



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---



Centro de Investigaciones en Optica, A. C.

**LAS AUTOIMAGENES DE TALBOT,  
TEORIA Y APLICACIONES**

Tesis que para obtener el grado de  
*Maestro en Ciencias (Optica)*

Presenta

**ING. DANIEL MALACARA DOBLADO**

León, Gto

Mayo 1995

**Centro de Investigaciones en Optica, A. C.**

**LAS AUTOIMAGENES DE TALBOT,  
TEORIA Y APLICACIONES**

Tesis que presenta: Daniel Malacara Doblado

como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Optica)

que otorga la Universidad de Guanajuato.

León, Gto.

Mayo de 1995

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) la beca que me proporcionó durante mis estudios de maestría.

Al Director del *Centro de Investigaciones en Óptica*, M. en C. Arquímedes Morales Romero por su gran ayuda y aliento.

Al Director de Formación Académica, el Fis. Xavier Garzón Cárdenas, y sus colaboradores, el Lic. Antonio Martínez y la Lic. Guillermina Muñiz por sus consejos, y apoyo tanto material como moral.

A todos mis maestros que tuve durante mi estancia en el CIO, Dr. Daniel Malacara Hernández, M. en C. Zacarías Malacara Hernández, M. en C. Ricardo Flores, Dra. Cristina Solano, Dr. Sergio Calixto, Dr. Martín Carpio, Dr. Bernardo Mendoza, Dr. Manuel Servín, Dr. Haiming Wang, Dr. Orestes Stavroudis, Dr. Ramón Rodríguez, Dr. Andrew Moore, Dr. Vicente Aboites, Dra. Sofía Acosta, Dr. Oracio Barbosa, Dr. Fernando Mendoza, Dr. Luis Zenteno, Jan Petter Isaksen por todos sus conocimientos que me supieron transmitir.

A mis sinodales Dr. Manuel Servín (CIO), Dr. Ramón Rodríguez (CIO) y Dr. Alejandro Cornejo (INAOE) por sus sugerencias y asesoría durante el desarrollo de la tesis.

Muy en especial a mi papá Dr. Daniel Malacara Hernández por todos sus consejos y por inculcarme al camino de la Óptica.

# DEDICATORIAS

A DIOS por el simplemente hecho de darme la vida. Porque aunque le llegué a fallar El nunca me falló.

A mi esposa Griselda Gutierrez de Malacara por su apoyo y por su confianza hacia mí. Porque juntos pasamos momentos difíciles y siempre me ayudaste con tu amor a levantarme cuando me caía. Porque ahora estamos los dos para salir adelante. Porque momentos que te correspondían, me los cediste para estudiar. Por tu paciencia.

A mi hija Carolina Malacara Gutierrez por enseñarme a tener espíritu de niño. Porque supo transmitirme su alegría.

A mi hijo(a) “Danielito” ó “Gris” que aunque todavía no nace, me está motivando a seguir adelante.

A mis papás Ma. Isabel Doblado de Malacara y Daniel Malacara Hernández, porque juntos supieron encaminarme al bien y por todos sus consejos. Porque en los momentos más difíciles siempre me impulsaron a seguir adelante. Porque nunca me dijeron “no” cuando les pedía ayuda. Gracias.

A mis hermanos Celia, y Migue por todo lo que me transmitieron con su cariño y apoyo moral.

A mi hermano Juan y su esposa Norma por su cariño y comprensión.

A mis abuelitas Chave y Celia por su continuo amor.

A mis abuelitos Chato y Miguelito que en paz descansen, por el amor que siempre recibí de ellos.

A todos mis tios Juan, Janis, Zacarías, Licha, Peya, Francis, Ricardo, Mayilla, Rafael, Marucha, Vicente, Rosa Maria, Alejandro, Rosi, Migue por sus consejos y aliento.

A mi suegra Camerina Gutiérrez y mi suegro Don Paco que en paz descansa, por su confianza en mí.

A mis cuñados y sus respectivos(as) esposas(os) Azul y Güero, Francisco y Norma, Ma. Eugenia y Poncho, Ricardo y Conchis, Marco y Paty por todo lo que he recibido de ellos.

A mis compañeros de generación y estudio, Jorge Luis Garcia, Juan Manuel Lopez, Bernardino Barrientos, Laura Ortega, y en general a todos mis compañeros de trabajo en este centro.

En general aquellos que me han brindado su apoyo y comprensión.

# INDICE

<b>Prefacio</b>	iv
<b>1. Las Autoimágenes de Talbot</b>	1
1.1 Introducción Histórica	1
1.2 Principales Teorías para la formación de Autoimágenes	3
1.2.1 Teoría Escalar de la Difracción	4
1.2.2 Principio de Huygens-Fresnel	15
1.2.3 Suma del Espectro de Ondas Planas	16
1.2.4 Interpretación Holográfica	29
1.3 Resolución de las Autoimágenes	31
1.4 Autoimágenes con Luz Incoherente. Efecto Lau	
<b>2. Autoimágenes de Talbot con Luz no Colimada</b>	36
2.1 Introducción	36
2.2 Teoría Básica	37
2.3 Amplificación de la Imagen	45
2.4 Curvatura de Campo	50
<b>3. Aplicaciones de las Autoimágenes</b>	55
3.1 Reproducción de Rejillas de Ronchi	55
3.2 Interferometría de Talbot y Prueba de Sistemas Ópticos	56
3.2.1 Autoimagen Deformada	57
3.2.2 Franjas de Moiré	63
3.2.3 Detección de Colimación y Prueba de Sistemas Ópticos	70
3.2.4 Metrología	73
3.3 Óptica de Fourier. Procesamiento de Imágenes	77

**Conclusiones**

79

**Apendice**

80

**Bibliografia**

81

## **Prefacio**

En esta tesis se hace un estudio sobre el fenómeno de la formación de autoimágenes con estructuras periódicas. Este fenómeno es muy interesante tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Desde el punto de vista teórico, porque ilustra muy bien los principios básicos de la difracción y los de la óptica de Fourier. Su importancia práctica es también muy grande por sus posibles aplicaciones en formación de imágenes de estructuras periódicas microscópicas con alta resolución, el procesamiento de imágenes y por supuesto, a la interferometría de Talbot. Debo reconocer que mi interés en este tema fué inspirado por la interesante tesis doctoral del Dr. Rodriguez-Vera (1993), que hace un estudio muy completo sobre la interferometría de Talbot.

La principal contribución de ésta tesis es el estudio de formación de imágenes con haces de luz no colimados, tanto convergentes como divergentes. Se analizan el efecto de esta divergencia o convergencia en efectos de primer orden, así como en la amplificación de la imagen. Igualmente se consideran los efectos de segundo orden como la distorsión o la curvatura de campo.

Finalmente, se hace una descripción de las principales aplicaciones del fenómeno de formación de autoimágenes. Se hace una mención especial de la interferometría de Talbot.



En muchos de estos estudios se han hecho contribuciones originales que han sido ya publicados o están en proceso de publicación.

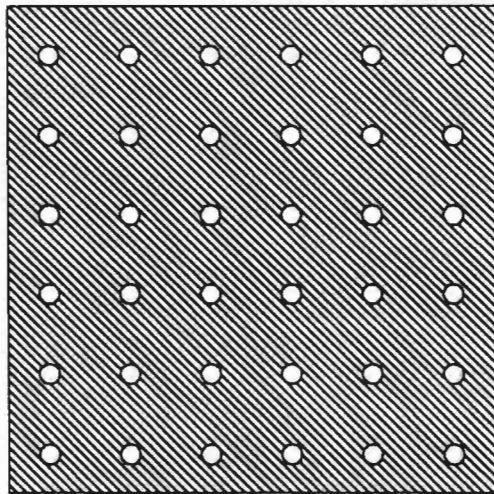
# CAPITULO 1

## Las Autoimágenes de Talbot

### 1.1 Introducción Histórica

La formación de autoimágenes de estructuras periódicas ha sido un tema que ha llamado la atención de los investigadores desde hace mucho tiempo. El interés proviene de que desde el punto de vista académico y teórico es un efecto muy interesante. Además, tiene un gran número de aplicaciones prácticas.

La formación de una autoimagen de una estructura periódica fue descubierta cuando H. F. Talbot (1836) iluminó con un haz de luz colimado, proveniente de una fuente de luz blanca puntual, un arreglo rectangular de agujeros muy delgados como el que se ilustra en la Fig. 1.1.



**Figura 1.1.-** Pantalla usada en el experimento de Talbot

Talbot observó que este patrón de agujeros se repetía periódicamente a lo largo de la dirección de iluminación, a distancias equidistantemente separadas, cuya magnitud dependía de la separación en los agujeros. Talbot (1836) estudió este fenómeno con interés y reportó sus resultados sin intentar siquiera explicar la naturaleza del fenómeno. Tuvo que pasar casi medio siglo para que Lord Rayleigh (1881) fuera la primera persona en explicar este experimento analíticamente, atribuyendo su origen a la interferencia de haces luminosos difractados por las perforaciones, e interfiriendo entre sí. Rayleigh pudo demostrar que en el caso de un frente de onda plano iluminador, la imagen de una rejilla lineal debería repetirse periódicamente con un período longitudinal igual a  $2d^2/\lambda$ , donde  $d$  es el periodo de la rejilla y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz.

Los siguientes estudios relacionados con este fenómeno fueron realizados hasta finales de la primera década de este siglo por Winkelmann (1908), Weisel (1910) y Wolfke (1911), quienes examinaron la formación de la imagen de una rejilla en microscopía. Sus trabajos tenían por objeto estudiar las posibles aplicaciones del fenómeno para la observación de objetos microscópicos. Después, el fenómeno volvió a olvidarse de nuevo durante casi medio siglo hasta que Cowley y Moodie (1957 a-c) hicieron estudios intensivos de las propiedades de campo de difracción de Fresnel detrás de objetos periódicos. Ellos fueron motivados a encontrar un procesamiento de imágenes de alta amplificación que no usara elementos ópticos clásicos e investigaron con detalle el caso de un frente de onda esférico iluminador. Los autores llamaron imágenes de Fourier a las imágenes bien definidas, y a los patrones de intensidad media que aparecen entre la imagen de Fourier les llamaron imágenes de Fresnel. Media década después, Rogers (1962) puso mucha atención a las imágenes de Fresnel. Cinco años después, Montgomery (1967) reveló las condiciones

generales que necesita satisfacer un objeto para obtener la repetición de la transmitancia de amplitud compleja a lo largo de la dirección de iluminación. El término *autoimagen* fue introducido por Montgomery y fué usado conjuntamente con el termino de *Efecto Talbot* en las publicaciones que aparecieron desde 1970. Lo simple y bello de las autoimágenes aún atraen a muchos investigadores, y como resultado se han encontrado aplicaciones interesantes y originales que representan soluciones competitivas a varios problemas científicos y tecnológicos.

Aunque los objetos periódicamente espaciados representan solamente un subgrupo de todos los objetos que pueden generar autoimágenes, son de cualquier manera interesantes. En estudios opticos el objeto es usualmente de la forma de una transparencia grabada, por ejemplo, en un material fotográfico. Como quiera que en otros campos de la ciencia el origen de estructuras periodicas puede ser diferente, en ejemplos tales como en estructuras cristalograficas o en ondas de ultrasonido.

## **1.2 Principales Teorías para la Formación de Autoimágenes**

Como ya se mencionó en la sección anterior, Talbot (1836) fué el primero en observar las características de la distribución de intensidad de luz detrás de un objeto periodico. El efecto Talbot es un fenómeno basado en la difracción, muy interesante desde el punto de vista académico, pues ilustra varios de los principios fundamentales de la óptica de Fourier. Además este fenómeno tiene muchas aplicaciones prácticas muy útiles en la llamada interferometría de Talbot. Esta interferometría es básicamente la medición de la autoimagen de una

rejilla por medio de una segunda rejilla sobre esta autoimagen, a partir de la producción de franjas de Moiré.

Como ya se dijo antes, las rejillas de difracción tienen la propiedad sumamente interesante de que cuando se iluminan con un haz de luz coherente y monocromático se forma una imagen fiel de ellas, sin necesidad de lentes, si se coloca la pantalla a una cierta distancia. Este efecto, llamado *Autoimágenes o Efecto Talbot*, en honor de su descubridor, en 1836, fué explicado por Rayleigh en 1881.

El efecto Talbot o de autoimágenes ha sido uno de los más estudiados y como es natural, han habido puntos de vista completamente diferentes aunque equivalentes para explicarlo. Los tres métodos más conocidos se describirán en las siguientes secciones.

### 1.2.1 Teoría Escalar de la Difracción

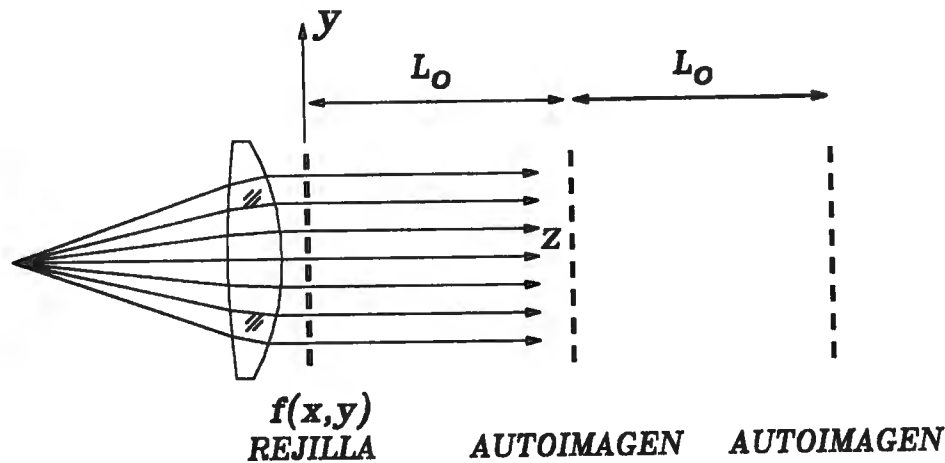
Este método descrito primero por Montgomery (1967) y más tarde resumido por Patorski (1989) hace uso directo de la teoría escalar de la difracción.

Supongamos un objeto iluminado por un haz de luz coherente colimado, con una transmisión de amplitud dada por  $f(x, y)$ . Si representamos el disturbio óptico escalar en un espacio tridimensional posterior a la rejilla u objeto plano difractor por  $u(x, y, z)$ , la ecuación de onda que lo representa está dada por

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz.

A fin de que existan autoimágenes, cada cierta distancia  $L_0$  es necesario que el disturbio  $u(x, y, z)$  sea periódico, con período  $L_0$  a lo largo del eje  $z$  como se muestra en la Fig. 1.2. Esta onda que aparece después de la rejilla no es colimada, sino de estructura muy complicada debido a la difracción producida por el objeto.



**Figura 1.2.-** Formación de autoimágenes con una rejilla y un haz colimado

No es necesario suponer que la periodicidad a lo largo del eje  $z$ , de este disturbio luminoso  $u(x, y, z)$  sea senoidal, sino que puede ser de forma mucho más complicada. Sin embargo, como se dijo anteriormente, si se forman autoimágenes cada cierta distancia  $L_0$ , el disturbio debe ser periódico. Por lo

tanto, supondremos que el disturbio  $u(x, y, z)$  tiene un período fundamental  $L_0$  que puede ser representado por una suma de componentes de Fourier

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y) \exp \left[ \frac{i2\pi mz}{L_0} \right] \quad (1.2)$$

donde  $v_m(x, y)$  es la amplitud de cada componente de Fourier, la cual no es constante en un plano transversal a la dirección de propagación, debido a la presencia de franjas de difracción originadas por el objeto.

