

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO



**CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ÓPTICA, A. C.**

**ESTUDIO COMPARATIVO ESPI-FEM EN  
DETECCIÓN DE FRACTURAS.**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (ÓPTICA)**

**Presenta**

**LIC. ESTEBAN ANDRÉS ZÁRATE**

**Asesor**

**DR. RAMÓN RODRÍGUEZ VERA**

**León, Gto.**

**Agosto del 2000**

## RESUMEN

El método de Interferometría Electrónica de Patrones de Moteado ESPI, está basado en la substracción electrónica de intensidades, antes y después de la deformación del objeto sujeto a estudio, es decir, produce la correlación por substracción en tiempo real o sea un patrón de franjas de interferencia y se cataloga dentro de la metrología óptica como una técnica de evaluación no destructiva. En el sistema ESPI implementado en este trabajo de Tesis, se construyó de forma tal que fuera sensible a desplazamientos fuera de plano, producidos por carga térmica. Por otro lado, el Método numérico de Elemento Finito (FEM), permite desarrollar de manera simulada prototipos de objetos reales y realizar sobre ellos también análisis de esfuerzos térmicos, siendo importante por su rapidez y la presentación gráfica de resultados. El objetivo principal en este trabajo de Tesis, es el de realizar un estudio comparativo, desde el punto de vista cualitativo, ESPI-FEM usados en la detección de fracturas y grietas en placas de aluminio 6061. Los resultados obtenidos por ambos métodos muestran el reconocimiento de desplazamientos o deformaciones fuera de plano, sufridas en las placas debido a la carga térmica; éstos son presentados a lo largo del presente trabajo y llevan a la conclusión que el método optoelectrónico ESPI se correlaciona con el método de simulación por computadora FEM, es decir, detectan la existencia de fracturas o grietas en el objeto bajo prueba; proporcionando patrones de interferencia y mapas de líneas de fase, así, como un mapeo de desplazamientos fuera de plano completamente similares bajo condiciones físicas iguales.

## **DEDICATORIA**

**Con cariño me es grato dedicar este trabajo de Tesis, a mi esposa Luz María, por su apoyo incondicional, sus palabras de aliento y de motivación, que siempre escuché de ella, para la llevar a buen término dicho trabajo y como consecuencia la Maestría.**

**También lo dedico a mis hijos Argel Esteban y Miroslava, por ser parte esencial de mi existencia.**

**Me es importante dedicarlo a mi madre Isabel, así como a mis demás familiares, quienes me han apoyado de una u otra forma a través de mi existencia.**

**Me es grato dedicarlo al M. en C. Julio César Sánchez Roldán, por ser mi compadre y un gran amigo, además del apoyo que de él he recibido.**

## RECONOCIMIENTOS

Va mi más sincero reconocimiento al CONACYT, por el apoyo que me brindó durante los dos últimos semestres de la Maestría en Ciencias, etapa en la obtuve los créditos.

Deseo reconocer a la SEP y al programa PROMEP dependiente de ésta, por el apoyo que me fue brindado para obtener los créditos, realización de Tesis y la obtención del grado de Maestro en Ciencias (Óptica).

Le brindo un reconocimiento muy especial a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, por todo el apoyo que me ha proporcionado a través del departamento de Investigación y Postgrado, para la obtención del Grado de Maestro.

## AGRADECIMIENTOS

Con todo respeto, deseo agradecer a mi director de Tesis Dr. Ramón Rodríguez Vera, el haberme proporcionado el tema, depositar en mi su confianza y proporcionarme todo el apoyo incondicional para el desarrollo y conclusión de ésta.

Al M. en C. Héctor José Puga Soberanes, le agradezco todo el apoyo que me brindó, además, de ser un pilar importante en el desarrollo de este trabajo de Tesis.

Al Dr. Noé Alcalá Ochoa le doy las gracias y le agradezco, sus sugerencias, comentarios, observaciones. Así como el apoyo recibido para la realización de este trabajo.

# CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	<b>i</b>
<b>DEDICATORIA</b>	<b>ii</b>
<b>RECONOCIMIENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>iv</b>
<b>CONTENIDO</b>	<b>v</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>
INTRODUCCIÓN GENERAL	1
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>3</b>
<b>MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS</b>	<b>3</b>
2.1 Elasticidad de los materiales	3
2.2 Esfuerzo uniaxial	4
2.3 Deformación	5
2.4 Ley de Hooke	5
2.5 Observación	5
2.6 Relación de Poisson	6
2.7 Deformación angular o cortante	8
2.8 Mecánica de fracturas	9
2.9 Teoría sobre la ruptura o falla	9
2.10 Conclusiones	11
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>12</b>
<b>EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO (FEM)</b>	<b>12</b>
3.1 El método de elemento finito FEM	13
3.2 La energía potencial y equilibrio	13
3.3 Método de Rayleigh-Ritz	14
3.4 El método de Galerkin	15

