



# ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS EN METROLOGÍA DE SUPERFICIES ASFÉRICAS

“Versión definitiva. Incluye cambios sugeridos por revisores”



DOCTORADO EN CIENCIAS (ÓPTICA)

*Asesores: Dr. Zacarías Malacara Hernández*

*Dr. Daniel Malacara Hernández*

*Estudiante: Belém Estefanía Mancilla Escobar*

*Marzo de 2020  
León, Guanajuato, México*



*Dedicada a mis padres, hermanas y hermanos, cuyo apoyo incondicional me da la fortaleza para seguir adelante.*

## *Agradecimientos*

*A mi asesores de tesis, Dr. Zacarías Malacara Hernández y Dr. Daniel Malacara Hernández, por sus enseñanzas, sus conocimientos, su experiencia y su paciencia para poder llevar a cabo este trabajo de tesis.*

*A mis compañeros y amigos, Josué, Pablo, Maribel, Javier y Luz, por sus consejos y apoyo durante el doctorado.*

*A la Dra. Cynthia Villalobos, por su apoyo en las mediciones necesarias para la publicación de artículos de investigación.*

*A los sinodales, Dr. Moisés Padilla y Dr. Maximino Avendaño, por sus comentarios en pro de este trabajo de tesis.*

*Al Centro de Investigaciones en Óptica y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la oportunidad de llevar a cabo los estudios de doctorado en esta institución y por el apoyo económico otorgado a través de becas.*

# Resumen

El uso de superficies esféricas se ha incrementado en los últimos años debido a la reducción de tamaño, peso y corrección de aberraciones que producen al introducirse en un sistema óptico.

A diferencia de la facilidad para probar una superficie esférica, probar una superficie esférica puede resultar un proceso complicado primeramente porque ésta puede ser una superficie de revolución con una curvatura bastante pronunciada o puede ser una forma libre. Por lo tanto, no existe un único método para probar superficies esféricas. Además, al probarla con métodos interferométricos tradicionales, se produce un patrón de franjas con un espaciamiento lo suficientemente pequeño para violar el límite de Nyquist.

Se han desarrollado varios métodos y modificado los interferómetros tradicionales para llevar a cabo la prueba de superficies esféricas. Entre las nuevas técnicas se encuentran los Hologramas Generados por Computadora (CGH's) y la segmentación del frente de onda en zonas (*wavefront stitching*). En este trabajo de tesis, describimos un nuevo método desarrollado para la prueba de superficies ópticas utilizando una combinación de la teoría de corrimiento de fase e interferometría de desplazamiento lateral con un método de Saunders modificado. Este nuevo método ha sido probado exitosamente en superficies esféricas tanto en simulaciones como de manera experimental. Es necesario aplicarlo a superficies esféricas para medir su capacidad.

Se presenta también el diseño de un nuevo queratómetro con la capacidad de medir el radio de curvatura de la córnea y la potencia y eje de astigmatismo en el ojo humano. De acuerdo con las mediciones realizadas, este nuevo instrumento tiene un 95 % de confiabilidad en la medición del radio de curvatura y potencia de cilindro de la córnea. Debido al diseño de este queratómetro, tiene la capacidad para medir el radio de curvatura de superficies tanto esféricas como esféricas. Los resultados indican un 90 % de confiabilidad en estas mediciones.

Nuestro trabajo futuro es continuar realizando más pruebas sobre más superficies esféricas para verificar la capacidad del nuevo método desarrollado con interferometría de desplazamiento lateral y para aumentar la estadística en las mediciones hechas con el queratómetro sobre superficies esféricas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Las superficies esféricas	3
1.2. Descripción matemática de una superficie esférica	4
1.3. Los polinomios Forbes	5
1.4. Los polinomios de Zernike	6
<b>2. Métodos de pruebas ópticas de superficies esféricas</b>	<b>8</b>
2.1. Pruebas geométricas	8
2.1.1. Prueba de Foucault	8
2.1.2. Prueba de Ronchi	10
2.1.3. Prueba de Hartmann	12
2.2. Pruebas interferométricas	14
2.2.1. Interferómetro de Fizeau	15
2.2.2. Interferómetro de Twyman-Green	15
2.2.3. Hologramas Generados por Computadora (CGH's)	16
2.2.4. Frentes de onda en mosaico ( <i>wavefront stitching</i> )	18
<b>3. Aspectos prácticos en la medición de superficies esféricas</b>	<b>20</b>
3.1. Medida de la curvatura de una superficie esférica por métodos geométricos: el caso de la lente TOPCON	20
3.2. Medida y reconstrucción de la forma de la superficie por interferometría de desplazamiento lateral.	22
3.2.1. Método de Saunders	24
3.2.2. Método de Saunders modificado	25
3.2.3. Algoritmo de corrimiento de fase de tres pasos <i>T Tilted</i>	28
3.2.4. Interpolación de los valores del frente de onda dentro de cada celda cuadrada	29
3.3. Prueba de la reconstrucción del frente de onda con el método propuesto.	31
3.3.1. Interferogramas sintéticos	31
3.3.2. Interferogramas experimentales	32
3.3.3. Resultados	32

<b>4. Diseño y caracterización de un queratómetro óptico</b>	<b>41</b>
4.1. Diseño y construcción de un queratómetro . . . . .	42
4.2. Caracterización y análisis de datos . . . . .	42
4.2.1. Cálculo del radio de curvatura . . . . .	44
4.2.2. Sensitividad . . . . .	46
4.2.3. Análisis de error . . . . .	47
4.2.4. Medición de córneas con astigmatismo . . . . .	49
4.3. Pruebas y calibración del instrumento . . . . .	51
4.3.1. Resultados estadísticos . . . . .	57
4.4. Aplicación del queratómetro en la medida de la curvatura de una lente . . . . .	57
<b>5. Discusión</b>	<b>60</b>
5.1. Método de interferometría de desplazamiento lateral . . . . .	60
5.2. Diseño y caracterización de un nuevo queratómetro . . . . .	62
<b>6. Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Las superficies esféricas

Una asfera es un dispositivo óptico cuya forma se desvía de una esfera. Matemáticamente se define mediante una ecuación polinomial, ya sea como una superficie cónica de revolución o como las llamadas "formas libres" [1].

Es bien conocido el uso que han tenido las superficies esféricas en óptica debido a su fácil manufactura y manejo, sin embargo, el uso de asferas puede reducir el número de elementos ópticos en un sistema, reduciendo así el tamaño y peso del mismo, así como reducir aberraciones propias de los elementos esféricos [1].

En los últimos años, se ha incrementado considerablemente el uso de superficies esféricas en sistemas ópticos. Por ejemplo, en el área de instrumentación óptica, las superficies esféricas contribuyen a una mejor corrección de imágenes, aumento del campo de visión y reducción de elementos de los sistemas ópticos [2]. En la industria automotriz y aeroespacial, algunos sistemas ópticos son diseñados con asferas para volver más eficiente la iluminación [2]. En oftalmología, se utilizan superficies esféricas para lentes correctivas incluyendo lentes progresivas para corregir presbicia así como los nuevos lentes de contacto rígidos que conllevan formas libres en su diseño [2].

Entre más compleja sea una superficie óptica, más complejo es el método para su manufactura y más compleja es la verificación de su calidad óptica. Las nuevas máquinas de control numérico (CNC), han facilitado en los últimos años la fabricación de superficies esféricas [2]. Algunos métodos convencionales para prueba de asferas son la perfilometría, donde con un bonete se hace contacto con la superficie esférica. Sin embargo, existe la posibilidad de dañar la superficie y causar surcos en ella debido a la fricción con el bonete [2].

Otra técnica muy utilizada para prueba de asferas son los hologramas generados por computadora (CGH's por sus siglas en inglés). Uno de los grandes problemas con este método, es lo costoso que resulta ya que se necesita un holograma específico para una superficie única, es decir, cada superficie bajo prueba, necesita su propio holograma [2]. Se ha utilizado la interferometría para desarrollar pruebas ópticas a asferas. Debido a la curvatura de las asferas, existe un problema con este método, ya que se crea una enorme

cantidad de líneas de interferencia que dificultan su análisis [3]. Para evitar este problema, se ha hecho uso de la interferometría de mosaico (*stitching interferometry*). En esta técnica, la superficie se divide en partes, y se aplica la prueba interferométrica a cada una. Finalmente, se unen todas las partes para realizar un análisis completo de toda la superficie. Sin embargo, se requiere de una alta precisión para llevar a cabo la prueba en cada sub-apertura de la superficie [3].

## 1.2. Descripción matemática de una superficie esférica

En la sección anterior se mencionó que la representación matemática de una superficie esférica puede provenir de una superficie cónica de revolución o puede ser la llamada forma libre.

Podemos representar la sagita  $Z$  de una superficie cónica de la siguiente manera [4]:

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}} \quad (1.1)$$

donde:

$c$  es la curvatura de la esfera osculadora, y  $S$  es una función que depende de las variables cartesianas  $(x, y)$  de la siguiente manera:  $S^2 = x^2 + y^2$ .  $K = -e^2$ , es la constante de conicidad. La variable  $e$  es la excentricidad de la cónica. En la Fig. 1.1 se puede observar un esquema representando el concepto de sagita. En la Tabla 1.1, se muestran los valores de  $K$  para diferentes superficies [4].

Tabla 1.1: Valores de  $K$  para superficies cónicas

Tipo de cónica	$K$
Hiperboloide	$K < -1$
Paraboloide	$K = -1$
Elipse rotada alrededor de su eje mayor (esferoide prolato o elipsoide)	$-1 < K < 0$
Esfera	$K = 0$
Elipse rotada alrededor de su eje menor (esferoide oblato)	$K > 0$

A la ecuación para la cónica de revolución, se pueden agregar los términos esféricos de deformación, de la siguiente manera:

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}} + A_1S^4 + A_2S^6 + A_3S^8 + A_4S^{10} + \dots \quad (1.2)$$

donde:  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  son los coeficientes esféricos de deformación.

La ecuación 1.2 es la representación matemática más común de una superficie esférica con simetría rotacional. Sin embargo, en la práctica, es complicada la medición directa de

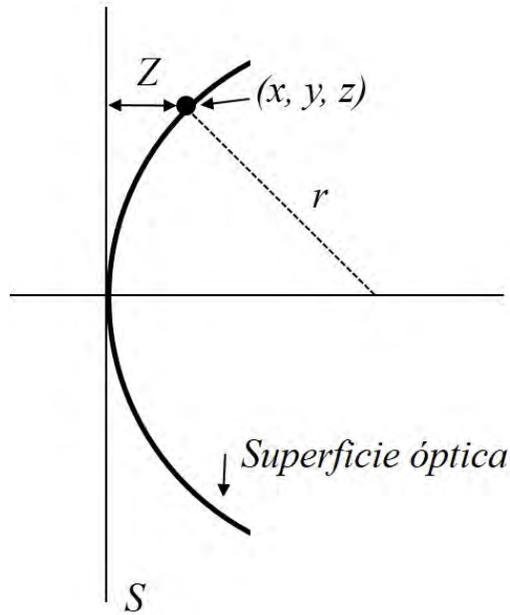


Figura 1.1: Esquema que representa el concepto de sagita.

los coeficientes esféricos de deformación, y éstos son numéricamente inestables ya que no es eficiente en el número de coeficientes necesarios, su precisión decimal y las diferentes dimensiones en las que se encuentran [4, 5]. Forbes y Brophy [5], introdujeron una nueva representación matemática para una superficie esférica, la cual se abordará en la siguiente sección.

### 1.3. Los polinomios Forbes

Para evitar los problemas numéricos con la representación matemática de la sagita para una superficie esférica y los coeficientes esféricos de deformación (Ec. 1.2), Forbes y Brophy [5] han propuesto una nueva representación sagital para una superficie esférica. Esta representación utiliza una base de polinomios ortogonales llamados *polinomios Q*. Esta base facilita el diseño óptico, la tolerancia y la interpretación de los términos esféricos [5]. De acuerdo con Forbes y Brophy [5], todos los coeficientes de los *polinomios Q* se encuentran en la misma dimensión, lo que permite una mejor interpretación, tolerancia y uso para describir y diseñar una superficie esférica.

La representación matemática de los *polinomios Q* es la siguiente [5]:

$$Z = \frac{c_{bfs} S^2}{1 + \sqrt{1 - c_{bfs} S^2}} + \frac{x(1-x)}{\sqrt{1 - c_{bfs}^2 S_{max}^2 x}} \sum_{m=0}^M a_m Q_m^{bfs}(x) \quad (1.3)$$

donde:  $c_{bfs}$  es la curvatura de la esfera que mejor se ajusta (*best fit sphere*),  $x = (\frac{\rho}{\rho_{max}})^2$ ,  $S^2 = x^2 + y^2$  es la coordenada radial de la asfera [5].  $S_{max}$  es la mitad de la apertura total de la superficie,  $Q_m^{bfs}(x)$  son polinomios ortogonales de orden  $m$ . Los coeficientes  $a_m$  indican el valor *PV* con el que contribuye cada polinomio a la sagita [5].

## 1.4. Los polinomios de Zernike

La mayoría de los sistemas ópticos cuentan con una simetría rotacional alrededor de su centro y del eje óptico. Las aberraciones del frente de onda en el eje también tienen simetría rotacional respecto al centro y al eje. Los polinomios de Zernike son una serie de polinomios ortogonales sobre una pupila circular con simetría de rotación. Las aberraciones del frente de onda pueden ser expresadas como una combinación lineal en series de potencias de los polinomios de Zernike [3].

La función de aberración de un sistema con simetría rotacional y pupila de salida circular puede ser expandida en términos de los polinomios de Zernike  $R_n^m(\rho)$  cos  $m\theta$  que son ortogonales sobre un círculo unitario, de acuerdo a la siguiente expresión [3]:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{nm} Z_n^m(\rho, \theta) \quad (1.4)$$

donde  $c_{nm}$  son los coeficientes de expansión,  $n$  y  $m$  son enteros positivos incluyendo al cero,  $n - m \geq 0$  y pares, y [3]:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = [2(n+1)/(1 + \delta_{m0})]^{1/2} R_n^m(\rho) \cos m\theta \quad (1.5)$$

es un polinomio ortonormal de Zernike. Se tiene que  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, y [3]:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! (\frac{n+m}{2} - s)! (\frac{n-m}{2} - s)!} \rho^{n-2s} \quad (1.6)$$

es un polinomio de grado  $n$  en  $\rho$  conteniendo términos en  $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^m$ . Los polinomios radiales  $R_n^m(\rho)$  son pares o impares en  $\rho$  dependiendo si  $n$  o  $m$  son pares o impares [3]. Los coeficientes de expansión de Zernike,  $c_{nm}$  están dados por [3]:

$$c_{nm} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(\rho, \theta) Z_n^m(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (1.7)$$

La ventaja de utilizar polinomios de Zernike para expresar las aberraciones de la función de onda, es que debido a sus propiedades de ortogonalidad y ortonormalidad, la desviación estándar de los coeficientes  $c_{nm}$  es independiente del número de términos utilizados en la función de aberración, lo cual minimiza la variación y aumenta la tolerancia de los coeficientes  $c_{nm}$  [3]. En la Tabla 1.2 se muestran algunos polinomios de Zernike ortonormales (en coordenadas polares) y su nombre asociado con algunas aberraciones.

Tabla 1.2: Polinomios ortonormales de Zernike y aberraciones asociadas

$n$	$m$	$Z_n^m(\rho, \theta)$	Aberración asociada
0	0	1	Pistón
1	1	$2\rho \cos \theta$	Distorsión ( <i>tilt</i> )
2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	Curvatura de campo (defoco)
2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo primario
3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	Coma primaria
3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$	
4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Esférica primaria
4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	Astigmatismo secundario
4	4	$\sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$	
5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	Coma secundaria
5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos 3\theta$	
5	5	$\sqrt{12}\rho^5 \cos 5\theta$	

# Capítulo 2

## Métodos de pruebas ópticas de superficies esféricas

Existen diferentes métodos para probar superficies tanto esféricas como asféricas. Los métodos para probar estas últimas resultan ser más específicos ya que la medición de frentes de onda asféricos es más complicada que la medición de frentes de onda esféricos o planos. Las superficies asféricas generan una gran cantidad de líneas de interferencia cuando se usa como referencia un frente de onda esférico, por lo que no todos los métodos interferométricos logran definir el espaciamiento entre franjas [3]. En este capítulo mostramos la clasificación de las pruebas ópticas en geométricas e interferométricas. Describimos su aplicación a superficies esféricas y asféricas.

### 2.1. Pruebas geométricas

Las pruebas geométricas han demostrado tener gran capacidad para la prueba de superficies. Su objetivo básico es detectar desplazamientos o movimientos de las trayectorias esperadas de los rayos de luz debido a aberraciones ópticas, difracción o deformaciones en la superficie [3]. Estas pruebas son de alta sensibilidad y son fáciles de armar e interpretar (desde el punto de vista geométrico). Las tres pruebas geométricas que describiremos en esta sección son la prueba de Foucault, la prueba de Ronchi y la prueba de Hartmann.

#### 2.1.1. Prueba de Foucault

También conocida como la prueba de la navaja, es utilizada para detectar aberraciones transversales. Esta prueba consiste en bloquear parcialmente los rayos provenientes de la superficie iluminada, de manera que se produzca una sombra sobre la superficie [3]. La sombra se verá modificada en presencia de deformaciones o aberraciones sobre la superficie. La configuración para esta prueba se muestra en la Fig. 2.1. De acuerdo con esta figura, se coloca una fuente puntual de luz a un lado del centro de curvatura del espejo.

Enseguida se coloca la navaja ya sea dentro del foco o fuera del foco. Dependiendo en cuál de estas dos posiciones se coloque, se verá iluminada una parte del espejo y la otra sombreada (en caso de ser un espejo perfecto). Conforme se mueva la navaja desde dentro del foco hacia afuera del foco, la sombra se moverá de un lado a otro del espejo. Si la navaja se coloca justo en el centro de curvatura, el espejo se oscurecerá por completo, siendo éste un excelente método para medir la curvatura del espejo [3]. En las Figuras 2.2 y 2.3 se muestran algunos casos en los que se ha aplicado esta prueba.

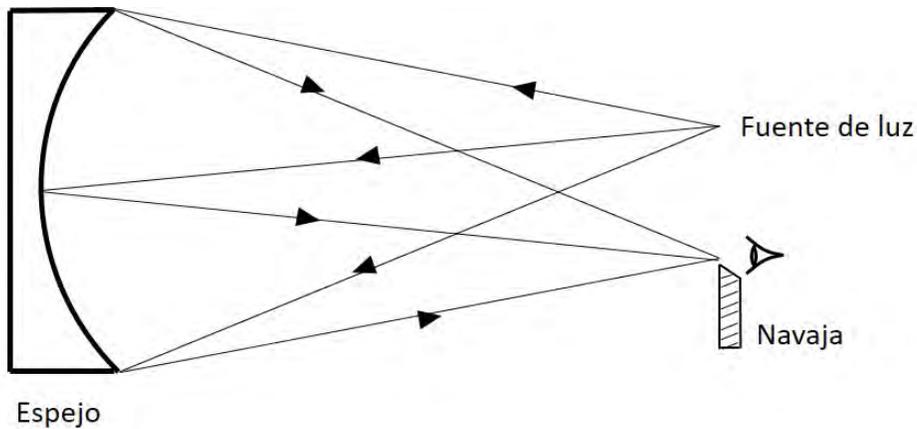


Figura 2.1: Configuración de la prueba de Foucault para un espejo cóncavo.

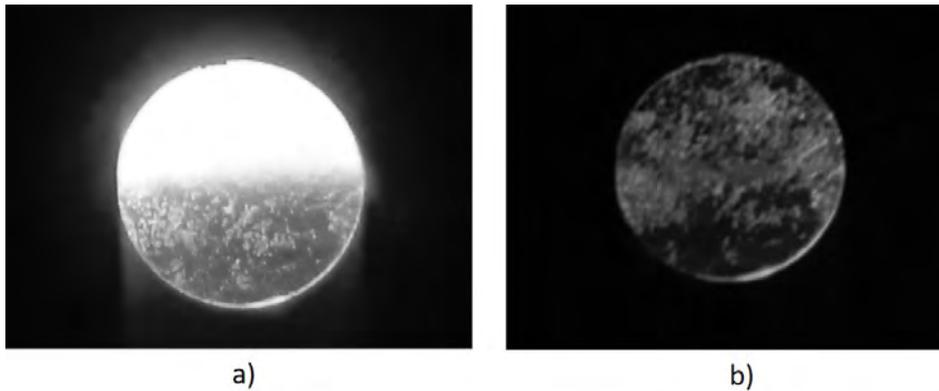


Figura 2.2: Prueba de Foucault realizada a un espejo esférico de telescopio libre de aberraciones: a) dentro de foco, b) en el centro de curvatura.

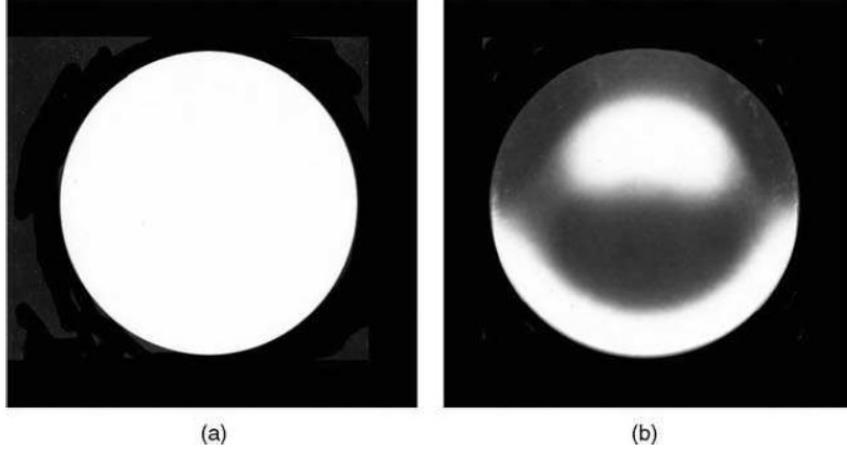


Figura 2.3: Prueba de Foucault aplicada a un espejo parabólico: a) antes de introducir la navaja, b) después de introducir la navaja. *Imagen tomada de D. Malacara, Optical Shop Testing (1992) pp. 277 [3].*

### 2.1.2. Prueba de Ronchi

Esta prueba es muy similar a la prueba de Foucault, pero en lugar de colocar una navaja, se coloca una rejilla. Esta prueba puede ser considerada tanto geométrica como interferométrica, ya que realmente, las sombras de la rejilla que se producen sobre la superficie, se pueden interpretar como franjas de difracción o interferométricas [3]. En la Fig. 2.4 se muestra la configuración geométrica de la prueba de Ronchi. De acuerdo con esta figura, las aberraciones transversales  $TA$  pueden ser medidas directamente [3]. Las aberraciones del frente de onda se pueden aproximar a las aberraciones transversales de una manera muy precisa utilizando las siguientes expresiones [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &\approx -\frac{TA_x}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial y} &\approx -\frac{TA_y}{r} \end{aligned} \quad (2.1)$$

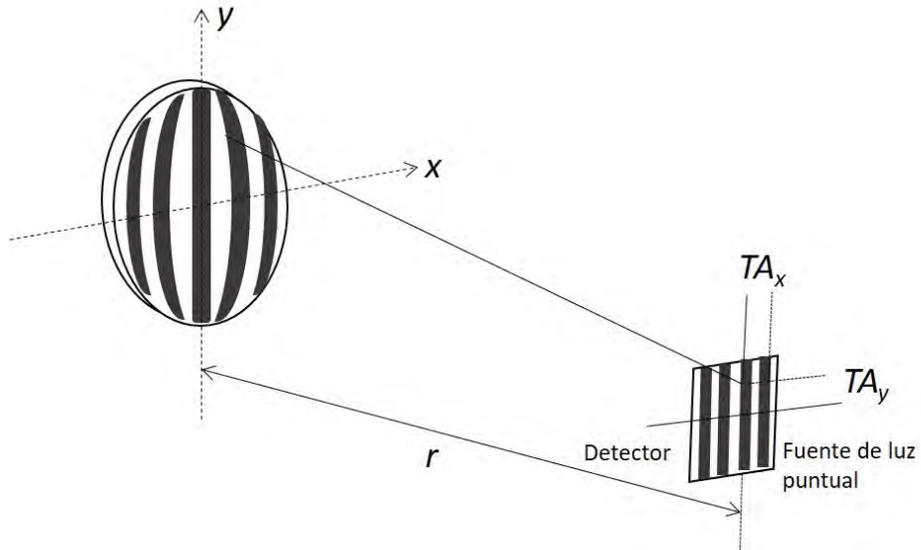


Figura 2.4: Configuración geométrica de la prueba de Ronchi.  $TA_x$  y  $TA_y$  son las aberraciones transversales en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente. La fuente de luz se coloca detrás de la rejilla de Ronchi y el detector se coloca cercano a un lado de la rejilla.  $r$  es la distancia entre la superficie óptica y la rejilla de Ronchi y puede ser variada.