Un plano transversal particular de interés es el del objeto. Supongamos que éste se ilumina con una onda de fase y amplitud constante en el plano  $x$ - $y$ , es decir con un haz colimado y su irradiancia es constante sobre todo este plano. Entonces, la irradiancia es igual a la transmitancia de amplitudes del objeto, representada por  $f(x, y)$ . Por lo tanto, en este plano ( $z = 0$ ) se cumple que

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y) = f(x, y) \quad (1.3)$$

Buscaremos ahora cuales son las condiciones necesarias que deben satisfacer las funciones  $v_m(x, y)$  y por lo tanto la transmisión  $f(x, y)$  del objeto difractor, para que se cumplan las condiciones de periodicidad antes expresadas. Si introducimos este disturbio  $u(x, y, z)$  dado por la Eq. 1.2 en la ecuación de onda (1.1), obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial x^2} \right] \exp\left(\frac{i2\pi mz}{L_0}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial y^2} \right] \exp\left(\frac{i2\pi mz}{L_0}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y) \left[ \frac{2\pi m}{L_0} \right]^2 \exp\left(\frac{i2\pi mz}{L_0}\right) + k^2 \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y) \exp\left(\frac{i2\pi mz}{L_0}\right) = 0 \quad (1.4)$$

por lo cual, después de un poco de algebra, se llega a

$$\frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \left[ 1 - \left( \frac{m\lambda}{L_0} \right)^2 \right] v_m(x, y) = 0 \quad (1.5)$$

pero para simplificar, escribimos esta ecuación como

$$\frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial y^2} + M v_m(x, y) = 0 \quad (1.6)$$

donde

$$M = k^2 \left[ 1 - \left( \frac{m\lambda}{L_0} \right)^2 \right] \quad (1.7)$$



Podemos ahora suponer como es la costumbre, que la solución es de variables separables, es decir, que la solución se puede representar por

$$v_m(x, y) = X(x) Y(y) \quad (1.8)$$

donde  $X(x)$  es una función sólo de  $x$  y  $Y(y)$  es una función sólo de  $y$ . Por lo tanto, sustituyendo en la Ec. (1.6) podemos obtener

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + M = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = C \quad (1.9)$$

donde, como el lado izquierdo de la ecuación es sólo función de  $x$  y el lado derecho es sólo función de  $y$ , ambos lados tienen que ser iguales a una misma constante  $C$ . De aquí, podemos proponer para la primera ecuación una solución con forma periódica, del tipo

$$X(x) = A e^{\pm i \alpha x} \quad (1.10)$$

donde  $A$  y  $\alpha$  son dos constantes arbitrarias. De igual manera, para la segunda ecuación diferencial proponemos la solución

$$Y(y) = B e^{\pm i \beta y} \quad (1.11)$$

donde  $B$  y  $\beta$  también son constantes arbitrarias. Al substituir estas funciones en la ecuación diferencial obtenemos

$$\alpha^2 + \beta^2 = M \quad (1.12)$$

Como requerimos que la solución sea de forma periódica, ya que una solución exponencial no es físicamente aceptable, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  tienen que ser reales, por lo que el valor de  $M$  tiene que ser real y positivo. Por lo tanto, de la Ec. (1.7) obtenemos

$$1 - \left( \frac{m\lambda}{L_0} \right)^2 \geq 0 \quad (1.13)$$

lo cual, ya que  $m$  es positivo, implica

$$\frac{L_0}{\lambda} > m \geq 1 \quad (1.14)$$

De la Ec. (1.3), vemos que la suma de las funciones  $v_m(x, y)$  es la transmisión de amplitud del objeto. Por lo tanto, las frecuencias espaciales contenidas en estas funciones son las frecuencias espaciales del objeto. Estas a su vez forman la distribución de amplitudes en el plano de Fourier, es decir el patrón de difracción de Fraunhofer de la luz difractada por el objeto. Si representamos a la transformada de Fourier de  $v_m(x, y)$  por  $\bar{v}_m(\xi, \eta)$ , podemos

escribir

$$v_m(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}_m(\xi, \eta) \exp[i2\pi(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (1.15)$$

Por lo tanto, substituyendo en la ecuación diferencial (1.6), obtenemos una ecuación en términos de las variables en el espacio de las frecuencias espaciales, es decir, en el plano de Fourier. Esta expresión es

$$v_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}_m(\xi, \eta) \exp[i2\pi(\xi x + \eta y)] \times \left\{ -(2\pi)^2 (\xi^2 + \eta^2) + k^2 \left[ 1 - \left( \frac{m\lambda}{L_0} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\eta = 0 \quad (1.16)$$

Esta expresión se puede satisfacer solamente si  $\bar{v}_m(\xi, \eta) = 0$ , o el término en llaves es cero, o ambos simultaneamente. Como no tiene importancia física el primer caso, supondremos que el término en llaves debe ser cero, es decir que

$$(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{\lambda^2} - \left( \frac{m}{L_0} \right)^2 \quad (1.17)$$

Esto nos dice que las frecuencias espaciales, es decir, las imágenes de difracción de Fraunhofer de los objetos que formen autoimágenes (con luz colimada, ya que  $L_0$  la consideramos constante) deben ser discretas y estar colocadas sobre anillos en el plano de Fourier, con radios  $\rho_m$  llamados radios de Montgomery, dados por

$$\rho_m^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \left( \frac{m}{L_0} \right)^2 \quad (1.18)$$

Las unidades de estos anillos son las de frecuencia espacial (1/longitud), pero expresando estos radios en forma de desviación angular  $\theta$  en el plano de Fourier usando la bien conocida fórmula de la rejilla senoidal, donde el inverso de su periodo es su frecuencia espacial, tenemos

$$k \operatorname{sen} \theta_m = 2 \pi \rho_m \quad (1.19)$$

por lo tanto

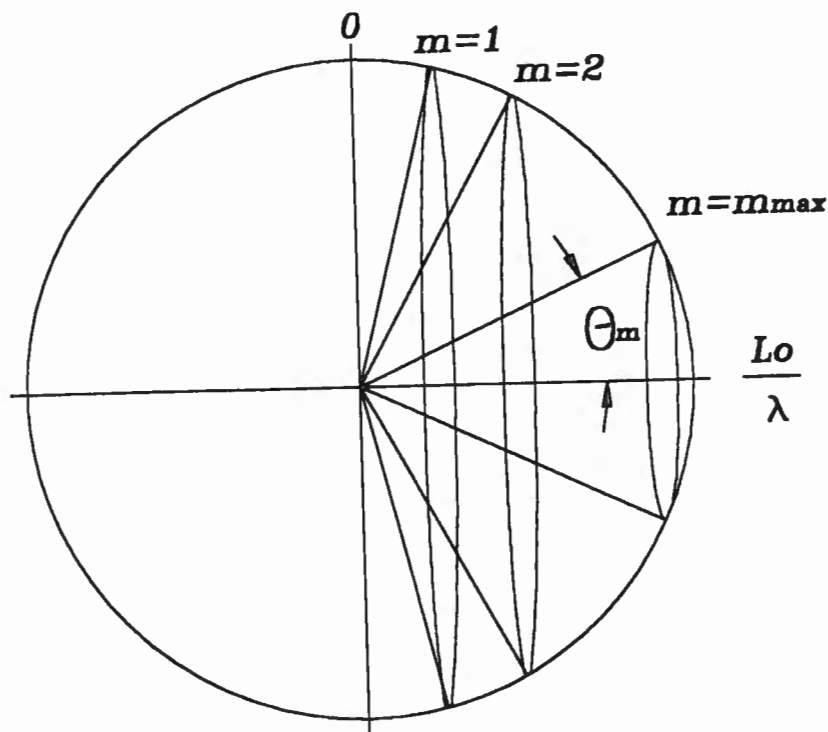
$$\operatorname{sen}^2 \theta_m = 1 - \left( \frac{m \lambda}{L_0} \right)^2 \quad (1.20)$$

El máximo valor de este radio ocurre cuando  $m$  tiene su mínimo valor, que es el de cero, que hace la función  $\operatorname{sen} \theta = 0$ . El mínimo valor de este radio es el de cero, que ocurre cuando  $m$  tiene su máximo valor  $m_{\max}$ . Esta condición está de acuerdo con la condición impuesta por la Ec. (1.14). Por lo

tanto, el número  $m$  está acotado dentro de los límites dados por

$$0 \leq m \leq m_{\max} = \frac{L_0}{\lambda} \quad (1.21)$$

La figura 1.3 ilustra las direcciones para los anillos de Montgomery. Vemos que el número de anillos es igual a  $m_{\max}$  y este número como se ve en la Ec. (1.21) es directamente proporcional a la separación entre las autoimágenes.

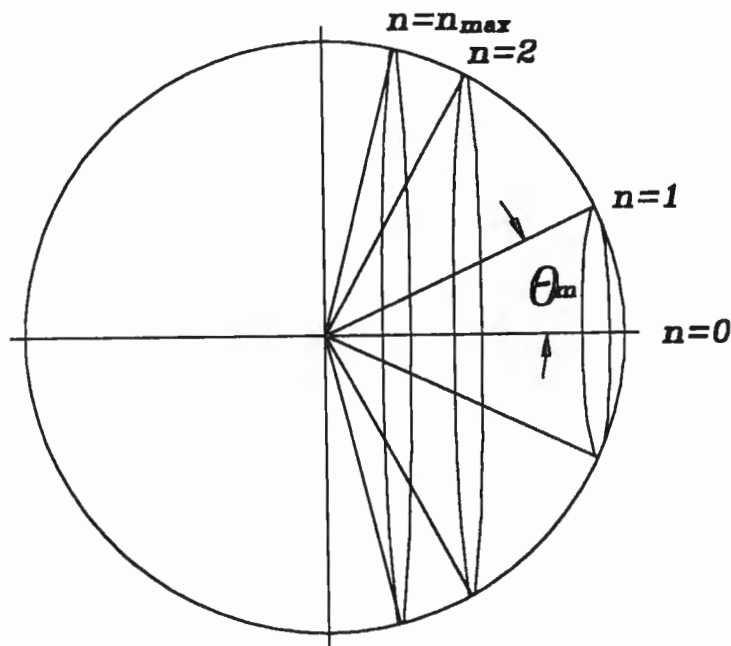


**Figura 1.3.-** Distribución angular de los anillos de Montgomery

Si definimos un número  $n$  como  $n = m_{\max} - m$  es fácil ver que

$$\text{sen}^2 \theta_n = \frac{\lambda^2 n}{L_0^2} \left[ 2 \frac{L_0}{\lambda} - n \right] \quad (1.22)$$

donde  $n$  es un número que vale cero a lo largo del eje óptico y aumenta a medida que aumenta el ángulo como en la Fig. 1.4.



**Figura 1.4.-** Anillos de Montgomery definidos por el número  $n$

Es interesante analizar ahora el caso de una rejilla unidimensional común, por ejemplo, una rejilla de Ronchi. Si el período de la rejilla es lo suficientemente grande para que  $\theta$  sea pequeña, que es el caso usual, tenemos que  $n \ll L_0/\lambda$ , por lo tanto podemos escribir

$$\theta_n^2 = \frac{2 \lambda n}{L_0} \quad (1.23)$$

Por otro lado, para una rejilla el ángulo  $\theta$  (suponiendo  $\theta$  pequeña) está dado por  $m\lambda = d\theta$ , donde  $m$  es el orden de difracción que no debe confundirse con el número  $m$  de Montgomery antes usado. Así, obtenemos

$$n = \frac{m^2 L_0 z \lambda}{2d^2} \quad (1.24)$$

Si tomamos la distancia  $L_0$

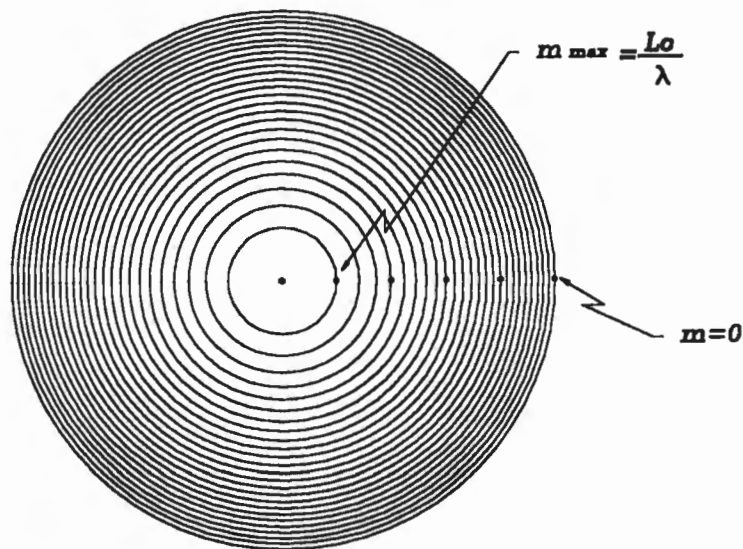
$$L_0 = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (1.25)$$

podemos ahora ver que

$$n = m^2 \quad (1.26)$$

es decir, que el número de anillo de Montgomery es el cuadrado del orden de difracción, como se ve en la Fig. 1.5. Vemos además, que las autoimágenes están igualmente espaciadas por una distancia  $L_0$  dada por la Ec. (1.25).

Esta teoría tiene la gran ventaja de que incluye en su tratamiento la posibilidad de formar autoimágenes de objetos muy diversos, incluso no periódicos.



**Figura 1.5.-** Ordenes de difracción de una rejilla sobre los anillos de Montgomery, en el plano de observación.

### 1.2.2 Principio de Huygens-Fresnel

Otra manera de explicar la autoimagen de una rejilla es considerarla como el campo de difracción de Fresnel obtenido con la superposición, con el modelo de Huygens-Fresnel, de las ondas esféricas de Young generadas por cada punto de las rendijas transparentes de la rejilla. Este modelo ha sido usado por Latimer y Crouse (1993) y comentado posteriormente por Szwaykowski (1993). Aquí presentaré otro análisis más detallado y riguroso que éstos, usando el mismo modelo de Huygens-Fresnel.



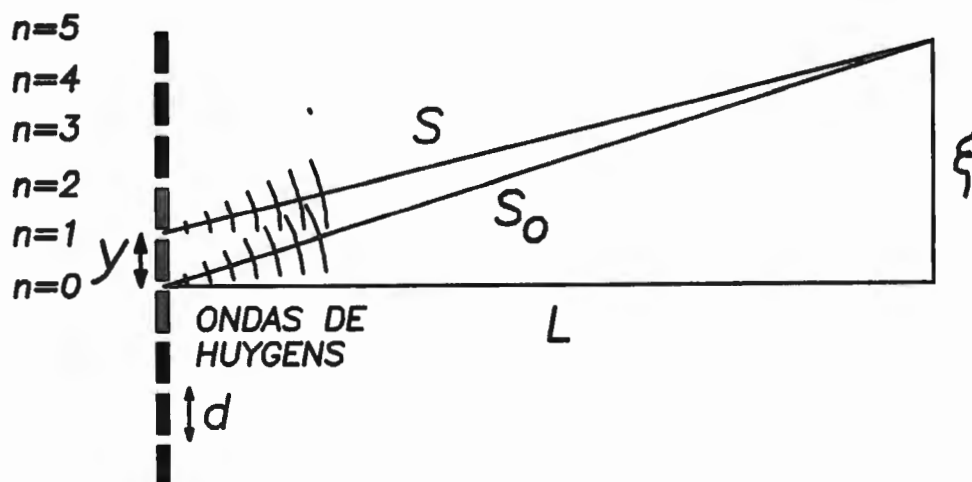


Figura 1.6.- Ondas de Huygens en una rejilla

Supongamos por el momento que tenemos una rejilla con rendijas infinitamente angostas y que observamos el patrón de difracción a una distancia  $L$ , como se muestra en la Fig. 1.6. La diferencia de camino óptico en el plano de observación entre el rayo  $S$  que proviene de la rendija  $n$  y el rayo  $S_0$  que proviene de la rendija 0 en el origen de coordenadas, la encontraremos calculando primero la distancia  $S$  como sigue. Por el teorema de Pitágoras, es fácil ver que

$$S = [L^2 + (\xi - y)^2]^{1/2} \quad (1.27)$$

pero si suponemos ahora que la pendiente de los rayos luminosos es pequeña, es decir, que  $(\xi - y) \ll L$ , podemos aproximar esta expresión por

$$S = L + \frac{(\xi - y)^2}{2 L} \quad (1.28)$$

La justificación para esta aproximación se dará más adelante. Por lo tanto, la distancia  $S_0$  queda aproximadamente dada por

$$S_0 = L + \frac{\xi^2}{2 L} \quad (1.29)$$

y por consiguiente, la diferencia de camino óptico resulta ser

$$DCO = \frac{y (y - 2 \xi)}{2 L} \quad (1.30)$$

Si ahora suponemos que la distancia entre dos rendijas (período) está dada por  $d$ , la distancia  $y$  es igual a  $nd$ , por lo que la diferencia de camino óptico queda

$$OPD = \frac{n d^2}{2 L} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \quad (1.31)$$

por lo que la diferencia de fase entre el rayo de la rendija  $n$  y el rayo de la rendija en el origen de coordenadas está dada por

$$\varphi = k \text{ OPD} = \frac{\pi n d^2}{\lambda L} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \quad (1.32)$$

Si expresamos ahora la distancia  $L$  al plano de observación como una fracción  $\sigma$  de la distancia de Rayleigh  $L_0$ , dada por la Ec. (1.25), es decir

$$L = \sigma L_0 \quad (1.33)$$

obtenemos

$$\varphi = \frac{n \pi}{2 \sigma} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \quad (1.34)$$

Una vez obtenida esta diferencia de fase podemos calcular la distribución relativa de amplitudes en la pantalla de observación, sumando las contribuciones de todas las rendijas, como sigue

$$E(\xi/d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \frac{(\pi n d^2)}{\lambda L} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \right] \quad (1.35)$$

Esta expresión supone que las distancias recorridas por las ondas que se suman son todas iguales. Por otro lado, también se supone aquí que la amplitud de la onda es la misma en todas direcciones. Dicho de otro modo, que el factor de oblicuidad de la teoría de la difracción no es importante. Ambas

hipótesis son válidas si la pendiente de todos los rayos luminosos es pequeña, como ya habíamos supuesto antes de la Ec. (1.28).

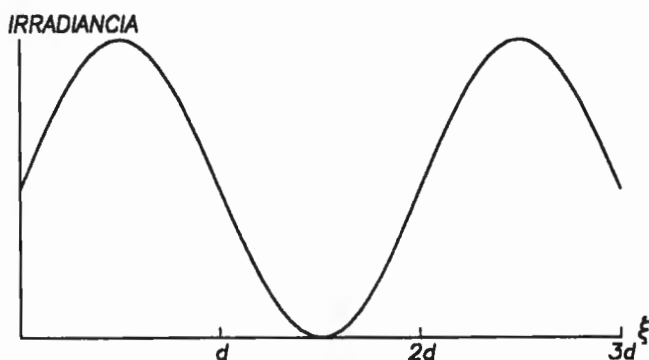
La distribución de intensidades quedaría dada por

$$I(\xi/d) = E(\xi/d) E^*(\xi/d)$$

$$= \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{(\pi n d^2)}{\lambda L} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \right]^2 \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin \frac{(\pi n d^2)}{\lambda L} \left( n - 2 \frac{\xi}{d} \right) \right]$$

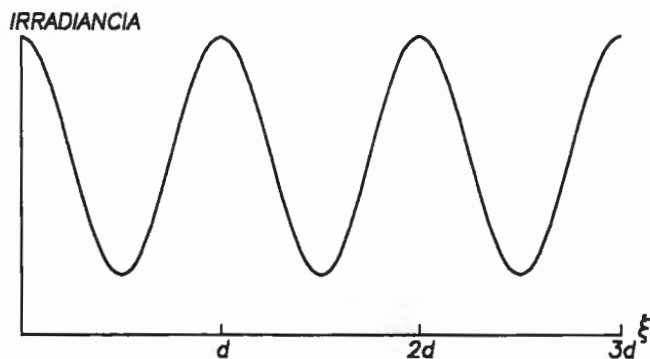
(1.36)

Como el período  $d$  de la rejilla es muy muy pequeño comparado con la distancia  $L$  a la pantalla de observación, la sumatoria incluye un número grande pero finito de elementos (rendijas). Sin que se viole la suposición inicial de pequeñas pendientes de los rayos luminosos. Si tomamos únicamente dos rendijas ( $n = 0, 1$ ) se obtiene el patrón de interferencia del interferómetro de Young, como se muestra en la Fig. 1.7. Podemos ver que esta distribución senoidal tiene un período del doble del de la rejilla y que además sus máximos no coinciden con las regiones claras de la autoimagen, ubicadas en  $d, 2d, 3d$ , etc.



