. Elipse de Polarización

Cualquier campo óptico requiere tres componentes para ser descrito en su totalidad, dos perpendiculares entre si que forman el plano asociado al frente de onda y que comúnmente son las componentes $E_x(\mathbf{r}, t)$ y $E_y(\mathbf{r}, t)$ y la componente longitudinal $E_z(\mathbf{r}, t)$, perpendicular al frente de onda, el cual está asociado a la dirección en la que se propaga dicho campo. Las componentes anteriormente mencionadas pueden ser escritas como sigue:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_{0x} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_x) \quad (2.40a)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_{0y} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_y), \quad (2.40b)$$

donde E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes máximas del campo eléctrico y δ_x y δ_y son fases arbitrarias. Considerando la propagación en la dirección z y dado que solo son necesarias las ecuaciones (2.40a) y (2.40b), entonces se tiene,

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad (2.41a)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y), \quad (2.41b)$$

donde $\tau = kz - \omega t$ con $k\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z) = kz$, es el término de fase comúnmente llamado propagador. Así, a medida que el campo se propaga en la dirección z , las componentes E_{0x} y E_{0y} dan lugar a la existencia de un campo vectorial. Por otro lado, la idea ahora es obtener una expresión que reúna la totalidad de los diferentes estados de polarización de la luz. Dado lo anterior, se prosigue eliminando el término de fase τ en las ecuaciones (2.41a) y (2.41b), esto es,

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\tau + \delta_x) = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \quad (2.42a)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\tau + \delta_y) = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y. \quad (2.42b)$$

Multiplicando la ecuación (2.42a) por $\sin \delta_y$ y la ecuación (2.42b) por $\sin \delta_x$, y luego restando las expresiones resultantes se obtiene,

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x), \quad (2.43)$$

puesto que se uso la identidad,

$$\cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x) = \cos \tau (\cos \delta_x \sin \delta_y - \cos \delta_y \sin \delta_x)$$

De manera similar al caso anterior, multiplicando (2.42a) por $\cos \delta_y$ y la ecuación (2.42b) por $\cos \delta_x$, se llega a,

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x), \quad (2.44)$$

donde,

$$\sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x) = \sin \tau (\cos \delta_x \sin \delta_y - \cos \delta_y \sin \delta_x).$$

Ahora bien, elevando al cuadrado las ecuaciones (2.43) y (2.44), desarrollando cada expresión, simplificando y luego sumando se tiene,

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (2.45)$$

con $\delta = \delta_y - \delta_x$.

La ecuación (2.45) corresponde a la ecuación de una elipse y muestra que en cualquier instante de tiempo el lugar geométrico de los puntos descritos por el campo óptico a medida que se propaga es una elipse, dicho comportamiento se dice que es *polarización óptica* y por ende, la ecuación (2.45) es conocida como *elipse de polarización* (EP) [45]. La representación geométrica de una onda con polarización elíptica puede apreciarse en la Figura 2.7.

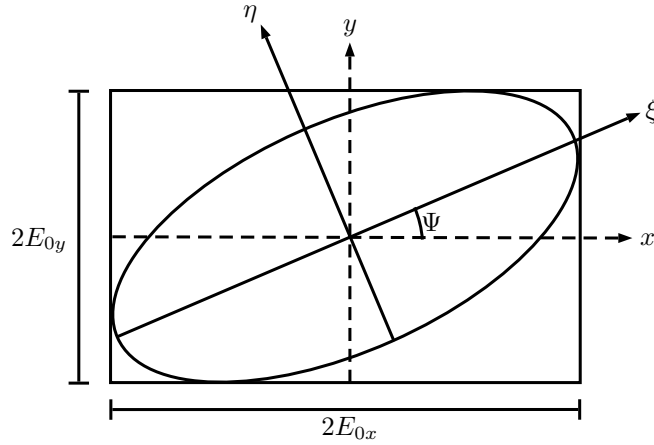


Figura 2.7: Representación geométrica de una onda con polarización elíptica en la EP, donde Ψ representa el ángulo de orientación de la elipse.

Ahora bien, la EP se caracteriza por ser una representación geométrica de los estados de polarización de la luz que se puede lograr a través de las intensidades del campo eléctrico en cada una de sus componentes y de la fase δ de la onda, sin embargo, esto también puede ser logrado a partir de los parámetros propios de la geometría de la elipse (orientación y forma) que se relacionan con las componentes del campo y la fase, esto es, se reescriben las expresiones asociadas a las componentes del campo eléctrico, pues dado que la elipse puede tener cualquier orientación, sus ejes originales no están en las direcciones x e y como se aprecia en la Figura 2.7, lo que supone una transformación (rotación) dada por,

$$\begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ -\sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

donde E_ξ y E_η son los ejes de la elipse estándar, la cual está dada por,

$$\frac{E_\xi^2}{a^2} + \frac{E_\eta^2}{b^2} = 1,$$

con [45],

$$E_\xi = a \cos(\tau + \delta') \quad (2.47a)$$

$$E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta') \quad (2.47b)$$

siendo a y b el semi eje mayor y el semi eje menor de la elipse, respectivamente y δ' es una fase arbitraria. Por otro lado, E_x y E_y están dadas por (2.42a) y (2.42b) respectivamente. Ahora bien, al sustituir las expresiones (2.42a), (2.42b), (2.47a) y (2.47b) en (2.46) se tiene,

$$\begin{aligned} a(\cos \tau \cos \delta' - \sin \tau \sin \delta') &= E_{0x}(\cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x) \cos \Psi + \dots \\ &\dots + E_{0y}(\cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y) \sin \Psi, \end{aligned} \quad (2.48)$$

y,

$$\begin{aligned} \pm b(\sin \tau \cos \delta' + \cos \tau \sin \delta') &= -E_{0x}(\cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x) \sin \Psi + \dots \\ &\dots + E_{0y}(\cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y) \cos \Psi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Desarrollando cada uno de los productos e igualando los coeficientes de $\cos \tau$ y $\sin \tau$ se llega a,

$$a \cos \delta' = E_{0x} \cos \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \cos \delta_y \sin \Psi, \quad (2.50a)$$

$$a \sin \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \sin \delta_y \sin \Psi, \quad (2.50b)$$

$$\pm b \cos \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \sin \Psi - E_{0y} \sin \delta_y \cos \Psi, \quad (2.50c)$$

$$\pm b \sin \delta' = E_{0x} \cos \delta_x \sin \Psi - E_{0y} \cos \delta_y \cos \Psi. \quad (2.50d)$$

Elevando ahora al cuadrado las ecuaciones (2.50a) y (2.50b) y luego sumándolas se obtiene,

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \Psi + E_{0y}^2 \sin^2 \Psi + 2E_{0x}E_{0y} \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta. \quad (2.51)$$

De manera similar, pero ahora con las ecuaciones (2.50c) y 2.50d, se tiene,

$$b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \Psi + E_{0y}^2 \cos^2 \Psi - 2E_{0x}E_{0y} \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta, \quad (2.52)$$

con $\delta = \delta_y - \delta_x$. Sumando las ecuaciones (2.51) y (2.52), se puede apreciar que,

$$a^2 + b^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (2.53)$$

La ecuación (2.53) representa la equivalencia entre la EP dada por la expresión (2.45) y la elipse estándar, por lo que es posible entonces representar las propiedades de polarización de la luz, en términos de las características geométricas de la elipse, esto es, su ángulo de orientación y su ángulo de elipticidad.

Lo anterior se puede apreciar, al dividir la ecuación (2.50d) entre la ecuación (2.50a) y la ecuación (2.50c) entre la ecuación (2.50b), consiguiendo así [45, 46],

$$\tan(2\Psi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \delta = \tan(2\alpha) \cos \delta, \quad (2.54)$$

donde $0 \leq \Psi \leq \pi$, es el ángulo de orientación de la elipse.

Si ahora si multiplican las ecuaciones (2.50a) y (2.50c) y se suman al producto de (2.50b) con (2.50d), se consigue,

$$\pm ab = E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (2.55)$$

Por otro lado, el ángulo de elipticidad viene dado por,

$$\tan \chi = \frac{\pm b}{a}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (2.56)$$

Ahora, usando las ecuaciones (2.53), (2.55) y (2.56), junto con el ángulo auxiliar

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}},$$

se llega a la relación entre la EP y los parámetros E_{0x} , E_{0y} y δ ,

$$\sin(2\chi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin \delta = \sin(2\alpha) \sin \delta, \quad (2.57)$$

donde el ángulo de elipticidad de la elipse viene dado por $\chi = \arctan(\pm E_{0y}/E_{0x})$. La relación de los parámetros Ψ y χ con las magnitudes E_{0x} , E_{0y} y δ se pueden apreciar en la Figura 2.8.

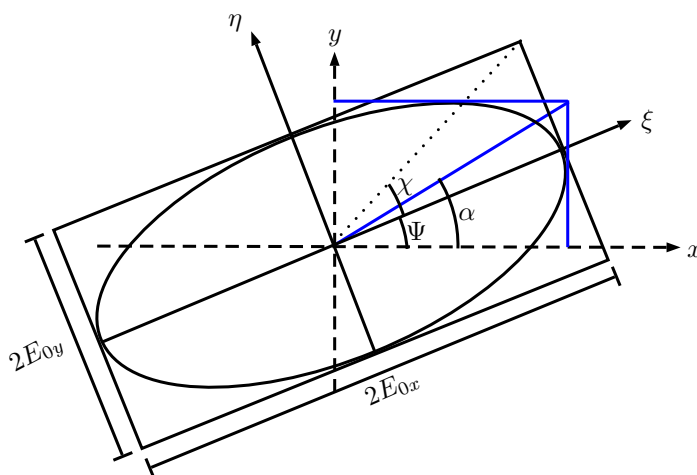


Figura 2.8: EP donde se puede apreciar los ángulos Ψ , χ y α ; con E_{0x} y E_{0y} como los semiejes de la elipse.

En la sub-sección 3.1.1, se representa la geometría de diferentes estados de polarización, es decir, de diferentes elipses de polarización.

2.4.2. Parámetros de Stokes

Una de las formas de construir la esfera de la Poincaré, la cual es muy habitual, pues considera mediciones reales de intensidad, es a partir de los parámetros de Stokes, los cuales fueron definidos por Sir George Gabriel Stokes en 1852. A continuación, se detallará de manera breve la forma en la que se construye la esfera de Poincaré a partir de dichas consideraciones.

Para representar los estados de polarización de la luz en la esfera de Poincaré haciendo uso de los parámetros de Stokes, es necesario mostrar que es posible construir una esfera similar a partir de los parámetros de Stokes, y a partir de esto, por comparación, reescribir los ejes coordenados de la esfera en términos de los parámetros de Stokes. Así las cosas, se tiene que la relación de coordenadas cartesianas con las coordenadas esféricas está dada por las *ecuaciones de Poincaré para la elipse de pola-*

rización [47],

$$x = \frac{1}{2} \cos 2\chi \cos 2\Psi \quad (2.58a)$$

$$y = \frac{1}{2} \cos 2\chi \sin 2\Psi \quad (2.58b)$$

$$z = \frac{1}{2} \sin 2\chi. \quad (2.58c)$$

Ahora bien, como se sabe de (2.41a) y (2.41b), las componentes del campo eléctrico sin considerar el término propagador están dadas por,

$$E_x(z) = E_{0x} \exp(\delta_x) \quad (2.59a)$$

$$E_y(z) = E_{0y} \exp(\delta_y), \quad (2.59b)$$

mientras que los parámetros de Stokes dados para el campo (2.59) están definidos como sigue [45]:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.60a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.60b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.60c)$$

$$S_3 = \iota(E_x E_y^* - E_y E_x^*). \quad (2.60d)$$

Donde se ha omitido cualquier tipo de dependencia espacial y/o temporal por parte del campo eléctrico por practicidad. Ahora bien, reemplazando las expresiones (2.59) en las expresiones (2.60) y realizando las operaciones señaladas, se tiene que,

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.61a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.61b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.61c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta, \quad (2.61d)$$

donde, $\delta = \delta_y - \delta_x$. Por otro lado, de la Figura (2.8) se puede apreciar que,

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}, \quad (0 \leq \alpha \leq \pi/2). \quad (2.62)$$

Por otro lado, el vector campo eléctrico formado por las dos componentes cartesianas del mismo, forman un triángulo rectángulo el cual puede ser caracterizado como se muestra en la Figura 2.9.

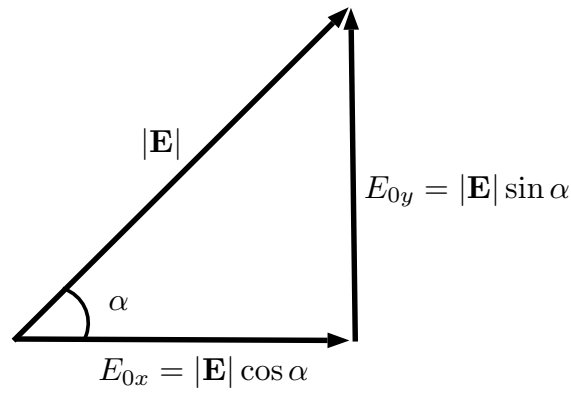


Figura 2.9: Magnitud del campo eléctrico a partir de sus componentes cartesianas.

Dado lo anterior, se tiene que las ecuaciones (2.61) pueden escribirse como sigue,

$$S_0 = |\mathbf{E}|^2 \quad (2.63a)$$

$$S_1 = |\mathbf{E}|^2 \cos 2\alpha \quad (2.63b)$$

$$S_2 = |\mathbf{E}|^2 \sin 2\alpha \cos \delta \quad (2.63c)$$

$$S_3 = |\mathbf{E}|^2 \sin 2\alpha \sin \delta. \quad (2.63d)$$

Ahora bien, si se el vector \mathbf{E} barriese la superficie de una esfera de radio $1/2$, se tendría que las expresiones (2.63) se escribirían de la forma

$$S_0 = \frac{1}{2} \quad (2.64a)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cos 2\alpha \quad (2.64b)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \delta \quad (2.64c)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \delta. \quad (2.64d)$$

Por otro lado, las relaciones trigonométricas en (2.64b-2.64d) pueden ser escritas como sigue [45, 48],

$$\cos 2\alpha = \cos 2\chi \cos 2\Psi \quad (2.65a)$$

$$\sin 2\alpha \cos \delta = \cos 2\chi \sin 2\Psi \quad (2.65b)$$

$$\sin 2\alpha \sin \delta = 2 \sin \chi. \quad (2.65c)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.64) se transforman a la siguiente forma,

$$S_0 = \frac{1}{2} \quad (2.66a)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cos 2\chi \cos 2\Psi \quad (2.66b)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cos 2\chi \sin 2\Psi \quad (2.66c)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \sin 2\chi, \quad (2.66d)$$

esto es, las ecuaciones (2.66) son idénticas a las ecuaciones (2.58), es decir, los parámetros de Stokes, que son mediciones reales, pueden ser interpretados como los ejes de una esfera de radio $S_0 = 1/2$. En general, los parámetros de Stokes están normalizados respecto al valor de la intensidad, es decir, con $S_0 = 1$; por lo tanto, los estados de polarización de la luz pueden ser representados sobre la esfera de Poincaré ya sea a partir de la medición directa de los parámetros de Stokes o a partir del conocimiento de los valores de Ψ y χ . Por lo tanto,

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq 1. \quad (2.67)$$

Los parámetros de Stokes son una forma de conocer la polarización de la luz a partir de medidas de intensidad y en conjunto, a menudo son referidos como *vector de Stokes*, aunque realmente no se comporten como un vector [49]. El vector de Stokes, escrito en términos de los ángulos de orientación Ψ y elipticidad χ medidos en la esfera de Poincaré puede ser escrito como sigue

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\Psi \\ \cos 2\chi \sin 2\Psi \\ \sin 2\chi \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Así las cosas, los estados de polarización más comunes representados en forma del vector de Stokes que se representan en la esfera de Poincaré (Figura 3.4) están dados por:

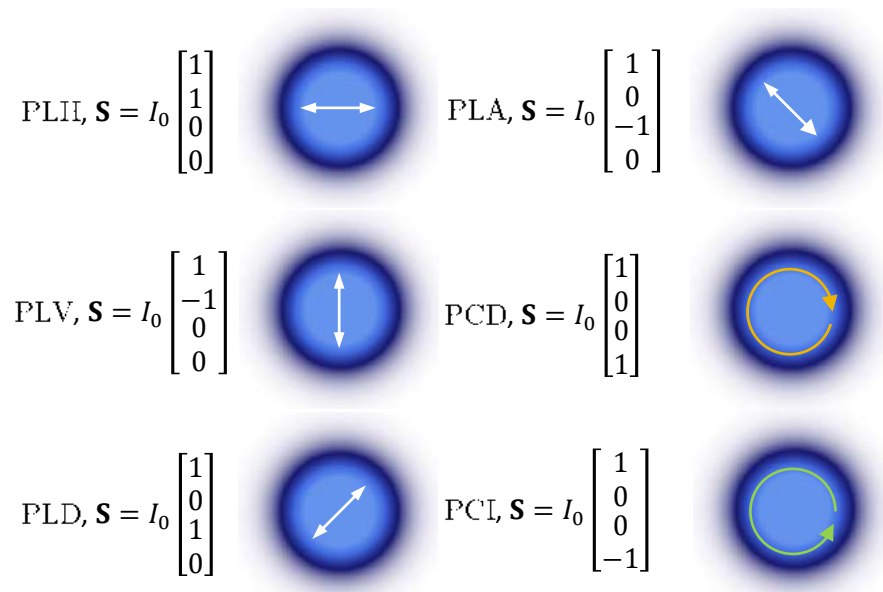


Figura 2.10: Estados de polarización más comunes y sus parámetros de Stokes, donde $I_0 = 2E_0^2$ es la intensidad del campo eléctrico normalizada.

Cada uno de los elementos del vector de Stokes tiene un significado muy específico, a saber:

- I. $0 \leq S_0 \leq 1$, representa la intensidad total de la luz, cuando $S_0 = 1$ se dice que la luz está completamente polarizada, cuando $S_0 < 1$ se dice que la luz es parcialmente polarizada y si $S_0 = 0$ se dice que la luz no está polarizada.
- II. $-1 \leq S_1 \leq 1$, representa la intensidad de la luz con tendencia a polarización lineal; si $S_1 > 0$ la luz tiende a tener polarización horizontal y si $S_1 < 0$ la luz tiende a tener polarización vertical.
- III. $-1 \leq S_2 \leq 1$, representa la intensidad de la luz con tendencia a polarización lineal inclinada; si $S_2 > 0$ la luz tiende a tener polarización diagonal y si $S_2 < 0$ la luz tiende a tener polarización antidiagonal.
- IV. $-1 \leq S_3 \leq 1$, representa la intensidad de la luz con tendencia a polarización circular; si $S_3 > 0$ la luz tiende a tener polarización circular a derecha, por el contrario, si $S_3 < 0$ la luz tiende a tener polarización circular a izquierda.

2.5. Introducción a los Modos Vectoriales

Una de las áreas más relevante en luz estructurada está asociada a la descripción de los MV. Dichos modos, se caracterizan por una distribución variable o inhomogénea de la polarización, a diferencia de los campos escalares de luz, los cuales tienen una distribución uniforme de polarización. Los MV son de relevante importancia debido a los novedosos fenómenos ópticos que estos acarrearán, de hecho, su generación e interacción con la materia han sido de gran interés durante los últimos años [50]. A continuación, se abordará de manera formal, el concepto de modo vectorial, desde lo más elemental, pasando a través de la solución a la EPH fundamental, hasta llegar a los modos gaussianos de orden superior, haciendo fuerte énfasis en los modos gaussianos con geometría elíptica, esto es, los modos *Ince-Gauss*.

2.5.1. Estados de Polarización Espacialmente Inhomogéneos: Modos Vectoriales

Como se mencionó en el capítulo anterior, los modos escalares, son aquellos modos espaciales que contienen un estado de polarización único distribuido de manera homogénea en todo el perfil transversal, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.11

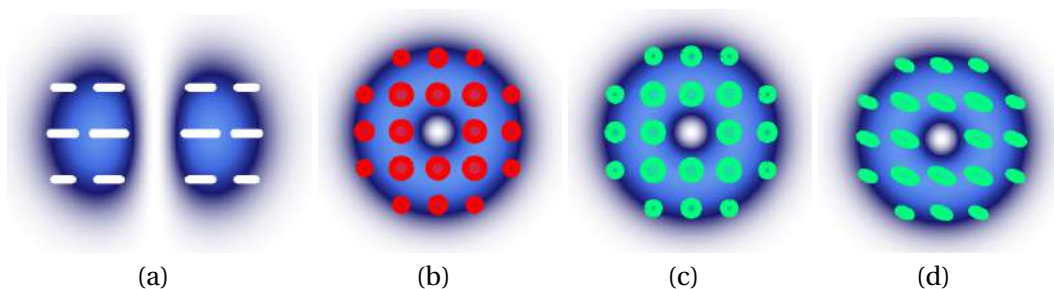


Figura 2.11: Distribución de los estados de polarización en un modo escalar. (a) luz con PLH. (b) luz con PCD. (c) luz con PCI. (d) luz con PEI a izquierda.

Por otro lado, los MV representan una solución a la EPH en la que se consideran las *in-homogeneidades* de polarización surgidas en el modo espacial, esto es, estados de polarización orientados en diferentes direcciones o diferentes estados de polarización, orientados en diferentes direcciones (MV híbridos). Ahora bien, formalmente, estos modos se construyen a partir de la superposición de dos modos espaciales ortogonales con estados base de polarización ortogonal (Figura 2.12), esto es [11, 51],

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \cos(\theta)E_i(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_i \pm \sin(\theta) \exp(i\delta)E_j(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_j, \quad (2.69)$$

donde los sub-índices i y j hacen referencia a la ortogonalidad en modo espacial y polarización de cada haz, esto es, $i \perp j$, $\exp(i\delta)$ es la fase intermodal, donde $\delta \in [0, \pi]$, la cual induce un retraso de fase en las componentes de polarización de los modos y los coeficientes $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$ son los factores de peso que permiten la transición entre los modos escalares a vectoriales puros [11, 15].

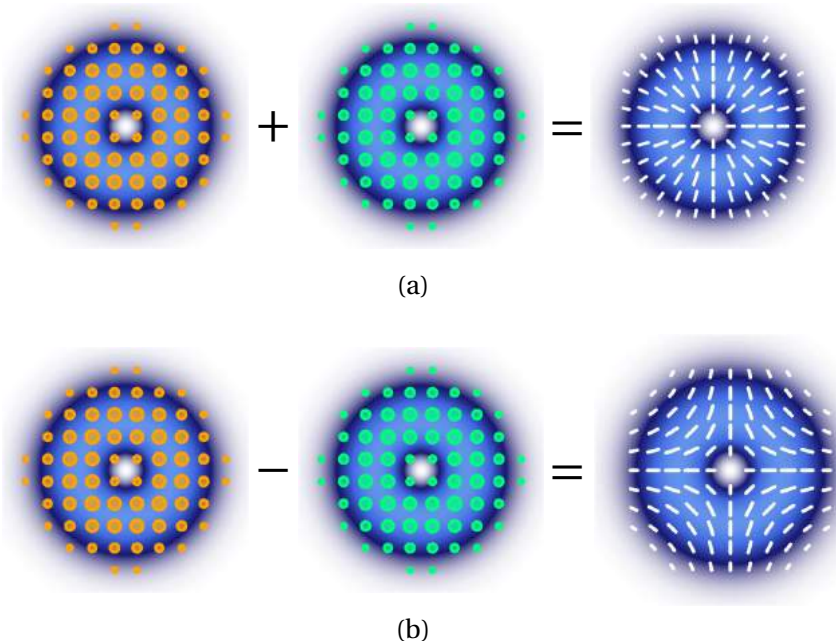


Figura 2.12: Generación de MV. (a) adición de dos modos ortogonales con estados de polarización ortogonales. (b) diferencia de dos modos ortogonales con estados de polarización ortogonales. Los círculos naranjas y verdes dentro de cada modo hacen referencia a PCD y PCI, respectivamente, las líneas blancas radiales en el modo resultante hacen referencia a PL.