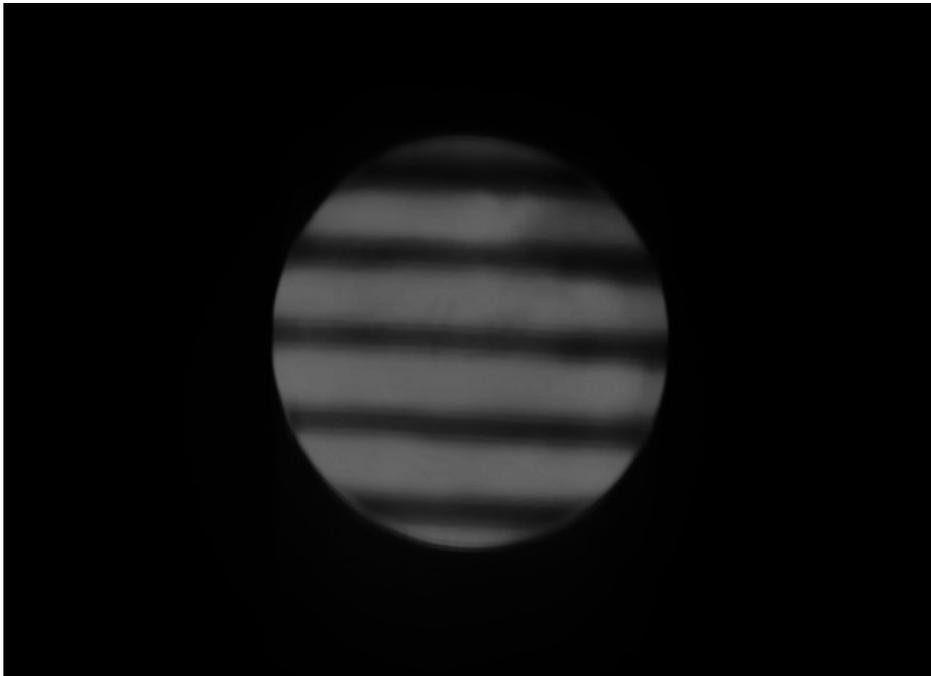


Figura 2.5: Prueba de Ronchi aplicada a un espejo parabólico de telescopio newtoniano.

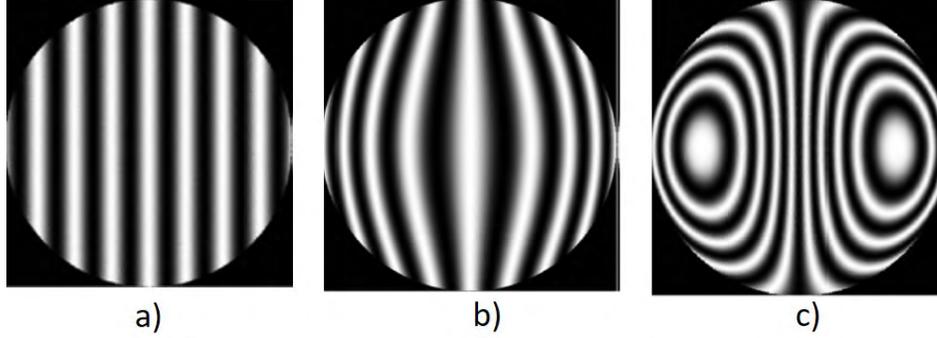


Figura 2.6: Prueba de Ronchi aplicada a: a) espejo esférico introduciendo defoco, b) espejo parabólico, c) espejo hiperbólico. *Imágenes tomadas de Aguirre-Aguirre et al. (2013) [6].*

En las Figs. 2.5 y 2.6 se muestran algunos ejemplos de la prueba de Ronchi aplicada a diferentes geometrías de espejos. Los avances más recientes que se han realizado para aplicar la prueba de Ronchi, han sido generar la rejilla de Ronchi de manera digital y proyectarla hacia la superficie utilizando una pantalla LCD, la cual a su vez funciona como fuente de luz [7, 8, 9]. De esta manera se puede manipular la frecuencia de las líneas en la rejilla. Utilizando este método, también se puede realizar una prueba de Ronchi inversa, en la que se simula el patrón esperado del Ronchigrama, introduciendo la cantidad de aberraciones esperadas en tiempo real, y observar en el Ronchigrama las líneas paralelas correspondientes a la rejilla de Ronchi [10].

### 2.1.3. Prueba de Hartmann

La prueba de Hartmann utiliza una pantalla con perforaciones en forma de puntos que se proyecta sobre la superficie a probar. Al igual que la prueba de Ronchi, la prueba de Hartmann también mide las aberraciones transversales  $TA$  relacionadas con las pendientes del frente de onda [3], es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &\approx -\frac{TA_x}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial y} &\approx -\frac{TA_y}{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

En la Fig. 2.7 se muestra la configuración geométrica de la prueba de Hartmann y en la Fig. 2.8 se muestra el patrón de manchas obtenidas al aplicar la prueba de Hartmann a un espejo hiperbólico de telescopio [3]. El alcance para reconstruir el frente de onda de una superficie utilizando la prueba de Hartmann, ha sido demostrado por Gantes et al. [11], introduciendo coeficientes de aberración de órdenes superiores partiendo del ajuste a las pendientes del frente de onda y las aberraciones transversales.

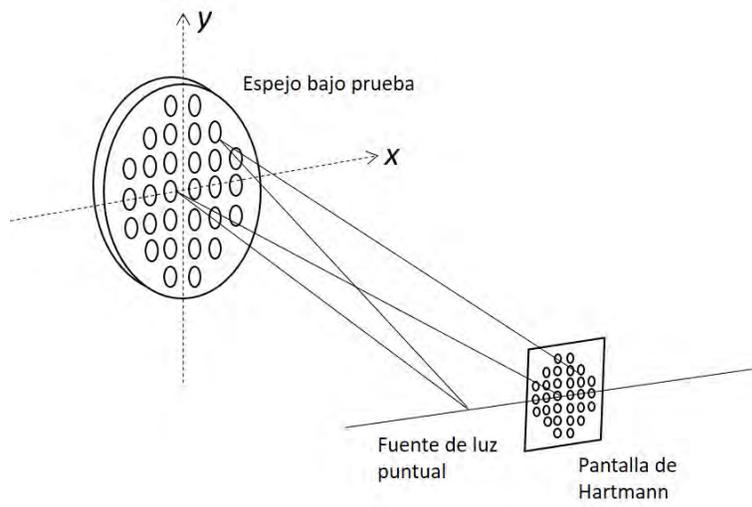


Figura 2.7: Configuración geométrica de la prueba de Hartmann.

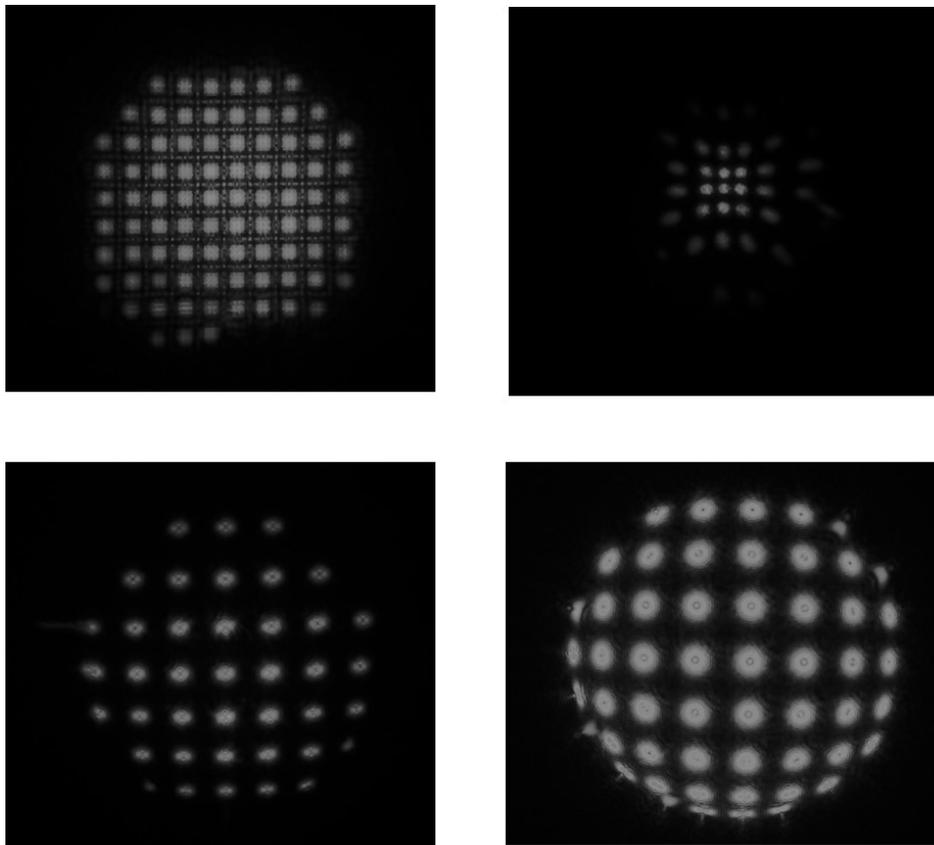


Figura 2.8: Prueba de Hartmann aplicada a diferentes dispositivos ópticos.

## 2.2. Pruebas interferométricas

Como ya se mencionó anteriormente, resulta más complicado medir y probar un frente de onda esférico que un frente de onda esférico o plano [3]. Ésto debido en parte a la gran variedad de superficies esféricas que pueden existir, desde las superficies de revolución hasta las formas libres, y en parte a una pronunciada curvatura en la misma superficie esférica.

Frecuentemente, para probar superficies esféricas se utiliza lo que se llama prueba nula (*null test*) la cual consta en introducir un dispositivo óptico de manera que se anulen las franjas de interferencia cuando se obtiene el frente de onda deseado o esperado [3]. Varios métodos utilizan esta prueba nula sin embargo, no es una prueba sencilla y puede representar una fuente de error [3].

Existe otro problema al probar superficies esféricas de revolución y es la gran cantidad de franjas producidas, utilizando por ejemplo los interferómetros de Fizeau y de Twyman-Green, y el límite de Nyquist. Este tipo de superficies producen franjas concéntricas muy cercanas, disminuyendo el espaciamiento entre las líneas hacia el borde de la superficie [3]. Al violar el límite de Nyquist, el detector mide la intensidad luminosa promedio sobre cada píxel. Si el espaciamiento entre líneas es menor que dos veces el tamaño del píxel, el contraste entre líneas se ve disminuido y se pierde la frontera entre líneas (ver Fig. 2.9a)). Por el contrario, si el tamaño del píxel es mucho más pequeño que el espaciamiento entre las franjas, se producen líneas falsas, llamadas artefactos, lo cual se puede observar en la Fig. 2.9b) [3].

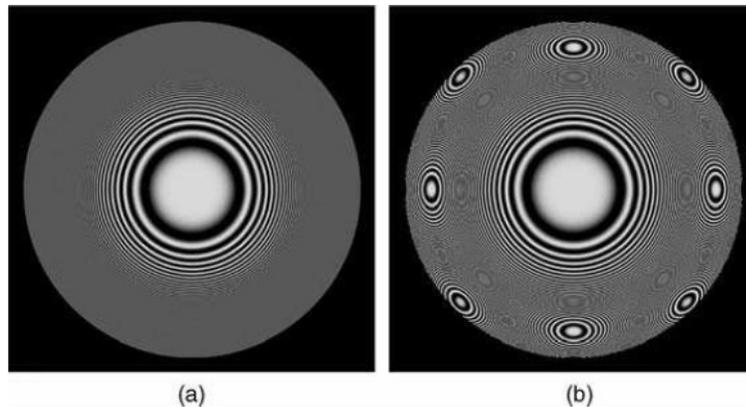


Figura 2.9: Interferograma de un frente de onda esférico con aberración esférica primaria en el foco paraxial: a) con espaciamiento entre franjas más pequeño que dos veces el tamaño del píxel del detector, b) con el tamaño del píxel menor que el espaciamiento entre franjas. En ambos casos, se viola el límite de Nyquist. *Imagen tomada de D. Malacara, Optical Shop Testing (1992) pp. 437 [3].*

A continuación se describen brevemente los interferómetros de Fizeau y de Twyman-

Green así como otras técnicas interferométricas utilizadas para la prueba de superficies esféricas.

### 2.2.1. Interferómetro de Fizeau

En la Fig. 2.10 se muestra el arreglo básico de un interferómetro de Fizeau. El plano de referencia se monta generalmente junto con la colimadora y se alinea de tal forma que la imagen de la fuente puntual reflejada en la superficie de prueba se forma en el mismo punto. El plano de referencia puede tener una curvatura de 10 a 20 minutos de arco. Para poder observar las franjas, se coloca un divisor de haz cerca de la fuente puntual de luz. Manipulando la inclinación del plano de referencia y disminuyendo lo más posible el espacio vacío entre éste y la superficie de prueba, se logra formar y visualizar las franjas de interferencia [3].

Asfour y Poleshchuk [12] y Gemma et al. [13] han combinado el interferómetro de Fizeau con hologramas generados por computadora y con pruebas nulas, respectivamente, para probar superficies esféricas y evitar el problema del espaciamiento de franjas mencionado anteriormente.

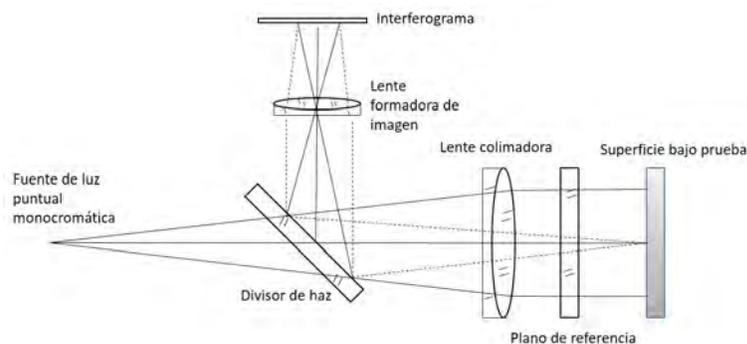


Figura 2.10: Arreglo básico de un interferómetro de Fizeau.

### 2.2.2. Interferómetro de Twyman-Green

El interferómetro de Twyman-Green es una modificación del interferómetro de Michelson. En la Fig. 2.11 se muestra el esquema del arreglo básico de este interferómetro [3]. Es posible colocar la superficie de prueba entre el espejo 2 y el divisor de haz, de esta manera, el frente de onda de referencia reflejado en el espejo 1 y el frente de onda de la superficie de prueba, coinciden en el divisor de haz, haciendo posible la visualización de las franjas en el detector.

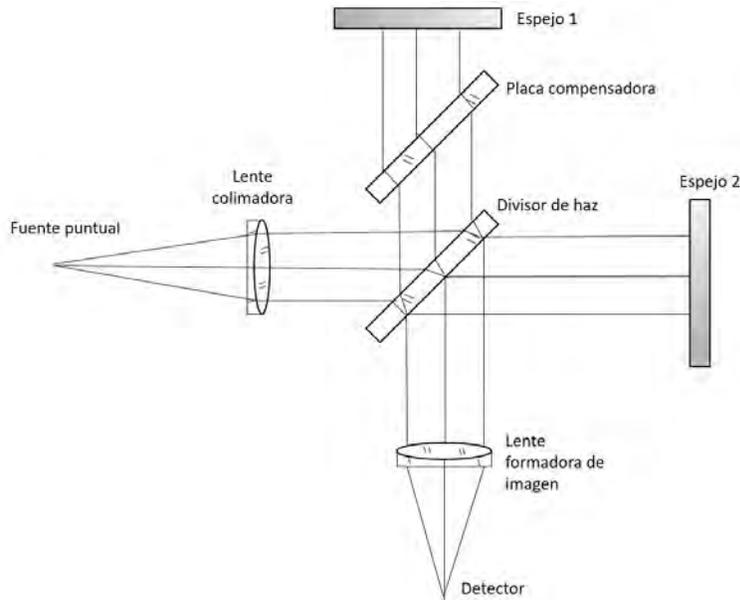


Figura 2.11: Arreglo básico de un interferómetro de Twyman-Green.

### 2.2.3. Hologramas Generados por Computadora (CGH's)

El uso de hologramas para realizar pruebas nulas, es un método que ha sido aplicado para la prueba de superficies esféricas. El procedimiento consta en realizar un holograma correspondiente a un elemento esférico perfecto de manera que el frente de onda esférico albergado en este holograma, sea utilizado después en pruebas interferométricas de otros elementos esféricos supuestamente idénticos. El frente de onda almacenado en el holograma, es comparado interferométricamente con el frente de onda de la superficie bajo prueba [14].

Sin embargo, en muchas situaciones el elemento óptico esférico ideal o máster de la pieza óptica, no está disponible para obtener un holograma real del frente de onda, por lo tanto, se puede realizar sintéticamente un Holograma Generado por Computadora (CGH por sus siglas en inglés) [14].

Al igual que un holograma real, cuando un CGH es colocado en el interferómetro, las franjas producidas por la interferencia del frente de onda de referencia (CGH) y el frente de onda de prueba, producen un patrón de Moiré, el cual contiene la diferencia entre ambos frentes de onda [14].

En la Fig. 2.12 se muestra un CGH realizado por Wyant [14] y acoplado a un interferómetro de Twyman-Green modificado. En la Fig. 2.13 se muestran los resultados del uso de CGH.

Otros autores más han utilizado CGH's con otras configuraciones de interferómetros, Fizeau, por ejemplo [10, 13-20]. La desventaja del uso de CGH es la relativa complejidad

que conlleva su misma realización, el tiempo en realizarlo y su alto costo [14].

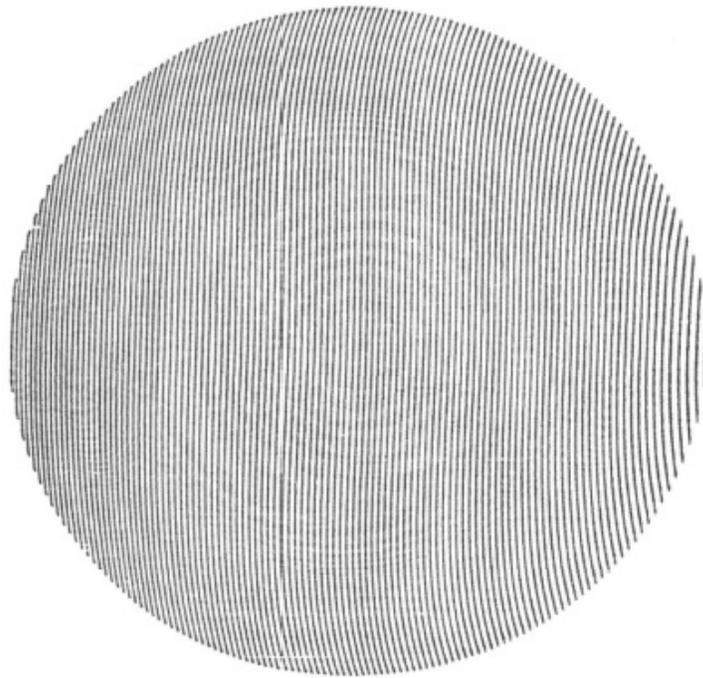


Figura 2.12: Holograma Generado por Computadora. *Imagen tomada de Wyant (1987)* [14].

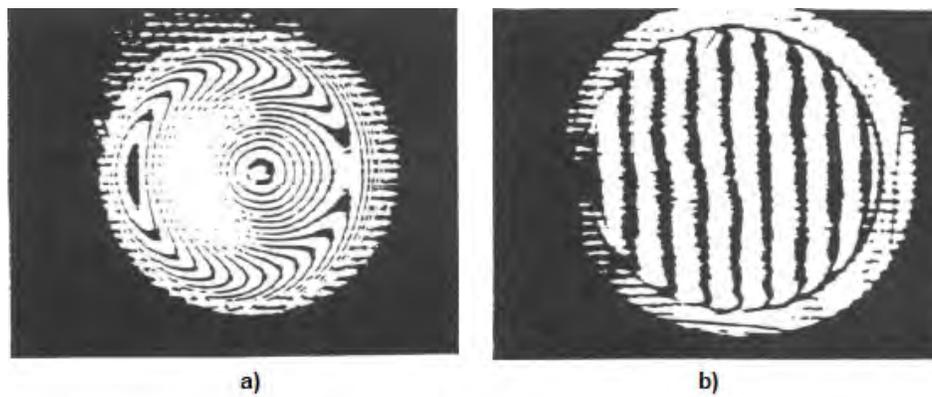


Figura 2.13: Resultados obtenidos por Wyant en la prueba de una superficie esférica en un interferómetro Twyman-Green modificado: a) sin el uso de CGH, b) utilizando un CGH. *Imagen tomada de Wyant (1987)* [14].

### 2.2.4. Frentes de onda en mosaico (*wavefront stitching*)

A veces cuando el frente de onda es fuertemente esférico y aun introduciendo un *tilt*, o alguna prueba nula o CGH, se obtiene un espaciamiento muy pequeño entre las líneas de interferencia, entonces se puede optar por segmentar el frente de onda como un mosaico, en regiones donde el límite de Nyquist no sea violado [3]. Finalmente, se hace el pegado o unión de cada región (*stitch*) para obtener el frente de onda completo. Existen varias formas en las que se puede dividir el frente de onda: zonas anulares, *tilt* dinámico y zonas circulares [3].

Para realizar la división del frente de onda en zonas anulares, se introduce una diferente cantidad de defoco de tal manera que se obtienen varios anillos donde el límite de Nyquist no es superado. Visiblemente se nota el contraste cuando la zona anular es obtenida. En la Fig. 2.14 se muestran tres diferentes anillos sobre un mismo frente de onda con diferentes valores de defoco [3]. De igual manera, si se varía el *tilt* del frente de onda de prueba, se pueden obtener diferentes zonas visiblemente contrastadas donde el límite de Nyquist no es violado [3]. Este tipo de divisiones de frente de onda se muestran en la Fig. 2.15.

Para dividir el frente de onda en zonas circulares, tanto el defoco como el *tilt* se adecúan para optimizar el espaciamiento entre líneas. Este método es muy útil cuando se requiere probar una superficie esférica cuyo tamaño es mayor que la apertura del interferómetro [3].