**Figura 1.7.-** Patrón de interferencia de Young obtenido con dos rendijas

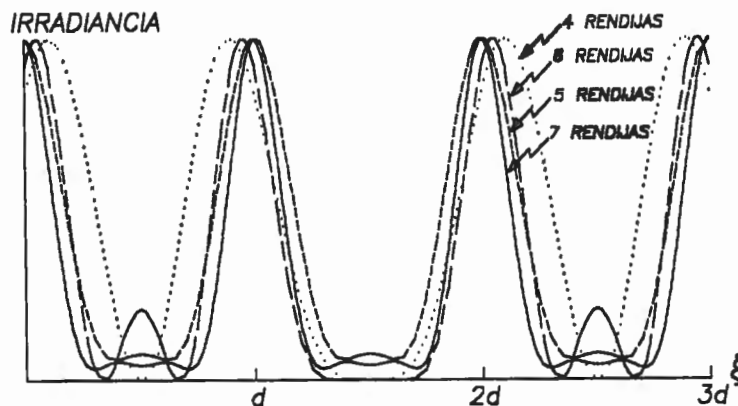
Si tomamos tres rendijas, la distribución de intensidades es aún senoidal como en el caso de las dos rendijas, pero el período es la mitad del anterior, siendo ahora igual al de la rejilla. Además, el contraste de las franjas es ahora ligeramente menor. Por otro lado, los máximos ya coinciden con las regiones claras de la autoimagen, como se muestra en la Fig. 1.8.



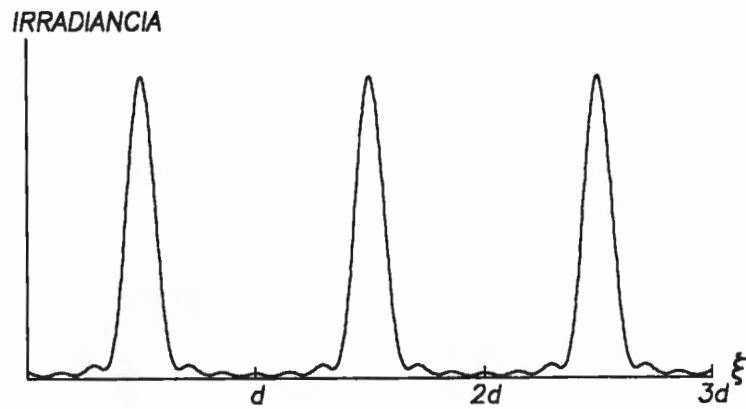
**Figura 1.8.-** Patrón de interferencia con tres rendijas

Si se aumenta el número de rendijas las franjas de interferencia se hacen más angostas, con sus máximos en las posiciones de las líneas claras de la autoimagen, como se ilustra en la Fig. 1.9. Si el número de rendijas se hace extremadamente grande, las franjas se hacen sumamente angostas, haciendo muy definida la autoimagen. Por otro lado, una rejilla con rendijas de anchura finita se puede considerar como una superposición de varias rejillas con menor anchura, tal que la total es la suma de las anchuras de las rejillas que la forman. Dicho de otro modo, la autoimagen de la rejilla con rendijas anchas se forma con la convolución de la función peine que se obtiene con un número muy grande de rendijas, con la imagen geométrica de la rendija.

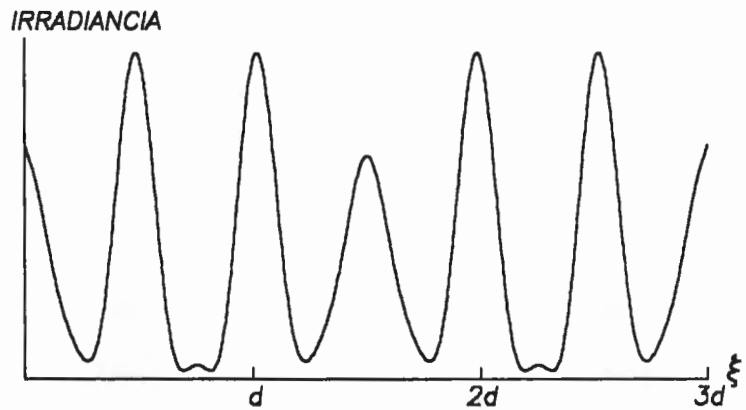
Es interesante analizar que sucede con otras distancias  $L$  al plano de observación, es decir, para otros valores de  $\sigma$ . La Fig. 1.10 muestra el perfil de las franjas para  $\sigma = 0.5$  (la mitad de la distancia de Rayleigh  $L_0$ ). Observamos que el período es el mismo de la autoimagen, pero las franjas brillantes están centradas en las zonas oscuras de la autoimagen. Dicho de otro modo, hay una inversión de contraste.



**Figura 1.9.-** Patrón de interferencia con más de tres rendijas



**Figura 1.10.-** Patrón de interferencia a la mitad de la distancia de Rayleigh con 7 rendijas



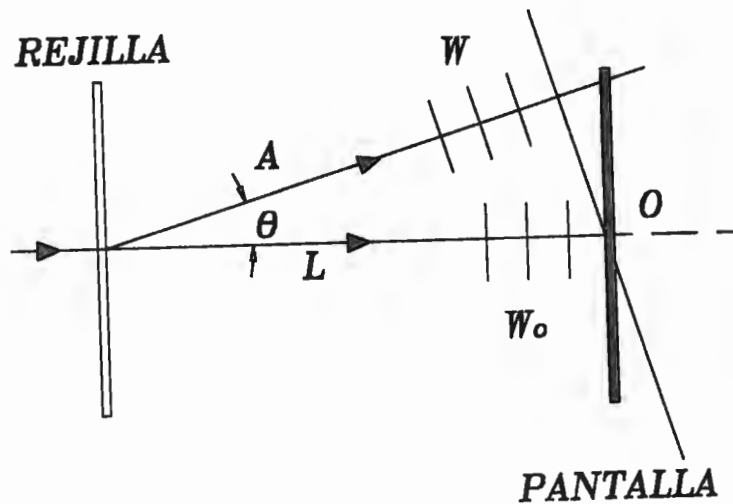
**Figura 1.11.-** Patrón de Interferencia a tres cuartas partes de la distancia de Rayleigh con 7 rendijas

Para una distancia  $\sigma = 0.75$  (tres cuartas partes de la distancia de Rayleigh) el perfil de las franjas se muestra en la Fig. 1.11. El perfil de las franjas es muy angosto, pero no es una autoimagen, ya que no tiene el mismo período, sino la mitad. Para una rejilla de Ronchi la anchura de las rendijas es la mitad del período, o sea el mismo de este perfil de las franjas. Por lo tanto, con una rejilla de Ronchi no se obtendría ninguna imagen, por ser la anchura de la zona clara igual al período.

### 1.2.3 Suma del Espectro de Ondas Planas

Si suponemos por simplicidad que la estructura del objeto difractor es de forma periódica, como una rejilla de difracción, podemos suponer que la autoimagen es simplemente la superposición de las ondas planas difractadas. Esta superposición, sin embargo, no produce una autoimagen, a menos que las fases relativas de las ondas en el plano de observación sean iguales a las que tenían estas mismas ondas en el plano del objeto. Consideremos la Fig. 1.12, donde una pantalla se coloca a una cierta distancia  $L$  de una rejilla que se ilumina con un haz de luz colimado y monocromático. El orden cero de difracción se propaga en la dirección del eje óptico, mientras que un haz difractado con el orden de difracción  $m$  se propaga en la dirección del segmento  $A$ . Los frentes de onda  $W_0$  y  $W$  llegan a la pantalla con la misma fase relativa que tenían en el plano del objeto si ambos se cruzan en el punto  $O$  en dicha pantalla.



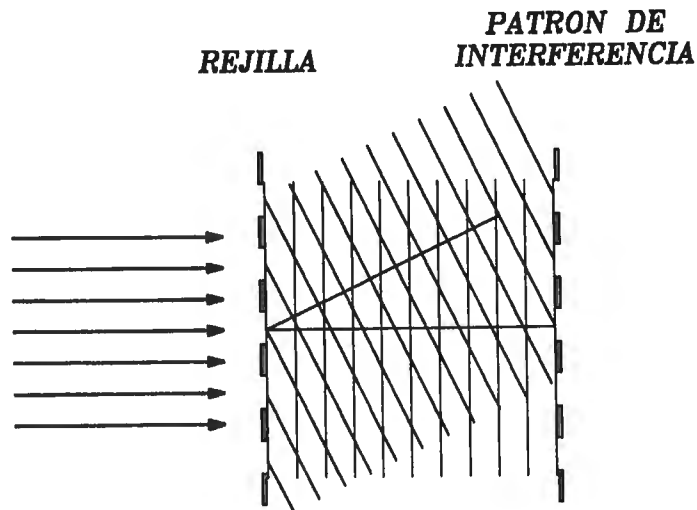


**Figura 1.12.-** Ordenes de difracción cero y uno en una rejilla de difracción

De esta manera, la diferencia de camino óptico entre los dos rayos dada por la diferencia

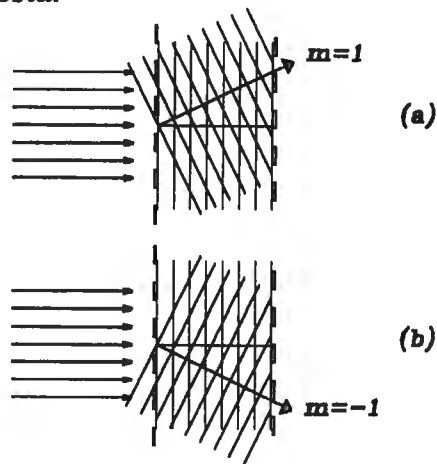
$$DCO = L - A = L \left( 1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) = N\lambda \quad (1.37)$$

donde  $N$  es un entero. Cuando se satisface la condición anterior, el frente de onda difractado (orden  $m$ ) y el frente de onda no difractado (orden cero) forman en la pantalla un patrón de interferencia como se muestra en la Fig. 1.13.



**Figura 1.13.-** Patrón de interferencia con el orden cero y un orden  $m$

Es interesante examinar que sucede cuando la rejilla tiene transmitancia senoidal. En este caso la interferencia del orden 1 con el orden 0 forman un patrón de interferencia senoidal con la misma frecuencia o período que la rejilla. Sin embargo, si no se cumple la relación (1.37) la imagen o patrón de interferencia está desplazado lateralmente con respecto a la rejilla como se ve en la Fig. 1.14 (a). Si consideramos ahora la interferencia del orden 0 con el orden -1, vemos que el patrón de interferencia está desplazado también lateralmente con respecto a la rejilla, como se ve en la Fig. 1.14 (b), sólo que ahora en dirección opuesta.



**Figura 1.14.-** Patrón de interferencia con el orden cero y el orden 1 ó -1

Los dos patrones de interferencia resultantes están desplazados uno respecto al otro, por lo que la combinación resultante tiene un bajo contraste. Dicho de otro modo, no hay autoimagen. Usando la fórmula de una rejilla de difracción, tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} \quad (1.38)$$

obteniendo así, de las Ecs. (1.37) y (1.38)

$$DCO = L \left( 1 - \frac{1}{\left[ 1 - \frac{m^2 \lambda^2}{d^2} \right]^{1/2}} \right) = N\lambda \quad (1.39)$$

El término central de esta expresión debe ser igual al tercer término, es decir, que su valor debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda, para cualquier valor de  $m$ , si el valor de  $L$  se selecciona en forma adecuada. Esto no sucede así. Sin embargo, si se cumplen dos condiciones que a continuación veremos si es posible satisfacer lo anterior. Estas dos condiciones son:

- a) El periodo de la rejilla es muy grande con respecto a la longitud de onda ( $d \gg \lambda$ ).
- b) Las rendijas de la rejilla son lo suficientemente anchas como para que el número de ordenes de difracción presentes no sea extremadamente grande.

Con estas dos condiciones podemos escribir

$$\frac{m^2 \lambda^2}{d^2} \ll 1 \quad (1.40)$$

y por lo tanto podemos aproximar la Ec. (1.39) por

$$DCO = \frac{m^2 \lambda^2 L}{2d^2} = N\lambda \quad (1.41)$$

De aquí podemos encontrar que el valor de  $L$  que satisface la condición dada por la Ec. (1.41) está dada por

$$L = \frac{2 N d^2}{m^2 \lambda} \quad (1.42)$$

Dado un orden de difracción  $m$  el número  $N$  tiene que tener un valor tal que  $n/m^2$  sea también un entero, es decir,

$$\sigma = \frac{N}{m^2} \quad (1.43)$$

Por tanto podemos escribir

$$L = \sigma L_0 \quad (1.44)$$

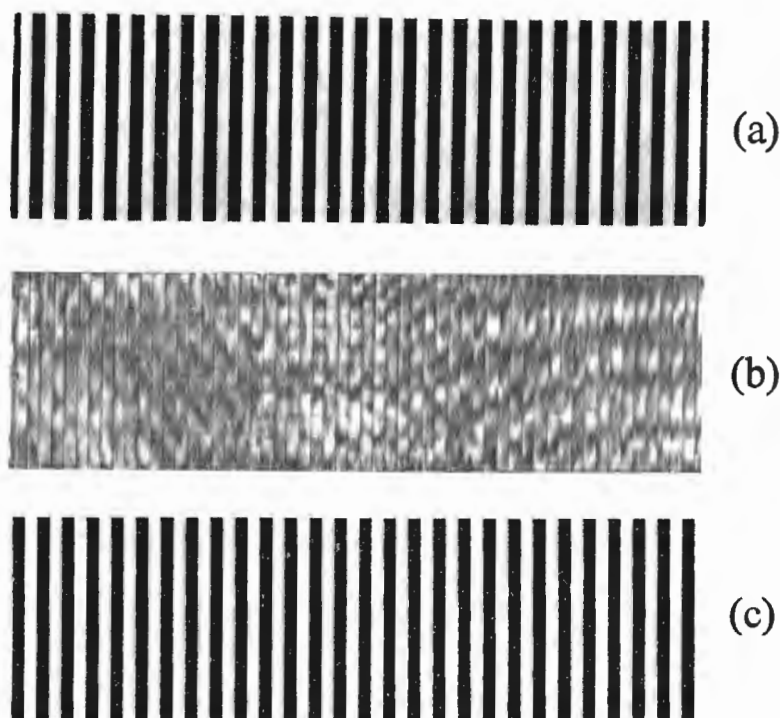
donde  $\sigma$  es un entero y  $L_0$  está dado por

$$L_0 = \frac{2 d^2}{\lambda} \quad (1.45)$$

Esta es la llamada distancia de Rayleigh. Nótese que con las aproximaciones anteriores, los haces difractados con valores de  $m$  diferentes de uno, también llegarían en fase al plano de observación, dando a la autoimagen un alto grado de definición. Por lo tanto es fácil ver que las autoimágenes ocurren en planos a distancias  $L$  de la rejilla de difracción, dadas por la Ec. (1.44) donde  $\sigma$  es cualquier entero positivo.

En las posiciones intermedias entre las autoimágenes se forman también imágenes bien definidas, pero con el contraste invertido. La razón es que las ondas difractadas llegan a la pantalla en esas posiciones, con una diferencia de fase de  $180^\circ$ .

La Fig. 1.15 muestra las autoimágenes con una rejilla de Ronchi con periodo  $d=100$  líneas/pulgada, a las distancias de observación indicadas. A medida que la distancia de observación va aumentando la imagen se va degradando perdiendo contraste y definición. Esto ocurre debido principalmente a dos factores. El primero de ellos es la turbulencia atmosférica, pero esta podría eliminarse si el experimento se hace en el vacío. La segunda razón es que los haces difractados, dependiendo de las dimensiones de la rejilla, van saliéndose poco a poco de su trayectoria, según se explicará en la sección 1.3.



**Figura 1.15.-** Autoimágenes de Talbot. (a)  $L = L_0$ , (b)  $L = L_0/4$  (c)  $L = L_0/2$   
(De Malacara, 1974).

#### 1.2.4 Interpretación Holográfica

A la formación de autoimágenes se le puede dar una interpretación holográfica muy interesante que se describirá en seguida. Consideremos la Fig. 1.16 (a) donde se registra un holograma en línea del tipo Gabor de una rejilla de Ronchi. Al reconstruir la imagen según se muestra en la Fig. 1.16 (b) se formarán tanto una imagen virtual en el plano  $P_1$  (orden de difracción -1) como una imagen real en el plano  $P_2$  (orden de difracción +1). Como en los hologramas de Gabor, las imágenes no están separadas en diferentes direcciones sino que están alineadas a lo largo del eje óptico. Entonces, al observar la imagen real vemos superpuesta en ella una imagen desenfocada de la imagen virtual. De igual manera, al observar la imagen virtual veremos superpuesta en ella una imagen

desenfocada de la imagen real.

Supongamos ahora que el holograma se registra en el plano de la autoimagen, localizada en el plano P. Entonces, el holograma resultante será una rejilla de Ronchi idéntica al objeto. Bajo estas circunstancias tanto la imagen virtual, como la real estarán en planos de autoimagen. Una consecuencia fácil de demostrar es que en el plano  $P_1$  estará la imagen virtual y superpuesta en ella una autoimagen de la imagen real. Igualmente en el plano  $P_2$  tendremos, además de la imagen real, una autoimagen de la imagen virtual.