3.5	Análisis de esfuerzos tridimensionales	16
3.6	Formulación del elemento finito	18
3.7	Rigidez del elemento	21
3.8	Conclusión	22
<b>CAPÍTULO 4</b>		<b>23</b>
<b>ESFUERZO TÉRMICO</b>		<b>23</b>
4.1	Transferencia de calor en estado estable	23
4.2	Capacidad Térmica	24
4.3	Conductividad térmica	24
4.4	Transferencia de calor por convección	25
4.5	Dilatación térmica	25
4.6	Conducción unidimensional del calor	26
4.7	Enfoque funcional de Galerkin para la conducción del calor	27
4.8	Esfuerzos de origen térmico	29
<b>CAPÍTULO 5</b>		<b>33</b>
<b>EL MOTEADO</b>		<b>33</b>
5.1	Introducción	33
5.2	Interferometría de moteado	33
5.3	Condiciones generales para interferometría de moteado	34
5.4	Correlación por substracción	36
5.5	Correlación por suma	37
5.6	El método de substracción electrónica ESPI	39
5.7	Cambios de fase y la dirección de sensibilidad	39
5.8	Interferómetro sensible fuera de plano	41
5.9	Interferómetro sensible en plano	42
<b>CAPÍTULO 6</b>		<b>45</b>
<b>MÉTODO EXPERIMENTAL ESPI</b>		<b>45</b>

6.1	Algunas características del material aluminio 6061	46
6.2	Implementación experimental	49
6.3	Correlación por substracción	50
6.4	Resultados obtenidos	51
6.5	Conclusiones	59
<b>CAPÍTULO 7</b>		<b>60</b>
<b>SIMULACIÓN EN COMPUTADORA CON SOFTWARE ALGOR</b>		<b>60</b>
7.1	Simulación del modelo y obtención del esfuerzo térmico	60
7.2	Etapas de preproceso	61
7.3	Etapas de proceso	63
7.4	Análisis y obtención de resultados térmicos	69
7.5	Construcción del modelo para esfuerzo lineal	72
7.6	Etapas de posproceso	73
7.7	Correr el archivo generado con ADVANCE	73
7.8	Resultados obtenidos	73
7.9	conclusión	78
<b>CAPÍTULO 8</b>		<b>79</b>
<b>ESTUDIO COMPARATIVO ESPI-FEM</b>		<b>79</b>
8.1	Comparación ESPI-FEM	79
8.2	Conclusión	83
<b>CAPÍTULO 9</b>		<b>84</b>
<b>CONCLUSIÓN GENERAL</b>		<b>84</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>85</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b>	<b>Curva esfuerzo-deformación para aleación de aluminio</b>	<b>4</b>
<b>Figura 2.2</b>	<b>Deformación por esfuerzo de tensión</b>	<b>7</b>
<b>Figura 2.3</b>	<b>Deformación por fuerzas tangenciales</b>	<b>8</b>
<b>Figura 3.1</b>	<b>Cuerpo tridimensional</b>	<b>16</b>
<b>Figura 3.2</b>	<b>Superficie elemental deformada</b>	<b>17</b>
<b>Figura 3.3</b>	<b>Elemento tetraédrico</b>	<b>18</b>
<b>Figura 3.4</b>	<b>Elemento muestra para funciones de forma</b>	<b>19</b>
<b>Figura 4.1</b>	<b>Conducción unidimensional del calor</b>	<b>26</b>
<b>Figura 4.2</b>	<b>Ley de esfuerzo-deformación unitaria inicial</b>	<b>29</b>
<b>Figura 5.1</b>	<b>Diagrama interferométrico</b>	<b>34</b>
<b>Figura 5.2</b>	<b>Patrón de moteado inicial</b>	<b>35</b>
<b>Figura 5.3</b>	<b>Patrón de moteado con deformación</b>	<b>36</b>
<b>Figura 5.4</b>	<b>Franjas de interferencia o de correlación</b>	<b>37</b>
<b>Figura 5.5</b>	<b>Diagrama para determinar la variación de camino óptico</b>	<b>40</b>
<b>Figura 5.6</b>	<b>Esquema de interferómetro sensible fuera de plano</b>	<b>41</b>
<b>Figura 5.7</b>	<b>Esquema de interferómetro sensible en plano</b>	<b>44</b>
<b>Figura 6.1</b>	<b>Dimensiones placa con grieta rectangular</b>	<b>45</b>
<b>Figura 6.2</b>	<b>Dimensiones placa con grieta semicircular</b>	<b>46</b>
<b>Figura 6.3</b>	<b>Dimensiones de placa con fractura</b>	<b>47</b>
<b>Figura 6.4</b>	<b>Esquema ESPI para el grabado de franjas de correlación en Tiempo real</b>	<b>48</b>
<b>Figura 6.5</b>	<b>Franjas de correlación grieta rectangular vertical</b>	<b>50</b>
<b>Figura 6.6</b>	<b>Franjas de correlación grieta rectangular horizontal</b>	<b>50</b>
<b>Figura 6.7</b>	<b>Franjas de correlación grieta vertical</b>	<b>50</b>
<b>Figura 6.8</b>	<b>Franjas de correlación grieta semicircular</b>	<b>51</b>
<b>Figura 6.9</b>	<b>Franjas de correlación grieta semicircular</b>	<b>51</b>
<b>Figura 6.10</b>	<b>Patrón de franjas con fractura en placa de 3.9mm de espesor</b>	<b>53</b>
<b>Figura 6.11</b>	<b>Patrón de franjas placa 1.9mm de espesor con fractura y fuente abajo</b>	<b>54</b>
<b>Figura 6.12</b>	<b>Patrón de franjas en placa de 1.9mm de espesor fuente arriba de la fractura</b>	<b>54</b>
<b>Figura 7.1</b>	<b>Mallado bidimensional placa de aluminio con grieta</b>	<b>59</b>
<b>Figura 7.2</b>	<b>Mallado bidimensional grieta semicircular</b>	<b>60</b>
<b>Figura 7.3</b>	<b>Mallado bidimensional placa con fractura</b>	<b>60</b>
<b>Figura 7.4</b>	<b>Mallado de placa tridimensional con grieta rectangular</b>	<b>62</b>
<b>Figura 7.5</b>	<b>Placa tridimensional sólida con grieta rectangular</b>	<b>63</b>
<b>Figura 7.6</b>	<b>Mallado tridimensional de placa, con grieta semicircular</b>	<b>63</b>