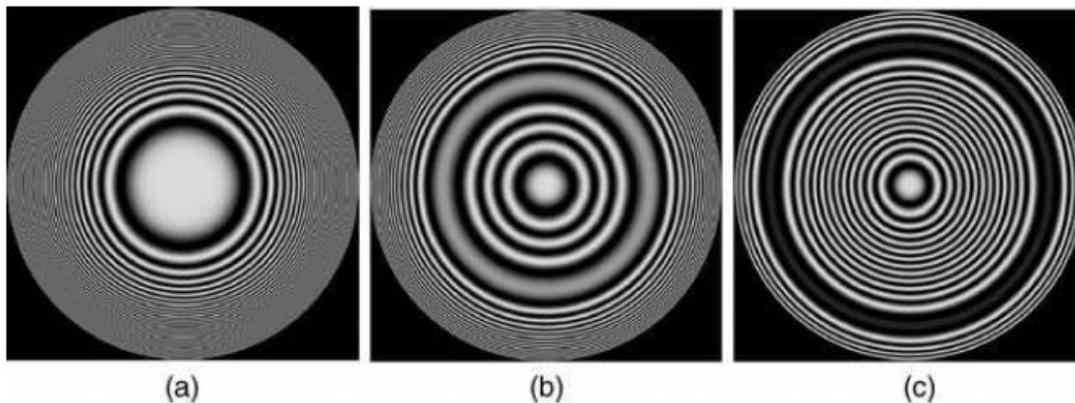


Figura 2.14: Interferograma de un frente de onda esférico con diferentes cantidades de defoco. El anillo útil es visible por la diferencia de contraste. *Imagen tomada de D. Malacara, Optical Shop Testing (1992) pp. 491 [3].*

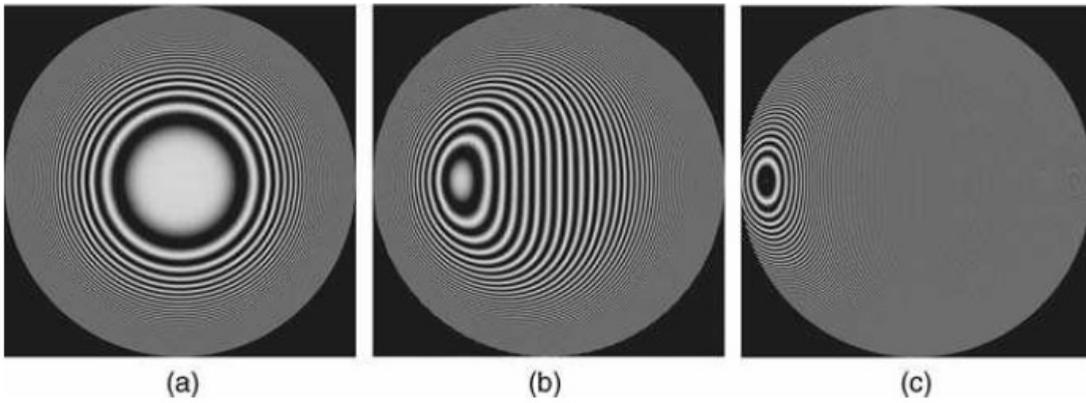


Figura 2.15: Interferograma de un frente de onda esférico con diferentes cantidades de *tilt*. Imagen tomada de D. Malacara, *Optical Shop Testing* (1992) pp. 492 [3].

# Capítulo 3

## Aspectos prácticos en la medición de superficies esféricas

En este capítulo se presenta una medición realizada sobre una lente TOPCON biconvexa, con una superficie esférica y una superficie esférica. Asimismo, se muestra el desarrollo de una prueba interferométrica de desplazamiento lateral aplicada para la reconstrucción de superficies esféricas.

### 3.1. Medida de la curvatura de una superficie esférica por métodos geométricos: el caso de la lente TOPCON

Se realizó la perfilometría de ambas superficies (esférica y esférica) de una lente biconvexa TOPCON. La metrología se llevó a cabo con la Máquina de Coordenadas Carl Zeiss Spectrum II del Laboratorio de Metrología del Centro de Investigaciones en Óptica. En la Figura 3.1 se muestra el perfil medido para cada una de las superficies de la lente TOPCON.

Cada perfil de línea mostrado en las gráficas de la Figura 3.1, tiene 100 puntos con una precisión de  $0.1 \mu\text{m}$ .

Se realizó un ajuste de mínimos cuadrados sobre la Ec. 1.1 para la superficie esférica, y sobre la Ec. 1.2 para la esférica. Considerando  $K = 0$ , se obtuvo una curvatura para la superficie esférica de  $0.019 \text{ mm}^{-1}$  y para la superficie esférica, se obtuvo una curvatura de  $0.008 \text{ mm}^{-1}$ . La Tabla 3.1 muestra los coeficientes esféricos de deformación. El coeficiente  $P$  corresponde a un término de pistón. Al final de la Tabla 3.1 se muestran también los valores de  $\chi^2$  y el coeficiente de regresión  $r$ . Con los coeficientes obtenidos del ajuste de mínimos cuadrados, se reconstruyeron cada una de las superficies como cónicas de revolución. En la Figura 3.2 se muestra la lente TOPCON reconstruida.

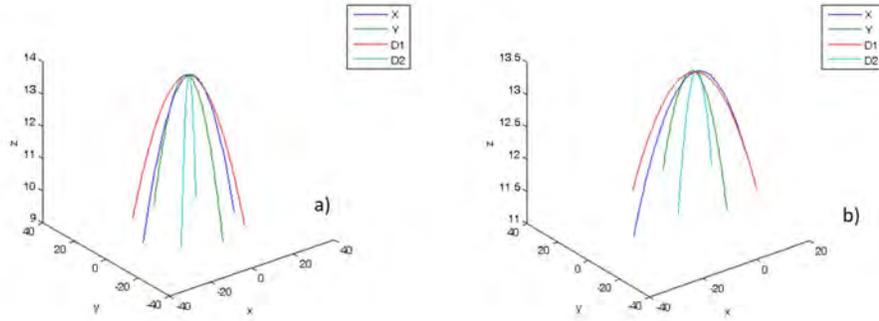


Figura 3.1: Metrología de los perfiles de las superficies a) esférica y b) esférica de la lente TOPCON. Las líneas D1 y D2 representan los perfiles medidos de manera diagonal.

Tabla 3.1: Resultados del ajuste de mínimos cuadrados para la lente TOPCON

Coefficiente	Asfera	Esfera
$A_1$	$-6.25391 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$	
$A_2$	$4.34804 \times 10^{-8} \text{ mm}^{-5}$	
$A_3$	$-1.00778 \times 10^{-10} \text{ mm}^{-7}$	
$A_4$	$8.3 \times 10^{-14} \text{ mm}^{-9}$	
$P$	$13.8440 \text{ mm}$	$13.33528 \text{ mm}$
$\chi^2$	$5.48483 \times 10^{-5}$	$6.17893 \times 10^{-8}$
$r$	$0.999918$	$0.999948$

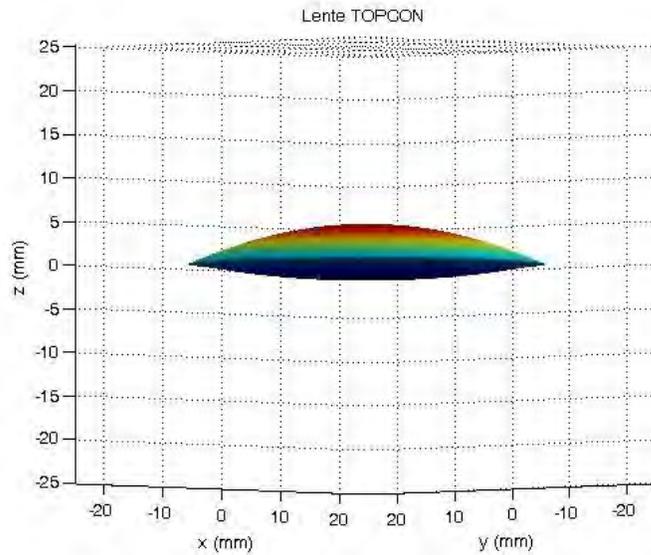


Figura 3.2: Lente TOPCON reconstruida de acuerdo a los resultados del análisis de mínimos cuadrados.

## 3.2. Medida y reconstrucción de la forma de la superficie por interferometría de desplazamiento lateral.

Como ya se mencionó en el Capítulo 2, existen varias pruebas interferométricas para evaluar superficies tanto esféricas como asféricas. En esta sección se tratará en especial de la reconstrucción de un frente de onda utilizando la técnica de interferometría de desplazamiento lateral.

La técnica de interferometría de desplazamiento lateral consiste en duplicar un frente de onda desplazándolo lateralmente una cantidad  $S$ , de manera que se obtenga un patrón de interferencia entre el frente de onda original y el desplazado [3]. En la Figura 3.3 se muestra un esquema del desplazamiento producido con esta técnica de interferometría [3]. La gran ventaja de este tipo de interferometría, es que no se necesita de un frente de onda de referencia, ya que el frente de onda original interfiere consigo mismo, pero lateralmente desplazado [23-26].

La Figura 3.4 muestra diferentes patrones de interferencia para un frente de onda sin aberraciones con defoco, tilt y aberración esférica primaria.

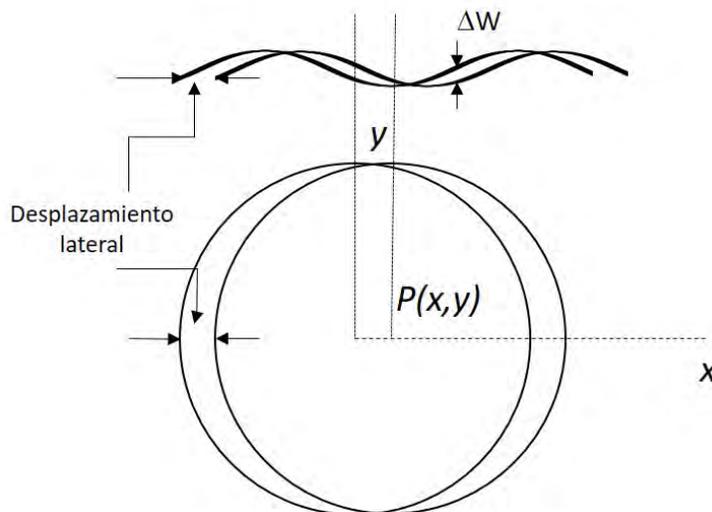


Figura 3.3: Esquema de la interferometría de desplazamiento lateral que muestra el frente de onda original y el desplazado. Las franjas de interferencia se forman en la zona donde se superponen los dos frentes.

Al realizar interferometría de desplazamiento lateral, lo que se está obteniendo es la diferencia de fase entre dos frentes de onda iguales pero desplazados uno respecto al otro [3]. Se puede denotar  $W(x, y)$  como el error o la diferencia entre el frente de onda real y el frente de onda deseado, siendo  $(x, y)$  las coordenadas de un punto arbitrario  $P(x, y)$ .

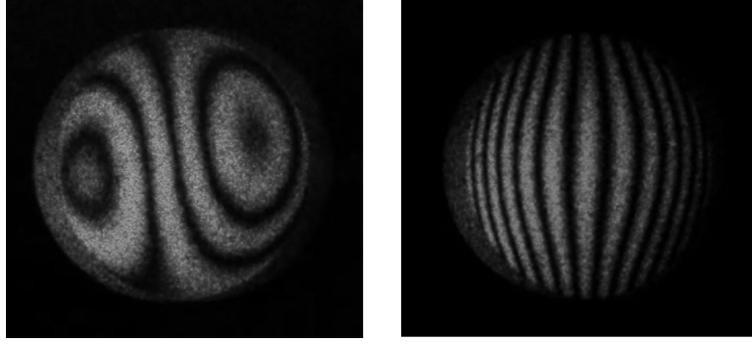


Figura 3.4: Patrones de interferencia obtenidos con interferometría de desplazamiento lateral con aberración esférica y diferentes cantidades de defoco.

Cuando este frente de onda es desplazado en la dirección  $x$  por una cantidad  $S$ , el error en cada punto sobre el frente de onda desplazado es  $W(x - S, y)$  [3]. La diferencia de frentes de onda entre el original y desplazado en el punto  $P(x, y)$  está dada por [3]:

$$\Delta W(x, y) = W(x, y) - W(x - S, y) \quad (3.1)$$

La Ec. 3.1 se puede interpretar como una diferencia de fase y se puede expresar en términos del número de longitudes de onda, como [3]:

$$\Delta W(x, y) = n\lambda \quad (3.2)$$

donde  $n$  es el orden de la franja de interferencia y  $\lambda$  es la longitud de onda utilizada. Si el desplazamiento  $S$  se vuelve muy pequeño, tendiendo a cero, entonces la diferencia de frente de onda respecto a  $x$  se vuelve una derivada parcial. Por lo tanto, la Ec. 3.2 se puede escribir como [3]:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} S = n\lambda \quad (3.3)$$

De acuerdo a la Ec. 3.3, si el desplazamiento lateral  $S$  es pequeño comparado con el diámetro de la pupila, la diferencia de fase es directamente proporcional a las derivadas parciales del frente de onda en la misma dirección del desplazamiento [3, 27].

A partir de la diferencia de fase o de la medida de las pendientes (derivadas) obtenidas de la interferometría de desplazamiento lateral, se han desarrollado numerosos métodos y configuraciones para la reconstrucción del frente de onda [27]. Algunas configuraciones

utilizadas hasta ahora incluyen polarización [28], desplazamiento lateral variable [29], desplazamiento lateral cíclico [23], entre otras configuraciones [24, 28-36]. Entre los métodos utilizados para realizar el análisis de la diferencia de fase, se encuentran el modal y el zonal [27, 39-42].

En el enfoque modal, se realiza la reconstrucción del frente de onda ajustando las diferencias de fase a una función polinomial proveniente de una combinación lineal de funciones con base ortogonal. La mayoría de los métodos modales utilizan como base ortogonal los polinomios de Zernike [40, 41, 43-48]. De acuerdo con Fresichald y Koliopoulos [48], en el enfoque modal, en el momento en que se realiza el ajuste sobre todo el frente de onda, la reconstrucción puede resultar suavizada haciendo que se pierda información proveniente de las frecuencias espaciales altas. Por lo tanto, pequeñas deformaciones presentes en el frente de onda, se estarían eliminando [27].

Una solución para evitar este posible error, es utilizar un enfoque zonal. El método zonal más utilizado junto con interferometría de desplazamiento lateral es el método de Saunders [49] junto con interpolación y ajuste de mínimos cuadrados [50-66].

El tamaño del desplazamiento lateral,  $S$ , es un factor importante. Si es demasiado grande, los detalles en el frente de onda provenientes de altas frecuencias pueden no ser detectados [66]. Si  $S$  es muy pequeño, se pierde sensibilidad al momento de medir la diferencia de fase [47]. Usualmente, la cantidad de desplazamiento lateral debe ser entre un 10 % y un 20 % del diámetro del frente de onda [47, 67].

### 3.2.1. Método de Saunders

Hemos mencionado anteriormente que uno de los métodos más utilizados con enfoque zonal junto con interferometría de desplazamiento lateral, es el método de Saunders.

El método tradicional de Saunders fue propuesto en 1961 [49, 68]. Este método consiste en establecer un punto de referencia en el frente de onda y, a partir de este punto, obtener las diferencias entre los dos frentes de onda desplazados lateralmente [68]. En la Figura 3.5 se muestra un esquema del método de Saunders en el que se obtienen las diferencias entre los frentes de onda [68]. Si se considera como punto de referencia  $W_1 = 0$ , de acuerdo con la Figura 3.5, se obtiene lo siguiente para las diferencias de frente de onda  $\Delta W's$  [68]:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= 0 \\
 W_2 &= \Delta W_1 + W_1 \\
 W_3 &= \Delta W_2 + W_2 \\
 &\dots \\
 W_N &= \Delta W_{N-1} + W_{N-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

La principal ventaja del método tradicional de Saunders, es que las medidas de las diferencias del frente de onda son en principio, exactas. La desventaja de este método, es que el frente de onda solamente se puede evaluar en los puntos distanciados por la distancia  $S$ . Los puntos que quedan intermedios, deben ser interpolados [27, 68].

Se han desarrollado diferentes variantes del método de Saunders, en los que el tamaño del

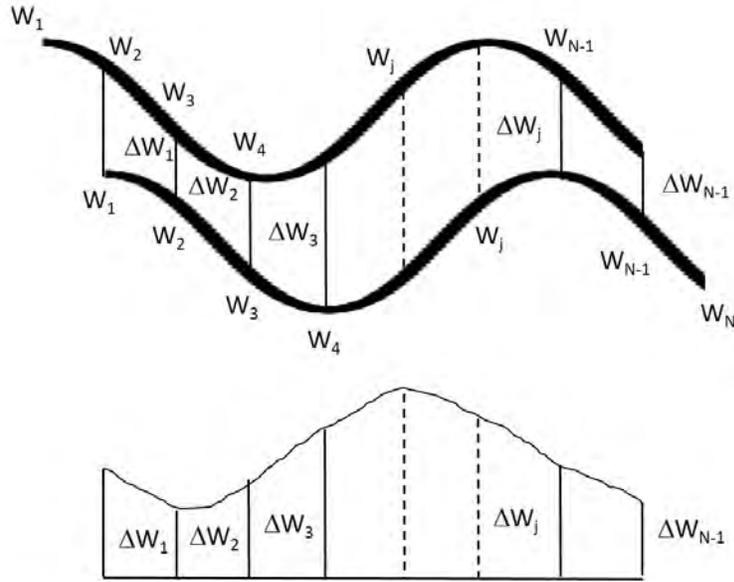


Figura 3.5: Esquema del método de Saunders para la reconstrucción del frente de onda con interferometría de desplazamiento lateral.

desplazamiento lateral es variable e incluso, la dirección del desplazamiento, también es variable [38, 41, 67, 67-81].

En este trabajo de tesis, se ha desarrollado un método de Saunders modificado en el que se aplica el desplazamiento lateral en dos direcciones ortogonales  $(x, y)$ , lo que genera que se tengan mediciones de las diferencias del frente de onda en las esquinas de celdas cuadradas distribuidas sobre el frente de onda [27]. Para resolver el problema de la interpolación, combinamos el método de Saunders con un algoritmo de corrimiento de fase de tres pasos (*T Tilted Three Step algorithm*). De esta manera, obtenemos las mediciones de las diferencias del frente de onda,  $\Delta W$ , en los puntos intermedios de las celdas cuadradas [27]. Cabe mencionar que se puede aplicar cualquier otro algoritmo de corrimiento de fase.

### 3.2.2. Método de Saunders modificado

En la Figura 3.6 se muestra el esquema de las mediciones de las diferencias del frente de onda,  $\Delta W$ 's, utilizando el método de Saunders. Estas mediciones se realizaron en dos direcciones ortogonales  $(x, y)$ , es decir, se obtuvieron las diferencias del frente de onda en dos direcciones:  $\Delta W_x$  y  $\Delta W_y$ , las cuales representan las diferencias entre el frente de onda a calcular y el frente de onda de referencia. En ambas direcciones, el tamaño del desplazamiento lateral  $S$  es el mismo.

En este caso, se consideró como punto de referencia el centro de la pupila, es decir,  $W_0 = 0$

(ver Figura 3.6) [27].

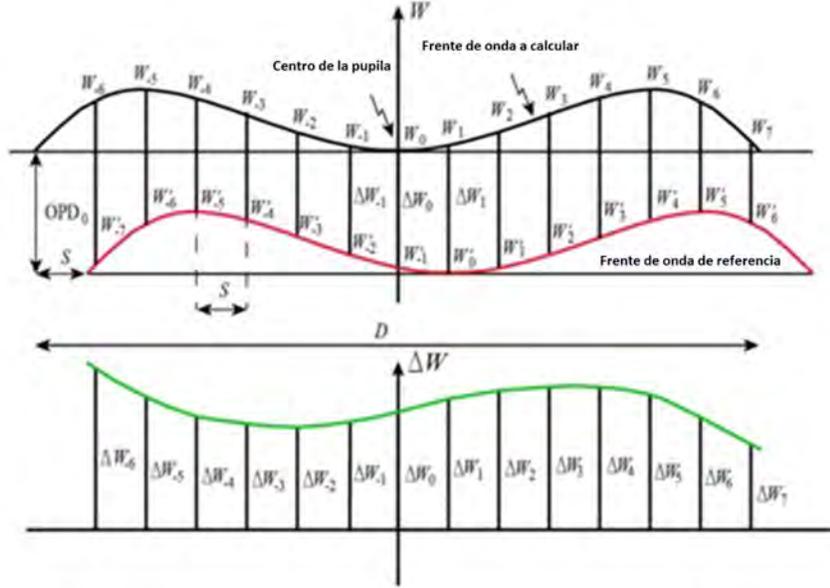


Figura 3.6: Esquema de las diferencias de frente de onda medidas con el método de Saunders. En la modificación realizada, se realizaron estas mediciones en dos direcciones ortogonales. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

Si se establece que  $W_1 - W_0 = \Delta W_1$ , se pueden encontrar las expresiones para calcular los valores de  $W_n$  y  $W_{-n}$  a lo largo de todo el frente de onda y en ambas direcciones. De acuerdo con el método de Saunders, estas expresiones quedan de la siguiente forma [27]:

$$W_n = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_{n-1} + \Delta W_n \quad (3.5)$$

$$W_{-n} = -(\Delta W_0 + \Delta W_{-1} + \dots + \Delta W_{-(n-1)}) \quad (3.6)$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

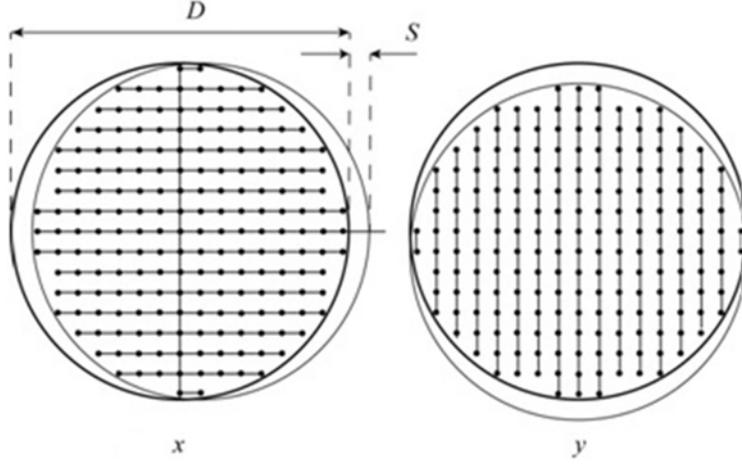


Figura 3.7: Esquema que muestra los puntos en las esquinas de las celdas cuadradas, donde las diferencias del frente de onda  $\Delta W_n$  se obtienen utilizando el método de Saunders.  $S$  es el tamaño del desplazamiento lateral, en ambas direcciones, y  $D$  es el diámetro de la pupila. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

En la Figura 3.7 se muestran los puntos de las esquinas de las celdas cuadradas donde se tienen los valores de las diferencias del frente de onda obtenidos con el método de Saunders. Por lo tanto, se tienen dos matrices con los puntos  $\Delta W_{nx}$  y  $\Delta W_{ny}$  [27]. Ya que en la interferometría de desplazamiento lateral, la reproducción de la inclinación del frente de onda se puede reducir a una constante [61], se puede asumir que las pendientes en el centro de la pupila son constantes e incluso pueden tomar el valor de cero [27]. El procedimiento para calcular el valor del frente de onda en los puntos marcados en la Figura 3.7 es el siguiente. Haciendo uso de las Ecs. 3.5 y 3.6 se comienza por hacer un barrido sobre cada línea en  $x$  (columnas en  $y$ ) empezando por la línea central donde ya se ha considerado que  $W_0 = 0$  y que las pendientes valen cero. De esta manera, se obtienen los valores de  $W_{0n}$  y  $W_{-0n}$  solamente para la línea y la columna centrales. Se sustituye la fila  $W_{0nx}$  y  $W_{-0nx}$  en la fila central original de la matriz  $\Delta W_{ny}$ . Después de esto, se sustituye la columna  $W_{0ny}$  y  $W_{-0ny}$  en la columna central original de la matriz  $\Delta W_{nx}$ . Enseguida, se aplican las siguientes ecuaciones basadas en el método de Saunders, sobre cada fila y cada columna de las matrices  $\Delta W_{nx}$  y  $\Delta W_{ny}$ , respectivamente [27]:

$$W_n = W_{0nx} + \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_{n-1} + \Delta W_n \quad (3.7)$$

$$W_{-n} = W_{0ny} - (\Delta W_0 + \Delta W_{-1} + \dots + \Delta W_{-(n-1)}) \quad (3.8)$$

donde  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Las nuevas matrices  $W_{nx}$  y  $W_{ny}$  tienen en principio los mismos componentes, sin embargo, se realiza un promedio de ambas matrices (Ec. 3.9) para reducir errores numéricos y obtener el frente de onda reconstruido [27].

$$W = \frac{W_{nx} + W_{ny}}{2} \quad (3.9)$$

Cabe mencionar que debido a que la zona en la que se sobreponen los frentes de onda no es circular, algunos puntos en los bordes de  $W_{nx}$  no corresponden a ningún punto en  $W_{ny}$ . Por lo tanto, la Ec. 3.9 solamente se aplica sobre los puntos de  $W_{nx}$  que tienen su correspondencia en  $W_{ny}$  [27].