La formación de autoimágenes puede también aparecer en las imágenes de Fresnel con haz de referencia fuera de eje, como ha sido estudiado por Sarma, Shenoy y Pappu (1985).

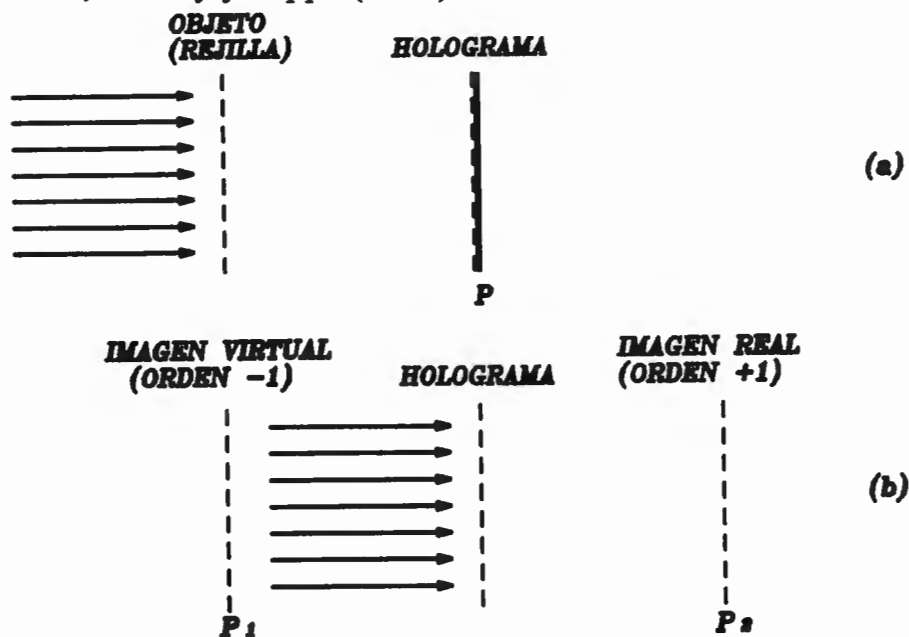


Figura 1.16.- Interpretación holográfica de las autoimágenes

### 1.3 Resolución de las Autoimágenes

Cada uno de los ordenes de difracción del haz difractado en la rejilla contribuye a la formación de la autoimagen con frecuencias espaciales (período  $\delta$ ) tanto mayores cuanto mayor sea el ángulo de difracción. Estos dos parámetros se relacionan entre sí con la fórmula ordinaria de la rejilla

$$\lambda = \delta \theta \quad (1.46)$$

Si el número de órdenes de difracción fuera infinito (aunque cada uno con su irradiancia relativa dada por el ancho de las rejillas) la resolución de la autoimagen también sería infinita, con su valor  $\delta$  aproximándose a cero, puesto que habría ángulos de difracción sumamente grandes, incluso cercanos a los  $90^\circ$ .

El diámetro finito de la rejilla  $D$  ocasiona que a la distancia de observación  $L$ , el ángulo máximo de los haces que interfieren esté dado por  $\theta_{\max}$  como se muestra en la Fig. 1.17.

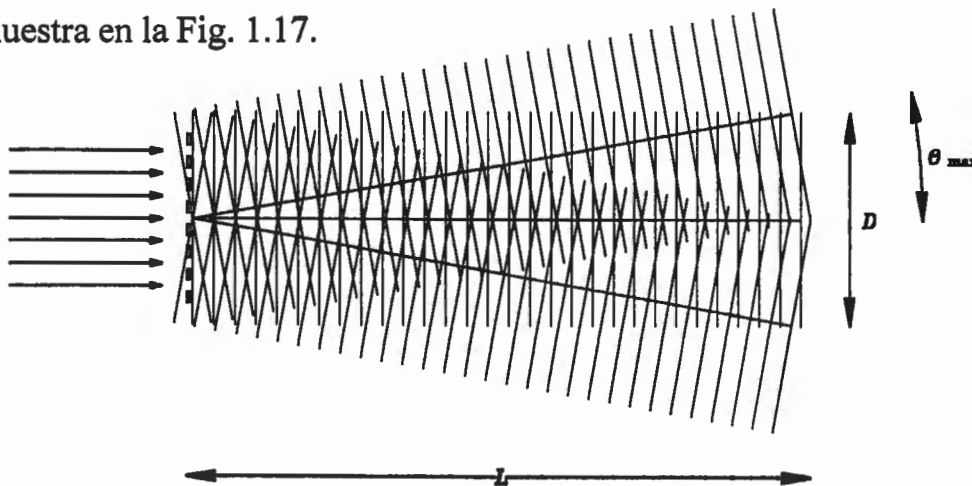


Figura 1.17.- Desviación hacia afuera del campo de los haces colimados difractados



Este ángulo máximo se ve de la figura que está dado por

$$\theta_{\max} = \frac{D}{2L} \quad (1.47)$$

por lo que substituyendo en la Ec. (1.46), la resolución en el plano de la autoimagen estaría dada por

$$\delta = \frac{2\lambda L}{D} \quad (1.48)$$

y que usando el valor de  $L$  dado por la Ec. (1.44) y (1.45) obtenemos

$$\delta = \frac{4\sigma d^2}{D} \quad (1.49)$$

Es interesante comparar este resultado en la forma dada por la Ec. (1.48) con la resolución obtenida si formamos la imagen con una lente usando la configuración en la Fig. 1.18.

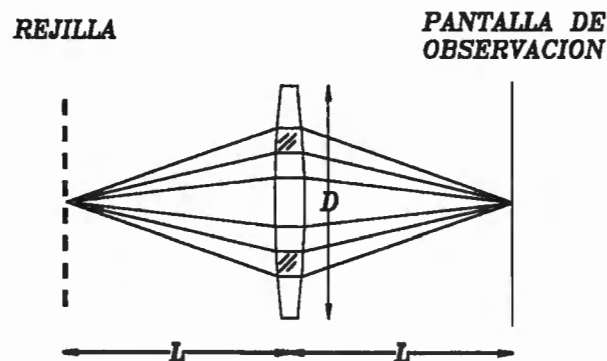


Figura 1.18.- Formación de la imagen de una rejilla con una lente

Es posible demostrar que los resultados son iguales usando la teoría de la formación de imágenes de Abbe, ya que la iluminación es coherente.

Si la iluminación fuera incoherente, según el criterio de resolución de Rayleigh, la resolución sería menor en un factor de dos como es de esperarse.

## **1.4 Autoimágenes con Luz Incoherente. Efecto Lau**

Supongamos que el haz colimado que ilumina la rejilla de Ronchi se desplaza angularmente en la dirección de las rendijas de la rejilla. Las autoimágenes se desplazarán lateralmente en la dirección de las franjas, por lo que será difícil apreciar este desplazamiento. Podemos ver entonces, que si sustituimos la fuente luminosa puntual que ilumina el colimador por una rendija luminosa paralela a las rendijas de la rejilla, se seguirá observando el fenómeno de autoimagen. La razón es que las diferentes autoimágenes formadas por cada elemento puntual de la rendija luminosa, se superponen franja oscura con franja oscura y franja clara con franja clara, de tal manera que no se pierde contraste en la autoimagen.

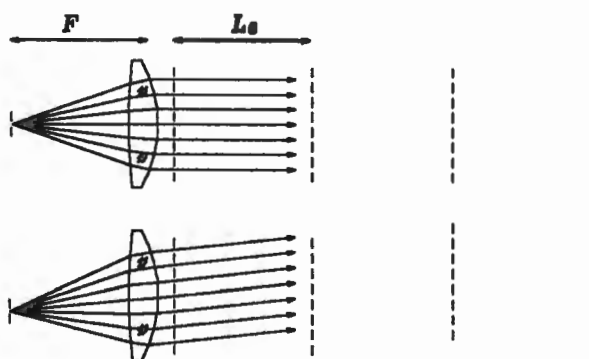
Ahora supongamos que desplazamos lateralmente la rendija luminosa en dirección perpendicular a la rendija, una distancia justo del valor que produzca un desplazamiento lateral en las autoimágenes igual al periodo. Para todo fin práctico podemos decir que la autoimagen no ha cambiado. Por lo tanto, si iluminamos con dos rendijas separadas por la distancia correcta, las autoimágenes producidas por ambas rendijas serán idénticas y se superpondrán sin pérdida de contraste, como se ilustra en la Fig. 1.19.

Una consecuencia de lo anterior es que podemos formar autoimágenes usando una fuente de luz extendida en lugar de una fuente de luz puntual. Al frente de la fuente de luz extendida se coloca una rejilla de Ronchi como se muestra en la Fig. 1.20. Esta es una gran ventaja, pues es posible observar fácilmente el fenómeno de autoimagen sin la necesidad de usar una fuente de luz puntual muy brillante, es decir, de un laser.

Es fácil ver que si el periodo de la rejilla de Ronchi cuya imagen se va a formar es  $d$  y el periodo de la rejilla de Ronchi iluminadora es  $d_i$ , la distancia focal  $F$  de la lente colimadora y la distancia de Rayleigh  $L_0$  deben estar en la relación

$$\frac{F}{L} = \frac{d_i}{d} \quad (1.50)$$

Entonces, si usamos dos rejillas de Ronchi idénticas, la distancia focal de la lente colimadora debe ser igual a la distancia de Rayleigh.



**Figura 1.19.-** Desplazamiento lateral de la autoimagen al desplazar lateralmente la fuente luminosa

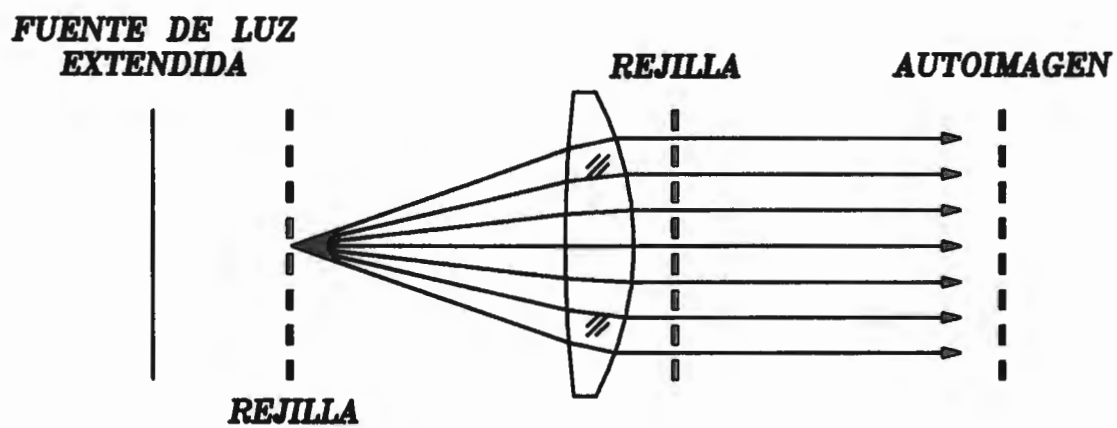


Figura 1.20.- Efecto Lau

# **CAPITULO 2**

## **Autoimágenes de Talbot con Luz no Colimada**

### **2.1 Introducción**

Es bien conocido que las autoimágenes de Talbot en iluminación colimada se reproducen con amplificación unitaria con una separación axial constante conocida como distancia de Rayleigh. Cuando el frente de onda incidente no es plano, sino esférico, las autoimágenes se reproducen con amplificación. El propósito de este capítulo es demostrar que en este segundo caso las imágenes tienen un radio de curvatura que depende de la curvatura del frente de onda incidente.

Cuando una rejilla de Ronchi es iluminada con un haz de luz colimado, una buena imagen de la rejilla es obtenida sin ninguna lente, como fué descubierto por Talbot en 1836. Esta imagen tiene una amplificación y está localizada a cierta distancia de la rejilla, llamada distancia Rayleigh.

Es bien conocido que si el haz no esta colimado sino esférico divergente o convergente, la imagen es desplazada de la distancia Rayleigh y amplificada. En este capítulo se presentará el análisis matemático de esta imagen amplificada. Como se esperaba esta imagen no es perfecta, sino tiene algunas aberraciones. Un resultado interesante es que la imagen tiene una curvatura.

## 2.2 Teoría Básica

Cuando la rejilla no está iluminada con luz colimada, podemos tener varias configuraciones, dependiendo de la posición relativa de la rejilla al punto de convergencia del haz iluminador, y el plano de observación. La distancia de la rejilla al punto de convergencia es  $l$  y la distancia de la rejilla al plano de observación es  $L$ . Así, tenemos seis configuraciones posibles,

$L > l$	$(a)$	
$0 < L < l$	$(b)$	
$L < 0$	$(c)$	
$l < L < 0$	$(d)$	$(2.1)$
$L < l$	$(e)$	
$L > 0$	$(f)$	

Los primeros tres casos, con  $l > 0$  son ilustrados en la Figs. 2.1 y los últimos tres casos, con  $l < 0$  en la Fig. 2.2. Las configuraciones (a) y (b) con  $l > 0$  son representadas en las Figs. 2.3 y 2.4. Para estas configuraciones (a) y (b) y también (c), podemos escribir

$AB = AC = AD = l$	$(2.2)$
--------------------	---------

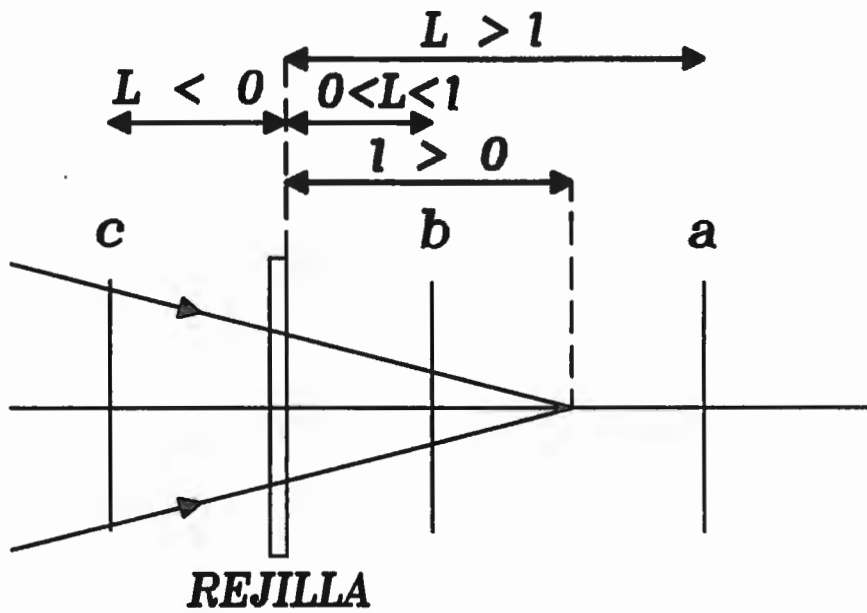


Figura 2.1.- Configuración con  $l > 0$

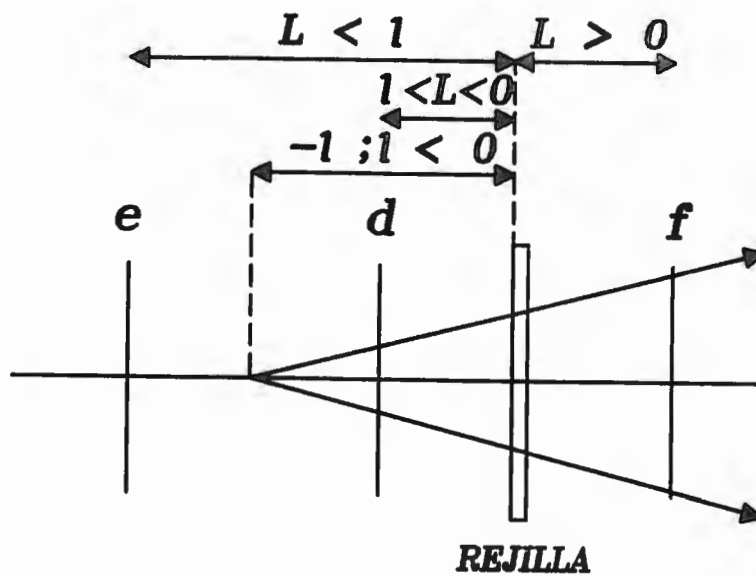
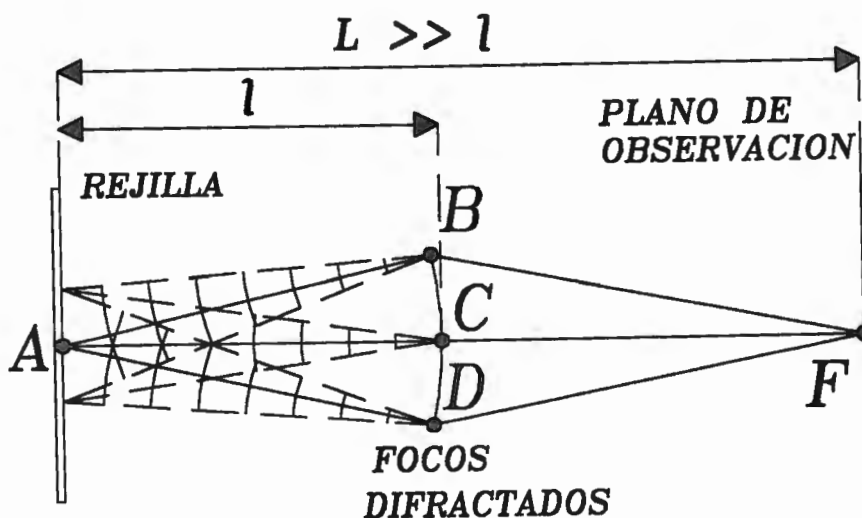