Ahora bien, los grados de libertad espacial y de polarización, se dice que están clásicamente enredados, acoplados o que son estados *no separables*. Lo anterior debido a una característica propia de la naturaleza de los MV que hace «*codependientes*» a dichos grados de libertad, esto es, no es posible hacer una medición, por ejemplo, de la polarización sin alterar la distribución de intensidad de manera espacial del modo y viceversa [11, 52, 53]. En un contexto más formal, se podría decir que la no separabilidad de los grados de libertad que caracterizan a los MV consiste en la «imposibilidad» de escribir el modo vectorial como el producto de la base de polarización homogénea por una función escalar, en este caso, el modo espacial [52, 54]. Ahora bien, si $E_i = E_j$

en (2.69), entonces se tendría un modo escalar y por lo tanto un modo separable. Ahora bien, esta característica de los MV representa una importante ventaja en relación a las características de polarización de los modos escalares, pues dada la forma en la que se presenta la polarización en el modo, las aplicaciones pueden ser variadas, tales como manipulación de partículas [24], transporte de información en medios *turbulentos* [25, 55], estudio de imágenes [56], metrología [57], efectos no lineales [58], por mencionar algunas.

2.5.2. Modos Vectoriales Ince-Gauss Helicoidales

Tal y como se expone en la sección 2.5.1, los MV se construyen a partir de la combinación lineal de dos modos escalares ortogonales en polarización y modo espacial. Así las cosas, considerando la ecuación (2.69) y la ecuación (2.32) en la sub-sección 2.3.6, los MV Ince-Gauss helicoidales, se construyen a partir de la superposición (suma o resta) de un modo escalar *HIG* con helicidad positiva y un modos escalar *HIG* con helicidad negativa (modos espaciales ortogonales) y base de polarización ortogonal, tal y como se muestra por medio de la siguiente expresión,

$$\mathbf{HIG}_{p,m;\epsilon}^{h+}(\mathbf{r}) = \cos(\theta)IG_{p,m;\epsilon}^{h+}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_R \pm \sin(\theta) \exp(i\delta)IG_{p,m;\epsilon}^{h-}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_L, \quad (2.70)$$

donde $\theta \in [0, \pi/2]$ es el factor de peso que permite la transición entre los modos escalares cuando $\theta = 0, \pi/2$ y los modos completamente no separables, cuando $\theta = \pi/4$; $\delta \in [0, \pi]$, es la fase intermodal, asociada a la orientación de los estados de polarización presentes en el modo, siendo polarización radial cuando $\delta = 0$ y polarización azimutal cuando $\theta = \pi$. La ecuación (2.70) representa formalmente los MV Ince-Gauss helicoidales (HIGVM, por sus siglas en ingles). Algunos MV puros Ince-Gauss helicoidales ($\theta = \pi/4$), resultantes de la superposición, con diferentes valores de ϵ pueden ser apreciados en la Figura 2.13.

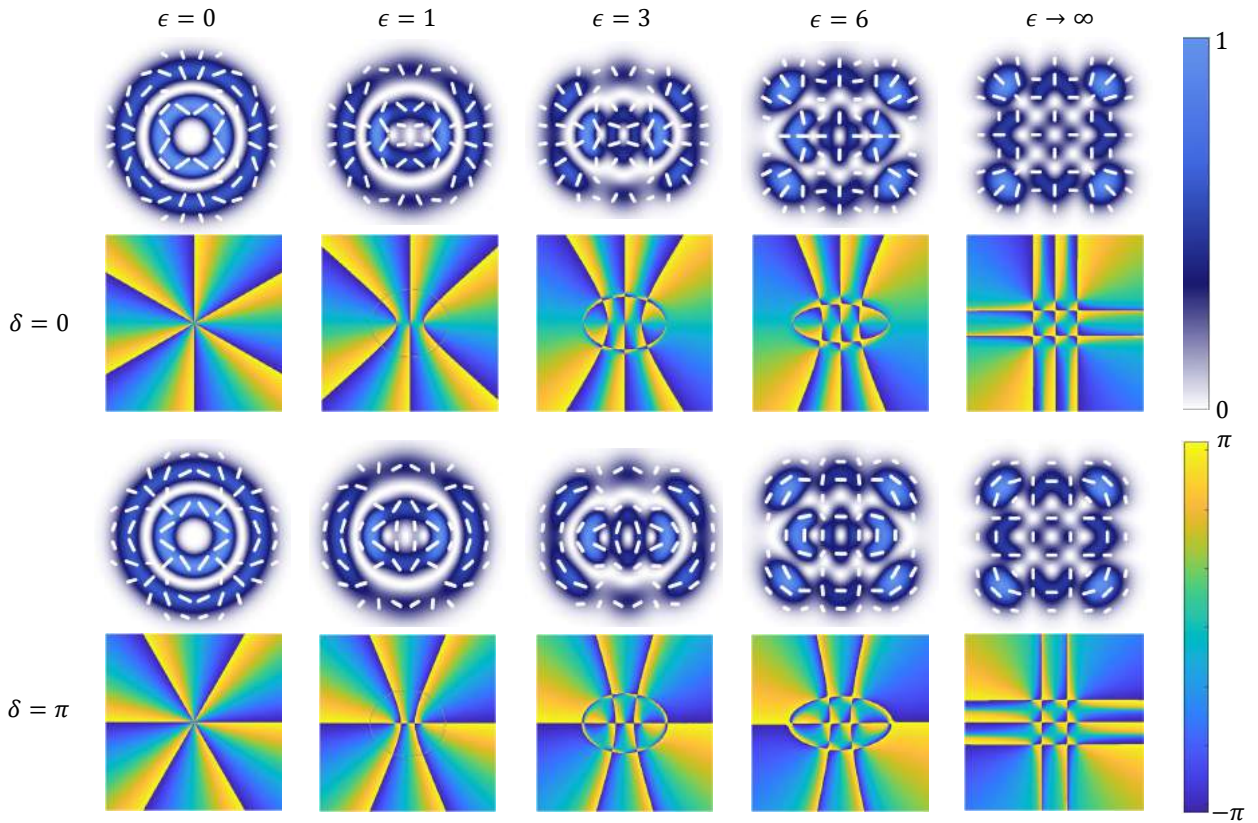


Figura 2.13: Simulación de los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h+}$ y fase compleja de Stokes. La distribución de la polarización se superpone al modo espacial.

La Figura 2.13 muestra 10 simulaciones de intensidad con su respectiva distribución de polarización (radial-azimutal) superpuesta para los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h+}$. Su correspondiente fase compleja de Stokes (estructura de la fase intermodal) δ se muestra bajo cada modo vectorial y muestra cómo se distribuye la polarización del modo vectorial en el rango $[-\pi, \pi]$, donde los cambios bruscos de fase no dan información de polarización; para $\delta = 0$, $\delta = \pi$ y $\theta = \pi/4$. Los MV con $\delta = 0$ tienen una distribución radial de polarización lineal, mientras que los MV con $\delta = \pi$ tienen una distribución azimutal de polarización lineal. Por otro lado, se evidencia como los MV pasan de ser **HLG** a **HIG** y finalmente a **HHG**. Como se mencionó con anterioridad, si se cambiase el valor de θ en la ecuación (2.70), entonces se obtendrían los MV con estados de polarización elíptica con $\theta \in (0, \pi/4)$ con sentido de giro a la derecha, o $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$ con sentido de giro a la izquierda. Si $\theta = 0$ entonces se obtiene un modo escalar con PCD, por el contrario si $\theta = \pi/2$, entonces se obtiene un modo escalar con PCI.

La distribución de la polarización depende también de si los modos se suman o se restan. Así, MV puros \mathbf{HIG}^{h-} (conjugados a los mostrados en la Figura 2.13 para cada valor de δ y ϵ) resultantes de la resta de los modos escalares con diferentes valores de ϵ pueden ser apreciados en la Figura 2.14.

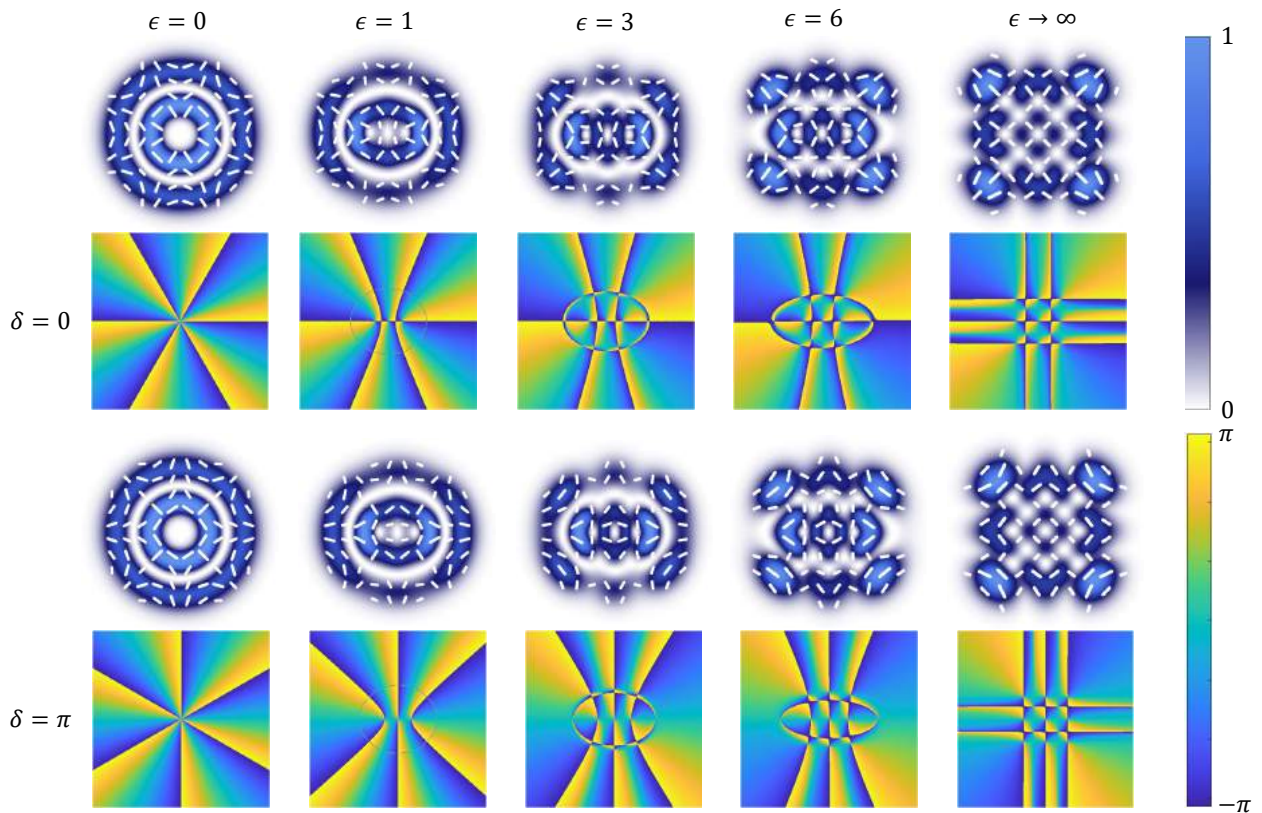


Figura 2.14: Simulación de los MV $\text{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h-}$ y fase compleja de Stokes. La distribución de la polarización se superpone al modo espacial.

Como se puede apreciar al comparar las Figuras 2.13 y 2.14, las distribuciones de polarización difieren cuando se mantienen los valores de δ para cada ϵ , mientras que la intensidad del modo espacial no cambia. Lo anterior quiere decir que dependiendo si el modo vectorial se construye a partir de una suma o una resta, aparecerán singularidades de polarización de cuatro tipos, un tipo para cada caso, de los cuales se pueden aprovechar sus propiedades en aplicaciones. Para saber más sobre las posibles configuraciones de polarización en MV se puede consultar [59].

Dado lo anterior, cabe recalcar algunas importantes características de los MV:

- I. A diferencia de los modos escalares (aquellos que presentan polarización homogénea) los MV presentan inhomogeneidades de polarización en el modo espacial, lo que los hace un caso más general de luz polarizada.
- II. Los MV pueden presentar estructuras complejas que surgen del acoplamiento estratégico entre el grado de libertad espacial y de polarización, lo anterior, a partir de la manipulación y control de los parámetros tales como p , m y ϵ .
- III. Los MV helicoidales presentan OAM, como es el caso de los MV helicoidales vistos en este capítulo, lo que les brinda importantes propiedades asociadas al OAM que pueden ser explotadas.
- IV. Los MV también pueden superponerse para generar MV aún más complejos.

V. La fortaleza de los MV se ve reflejada en la generalidad que representan en términos de luz polarizada no convencional.

Finalmente, una característica adicional de los MV, es que sus propiedades espaciales y de polarización pueden ser representados sobre una superficie esférica, de manera análoga a como se hace con los estados de polarización de la luz 3.1. Dicho aspecto, es comentado en detalle en el Capítulo 3, sección 3.3. Por otro lado, en este trabajo de grado se considera la generación de MV **HIG** y su representación sobre una superficie geométrica que cambia de excentricidad a medida que cambia la elipticidad de los modos. En el capítulo 5, se detallará de manera breve, la generación experimental de estos MV por medio de un dispositivo *SLM* de transmisión y un interferómetro de polarización (Sagnac) para luego representarlos sobre dicha superficie.

En este capítulo se explico en detalle las características de los dos grados de libertad considerados para la generación de MV, esto es, el modo espacial que es, *grosso modo*, el patrón espacial de la luz, y la polarización que supone la dirección de oscilados de preferencia del campo eléctrico, además de los elementos más esenciales de los MV así como los MV Ince-Gauss helicoidales y los derivados de estos.

Capítulo 3

Representación Geométrica de los Grados de Libertad de la Luz

Así como es posible representar fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc., de manera gráfica, existe también la posibilidad de representar geoméricamente propiedades y fenómenos acaecidos en la naturaleza, y el caso de la polarización de la luz, así como todos sus posibles patrones de intensidad, no es la excepción. Por otro lado, las representaciones geométricas de la luz, simbolizan una herramienta importante en el camino por comprender el comportamiento, propiedades y características de la luz al ser modificada en sus grados de libertad, pues la complejidad del proceso formal y experimental requiere como apoyo, estrategias que simplifiquen al investigador la comprensión de lo que se hace en el papel y en el laboratorio. Es por esto, que desde hace más de 100 años, se trabaja en la forma de ayudar de una manera más simple al entendimiento del comportamiento de la luz por medio de ayudas visuales de fácil acceso, pues es bien sabido que la naturaleza lo permite. Así surgen, en el contexto de la polarización, las diferentes formas de representar los patrones de intensidad con distribuciones de polarización homogénea o no-homogénea, haciendo uso de la geometría. Ahora bien, representaciones geométricas de la luz hay muchas, sin embargo, este capítulo está limitado a la mera descripción de las representaciones de la luz polarizada, desde la forma más básica, que es la elipse de polarización, pasando por el plano complejo circular, las esferas de Poincaré, de orden cero, uno y superiores, hasta una representación en 5-dimensiones que reúne las características de las anteriores, dejando ver ilimitada cantidad de recursos que pueden ser usados para conseguir la mejor representación de las propiedades de la luz de manera geométrica.

3.1. Representación Geométrica de la Polarización

3.1.1. Representación Geométrica por Medio de la Elipse de Polarización

La elipse de polarización discutida en la sub-sección 2.4.1 da información del estado de polarización de la luz, ya sea a través de los parámetros medibles α y δ o de los parámetros formales χ y Ψ . A continuación, se representan algunos estados de polarización por medio la Figura 3.1 para diferentes valores de δ , α , Ψ y χ .

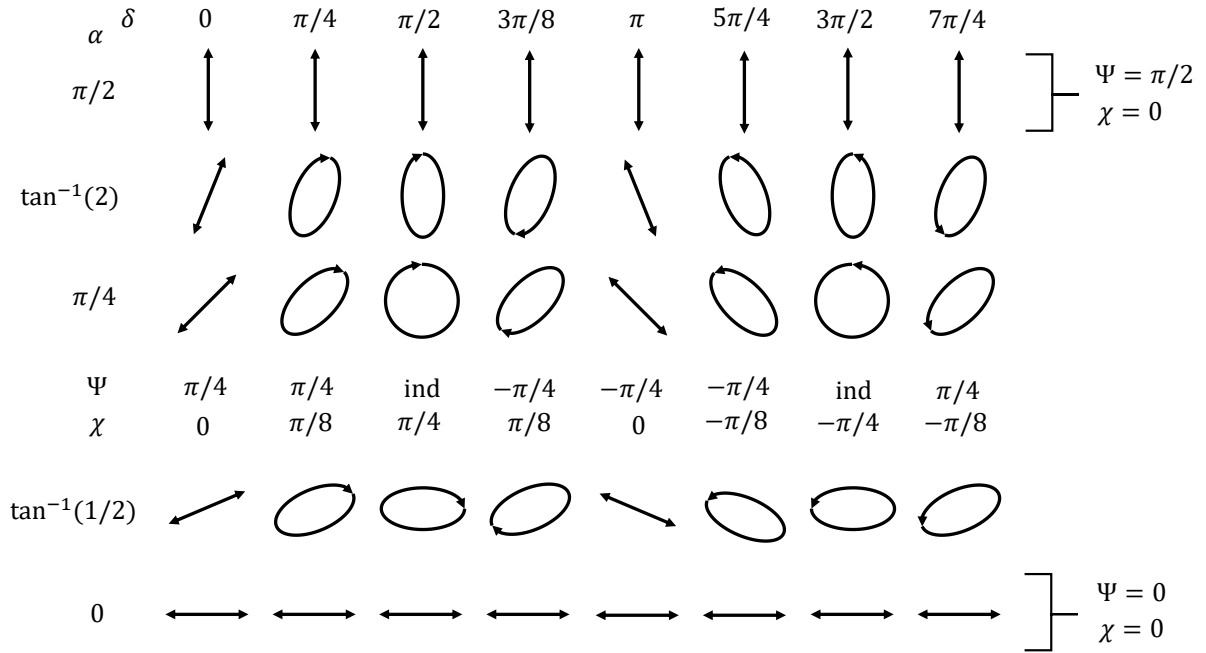


Figura 3.1: Elipse de polarización (EP). Estados de polarización para diferentes valores de δ , α , Ψ , y χ .

En la Figura 3.1 se puede ver que cuando $\delta = 0, \pi$ se tiene polarización lineal con $\chi = 0$. Los valores de $\delta = \pi/2, 3\pi/2$ hacen referencia a estados de PCD y PCI respectivamente con $\alpha = \pi/4, -\pi/4$. Para valores intermedios de δ y $\chi \neq 0$ se tiene PEL, así, cuando los valores de χ son positivos se tienen estados de PEL con giro hacia la derecha, mientras que los valores negativos de χ , corresponden a estados de PEL con giro hacia la izquierda.

Es importante recalcar que según la Figura 3.1, la convención usada es que la polarización con sentido de giro hacia la derecha se considera favor del giro de las manecillas del reloj, mientras que la polarización con giro hacia la izquierda se considera en contra del giro de las manecillas del reloj, y esta será la convención usada en este trabajo de grado. Por otro lado, la elipticidad de la EP, está definida como la razón $|\tan \chi| = \pm b/a$, mientras que la excentricidad de la EP está dada por $e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi}$.

Dado lo anterior, se muestra a la EP como un primer intento de generar y representar a los estados de polarización de la luz, la cual muestra información sobre la orientación y forma (elipticidad) del campo eléctrico en su propagación, esto es, la EP funciona como una herramienta gráfica que permite acceder de manera directa a los estados de polarización de la luz para cada valor de E_{0x}, E_{0y} y δ .

3.1.2. Representación de la Luz Polarizada en el Plano Complejo Circular

La información provista por la EP a partir de los ángulos Ψ y χ , puede ser concentrada en una nueva función compleja que surge de la razón entre las componentes E_x y E_y , esto es [60],

$$\mathcal{Z}_{xy} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\tan \Psi + \iota \tan \chi}{1 - \iota \tan \Psi \tan \chi}, \quad (3.1)$$

donde $\iota = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria y $\arg(\mathcal{Z}) = \delta_y - \delta_x$. La ecuación (3.1) muestra como un estado de polarización de la luz, caracterizado por Ψ y χ puede ser representado por número complejo \mathcal{Z} . Así mismo, se sabe que todo número complejo puede ser mostrado en el plano complejo, esto es, cada punto \mathcal{Z} en el plano complejo da evidencia de un estado de polarización de la luz. Esta representación es llamada *representación de la luz polarizada en el plano complejo cartesiano* [60]. Sin embargo, esta no es la única forma de mostrar los números complejos en el plano complejo, pues existen diferentes formas de hacerlo en otros estados base, como por ejemplo, la base de polarización circular (PC) [61], a partir de la forma generalizada de la expresión (3.1), la cual está dada por,

$$\mathcal{Z}_{ij} = \frac{E_j}{E_i}, \quad (3.2)$$

donde E_i y E_j son las amplitudes complejas de las proyecciones de las dos componentes de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a lo largo de los dos estados base i y j , respectivamente. Por otro lado, los estados base i y j son dos cualesquiera estados elípticos y están representados por el origen y un punto en el infinito en el plano complejo \mathcal{Z}_{ij} asociado.

Dado lo anterior, y considerando la facilidad del uso de las coordenadas circulares, esta sub-sección se limitará a una breve revisión de los estados de polarización de la luz representados en el plano complejo circular. Así las cosas, se consideran ahora los estados de polarización circular a derecha (r) y el estado de polarización circular a izquierda (l), de tal manera que la razón (3.2) queda de la forma,

$$\mathcal{Z}_{lr} = \frac{E_r}{E_l}, \quad (3.3)$$

y por lo tanto, la función compleja que ubica un estado de polarización en el plano complejo circular será [60],

$$\mathcal{Z}_{lr} = \tan(\chi + \pi/4) \exp(-2\iota\Psi), \quad (3.4)$$

donde las coordenadas Ψ y χ están dadas por,

$$\Psi = -\frac{1}{2} \arg(\mathcal{Z}_{lr}) \quad (3.5a)$$

$$\chi = \frac{|\mathcal{Z}_{lr}| - 1}{|\mathcal{Z}_{lr}| + 1}. \quad (3.5b)$$

Los diferentes estados de polarización de la luz pueden ser representados en el plano complejo circular a sabiendas de las expresiones (3.4) y (3.5). Dado lo anterior, se observa que:

- a. En el origen se tiene $\chi = -\pi/4$ y $\mathcal{Z} = 0$; se representa la base del estado de polarización circular a izquierda (PCI).
- b. En el infinito se tiene $\chi = \pi/4$ y $\mathcal{Z} = \infty$; se representa la base del estado de polarización circular a derecha (PCD).
- c. Cada punto sobre el círculo de radio unitario del plano complejo, esto es, $\chi = 0$, $-\pi/2 \leq \Psi < \pi/2$ y $\mathcal{Z} = \exp(-2i\Psi)$, corresponde a los diferentes estados de polarización lineal (PL).
- d. Sin considerar el origen del círculo unitario y el punto en el infinito, todos los demás puntos sobre el plano complejo hacen referencia a estados de polarización elípticos (PEl). Si dentro del círculo de radio unitario se tiene $-\pi/4 \leq \chi < 0$, $0 \leq |\mathcal{Z}| < 1$, entonces todos los estados de polarización tendrán sentido de giro hacia la izquierda. Por el contrario, si $0 \leq \chi < \pi/4$, $1 \leq |\mathcal{Z}| < \infty$, entonces todos los estados de polarización tendrán sentido de giro hacia la derecha.
- e. Las líneas con $\Psi = \text{constante}$, se conocen como contornos equi-azimutales. En este caso las líneas radiales equi-azimutales que parten del origen con PCI terminan en el infinito con PCD. Por otro lado, en el eje real positivo se tiene que $\Psi = 0$ y en el eje real negativo se tiene que $\Psi = -\pi/2$. Los estados de polarización ortogonales se dividen a partir del punto de intersección de todos los contornos equi-azimutales con Ψ y el ortogonal a este en $\Psi - \pi/2$, esto es, al cruzar el punto en el origen en PCI o en el infinito en PCD, se produce un salto discontinuo en el contorno equi-azimutal igual a $-\pi/2$.
- f. La familia de círculos con χ , $|\mathcal{Z}| = \text{constante}$, concéntricos al origen en PCI recibe el nombre de contornos equi-elípticos. Esta familia de círculos es ortogonal a la familia de contornos equi-azimutales.