### 3.2.3. Algoritmo de corrimiento de fase de tres pasos *T Tilted*

La interferometría de corrimiento de fase se refiere al movimiento del frente de onda de referencia en la dirección de propagación respecto al frente de onda a analizar [68]. Realizando una medición de los cambios en la irradiancia para varios corrimientos de fase, es posible determinar la fase del frente de onda respecto al frente de onda de referencia [68]. En el caso del corrimiento de fase de tres pasos, propuesto por Wyant et al. en 1984 [68], los tres puntos medidos están separados por  $90^\circ$  con un *offset* de  $45^\circ$  respecto al origen, es decir, el primer punto muestreado es a  $-45^\circ$ , después a  $45^\circ$  y a  $135^\circ$  [68]. En la Fig. 3.8, se muestra un esquema de estos tres puntos sobre la onda, en los que se mide la irradiancia.

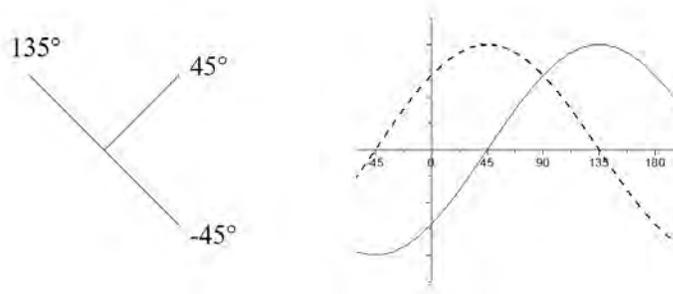


Figura 3.8: Algoritmo de tres pasos de Wyant.

El cálculo de la fase  $\phi$  se realiza a través de la siguiente expresión [68]:

$$\tan\phi = -\frac{-s_1 + s_2}{s_2 - s_3} \quad (3.10)$$

donde  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  son las señales de irradiancia correspondientes a  $-45^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

### 3.2.4. Interpolación de los valores del frente de onda dentro de cada celda cuadrada

Como ya se mencionó anteriormente, los puntos medidos con el método de Saunders están separados por una distancia  $S$ . Después de aplicar el algoritmo de corrimiento de fase, los valores del frente de onda  $W$  reconstruidos, se encuentran en las esquinas de las celdas cuadradas de longitud  $S$  [27]. Para estimar los valores intermedios dentro de cada celda, es necesario realizar una interpolación a través de una función polinomial. Para construir el polinomio que mejor describa el frente de onda, incluimos los coeficientes de pistón ( $a_0$ ), inclinación respecto al eje  $y$  ( $a_1$ ), inclinación respecto al eje  $x$  ( $a_2$ ) y astigmatismo a  $\pm 45^\circ$  ( $a_3$ ). El polinomio queda de la siguiente forma:

$$W = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (3.11)$$

En una primera interpolación, introducimos cuatro coeficientes porque solamente tenemos cuatro datos de información, cada esquina de las celdas cuadradas, es decir, tenemos cuatro datos de frente de onda  $W_1, W_2, W_3$  y  $W_4$ . Realizando un ajuste de mínimos cuadrados a la Ec. 3.11, obtenemos las siguientes expresiones para los coeficientes de aberración  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) \\ a_1 &= \frac{1}{2S}(W_1 - W_2 - W_3 + W_4) \\ a_2 &= -\frac{1}{2S}(W_1 + W_2 - W_3 - W_4) \\ a_3 &= -\frac{1}{S^2}(W_1 - W_2 + W_3 - W_4) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sin embargo, con los cuatro datos de cada celda utilizados para la Ec. 3.12, no es suficiente información para reconstruir algún componente de esfericidad o de astigmatismo a  $\pm 90^\circ$  en el frente de onda. Otra desventaja con esta primera interpolación, es que no se puede asegurar que dos celdas contiguas tengan las mismas pendientes en el borde entre ellas [27].

Supongamos entonces que se pueden medir las dos pendientes del frente de onda, en  $x$  y en  $y$ , en cada esquina de las celdas cuadradas [27, 82]. Entonces, se tendrían ocho datos más por esquina, haciendo un total de doce datos para realizar el ajuste de mínimos cuadrados. Aunque no todos los datos sean independientes, se tiene la suficiente información para reconstruir el término pistón, la componente de esfericidad y la componente de astigmatismo, incluyendo su orientación [27].

Para obtener estas pendientes en las esquinas de cada celda, es decir, las derivadas parciales de  $W$  en  $x$  y en  $y$ , se encuentran primero las pendientes de las diferencias  $\Delta W$ . Se puede realizar entonces un procedimiento similar al del método de Saunders pero con las

pendientes de  $\Delta W$  para encontrar las pendientes de  $W$ , de la siguiente manera [27]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta W_1}{dx} &= \frac{dW_1}{dx} - \frac{dW_0}{dx} \\
 \frac{d\Delta W_2}{dx} &= \frac{dW_2}{dx} - \frac{dW_1}{dx} \\
 &\quad \text{---} \\
 \frac{d\Delta W_n}{dx} &= \frac{dW_n}{dx} - \frac{dW_{n-1}}{dx}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

En la Ec. 3.13, las diferencias  $\Delta W$  se obtienen de la diferencia del valor de  $W$  de un píxel anterior y un píxel posterior al punto deseado de cada esquina de cada celda. Esto es posible ya que se conocen las diferencias de frente de onda en cada píxel de la pupila usando las Ecs. 3.11 y 3.12. A partir de estos valores, se pueden encontrar las pendientes del frente de onda  $W$  como [27]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_1}{dx} &= \frac{d\Delta W_1}{dx} + \frac{dW_0}{dx} \\
 \frac{dW_2}{dx} &= \frac{d\Delta W_1}{dx} + \frac{d\Delta W_2}{dx} + \frac{dW_0}{dx} \\
 &\quad \text{---} \\
 \frac{dW_n}{dx} &= \frac{d\Delta W_n}{dx} + \frac{dW_{n-1}}{dx}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Se asume un valor arbitrario (pudiendo ser cero) para la pendiente del primer punto. Al final, si se desea, se puede restar este valor arbitrario de todas las pendientes con el fin de que la pendiente en el origen sea igual a cero [27].

De esta manera, con los cuatro datos obtenidos con las Ecs. 3.11 y 3.12 y con los ocho valores obtenidos con la Ec. 3.14, haciendo un ajuste de mínimos cuadrados se pueden obtener los coeficientes  $a_4$  para astigmatismo a  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y el coeficiente  $a_5$  para el defoco. La ecuación para el ajuste quedaría de la siguiente forma:

$$W = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4(x^2 - y^2) + a_5 \left( x^2 + y^2 - \frac{S^2}{2} \right) \tag{3.15}$$

En la Ec. 3.15, es necesario agregar en el defoco un término de  $S^2/2$  para no modificar los valores del frente de onda en las esquinas de cada celda [27]. Se obtiene la siguiente ecuación para calcular los valores de  $a_4$  y  $a_5$ :

$$\sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} a_1 x_i - a_2 y_i \\ a_1 x_i + a_2 y_i + 2a_3 x_i y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(x_i^2 + y_i^2) & 2(x_i^2 - y_i^2) \\ 2(x_i^2 - y_i^2) & 2(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \frac{dW_i}{dx} - y_i \frac{dW_i}{dy} \\ x_i \frac{dW_i}{dx} + y_i \frac{dW_i}{dy} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Teniendo los valores de los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  y  $a_5$  en cada celda, se puede realizar una interpolación de manera local evitando la filtración de datos con frecuencias espaciales altas [27] y así reconstruir todo el frente de onda.

### 3.3. Prueba de la reconstrucción del frente de onda con el método propuesto.

Para probar el método de reconstrucción de frente de onda con interferometría de desplazamiento lateral, descrito en la sección anterior, se simularon y se midieron en laboratorio diferentes interferogramas.

#### 3.3.1. Interferogramas sintéticos

Los interferogramas simulados sintéticamente, fueron generados en un software desarrollado por el Dr. Daniel Malacara [3]. Este software, permite la introducción de coeficientes esféricos y permite introducir corrimientos de fase. Se establecieron determinados valores de coeficientes polinomiales de Zernike para generar un frente de onda distorsionado pero bien conocido. Se les aplicó una diferencia de fase de  $90^\circ$ , partiendo de  $-45^\circ$ , para poder aplicar el algoritmo de corrimiento de fase, obteniendo de esta manera tres interferogramas, cada uno con desplazamiento lateral en la dirección sagital ( $x$ ) y tres interferogramas con desplazamiento lateral en la dirección tangencial ( $y$ ).

Los interferogramas generados corresponden a una superficie circular de  $D = 200mm$  de diámetro de pupila. De acuerdo con [40, 67], el tamaño del desplazamiento lateral se eligió con un valor de  $D/16.5$ . Se generaron interferogramas para tres diferentes casos de deformación de frente de onda. Caso 1: el frente de onda es solamente afectado por defoco ( $PV = 16\lambda$ ). Caso 2: el frente de onda solamente es afectado por aberración esférica ( $PV = 3\lambda$ ). Caso 3: el frente de onda es afectado por defoco, astigmatismo, coma y aberración esférica ( $PV = 13\lambda$ ). En las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 se muestran los interferogramas generados sintéticamente para los Casos 1, 2 y 3, respectivamente.

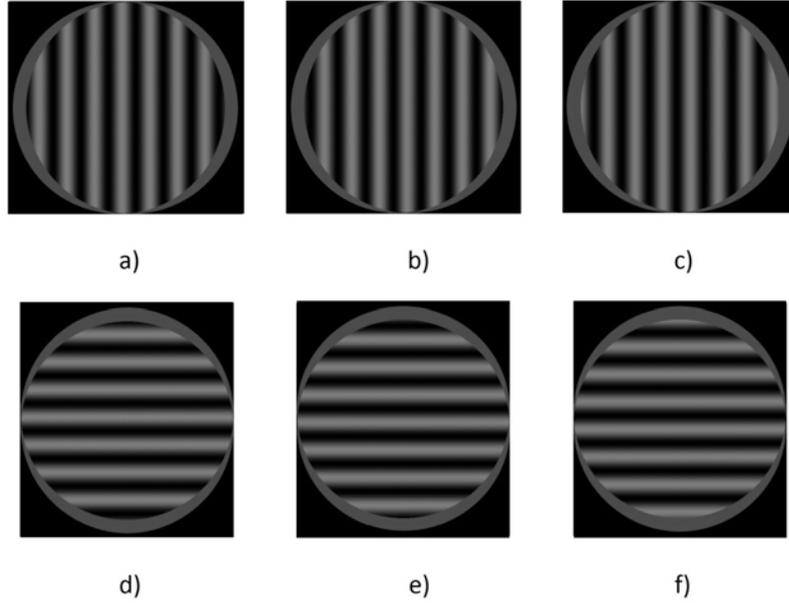


Figura 3.9: Interferogramas sintéticos generados para el Caso 1: a) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , b) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $45^\circ$ , c) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $135^\circ$ , d) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , e) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $45^\circ$  y f) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $135^\circ$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

### 3.3.2. Interferogramas experimentales

Experimentalmente se generaron los interferogramas de una lente esférica biconvexa de 56.37 mm de diámetro de pupila con un desplazamiento lateral de 5.2mm tanto en  $x$  como en  $y$ . La razón  $D/S$  se encuentra dentro del rango convenido [40, 67]. Las Figuras 3.12 y 3.13, muestran los sets de interferogramas medidos experimentalmente. Se introdujo en ellos diferentes cantidades de defoco y aberración de coma.

### 3.3.3. Resultados

En las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16, se muestran los frentes de onda sintéticos originales, los frentes de onda reconstruidos y la diferencia entre ambos para los Casos 1, 2 y 3, respectivamente. Las diferencias obtenidas en el valor  $PV$  son de  $0.11\lambda$  para el Caso 1,  $0.18\lambda$  para el Caso 2 y  $0.65\lambda$  para el Caso 3.

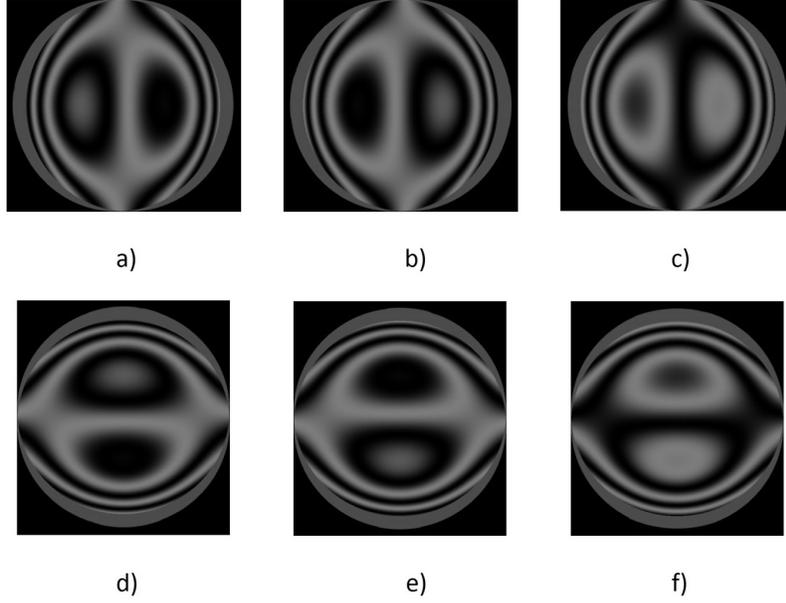


Figura 3.10: Interferogramas sintéticos generados para el Caso 2: a) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , b) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $45^\circ$ , c) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $135^\circ$ , d) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , e) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $45^\circ$  y f) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $135^\circ$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018)* [27].

Para el Caso 1, el error relativo del valor  $PV$  corresponde a un  $0.68\%$ , el cual es comparable por los errores obtenidos por Dai et al. y Nomura et al. [40, 57]. Para los casos 2 y 3, este error relativo asciende a  $5\%$ . La razón es que el frente de onda sintético original para el Caso 1, solo incluye la aberración del defoco y cuyo coeficiente sí está incluido en el ajuste de mínimos cuadrados de la Ec. 3.15. Los frentes de onda sintéticos de los casos 2 y 3 presentan aberración esférica y de coma y cuyos coeficientes no están incluidos en la Ec. 3.15. Sin embargo, ya que se tienen 12 datos de cada celda para realizar el ajuste, estos coeficientes se pueden agregar a la ecuación y así disminuir el error.

La Figura 3.17 muestra los frentes de onda reconstruidos para los interferogramas obtenidos experimentalmente. De acuerdo con los resultados obtenidos con la reconstrucción de los frentes de onda de los interferogramas sintéticos, se puede decir que el error en estos últimos es menor a  $1\lambda$  [27].

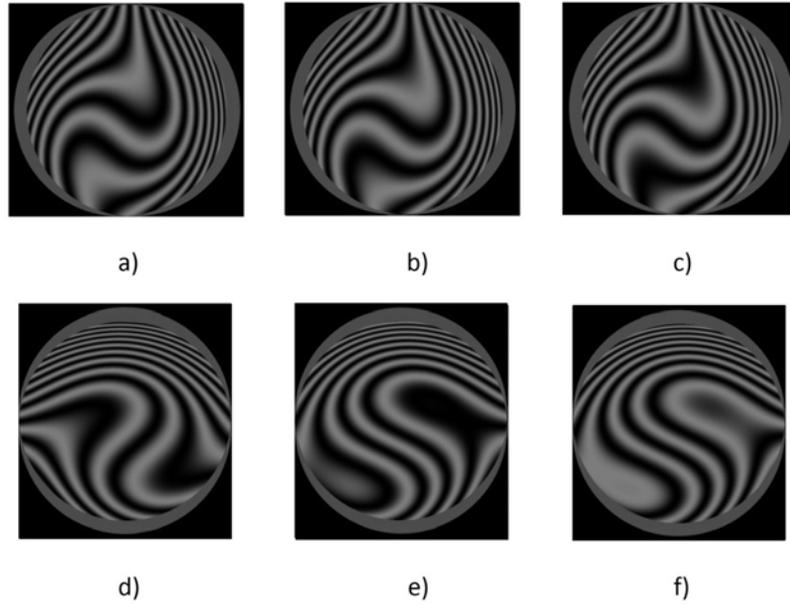


Figura 3.11: Interferogramas sintéticos generados para el Caso 3: a) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , b) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $45^\circ$ , c) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $135^\circ$ , d) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , e) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $45^\circ$  y f) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $135^\circ$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

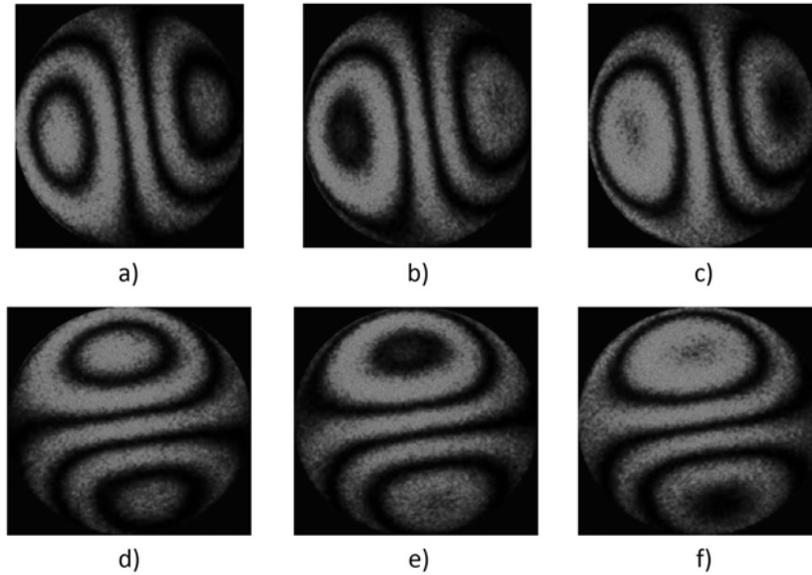


Figura 3.12: Set 1 de interferogramas medidos experimentalmente: a) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , b) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $45^\circ$ , c) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $135^\circ$ , d) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , e) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $45^\circ$  y f) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $135^\circ$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

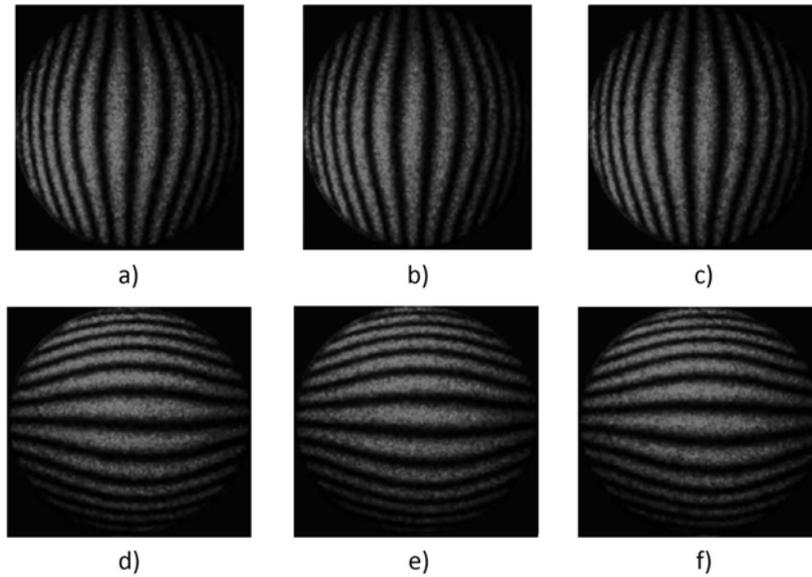


Figura 3.13: Set 2 de interferogramas medidos experimentalmente: a) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , b) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $45^\circ$ , c) desplazamiento lateral en  $x$  (sagital), corrimiento de fase a  $135^\circ$ , d) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $-45^\circ$ , e) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $45^\circ$  y f) desplazamiento lateral en  $y$  (tangencial), corrimiento de fase a  $135^\circ$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

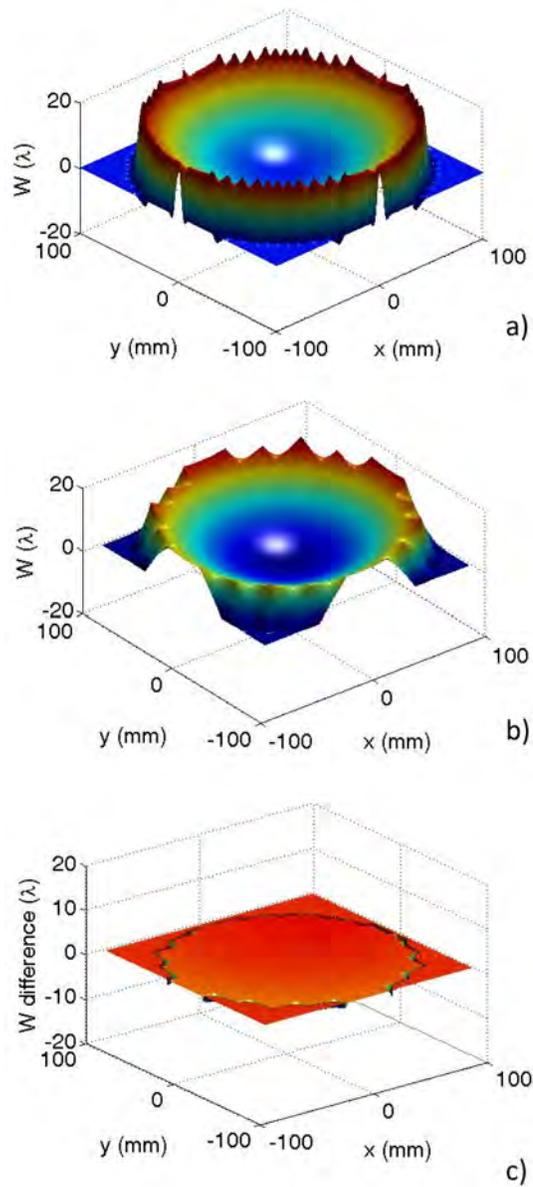


Figura 3.14: Caso 1: a) Frente de onda sintético original, b) frente de onda reconstruido con el método propuesto de interferometría de desplazamiento lateral, c) diferencia entre los frentes de onda original y reconstruido, su valor  $PV$  corresponde a  $0.11\lambda$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

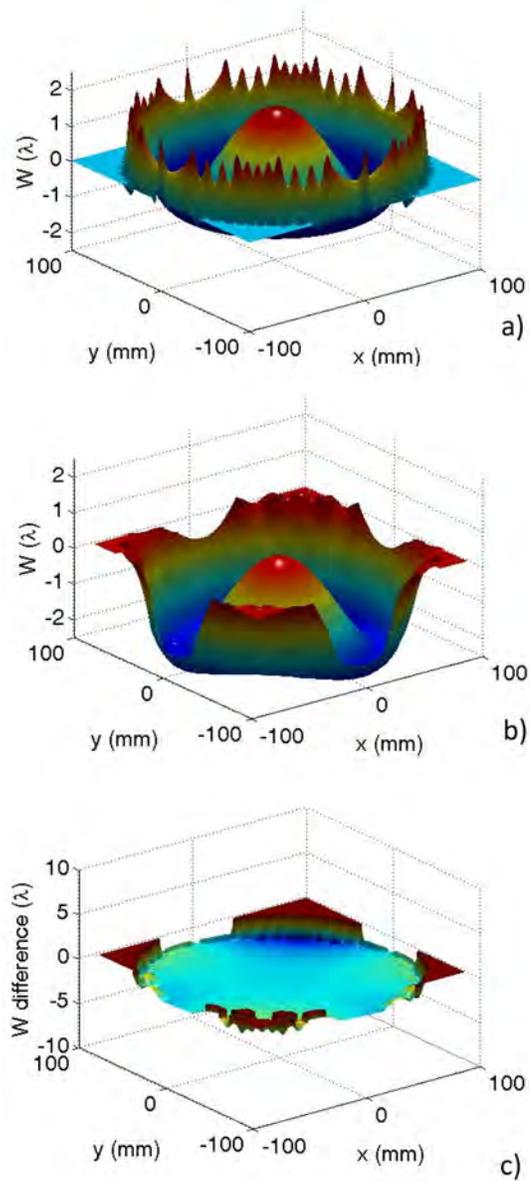


Figura 3.15: Caso 2: a) Frente de onda sintético original, b) frente de onda reconstruido con el método propuesto de interferometría de desplazamiento lateral, c) diferencia entre los frentes de onda original y reconstruido, su valor  $PV$  corresponde a  $0.18\lambda$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