Figura 2.2.- Configuración con  $l < 0$

La localización axial para las autoimágenes pueden ser encontradas con la condición:

$$(AB + BF) - (AC + CF) = M \lambda \quad (2.3)$$



**Figura 2.3.-** Configuración con los focos difractados antes del plano de observación y después de la rejilla. (a)

Se puede ver que la diferencia de camino óptico se hace cero, haciendo  $M=0$ , cuando el plano de observación está en el plano de la rejilla. Entonces, si  $M$  es escogido para ser un número positivo, el número  $M$  decrece cuando  $L$  se incrementa. A fin de hacer que  $M$  aumente con  $L$ , este número es definido para ser negativo para la configuración (a). A partir de ahora, cuando usemos esta configuración para derivar nuestras expresiones matemáticas, para compensar ésto, un signo negativo debe ser incluido en  $M$ . Entonces, con esta



definición, de la Ec. (2.3) obtenemos

$$BF - CF = - M \lambda \quad (2.4)$$

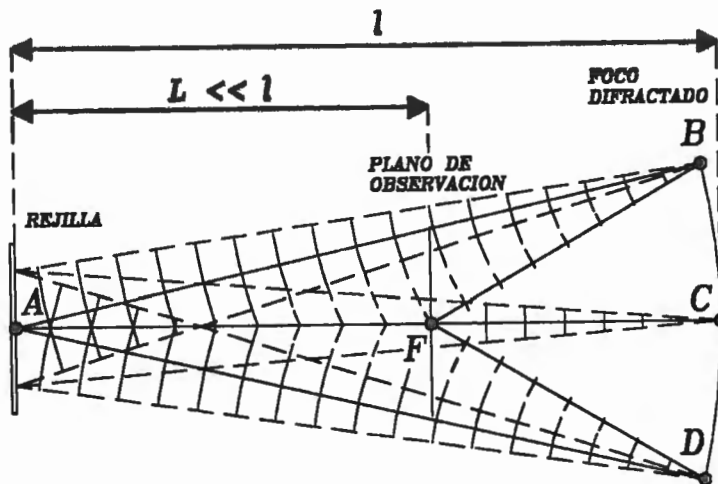


Figura 2.4.- Configuración con los focos difractados después del plano de observación y de la rejilla. (b)

La distancia  $S$  entre los puntos  $C$  y  $B$  es pequeña comparada con las distancias  $l$  y  $(L - l)$ , así que podemos asumir que la diferencia de camino óptico está dada por

$$\frac{S^2}{2 AC} + \frac{S^2}{2 CE} = \frac{S^2}{2} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{L - l} \right) = - M \lambda \quad (2.5)$$

la cual puede ser escrita como

$$\frac{S^2}{2} \frac{L}{l(L-l)} = -M \lambda \quad (2.6)$$

De la ley de la rejilla de difracción tenemos para el primer orden difractado

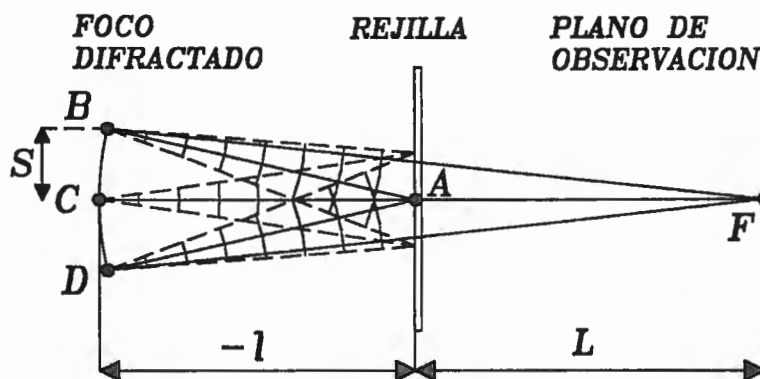
$$\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{S}{l} \quad (2.7)$$

y substituyendo el valor de  $S$  de esta relación en la ecuación 2.6, podemos escribir

$$\frac{\lambda}{2 d^2} = M \frac{L-l}{L l} \quad (2.8)$$

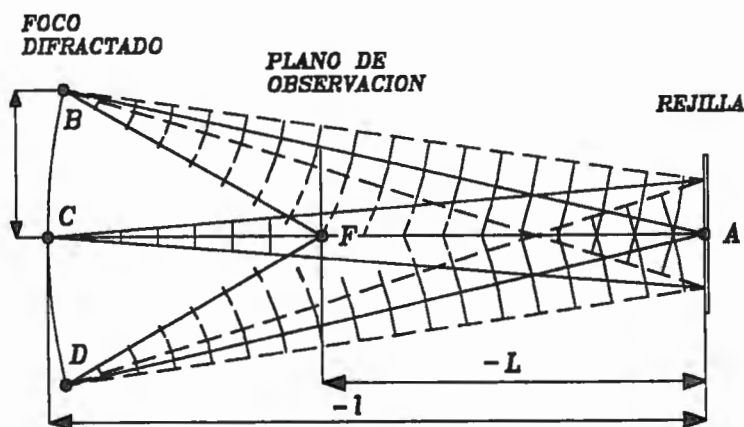
obteniendo así para las configuraciones (a), (b) y (c)

$$\frac{\lambda}{2 d^2} = M \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) \quad (2.9)$$



**Figura 2.5.-** Configuración con los focos difractados antes de la rejilla y del plano de observación y la rejilla antes del plano de observación (f).

Es posible probar que esta misma expresión es válida en las seis configuraciones incluidas las de las Figs. 2.5 y 2.6 para  $l > 0$ , si el signo apropiado para la distancia  $l$  es tomado, siendo positivo si el punto de convergencia está a la derecha de la rejilla y negativo si está a la izquierda de la rejilla.



**Figura 2.6.-** Configuraciones con los focos difractados antes del plano de observación y de la rejilla y la rejilla después del plano de observación (d y e).

El caso para luz colimada puede ser obtenido para esta expresión, cuando  $l$  tiende a infinito. Entonces, cuando  $M$  es igual a uno,  $L$  es la distancia Rayleigh  $L_0$  dada por

$$L_0 = \frac{2 d^2}{\lambda} \quad (2.10)$$

así, la expresión general para luz no colimada es

$$\frac{1}{L_0} = \frac{\lambda}{2d^2} = M \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) \quad (2.11)$$

donde  $M$  es un número entero positivo o negativo, con valores como en la Fig. 2.7. Si graficamos  $ML$  como una función de la distancia, una gráfica más simple se muestra en la Fig. 2.8.

Suponemos que el punto de convergencia del haz iluminador está lejos del plano de la imagen. Si consideramos luz casi colimada tenemos  $l \gg L$ , así el signo positivo para el número  $M$  podría ser tomado. En el caso para la prueba de Ronchi con autoimágenes de Talbot  $M$  es negativo.

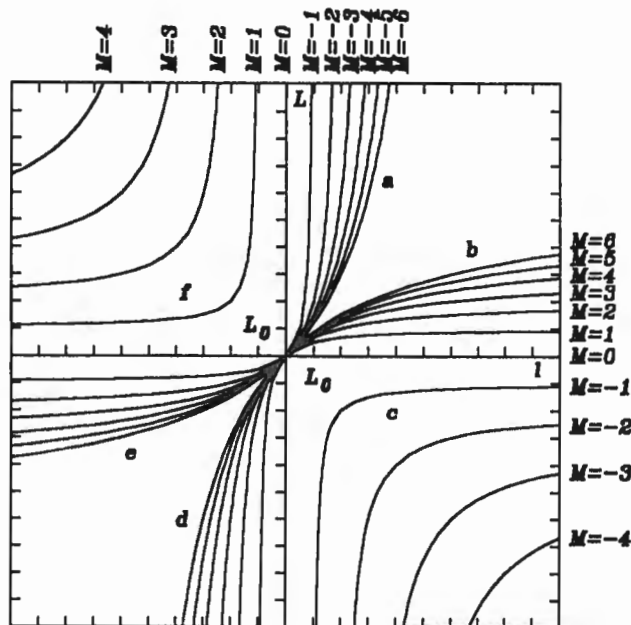


Figura 2.7.- Gráfica de  $ML$  como función de la distancia

La Fig. 2.9 muestra las posiciones de los planos de las autoimágenes para diferentes configuraciones.

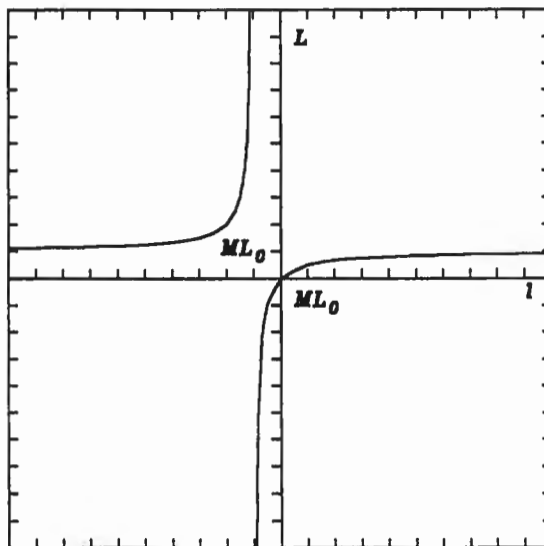


Figura 2.8.- Gráfica de  $ML$  como función de la distancia (simplificada)

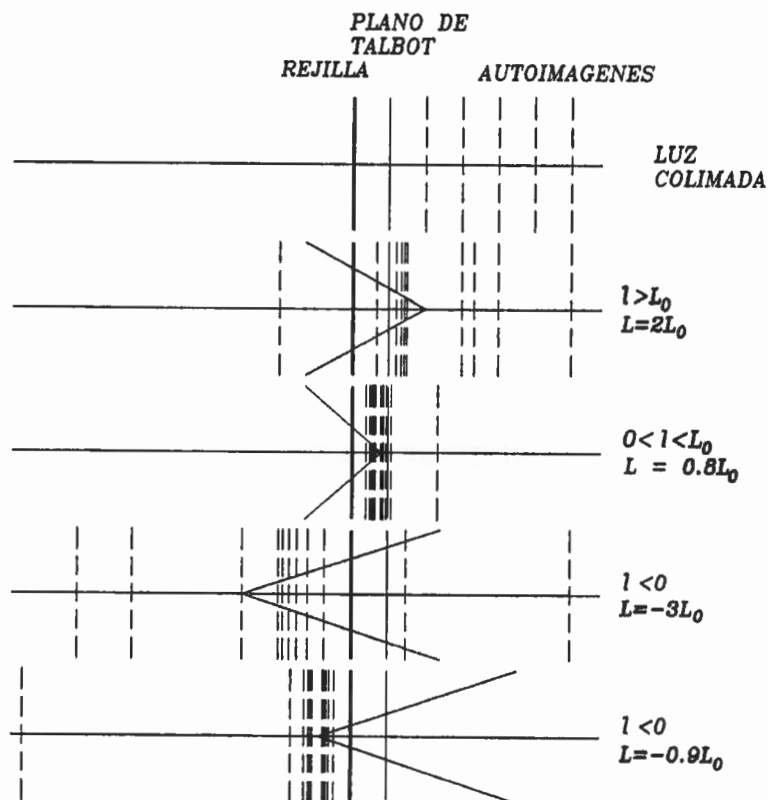


Figura 2.9.- Posiciones de las autoimágenes para diferentes configuraciones

### 2.3 Amplificación de la Imagen

La amplificación y curvatura de la imagen puede ser obtenida considerando la configuración de la Fig. 2.10, donde el punto  $E$  es la imagen de la rejilla cercana a la imagen de la rejilla en  $F$ . La configuración (b) puede ser utilizada de nuevo, usando la Ec. (2.11), pero el resultado final sería el mismo. El punto  $E$  es la imagen de la rejilla próxima a aparecer, modificamos las condiciones del camino óptico en Ec. (2.3), incrementando la diferencia de camino óptico por  $\lambda$  para el rayo más bajo, escribiendo

$$(AD + DE) - (AC + CE) = (1 - M)\lambda \quad (2.12)$$

y simultaneamente decrementando la diferencia de camino optico por una  $\lambda$  para el rayo de arriba

$$(AC + CE) - (AB + BE) = (1 + M)\lambda \quad (2.13)$$

pero usando aquí la Ec. (2.1) y particularizando para la primera autoimagen con  $M = -1$ , obtenemos

$$DE - CE = 2\lambda \quad (2.14)$$

y

$$CE - BE = 0 \quad (2.15)$$

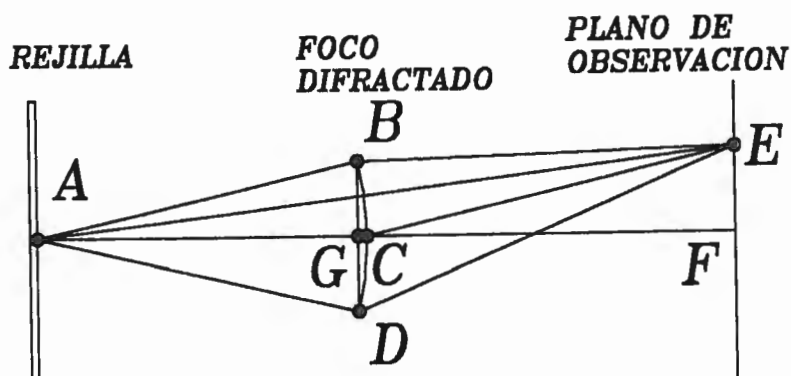


Figura 2.10.- Configuración fuera de eje

Podemos obtener las siguientes dos condiciones geométricas para la localización de la imagen de la rejilla en  $E$ :

- a) El punto  $E$  es una hipérbola definida por Ec. (2.14).
- b) De la Ec. (2.15), puede ser demostrado que el punto  $E$  está en una línea recta  $AE$  que bisecta las líneas  $AB$  and  $AC$ .

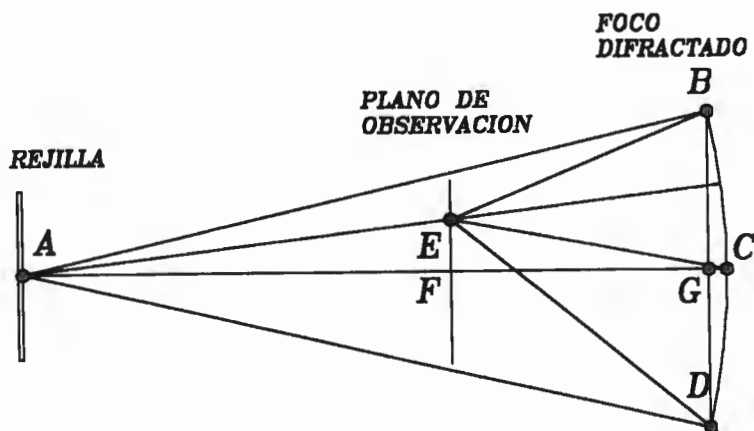


Figura 2.11.- Configuración fuera de eje



Ya que que hemos asumido que la distancia  $L - l$  es muy grande, podemos también asumir de la condición a) que el punto  $E$  está en una de las asíntotas de la hipérbola, la cual es una línea recta pasando a través del punto medio entre  $C$  y  $D$ , y  $E$ .

Ahora de la Ec. (2.7), la ecuación de la línea recta  $AE$  puede ser escrita como

$$y = \frac{\lambda}{2d} x \quad (2.16)$$

con el origen de las coordenadas en  $A$ . La ecuación para las asíntotas representadas por la línea  $GE$  es fácil se demostrar que

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{S^2 - \lambda^2}} (x - l) \quad (2.17)$$

asumiendo que  $AC = AG$ .

El punto  $E$  está en la intersección de estas dos líneas, dadas por

$$x = \frac{l}{1 - \frac{\sqrt{S^2 - \lambda^2}}{2d}} \quad (2.18)$$

con el signo menos para  $l \ll L$ .

Ahora, substituyendo  $S$  de la Ec. (2.7)

$$x = \frac{l}{1 - \frac{\lambda l}{2d^2} \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}} \quad (2.19)$$

pero asumiendo que  $d \ll l$  podemos escribir aproximadamente

$$x = \frac{l}{1 - \frac{\lambda l}{2d^2} \left(1 - \frac{d^2}{2l^2}\right)} \quad (2.20)$$

y de la Ec. (2.11)

$$x = \frac{L}{1 + \frac{d^2}{2l^2} \left( \frac{L}{l} - 1 \right)} \quad (2.21)$$

la cual puede ser otra vez aproximada por

$$x = L \left[ 1 - \frac{d^2}{2l^2} \left( \frac{L}{l} - 1 \right) \right] \quad (2.22)$$

y el valor de  $y$  puede ser calculado de la Ec. (2.17).

## 2.4 Curvatura de Campo

La sagita de la imagen curvada está dada por

$$x - L = \frac{d^2 L}{2l^2} \left( 1 - \frac{L}{l} \right) \quad (2.23)$$

Entonces, usando la Ec. (2.17), la curvatura de esta imagen está dada por

$$c = \frac{8d^2(x - L)}{\lambda^2 x^2} \quad (2.24)$$

y usando aquí la Ec. (2.10), obtenemos

$$c = \frac{L_0^2(l - L)}{l^3 L \left[ 1 - \frac{d^2}{2l^2} \left( \frac{L}{l} - 1 \right) \right]^2} \quad (2.25)$$

la cual puede aproximarse por

$$c = \frac{L_0^2}{l^2} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{l} \right) \quad (2.26)$$

o, usando Ec. (2.11)

$$c = \mp \frac{L_0}{l^2} \quad (2.27)$$

la cual es cero cuando la luz iluminadora está colimada ( $l = \infty$ ).