La Figura 3.2 muestra diferentes estados de polarización sobre el plano circular complejo. Las curvas cerradas dirigidas representan las diferentes elipses de polarización o estados de polarización de la luz. En cada intersección de un contorno equi-azimutal con un contorno equi-elíptico se indica un estado de polarización con su respectiva elipticidad y orientación. Así, a lo largo de los contornos equi-azimutales se evidencian estados de polarización que van desde PCI (punto naranja) en el origen con $\chi = -1$, pasando por los estados de polarización elíptica (PEl) (puntos azul oscuro) con sentido de giro a izquierda, dados por $-1 < \chi < 0$, hasta los estados con PL (puntos azul claro) en el cruce con el contorno equi-elíptico perteneciente al círculo de radio unitario con el contorno equi-azimutal, donde $\chi = 0$. En seguida de dicho punto, se encuentran los estados con PEl (puntos verde claro) con sentido de giro a derecha con $0 < \chi < \infty$ hasta llegar a estados con PCD (no se puede dibujar) donde $\chi \rightarrow \infty$; ahora bien, sobre el eje real positivo se encuentran los contornos equi-elípticos con $\Psi = 0$, en el que si hay un desplazamiento sobre el contorno equi-elíptico en el sentido opuesto al giro de las manecillas del reloj, se llega al eje real negativo con $\Psi = -\pi/2$. De manera similar, por debajo del eje real negativo, desplazándose a lo largo del contorno equi-elíptico en el sentido de giro contrario al de las manecillas del reloj se llega por debajo al eje real positivo donde $\Psi = \pi/2$.

Dado lo anterior, se muestra al plano complejo circular como un forma de representar geoméricamente los diferentes estados de polarización de luz (que puede ser

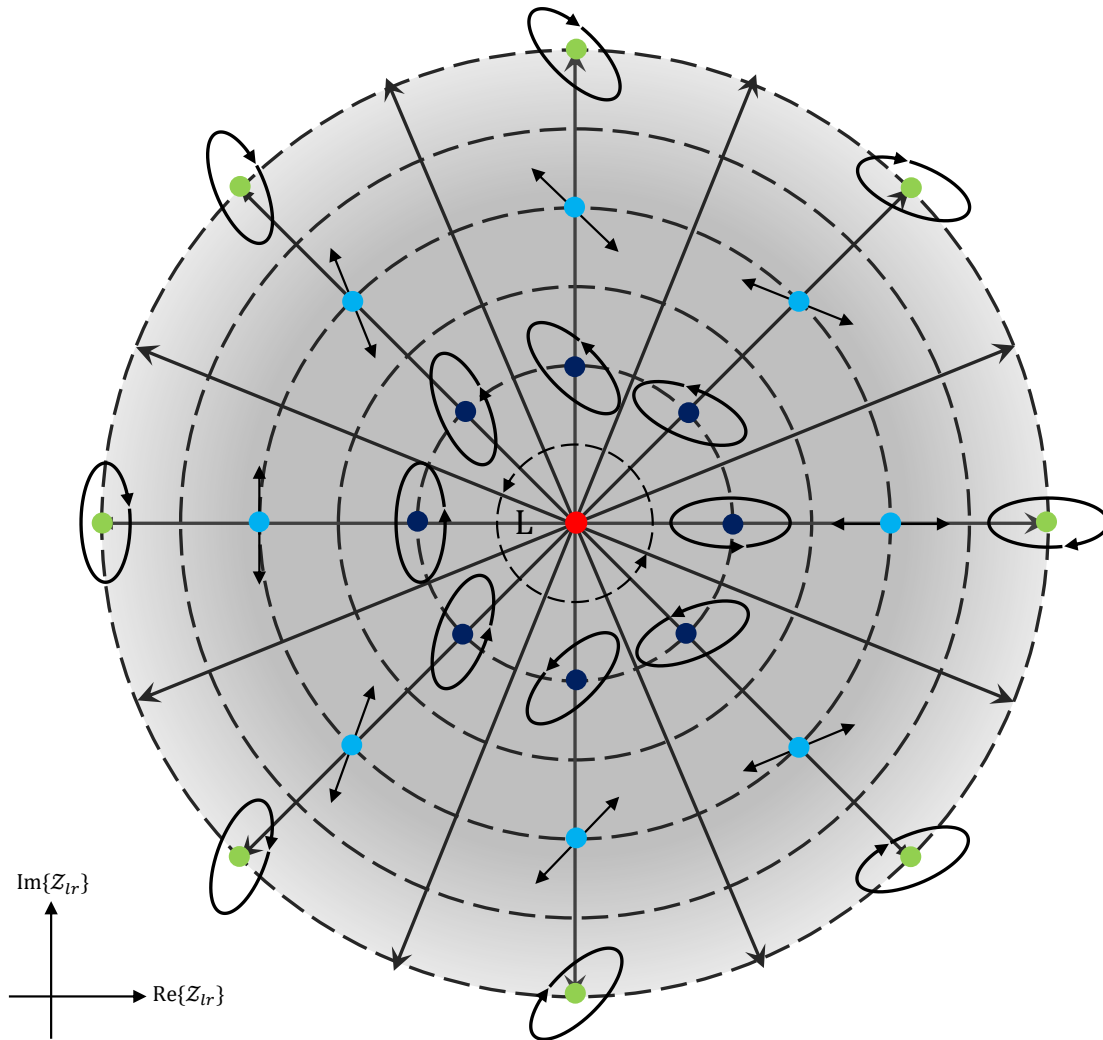


Figura 3.2: Representación de diferentes estados de polarización sobre el plano complejo circular. En este caso, las líneas radiales y continuas representan los contornos equi-azimutales, mientras que los círculos con circunferencias discontinuas representan los contornos equi-elípticos.

construido en otra sistema de coordenadas como se mencionó con anterioridad en esta misma sub-sección), donde la magnitud del vector que ubica a los estados de polarización sobre el plano representa la amplitud del campo eléctrico y el ángulo de este respecto al eje real es la fase del campo. A continuación, se muestra cómo a partir del plano circular complejo, es posible construir la Esfera de Poincaré, que como es bien sabido, es la forma más popular de representar los estados de polarización de la luz.

3.1.3. Esfera de Poincaré

La información de los estados de polarización representados en el plano complejo circular descrito en la sub-sección 3.1.2, pueden también ser representados en una esfera de manera similar. Dicha esfera, recibe el nombre de *esfera de Poincaré* en honor a H. Poincaré, quien la introdujo en 1892.

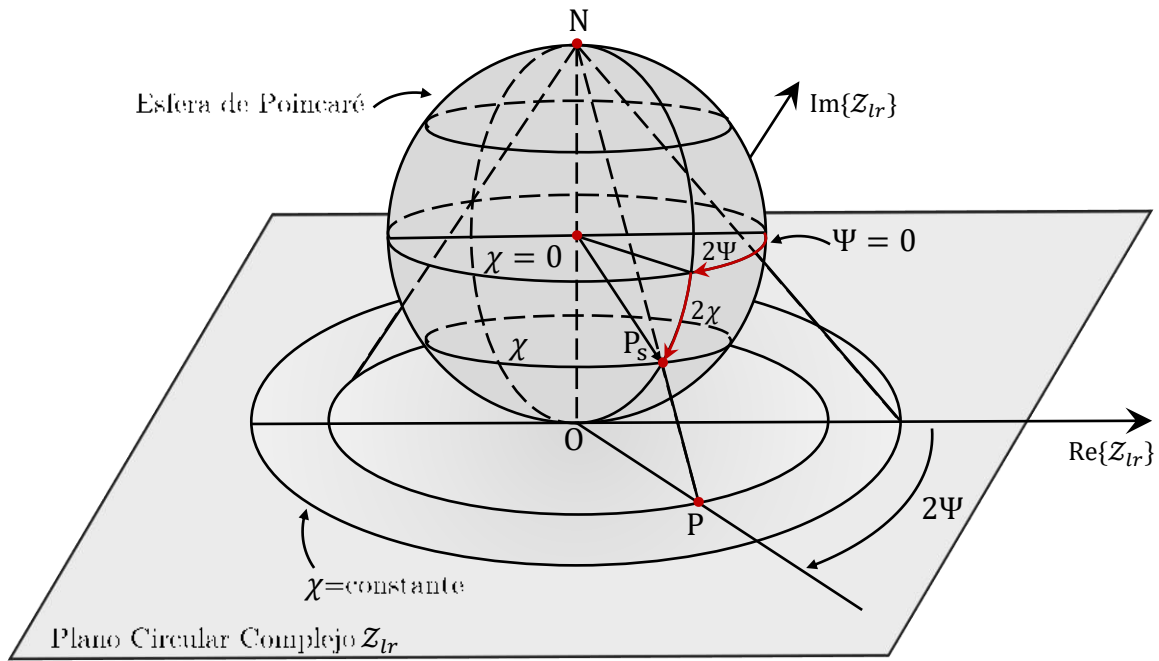


Figura 3.3: Construcción de la esfera de Poincaré considerando el plano complejo circular a través de una proyección estereográfica.

Para comprender el razonamiento aproximado usado por Poincaré a la hora de construir la esfera, se tiene en cuenta la proyección de los estados de polarización en el plano complejo circular a los puntos de la esfera tal y como se muestra en la Figura 3.3. En este caso, y con el fin de conseguir concordancia con la circunferencia de radio unitario representada en el plano complejo circular, se considera una esfera de diámetro unitario la cual está en contacto en un punto tangente al polo sur (S) (origen O) con el plano complejo circular Z_{lr} . Como se puede apreciar, cada punto P_s sobre la esfera representa el punto de corte de la superficie de la esfera con la recta que va desde el punto P en el plano Z_{lr} hasta el polo norte (N). Dicha transformación proyectiva que mapea $P \rightarrow P_s$, recibe el nombre de proyección *estereográfica* [62]. Ahora bien, esto quiere decir que si se asocia cada punto P en el plano Z_{lr} con cada punto P_s sobre la superficie de la esfera de Poincaré, entonces la elipse de polarización correspondiente a P en el plano complejo, corresponde a la misma elipse de polarización en P_s sobre la superficie de la esfera; así pues, la totalidad de los puntos que corresponden al plano complejo y que se pueden proyectar en la esfera forman un espacio de polarización denominado «*esfera de Poincaré*», tal y como se muestra en la Figura 3.3. Ahora bien, siguiendo un razonamiento similar al seguido en la construcción de la representación de los estados de polarización sobre el plano complejo circular, se puede caracterizar la esfera de Poincaré como sigue:

- a. Los estados con PCD y PCI se representan en los polos norte y sur respectivamente. Lo anterior debido a que el polo norte en la esfera se proyecta en el infinito con el plano mediante la recta que une estos puntos, mientras que el polo sur se proyecta sobre si mismo en el plano.
- b. En el ecuador de la esfera se representan todos los posibles estados de PL de la luz; lo anterior, en concordancia con la circunferencia unitaria sobre el plano

complejo circular, es decir, los estados de polarización sobre la circunferencia unitaria en el plano complejo, se proyectan sobre el ecuador de diámetro unitario.

- c. Los estados de PEI se proyectan en los demás puntos sobre la esfera que no contemplan los polos y el ecuador.
- d. Los contornos equi-azimutales en la esfera representan los meridianos, que son circunferencias que se dibujan a través de los polos de la esfera. El ángulo barrido a lo largo de un meridiano cualesquiera es un ángulo de latitud y es el doble del ángulo de elipticidad en la elipse de polarización, es decir, 2χ . En este caso, la latitud es positiva arriba del ecuador, y está medida por $0 < \chi \leq \pi/4$. Por otro lado, es negativa por de debajo del ecuador y está medida por $-\pi/4 \leq \chi < 0$. Finalmente, es cero en el ecuador.
- e. Los contornos equi-elípticos en la esfera, representan los paralelos, que son circunferencias coaxiales alrededor del eje que une el polo norte y el polo sur de la esfera y que son ortogonales a los contornos equi-azimutales. El ángulo barrido a lo largo del ecuador es un ángulo de longitud y es el doble del ángulo azimutal (de orientación) en la elipse de polarización, es decir, 2Ψ . En este caso, el ángulo de longitud se mide positivo entre $0 < \Psi < \pi/2$ en el sentido de giro de las manecillas del reloj, mientras que será negativo si $-\pi/2 < \Psi < 0$ en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

La Figura 3.4 que se muestra a continuación, mapea cada uno de los estados de polarización del plano complejo circular sobre la esfera de Poincaré, mostrando los contornos equi-azimutales y equi-elípticos descritos anteriormente. Los estados de polarización de la luz (etiquetados de 1 a 11), se ubican sobre la esfera de Poincaré a partir de la pareja de coordenadas (χ, Ψ) con PCD (circulo dirigido naranja) en $(0, 0)$, PEI a derecha (elipses dirigidas naranjas) en $(\pi/8, 0)$; $(\pi/4, \pi/8)$; $(\pi/2, \pi/8)$ PL (líneas dirigidas blancas) en $(0, \pi/4)$; $(\pi/4, \pi/4)$; $- -$; $(\pi/2, \pi/4)$, PEI a izquierda (elipses dirigidas verdes) en $(0, 3\pi/8)$; $(\pi/4, 3\pi/8)$; $(\pi/2, 3\pi/8)$ y PCI (circulo dirigido verde) en $(0, \pi/2)$.

Por otro lado, como se pudo apreciar en la sub-sección 2.4.2, los parámetros de Stokes son análogos a los ejes de la esfera, por lo tanto, la Figura 3.4 es la misma construcción; la única diferencia es que si se quiere usar la esfera de Poincaré a partir del uso de los parámetros de Stokes se debe tener en cuenta que $x_1 = S_1$, $x_2 = S_2$, $x_3 = S_3$ y $r = S_0$.

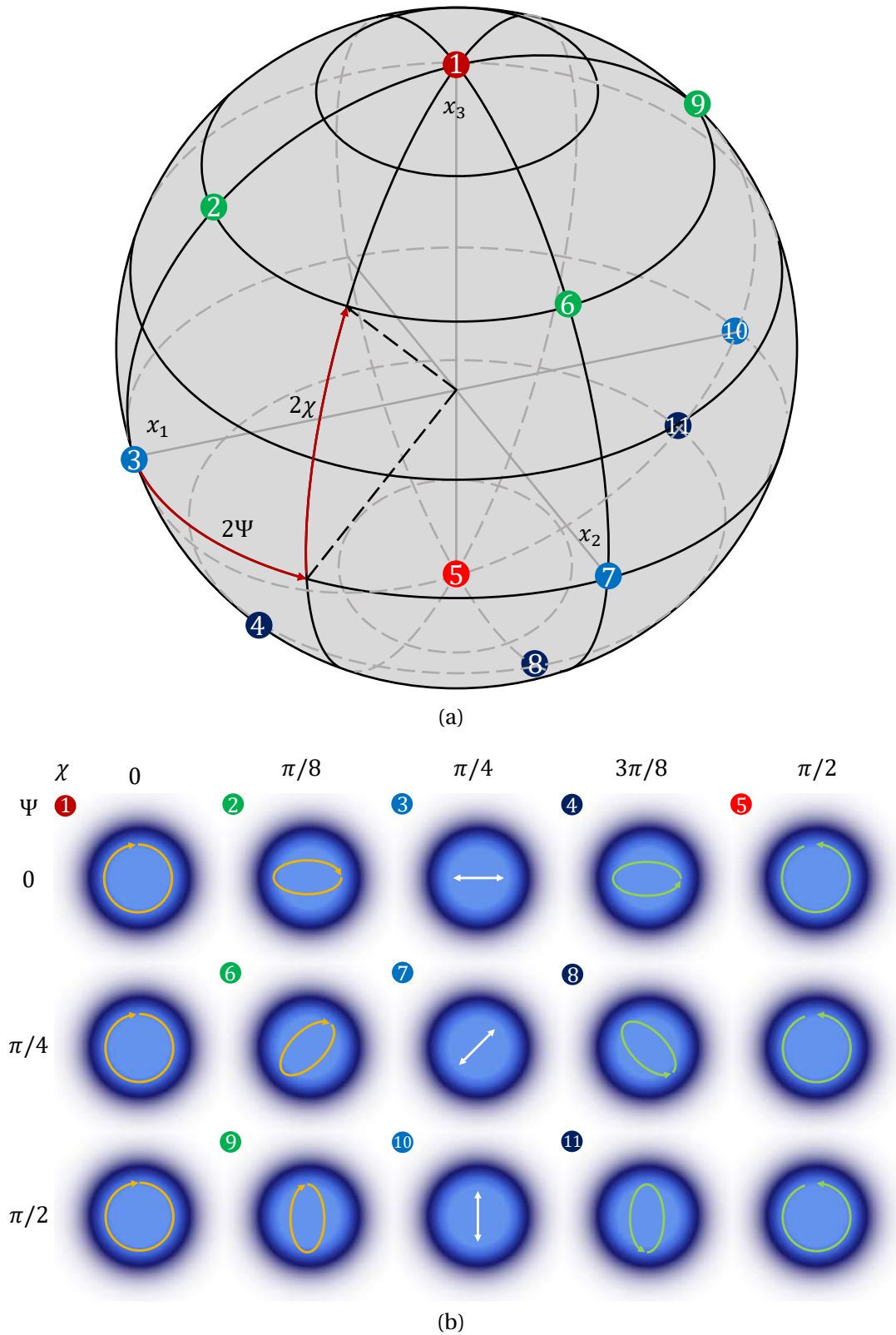


Figura 3.4: (a) Representación geométrica de los estados de polarización de la luz sobre la esfera de Poincaré. Un estado de polarización puede ser localizado a partir de dos coordenadas, a saber, 2Ψ y 2χ . (b) En los polos norte (1) y sur (5) se encuentran los estados de PCD y PCI respectivamente, en el ecuador se encuentran todos los estados de PL (3, 7 y 10) y en los demás puntos (2, 4, 6, 8, 9 y 11), se encuentran los estados de PEL.

Como se mencionó con anterioridad, los parámetros de Stokes representan magnitudes reales, es decir, magnitudes que pueden ser medidas en un proceso experimental a diferencia de los ángulos Ψ y χ en la elipse de polarización, los cuales no son medibles en la experiencia. Lo anterior supone un problema importante a la hora de hacer uso de la esfera de Poincaré, pues no basta con solo representar los estados de polarización en la superficie de la esfera y entender cómo cambian estos a medida que cambian los ángulos de longitud y latitud, sino que también es de relevante importancia hacer uso de esta de tal manera que se evite el proceso formal de cálculo de los estados de polarización cuando la luz viaja a través de elementos ópticos.

En síntesis, lo que se quiere decir, es que la esfera de Poincaré no es completa o no es auto-consistente [47], pues se requiere que todo lo que se usa para ubicar los estados de polarización en la superficie de la esfera pueda ser medido. Ahora bien, lo anterior no supone un problema complejo, pues hay forma de solucionarlo: según [47], el problema se soluciona al escribir los parámetros de Stokes no en términos de los ángulos Ψ y χ , sino en términos de los parámetros δ que es la diferencia de fase entre las componentes del campo eléctrico y α , que está dada por la expresión (2.62), pues estas cantidades si hacen referencia a magnitudes medidas en la experiencia. Dado lo anterior, una nueva forma, de escribir el vector de Stokes, en términos de δ y α , es volviendo a las expresiones (2.64) con $S_0 = 1$, así

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \delta \\ \sin 2\alpha \sin \delta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La esfera de Poincaré construida a partir de los parámetros de Stokes dados en (3.6) recibe el nombre de *esfera de Poincaré híbrida*, y se construye a partir de magnitudes físicas que son medibles en la experiencia, donde δ debe ser usado como el ángulo longitudinal, mientras que 2α debe ser usado como el ángulo latitudinal.

Finalmente, se puede apreciar que la esfera de Poincaré funciona como una representación más simple de los estados de polarización de la luz, además de que resulta ser una herramienta que simplifica el trabajo en polarización, pues dado que es posible construirla a partir de magnitudes medibles, con el solo hecho de conocer estos valores, es posible conocer el comportamiento de la luz en polarización cuando esta viaja a través de diferentes tipos de elementos ópticos.

3.2. Representación Geométrica de la Luz con Momento Angular Orbital

De las muchas propiedades de los sistemas físicos, una de las más importantes es el *momento angular*, pues es común encontrarlo en diferentes áreas de la física, tales como la mecánica clásica, la mecánica cuántica, la astronomía y la óptica. El último caso es de bastante interés, pues desde principios del siglo XX [63] se decía que el cambio de estado de polarización de la luz, por ejemplo, de lineal a circular, debería llevar consigo

un cambio en el momento angular de la misma, siendo cero para luz con polarización lineal y diferente de cero para luz con polarización circular [64]. Estudios posteriores [65], afirmaron que en efecto, la luz tiene un momento angular asociado al cambio en el estado de polarización. Ahora bien, no fue hasta 1992 [66] cuando Allen *et al.* demostraron de manera experimental mediante la transformación de modos *LG* a *HG*, que la luz cuando es modificada a partir de una *fase helicoidal* dada por $\exp(-il\phi)$, donde $\phi = \arctan(y/x)$, adquiere un *momento angular orbital*. Así las cosas, hoy en día se sabe que los campos ópticos pueden ser caracterizados a partir de un *momento angular de espín* (SAM, por sus siglas en inglés) y que está asociado a luz con polarización circular y un momento angular orbital (OAM, por sus siglas en inglés) que está asociado a una fase helicoidal.

El SAM tiene valores de $\sigma = \pm\hbar$ por fotón, donde se tiene PCD si $\sigma = \hbar$ y PCI si $\sigma = -\hbar$. Por otro lado, el OAM tiene valores de $L = \pm l\hbar$, donde $l = \pm 1, 2, 3, \dots$, se conoce como la *carga topológica* del modo, este, toma cualquier valor entero y está asociado al sentido de giro del haz, a derecha si l es positivo y a izquierda si l es negativo, además del número de espirales de fase helicoidal de 2π del vórtice óptico en una longitud de onda. Una representación gráfica de estas dos propiedades importantes de la luz y sus efectos sobre una partícula, puede ser apreciada en la Figura 3.5.