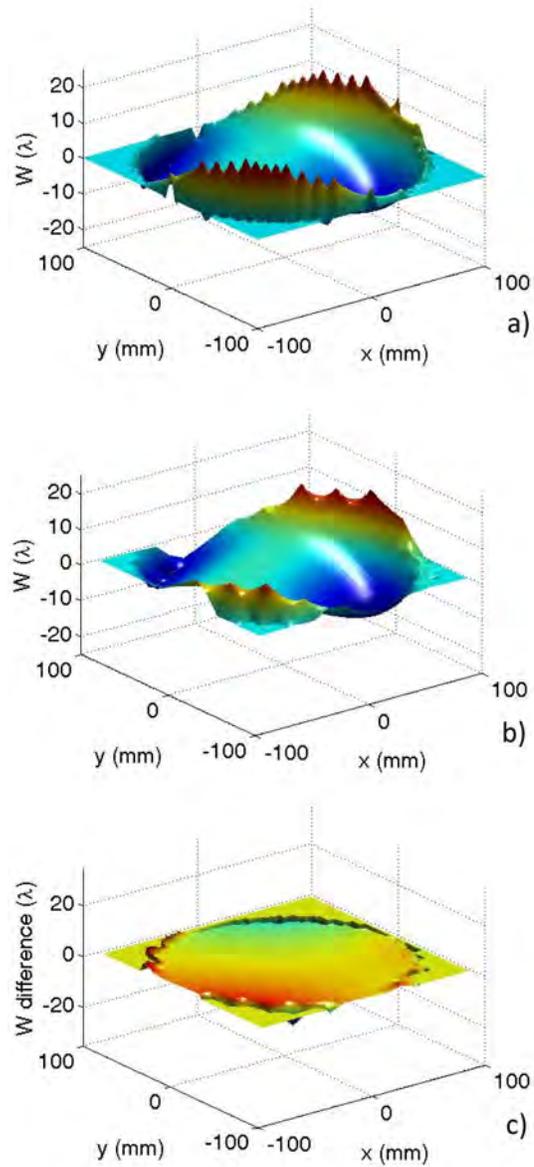


Figura 3.16: Caso 3: a) Frente de onda sintético original, b) frente de onda reconstruido con el método propuesto de interferometría de desplazamiento lateral, c) diferencia entre los frentes de onda original y reconstruido, su valor  $PV$  corresponde a  $0.65\lambda$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

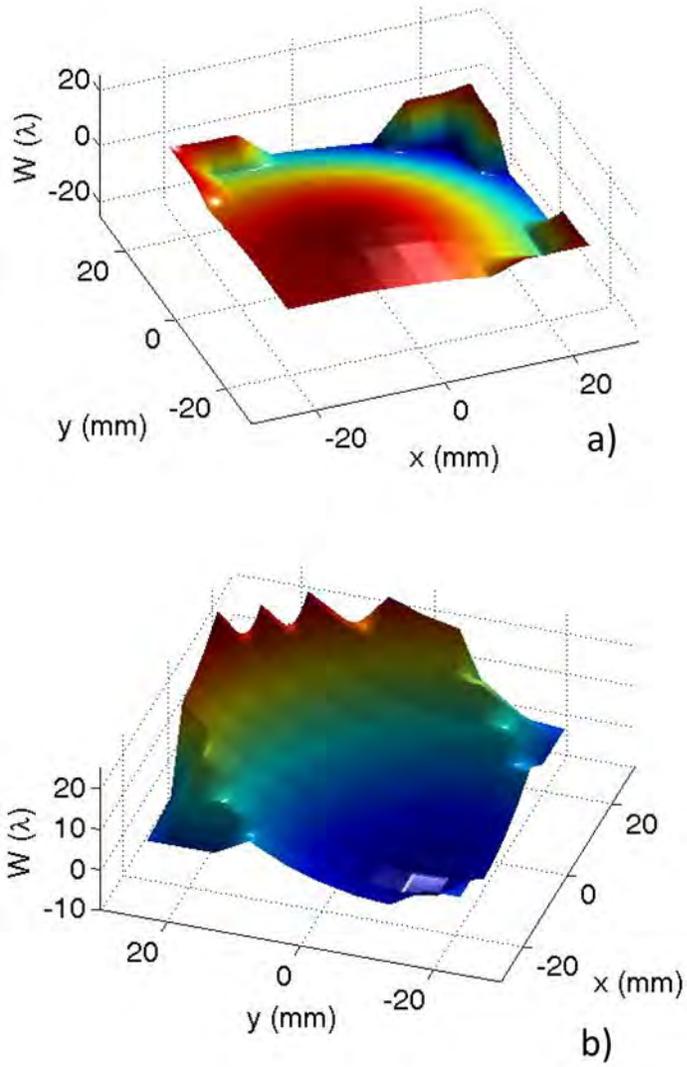


Figura 3.17: Frentes de onda reconstruidos de los interferogramas obtenidos experimentalmente correspondientes a las Figuras 3.12 y 3.13, respectivamente. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27].*

# Capítulo 4

## Diseño y caracterización de un queratómetro óptico

En este capítulo se describirá el diseño y caracterización de un queratómetro óptico desarrollado en este trabajo de tesis.

El queratómetro, u oftalmómetro como originalmente se llamó, se originó debido al intento de describir el mecanismo de acomodación del ojo relacionado con la curvatura de la córnea. Desde el siglo XVIII que fue inventado, ha sido rediseñado numerosas veces conforme ha avanzado el estudio de la oftalmología [83].

El principio óptico de diseño del queratómetro es que la reflexión de objetos en el ojo puede ser un medio preciso para medir la curvatura de la córnea. Asumiendo que la córnea es un espejo esférico convexo, que sus superficies anterior y posterior están relacionadas por un factor constante, y utilizando las relaciones del trazo geométrico de rayos, se puede calcular su radio de curvatura [83]. Estas suposiciones son suficientes para obtener una medición precisa del radio de curvatura de la córnea de la mayoría de los ojos [83, 84], a pesar de que realmente la superficie corneal se encuentra más escarpada en su centro que en su periferia [85, 86] y que las reflexiones solamente provienen la curvatura corneal de la superficie anterior [83]. El diseño del queratómetro también toma en cuenta que la imagen reflejada en cada ojo no sufrirá alteraciones a pesar de movimientos de la cabeza, ya que se verán afectadas de la misma forma en ambos ojos [83].

Los primeros queratómetros utilizaban dos objetos para ser reflejados, mientras que otros producían una doble imagen generada por dos placas de vidrio o prismas [83, 87]. Los diseños más recientes utilizan anillos de Plácido [88] o un arreglo sencillo de LEDs [89, 90] como el Javal-Schiotz [91].

En la actualidad, los queratómetros modernos no solo miden la curvatura de la córnea, sino que también miden su potencia [92-97], ajuste de lentes de contacto [98-100], potencia de lentes intraoculares (IOL) para pacientes con cirugía de catarata [86, 94, 99, 101], estudio de la forma de la córnea para pacientes con queratocono [99, 102, 103], y estudios del eje de astigmatismo para terapia refractiva avanzada [86, 95, 97, 99, 101, 104-111].

Los queratómetros se pueden clasificar en cualitativos y cuantitativos [112], manuales y automáticos. Se han realizados varios estudios comparativos entre los queratómetros ma-

nuales y los automáticos [86, 88, 91, 93, 94, 97, 98, 103, 105, 107, 111, 113-117], llegando a la conclusión general de que los queratómetros automáticos son más eficientes para mediciones durante y después de cirugías [88, 94], y estudios de astigmatismo en niños [107]. Sin embargo, no hay una diferencia significativa en la medición de la curvatura de la córnea entre un instrumento y otro [115] más que en la medición del eje de astigmatismo [86].

A continuación se presenta el diseño del queratómetro desarrollado y la obtención de sus parámetros.

## 4.1. Diseño y construcción de un queratómetro

El diseño de este queratómetro se basa en los discos o anillos de Plácido, asumiendo una forma esférica para la superficie corneal. Está compuesto por dos anillos con LEDs como fuentes puntuales de luz. En la 4.1 se muestra el trazo de rayos básico con el que está diseñado el queratómetro [87].

Cada anillo de LEDs tiene diferentes radios,  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , separados axialmente por una distancia fija  $\Delta s = s_1 - s_2$ . En las Figuras 4.2 y 4.3 se puede observar que los LEDs que forman los anillos están colocados sobre placas en forma de engrane, alternando los espacios dentados entre una placa y otra. Esta configuración permite que la luz procedente de todos los LEDs llegue al ojo [87].

La longitud  $L$  es una distancia fija entre el vértice de la córnea y la lente formadora de imagen. El detector de la imagen está colocado en la distancia focal de la lente, formando una imagen de altura  $h$  que está relacionada con la altura del rayo sobre la córnea  $\rho_p$  a través de las ecuaciones de trazo de rayos [87].

El principio de funcionamiento de este queratómetro es que existe una distancia única de los anillos al ojo, a la cual la imagen de ambos anillos formará una sola imagen en un mismo plano focal formando una circunferencia o elipse sobre la córnea. Para ésto, es necesario utilizar una cámara de formato pequeño con una profundidad de foco amplia para capturar la imagen [87]. Entonces, el radio de curvatura  $r$  puede ser calculado trazando un rayo de luz originado en el primer anillo, que incida sobre la córnea y que coincida con un segundo rayo proveniente del segundo anillo [87].

Se eligió el uso de dos anillos en este diseño, principalmente porque permite la medición de la distancia entre los anillos y el vértice del ojo. El segundo anillo funciona como un plano de referencia de manera que se puede obtener un valor absoluto del radio de curvatura en lugar de un valor relativo al utilizar un solo anillo [87].

## 4.2. Caracterización y análisis de datos

En esta sección se presentan los cálculos necesarios para obtener el radio de curvatura a partir del trazo geométrico de rayos en nuestro diseño del queratómetro. Asimismo, se

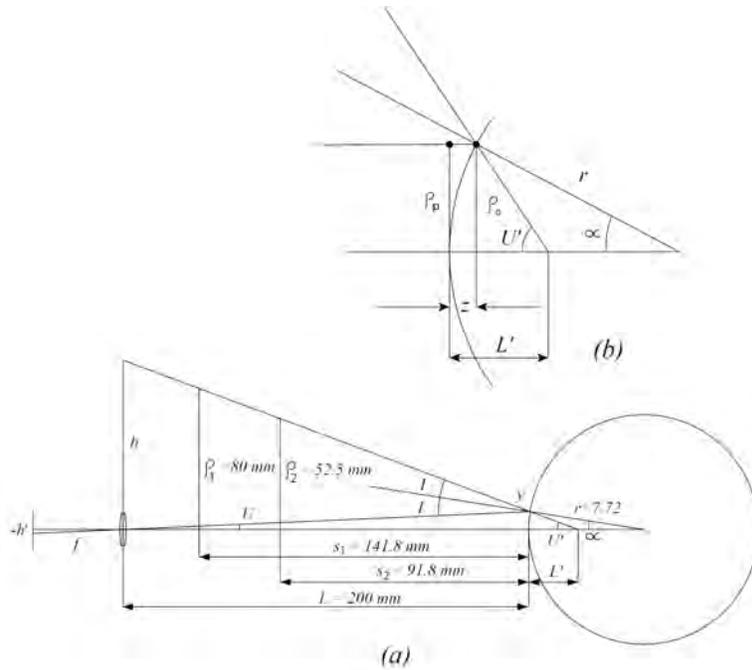


Figura 4.1: Sistema óptico para el queratómetro. La circunferencia representa la superficie corneal.  $\rho_1$  y  $\rho_2$  representan los radios de los anillos de LEDs.  $L$  es la distancia de la córnea al lente de la cámara.  $s_1$  y  $s_2$  son las distancias de la córnea a cada anillo de LEDs. No se presenta a escala. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

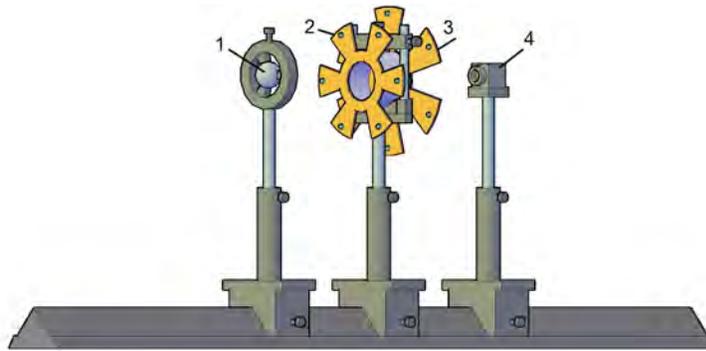


Figura 4.2: Esquema del prototipo del queratómetro. 1. Balín de calibración. Placa con LEDs #2. Placa con LEDs #1. 4. Cámara. En cada placa, se localizan 6 LEDs distribuidos en forma de anillo. Las placas tienen forma de engrane para permitir pasar la luz de la placa #1 hasta alcanzar el balín de calibración.

muestra el análisis realizado para caracterizar su sensibilidad y error.

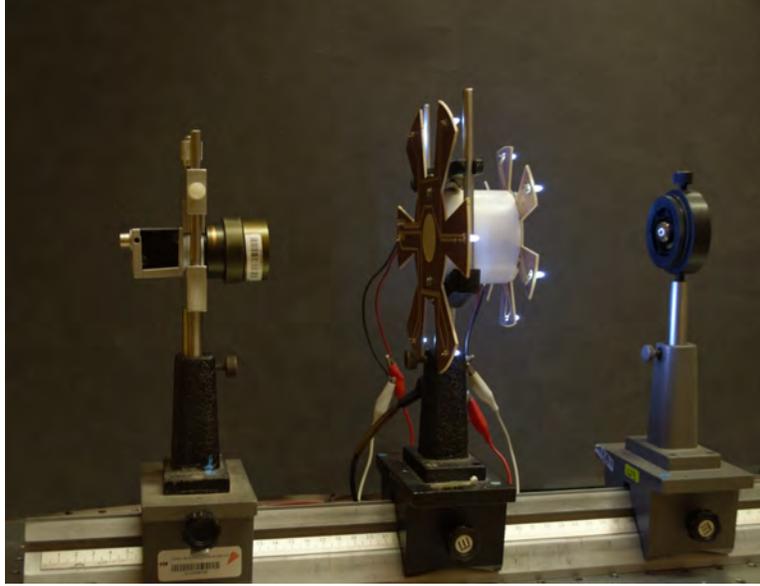


Figura 4.3: Prototipo armado del queratómetro, de acuerdo al esquema de la Fig. 4.2

#### 4.2.1. Cálculo del radio de curvatura

El trazo de rayos para el sistema óptico mostrado en la Fig. 4.1 se vuelve más simple si se considera en reversa [87, 118]. La tangente del ángulo  $U$  respecto al eje óptico está dado por [87]:

$$\tan U = \frac{\rho_p}{L} = \frac{\rho_0}{L + z} \quad (4.1)$$

y la tangente del ángulo  $U'$  está dada por [87]:

$$\tan U' = \frac{\rho_1 - \rho_2}{s_1 - s_2} \quad (4.2)$$

Una vez que el queratómetro ha sido construido, el ángulo  $U'$  se vuelve una constante instrumental, independiente de cualquier ajuste. Los dos anillos de LEDs se ensamblan a una distancia axial fija entre ellos ( $\Delta s = s_1 - s_2$ ). Durante la observación de la córnea, las imágenes de cada anillo son casi del mismo tamaño con una pequeña diferencia en su diámetro. Entonces, todo el instrumento se puede mover como un todo a lo largo del eje óptico, ya sea hacia más cerca o más lejos del ojo, hasta que las imágenes de los anillos sean del mismo diámetro [87].

Los ángulos  $U$  y  $U'$  están relacionados de la siguiente manera [87]:

$$U' + U = 2I \quad (4.3)$$

y por:

$$I = U + \alpha \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$U' - U = 2\alpha \quad (4.5)$$

Una vez que se obtiene el ángulo  $\alpha$ , se puede calcular el radio de curvatura [87]:

$$r = \frac{\rho_0}{\text{sen } \alpha} = \frac{\rho_0}{\text{sen} \left( \frac{U' - U}{2} \right)} \quad (4.6)$$

De acuerdo con la Fig. 4.1b, es posible medir el radio  $\rho_p$  del patrón observado en el plano de entrada de la pupila. Este plano es perpendicular al eje óptico y tangente al vértice de la superficie reflectora. El radio  $\rho_0$  corresponde al punto sobre la superficie reflectora donde el rayo de luz es reflejado [87]. De la Fig. 4.1b se puede determinar que los radios  $\rho_0$  y  $\rho_p$  están relacionados de la siguiente manera [87]:

$$\rho_0 = \rho_p + z \tan U \quad (4.7)$$

por lo que se obtiene para el radio de curvatura:

$$r = \frac{\rho_p + z \tan U}{\text{sen} \left( \frac{U' - U}{2} \right)} \quad (4.8)$$

y la ecuación de la circunferencia en el plano meridional definido por la superficie esférica óptica es [87]:

$$(r - z)^2 + \rho_0^2 = r^2 \quad (4.9)$$

y el valor de la sagita vendría dado por:

$$z = r - \sqrt{r^2 - \rho_0^2} \quad (4.10)$$

Sustituyendo aquí la expresión para  $\rho_0$  de la Ec. 4.7, la solución para la ecuación de segundo grado para la sagita  $z$  queda como [87]:

$$z = \frac{-(\rho_p \tan U - r) - \sqrt{r^2 - \rho_p^2 - 2r\rho_p \tan U}}{1 + \tan^2 U} \quad (4.11)$$

Utilizando el valor de  $z$  para calcular  $\rho_0$ , su expresión vendría dada por [87]:

$$\rho_0 = \rho_p - \frac{(\rho_p \tan U - r) + \sqrt{r^2 - \rho_p^2 - 2r\rho_p \tan U}}{1 + \tan^2 U} \tan U \quad (4.12)$$

Finalmente, el radio de curvatura de la córnea estaría dado por [87]:

$$r = \frac{\rho_p - [(\rho_p \tan U - r) + \sqrt{r^2 - \rho_p^2 - 2r\rho_p \tan U}] \tan U}{(1 + \tan^2 U) \sin\left(\frac{U'-U}{2}\right)} \quad (4.13)$$

### 4.2.2. Sensitividad

Si la potencia, en dioptrías, de la superficie corneal se define como [87]:

$$P = \frac{n - 1}{r} \quad (4.14)$$

la cual es de alrededor de 43 dioptrías [119], y  $n$  es el índice de refracción de la córnea, el cual se ha considerado con un valor de  $n=1.3375$  [96] para una longitud de onda en el visible de 550 nm. Entonces, la sensibilidad se puede representar como [87]:

$$\sigma = \frac{dP}{d\rho_p} \quad (4.15)$$

Para una potencia  $P$  dada, y en un sistema donde las imágenes de los anillos de LEDs presentan el mismo tamaño, se calcula el valor del radio de curvatura de acuerdo con la Ec. 4.13. Los valores de la sensibilidad del instrumento  $\sigma$  obtenida a partir del radio y de la potencia se muestran en la Tabla 4.1.

La cámara utilizada tiene un sensor de luz con píxeles de tamaño 5.3 x 5.3  $\mu\text{m}$ . La altura del sensor es de 1024 píxeles. Con estos parámetros se puede observar que la sensibilidad promedio del instrumento es de 1/8 de alrededor de 0.120 dioptrías por píxel, equivalente a 1/8 de dioptría por píxel.

Tabla 4.1: Potencia  $P$  en dioptrías con  $n = 1.337$ , radio  $\rho_p$  de las imágenes observadas de los anillos de LEDs y la sensibilidad del instrumento  $\sigma$ . El sensor de la imagen tiene un tamaño de píxel de  $5.3 \times 5.3 \mu m$

$P$	$\rho_p$	Sensitividad $\sigma$ (diopt./mm)	Sensitividad $\sigma$ (diopt./pix)
38.0	2.1570	17.513	0.093
39.0	2.1030	18.518	0.098
40.0	2.0515	19.417	0.102
41.0	2.0025	20.408	0.108
42.0	1.9558	21.413	0.114
43.0	1.9112	22.421	0.119
44.0	1.8686	23.474	0.124
45.0	1.8274	24.272	0.129
46.0	1.7888	25.907	0.137
47.0	1.7515	26.810	0.142
48.0	1.7157	27.933	0.148
49.0	1.6813	20.070	0.154

### 4.2.3. Análisis de error

Uno de los parámetros con el que se puede introducir error a la medición y cálculo del radio de curvatura, es la distancia  $L$ . Si no se ajusta apropiadamente, se pueden presentar los siguientes errores [87]:

1. Si la distancia  $L$  no es bien ajustada, se debe calcular el radio de las imágenes de los anillos de LEDs con dos diferentes posiciones del instrumento. Para moverlo completamente, se deben cambiar las distancias  $L$ ,  $s_1$  y  $s_2$  simultáneamente. De acuerdo con los valores introducidos en la Tabla 4.2, en la Fig. 4.4 se puede observar que el radio  $\rho_p$  de los anillos de LEDs, medido en dos posiciones del instrumento, se vuelve el mismo cuando no existe error en la distancia  $L$ . Cuando sí existe error en esta distancia, la diferencia de tamaño de las imágenes de los anillos de LEDs es de alrededor de 30 a 35  $\mu m$ , lo cual corresponde a 6 píxeles. Ya que la sensibilidad es de alrededor de 1/8 de dioptría por píxel, 6 píxeles corresponderían a un error de 3/4 de dioptría para un error en la distancia  $L$  de 6 mm.
2. Se introduce un error similar cuando la distancia  $L$  se ajusta al observar una córnea con una determinada potencia dióptrica y ésta es cambiada sin ser reajustada. Para analizar el error en la potencia de este sistema, se trazan dos rayos en un sistema ajustado idealmente con una potencia de 43 dioptrías. Entonces, de acuerdo a nuestro trazo de rayos, la altura  $\rho_p$  del rayo sobre la pupila del ojo se ajusta a prueba y error hasta que llega a la altura de alguno de los dos anillos,  $\rho_1$  o  $\rho_2$ . Se trazan rayos correspondientes a diferentes radios de curvatura de la córnea (diferente potencia dióptrica) y se obtienen los resultados de la Tabla 4.3. Se puede observar que la máxima separación entre las curvas es de 3.5  $\mu m$ , lo cual es más pequeño que un píxel. Así que esta cantidad no es fácil de medir. Como se puede observar en las dos columnas de la Tabla 4.2, los diámetros de las

Tabla 4.2: Diferentes medidas de  $L$ ,  $s_1$  y  $s_2$  para analizar el error introducido en el cálculo del radio de curvatura.