La amplificación  $m$  de la imagen está dada por

$$m = \frac{y}{d} = \frac{\lambda x}{2d^2} = \frac{x}{L_0} \quad (2.28)$$

y usando Ec. (2.23)

$$m = \frac{L}{L_0} \left[ 1 - \frac{d^2}{2l^2} \left( \frac{L}{l} - 1 \right) \right] \quad (2.29)$$

o aproximadamente

$$m = \frac{L}{L_0} \quad (2.30)$$

la cual es igual a uno cuando la luz del haz incidente está colimado.

Usando Ec. (2.11), esta expresión puede alternativamente ser escrita

como

$$m = \frac{l - L}{l} \quad (2.31)$$

la cual es la amplificación obtenida sin alguna interferencia o teoría de difracción, proyectando geoméricamente las líneas de la rejilla con el haz de luz arriba del la pantalla de observación, como se ilustra en la Fig. 2.12.

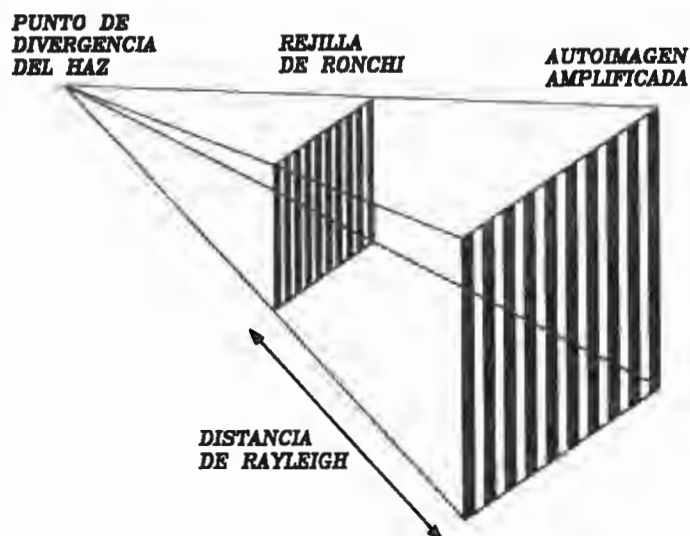


Figura 2.12.- Proyección de la autoimagen como si fuera una sombra geométrica de la rejilla

La formación de autoimágenes con luz no colimada tiene una aplicación práctica directa a la prueba de Ronchi, como ha sido apuntado por Malacara y Cornejo (1974) y descrito más reciente por Cornejo (1991).

En conclusión, hemos probado que cuando el haz incidente de luz no está colimado, hay una amplificación conocida y una curvatura que fácilmente puede ser observada en el laboratorio. Estos fenómenos sin duda pueden tener múltiples aplicaciones para mejorar la precisión en la interferometría de Talbot y en muchos otros experimentos. Propongo en el futuro seguir investigando con más detalle estos fenómenos tanto en su interpretación como en sus aplicaciones.

# CAPITULO 3

## Aplicaciones de las Autoimágenes

### 3.1 Reproducción de Rejillas de Ronchi

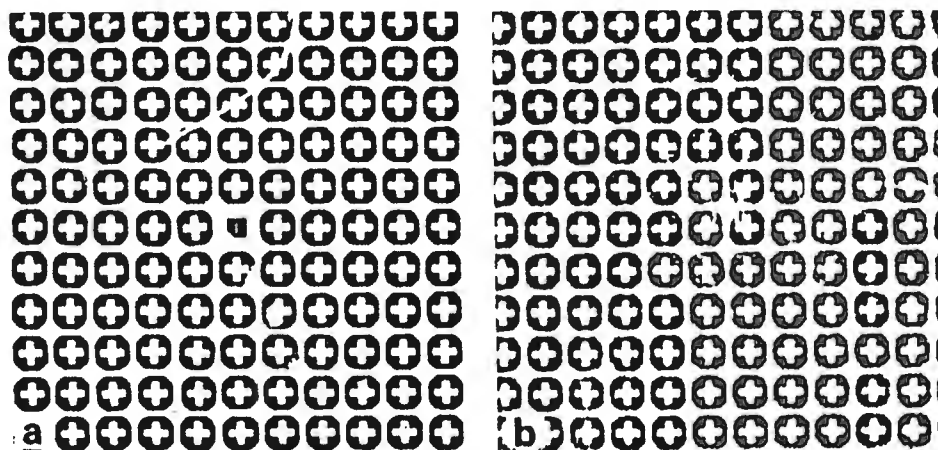
Esta es la aplicación obvia del fenómeno de la autoimágenes. El mismo Talbot pensó en ello. Ya vimos en la sección 1.3 que con una lente perfecta con una abertura igual al diámetro de la rejilla podemos obtener la misma resolución tanto con el método de autoimagen como con una lente. Sin embargo, hay dos diferencias muy importantes entre los dos métodos que debemos tomar en cuenta.

① La primera diferencia es que si tenemos un haz bien colimado no hay aberraciones que degraden la imagen. En cambio, con una lente, las aberraciones de la lente degradan considerablemente la calidad de la imagen, especialmente fuera de eje. Naturalmente que la lente colimadora debe estar desprovista de aberraciones, pero solamente en el eje. Ya hemos visto aquí, en el capítulo 2, que el fenómeno de autoimágenes también tiene sus propias aberraciones cuando el haz no está colimado.

② La segunda muy importante ventaja del fenómeno de autoimágenes es que cualquier pequeña imperfección en la periodicidad de la rejilla, incluyendo pequeñas partículas en las rendijas, tienden a eliminarse como



se ve en la Fig. 3.1.



**Figura 3.1.-** Reducción de defectos no periódicos en una rejilla, al formar la autoimagen. (De Patorski, 1988)

### 3.2 Interferometría de Talbot y Prueba de Sistemas Ópticos

En esta sección veremos con algo de detalle la interferometría de Talbot, descrita primeramente por Yokoseki y Susuki (1971a, 1971b) y por Lohmann y Silva (1971, 1972a, 1972b). Estos autores interpretaron este método en forma interferométrica, usando las teorías de la difracción y la interferencia. Diez años más tarde Kafri (1980) redescubrió el mismo método, pero desde un punto de vista completamente geométrico, al que bautizó con el nombre de deflectometría Moiré. I. Glat y O. Kafri (1988) han realizado una revisión de la deflectometría de Moiré. Las dos interpretaciones de este método son completamente equivalentes, es decir, producen el mismo resultado a pesar de la diferente naturaleza de sus interpretaciones, como ha sido apuntado por

Patorski (1986, 1988). El método interferométrico de Talbot tiene una gran semejanza con la prueba de Ronchi. (Cornejo, 1991). Recientemente, Rodríguez-Vera (1993) ha estudiado con detalle la interferometría de Talbot aplicada a la medición de la forma de objetos difusos.

### 3.2.1 Autoimagen Deformada

Vimos en el Capítulo 1 que en la formación de autoimágenes el orden cero de difracción (no difractado) interfiere con el orden uno (+1) para formar un patrón de interferencia con franjas rectas y senoidales. De la misma manera, el orden cero también interfiere con el orden menos uno (-1) formando otro patrón de interferencia idéntico. Generalizando lo anterior, todo par de frentes de onda forma un patrón de interferencia. Sin embargo, a la distancia de Talbot, según se muestra en la Fig. 1.14, los diferentes patrones de difracción coinciden, ya que están formados por franjas rectas y sus desplazamientos laterales mutuos son múltiplos enteros del período de la rejilla.

Lo interesante ahora sería preguntarse que sucede cuando el haz iluminador no es perfecto, produciendo un frente de onda plano, sino que debido a alguna causa, por ejemplo a imperfecciones de la lente, el frente de onda tiene una deformación  $W(x, y)$ . Entonces, como se ilustra en la Fig. 3.2, todos los haces difractados por la rejilla tendrían la misma deformación. En este caso, la amplitud resultante de la interferencia del haz del orden cero con el orden uno, sería

$$E(x,y) = A \exp (i k W(x, y)) + A \exp (i k W(x, y-s) + i k y \sin \theta) \quad (3.1)$$

donde  $s$  es el desplazamiento lateral del frente de onda del orden uno respecto al del orden cero, y  $\theta$  es el ángulo entre estos dos frentes de onda, como se ve en la Fig. 3.3. Por lo tanto, suponiendo que estos dos haces que interfieren fueron difractados en una rejilla con período  $d$ , usando la bien conocida relación para una rejilla, con  $m$  igual a uno, dada por la Ec. (1.38), la irradiancia en el patrón de interferencia estaría dada por

$$I(x, y) = E(x, y) E^*(x, y) \\ = 2 A^2 \left[ 1 + \cos \left( k (W(x, y-s) - W(x, y)) + \frac{2\pi}{d} y \right) \right] \quad (3.2)$$

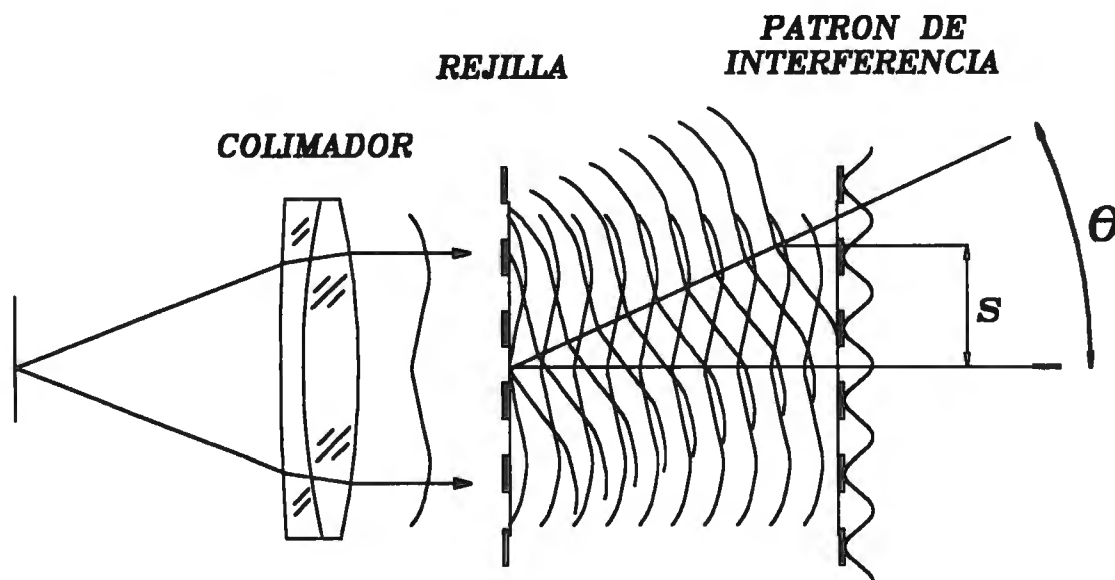
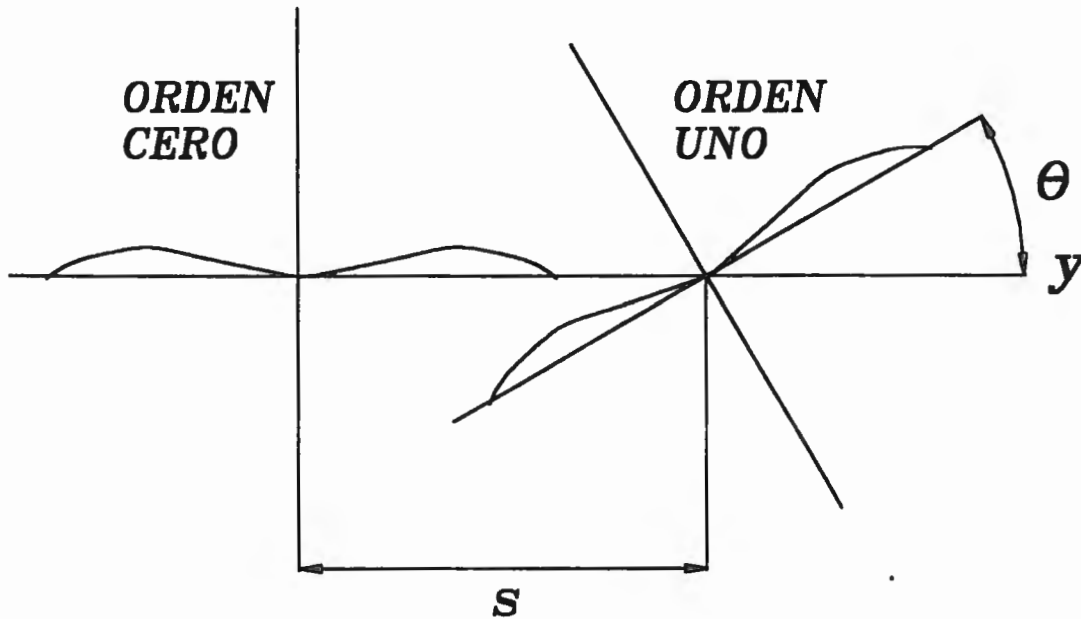


Figura 3.2.- Haces deformados difractados en una rejilla



**Figura 3.3.-** Haces difractados con desplazamiento lateral  $s$  y una inclinación  $\theta$

Ahora supondremos que el desplazamiento lateral  $s$  es muy pequeño respecto al diámetro de los frentes de onda. Así, podemos escribir en forma aproximada, usando un desarrollo de  $W(x, y-s)$  en serie de Taylor

$$I(x, y) = 2 A^2 \left[ 1 + \cos \left( \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} k s + \frac{2\pi}{d} y \right) \right] \quad (3.3)$$

El interferograma representado por esta expresión es únicamente para la interferencia entre dos órdenes, el orden cero y el orden uno. Sin embargo, el interferograma para la combinación de todos los haces, es decir, para haces múltiples, es casi idéntico en los planos de las autoimágenes. La razón es que los interferogramas de cada par de frentes de onda están desplazados uno respecto al otro lateralmente, en la dirección  $y$ , pero distancias que son múltiples

enteros del período de la rejilla. La expresión anterior se podría expresar en forma un poco más simple como

$$I(x, y) = 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) \quad (3.4)$$

donde la constante  $2A^2$  se ha suprimido por simplicidad y  $\phi(x, y)$  es un término modulador de fase dado por

$$\phi(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} k s \quad (3.5)$$

Si la distancia de la rejilla a la autoimagen es  $\sigma L_0$  según la Ec. (1.33), y usando de nuevo la Ec. (1.38), podemos ver que el desplazamiento lateral  $s$  de los frentes de onda está dado por

$$s = \frac{\lambda \sigma L_0}{d} \quad (3.6)$$

por lo que el término modulador de fase se puede escribir

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi\sigma L_0}{d} \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \quad (3.7)$$

Las franjas claras del interferograma están localizadas en los puntos donde el coseno adquiere el valor uno. Por lo tanto, la Ec. (3.4) nos indica que por el origen pasa verticalmente, a lo largo del eje  $y$ , una franja clara. Las demás franjas claras estarán definidas por las posiciones que hagan el argumento de la función coseno igual a un múltiplo entero  $n$  de  $2\pi$ . Por lo tanto para estas franjas del las Ecs. (3.4) y (3.7) podemos obtener la condición

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{nd - y}{\sigma L_0} \quad (3.8)$$

Los rayos luminosos, de acuerdo con la ley de Malus son perpendiculares a los frentes de onda, por lo tanto, observando la Fig. 3.4, vemos que si una rejilla se ilumina con un frente de onda deformado, los rayos tienen una pendiente en la dirección  $y$  (con respecto al plano  $x-z$ ) igual a la derivada parcial del frente de onda de la Ec. (3.8), pero con signo contrario. Por lo tanto, es fácil ver que el interferograma obtenido representa la sombra geométrica de la rejilla, proyectada con el frente de onda distorsionado, como se ilustra en la Fig. 3.5. De aquí viene el nombre también usado de deflectometría de Moiré.

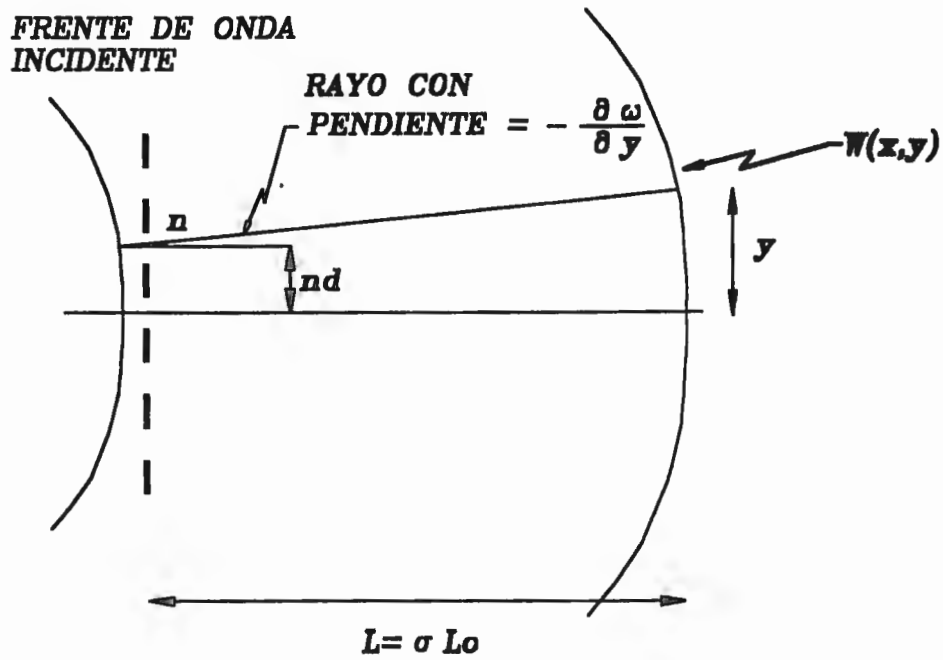


Figura 3.4.- Rejilla iluminada con un frente de onda deformado y un rayo luminoso

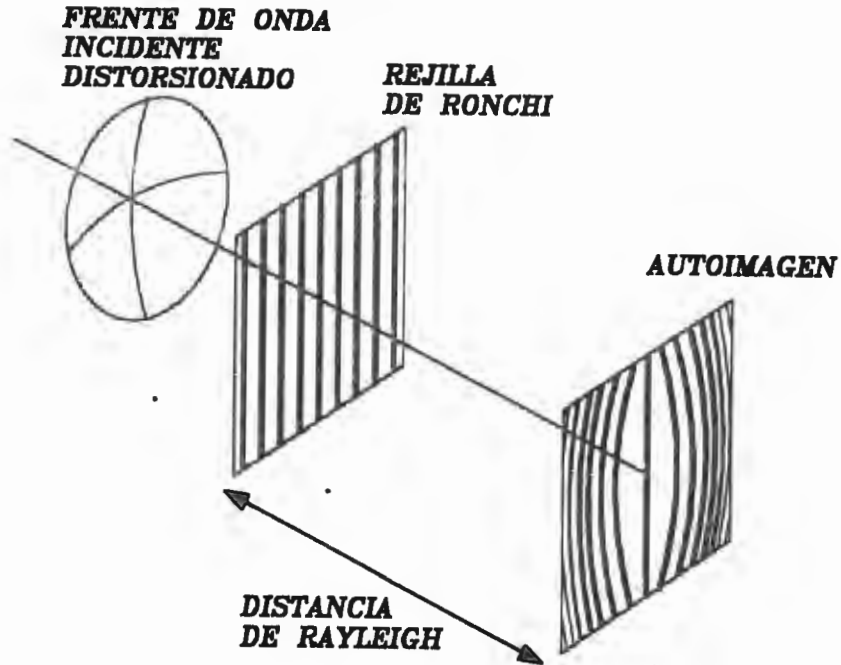


Figura 3.5.- Sombra geométrica de una rejilla de difracción con un frente de onda distorsionado.