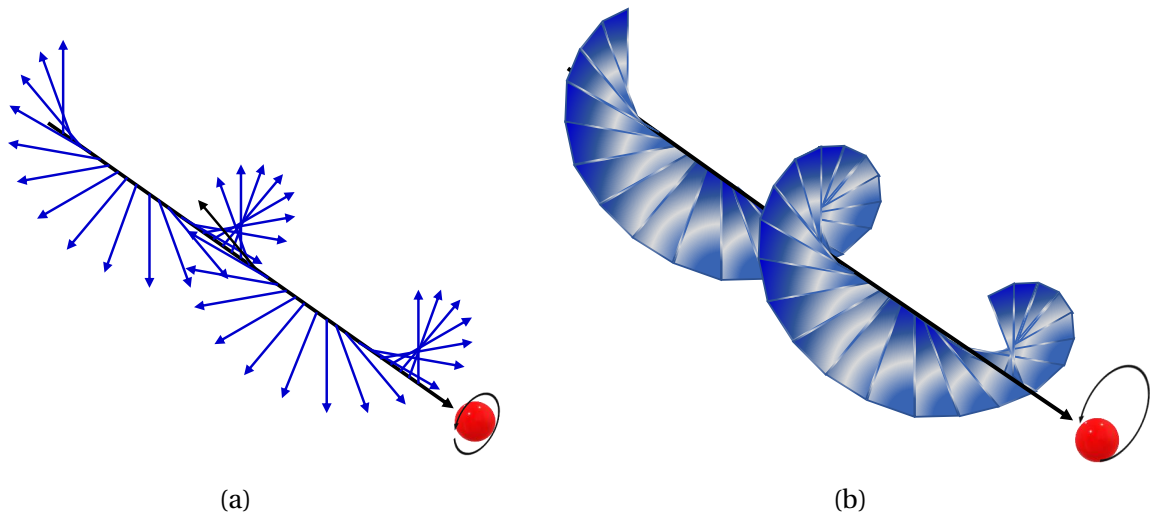


Figura 3.5: Efectos del momento angular sobre la materia. En (a) fotón con momento angular de espín (SAM). El SAM hace girar a una partícula sobre su propio eje, por otro lado, en (b) fotón con momento angular orbital (OAM). El OAM hace girar una partícula sobre el eje de de propagación del haz.

Los haces en cuya estructura se presenta una fase de tipo helicoidal son denominados *vórtices ópticos* [67] (OV, por sus siglas en inglés) siendo los haces *LG* los más comunes en la práctica por sus propiedades y aplicaciones [66, 68, 69]. Un aspecto importante de este tipo de haces, además de las características y propiedades ya mencionadas en la sub-sección 2.3.4, es que pueden ser escritos como la superposición entre dos haces HG_{un} y de igual manera, los haces HG_{un} pueden ser escritos como una superposición de los haces LG_p^l como se puede ver más adelante en la ecuación (3.7) [68].

Ahora bien, esta propiedad, sumada a la relación que existe entre el SAM y el OAM, dio cabida a que en 1998 Padgett & Courtial [70] propusieran una forma de representar el OAM de la luz de manera análoga a la representación de los estados de polarización de luz sobre la esfera de Poincaré. *Grosso modo*, dicha representación mapea los haces LG_q^l en los polos según el signo l y los haces HG_{un} (que resulta de la superposición de los dos modos LG) en el ecuador de la esfera, cuya orientación está dada según la fase relativa usada para generar los haces LG_q^l y puede además, dar una medida de la fase geométrica de los haces que contienen OAM [71, 72]; lo anterior, de manera similar a la suma de estados de polarización circular a derecha e izquierda para conseguir un estado de polarización lineal. Dicha representación recibe el nombre de *la esfera «orbital» de Poincaré para modos de primer orden con momento angular orbital* [70, 71], también conocida como *esfera de Bloch* [3, 35, 73].

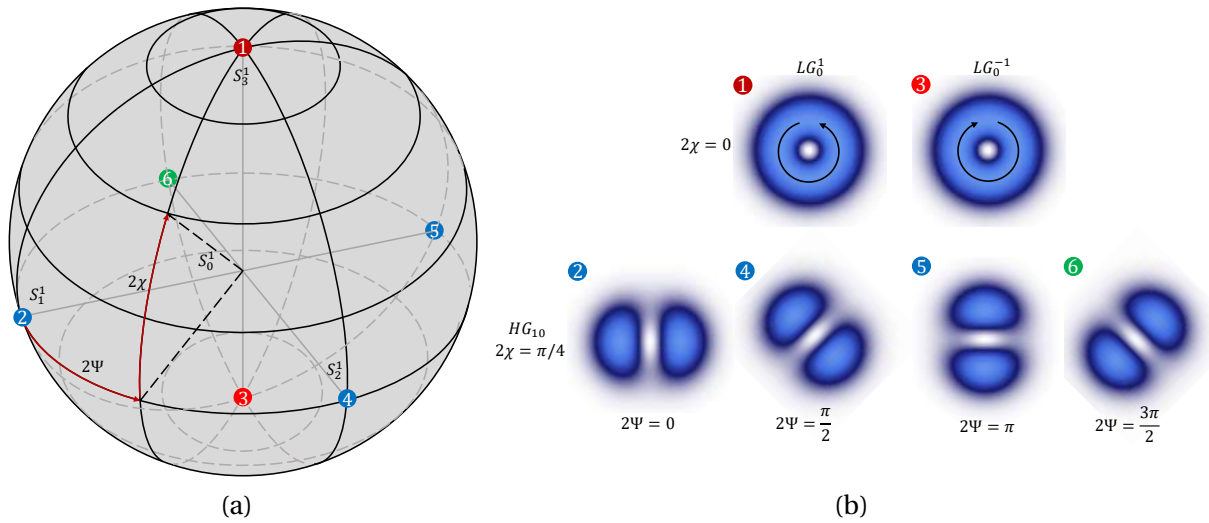


Figura 3.6: Representación geométrica de haces LG_0^1 sobre la esfera de Bloch. (a) El superíndice en los parámetros de Stokes en los ejes hace referencia a la carga topológica $l = 1$ y orden radial $q = 0$. (b) Los modos LG se ubican en los polos mientras que los modos HG se ubican en el ecuador de la esfera.

En la Figura 3.6, se representan los haces LG_0^1 en el polo norte de la esfera, los haces LG_0^{-1} en el polo sur de la esfera, finalmente los haces HG_{10} se representan en el ecuador de la esfera. Como se puede apreciar los ejes de la esfera orbital de Poincaré son los parámetros de Stokes [70], y es que a la hora de hacer mediciones experimentales, las medidas de intensidad tomadas se hacen con base al modo que surge de solucionar la ecuación paraxial respectiva, esto es, si se soluciona la EPH en coordenadas cilíndricas, la solución tendrá en su estructura una amplitud ligada a los polinomios de Laguerre, como se puede apreciar en la sección 2.3.4, por lo tanto, la intensidad (parámetros de Stokes de primer orden S_i^1) tomada, tendrá la forma de «dona» característica de estos haces.

Ahora bien, el orden N de los modos, y por lo tanto, de los parámetros de Stokes está determinado por la relación $N = 2q + |l| = u + 1$ [74], mientras que la relación de

transformación de los haces HG_{un} a los haces LG_q^l está determinada por [74],

$$LG_{ql}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N t^k b(u, n, k) HG_{N-k,k}(x, y, z), \quad (3.7)$$

donde

$$b(u, n, k) = \left[\frac{(N-k)!k!}{2^N n!u!} \right]^{1/2} \frac{1}{k} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^u]_{|t=0}, \quad (3.8)$$

con $l = u - n$ y $q = \min(u, n)$.

La representación de modos de orden superior sobre la esfera «orbital» de Poincaré resulta un poco complicada, pues si $l > 1$, entonces el número de modos será mayor que dos y por lo tanto los modos ya no podrán ser representados sobre la superficie de la esfera. Ahora bien, una forma de seguir considerando la representación de estos modos, con valores $l > 1$ es construyendo un sub-espacio bidimensional en el que $p = 0$ y $l = \pm N$, de tal manera que los modos resultantes estarán ubicados en los polos, mientras que los estados en el ecuador estarán caracterizados por secciones transversales de intensidad dadas por un solo anillo de $2l$ «pétalos» cuya orientación dependerá de la fase relativa los modos ubicados en los polos [35, 73].

Lo anterior muestra que no solo la polarización de la luz puede ser representada geoméricamente sobre una superficie esférica, sino que también el OAM de modos con estructuras de fase helicoidal pueden ser presentados sobre una superficie esférica gracias a la analogía entre la superposición de estados de polarización ortogonales, con la superposición de modos espaciales con carga topológica ortogonal.

3.3. Representación Geométrica de los Modos Vectoriales

Los MV ya descritos en la sección 2.5.1 pueden ser representados sobre la superficie de una esfera de manera similar a los estados de polarización y a los modos con OAM. En este caso se hará énfasis en la *esfera híbrida de Poincaré* (HPS, por sus siglas en inglés) y en la *esfera de Poincaré de orden superior* (HOPS, por sus siglas en inglés), ya que muestran de manera equivalente tal representación, relegando a la siguiente sección a las otras representaciones que se consideraran. En lo que sigue, tanto la HPS y la HOPS serán denominadas esferas H [1].

Aunque la elipse de polarización y la esfera de Poincaré son excelentes representaciones geométricas para investigar las características y propiedades de la luz polarizada, resultan insuficientes para estudiar la naturaleza, estructura y propiedades de los MV; es por esta razón que surgió la necesidad de buscar nuevas representaciones que describan completamente, o por lo menos, de manera aproximada a los MV. Así las cosas, la HPS es la primera propuesta [23, 54] seria y formal de una representación

de MV sobre una superficie esférica. *Grosso modo*, esta representación «unifica» información de la polarización (a través de estados base de polarización ortogonal) y del modo espacial (vía estados base OAM ortogonal) a partir de un producto cartesiano entre la base de polarización y la base de OAM. El tratamiento formal empleado para lograr tal representación puede ser seguido en [54]. Ahora bien, el resultado de tal producto, son dos conjuntos de puntos independientes que pueden ser ubicados en dos distintas esferas híbridas de Poincaré. Una para los MV, esto es, cuando $l = 1$ en los parámetros de Stokes y la otra para los modos π -vectoriales cuando $l = -1$ en los parámetros de Stokes [75].

Por otro lado, se encuentra la HOPS, propuesta por G. Milione *et al* en 2011 [22]. Dicha representación es completamente análoga a la HPS, pues también surgen dos esferas para MV. En este caso, se construye una ecuación de haz vectorial (vector de Jones) considerando el *momento angular total* (TAM, por sus siglas en inglés) de la luz, que como se explicó con anterioridad, es la suma del SAM y el OAM. De tal manera, se integra en una expresión, así como en el caso anterior, los grados de libertad de polarización, a partir de la base de polarización, con la parte espacial, a partir del OAM de la luz.

Cabe recalcar que en ambas representaciones los parámetros de Stokes se ven modificados, pues en este caso ya no solo se considera el SAM del haz sino que también se incluye el OAM. Dichos parámetros, en lo que sigue, serán denominados *parámetros de Stokes de orden superior* [22]. Adicional a lo anterior, se tiene que la base de polarización que se puede usar para la construcción de esta representación puede ser circular, lineal o diagonal, pues es bien sabido que estas bases se pueden escribir como una combinación lineal de las otras [45]. Por otro lado, si el valor de l es diferente en cada modo que compone el haz vectorial, esto es, $E_R^{l_1}$ y $E_L^{l_2}$, entonces los parámetros de Stokes serán aún más generales, lo que da cabida a la construcción de una esfera de Poincaré un poco más general, denominada *Esfera de Poincaré de orden híbrido*, la cual es de relevante importancia a la hora de describir las propiedades y características de haces vectoriales que se propagan a través de medios anisótropos no homogéneos [76].

La Figura 3.7, muestra los MV \mathbf{HLG}_0^1 simulados numéricamente, representados sobre las esferas H de manera similar a la esfera de Poincaré para los estados de polarización a partir de las coordenadas (θ, δ) . El factor de peso de cada haz superpuesto que controla la transición entre los modos escalares en los polos a los vectoriales en el ecuador, está determinado por el ángulo, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, mientras que la fase intermodal entre las componentes de cada modo, asociada a la orientación de los estados de polarización en el modo, está dada por $0 \leq \delta \leq \pi$. En el polo norte de la esfera se encuentran los haces escalares con PCD en $(0, 0)$, mientras que en el polo sur se encuentran los haces escalares con estados de PCI en $(0, \pi/2)$. En el ecuador de la esfera en $(\pi/4, 0)$; $(\pi/4, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/2)$, se encuentran los MV *completamente enredados* con estados de PL y en los demás puntos, en $(\pi/8, 0)$; $(3\pi/8, 0)$ y $(\pi/8, \pi/8)$ que no comprenden los polos y el ecuador se encuentran los MV con PEL.

Así las cosas, lo anterior deja ver que los haces vectoriales pueden ser representados

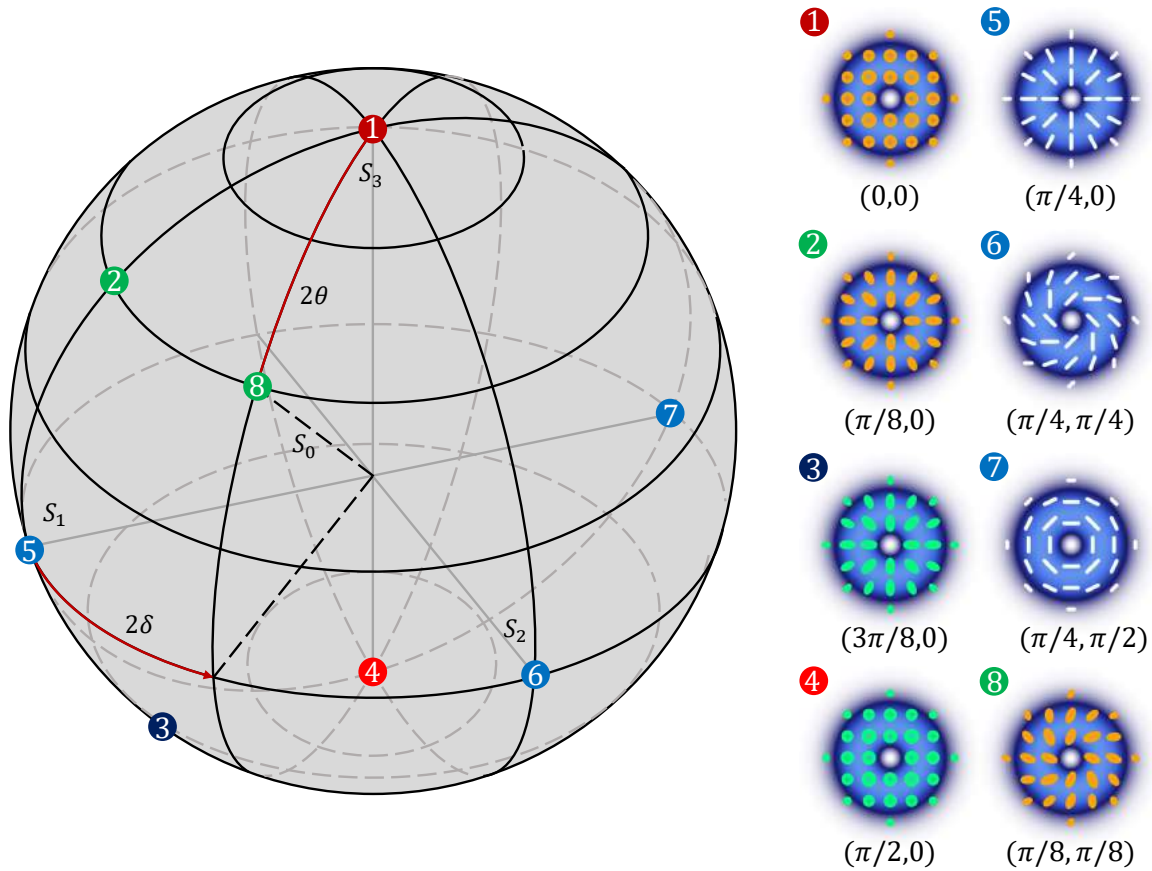


Figura 3.7: Representación geométrica de los MV \mathbf{HLG}_0^1 sobre las esferas H según las coordenadas $(2\theta, 2\delta)$. Los puntos del 1 al 4 representan los haces con estados de polarización que cambian de forma según la variación del ángulo θ , mientras que los puntos del 5 al 7 muestran los haces vectoriales completamente enredados, que como se puede ver, solo comprenden estados de PL que varía de orientación según el ángulo δ . Por otro lado, Las formas en naranja (círculos y elipses) son estados de polarización con sentido de giro a derecha mientras que las formas verdes (círculos y elipses) son estados de polarización con sentido de giro a izquierda. Las líneas blancas son estados de PL.

de manera «completa», convencionalmente hablando, sobre una superficie esférica denominada esfera de Poincaré de orden superior o su equivalente, la esfera híbrida de Poincaré de manera análoga a la representación de los estados de polarización de la luz y el OAM sobre la esfera de Poincaré estándar. Sin embargo, cabe mencionar que los haces vectoriales *híbridos* [1], es decir, aquellos que presentan diferentes estados de polarización en su modo transversal no pueden ser representados en dicha esfera, pues sus características de polarización no lo permiten. En la siguiente sección se comentará de manera breve una representación geométrica que generaliza aún más las esferas H.

3.4. Otras Representaciones de Modos Vectoriales

A continuación, se hará una mención breve a otras representaciones geométricas que representan propiedades y características de la luz que son aun más generales que las anteriormente mencionadas y que por lo mismo, suponen un proceso más complejo de construcción e interpretación.

3.4.1. Esfera Generalizada de Poincaré. Esfera G.

Esta esfera, supone un caso más general a las esferas H, pues además de representar los MV de manera similar a las dos representaciones geométricas anteriores, representa MV *híbridos* [1, 51, 77], es decir, modos en cuyo perfil de intensidad se encuentran diferentes estados de polarización en diferentes orientaciones alrededor del eje óptico. Así las cosas, dicha esfera surge a partir de la dificultad que presentan las esferas H a la hora de representar modos con perfiles de polarización híbridos [1]. En este caso, se propone cambiar el significado del parámetro de Stokes S_0 , de tal forma que este ya no de información sobre el grado de polarización de la luz, sino que ahora funcione como un tercer grado de libertad, el cual permite mostrar a través de este, los MV *puros* (aquellos representados en las esferas H) y los haces vectoriales híbridos, tal y como se muestra en la Figura 3.8.

En la Figura 3.8 se muestra la esfera G. Los ejes G_{iR}^l con $i = 1, 2, 3$, son los parámetros de Stokes generalizados, donde $m = l$, la carga topológica de los MV con geometría cilíndrica [1]. Por otro lado, cualquier haz vectorial o híbrido dentro del volumen y la superficie de la esfera puede ser ubicado a partir de un conjunto de tres coordenadas $(R, 2\Psi, 2\chi)$ donde 2Ψ es el ángulo longitudinal, mientras 2χ es el ángulo latitudinal. Ahora bien, cuando $R = 0.5$, se tiene que en los polos de la esfera a lo largo del eje G_{3R}^l se representan modos escalares, esto es, en el polo norte de la esfera, cuando $(|l| \neq |\sigma|; l = 1)$ en los parámetros de Stokes, se encuentran los modos con PCD, y en el polo sur estarán los modos con PCI mientras que en el ecuador se representan los modos completamente enredados, es decir, los modos con estados de PL. Finalmente entre los polos y el ecuador se encuentran los modos con PEI, lo mismo que en el caso de las esferas H. Cuando $R = 1$ y $(|l| = |\sigma|; l = -1)$ en los parámetros de Stokes, se representan los modos π -vectoriales, similarmente a las esferas H cuando $l = -1$ en los parámetros de Stokes. Cuando $0.5 < R < 1$, en este caso $R = 0.75$, se representan los MV híbridos, que son aquellos que tienen elipticidad azimutalmente variante, es decir, elipses de polarización diferente en cada punto sobre el modo espacial del haz; así, en los polos de la esfera G, se representan los modos escalares pero con estados de PL, mientras que en el ecuador de la esfera, se encontraran los MV híbridos.

Lo expuesto anteriormente, deja ver que las esferas H son casos especiales de la esfera G y que por lo tanto, estas pueden ser obtenidas de la esfera G según el valor de R .

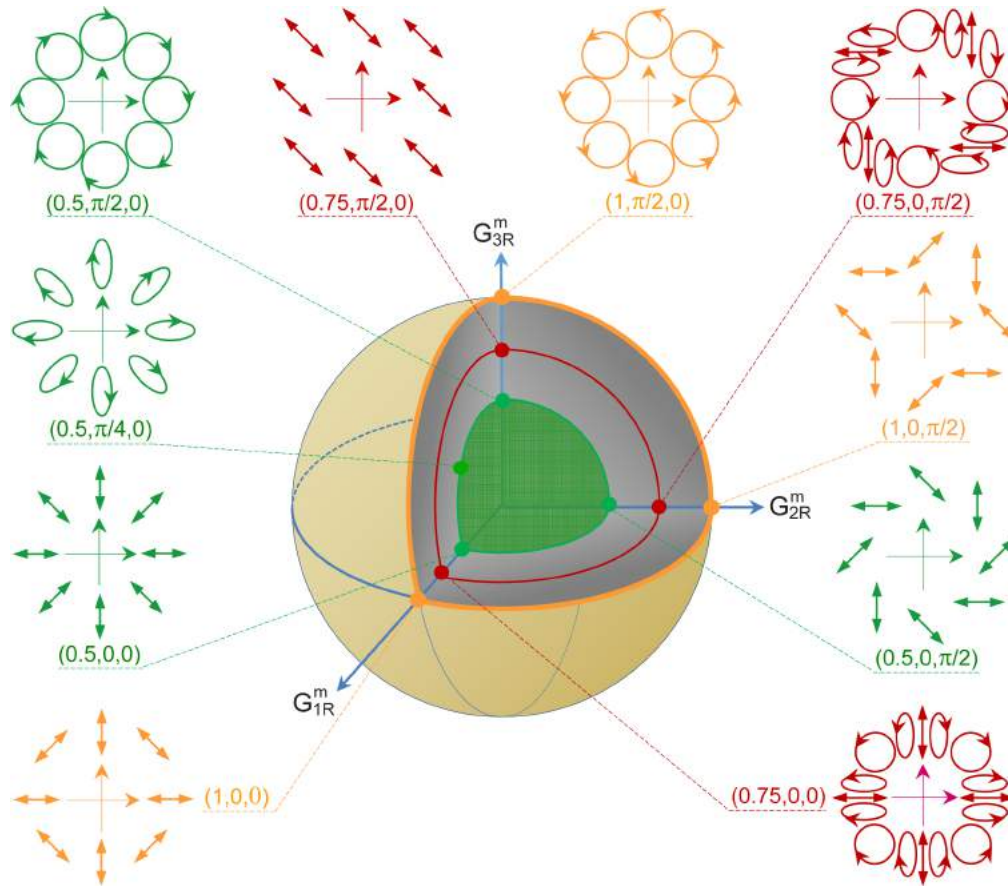


Figura 3.8: Haces vectoriales híbridos representados en la esfera G . En este caso se considera que $l = 1$. Así, los puntos en los polos de la esfera, en los extremos del eje G_{3R}^l representan una base que varía continuamente. Por otro lado, el cascarón verde ($R = 0.5$) representa las esfera H con $l \equiv 1$, mientras que el cascarón amarillo ($R = 1$), representa las esferas H para $l = -1$; es decir, los anteriores cascarones son la representación geométrica de los haces vectoriales puros. Finalmente, el cascarón rojo ($R = 0.75$), es la representación de los haces vectoriales híbridos. Adaptada con permiso de [1] © The Optical Society.