Distancia $L$	Distancia $s_1$	Distancia $s_2$	$\rho_p$ (mm) $\rho_1=80$	$\rho_p$ (mm) $\rho_2=52.5$
195.0	136.8	86.8	1.9369	1.9667
196.0	137.8	87.8	1.9259	1.9494
197.0	138.8	88.8	1.9151	1.9325
198.0	139.8	89.8	1.9044	1.9158
199.0	140.8	90.8	1.8937	1.8993
200.0	141.8	91.8	1.8832	1.8832
201.0	142.8	92.8	1.8728	1.8672
202.0	143.8	93.8	1.8625	1.8515
203.0	144.8	94.8	1.8523	1.8361
204.0	145.8	95.8	1.8422	1.8209
205.0	146.8	96.8	1.8322	1.8059
206.0	147.8	97.8	1.8222	1.7911
207.0	148.8	98.8	1.8124	1.7766

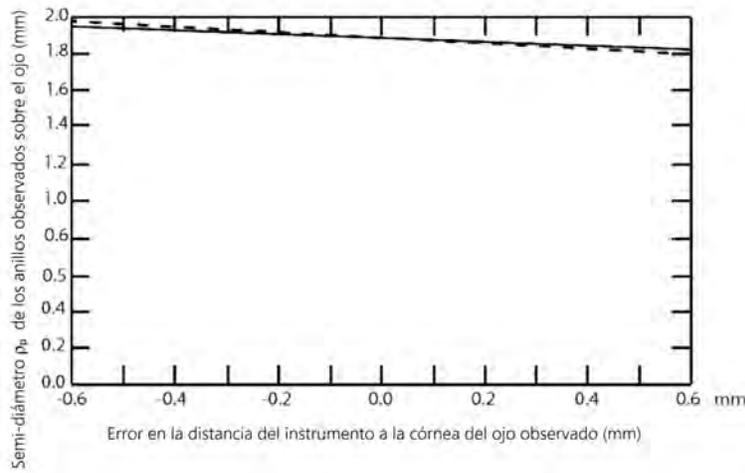


Figura 4.4: Radios  $\rho_p$  de las imágenes de los anillos si la distancia  $L$  no está bien ajustada. Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].

imágenes de los dos anillos tienen valores similares de  $\rho_p$ , con una diferencia de radio no mayor a  $3.5 \mu\text{m}$ . Estos resultados se pueden observar en la Fig. 4.5, donde solamente se trazó una línea ya que las dos líneas provenientes de los dos anillos, casi se empalman una con la otra. La altura de la línea central vertical a 43.73 dioptrías corresponde a un sistema propiamente ajustado.

Ya que la potencia ideal de la córnea sería de 43 dioptrías, existe una ligera diferencia del radio  $\rho_p$  observado. Entonces, diferentes potencias de la córnea van a producir diferentes tamaños de imagen. Por lo tanto, si tomamos el radio  $\rho_p$  en mm, la potencia  $P$  en dioptrías estaría dada por [87]:

$$P = \frac{1.9223 - \rho_p}{0.0411} + 43 \quad (4.16)$$

Tabla 4.3: Trazo de dos rayos, correspondientes a cada anillo de LEDs con diferentes valores del radio de curvatura (potencia dióptrica). El sistema ideal tiene la separación  $L$  correspondiente a 43 dioptrías.

Potencia dióptrica	$\rho_p$ (mm)	
	$\rho_1=80; s_1=141.8$	$\rho_2=52.5; s_2=91.8$
38.0	2.1505	2.1470
39.0	2.0978	2.0952
40.0	2.0476	2.0456
41.0	1.9998	1.9984
42.0	1.9541	1.9533
43.0	1.9105	1.9102
44.0	1.8682	1.8689
45.0	1.8289	1.8294
46.0	1.7906	1.7916
47.0	1.7539	1.7552
48.0	1.7187	1.7204
49.0	1.6849	1.6868
50.0	1.6523	1.6546

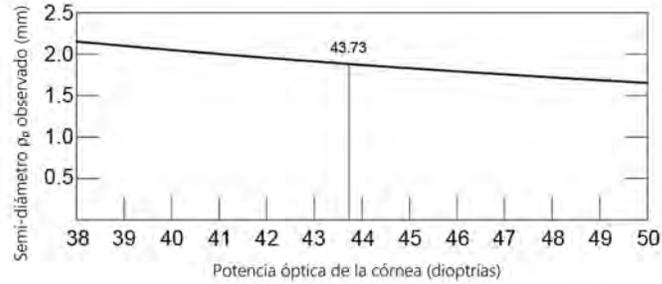


Figura 4.5: Radio  $\rho_p$  medido en la pupila del ojo proveniente de los anillos de LEDs. Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].

#### 4.2.4. Medición de córneas con astigmatismo

Si la córnea tiene una forma astigmática, como una superficie toroidal por ejemplo, la potencia dióptrica debido al astigmatismo  $P_\theta$ , cambia en todas las direcciones con una variación sinusoidal de acuerdo a la siguiente ecuación [87]:

$$P_\theta = P_s + \cos(2\theta + \phi)P_c \quad (4.17)$$

La Ec. 4.17 representa una elipse en coordenadas polares con  $\theta$  y  $\phi$  siendo el ángulo polar y el ángulo de inclinación, respectivamente. El ángulo de inclinación correspondería al eje del astigmatismo.  $P_s$  es la potencia esférica (igual en todas las direcciones)

y  $P_c$  es la potencia cilíndrica (debido al astigmatismo). Entonces, para este caso, la imagen de los anillos de LEDs sobre el ojo sería una elipse, como se muestra en la Fig. 4.6 [87].

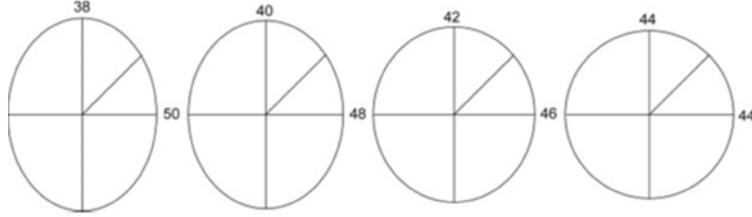


Figura 4.6: Representaciones elípticas de los anillos de LEDs para cuatro diferentes córneas con astigmatismo. Los números corresponden a las potencias máxima y mínima. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

Para obtener el valor de  $h$  (ver Fig. 4.1), se reescribió la Ec. 4.17 en la forma de la Ec. 4.18 y se realizó un ajuste de mínimos cuadrados [87]:

$$\rho = B_0 + B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta \quad (4.18)$$

donde  $\rho$  corresponde al radio geométrico sobre la elipse, el coeficiente  $B_0$  es la altura  $h$  que corresponde a la componente esférica del radio de curvatura de la córnea. A partir de los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  se obtienen los valores del cilindro y del eje del astigmatismo de acuerdo a las siguientes relaciones [87]:

$$\tan \phi = -\frac{B_2}{B_1} \quad (4.19)$$

$$C^2 = B_1^2 + B_2^2 \quad (4.20)$$

donde  $\phi$  es el eje del astigmatismo y  $C$  es el coeficiente correspondiente al valor del cilindro (astigmatismo). Después de realizar un ajuste de mínimos cuadrados a la Ec. 4.18, se obtiene la siguiente expresión para los coeficientes  $B_0, B_1$  y  $B_2$  [87]:

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta_i & \sin 2\theta_i \\ \cos 2\theta_i & \cos^2 2\theta_i & \sin 2\theta_i \cos 2\theta_i \\ \sin 2\theta_i & \sin 2\theta_i \cos 2\theta_i & \sin^2 2\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \rho_i \\ \rho_i \cos 2\theta_i \\ \rho_i \sin 2\theta_i \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

donde  $N=1, \dots, 12$ , ya que se tienen 6 puntos por cada anillo de LEDs.

### 4.3. Pruebas y calibración del instrumento

Para calibrar el instrumento, se realizaron varias simulaciones, con ayuda del software OSLO, para diferentes valores de separación  $\Delta s$ , radio de curvatura  $r$  y radio de la imagen  $\rho_p$ . De acuerdo con las Ecs. 4.6 y 4.12, se revisó si la relación entre  $r$  y  $\rho_p$  es lineal. La Fig. 4.7 muestra la relación entre estas dos cantidades [87].

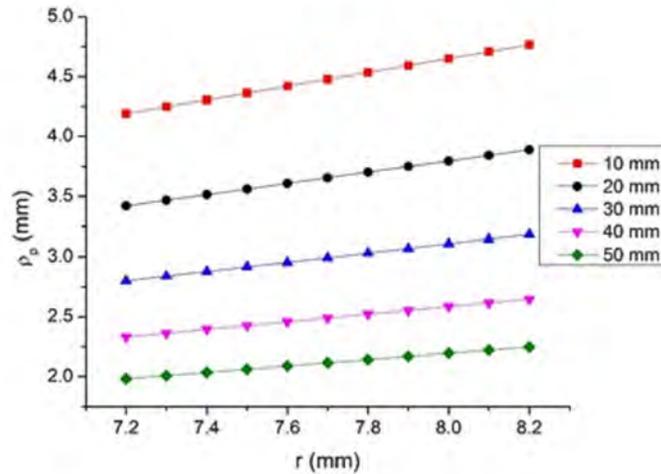


Figura 4.7: Relación entre el radio de la imagen  $\rho_p$  y el radio de curvatura  $r$ . La leyenda en la figura representa diferentes valores de  $\Delta s$ . Se puede observar que existe una relación lineal entre estas dos cantidades. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

Se revisó también la relación entre la distancia  $s_2$  y el radio de curvatura. En la Fig. 4.8 se puede observar que la relación es casi lineal. También se puede notar que entre más grande es el valor de  $\Delta s$ , más grande debe ser el valor de  $s_2$  para que el radio  $\rho_p$  para los dos anillos coincidan.

En la Fig. 4.9 se demuestra que existe una única distancia del instrumento al ojo, a la cual la altura de la imagen de los anillos sobre el ojo, es decir,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  coincidirán, produciendo la altura  $\rho_p$ .

También se probó cuál distancia  $\Delta s$  sería la óptima. Se probaron tres diferentes valores, 30 mm, 50 mm y 90 mm. Como se demostró anteriormente, entre más grande sea  $\Delta s$ , más grande resulta la distancia  $s_2$ , alcanzando una longitud de hasta 150 mm. A esta distancia, la imagen de cada LED sobre el detector era aproximadamente del tamaño del píxel, por lo tanto, la medición de  $h$  no sería confiable, además de que se desperdiciaría área útil del detector. Por otro lado, utilizar la distancia de  $\Delta s=30$  mm reduciría la longitud  $s_2$ , sin embargo, al estar el instrumento más cerca del ojo, aumentaría el ruido en la imagen debido a una mayor cantidad de luz y reflexiones provenientes y producidas por el mismo

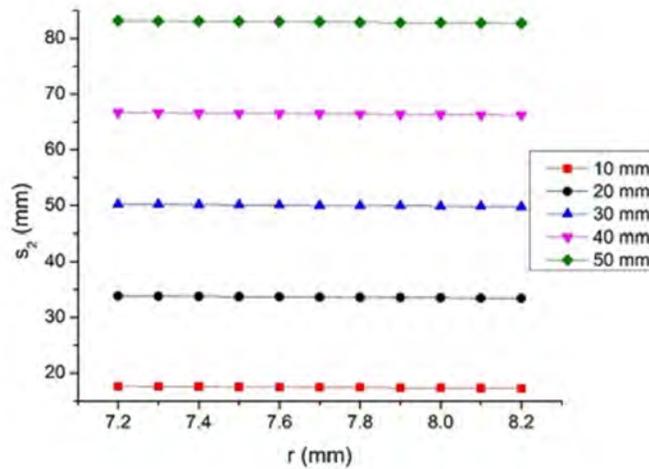


Figura 4.8: Relación entre la distancia  $s_2$  y el radio de curvatura  $r$ . La leyenda en la figura representa los diferentes valores de  $\Delta s$  utilizados. Como se puede observar, la relación es casi lineal. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

instrumento sobre el ojo. Debido a estas consideraciones, se decidió optar por la distancia  $\Delta s=50$  mm.

En las Fig. 4.3 se muestra el prototipo construido para el queratómetro. Para probarlo y calibrarlo y para realizar un análisis de repetitividad y reproducibilidad, se utilizaron 5 balines de calibración y se aplicó la medición a 8 pacientes. Los radios de curvatura de los balines de calibración se muestran en la Tabla 4.4. Como referencia, de acuerdo con Navarro et al. [119, 120], el radio de curvatura promedio es de 7.72 mm el cual corresponde a una potencia de 43 D utilizando un índice de refracción de  $n=1.3375$  [96].

Tabla 4.4: Radios de curvatura de los balines de calibración

Balín #	Radio de curvatura (mm)
1	6.34
2	7.95
3	9.52
4	8.14
5	11.51

Se realizaron 75 mediciones de radio de curvatura, y su correspondiente potencia dióptrica, sobre los cinco balines de calibración (15 mediciones por balín). Ya que los balines son esféricos, de las Ecs. 4.18 y 4.21, solamente es apropiado tomar el valor del coeficiente  $B_0$  para obtener el radio de curvatura promedio. Además se realizaron 48 mediciones sobre los 8 pacientes (24 mediciones por ojo). Tres de los pacientes tenían menos

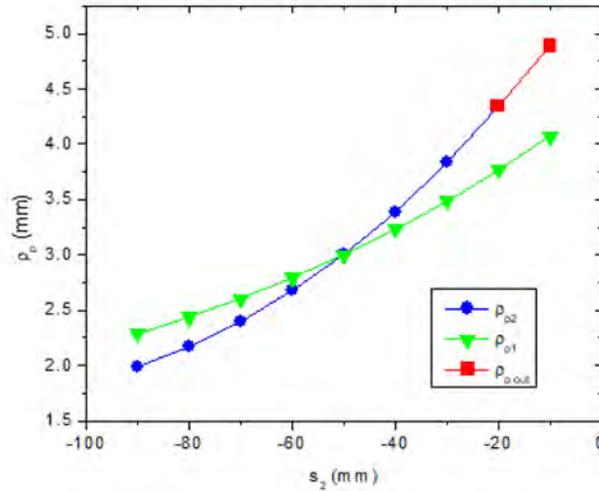


Figura 4.9: Coincidencia de las alturas de las imágenes de cada anillo de LEDs (1 y 2). Los símbolos cuadrados muestran la distancia  $s_2$  a la cual los rayos saldrían del sistema debido a la cercanía del instrumento al ojo. Esta coincidencia solamente se da a una única distancia  $L$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

de 2D de astigmatismo, mientras que los otros 6 pacientes, presentaban astigmatismo entre 2D y 7D. Uno de estos 6 pacientes ya había tenido un trasplante de córnea y otro presentaba queratocono. Se utilizó el aparato KR-1 TOPCON Wavefront Analyzer del Laboratorio Nacional de Visión para comparar nuestros resultados.

En la Fig. 4.10 se muestran algunas de las imágenes tomadas con este nuevo queratómetro. Se puede observar ligeramente la forma de la elipse en las subfiguras c), d) y f). La elipse es totalmente visible en la subfigura e). La Fig. 4.11 muestra los centroides de cada LED correspondientes a cada subfigura de la Fig. 4.10. La línea azul representa el eje de astigmatismo obtenido a partir de la Ec. 4.21. La Fig. 4.12 muestra la representación gráfica del ajuste de la elipse realizada sobre los centroides de la Fig. 4.11. El análisis matemático y el tratamiento de las imágenes fue realizado en la plataforma de MATLAB.

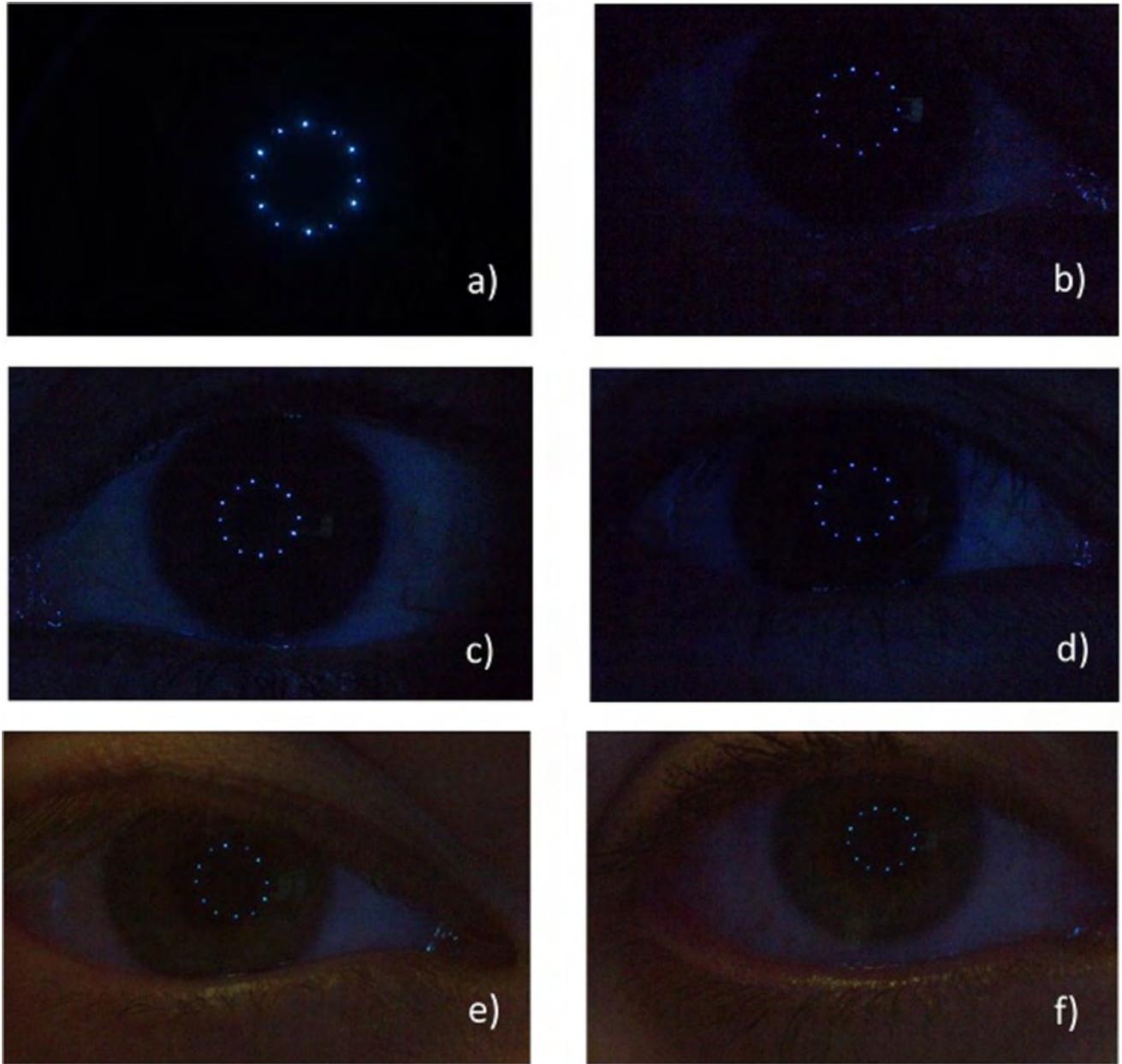


Figura 4.10: Imágenes de los dos anillos de LEDs sobre uno de los balines y 5 de los pacientes. a) Balín de calibración #3, b) paciente con astigmatismo menor a 2D, c) y d) pacientes con astigmatismo entre 2D y 2.25D, e) paciente con astigmatismo de 3.75D debido a transplante de córnea, y f) paciente con astigmatismo de 3.50D. Estos valores de astigmatismo fueron medidos con el aparato KR-1 TOPCON Wave-Front Analyzer. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

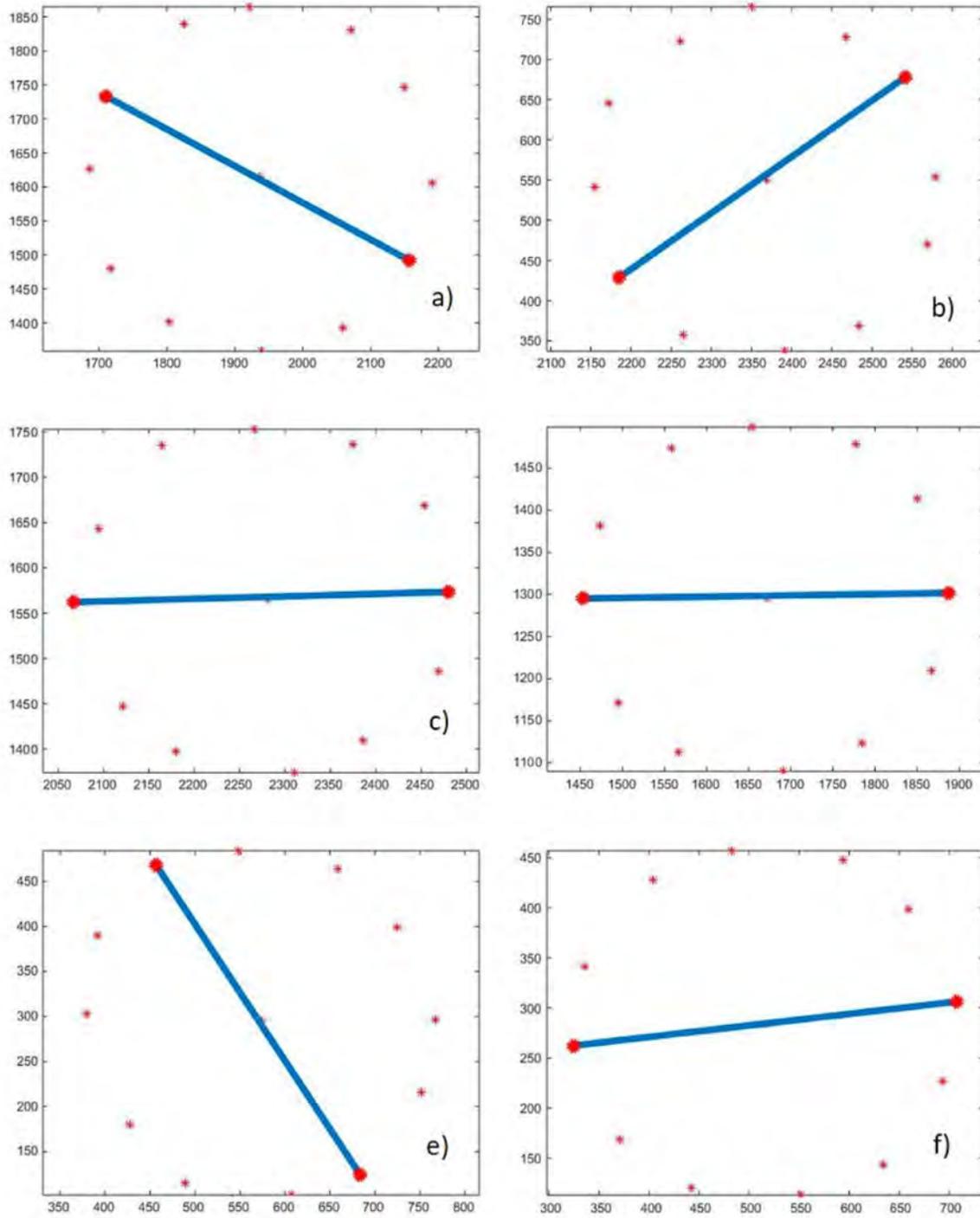


Figura 4.11: Centroides de la imagen de cada LED. La línea azul representa el eje de astigmatismo de acuerdo con el ajuste a una elipse y a la Ec. 4.21. Cada imagen corresponde a las imágenes de la Fig. 4.10. Las unidades están en píxeles. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

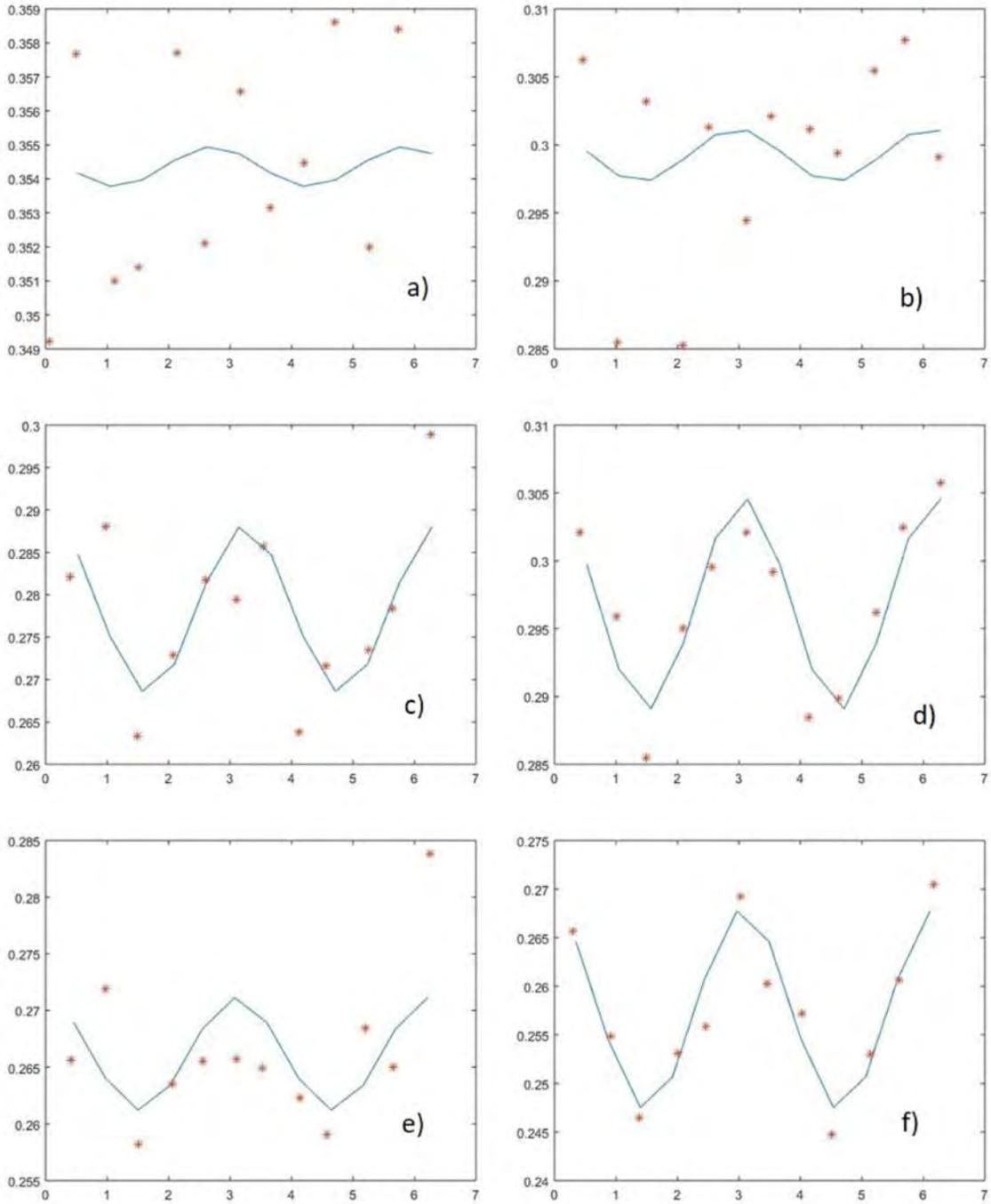


Figura 4.12: Representación gráfica del ajuste de la elipse sobre los centroides mostrados en la Fig. 4.11. Obsérvese cómo en a) y b), los cuales corresponden al balón #3 y al paciente con astigmatismo menor a 2D, respectivamente, el ajuste no es confiable debido a que la imagen de los anillos de LEDs es prácticamente una circunferencia. El eje vertical corresponde al radio geométrico de la elipse en mm sobre el sensor de la cámara. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

### 4.3.1. Resultados estadísticos

Se realizó un análisis estadístico de repetitividad y reproducibilidad con las 75 mediciones hechas a los balines de calibración y con las 48 mediciones realizadas a los pacientes. Para el radio de curvatura promedio se obtuvo un nivel de confianza del 95 % para la repetitividad y del 99 % para la reproducibilidad. Para el cilindro y para el eje de astigmatismo, los niveles de confianza tanto para la repetitividad como para la reproducibilidad, fueron del 95 % y 90 %, respectivamente [87]. La Tabla 4.5 y la Fig. 4.13, muestran la comparación de los valores medidos con este nuevo queratómetro y las mediciones realizadas con el aparato KR-1 TOPCON para los ocho pacientes.