El problema en este interferograma es que las franjas están casi tan juntas como en la rejilla, haciendo muy difícil su análisis. La razón de que las franjas estén tan cercanas entre sí se puede ver de dos maneras. Una es recordando que el interferograma es en realidad la autoimagen con las franjas ligeramente deformadas. La otra manera es recordar de la Fig. 3.3, que hay una gran inclinación entre los dos frentes de onda que produce unas franjas muy juntas unas a otras, debido a la introducción de una portadora de gran frecuencia espacial. El análisis sería mucho más sencillo si se eliminara el efecto de la inclinación entre los frentes de onda, es decir, si se removiera la portadora, dejando sólo el término de fase  $\phi(y)$  en la Ec. (3.4). En la siguiente sección veremos como se puede aislar este término de modulación de fase mediante técnicas de Moiré sin tener que quitar realmente la inclinación de los frentes de onda.

### 3.2.2 Franjas de Moiré

Si se superponen dos imágenes de una rejilla y éstas no son idénticas, se formarán franjas de Moiré. Estas franjas de Moiré son representativas de la diferencia entre las dos imágenes superpuestas.

Si una de las dos imágenes es perfecta y la otra imagen está distorsionada, esta distorsión puede ser evaluada con las franjas de Moiré resultantes. La deformación de las franjas puede deberse a múltiples causas, por ejemplo, al refractarse la imagen en un sistema óptico o al reflejarse en una superficie imperfecta. El fenómeno de la autoimagen puede ser muy útil para proyectar la imagen de la rejilla como se describirá a continuación.



Supongamos que una estructura periódica cosenoidal se superpone a otra estructura también periódica cosenoidal con la misma frecuencia espacial de la anterior. La superposición es de forma substractiva, es decir, que una segunda rejilla está colocada directamente sobre la primera, de tal manera que una rejilla filtra la irradiancia que sale de la otra. En términos matemáticos, esta combinación llamada substractiva, (porque una rejilla le quita irradiancia a la otra) es un producto de las transmitancias de las dos rejillas. Supongamos que la primera rejilla tiene una transmitancia  $T_1$  de forma cosenoidal, con período  $d$  (frecuencia espacial  $1/d$ ), dada por

$$T_1(x, y) = \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y \right) \right] \quad (3.9)$$

y que la transmitancia de la segunda rejilla es

$$T_2(x, y) = \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) \right] \quad (3.10)$$

Esta transmitancia es periódica cosenoidal con el mismo período  $d$  de la primera, pero modulada en fase por el término  $\phi(x, y)$ .

Entonces, el producto de las dos transmitancias nos dará la irradiancia  $I(x, y)$  después de la combinación de las dos rejillas, como sigue

$$I(x, y) = \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y \right) \right] \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) \right] \quad (3.11)$$

y al efectuar el producto obtenemos

$$I(x, y) = 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y \right) \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) \quad (3.12)$$

Para analizar este resultado para la irradiancia de la combinación de las dos rejillas usaremos la siguiente relación trigonométrica

$$\cos \alpha \cos (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cos (2\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos \beta \quad (3.13)$$

obteniendo así

$$I(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{4\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) + \frac{1}{2} \cos \phi(x, y) + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{d} y + \phi(x, y) \right) \quad (3.14)$$

Es interesante notar aquí que aunque cada uno de estos términos puede adquirir valores negativos, la suma de ellos es siempre positiva, pues la irradiancia no puede ser negativa.

Supondremos ahora que la máxima frecuencia espacial introducida por el término de modulación de fase es menor que la frecuencia espacial  $f_0 = 1/d$ , de tal manera que podemos escribir la condición

$$0 < \frac{\phi(x, y)}{2\pi y} < \frac{1}{d} = f_0 \quad (3.15)$$

Ahora podemos analizar con detalle cada una de las componentes de la irradiancia  $I(x, y)$ . El primer término es una constante, por lo que su frecuencia espacial es cero. La frecuencia espacial  $f_2$  del segundo término está dada por

$$2f_0 < f_2 = \frac{2}{d} + \frac{\phi(x, y)}{2\pi y} < 3f_0 \quad (3.16)$$

La frecuencia espacial  $f_3$  del tercer término es

$$0 < f_3 = \frac{\phi(x, y)}{2\pi y} < f_0 \quad (3.17)$$

la frecuencia espacial de cuarto término es igual a la frecuencia espacial  $f_0$  de la rejilla, y la del quinto término es

$$f_0 < f_5 = \frac{1}{d} + \frac{\phi(x, y)}{2\pi y} < 2f_0 \quad (3.18)$$

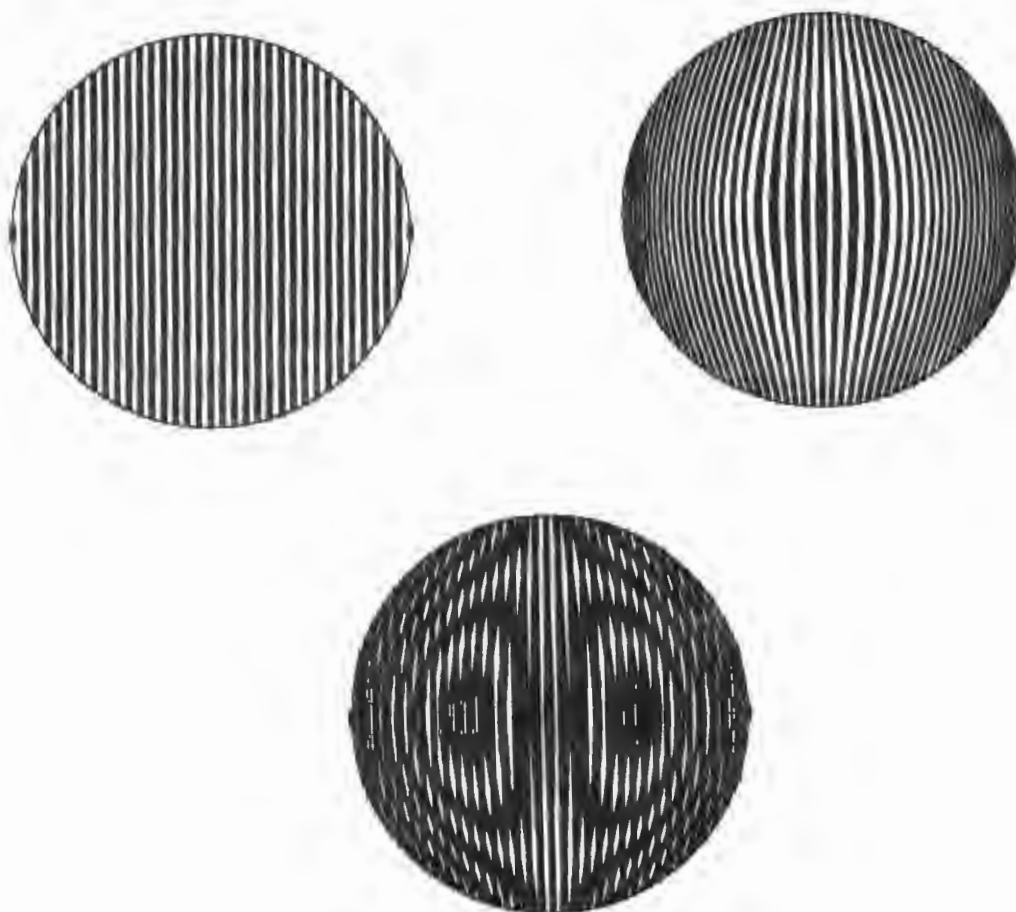
Podemos entonces observar que si mediante algún procedimiento cualquiera cortamos las frecuencias mayores o iguales que  $f_0$ , desaparecerían el segundo, cuarto y último términos y solamente nos quedaría el tercer término más la constante, obteniendo

$$I(x, y) = \cos \phi(x, y) + \text{constante} \quad (3.19)$$

la cual es únicamente la función moduladora aislada. Por lo tanto, vemos con la Ec. (3.7) que la irradiancia en el interferograma superpuesta en la rejilla de referencia para formar el patrón de Moiré, estaría dado por

$$I(x, y) = \cos \left( \frac{2\pi\sigma L_0}{d} \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right) + \text{constante} \quad (3.20)$$

La figura 3.6 (a) muestra una rejilla y la Fig. 3.6(b) muestra el interferograma o autoimagen deformada. Al superponer estas dos imágenes se obtiene el patrón de Moiré de la Fig. 3.6(c).



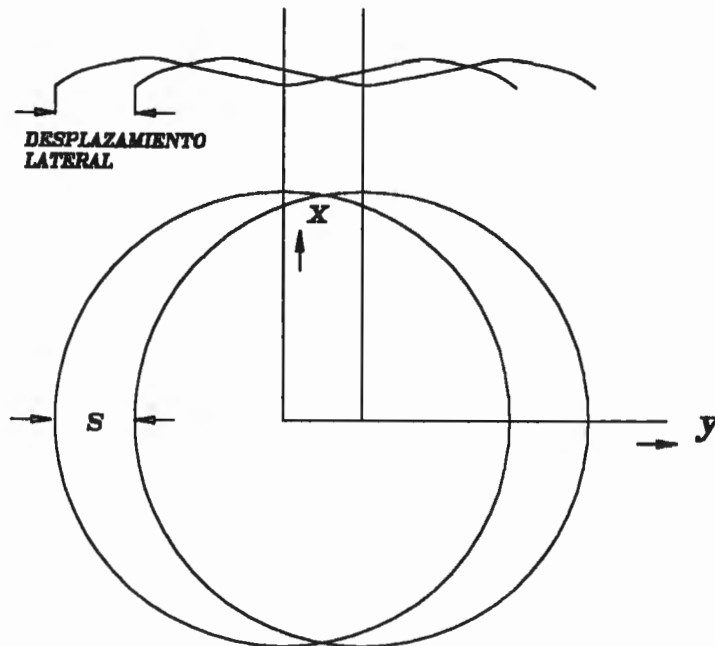
**Figura 3.6.-** (a) Imagen de una rejilla. (b) autoimagen distorsionada de la rejilla y (c) patrón de Moire.

Una franja brillante pasa por el centro del patrón de interferencia y las demás franjas  $n(x, y)$  pasan por los puntos definidos por

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{n(x, y) d}{\sigma L_0} \quad (3.21)$$

Como vemos, una franja representa el lugar geométrico de los puntos con pendiente constante en la dirección  $y$ . Por otro lado, por la ley de Malus recordemos que los rayos luminosos en óptica geométrica se definen con las líneas perpendiculares al frente de onda. Por lo tanto, una franja luminosa del patrón de interferencia representaría el lugar geométrico de los puntos donde los rayos luminosos del frente de onda llegan con una inclinación constante con respecto al plano  $x$ - $z$ , es decir, en la dirección  $y$ .

El interferograma ya filtrado con el efecto Moiré ha quedado desprovisto de la gran inclinación entre los frentes de onda (la portadora lineal ha sido removida). La interferencia se puede interpretar ahora como en un interferómetro de desplazamiento lateral sin inclinación, como se muestra en la Fig. 3.7.



**Figura 3.7.-** Frentes de onda en un interferómetro de desplazamiento lateral

La deformación  $W(x, y)$  del frente de onda se puede obtener fácilmente de la expresión anterior mediante un muestreo de las franjas de Moiré y una sencilla integración, obteniendo

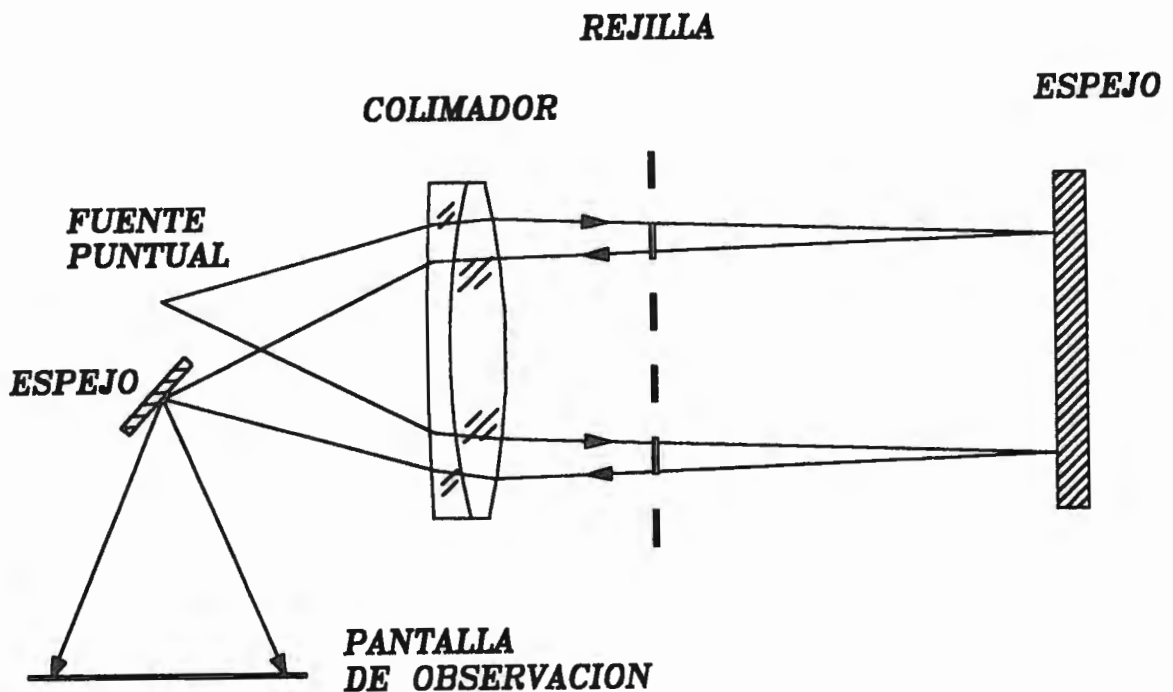
$$W(x, y) = \frac{d}{\sigma L_0} \int_0^y n(x, y) dy \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Detección de Colimación y Prueba de Sistemas Ópticos

La interferometría de Talbot es tan simple de implementar en la práctica que sus aplicaciones son innumerables. Una aplicación obvia es la detección del estado de colimación de colimadores, como ha sido descrito por D.

E. Silva (1971), por Fouéré y Malacara (1974) y por S. Yokozeki, K. Patorski y K. Ohnishi (1976). Es interesante saber que se puede evitar el uso de dos rejillas mediante un espejo, como con el arreglo descrito por Fouéré y Malacara (1974), que se muestra en la Fig. 3.8.

La aberración de esfericidad del colimador puede también ser muy fácilmente detectada y medida con los mismos arreglos, (S. Yokoseki y K. Ohnishi (1975), incluyendo el de la Fig. 3.8, que nos permite una doble sensibilidad debido al doble paso por la lente, como se ilustra en la Fig. 3.9.



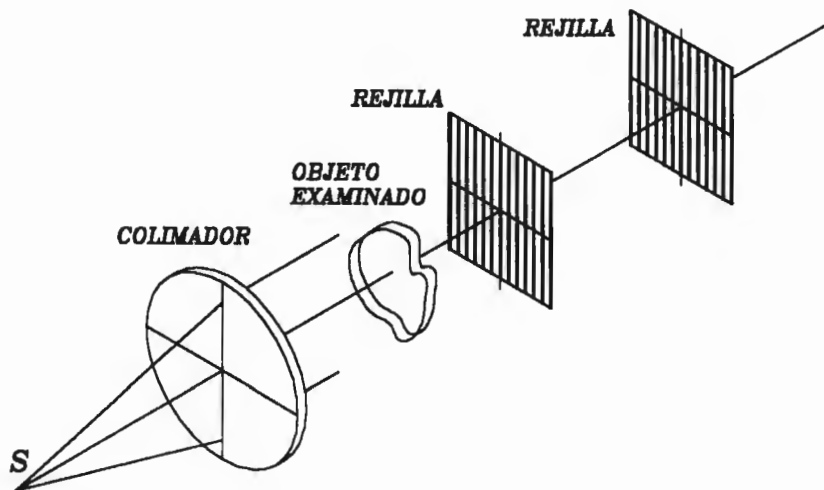
**Figura 3.8.-** Detección del grado de colimación por doble paso.