3.4.2. Sistema de Esferas de Poincaré de 5-Dimensiones

Esta representación geométrica de MV supone un modelo similar al planetario, el cual denominan: *sistema de esferas de Poincaré de 5-dimensiones* [2], siendo las dimensiones, cinco grados de libertad propios de la luz, donde tres de estos hacen parte de la esfera G ($R, 2\Psi, 2\chi$), mencionados en la sub-sección 3.4.1 y dos hacen parte de un nuevo plano «orbital» definido por las coordenadas $(l, \Psi) \equiv (m, \theta)$ en la Figura 3.9. Así las cosas, esta representación supone el caso más general, que el planteado por el de la esfera G , registrado en la literatura, pues además de incluir toda la información dada por dicha esfera, no se limita a un solo tipo de MV, dado que al implementar dos grados de libertad más, da cabida a la representación de modos de luz estructurada más complejos. Dicha representación se puede apreciar en la Figura 3.9.

En la Figura 3.9 se puede apreciar el sistema de esferas Poincaré de 5-dimensiones, en el que las cinco dimensiones hacen referencia a los grados de libertad $(m, \theta; R, \dots, 2\Psi, 2\chi)$ las cuales dan la cantidad máxima de MV puros e híbridos que se han po-

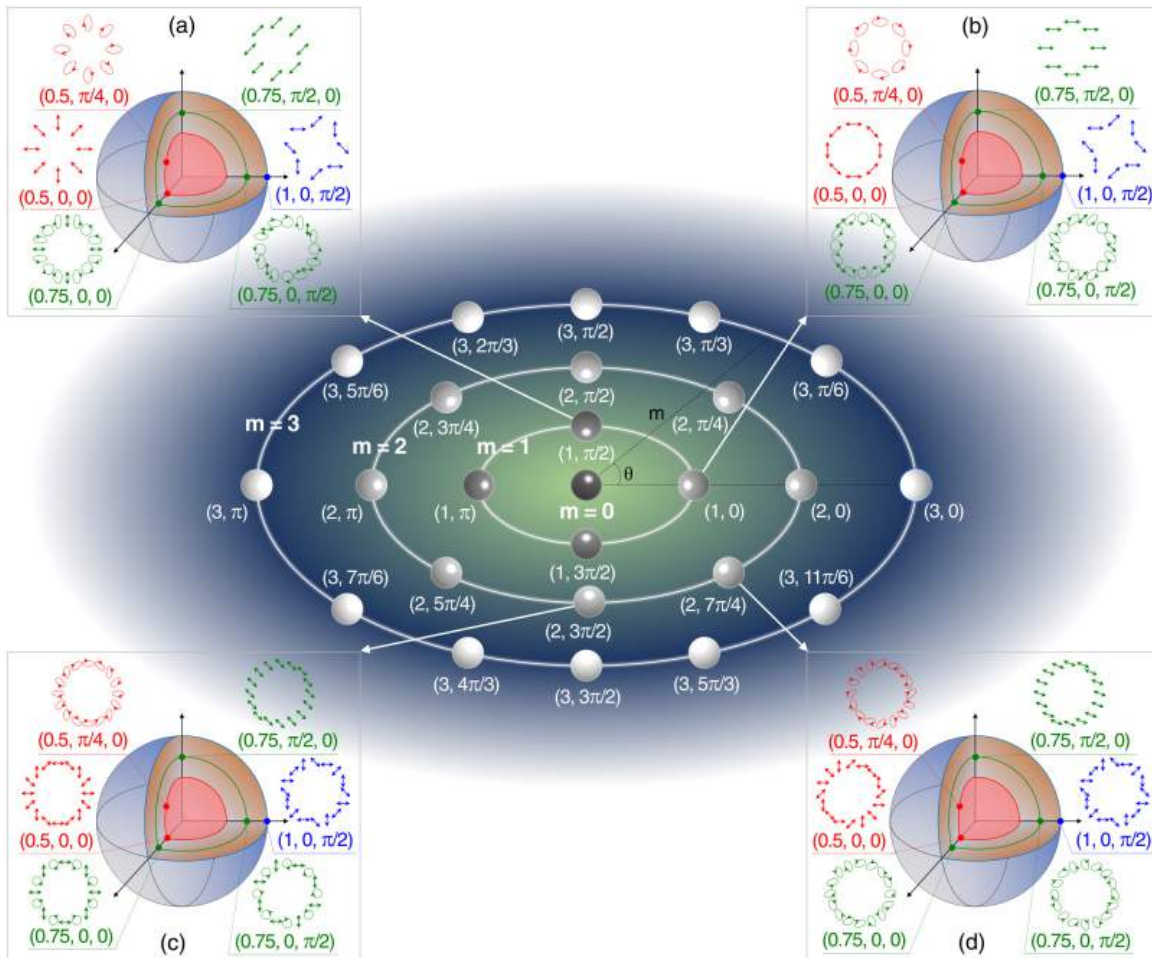


Figura 3.9: Sistema de esferas de Poincaré de 5-dimensiones. Cada esfera, es una esfera G que puede ser ubicada en las coordenadas (m, θ) sobre órbitas que toman valores $m \geq 1$. Siendo ubicada la esfera en el plano, los MV puros y los modos MV se pueden ubicar con las coordenadas $(R, 2\Psi, 2\chi)$. Adaptada con permiso de [2], bajo el número de licencia: **RNP/23/MAR/064721**.

dido representar geoméricamente hasta el momento [2]. Por otro lado, se tiene que $m \geq 0$ es la carga topológica característica de los modos con OAM que en este caso, supone un número natural y discreto; $0 \leq \theta < 2\pi$ es la orientación de las elipses de polarización; $0.5 < R < 1$ es el parámetro radial de la esfera G; y 2Ψ y 2χ son las coordenadas de longitud y latitud en la esfera de Poincaré respectivamente. Por otro lado, la representación 3.9 muestra un sistema conformado por cuatro esferas G, que deben ser analizadas de igual manera a la esfera G mostrada en la sub-sección 3.4.1, y que están posicionadas en tres tres órbitas diferentes cuyas posiciones son $(m, \theta) = (1, \pi/2), (1, 0), (2, 3\pi/2)$ y $(2, 7\pi/4)$, respectivamente. En este caso, se puede apreciar que la coordenada m influye sobre la distribución azimutal de la polarización en el haz representado en las esferas, mientras que la coordenada θ influye de manera distinta sobre la distribución de la polarización de los haces representados en las esferas, esto es, dependiendo el valor de R , la coordenada θ tendrá un efecto sobre la orientación de las elipses de polarización en las esferas G. Así las cosas, el sistema de esferas de Poincaré de 5-dimensiones engloba todas y cada una de las representa-

ciones geométricas de luz polarizada y con OAM discutidas hasta el momento, siendo este, el caso más general registrado hasta la fecha.

Cabe recalcar que no solo es posible representar geoméricamente las propiedades de TAM de la luz sobre superficies geométricas, sino que también es posible representar otras propiedades de la luz en una superficie esférica u otro tipo de superficie, como es el caso de la evolución de los *skyrmiones ópticos* sobre una superficie toroidal [78]; las propiedades y características de diferentes tipos de modos gaussianos sobre la *esfera de Poincaré de rayos ópticos para modos gaussianos estructurados* [79], la cual no representa los modos por medio de puntos como se hace en las esferas G, sino que por medio de curvas que dan información sobre la forma del haz y otras propiedades; la birrefringencia espacialmente variable por medio de una hiper-esfera de Poincaré de 4-dimensiones a partir de una proyección de esta sobre la esfera de Poincaré estándar [80]; la relación entre los modos LG_q^l y los modos HG_{un} de orden superior sobre la *esfera modal de Majorana* [81], esto es, una representación más general de los modos con OAM que la descrita en la sub-sección 3.2 y finalmente, una representación que reúne todas las propiedades y características de los haces de luz estructurada anteriormente mencionados sin limitación alguna, la $SU(2)$ *esfera de Poincaré* [82].

Como se pudo apreciar, existen muchas formas de representar las propiedades de la luz, según las necesidades y lo que se quiera saber de ella; representaciones que simplifican el entendimiento del comportamiento de la luz, además, de ofrecer una herramienta fácil de usar al momento estudiar los efectos de los elementos ópticos sobre la luz. En el siguiente capítulo, se dará a conocer una nueva propuesta para representar los MV **HIG** que pretende vincular el parámetro de elipticidad de los modos con el parámetro de excentricidad de un elipsoide, de tal manera que para cada haz con una elipticidad específica, se puede construir una superficie geométrica más intuitiva que permite comprender más a fondo la naturaleza de estos modos.

Capítulo 4

Representación Generalizada de los Modos Vectoriales Ince-Gauss Helicoidales

Al solucionar la EPH en coordenadas elípticas-cilíndricas (2.26), surge un parámetro que está asociado a la geometría de los modos, la *elipticidad* (ϵ). Este parámetro influye notoriamente en la geometría de los modos generados y por ende en las propiedades y características de los mismos, pues como se menciona en la sub-sección 2.3.6, el cambio de este parámetro da cabida a que los modos adquieran un aparente cambio de forma en su perfil transversal. Por otro lado, en el capítulo 3 se mostró que es posible representar las características de polarización de los MV de manera tradicional sobre las esferas H (sección 3.3) sin consideración del sistema de coordenadas en el que se da solución a la EPH, es decir, las esferas H representan MV independientemente del sistema de coordenadas en el que esté representado el modo espacial.

Ahora bien, las esferas H, aunque cumplen con el objetivo para el que fueron creadas, solo consideran información relativa a la polarización más allá que la del modo espacial, esto es, *a priori*, no dan información sobre la geometría del modo espacial (**LG – HG, IG, MG, etc.**) que se representa sobre la superficie de la esfera. Lo anterior, conduce a la posibilidad de implementar el parámetro de elipticidad característico de los modos *IG* en un «nuevo» tipo de superficie, de tal manera que la forma de dicha superficie permita intuir el modo vectorial (**HIG – HHG, HIG**) que se representa en la misma. Así, se logró construir una representación que relaciona el parámetro de elipticidad de los modos *IG* con la excentricidad de un elipsoide, de tal manera que para cada valor de ϵ existirá un único modo vectorial **HIG** y por lo tanto, un único elipsoide asociado a la elipticidad que representa tal modo. El proceso llevado a cabo se presenta en detalle a continuación.

4.1. Elipsoide Como Nueva Representación Geométrica de los modos vectoriales Ince-Gauss Helicoidales

4.1.1. Geometría Elipsoidal Elemental

Una *elipse* se define como la curva formada por los puntos del plano para los cuales se mantiene constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos [83]. Una representación gráfica de la elipse se muestra en la Figura 4.1

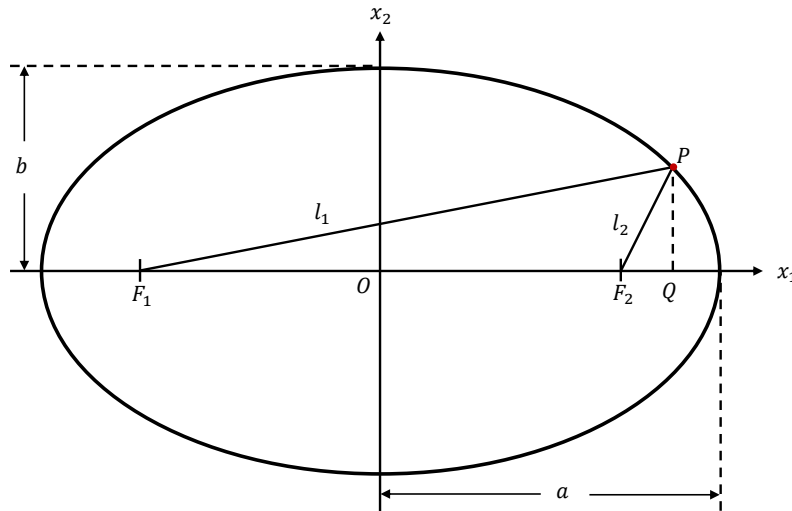


Figura 4.1: Geometría de una elipse.

En la Figura se tiene que:

- I. F_1 y F_2 son los focos.
- II. a y b son el semi-eje mayor y semi-eje menor de la elipse, respectivamente.
- III. l_1 y l_2 son las distancias desde los focos al punto P .
- IV. O es el centro de la elipse.
- V. P y Q son puntos arbitrarios.

Ahora bien, a partir de los parámetros anteriormente mencionados, es posible obtener un parámetro asociado a la forma de la elipse; dicho parámetro es la *excentricidad* (e), la cual está definida como sigue,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (4.1)$$

Si $e = 0$, la forma en la Figura 4.1 se reducirá a una circunferencia, si $0 < e < 1$, la forma se reducirá a una elipse, si $e = 1$ se tendrá una parábola y si $e > 1$ se tendrá una hipérbola.

Por otro lado, en relación a un elipsoide, este se define como el cuerpo resultante de girar una elipse alrededor de su semi-eje menor [84]. La Figura 4.2 muestra la posición de un punto arbitrario P sobre la superficie de un elipsoide con eje de rotación alrededor del eje x_3 .

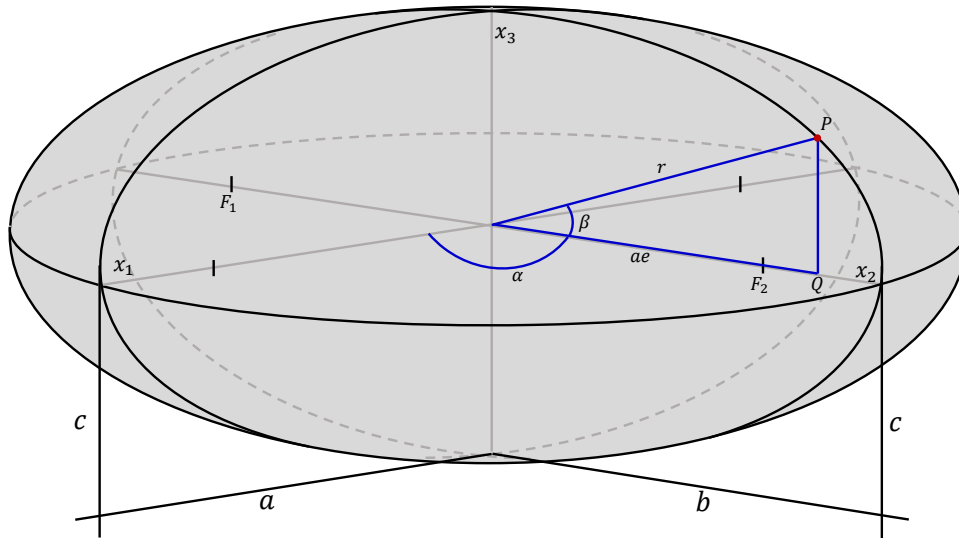


Figura 4.2: Geometría que relaciona las coordenadas cartesianas con las coordenadas de un elipsoide. En este caso $a = b$.

En la Figura 4.2 se muestra la distancia r medida desde el origen de un punto P sobre la superficie de un elipsoide; β hace referencia al ángulo latitudinal (*latitud esférica*) y α es el ángulo longitudinal. La ecuación que describe dicho elipsoide en coordenadas cartesianas está dada por,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad (4.2)$$

donde, x_1 , x_2 , y x_3 son las coordenadas cartesianas ortogonales entre sí y a , b , y c son las longitudes de los semi-ejes en cada dirección. Si la longitud de dos de los ejes en el elipsoide es la misma, entonces se tiene un *esferoide*, que puede ser un *esferoide oblato* si $a > c$ o un *esferoide prolato* si $a < c$; por otro lado, si los tres ejes tienen la misma longitud, es decir, $a = b = c$, entonces se tiene una esfera, es decir, la esfera es un caso especial de elipsoide. Ahora bien, la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas está dada por,

$$x_1 = r \cos \beta \cos \alpha, \quad (4.3a)$$

$$x_2 = r \cos \beta \sin \alpha, \quad (4.3b)$$

$$x_3 = r \sin \beta. \quad (4.3c)$$

A continuación, se relacionan las ecuaciones (4.3) con la ecuación (4.2) de tal forma que se encuentra una relación funcional para la distancia medida en un sistema de coordenadas cartesiano, que permita obtener la posición de un punto sobre un elipsoide en función de la excentricidad y las coordenadas esféricas.

4.1.2. Posición Sobre la Superficie de un Elipsoide

Como se mencionó con anterioridad, la idea de este trabajo de grado es mostrar una nueva forma de representar los modos vectoriales **HIG** sobre una nueva superficie que abarque información de la geometría del modo espacial y de la polarización, esto, debido a que sobre alguna de las esferas H no puede ser representada propiamente la información geométrica del modo. Dicha nueva superficie, debe respetar las reglas formales y físicas en relación a la distribución de la polarización presente en cada modo tal y como se respetan en las esferas H, además, de que la transición entre los MV **HLG** – **HIG** – **HHG** muestre también una superficie de representación acorde al valor de la elipticidad del modo que se pretende representar, es decir, si $e = 0$, la superficie debe ser una esfera, y si $0 < e < 1$, la superficie es un elipsoide. Ahora bien, para lograr esto, es necesario vincular el parámetro de elipticidad ϵ de los modos con el parámetro de excentricidad e del elipsoide, lo anterior, a partir de la definición de una función $e(\epsilon)$. Antes de llegar a este punto, es necesario escribir la forma que debe tener la distancia de un punto P sobre la superficie de un elipsoide para valores específicos de e y de β . Dado lo anterior, se parte de reemplazar las ecuaciones (4.3) en la ecuación (4.2) considerando que $a = b$, esto es,

$$\frac{(r \cos \beta \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{(r \cos \beta \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \beta)^2}{c^2} = 1. \quad (4.4)$$

Ahora bien, si en la Figura 4.2, el semi-eje menor se encuentra a lo largo del eje x_3 , entonces la ecuación (4.1), se convierte en,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}. \quad (4.5)$$

Despejando c^2 de la ecuación (4.5) y reemplazándola en el tercer término a mano izquierda en la ecuación (4.4), se tiene,

$$\frac{(r \cos \beta \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{(r \cos \beta \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \beta)^2}{a^2(1 - e^2)} = 1. \quad (4.6)$$

Realizando ahora la suma de los términos al lado izquierdo de la ecuación (4.6) y simplificando, se consigue,

$$r^2 \cos^2 \beta \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + \frac{r^2 \sin^2 \beta}{1 - e^2} = a^2,$$

$$\frac{r^2}{1 - e^2} [(1 - e^2) \cos^2 \beta + \sin^2 \beta] = a^2,$$

esto es,

$$r^2(1 - e^2 \cos^2 \beta) = a^2(1 - e^2),$$

despejando r se consigue finalmente,

$$r(\beta; e) = a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta}}. \quad (4.7)$$

La ecuación (4.7) es la distancia, medida desde el origen O del sistema coordenado, a un punto P sobre la superficie de un elipsoide y depende del valor fijo que tome e y del ángulo variable β . De las ecuaciones (4.6) y (4.7) se puede apreciar que si $e = 0$, entonces $r = a$, esto es, se tiene una esfera de radio a .

Cabe recalcar que para que la ecuación (4.7) tenga significado físico como distancia del origen de coordenadas a un punto sobre la superficie elipsoidal, el valor de la excentricidad e debe ser tal que $0 \leq e < 1$.

4.2. Representación de los Modos Vectoriales HIG Sobre una Superficie Elipsoidal

La forma de ubicar un modo vectorial sobre alguna de las esferas H es a partir de las coordenadas esféricas $(E_0, 2\theta, 2\delta)$, donde $E(\mathbf{r})$ es la amplitud normalizada del campo eléctrico, y la intensidad resultante de esta, es análoga a r en (4.7) en el caso que $e = 0$. Ahora bien, un modo vectorial cualquiera, con polarización representada en la base circular se escribe de la forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \cos \theta E_R(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_R + \sin \theta \exp(i\delta) E_L(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_L. \quad (4.8)$$

La representación geométrica habitual de estos modos sobre una esfera H puede verse en la Figura 4.3, la cual deja ver la forma «convencional» de representar MV con geometría cilíndrica sobre una superficie *esférica*. Como se puede apreciar, esta representación geométrica provee una forma de visualizar cualquier modo vectorial (en este caso, un modo vectorial \mathbf{HLG}_1^1) sobre la superficie de una esfera de radio unitario, cuyas coordenadas angulares $(2\theta, 2\delta)$ están asociadas al peso de cada modo a partir de θ (coordenada latitudinal o de elipticidad), que como ya se sabe, controla la transición de los modos escalares a los MV y a la fase intermodal a partir de δ (coordenada longitudinal). Cuando $\theta = 0, \pi/2$, una esfera H muestra los modos con PCD y PCI, (puntos 1 y 4) respectivamente, es decir, los modos escalares, que son un caso particular de los MV y se representan en los polos. Ahora bien, a medida que θ cambia, el modo escalar pasa a ser un modo vectorial (puntos 2-8) consiguiendo los MV completamente enredados cuando $\theta = \pi/4$. Por otro lado, al cambiar el valor de δ cambia la orientación de los estados de polarización, siendo radial cuando $\delta = 0$ (punto 5) y azimutal cuando $\delta = \pi/2$ (punto 7).

Ahora bien, este caso es el modelo que debe seguir cualquier tipo de representación geométrica que quiera mostrar las propiedades de los MV en relación al comportamiento de θ y δ , y la propuesta planteada a continuación cumple con estas características. Así pues, si se quisiese representar los MV sobre una superficie diferente a la superficie esférica, pero que conserve su dependencia a partir de las coordenadas esféricas, se debe «reinterpretar» la ecuación (4.8), de tal manera que la posición del modo vectorial dependa de las mismas coordenadas (θ, δ) pero esta vez sin considerar que la coordenada radial r , es análoga a la intensidad del campo eléctrico, pues de ser así, se estaría frente a un problema de no conservación de la energía, pues r cambia para cada valor de e y θ , y como ya se explicó, esta ahora dará información sobre la

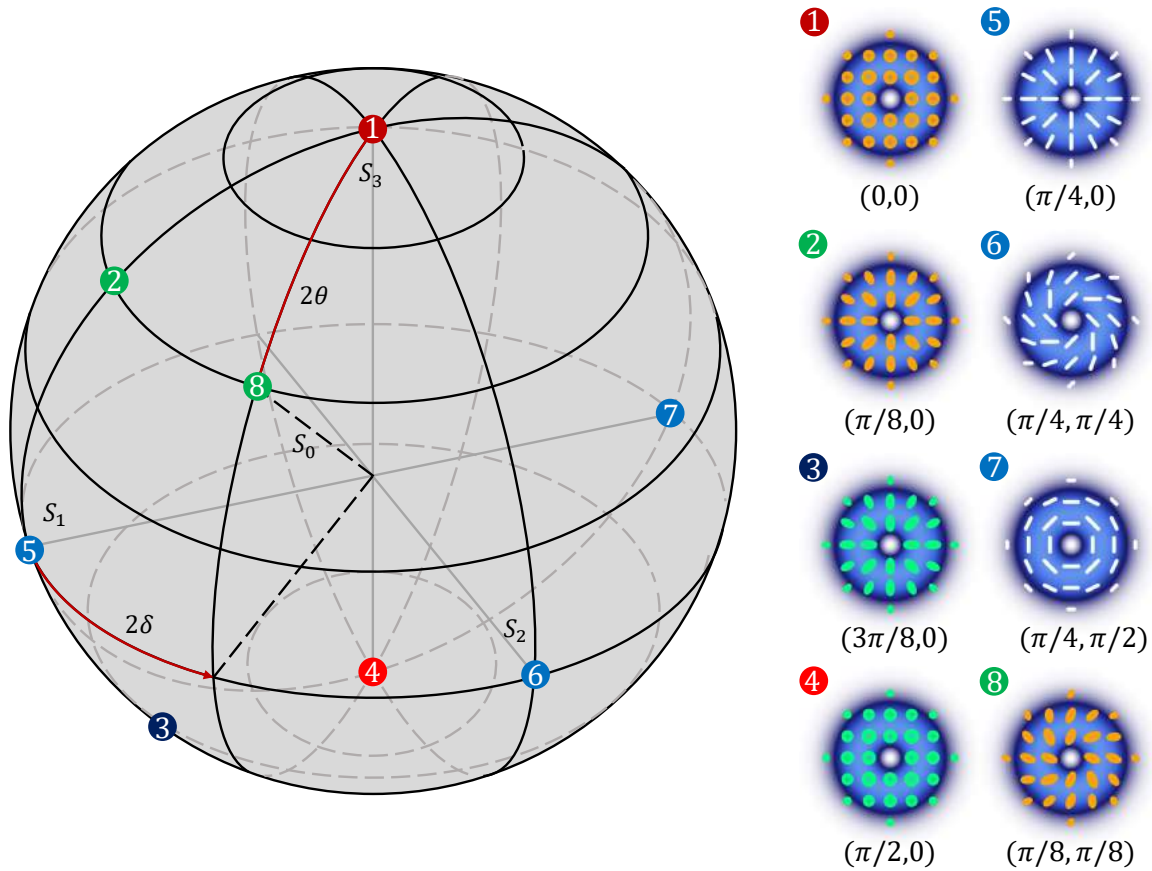


Figura 4.3: MV representados sobre una esfera H.

distancia a la que se encuentra un modo vectorial medido desde el origen de coordenadas a la superficie del elipsoide en función del parámetro fijo e y del ángulo variable β y no de la intensidad del campo eléctrico como se hace originalmente. Lo anterior, se muestra en la Figura 4.2.