Tabla 4.5: Comparación de las mediciones hechas a los pacientes con el nuevo queratómetro y el aparato KR-1 TOPCON

Paciente #	Nuevo queratómetro				KR-1 TOPCON			
	Radio de curvatura (mm)	Potencia óptica (dioptrías)	Potencia del cilindro (dioptrías)	Eje de astigmatismo (grados)	Radio de curvatura (mm)	Potencia óptica (dioptrías)	Potencia cilindro (dioptrías)	Eje de astigmatismo (grados)
1	7.81, 7.68	43.81, 44.64	-0.61, -1.57	36, 140	7.71, 7.57	44.00, 44.50	-0.75, -1.25	18, 163
2	8.23, 7.91	41.00, 42.66	-3.20, -1.63	155, 172	8.15, 7.95	41.50, 42.50	-3.75, -1.50	135, 180
3	7.81, 7.79	43.20, 43.31	-2.21, -3.03	3, 168	7.80, 7.79	43.25, 43.50	-2.25, -3.50	6, 176
4	8.11, 8.14	41.62, 41.45	-2.09, -1.45	6, 152	8.09, 8.16	41.75, 41.50	-2.25, -2.00	4, 169
5	7.63, 7.62	44.26, 44.30	-0.29, -0.42	135, 75	7.61, 7.60	44.50, 44.50	-0.50, -0.50	145, 21
6	7.61, 7.50	44.37, 45.00	-1.34, -1.50	28, 160	7.58, 7.52	44.50, 45.00	-1.50, -2.00	20, 167
7	7.51, 5.98	44.97, 56.40	-2.46, -7.65	78, 168	7.47, 6.00	45.25, 56.50	-2.25, -7.00	47, 177
8	7.47, 7.52	45.17, 44.87	-3.65, -3.44	7, 2	7.47, 7.49	45.25, 45.25	-3.50, -3.50	6, 1

## 4.4. Aplicación del queratómetro en la medida de la curvatura de una lente

Como una aplicación relacionada al tema de pruebas ópticas a superficies esféricas, se deseó verificar si era posible medir la curvatura de una lente esférica y esférica con este nuevo prototipo de queratómetro. Debido a que su diseño está basado en la medición del radio de curvatura de una lente esférica en general y, de acuerdo a lo mencionado en este capítulo, se está aplicando a la medición del radio de curvatura de la córnea, que realmente no es esférica, entonces, se justifica su aplicación para la medición del radio de curvatura para cualquier lente en general.

Nuevamente se utilizó la lente biconvexa esférica-afélica TOPCON cuyas características se mencionaron en el Capítulo 3. Se hizo uso de un espejo plano colocado detrás de la lente, para producir el reflejo de la imagen de los anillos de LEDs sobre la lente y poder captar su imagen con el detector de la cámara del queratómetro y de esta manera, no modificar su diseño ni las ecuaciones correspondientes al cálculo del radio de curvatura. En las Figuras 4.14 y 4.15 se muestran las imágenes de los anillos de LEDs sobre la superficie afélica y esférica, respectivamente. Cabe mencionar que sobre la lente se producía el reflejo de los anillos de LEDs sobre la cara posterior, así que previamente a ser analizada,

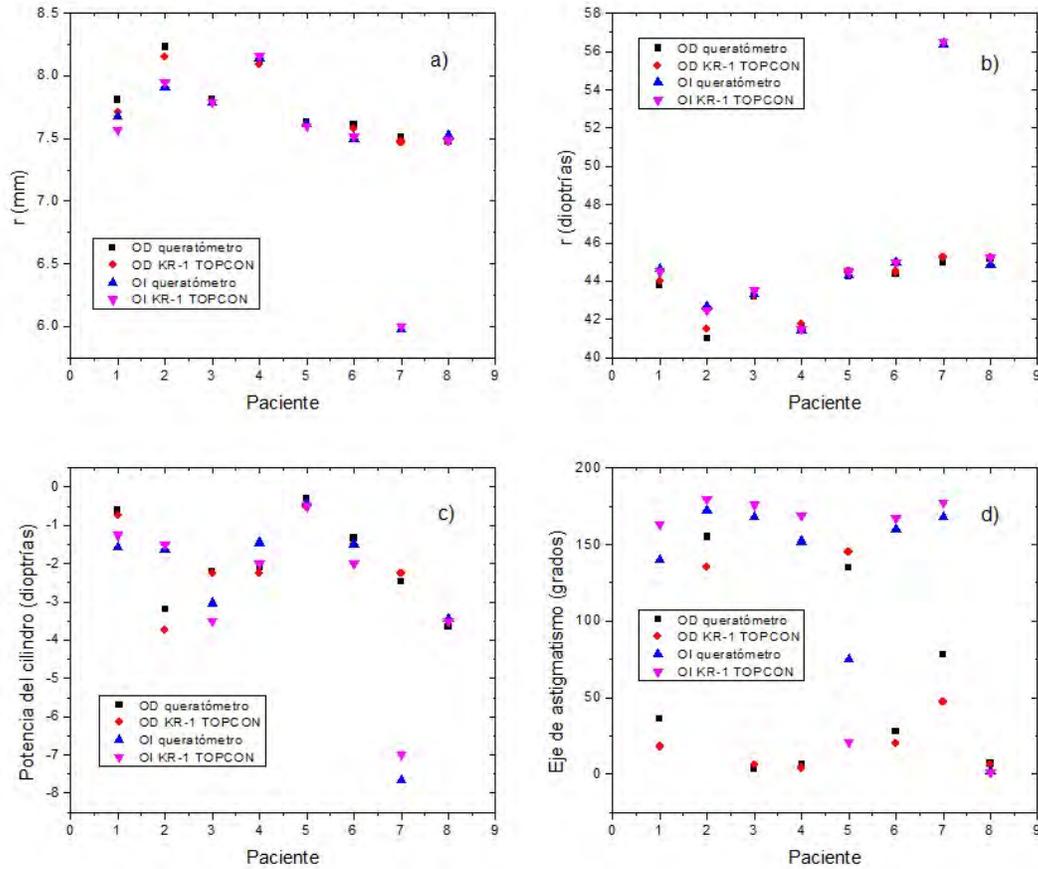


Figura 4.13: Comparación del radio de curvatura (en a) mm y b) dioptrías), c) potencia del cilindro y d) eje de astigmatismo de acuerdo a la Tabla 4.5. OD indica ojo derecho y OI indica ojo izquierdo. Obsérvese que el error es mayor para los pacientes con astigmatismo cercano a 2D. Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].

la imagen fue limpiada del reflejo en esta superficie.

De acuerdo a los resultados presentados en el Capítulo 3 para la curvatura de las superficies de la lente TOPCON:  $0.019 \text{ mm}^{-1}$  para la superficie esférica, y  $0.008 \text{ mm}^{-1}$  para la esférica, corresponden a los radios de curvatura de 52.63 mm y 125 mm, respectivamente. El radio de curvatura promedio obtenidos con el queratómetro para la superficie esférica fue de 47.41 mm y de 115 mm para la superficie esférica, lo que corresponde a un error del 10 % y del 8 %, respectivamente.

Se puede decir entonces, que este diseño de queratómetro puede funcionar para medir el radio de curvatura de lentes. Sin embargo, para superficies esféricas habría que considerar

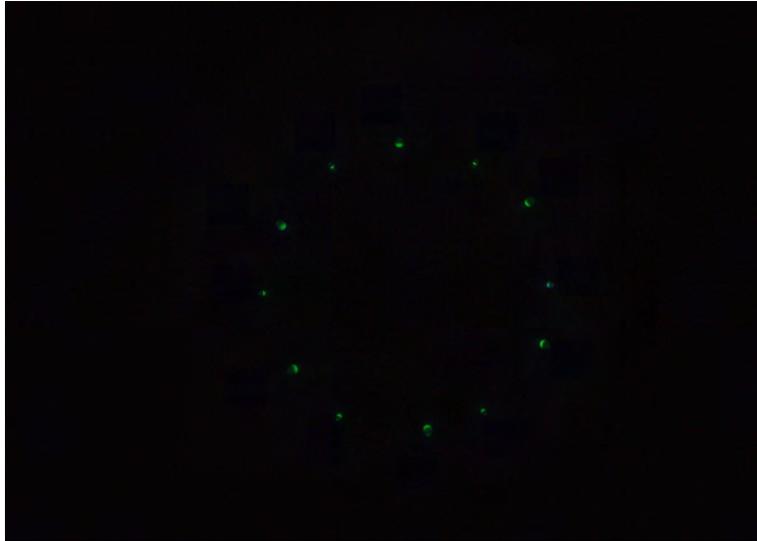


Figura 4.14: Imagen de los anillos de LEDs sobre la superficie esférica de la lente TOP-CON.

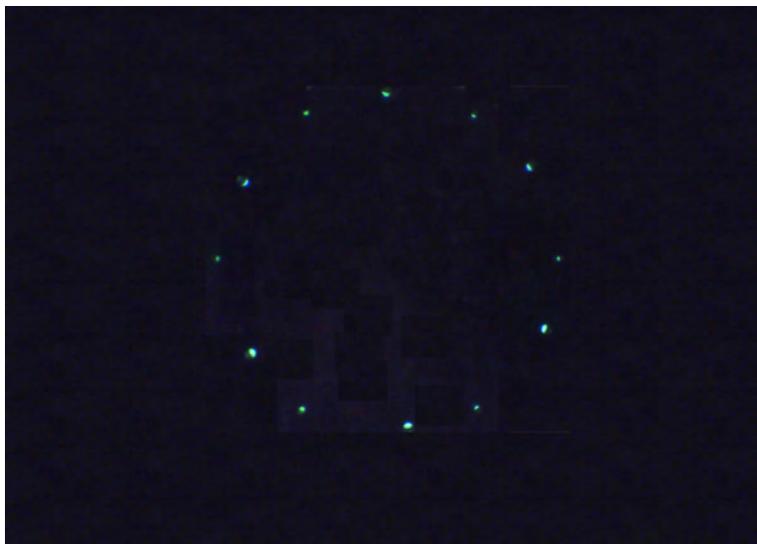


Figura 4.15: Imagen de los anillos de LEDs sobre la superficie esférica de la lente TOP-CON.

solamente un radio de curvatura o curvatura local, dependiendo de la forma de la asfera.

# Capítulo 5

## Discusión

En este capítulo se discutirá sobre los problemas y mejoras que se pueden aplicar, tanto al método de interferometría de desplazamiento lateral, presentado en el Capítulo 3, como el diseño y caracterización del queratómetro, presentado en el Capítulo 4.

### 5.1. Método de interferometría de desplazamiento lateral

De acuerdo con los resultados obtenidos al aplicar este método a los interferogramas sintéticos, se puede obtener una precisión en la reconstrucción del frente de onda de alrededor de  $1\lambda$  y un error  $PV$  de alrededor del 1%. Esta precisión se puede aumentar y el error se puede disminuir si en la Ec. 3.15 se agregan los coeficientes de aberración esférica, coma y aberraciones de órdenes mayores, ya que se tienen hasta 12 datos por celda cuadrada para realizar el ajuste de mínimos cuadrados.

Para comprobar la capacidad de este método para reproducir detalles de alta frecuencia espacial se generó un frente de onda con defoco en una dimensión y se le agregaron componentes de alta frecuencia espacial de manera que no puede ser representado con una simple función polinomial. En la Fig. 5.1 se muestra el método de Saunders modificado con interferometría de desplazamiento lateral, aplicado a este frente de onda en una dimensión. Es evidente la capacidad de este método para reconstruir detalles de alta frecuencia [27].

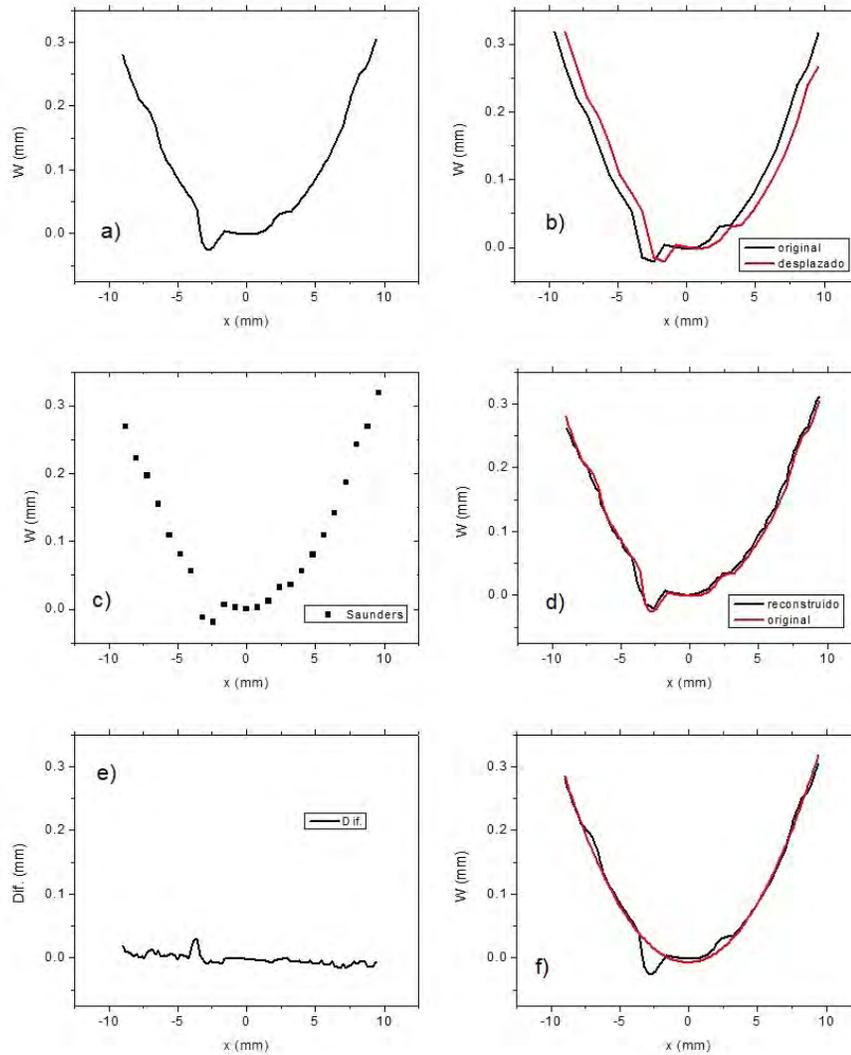


Figura 5.1: a) Frente de onda con defoco (original) con algunos detalles de alta frecuencia, b) desplazamiento lateral en  $x$ , c) método de Saunders modificado, d) comparación entre el frente de onda reconstruido y el original, nótese que se reproducen los detalles de alta frecuencia, e) diferencia entre el frente de onda original y el reconstruido, f) ajuste de mínimos cuadrados (línea roja) con una función polinomial. *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2018) [27]*

## 5.2. Diseño y caracterización de un nuevo queratómetro

Para realizar la calibración y pruebas de este nuevo queratómetro (Capítulo 4), se utilizó una lente de 35 mm de distancia focal como formadora de imagen sobre el detector de la cámara. Esta lente producía una imagen de 1/10 el tamaño del detector, lo que generó que lo menos que se pudiera medir de astigmatismo fueran 2D, lo que se puede observar en las Figs. 4.10 a 4.12 y en la Tabla 4.5. Bajo esta configuración, para que el queratómetro sea capaz de medir un astigmatismo menor a 2D, el tamaño de píxel del detector tendría que ser de  $0.90 \mu m$ . Un detector con esta característica sería demasiado costoso y no cumpliría con una de las características original de nuestro queratómetro, que es ser un instrumento de bajo costo. La solución consta de utilizar una lente con distancia focal mayor para obtener una imagen con una amplificación acorde al tamaño del detector [87]. Con estos cambios se podría medir un astigmatismo de hasta 0.25D.

Cabe mencionar que, debido a la simetría del diseño de este nuevo queratómetro, la rotación de todo el sistema no tendría un efecto contraproducente en las mediciones, a diferencia de otros queratómetros [121].

Para comprobar nuestro análisis de error, se decidió diferenciar los puntos LEDs de un anillo y del otro y ajustar una elipse a cada anillo. En la Ec. 4.18, en lugar de ser 12 puntos a ajustar, serían 6 puntos. Se obtiene entonces un valor promedio de  $\Delta r$  que representa la precisión de nuestro queratómetro. En la Fig. 5.2 se muestra un esquema de lo que sería el ajuste de estas dos elipses.

Recalculando el radio de curvatura corneal (en mm y en dioptrías) y la cantidad de astigmatismo (cilindro) para cada elipse mostrada en la Fig. 5.2, se obtiene una precisión promedio de 0.33D y 0.15D para el radio de curvatura y para el astigmatismo, respectivamente. Comparando nuestros resultados con las mediciones tomadas con el instrumento KR-1 TOPCON, se obtiene una diferencia menor al 1% lo que coincide con el 99% de nivel de confianza obtenido con las mediciones hechas con los balines de calibración y con los pacientes. Este análisis realizado con las dos elipses, fue solamente hecho para comprobar la precisión del instrumento.

Cabe mencionar, que no hay necesidad de colocar los LEDs de cada anillo de diferentes colores, la plataforma de MATLAB utilizada para realizar todo el análisis y procesamiento de imágenes, permite etiquetar cada uno de los puntos LEDs de la imagen, y ya que están dispuestos como una rueda de engrane, basta con etiquetarlos alternadamente para diferenciar entre los LEDs de un anillo y del otro. Esto hace más fácil, la automatización de todo el proceso de toma de imagen con este queratómetro, que sería el siguiente paso a realizar.

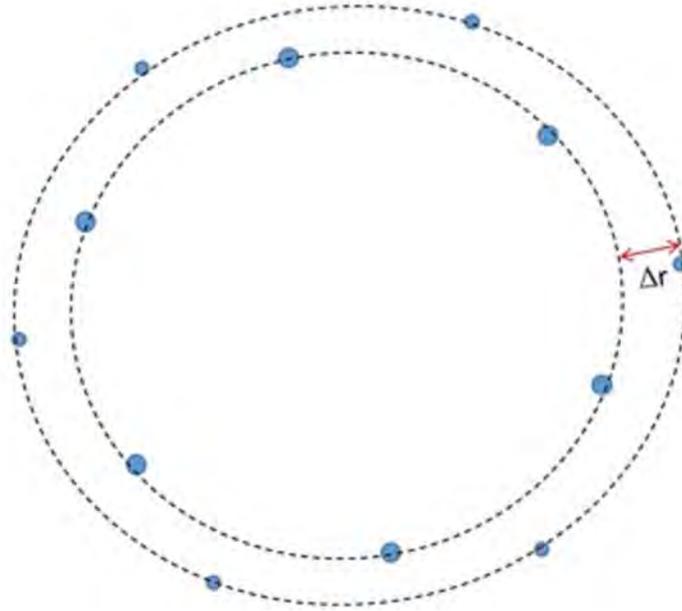


Figura 5.2: Ajuste de una elipse a cada uno de los anillos de LEDs para obtener un valor  $\Delta r$  como precisión del queratómetro. Los LEDs más cercanos al ojo, se representan con un círculo más grande (de hecho, se detectan más brillantes). La imagen no está a escala y está exagerada para mostrar el concepto de  $\Delta r$ . *Imagen tomada de Mancilla-Escobar et al. (2019) [87].*

# Capítulo 6

## Conclusiones

En cuanto al método desarrollado de interferometría de desplazamiento lateral utilizando una combinación del método de Saunders y corrimiento de fase, se puede concluir que su aplicación tiene un gran potencial en pruebas ópticas y metrología ya que permite el cálculo de coeficientes de aberración de manera localizada en cada una de las celdas cuadradas en las que se divide el frente de onda. También permite su reconstrucción sin filtrar detalles de altas frecuencias espaciales. Hemos demostrado que su precisión es del 1 % y aún se puede mejorar.

El trabajo a futuro respecto a este método de prueba interferométrica sería su aplicación en superficies esféricas para analizar su capacidad respecto a este tipo de superficies.

Se desarrolló un nuevo diseño de queratómetro capaz de medir el radio de curvatura promedio de la córnea, así como la cantidad de astigmatismo (cilindro) y su respectivo eje. Se obtuvo una confiabilidad en los datos entre 95 % y 99 %. Se realizó la medición del radio de curvatura para una lente biconvexa esférica-esférica con una precisión del 90 %. Se puede decir que este instrumento, además de funcionar como queratómetro, también se puede aplicar para medir radios de curvatura en lentes, con especial cuidado en mediciones hechas sobre asferas, ya que esta medición debería considerarse de manera local sobre la superficie esférica. Sin embargo, de igual manera que con el método de interferometría, es necesario realizar más mediciones sobre asferas para obtener más valores estadísticos y poder obtener la confiabilidad en la medición del radio de curvatura de superficies esféricas.