**Figura 3.9.-** Patrón de Moiré de la aberración de esfericidad del colimador.

Otra aplicación del método es la determinación de deformaciones de fase introducidas por un objeto transparente colocado antes de la rejilla como se muestra en la Fig. 3.10. Si se desea, se puede colocar el objeto a medir delante de la rejilla, con tal de que la distancia que tenga a ella sea relativamente pequeña, comparada con la distancia al plano de observación.



**Figura 3.10.-** Medición de las deformaciones de fase introducidas por un objeto transparente.

### 3.2.4 Metrología

La interferometría de Talbot puede aplicarse también en un gran número de mediciones tanto de distancias como de ángulos. Como un ejemplo, consideremos la medición de ángulos. Este puede efectuarse con el patrón de Moiré de dos rejillas con períodos ligeramente diferentes. Siguiendo un proceso semejante al de la Sec. 3.2.2, podemos escribir la transmitancia de la primera rejilla con período  $d_1$  como

$$T_1(x, y) = \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x \right) \right] \quad (3.23)$$

y la transmitancia de la segunda rejilla, con período  $d_2$ , girada un ángulo  $\theta$  respecto a la anterior como

$$T_2(x, y) = \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{d_2} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad (3.24)$$

El producto de las dos transmitancias nos dará la irradiancia  $I(x, y)$  después de la combinación de las dos rejillas, como sigue

$$I(x, y) = \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x \right) \right] \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{d_2} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad (3.25)$$

y al efectuar el producto obtenemos

$$I(x, y) = 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x \right) \cos \frac{2\pi}{d_2} (x \cos \theta + y \sin \theta) +$$

$$\cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x \right) + \cos \frac{2\pi}{d_2} (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (3.26)$$

Para analizar la irradiancia de la combinación de las dos rejillas usaremos ahora la siguiente relación trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) \quad (3.27)$$

obteniendo así

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = & 1 + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x \right) + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{d_2} (x \cos \theta + y \sin \theta) + \\
 & \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x - \frac{2\pi}{d_2} x \cos \theta - \frac{2\pi}{d_2} y \sin \theta \right) + \quad (3.28) \\
 & \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x + \frac{2\pi}{d_2} x \cos \theta + \frac{2\pi}{d_2} y \sin \theta \right)
 \end{aligned}$$

Similarmente al procedimiento anterior, aplicamos un filtro pasa bajos que permita unicamente el paso de las frecuencias espaciales menores que la frecuencia espacial de la rejilla con la menor frecuencia, de tal manera que sólo queda el término constante y el penúltimo, y así podemos escribir

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = & 1 + \\
 & \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{d_1} x - \frac{2\pi}{d_2} x \cos \theta - \frac{2\pi}{d_2} y \sin \theta \right) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

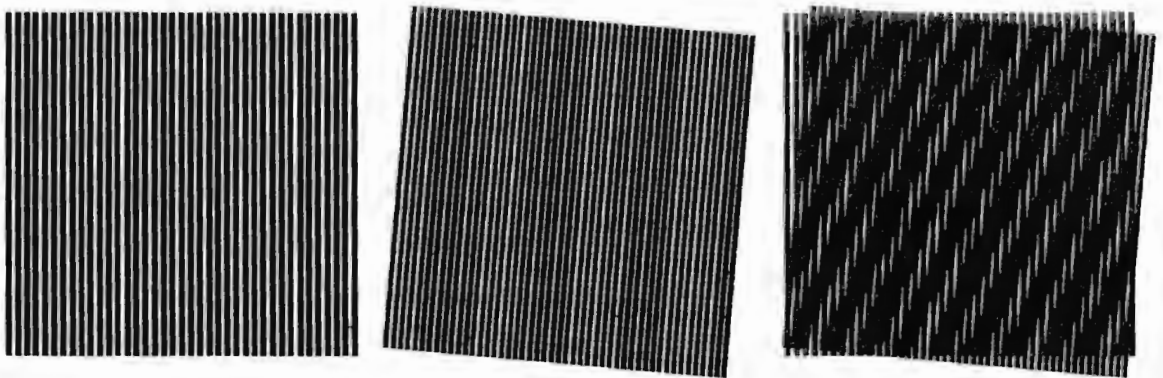
Las franjas de Moiré aparecen cuando el argumento del coseno es igual a un múltiplo entero de  $2\pi$ , por lo tanto obtenemos la ecuacion de una franja recta de Moiré como

$$\left( \frac{1}{d_1} - \frac{\cos \theta}{d_2} \right) x - \frac{\sin \theta}{d_2} y = n \quad (3.30)$$

De aquí podemos ver que el ángulo de la franja de Moiré  $\phi$  con respecto al eje  $y$  está dado por

$$\phi = \frac{d x}{d y} = \frac{\sin \theta}{\left( \frac{d_2}{d_1} \right) - \cos \theta} \quad (3.31)$$

Las dos rejillas pueden tener frecuencia espacial ligeramente diferentes si una es la autoimagen de otra idéntica, pero iluminada con un frente de onda ligeramente esférico.



**Figura 3.11.-** Medición de ángulos mediante interferometría de Talbot.

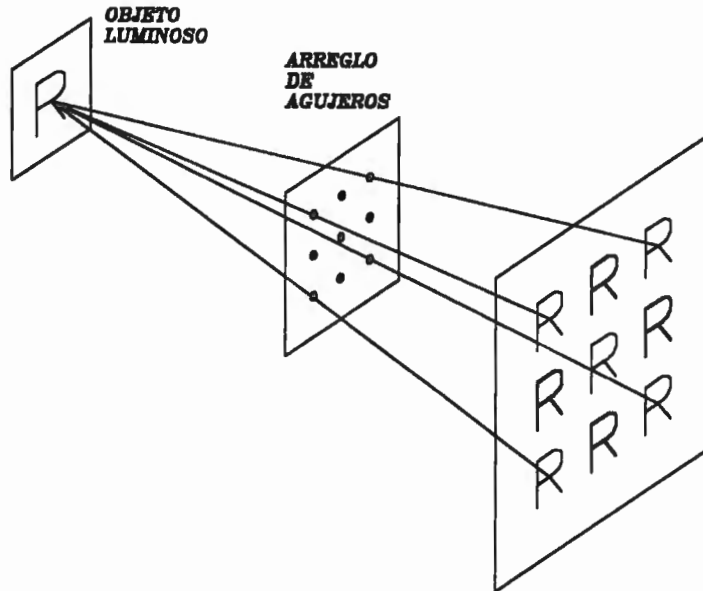
### 3.3 Óptica de Fourier. Procesamiento de Imágenes

Bryngdahl (1973) usó el fenómeno de la autoimagen para formar un arreglo de imágenes de un objeto iluminado difusamente, como se ilustra en la Fig. 3.12. El diámetro de los agujeros determina la distribución general de la irradiancia en el plano de la imagen. Si los agujeros tienen un diámetro grande sólo las imágenes centrales tienen una buena iluminación. Mientras más pequeños sean los agujeros más amplio es el campo iluminado. De acuerdo con la teoría de difracción de Fraunhofer de una abertura circular, un diámetro  $D$  de los agujeros nos iluminaría un campo circular con un semidiámetro angular  $\theta$  dado por

$$\text{sen } \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (3.32)$$

donde la orilla de este campo ya tiene iluminación nula. Conviene usar un diámetro de agujero lo más grande posible para lograr la mayor iluminación posible, pero tan grande que se reduzca el campo demasiado.

Por otro lado, la resolución de las imágenes están determinadas por el número y la separación de los agujeros. Está demostrado en cualquier libro de texto de óptica que en una rejilla de difracción el poder resolutor angular de una rejilla de difracción unidimensional con  $N$  agujeros está dada por (Malacara 1989)



**Figura 3.12.-** Formación de un arreglo de imágenes mediante una rejilla bidimensional.

$$\theta = \frac{\lambda}{N d} \quad (3.33)$$

donde  $d$  es la separación entre dos agujeros contiguos. Vemos que la resolución está definida por el producto  $Nd$ , es decir por la dimensión total del arreglo de agujeros. Sin embargo, no solamente el producto es importante, sino también el período  $d$ . La razón es muy simple, pues el período  $d$  da la separación angular entre las imágenes. Es importante darse cuenta que si la dimension transversal del arreglo de agujeros es igual al de una lente, con ambos se obtendría aproximadamente la misma resolución en la imagen. La diferencia más importante que no hay que olvidar es una dramática diferencia en la brillantez de la imagen.

## Conclusiones

Esta tesis es un estudio amplio sobre el fenómeno de la formación de autoimágenes con estructuras periódicas y de sus aplicaciones en la formación de imágenes de estructuras periódicas microscópicas con alta resolución, el procesamiento de imágenes y por supuesto, a la interferometría de Talbot.

La principal contribución de ésta tesis es el estudio de formación de imágenes con haces de luz no colimados, tanto convergentes como divergentes. Se analizan el efecto de esta divergencia o convergencia en efectos de primer orden, así como en la amplificación de la imagen. Igualmente se consideran los efectos de segundo orden como la distorsión o la curvatura de campo.

En el transcurso del desarrollo de la tesis se encontraron métodos y explicaciones alternativos a los ya existentes en la literatura, por lo que se encontró interesante su posterior publicación.

Finalmente, se hace una descripción de las principales aplicaciones del fenómeno de formación de autoimágenes. Especial mención se hace de la interferometría de Talbot.

En muchos de estos estudios se han hecho contribuciones originales que han sido ya publicados o están en proceso de publicación.



## APENDICE

### TRABAJOS PRESENTADOS EN CONGRESOS

- 1) Daniel Malacara-Doblado and Daniel Malacara-Hernández, SPIES's Annual Meeting, San Diego '94, 24 - 29 Julio 1994, "Talbot Imaging with Magnification", San Diego, Cal. U.S.A.
- 2) Daniel Malacara-Doblado and Daniel Malacara-Hernández, XXXVII Congreso Nacional de Física and CAM '94 Physics Meeting, 26 - 30 Septiembre 1994, "Analysis of the Presence of Aberrations in Talbot's Autoimages", Cancún, Qroo. México.
- 3) Daniel Malacara-Doblado and Daniel Malacara-Hernández, International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, SPIE's 40th Annual Meeting, 9 - 14 Julio 1995, "Some Comments About Autoimaging and the Montgomery Rings", San Diego, Cal. U.S.A. (Aceptado).

### TRABAJOS PUBLICADOS

- 1) Daniel Malacara-Doblado and Daniel Malacara-Hernández, "Talbot Imaging with Magnification", *Proc. SPIE*, **2263**, 322-330, (1994).
- 2) Daniel Malacara-Doblado and Daniel Malacara-Hernández, "Some Comments About Autoimaging and the Montgomery Rings", *Proc. SPIE*, **2576**, (1995). (En prensa).

## BIBLIOGRAFIA

Bar-Ziv E., S. Sgulim, O. Kafri and E. Keren, "Temperature Mapping in Flames by Moiré Deflectometry;" *Appl. Opt.*, **22**, 698-705 (1983).

Benton S. A. and D. P. Merrill, "Simplified Talbot Interferometers for Lens Testing;" *Opt. Eng.*, **15**, 3283-3311 (1976).

Chavel, P. and T. C. Strand, "Range Measurement Using Talbot Diffraction Imaging of Gratings;" *App. Opt.*, **23**, 862-871 (1984).

Cornejo A., "Ronchi Test;" in *Optical Shop Testing*, D. Malacara Ed., John Wiley and Sons, New York, 1991.

Cowley J. M. and A. F. Moodie, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B70**, 486, (1957a).

Cowley J. M. and A. F. Moodie, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B70**, 497, (1957b).

Cowley J. M. and A. F. Moodie, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B70**, 505, (1957c).

Fouéré J. C. and D. Malacara, "Focusing Errors in a Collimating Lens or Mirror: Use of a Moiré Technique;" *Appl. Opt.* **13**, 1322-1326 (1974).

Ganesan A. R. and P. Venkateswarlu, "Laser Beam Collimation Using Talbot Interferometry;" *Appl. Opt.* **32**, 2918-2920 (1993).

Glatt I. And O. Kafri, "Moiré Deflectometry - Ray Tracing Interferometry;" *Opt. and Lasers in Eng.*, **8**, 227-320 (1988).

Glatt I. and A. Livnat, "Determination of the Refractive Index of a Lens Using Moiré Deflectometry;" *Appl. Opt.*, **23**, 2241-2243 (1984).

Glatt I., A. Livnat, O. Kafri & D. F. Heller, "Autocollimator Based on Moiré Deflectometry;" *Appl. Opt.*, **23**, 2673-1674 (1984).

- Kafri O. and I. Glatt, "High Sensitivity Reflection-Transmission Moiré Deflectometer;" *Appl. Opt.*, **27**, 351-353 (1988).
- Kafri O. and J. Krasinski, "High Sensitivity Moiré Deflectometry Using a Telescope;" *Appl. Opt.*, **24**, 2746-2748 (1985).
- Kafri O. and A. Livnat, "Reflective Surface Analysis Using Moiré Deflectometry;" *App. Opt.*, **20**, 3098-3100 (1981).
- Keren E., "Immunity to Shock and Vibration in Moiré Deflectometry;" *Appl. Opt.*, **24**, 3028-3031 (1985).
- Keren E. and O. Kafri, "Diffraction Effects in Moiré Deflectometry;" *J. Opt. Soc. Am.*, **A2**, 111-120 (1985).
- Keren E., A. Livnat and I. Glatt, "Moiré Deflectometry with Pure Sinusoidal Gratings;" *Opt. Lett.*, **10**, 167-169 (1985).
- Latimer P. and Randy F. Crouse, "Talbot Effect Reinterpreted;" *Appl. Opt.*, **31**, 80-89 (1992).
- Latimer P., "Talbot Plane Patterns: Grating Images or Interference Effects?;" *Appl. Opt.* **32**, 1078-1083 (1993).
- Latimer P., "Talbot Effect Reinterpreted: Reply to Comment;" *Appl. Opt.* **32**, 3468-3469 (1993).
- Liren L., "Talbot and Lau Effects on Incident Beams of Arbitrary Wavefront, and Their Use;" *Appl. Opt.* **28**, 4668-4678 (1989).
- Lim C. S. and V. Srinivasan, "Talbot Interferometer with Computer Generated Gratings;" *Opt. Commun.*, **44**, 219-222 (1983).
- Livnat A. & O. Kafri, Fringe "Addition in Moiré Analysis;" *Appl. Opt.*, **22**, 3013-3015 (1983).

Malacara D., *Optica Basica*, Fondo de Cultura Económica-SEP, México, D. F., 1989.

Malacara D., "Some Properties of the Near Field of Diffraction Gratings;" *Opt. Acta.* **21**, 631-641 (1974).

Malacara D. and A. Cornejo, "The Talbot Effect in the Ronchi Test;" *Bol. Inst. de Tonantzintla*, **1**, 193-196 (1974).

Montgomery W. D., *J. Opt. Soc. Am.*, "Self-Imaging Objects of Infinite Aperture;" **57**, 772 (1967).

Nakano Y. and K. Murata, "Talbot Interferometry for Measuring the Focal Length of a Lens;" *Appl. Opt.*, **24**, 3162-3166 (1985).

Patorski K., "The Self-Imaging Phenomenon and its Applications;" in *Progress in Optics*, Vol. XXVII, E. Wolf, Ed., pp. 1-108, North-Holland, Amsterdam, 1989.

Patorski K., "Talbot Interferometry with Increased Shear: Further Considerations;" *Appl. Opt.*, **25**, 1111-1116 (1986).

Patorski K., S. Yokozeiki and T. Suzuki, "Collimation Test by Double Grating Shearing Interferometer;" *Appl. Opt.*, **15**, 1234-1240 (1976).

Patorski, K. "Moiré Methods in Interferometry;" *Opt. And Lasers in Eng.*, **8**, 147-170 (1988).

Rayleigh Lord, *Philos. Mag.*, **11**, 196 (1881).

Rodriguez Vera R., *Some Advances in Optical Contouring of Diffuse Objects Using Moiré and Speckle Techniques*, Tesis Doctoral, Loughborough University of Technology, 1993.

Rogers G. L., *Brit. J. Appl. Phys.*, **14**, 657 (1963).

Silva D. E., "Talbot Interferometer for Radial and Lateral Derivatives;" *Appl. Opt.*, **11**, 2613-2624 (1972).

Sudol R. and B. J. Thompson, "Lau Effect: Theory and Experiment;" *Appl. Opt.*, **20**, 1107-1116 (1981).

Szwaykowski P., "Talbot Effect Reinterpreted: Comment;" *Appl. Opt.* **32**, 3466--3467 (1993).

Silva D. E., "Talbot Interferometer for Radial and Lateral Derivatives;" *Appl. Opt.* **11**, 2613-2624 (1972).

Silva D. E., "A Simple Interferometric Method of Beam Collimation;" *Appl. Opt.*, **10**, 1980-1982 (1971).

Sudol R. and B. J. Thompson, "Lau Effect: Theory and Experiment;" *Appl. Opt.*, **20**, 1107-1116 (1981).

Szwaykowski P., "Talbot Effect Reinterpreted: Comment;" *Appl. Opt.*, **32**, 3466-3467 (1993).

Takeda M. and S. Kobayashi, "Lateral Aberration Measurements with a Digital Talbot Interferometer;" *Appl. Opt.*, **23**, 1760-1764 (1984).

Talbot W. H. F., "Facts Relating to Optical Science;" No. 4. *Phil. Mag.*, **9**, 401 (1836).

Weisel H., *Ann. Phys. (Germany)* **33**, 995, (1910)

Winkelmann A., *Ann. Phys. (Germany)* **27**, 905 (1908)

Wolfke M., *Ann. Phys. (Germany)* **34**, 277 (1911)

Yokozeki S., K. Patorski and K. Ohnishi, "Collimation Method Using Fourier Imaging and Moiré Techniques;" *Opt. Commun.*, **14**, 401-405 (1975).