Por lo tanto, la coordenada r junto con las coordenadas angulares (θ, δ) ubican a un modo vectorial con geometría elíptica sobre una superficie elipsoidal deformada por la acción de e . Por otro lado, para relacionar r con la coordenada θ en la ecuación (4.7), se debe hacer $\cos(\beta = \pi/2 - 2\theta) = \sin(2\theta)$; esto, porque se requiere que la función $\sin(\cdot)$ en el argumento de la raíz cuadrada en la ecuación (4.7), se comporte según la posición de los MV sobre las esferas H, esto es, que en los polos estén los modos escalares con polarización circular, y en el ecuador los MV puros, y bajo $\sin(2\theta)$ se consigue dicho objetivo, tal y como se muestra en la Figura 4.4. Por otro lado, la ecuación (4.7) deja ver que si $e = 0$ la superficie sobre la que se representan los MV se reduce a una esfera de radio unitario, esto es, a la ecuación (4.8), mientras que si $0 < e < 1$, entonces la superficie sufre una deformación de tal manera que se obtiene un elipsoide achatado en los polos, donde podrán ser representados los MV **HIG**, es decir, la ecuación (4.7) es un indicativo de la deformación de un elipsoide al cual se puede asociar un modo vectorial para una elipticidad dada. Ahora bien, como se mencionó con anterioridad,

los modos **HIG** son una transición suave entre los modos **HLG** cuando $\epsilon = 0$ y los **HHG** cuando $\epsilon \rightarrow \infty$, lo que supone un aspecto importante, dado que el parámetro de elipticidad que produce dicho efecto en los modos, se vincula con el elipsoide a partir de e para generar de igual manera un cambio en la forma del mismo.

Por otro lado, la función $e(\epsilon)$ formalmente cumple las siguientes condiciones:

$$e(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon = 0, \\ 1, & \text{si } \epsilon \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.9)$$

La condición (4.9), es la definición formal de e como función de ϵ , sin embargo, para el fin de este trabajo de grado, se requiere que el valor máximo de $e(\epsilon)$ se aproxime a 0.5 cuando $\epsilon \rightarrow \infty$, y para ello es necesario re-definir $e(\epsilon)$. Lo anterior debido a que se requiere que el significado físico de las propiedades de los modos sea coherente con la representación, ya que si se dejase la definición original (4.9), la superficie elipsoidal se convertiría en un plano circular (disco) cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ y bajo dicha geometría sería bastante complicado representar las propiedades vectoriales de los modos **HHG** en ese caso.

Aclarada la dificultad anterior, la función que se propone y que cumple con las condiciones anteriormente mencionadas, está definida por,

$$e(\epsilon) := \frac{\arctan \epsilon}{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon = 0, \\ 0.5, & \text{si } \epsilon \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.10)$$

Bajo estas nuevas condiciones, la ecuación (4.7) se comporta como se muestra a en la Figura 4.4, la cual muestra la relación de la distancia medida desde el origen del sistema de coordenadas, de un punto sobre la superficie de un elipsoide en función de θ para tres diferentes valores de e ; se puede apreciar que independiente del valor de e , el valor máximo que puede tomar r es 1, cuando $2\theta = \pi/2$, y menor que 1 para otros valores de 2θ ; adicional a eso, se puede apreciar que la forma de la superficie depende del valor de e , y que la ubicación de cada posible modo vectorial depende de las coordenadas angulares (θ, δ) , de tal manera que cuando $\theta = 0, \pi/2$, los modos escalares con PCD y PCL, respectivamente, se ubicarán en los polos del elipsoide, mientras que cuando $\theta = \pi/4$, los modos se ubicarán en el ecuador donde se encuentran los MV completamente enredados con PL; para los otros valores de θ los MV presentaran estados de PEI. Cuando $\epsilon = 0, e = 0$, y por lo tanto se tiene la representación de los MV **HLG** sobre la tradicional HOPS o esfera generalizada de Poincaré. Cuando $0 < \epsilon \rightarrow \infty$ la superficie que se obtiene es un elipsoide que se achata en los polos con excentricidad máxima $e = 0.5$. Lo anterior deja ver que los MV **HIG**, junto con los MV **HLG** y **HHG** se pueden representar sobre una superficie elipsoidal general, dejando ver a través de esta, las características geométricas y de polarización de los modos según el valor de ϵ que estos tengan, cosa que no es posible por medio de la representación tradicional de los MV, lo que convierte a esta nueva representación geométrica en un caso general que permite representar la información de los grados de libertad de la luz que conforman los MV en un mismo lugar.

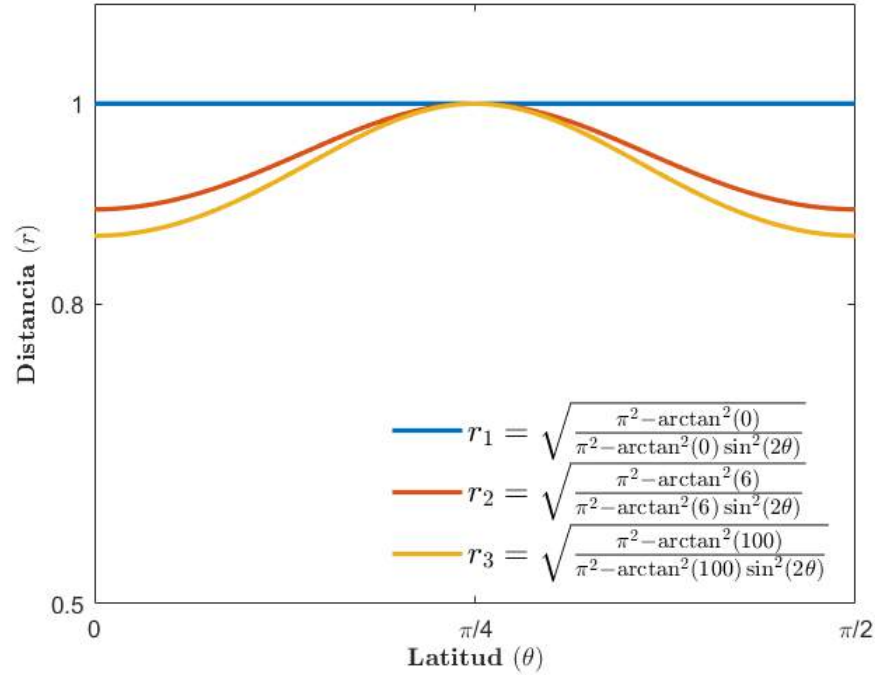


Figura 4.4: Comportamiento de r en términos del ángulo θ para tres diferentes valores de e cuando $a = 1$.

A continuación, y sin pérdida de generalidad, se muestran tres ejemplos de MV **HIG** representados sobre una superficie elipsoidal para tres diferentes valores de ϵ .

4.2.1. Ejemplo 1: $\epsilon = 0$

En este caso, cuando $\epsilon = 0$ y $a = 1$, la ecuación (4.7) deja ver que la superficie resultante es una esfera de radio unitario, análoga a alguna de las esferas H, sin embargo, solo podrán ser representados los MV **HIG**, pues si $e = 0$ es debido a que $\epsilon = 0$ y como ya se ha mencionado con anterioridad, los MV resultantes en este caso, son los **HIG**. La Figura 4.5 muestra los MV **HIG** sobre una superficie esférica. Como se puede apreciar, los modos escalares con PCD y PCI [puntos 1 (0, 0) y 4 ($\pi/2$, 0)] se encuentran en los polos. A medida que el valor de θ cambia entre (0, $\pi/2$), los MV van apareciendo, de tal manera que los MV completamente enredados con PL estarán ubicados en el ecuador de la esfera en $2\theta = \pi/2$ [puntos 5 ($\pi/4$, 0), 6 ($\pi/4$, $\pi/4$) y 7 ($\pi/4$, $\pi/2$)], mientras que para los otros valores de θ se tendrán los MV con PEL en los puntos [2 ($\pi/8$, 0), 3 ($3\pi/8$, 0) y 8 ($\pi/8$, $\pi/8$)]. Al cambiar el valor de δ entre [0, π], la orientación de la polarización presente en el modo también cambiará, siendo radial en $\delta = 0$ y azimutal en $\delta = \pi$. Un aspecto importante a tener en cuenta es que los ejes (x_i^m) con $i = 0, 1, 2, 3$, *únicamente* en esta representación al igual que en las esferas H son los parámetros de Stokes de orden superior.

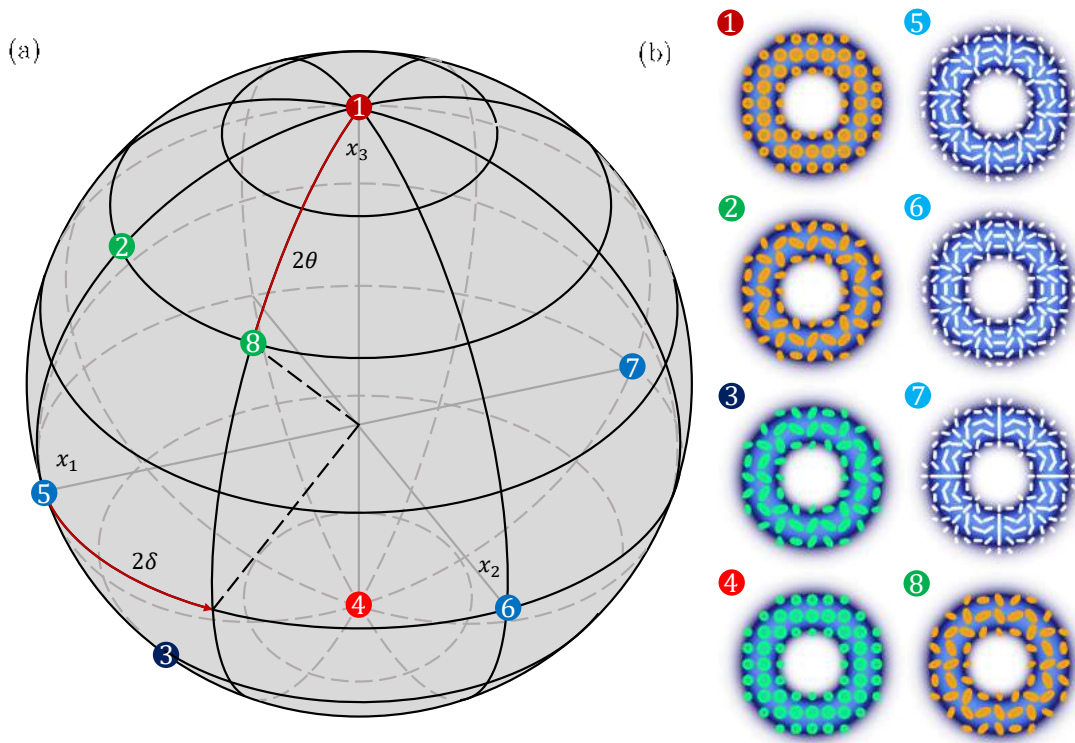


Figura 4.5: (a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon = 0$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0$, lo que corresponde a una esfera. (b) MV $\mathbf{HIG}_{5,5,0}$. Como se puede apreciar, estos modos se reducen a los modos $\mathbf{HLG}_{0,5}$.

4.2.2. Ejemplo 2: $\epsilon = 6$

En este caso, se considera que $\epsilon = 6$ y $a = 1$, de tal manera que $e = 0.44$, lo que produce un efecto de achatamiento en los polos de una esfera, para dar lugar a un elipsoide. Como ya se comentó con anterioridad el valor de r que es la distancia desde el origen de coordenadas hasta un modo vectorial sobre la superficie del elipsoide, va depender del valor fijo de e y de la coordenada θ , siendo mayor a medida que 2θ en el argumento de la raíz cuadrada se aproxima a $\pi/2$ desde el polo norte del elipsoide, así como desde el polo sur.

Bajo este valor de ϵ , se tienen los MV \mathbf{HIG} , que de ahora en adelante, podrán ser representados sobre una superficie elipsoidal cuya forma se acopla al valor de ϵ , lo que permite conocer información del modo a parte de la información de polarización del haz. La Figura 4.6 muestra la nueva forma de la superficie y su representación de los MV \mathbf{HIG} ,

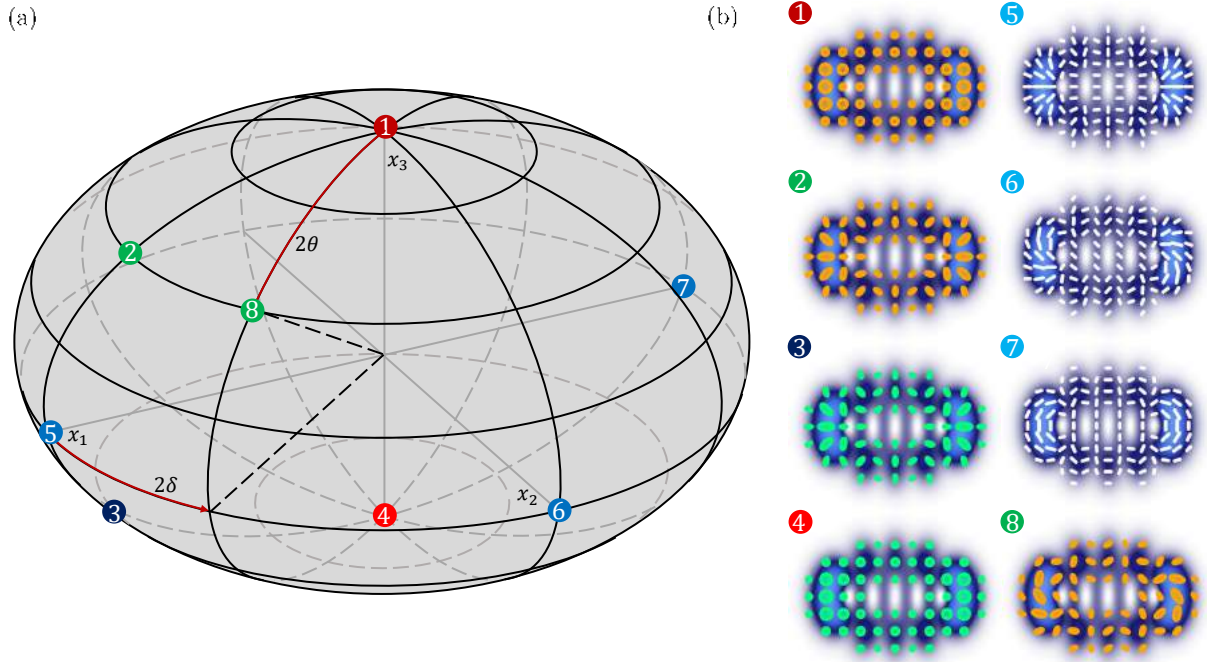


Figura 4.6: (a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon = 6$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0.44$, lo que corresponde a un elipsoide oblato. (b) MV $\text{HIG}_{5,5,6}$.

Cuando $2\theta = 0, \pi$, en el argumento de la raíz, la distancia r adquiere su valor mínimo en los polos del elipsoide, permitiendo ubicar a los MV en sus respectivas posiciones en los polos, es decir, cuando $2\theta = 0$ y $e \neq 0$, se ubican los modos escalares con PCD en el polo norte, mientras que si $2\theta = \pi$, se ubican los modos escalares con PCI en el polo sur. De aquí, se sigue el mismo procedimiento para ubicar los MV sobre la superficie elipsoidal como si se estuvieran ubicando en la HOPS, solo que ahora esta nueva representación geométrica arroja información sobre la geometría del modo. Dado lo anterior, para las coordenadas (θ, δ) , los modos escalares con PCD y PCI [puntos 1 $(0, 0)$ y 4 $(\pi/2, 0)$] se encuentran en los polos. A medida que el valor de θ cambia entre $(0, \pi/2)$, los MV van apareciendo, de tal manera que los MV completamente enredados con PL, estarán ubicados en el ecuador de la esfera en $2\theta = \pi/2$ [puntos 5 $(\pi/4, 0)$, 6 $(\pi/4, \pi/4)$ y 7 $(\pi/4, \pi/2)$], mientras que para los otros valores de θ se tendrán los MV con PE en los puntos [2 $(\pi/8, 0)$, 3 $(3\pi/8, 0)$ y 8 $(\pi/8, \pi/8)$]. Al cambiar el valor de δ entre $[0, \pi]$, la orientación de la polarización presente en el modo también cambiará, siendo radial en $2\delta = 0$ y azimutal en $2\delta = \pi$. En este caso y en los que siguen para valores de $e \neq 0$, los ejes no corresponderán a los parámetros de Stokes por las razones mencionadas con anterioridad.

4.2.3. Ejemplo 3: $\epsilon \rightarrow \infty$

En este último ejemplo, se tiene que $\epsilon \rightarrow \infty$ y $a = 1$, de tal manera que $e = 0.5$, lo que produce el elipsoide más excéntrico que se pueda obtener según la definición de e . Por otro lado, los MV se ubican bajo el mismo procedimiento detallado en los dos ejemplos anteriores. Los MV que se consiguen a partir de este valor de ϵ son los MV

HHG, los cuales se caracterizan porque el modo espacial tiene geometría «cuadrada». Dichos modos, de ahora en adelante podrán ser representados sobre una superficie, que nuevamente se aclara, es la más excéntrica según el valor de e y que de igual manera que en caso anterior, acopla información de los grados de libertad espacial y de polarización en su superficie. La Figura 4.7 muestra la forma de la superficie en la que de ahora en adelante podrán ser representados geoméricamente los MV **HHG**,

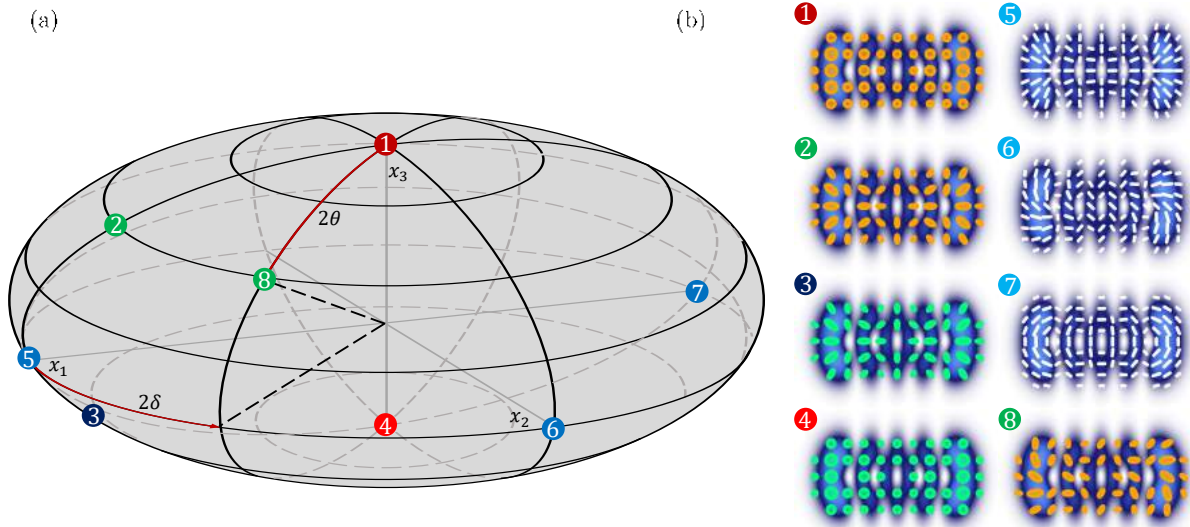


Figura 4.7: (a) Representación geométrica de MV. En este caso, dado que $\epsilon \rightarrow \infty$, la excentricidad del elipsoide es $e = 0.5$, lo que corresponde a un elipsoide oblató. (b) MV **HIG**_{5,5,∞}. Como se puede apreciar, estos modos se reducen a los modos **HHG**_{5,5,∞}

De manera similar al caso anterior, la ubicación de los MV se reduce a tener en cuenta las coordenadas angulares (θ, δ) . Así las cosas, cuando $2\theta = 0, \pi$ en el argumento de la raíz, la distancia r adquiere su valor mínimo, de tal manera que se sigue el mismo procedimiento para ubicar los MV sobre la superficie elipsoidal, esto es, los modos escalares con PCD y PCI [puntos 1 $(0, 0)$ y 4 $(\pi/2, 0)$] se encuentran en los polos. A medida que el valor de θ cambia entre $(0, \pi/2)$, los MV van apareciendo, de tal manera que los MV completamente enredados con PL, estarán ubicados en el ecuador de la esfera en $2\theta = \pi/2$ [puntos 5 $(\pi/4, 0)$, 6 $(\pi/4, \pi/4)$ y 7 $(\pi/4, \pi/2)$], mientras que para los otros valores de θ se tendrán los MV con PE en los puntos [2 $(\pi/8, 0)$, 3 $(3\pi/8, 0)$ y 8 $(\pi/8, \pi/8)$]. Al cambiar el valor de δ entre $[0, \pi]$, la orientación de la polarización presente en el modo también cambiará, siendo radial en $2\delta = 0$ y azimutal en $2\delta = \pi$.

Este capítulo dejó ver la utilidad y gran versatilidad que la representación geométrica generalizada de los MV con geometría elíptica, en este caso, los **HIG** ofrece, pues al adaptar el parámetro de elipticidad, característico de los modos *IG*, es posible «visualizar» a través de la forma de la superficie de la representación geométrica la elipticidad del modo, de tal manera que permite acceder de una manera más intuitiva a la información aproximada del modo vectorial en cuestión en los grados de libertad espacial y de polarización, cosa que no es dada por otra representación geométrica registrada hasta ahora. Un aspecto importante a tener en cuenta, es que los ejes de esta nueva

representación, a diferencia de los ejes de la HOPS, no representan los parámetros de Stokes de orden superior, pues la deformación del eje x_3 afecta la «cálculo» teórico de los mismos y no da posibilidad a que dichos ejes representen los parámetros de Stokes.

Finalmente, el *elipsoide de orden superior para los MV con geometría elíptica* representa a su vez, junto con las demás representaciones discutidas en este trabajo de grado, una herramienta útil para la enseñanza y el aprendizaje del comportamiento de MV de luz bajo ciertas condiciones de generación, pues como se pudo apreciar, cada una de las representaciones ofrece información relativa a la naturaleza de la luz en sus grados de polarización espacial y de polarización.