# Bibliografía

- [1] M. F. Kuchel, Interferometric measurement of rotationally symmetric aspheric surfaces, *Proc. SPIE* 7389 (2009) 738916.
- [2] D. Aguirre-Aguirre, M. Campos-García, R. Díaz-Urbe y B. Villalobos-Mendoza, General equations for the null-screen test for aspherical surfaces with deformation coefficients, *Appl. Opt.* 57 (2018) 10230-10238.
- [3] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Second Ed., John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [4] D. Malacara-Hernández y Z. Malacara-Hernández, *Handbook of Optical Design*, Third Ed., CRC Press, New York, 2013.
- [5] G. W. Forbes y C. P. Brophy, Asphere, O Asphere, how shall we describe thee?, *Proc. SPIE* 7100 (2008) 710002.
- [6] D. Aguirre-Aguirre, R. Izazaga-Pérez, F. S. Granados-Agustín, B. Villalobos-Mendoza, M. E. Percino-Zacarías, y A. Cornejo-Rodríguez, Algorithm for Ronchigram recovery with random aberrations coefficients, *Opt. Eng.* 52 (2013) 053606-1-11.
- [7] A. Cornejo-Rodríguez, F. Granados-Agustín, y Y. Luna-Zayas, The Ronchi test and the use of structured gratings for sharpening the fringes, in *Frontiers in Optics*, OSA Technical Digest (CD) (Optical Society of America, 2006), paper OFWA1.
- [8] Y. Luna-Zayas, F. Granados-Agustín, y A. Cornejo-Rodríguez, Ronchi Test with Sub-structured Gratings, *Proc. of SPIE* 6034 (2006) 60341W-1-7.
- [9] J. Sánchez-Paredes, G. Silva-Ortigoza, J. Castro-Ramos, y S.. Vázquez-Montiel, A set of lateral shear optical tests with a liquid crystal display, *Opt. Pura Apl.* 46 (2013) 205-214.
- [10] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, N. Qureshi, L. Castañeda, y C. L. Ordóñez-Romero, Null Ronchi-Hartmann test for a lens, *Opt. Exp.* 18 (2010) 21131-21137.
- [11] F.J. Gantes-Nuñez, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, D. Malacara-Hernández, Zonal processing of Hartmann or Shack–Hartmann patterns, *Appl. Opt.* 56 (2017) 1898-1907.

- [12] J. M. Asfour, y A. G. Poleshchuk, Asphere testing with a Fizeau interferometer based on a combined computer-generated hologram, *J. Opt. Soc. Am. A* 23 (2006) 172-178.
- [13] T. Gemma, S. Nakayama, H. Ichikawa, T. Yamamoto, Y. Fukuda, T. Onuki, y T. Umeda, Interferometry with Null Optics for Testing Aspherical Surfaces at 1nm Accuracy, In: Inasaki I. (eds) *Initiatives of Precision Engineering at the Beginning of a Millennium*. Springer, Boston, MA.
- [14] J. C. Wyant, Interferometric Testing of Aspheric Surfaces, *Proc. SPIE 816 Interferometric Metrology* (1987) 19-39.
- [15] B. Dörband, y H. J. Tiziani, Testing aspheric surfaces with computer-generated holograms: analysis of adjustments and shape errors, *Appl. Opt.* 24 (1985) 2604-2611.
- [16] A. Ono, y J. C. Wyant, Aspherical mirror testing using a CGH with small errors, *Appl Opt.* 24 (1985) 560-563.
- [17] S. Peterhänsel, C. Pruss, y W. Osten, Phase errors in high line density CGH used for aspheric testing: beyond scalar approximation, *Opt. Exp.* 21 (2013) 11638-11651.
- [18] S. Reichelt, C. Pruss, y H. J. Tiziani, Absolute testing of aspheric surfaces, *Proc. SPIE 5252, Optical Fabrication, Testing, and Metrology* (2004).
- [19] S. Stuerwald, Error compensation in computer generated holograms-based form testing of aspheres, *Appl. Opt.* 53 (2014) 8249-8255.
- [20] J. C. Wyant, y V. P. Bennett, Using Computer Generated Holograms to Test Aspheric Wavefronts, *Appl. Opt.* 11 (1972) 2833-2839.
- [21] J. C. Wyant, Computerized interferometric surface measurements [Invited], *Appl. Opt.* 52 (2013) 1-8.
- [22] H. Zhang, X. Wang, D. Xue, y X. Zhang, Modified surface testing method for large convex aspheric surfaces based of diffraction optics, *App. Opt.* 56 (2017) 9398-9405.
- [23] N.I. Toto-Arellano, A. Martínez-García, J.A. Rayas-Álvarez, D.I. Serrano-García, Slope measurement of a phase object, *Proc. SPIE.* 8011 (2011) 80110P.
- [24] S. Chatterjee, Y.P. Kumar, Measurement of surface profile of a long-radius optical surface with wedge phase shifting lateral shear interferometer, *Opt. Eng.* 49 (2010) 103602-6.
- [25] Z. Liu, T. Xin, Y. Jiang, B. Lv, F. Xu, Two-dimension lateral shearing interferometry with dual-mode, *Proc. SPIE.* 9628 (2015) 962817.
- [26] Y. P. Kumar, S. Chatterjee and S. S. Negi, Small roll angle measurement using lateral shearing cyclic path polarization interferometry, *Appl. Opt.* 55 (2016) 979–983.

- [27] B. Mancilla-Escobar, Z. Malacara-Hernández y D. Malacara-Hernández, Two dimensional wavefront retrieval using lateral shearing interferometry, *Opt. Commun.* 416 (2018) 100-107.
- [28] G. Hong, X. Qiming, H. Kaixiang, and R.E. Parks, Aspheric surface testing by a phase-shifting shearing interferometer, *Proc. SPIE.* 1994 (1993) 145-149.
- [29] R. Hanayama, K. Ishii, K. Matsuda, Small lens testing method using phase shift shearing interferometer, *Proc. SPIE.* 7389 (2009) 73890Y.
- [30] Y.P. Kumar, S. Chatterjee, Step height measurement using lateral shearing cyclic path optical configuration setup and polarization phase-shifting interferometry, *Opt. Eng.* 51 (2012) 023601-6.
- [31] S. Chatterjee, Y.P. Kumar, Simple technique for the accurate internal measurement of a right angle with a polarization phase-shifting, lateral-shearing, cyclic path optical configuration, *Opt. Eng.* 51 (2012) 073601.
- [32] X. Liu, Y. Gao, M. Chang, A new lateral shearing interferometer for precision surface measurement, *Opt. Lasers Eng.* 47 (2009) 926–934.
- [33] F. Dai, J. Li, X. Wang, Y. Bu, Exact two-dimensional zonal wavefront reconstruction with high spatial resolution in lateral shearing interferometry, *Opt. Commun.* 367 (2016) 264–273.
- [34] R. Disawal, S. Prakash, Measurement of displacement using phase shifted wedge plate lateral shearing interferometry, *Opt. Laser Technol.* 77 (2016) 64–71.
- [35] C. Joenathan, A. Bernal, R.S. Sirohi, Lateral shear interferometer using multiplexed holographic lenses and spatial Fourier transform: varying spectrum position and phase fluctuations, *Opt. Eng.* 52 (2013) 084103-7.
- [36] J. Sánchez-Paredes, G. Silva-Ortigoza, J. Castro-Ramos, Intensity-based method for selection of valid interferometric data in temporal phase shifting interferometry, *Opt. Eng.* 54 (2015) 024106-8.
- [37] S. Chatterjee, Y.P. Kumar, Measurement of the surface profile of a curved optical surface with rotation phase-shifting lateral shear cyclic path optical configuration, *Appl. Opt.* 50 (2011) 2823-2830.
- [38] G. Dai, Modal wave-front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions, *J. Opt. Soc. Am. A.* 13 (1996) 1218-1225.
- [39] G. Harbers, P.J. Kunst, G.W. Leibbrandt, Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials., *Appl. Opt.* 35 (1996) 6162–6172.

- [40] F. Dai, F. Tang, X. Wang, P. Feng, O. Sasaki, Use of numerical orthogonal transformation for the Zernike analysis of lateral shearing interferograms, *Opt. Express.* 20 (2012) 1530-1544.
- [41] F. Dai, F. Tang, X. Wang, O. Sasaki, P. Feng, Modal wavefront reconstruction based on Zernike polynomials for lateral shearing interferometry: comparisons of existing algorithms., *Appl. Opt.* 51 (2012) 5028–5037.
- [42] M.P. Rimmer, J.C. Wyant, Evaluation of large aberrations using a lateral-shear interferometer having variable shear., *Appl. Opt.* 14 (1975) 142–150.
- [43] R. Cubalchini, Modal wave-front estimation from phase derivative measurements, *J. Opt. Soc. Am.* 69 (1979) 972–977.
- [44] J. Herrmann, Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation, *J. Opt. Soc. Am.* 71 (1981) 989-992.
- [45] V.P. Aksenov, Y.N. Isaev, Analytical representation of the phase and its mode components reconstructed according to the wavefront slopes, *Opt. Lett.* 17 (1992) 1180–1182.
- [46] H. van Brug, Zernike polynomials as a basis for wave-front fitting in lateral shearing interferometry., *Appl. Opt.* 36 (1997) 2788–2790.
- [47] S. Okuda, T. Nomura, K. Kamiya, H. Miyashiro, K. Yoshikawa, H. Tashiro, High-precision analysis of a lateral shearing interferogram by use of the integration method and polynomials., *Appl. Opt.* 39 (2000) 5179–5186.
- [48] K.R. Freischlad, C.L. Koliopoulos, Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am. A.* 3 (1986) 1852-1861.
- [49] J.B. Saunders, Measurement of wave fronts without a reference standard: Part 1. The wave-front-shearing interferometer, *J. Res. Natl. Bur. Stand. Sect. B65* (1961) 239-244.
- [50] M.P. Rimmer, Method for evaluating lateral shearing interferograms., *Appl. Opt.* 13 (1974) 623-629.
- [51] D.L. Fried, Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements, *J. Opt. Soc. Am.* 67 (1977) 370-375.
- [52] B.R. Hunt, Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences, *J. Opt. Soc. Am.* 69 (1979) 393-399.
- [53] E.P. Wallner, Optimal wave-front correction using slope measurements, *J. Opt. Soc. Am.* 73 (1983) 1771-1776.

- [54] A. Menikoff, Wave-front reconstruction with a square aperture, *J. Opt. Soc. Am. A* 6 (1989) 1027-1030.
- [55] X. Tian, M. Itoh, T. Yatagai, Simple algorithm for large-grid phase reconstruction of lateral-shearing interferometry., *Appl. Opt.* 34 (1995) 7213-7220.
- [56] W. Zou, Z. Zhang, Generalized wave-front reconstruction algorithm applied in a Shack-Hartmann Test., *Appl. Opt.* 39 (2000) 250-268.
- [57] T. Nomura, S. Okuda, K. Kamiya, H. Tashiro, K. Yoshikawa, Improved Saunders method for the analysis of lateral shearing interferograms., *Appl. Opt.* 41 (2002) 1954-1961
- [58] W. Zou, J.P. Rolland, Iterative zonal wave-front estimation algorithm for optical testing with general-shaped pupils, *J. Opt. Soc. Am. A.* 22 (2005) 938-951.
- [59] W. Zou, J.P. Rolland, Quantifications of error propagation in slope-based wavefront estimations, *J. Opt. Soc. Am. A.* 23 (2006) 2629-2638.
- [60] S. Ettl, J. Kaminski, M.C. Knauer, G. Häusler, Shape reconstruction from gradient data., *Appl. Opt.* 47 (2008) 2091-2097.
- [61] Z. Yin, Exact wavefront recovery with tilt from lateral shear interferograms, *Appl. Opt.* 48 (2009) 2760-2766.
- [62] X. Liu, Y. Gao, M. Chang, A partial differential equation algorithm for wavefront reconstruction in lateral shearing interferometry, *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* 11 (2009) 045702.
- [63] F. Dai, F. Tang, X. Wang, O. Sasaki, Generalized zonal wavefront reconstruction for high spatial resolution in lateral shearing interferometry, *J. Opt. Soc. Am. A.* 29 (2012) 2038-2047.
- [64] F. Dai, F. Tang, X. Wang, O. Sasaki, M. Zhang, High spatial resolution zonal wavefront reconstruction with improved initial value determination scheme for lateral shearing interferometry, *Appl. Opt.* 52 (2013) 3946-3956.
- [65] C. Falldorf, G. Ehret, M. Schulz, R.B. Bergmann, Wave front characterization of Gaussian beams using shear interferometry and a weighted reconstructor, in *DGaO Proceedings A* 11 (2014).
- [66] M. Servin, D. Malacara, J.L. Marroquin, Wave-front recovery from two orthogonal sheared interferograms., *Appl. Opt.* 35 (1996) 4343-4348.
- [67] S. Loheide, Innovative evaluation method for shearing interferograms, *Opt. Commun.* 141 (1997) 254-258.

- [68] D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, Second Ed., CRC Press, Florida, 2005.
- [69] S. Ríos, E. Acosta, Orthogonal modal reconstruction of a wave front from phase difference measurements, *J. Mod. Opt.* 46 (1999) 931-939.
- [70] I. Mochi, K.A. Goldberg, Modal wavefront reconstruction from its gradient, *Appl. Opt.* 54 (2015) 3780-3785.
- [71] F.Roddir, C.Roddir, Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms, *Appl. Opt.* 30 (1991) 1325-1327.
- [72] C. Elster, Recovering wavefronts from difference measurements in lateral shearing interferometry, *J. Comput. Appl. Math.* 110 (1999) 177-180.
- [73] C. Elster, I. Weingartner, Solution to the shearing problem., *Appl. Opt.* 38 (1999) 5024-5031.
- [74] C. Elster, Exact two-dimensional wave-front reconstruction from lateral shearing interferograms with large shears., *Appl. Opt.* 39 (2000) 5353-5359.
- [75] A. Dubra, C. Paterson, C. Dainty, Wave-front reconstruction from shear phase maps by use of the discrete Fourier transform., *Appl. Opt.* 43 (2004) 1108-1113.
- [76] P. Liang, J. Ding, Z. Jin, C.S. Guo, H.T. Wang, Two-dimensional wave-front reconstruction from lateral shearing interferograms., *Opt. Express.* 14 (2006) 625-634.
- [77] G. Dai, Wavefront Reconstruction from Slope Data Within Pupils of Arbitrary Shapes Using Iterative Fourier Transform, *Open Opt. J.* 1 (2007) 1-3.
- [78] C. Falldorf, Y. Heimbach, C. Von Kopylow, W. Juptner, Efficient reconstruction of spatially limited phase distributions from their sheared representation, *Appl. Opt.* 46 (2007) 5038-5043.
- [79] X. Chen, Y. Li, G. Ding, L. Lei, Wavefront reconstruction with tilt from two shearing interferograms, *Proc. 2011 Cross Strait Quad-Regional Radio Sci. Wirel. Technol. Conf. CSQRWC 2011.* 1 (2011) 202–205.
- [80] Y. Guo, H. Chen, J. Xu, J. Ding, Two-dimensional wavefront reconstruction from lateral multi-shear interferograms, *Opt. Express.* 20 (2012) 15723-15733.
- [81] Y. Guo, J. Xia, J. Ding, Recovery of wavefront from multi-shear interferograms with different tilts, *Opt. Express.* 22 (2014) 11407-11416.
- [82] Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, D. Malacara-Hernández, Least-squares fitting of Hartmann or Shack–Hartmann data with a circular array of sampling points, *Appl. Opt.* 54 (2015) E113-E122.

- [83] R. Gutmark, and D. L. Guyton, Origins of the keratometer and its evolving role in ophthalmology, *Surv. Ophthalmol.* 55 (2010) 481-497.
- [84] H. B. Fam, and K. L. Lim, Validity of the keratometric index: Large population-based study, *J. Cataract Refract. Surg.* 33 (2007) 686-691.
- [85] J. C. He, J. Gwiazda, F. Thorn, R. Held, and W. Huang, Change in corneal shape and corneal wave-front aberrations with accommodation, *J Vis.* 3 (2003) 456-463.
- [86] N. Visser, T. T. J. M. Berendschot, F. Verbakel, J. De Brabander, and R. M. M. A. Nuijts, Comparability and repeatability of corneal astigmatism measurements using different measurement technologies, *J. Cataract Refract. Surg.* 38 (2012) 1764-1770.
- [87] B. Mancilla-Escobar, Z. Malacara-Hernández y D. Malacara-Hernández, Keratometer with two circular LED arrays: Design, characterization and testing, *Opt. Commun.* 445 (2019) 171-181.
- [88] H. Igarashi, J. Akiba, H. Hirokawa, and A. Yoshida, Measurement of the radius of corneal curvature with the Maloney Surgical Keratometer, *Am. J. Ophthalmol.* 112 (1991) 211-212.
- [89] L. Ventura, J. J. De Groote, C. Riul, and S. J. F. Sousa, Automated keratometer for slit lamps, *IFMBE Proc.* 18 (2008) 425-428.
- [90] C. M. Iyomasa, L. Ventura and J. J. De Groote, Software for keratometry measurements using portable devices, *Proc. SPIE.* 7550 (2010) 75502B-1-75502B-5.
- [91] D. G. Tennen, R. H. Keates, and C. Montoya, Comparison of three keratometry instruments, *J. Cataract Refract. Surg.* 21 (1995) 407-408.
- [92] Y. Tsuneyoshi, K. Negishi, and K. Tsubota, Importance of Accommodation and Eye Dominance for Measuring Objective Refractions, *Am. J. Ophthalmol.* 177 (2017) 69-76.
- [93] M. Garza-León, P. de la Parra-Colín, and T. Barrientos-Gutierrez, Comparative study of the measurement of central corneal power using the manual keratometer, the IOLMaster® and Sirius® tomography, *Rev. Mex. Oftalmol.* 90 (2016) 111-117.
- [94] D. L. Rogers, G. R. Whitehead, J. A. Stephens, R. R. Fellows, D. L. Bremer, M. L. McGregor, et al., Corneal power measurements in fixating versus anesthetized nonfixating children using a handheld keratometer, *J. AAPOS.* 14 (2010) 11-14.
- [95] R. J. Symes, and P. G. Ursell, Automated keratometry in routine cataract surgery: Comparison of Scheimpflug and conventional values, *J. Cataract Refract. Surg.* 37 (2011) 295-301.

- [96] X. Mao, G. Savini, Z. Zhuo, Y. Feng, J. Zhang, Q. Wang, et al., Repeatability, reproducibility, and agreement of corneal power measurements obtained with a new corneal topographer, *J. Cataract Refract. Surg.* 39 (2013) 1561-1569.
- [97] M. Shirayama, L. Wang, M. P. Weikert, and D. D. Koch, Comparison of Corneal Powers Obtained from 4 Different Devices, *Am. J. Ophthalmol.* 148 (2009) 528-535.
- [98] M. J. Giráldez, E. Yebra-Pimentel, M. A. Parafita, S. Escandón, A. Cerviño, and M. V. Pérez, Comparison of keratometric values of healthy eyes measured by Javal Keratometer, Nidek Autokeratometer, and Corneal analysis system (EyeSys), *Int. Contact Lens Clin.* 27 (2000) 33-40.
- [99] C. P. Noonan, J. Mackenzie, and A. Chandna, Repeatability of the hand-held nidek auto-keratometer in children, *J. AAPOS* 2 (1998) 186-187.
- [100] C. C. Chou, Y. C. Huang, Y. Y. Tsai, J. M. Lin, W. L. Chen, and H. J. Lin, Changes in corneal curvature after wearing the orthokeratology lens, *Taiwan J. Ophthalmol.* 3 (2013) 156-159.
- [101] J. H. Park, S. Y. Kang, H. M. Kim, and J. S. Song, Differences in corneal astigmatism between partial coherence interferometry biometry and automated keratometry and relation to topographic pattern, *J. Cataract Refract. Surg.* 37 (2011) 1694-1698.
- [102] B. Mohd-Ali, M. Abdu, C. Y. Yaw, and N. Mohidin, Clinical characteristics of keratoconus patients in Malaysia: A review from a cornea specialist centre, *J. Optom.* 5 (2012) 38-42.
- [103] H. Hashemi, A. Yekta, and M. Khabazkhoob, Effect of keratoconus grades on repeatability of keratometry readings: Comparison of 5 devices, *J. Cataract Refract. Surg.* 41 (2015) 1065-1072.
- [104] Y. He, Y. Wang, Z. Wang, Y. Wang, Y. Liu, L. Zhang, et al., Design of imaging keratometer with annular object and charge-coupled device detector, *Appl. Opt.* 52 (2013) 8532-8539.
- [105] R. Potvin, D. Fonn, D. Optom, and L. Sorbara, Clinical Article In Vbvo Comparison of Corneal Topography Keratometry Systems, *ICLC* 23 (1996) 20-25.
- [106] H. J. Shamma, and K. J. Hoffer, Repeatability and reproducibility of biometry and keratometry measurements using a noncontact optical low-coherence reflectometer and keratometer, *Am. J. Ophthalmol.* 153 (2012) 55-61.
- [107] E. M. Harvey, J. M. Miller, J. Schwiegerling, C. E. Clifford-Donaldson, T. K. Green, D. H. Messer, et al., Accuracy and validity of IK4 handheld video keratometer measurements in children, *J. AAPOS.* 15 (2011) 407-409.

- [108] W. Haigis, Challenges and approaches in modern biometry and IOL calculation, Saudi J. Ophthalmol. 26 (2012) 7-12.
- [109] W. A. Douthwaite, and E. A. H. Mallen, Verification of conicoidal concave surfaces by keratometry. J. Optom. 3 (2010) 115-121.
- [110] D. R. Sanders, J. P. Gills, and R. G. Martin, When keratometric measurements do not accurately reflect corneal topography, J. Cataract Refract. Surg. 19 (1993) 131-135.
- [111] R. J. Symes, M. J. Say, and P. G. Ursell, Scheimpflug keratometry versus conventional automated keratometry in routine cataract surgery, J. Cataract Refract. Surg. 36 (2010) 1107-1114.
- [112] L. Carvalho, S. A. Tonissi, and J. C. Castro, Preliminary tests and construction of a computerized quantitative surgical keratometer, J. Cataract Refract. Surg. 25 (1999) 821-826.
- [113] M. H. Edwards, and P. Chot P, A new, hand-held keratometer: Comparison of the Nidek KM-500 Auto keratometer with the B & L keratometer and the Topcon RK-3000A keratometer, JBCLA 19 (1996) 45-48.
- [114] E. Shneor, M. Millodot, M. Zyroff, and A. Gordon-Shaag, Validation of keratometric measurements obtained with a new integrated aberrometry-topography system, J. Optom 5 (2012) 80-86.
- [115] S. Nakada, M. Tanaka, and A. Nakajima, Comparison of automated and conventional keratometers, Am. J. Ophthalmol. 97 (1984) 776-778.
- [116] M. Elliott, T. Simpson, D. Richter, and D. Fonn, Repeatability and comparability of automated keratometry: The Nikon NRK-8000, the Nidek KM-800 and the Bausch and Lomb keratometer, Ophthalmic Physiol. Opt. 18 (1998) 285-293.
- [117] C. P. Noonan, P. Rao, S. B. Kaye, J. R. Green, and A. Chandna, Validation of a handheld automated keratometer in adults, J. Cataract Refract. Surg. 24 (1998) 411-414.
- [118] A. Mikš, and P. Novák, Determination of point of incidence for the case of reflection or refraction at spherical surface knowing two points lying on the ray, Appl. Opt. 56 (2017) 7174-7181.
- [119] R. Navarro, and J. J. Rozema, Optical Changes of the Human Cornea as a function of age, Optom. Vis. Sci. 90 (2013) 587-598.
- [120] R. Navarro, L. González, and J. L. Hernández, Optics of the average normal cornea from general and canonical representations of its surface topography, J. Opt. Soc. Am. A 23 (2006) 219-232.

- [121] A. K. C. Lam, R. Chan, and R. Chiu, Effect of instrument rotation on handheld keratometry, *J. Cataract Refract. Surg.* 30 (2004) 2590-2594.