Capítulo 5

Generación Experimental de Modos Vectoriales HIG

Los MV que fueron descritos con anterioridad de manera formal, pueden ser generados por medio de diferentes tipos de arreglos experimentales y configuraciones de elementos ópticos, siendo los *moduladores espaciales de luz (SLM's*, por sus siglas en inglés) [17, 19], *Dispositivos Digitales de Microespejos* [20, 85] y las *q-plates* [21, 86], entre otros, los elementos más destacados de dichos arreglos. A continuación, se muestra la generación experimental de los MV **HIG** haciendo uso de un arreglo que dispone de un *SLM* de transmisión para generar hologramas digitales y un interferómetro de Sagnac por medio del cual lo logra la superposición de los modos que dan cabida a los MV **HIG**.

5.1. Montaje Experimental

La generación de los modos vectoriales **HIG** se llevo a cabo por medio del arreglo esquematizado en la Figura 5.1. Para generar MV, se utilizó un láser semiconductor de $\lambda = 532$ nm, el cual emite luz con polarización elíptica; seguido, el haz se expandió a través de un objetivo de microscopio con un aumento de $\times 10$ acoplado a un estenopo, para luego ser colimado por una lente L_1 con una longitud focal de $f_1 = 250$ mm, y conseguir así un frente de onda aproximadamente plano. A continuación, el haz colimado pasó por un *SLM de transmisión* (HOLOEYE, LC 2012 con una resolución de 1024×768 píxeles, y calibrado para un desfase de $9\pi/5$ a $\lambda = 532$ nm). Originalmente el *SLM* está configurado de tal forma que el display (superficie activa del *SLM*) es dividido en dos partes. Ahora bien, en cada división se desplegó un holograma digital con la información de amplitud y fase de los modos *IG*, el cual fue generado por medio de un código especial en *MatLab* y configurado mediante la técnica de modulación compleja de amplitud [87, 88] en el primer orden de difracción [89]. Ahora bien, los modos modulados se direccionaron hacia el primer orden de difracción, tras pasar por una lente L_2 de $f_2 = 150$ mm que enfocaba ambos haces en el plano de Fourier donde fueron aislados del ruido contiguo por medio de un filtro espacial (FE). Ambos modos filtrados, pasaron después por un polarizador lineal (PL) orientado a 0° y seguido por una placa retardadora de fase en $\lambda/2$ ($P(\lambda/2)$) a $22,5^\circ$ donde se cambio su estado de polarización de lineal horizontal a lineal diagonal, para después ser colimados de nuevo

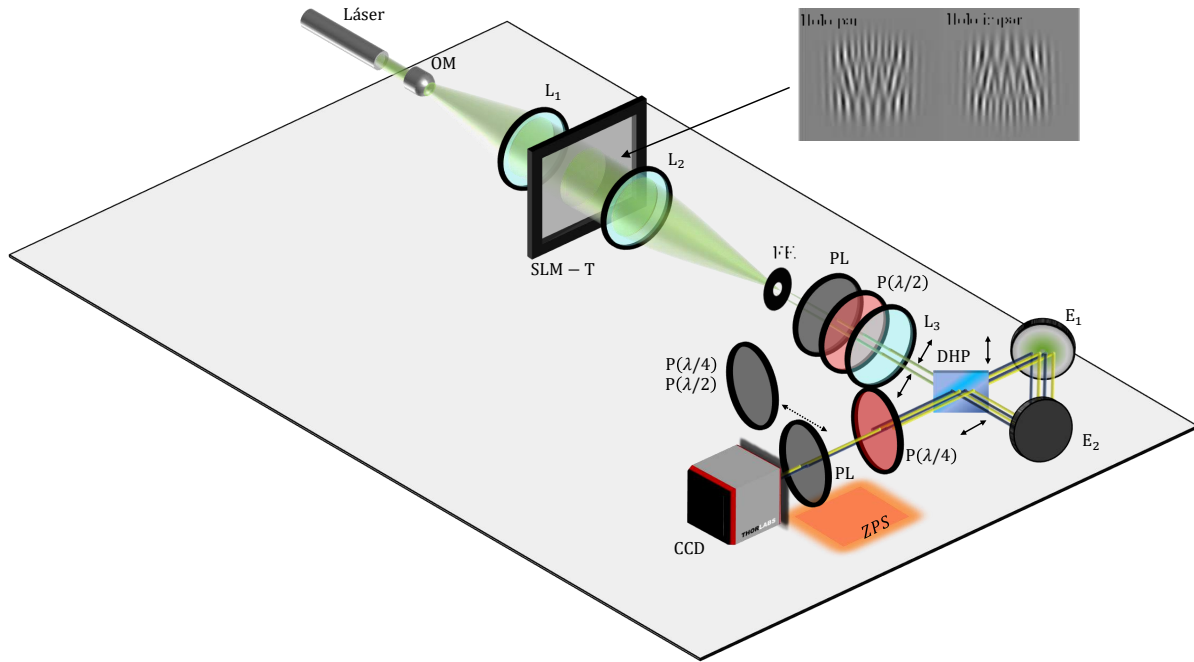


Figura 5.1: Arreglo experimental empleado en la generación y caracterización de MV, donde, OM: objetivo de microscopio; L_i , $i = 1, 2, 3$: lente; SLM - T: modulador espacial de luz de transmisión; FE: filtro espacial; PL: polarizador lineal; $P(\lambda/2)$: placa retardadora de fase $\lambda/2$; DHP: divisor de haz polarizado; E_i , $i = 1, 2$: espejo; $P(\lambda/4)$: placa retardadora de fase $\lambda/4$; CCD: dispositivo de carga acoplada; ZPS: zona de polarimetría de Stokes, la doble flecha punteada indica que las placas son elementos adicionales que son usados en el momento de tomar las medidas de intensidad. Cada doble flecha continua indica el sentido de oscilación del campo eléctrico.

por una lente L_3 de $f_3 = 175$ mm. En el interferómetro de Sagnac, ambos modos pasaron por un divisor de haz polarizado (DHP) donde se transmitieron las componentes de polarización horizontal y se reflejaron las componentes de polarización vertical, de tal forma que a la salida del interferómetro los dos modos centrales con estados de polarización ortogonal se superpusieron para después pasar por una placa retardadora de fase en $\lambda/4$ ($P(\lambda/4)$) a 45° respecto del eje rápido que cambio las componentes de PLH a PCD y la PLV a PCI. Finalmente, por medio de una cámara (CCD) conectada a un PC se pudieron verificar los detalles de alineación y de distribución de intensidad. Para saber si los modos generados eran vectoriales, se prosiguió a colocar un polarizador lineal (PL) entre la CCD y la $P(\lambda/4)$ con el fin de obtener el patrón de intensidad característico de los MV tal y como se muestra en la Figura 5.2.

5.2. Medición de Intensidad y Parámetros de Stokes

El objetivo último a la hora de generar los MV y caracterizarlos, es lograr reconstruir la polarización que deberían tener según la teoría. Ahora bien, como en todo proceso experimental lo anterior no todas las veces es posible de conseguir al cien por ciento debido a los diferentes factores externos que juegan un papel importante durante el

proceso de toma de datos y que pueden afectar los resultados finales. Dado lo anterior, lo primero que se debe verificar a la hora de generar MV es constatar que efectivamente lo sean, lo anterior, a partir de la distribución de intensidad que los caracteriza. En este caso, y sin pérdida de generalidad sólo se muestra evidencia de los modos $\mathbf{HIG}_{6,4;\epsilon}^{h+}$ para diferentes ϵ . Así, los patrones obtenidos experimentalmente pueden ser apreciados a continuación.

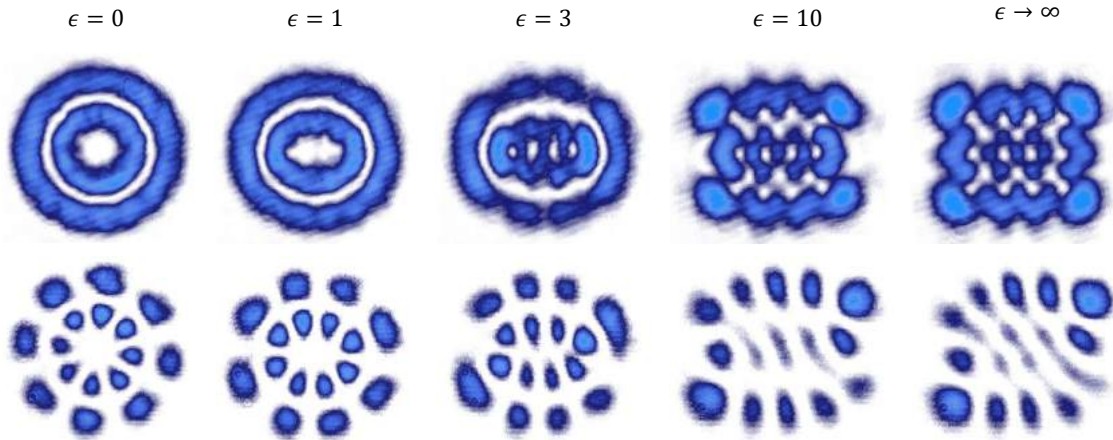


Figura 5.2: MV $\mathbf{HIG}_{6,4;\epsilon}$ generados experimentalmente. Primera fila distribución de intensidad sin polarizador lineal frente a la CCD, segunda fila con polarizador lineal frente a la CCD.

La Figura 5.2 muestra en la primera fila la distribución de intensidad de los MV \mathbf{HIG} para diferentes valores de ϵ cuando estos no pasan a través del polarizador lineal frente a la CCD, mientras que la segunda fila muestra la distribución de la intensidad de los MV \mathbf{HIG} cuando estos pasan a través del polarizador lineal antes de la CCD. Tales imágenes son de gran utilidad a la hora de verificar si los modos son o no vectoriales. Lo anterior, debido al patrón o la distribución de intensidad que se consigue cuando el haz pasa a través de un polarizador lineal, pues la simetría de las zonas iluminadas es un indicativo experimental de carácter cualitativo de la distribución de la polarización en el modos según los demás parámetros configurados en el holograma digital. Por ejemplo, en la primera imagen en la segunda fila, se evidencia un patrón de «pétalos o lóbulos» característico de los MV \mathbf{HIG} , en el que las zonas no iluminadas podrían ser cualquier tipo de PL que es bloqueada por el polarizador lineal; lo relevante acá, es que la proporción de la zonas iluminadas es la misma en todo el modo, por lo que se podría pensar que hay una buena alineación del arreglo experimental y que los modos se superponen de tal manera que se genera un haz vectorial. Esto, como se mencionó con anterioridad, es solo un indicativo, o guía, pues la única manera de saber si el haz es o no vectorial es realizando la reconstrucción de la polarización del mismo, proceso que se detallará brevemente a continuación.

Para analizar la configuración de polarización del haz resultante, fue necesario realizar cuatro medidas de intensidad del haz, correspondientes a los parámetros de Stokes según la *polarimetría de Stokes* [45]. Este proceso exige hacer uso de un elemento óptico adicional, el cual es una placa retardadora de fase $\lambda/2$ o $\lambda/4$ según se requiera, y que debe ir entre P($\lambda/4$) y el PL en el arreglo experimental. Para la toma de datos se rea-

lizaron cuatro medidas de intensidad con PLH, PLD, PCD y PCI. Lo anterior, cuando el haz vectorial pasaba a través del elemento adicional ($\lambda/2$, polarización horizontal y diagonal) y $\lambda/4$, polarización circular derecha e izquierda). Formalmente, las mediciones de intensidad se relacionan con los parámetros de Stokes a partir de,

$$S_0 = I_D + I_I, \quad (5.1a)$$

$$S_1 = 2I_H - (I_D + I_I), \quad (5.1b)$$

$$S_2 = 2I_{LD} - (I_D + I_I), \quad (5.1c)$$

$$S_3 = I_D - I_I, \quad (5.1d)$$

donde I_D , I_I , I_H e I_{LD} son las intensidades del haz con PCD, PCI, PLH y PLD respectivamente. El proceso llevado a cabo para realizar las medidas es el mismo para cada uno de los parámetros de Stokes, por lo que se detallará para una única medida sin pérdida de generalidad. Dado lo anterior, cuando el haz vectorial sale de la $P(\lambda/4)$ después del interferómetro, se coloca la placa, por ejemplo $P(\lambda/2)$, a 0° para cambiar la polarización circular (PC) del haz resultante en PLH que finalmente pasa por un polarizador lineal a 0° y permite realizar la medida de intensidad tomando una foto de lo que se muestra en la pantalla del software de la CCD. En el caso de la medida de intensidad con PLD, se hace lo mismo, pero esta vez la $P(\lambda/2)$ se coloca a $22,5^\circ$; lo mismo para las otras dos medidas con la $P(\lambda/4)$ a 45° para luz con PCD y $P(\lambda/4)$ a -45° para luz con PCI. Una comparación entre las medidas de intensidad esperadas (simuladas) y las reales puede ser apreciada en la Figura 5.3.

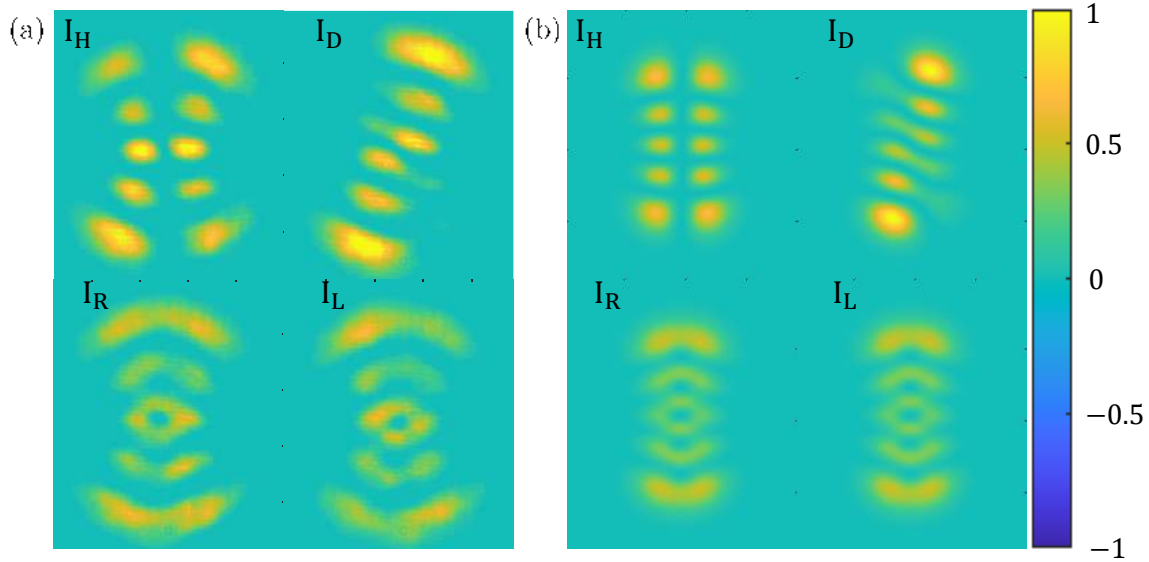


Figura 5.3: Comparación de medidas de intensidad reales (a) con las simuladas (b) de un modo vectorial $HIG_{1,5;12}$. I_H : intensidad con PLH; I_D : intensidad con PLD; I_R : intensidad con PCD; I_I : intensidad con PCI.

El siguiente paso, es procesar las imágenes por medio de un código especial generado en MatLab, el cual se encarga de «reconstruir» la polarización del haz para luego mostrarla superpuesta a la imagen de intensidad correspondiente al haz generado. *Grosso modo*, el método usado para la reconstrucción es el llamado método tradicional

[90], el cual consiste en que las cuatro medidas de intensidad que se toman se relacionan con los parámetros de Stokes 5.1.

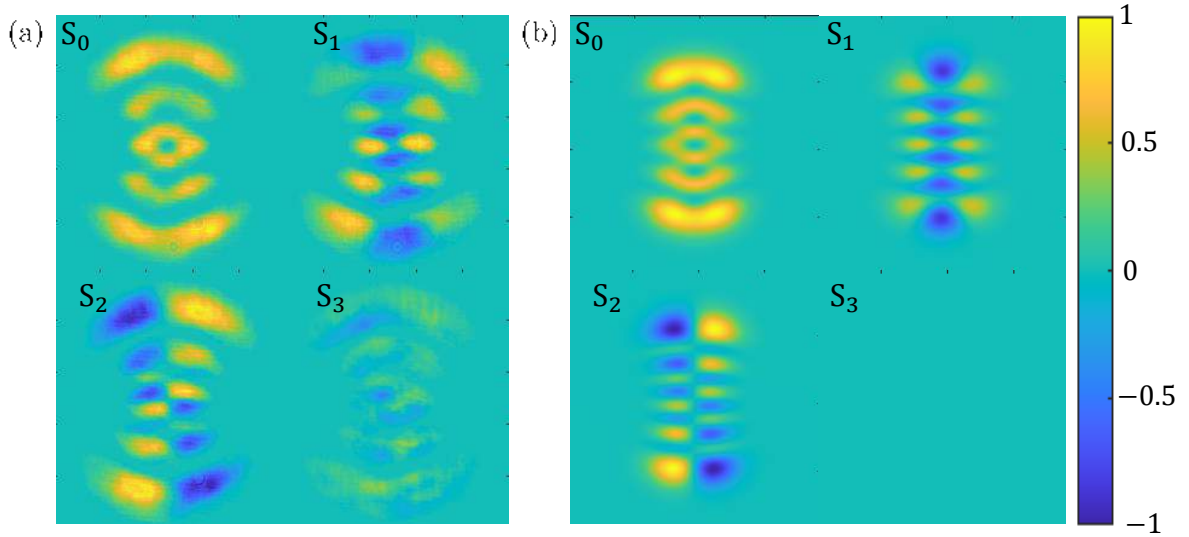


Figura 5.4: Comparación de medidas de los parámetros de Stokes reales (a) con los simulados (b) de un modo vectorial **HIG**_{1,5;12}.

Dado lo anterior, se calcula la elipse de polarización en cada punto sobre el plano de intensidad del haz a partir de las relaciones,

$$E_{0x} = \sqrt{\frac{1}{2}(S_0 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2})},$$

$$E_{0y} = \sqrt{\frac{1}{2}(S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2})},$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{S_2}{S_1}\right),$$

donde E_{0x} y E_{0y} son el semi-eje mayor y menor de la elipse respectivamente, mientras que Ψ es el ángulo de orientación de la misma (ver Figura 2.7).

Algunos resultados experimentales obtenidos de los MV **HIG**_{5,3;ε} con la respectiva reconstrucción de la polarización se pueden apreciar a continuación:

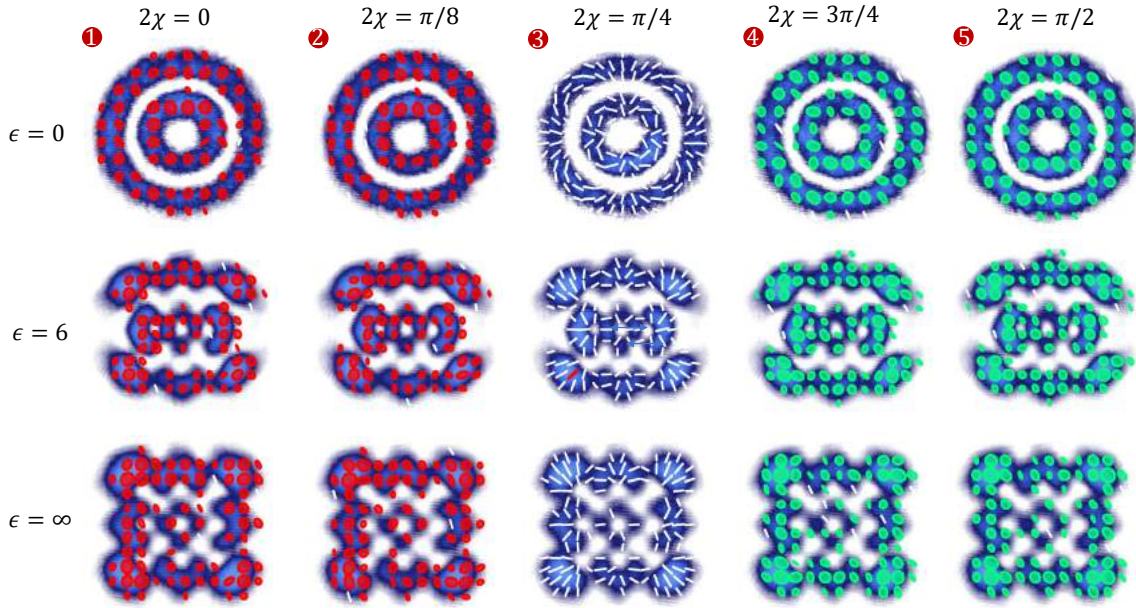


Figura 5.5: Resultados experimentales de MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^h$. En este caso cambiaron los valores de ϵ y θ , mientras que siempre $\delta = 0$.

La Figura 5.5 muestra los resultados experimentales de la reconstrucción de la polarización de los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;\epsilon}^{h+}$. En este caso, se consideraron tres valores de $\epsilon = 0, 6, \infty$ y cinco valores de $2\theta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$, con $2\delta = 0$. Cabe recordar, que el parámetro 2θ está asociado al factor de peso en el haz vectorial, mientras que 2δ está asociado a la orientación de los estados de polarización en el haz. Ahora bien, la primera fila de la Figura, deja ver los MV con $\epsilon = 0$, esto es, modos *HLG*, en el que los modos 1 y 5 son escalares, siendo PCD la polarización presentes en 1 y PCI la polarización presente en 5; por otro lado, aunque se evidencien otros estados de polarización diferentes a PC, la generación de dichos modos, hace referencia a modos escalares. Los haces 2 y 4, son haces vectoriales que presentan estados de polarización elípticos orientados en diferentes direcciones, siendo PED la polarización presente en 2 y PEI la polarización presente en 4. Finalmente, el modo 3 es una haz vectorial puro y presenta estados de polarización lineal con distribución radial. Un aspecto importante a tener en cuenta relativo al proceso de generación de los haces vectoriales, es la inestabilidad del arreglo, lo que puede ser traducido en variaciones de la fase intramodal, pues ya que los haces no recorren el mismo camino realmente al atravesar el interferómetro, se generan diferencias de fase, también variaciones en aspectos ambientales, flujos de aire, mala colocación de los elementos ópticos, mal filtrado de los haces, etc., que afectan las mediciones intensidad, lo que da cabida a que aparezcan estados de polarización «intrusos» o no deseados.

La Figura 5.6 muestra los MV $\mathbf{HIG}_{5,3;6}^{h+}$ etiquetados de 1 a 7 en las coordenadas $(\theta, \delta) = (0, 0), (\pi/8, 0), (\pi/4, 0), (3\pi/8, 0), (\pi/2, 0), (\pi/4, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/2)$, respectivamente, representados sobre una superficie elipsoidal.

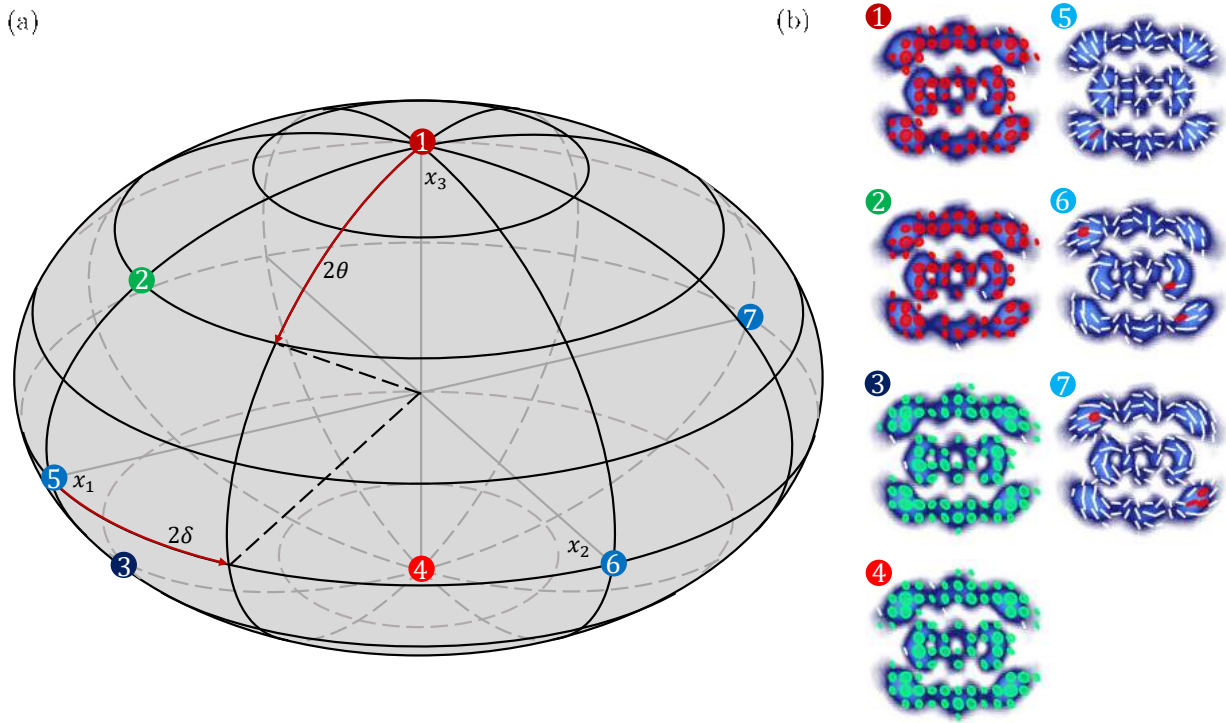


Figura 5.6: (a) Representación geométrica de los MV sobre el elipsoide de orden superior. (b) MV $\mathbf{HIG}_{5,3,6}^{h+}$ generador experimentalmente.

De lo anterior, se puede apreciar que la representación geométrica de los MV **HIG** sobre una superficie elipsoidal se sobrepone a la tradicional *HOPS*, pues como se mencionó con anterioridad, esta nueva representación acopla al parámetro ϵ característico de los modos *IG* a la geometría del elipsoide con los mismos beneficios de la *HOPS* además de la visualización del cambio de elipticidad de los modos sobre el elipsoide, cosa que no se tiene con la *HOPS*, de tal manera que se consigue una representación transitiva en términos geométricos dependiente del parámetro ϵ similar a la que se consigue entre los modos *LG*, *IG* y *HG* mencionada en la sección 2.3.6.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de grado se han discutido los aspectos generales de la luz estructurada, prestando importante atención a los grados de libertad espacial y de polarización que al ser combinados forman modos vectoriales.

Por otro lado, se discutieron las diferentes formas de representar dichos grados de libertad, desde las formas más básicas y primitivas, hasta las representaciones geométricas menos conocidas que intentan mostrar la mayoría de los grados de libertad de los que goza la luz.

En cuanto al objetivo planeado en este trabajo de grado, se dio a conocer una nueva propuesta que permite representar modos vectoriales con geometría elíptica sobre una superficie no-esférica, la cual, a su vez conserva la información de los grados de libertad que caracterizan a los modos vectoriales, esto es, el grado de libertad espacial y de polarización. Dicha nueva representación, muestra que a medida que cambia el parámetro de elipticidad ϵ característico de los modos IG , la superficie elipsoidal que representa los modos vectoriales también cambia, esto es, se achata en los polos cada vez que ϵ crece, acoplándose a la geometría del modo resultante, lo que supone un vínculo directo entre la geometría de los modos y la superficie en la que se representan.

Aunque los ejes coordenados de la nueva representación geométrica de los modos vectoriales **HIG** no hacen referencia a los parámetros de Stokes de orden superior, se cumple la función de esta a la hora de representar de manera completa los modos vectoriales en su modo espacial y de polarización, por lo tanto puede ser acogida como una forma de representar geoméricamente dichos modos vectoriales, además de las otras representaciones aún vigentes. En este sentido, la relevancia de esta nueva representación se deja ver en varios contextos, a saber:

- I. La nueva representación permite acceder de manera precisa al modo espacial (junto con su distribución de polarización) en cuestión en función de la excentricidad de la representación, lo que agiliza el proceso de identificación y caracterización de los modos vectoriales con geometría elíptica.
- II. Funciona como herramienta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de los modos vectoriales para estudiantes e investigadores que apenas se estén familiarizando con este tema, ya que a través de esta representación se puede compren-

der de manera más precisa la relación entre los modos vectoriales **HLG** – **HIG** – **HHG**, pues la deformación del elipsoide se puede interpretar de manera análoga a la de los modos.

- III. Deja de lado la representación tradicional de modos vectoriales sobre superficies esféricas, para dar paso a una representación sobre una superficie más general, permitiendo acceder a información de los modos por medio de la forma de la superficie.

Además de la nueva propuesta presentada, se construyó un arreglo experimental que implementó un SLM de transmisión y un interferómetro de Sagnac. Dicho arreglo, permitió generar eficazmente, los modos vectoriales Ince-Gauss helicoidales, cuya calidad estuvo limitada por la naturaleza intrínseca de los elementos ópticos y de la técnica de modulación empleada, además de las perturbaciones externas inducidas en el medio de propagación del haz. Finalmente los modos generados experimentalmente, fueron representados sobre el elipsoide de orden superior (Figura 5.6) propuesto en este trabajo de grado.

Cabe recalcar la posibilidad de modificar o crear y diseñar, con el fin de hacer más generales, nuevas formas geométricas de representar los grados de libertad de la luz, lo anterior prestando atención a la importancia de mantener el significado físico de lo que se quiere representar sobre dicha superficie aprovechando los beneficios de las herramientas geométricas de las que se dispone, lo que sugiere que se puede seguir trabajando a futuro en lograr una representación de los modos vectoriales *IG* más general aún, que en este caso, permita coexistir a todos los modos vectoriales con diferentes valores de elipticidad en una única superficie.

Bibliografía

- [1] Zhi-Cheng Ren, Ling-Jun Kong, Si-Min Li, Sheng-Xia Qian, Yongnan Li, Chenghou Tu, and Hui-Tian Wang. Generalized poincaré sphere. *Optics express*, 23(20):26586–26595, 2015.
- [2] Jia-Hao Zhao, Yue Pan, Xu-Zhen Gao, Rende Ma, Zhong-Xiao Man, Zhi-Cheng Ren, Chenghou Tu, Yongnan Li, and Hui-Tian Wang. Five-dimensional poincaré sphere system for representing azimuthally varying vector optical fields. *Physical Review A*, 106(2):023506, 2022.
- [3] Andrew Forbes. *Laser beam propagation: generation and propagation of customized light*. CRC Press, 2014.
- [4] Oleg V Angelsky, Aleksandr Y Bekshaev, Steen G Hanson, Claudia Yu Zenkova, Igor I Mokhun, and Zheng Jun. Structured light: ideas and concepts. *Frontiers in Physics*, 8:114, 2020.
- [5] Halina Rubinsztein-Dunlop, Andrew Forbes, Michael V Berry, Mark R Dennis, David L Andrews, Masud Mansuripur, Cornelia Denz, Christina Alpmann, Peter Banzer, Thomas Bauer, et al. Roadmap on structured light. *Journal of Optics*, 19(1):013001, 2016.
- [6] KY Bliokh, E Karimi, MJ Padgett, MA Alonso, MR Dennis, A Dudley, A Forbes, S Zahedpour, SW Hancock, HM Milchberg, et al. Roadmap on structured waves. *arXiv preprint arXiv:2301.05349*, 2023.
- [7] Valentina Parigi, Vincenzo D'Ambrosio, Christophe Arnold, Lorenzo Marrucci, Fabio Sciarrino, and Julien Laurat. Storage and retrieval of vector beams of light in a multiple-degree-of-freedom quantum memory. *Nature communications*, 6(1):7706, 2015.
- [8] E Otte and C Denz. Optical trapping gets structure: Structured light for advanced optical manipulation. *Applied Physics Reviews*, 7(4):041308, 2020.
- [9] Isaac Nape, Bereneice Sephton, Pedro Ornelas, Chane Moodley, and Andrew Forbes. Quantum structured light in high dimensions. *APL Photonics*, 8(5), 2023.

- [10] Kathleen S Youngworth and Thomas G Brown. Inhomogenous polarization in scanning optical microscopy. In *Three-Dimensional and Multidimensional Microscopy: Image Acquisition Processing VII*, volume 3919, pages 75–85. SPIE, 2000.
- [11] Carmelo Rosales-Guzmán, Bienvenu Ndagano, and Andrew Forbes. A review of complex vector light fields and their applications. *Journal of Optics*, 20(12):123001, 2018.
- [12] Uri Levy, Stanislav Derevyanko, and Yaron Silberberg. Light modes of free space. In *Progress in Optics*, volume 61, pages 237–281. Elsevier, 2016.
- [13] Carlo Amadeo Alonzo, Peter John Rodrigo, and Jesper Glückstad. Helico-conical optical beams: a product of helical and conical phase fronts. *Optics express*, 13(5):1749–1760, 2005.
- [14] Edgar Medina-Segura, Leonardo Miranda-Culin, Valeria Rodríguez-Fajardo, Benjamin Perez-Garcia, and Carmelo Rosales-Guzmán. Vectorial helico-conical beams. *arXiv preprint arXiv:2306.13849*, 2023.
- [15] Xiao-Bo Hu and Carmelo Rosales-Guzmán. Generation and characterization of complex vector modes with digital micromirror devices: a tutorial. *Journal of Optics*, 24(3):034001, 2022.
- [16] Steve C Tidwell, Dennis H Ford, and Wayne D Kimura. Generating radially polarized beams interferometrically. *Applied Optics*, 29(15):2234–2239, 1990.
- [17] Xi-Lin Wang, Jianping Ding, Wei-Jiang Ni, Cheng-Shan Guo, and Hui-Tian Wang. Generation of arbitrary vector beams with a spatial light modulator and a common path interferometric arrangement. *Optics letters*, 32(24):3549–3551, 2007.
- [18] Praveen Kumar, A Srinivasa Rao, and Takashige Omatsu. Generation of v-point polarization singularity using single phase encoding with a spatial light modulator. *Scientific Reports*, 13(1):315, 2023.
- [19] Carmelo Rosales-Guzmán, Nkosiphile Bhebhe, and Andrew Forbes. Simultaneous generation of multiple vector beams on a single slm. *Optics express*, 25(21):25697–25706, 2017.
- [20] Benjamin Perez-Garcia, Francisco I Mecillas-Hernández, and Carmelo Rosales-Guzmán. Highly-stable generation of vector beams through a common-path interferometer and a dmd. *Journal of Optics*, 24(7):074007, 2022.
- [21] Weixing Shu, Xiaohui Ling, Xiquan Fu, Yachao Liu, Yougang Ke, and Hailu Luo. Polarization evolution of vector beams generated by q-plates. *Photonics Research*, 5(2):64–72, 2017.
- [22] Giovanni Milione, HI Sztul, DA Nolan, and RR Alfano. Higher-order poincaré sphere, stokes parameters, and the angular momentum of light. *Physical review letters*, 107(5):053601, 2011.

- [23] Annemarie Holleczeck, Andrea Aiello, Christian Gabriel, Christoph Marquardt, and Gerd Leuchs. Poincaré sphere representation for classical inseparable bell-like states of the electromagnetic field. *arXiv preprint arXiv:1007.2528*, 2010.
- [24] Yuanjie Yang, Yu-Xuan Ren, Mingzhou Chen, Yoshihiko Arita, and Carmelo Rosales-Guzmán. Optical trapping with structured light: a review. *Advanced Photonics*, 3(3):034001–034001, 2021.
- [25] Giovanni Milione, Thien An Nguyen, Jonathan Leach, Daniel A Nolan, and Robert R Alfano. Using the nonseparability of vector beams to encode information for optical communication. *Optics letters*, 40(21):4887–4890, 2015.
- [26] Ziyi Zhu, Molly Janasik, Alexander Fyffe, Darrick Hay, Yiyu Zhou, Brian Kantor, Taylor Winder, Robert W Boyd, Gerd Leuchs, and Zhimin Shi. Compensation-free high-capacity free-space optical communication using turbulence-resilient vector beams. *arXiv preprint arXiv:1910.05406*, 2019.
- [27] Min Liu, Yunze Lei, Lan Yu, Xiang Fang, Ying Ma, Lixin Liu, Juanjuan Zheng, and Peng Gao. Super-resolution optical microscopy using cylindrical vector beams. *Nanophotonics*, 2022.
- [28] Vanessa Chille, Stefan Berg-Johansen, Marion Semmler, Peter Banzer, Andrea Aiello, Gerd Leuchs, and Christoph Marquardt. Experimental generation of amplitude squeezed vector beams. *Optics Express*, 24(11):12385–12394, 2016.
- [29] Marion Semmler, Stefan Berg-Johansen, Vanessa Chille, Christian Gabriel, Peter Banzer, Andrea Aiello, Christoph Marquardt, and Gerd Leuchs. Single-mode squeezing in arbitrary spatial modes. *Optics Express*, 24(7):7633–7642, 2016.
- [30] Weixing Shu, Xiaohui Ling, Xiquan Fu, Yachao Liu, Yougang Ke, and Hailu Luo. Polarization evolution of vector beams generated by q-plates. *Photonics Research*, 5(2):64–72, 2017.
- [31] ShuXia Qi, Sheng Liu, Lei Han, BingYan Wei, Peng Li, JinZhan Zhong, XuYue Guo, and JianLin Zhao. Dynamically measuring the holo-information of light fields in three-dimensional space using a periodic polarization-structured light. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 64(6):264211, 2021.
- [32] Yibo Ni, Sai Chen, Yujie Wang, Qiaofeng Tan, Shumin Xiao, and Yuanmu Yang. Metasurface for structured light projection over 120 field of view. *Nano Letters*, 20(9):6719–6724, 2020.
- [33] Bahaa EA Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019.
- [34] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2005.
- [35] David L Andrews and Mohamed Babiker. *The angular momentum of light*. Cambridge University Press, 2012.

- [36] Anthony E Siegman. *Lasers*. University science books, 1986.
- [37] David S Simon. *A guided tour of light beams: From lasers to optical knots*. IOP Publishing, 2020.
- [38] Miguel A Bandres and Julio C Gutiérrez-Vega. Ince–gaussian beams. *Optics letters*, 29(2):144–146, 2004.
- [39] John Weiner, Ping-Tong Ho, and Kay C Dee. *Light-matter interaction: fundamentals and applications*, volume 1. Wiley Online Library, 2003.
- [40] Mohamed Fadhali. *Advanced Photonic Sciences*. BoD–Books on Demand, 2012.
- [41] Mario Krenn. *Investigation of complex spatial mode structures of photons*. PhD thesis, 2012.
- [42] Joel B Bentley, Jeffrey A Davis, Miguel A Bandres, and Julio C Gutiérrez-Vega. Generation of helical ince-gaussian beams with a liquid-crystal display. *Optics letters*, 31(5):649–651, 2006.
- [43] Sumit Kumar Singh, Honoka Haginaka, Boaz Jessie Jackin, Kenji Kinashi, Naoto Tsutsumi, and Wataru Sakai. Generation of ince–gaussian beams using azocarbazole polymer cgh. *Journal of Imaging*, 8(5):144, 2022.
- [44] Carlos López-Mariscal and Julio C Gutiérrez-Vega. Propagation dynamics of helical hermite-gaussian beams. In *Laser Beam Shaping VIII*, volume 6663, pages 55–62. SPIE, 2007.
- [45] Dennis H Goldstein. *Polarized light*. CRC press, 2017.
- [46] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [47] Edward Collett and Beth Schaefer. Visualization and calculation of polarized light. i. the polarization ellipse, the poincaré sphere and the hybrid polarization sphere. *Applied optics*, 47(22):4009–4016, 2008.
- [48] HG Jekrard. Transmission of light through birefringent and optically active media: the poincaré sphere. *JOSA*, 44(8):634–640, 1954.
- [49] Russell A Chipman, Wai Sze Tiffany Lam, and Garam Young. *Polarized light and optical systems*. CRC press, 2018.
- [50] Qiwen Zhan. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Advances in Optics and Photonics*, 1(1):1–57, 2009.
- [51] G Milione and RR Alfano. Cylindrical vector beam transformations and hybrid vector beams. In *Frontiers in Optics*, page FWC4. Optica Publishing Group, 2010.
- [52] Thomas Konrad and Andrew Forbes. Quantum mechanics and classical light. *Contemporary Physics*, 60(1):1–22, 2019.

- [53] Andrew Forbes, Andrea Aiello, and Bienvenu Ndagano. Classically entangled light. In *Progress in Optics*, volume 64, pages 99–153. Elsevier, 2019.
- [54] Annemarie Holleczek, Andrea Aiello, Christian Gabriel, Christoph Marquardt, and Gerd Leuchs. Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light. *Optics express*, 19(10):9714–9736, 2011.
- [55] Zhe Sun, Jiming Wang, Zhuang Li, Tong Wu, Yannan Yang, Youwen Liu, and Yuan-gang Lu. Stable propagation of incoherent gaussian vector beams through atmospheric turbulence. *Optics Communications*, 515:128193, 2022.
- [56] Rui Chen, Krishna Agarwal, Colin JR Sheppard, and Xudong Chen. Imaging using cylindrical vector beams in a high-numerical-aperture microscopy system. *Optics letters*, 38(16):3111–3114, 2013.
- [57] Liang Fang, Zhenyu Wan, Andrew Forbes, and Jian Wang. Vectorial doppler metrology. *Nature Communications*, 12(1):4186, 2021.
- [58] Rocio Camacho-Morales, Mohsen Rahmani, Sergey Kruk, Lei Wang, Lei Xu, Daria A Smirnova, Alexander S Solntsev, Andrey Miroshnichenko, Hark Hoe Tan, Fouad Karouta, et al. Nonlinear generation of vector beams from algaas nano-antennas. *Nano letters*, 16(11):7191–7197, 2016.
- [59] Sunil Vyas, Yuichi Kozawa, and Shunichi Sato. Polarization singularities in superposition of vector beams. *Optics Express*, 21(7):8972–8986, 2013.
- [60] R. M. A Azzam and N. M. Bashara. *Ellipsometry and polarized light*. North-Holland Publishing Company, 1987.
- [61] RMA Azzam and NM Bashara. The effect of an optical system in the complex-plane and the poincaré-sphere representations. *Optics Communications*, 5(5):319–322, 1972.
- [62] John Warren Dettman. *Applied complex variables*. Courier Corporation, 1965.
- [63] John Henry Poynting. The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 82(557):560–567, 1909.
- [64] Yihua Bai, Haoran Lv, Xin Fu, and Yuanjie Yang. Vortex beam: generation and detection of orbital angular momentum. *Chinese Optics Letters*, 20(1):012601, 2022.
- [65] Richard A Beth. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Physical Review*, 50(2):115, 1936.
- [66] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw, and JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical review A*, 45(11):8185, 1992.
- [67] P Couillet, L Gil, and F Rocca. Optical vortices. *Optics Communications*, 73(5):403–408, 1989.

- [68] Isidoro Kimel and Luis R Elias. Relations between hermite and laguerre gaussian modes. *IEEE Journal of quantum electronics*, 29(9):2562–2567, 1993.
- [69] Mario Krenn, Mehul Malik, Manuel Erhard, and Anton Zeilinger. Orbital angular momentum of photons and the entanglement of laguerre–gaussian modes. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2087):20150442, 2017.
- [70] Miles J Padgett and Johannes Courtial. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics letters*, 24(7):430–432, 1999.
- [71] EJ Galvez, PR Crawford, HI Sztul, MJ Pysher, PJ Haglin, and RE Williams. Geometric phase associated with mode transformations of optical beams bearing orbital angular momentum. *Physical review letters*, 90(20):203901, 2003.
- [72] GB Malykin. Use of the poincaré sphere in polarization optics and classical and quantum mechanics. review. *Radiophysics and quantum electronics*, 40(3):175, 1997.
- [73] Alison M Yao and Miles J Padgett. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in optics and photonics*, 3(2):161–204, 2011.
- [74] Marco W Beijersbergen, Les Allen, HELO Van der Veen, and JP Woerdman. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*, 96(1-3):123–132, 1993.
- [75] Brian J Roxworthy and Kimani C Toussaint. Optical trapping with π -phase cylindrical vector beams. *New Journal of Physics*, 12(7):073012, 2010.
- [76] Xunong Yi, Yachao Liu, Xiaohui Ling, Xinxing Zhou, Yougang Ke, Hailu Luo, Shuangchun Wen, and Dianyuan Fan. Hybrid-order poincaré sphere. *Physical Review A*, 91(2):023801, 2015.
- [77] Xi-Lin Wang, Yongnan Li, Jing Chen, Cheng-Shan Guo, Jianping Ding, and Hui-Tian Wang. A new type of vector fields with hybrid states of polarization. *Optics Express*, 18(10):10786–10795, 2010.
- [78] Yijie Shen, Eduardo Casas Martínez, and Carmelo Rosales-Guzmán. Generation of optical skyrmions with tunable topological textures. *ACS Photonics*, 9(1):296–303, 2022.
- [79] Miguel A Alonso and Mark R Dennis. Ray-optical poincaré sphere for structured gaussian beams. *Optica*, 4(4):476–486, 2017.
- [80] Anthony Vella and Miguel A Alonso. Poincaré sphere representation for spatially varying birefringence. *Optics Letters*, 43(3):379–382, 2018.
- [81] R Gutiérrez-Cuevas, SA Wadood, AN Vamivakas, and MA Alonso. Modal majorana sphere and hidden symmetries of structured-gaussian beams. *Physical Review Letters*, 125(12):123903, 2020.

- [82] Yijie Shen, Zhaoyang Wang, Xing Fu, Darryl Naidoo, and Andrew Forbes. Su (2) poincaré sphere: A generalized representation for multidimensional structured light. *Physical Review A*, 102(3):031501, 2020.
- [83] Joaquín Ruiz Basto. Matemáticas iii. geometría analítica básica. 2006.
- [84] Narayan Panigrahi. *Computing in geographic information systems*. CRC Press, 2014.
- [85] Lei Gong, Yuxuan Ren, Weiwei Liu, Meng Wang, Mincheng Zhong, Ziqiang Wang, and Yinmei Li. Generation of cylindrically polarized vector vortex beams with digital micromirror device. *Journal of Applied Physics*, 116(18):183105, 2014.
- [86] Julio César Quiceno-Moreno, David Marco, María del Mar Sánchez-López, Efraín Solarte, and Ignacio Moreno. Analysis of hybrid vector beams generated with a detuned q-plate. *Applied Sciences*, 10(10):3427, 2020.
- [87] Victor Arrizón, Ulises Ruiz, Rosibel Carrada, and Luis A González. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. *JOSA A*, 24(11):3500–3507, 2007.
- [88] Bosanta R Boruah. Dynamic manipulation of a laser beam using a liquid crystal spatial light modulator. *American Journal of Physics*, 77(4):331–336, 2009.
- [89] Jeffrey A Davis, Don M Cottrell, Juan Campos, María J Yzuel, and Ignacio Moreno. Encoding amplitude information onto phase-only filters. *Applied optics*, 38(23):5004–5013, 1999.
- [90] Keshaan Singh, Najmeh Tabebordbar, Andrew Forbes, and Angela Dudley. Digital stokes polarimetry and its application to structured light: tutorial. *JOSA A*, 37(11):C33–C44, 2020.