<b>Figura 7.7</b>	<b>Modelo sólido tridimensional con grieta semicircular</b>	<b>64</b>
<b>Figura 7.8</b>	<b>Mallado tridimensional con fractura</b>	<b>64</b>
<b>Figura 7.9</b>	<b>Modelo sólido de placa con de 1.9mm de espesor con fractura</b>	<b>65</b>
<b>Figura 7.10</b>	<b>Modelo de placa sólida 3.9mm de espesor con fractura</b>	<b>65</b>
<b>Figura 7.11</b>	<b>Distribución de temperaturas parte posterior</b>	<b>67</b>
<b>Figura 7.12</b>	<b>Distribución de temperaturas placa con grieta Semicircular</b>	<b>67</b>
<b>Figura 7.13</b>	<b>Distribución de flujo de temperaturas placa con fractura 1.9mm</b>	<b>68</b>
<b>Figura 7.14</b>	<b>Distribución de temperaturas en placa de 3.9mm de espesor con fractura</b>	<b>68</b>
<b>Figura 7.15</b>	<b>Magnitud desplazamiento tridimensional</b>	<b>71</b>
<b>Figura 7.16</b>	<b>Magnitud desplazamiento tridimensional</b>	<b>71</b>
<b>Figura 7.17</b>	<b>Magnitud desplazamiento tridimensional placa de espesor 3.9mm</b>	<b>72</b>
<b>Figura 7.18</b>	<b>Magnitud del desplazamiento tridimensional placa de espesor 1.9mm</b>	<b>72</b>
<b>Figura 7.19</b>	<b>Magnitud del desplazamiento fuera de plano, dirección Z fuente en la grieta</b>	<b>73</b>
<b>Figura 7.20</b>	<b>Magnitud del desplazamiento fuera de plano grieta Rectangular fuente no en la grieta</b>	<b>73</b>
<b>Figura 7.21</b>	<b>Magnitud del desplazamiento fuera de plano grieta semicircular</b>	<b>74</b>
<b>Figura 7.22</b>	<b>Magnitud del desplazamiento fuera de plano placa 3.9mm de espesor</b>	<b>74</b>
<b>Figura 7.23</b>	<b>Magnitud del desplazamiento fuera de plano placa de 1.9mm de espesor</b>	<b>75</b>
<b>Figura 8.1</b>	<b>Franjas de correlación por substracción obtenidas con ESPI</b>	<b>77</b>
<b>Figura 8.2</b>	<b>Distribución de desplazamiento fuera de plano obtenidos con FEM</b>	<b>77</b>
<b>Figura 8.3</b>	<b>Franjas de correlación en grieta semicircular</b>	<b>78</b>
<b>Figura 8.4</b>	<b>Desplazamiento fuera de plano grieta semicircular obtenida Con FEM</b>	<b>78</b>
<b>Figura 8.5</b>	<b>Franjas de correlación obtenidas con ESPI en placa con Fractura</b>	<b>79</b>
<b>Figura 8.6</b>	<b>Desplazamiento fuera de plano, placa 1.9mm de espesor</b>	<b>79</b>

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 3.1 Conectividad</b>	<b>18</b>
<b>Tabla 6.1 Propiedades del Aluminio 6061</b>	<b>45</b>
<b>Tabla 7.1 Posiciones de la fuente en cada una de las placas</b>	<b>59</b>
<b>Tabla 7.2 Especificación de temperatura</b>	<b>62</b>
<b>Tabla 7,3 Valores de propiedades elásticas y térmicas</b>	<b>69</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN GENERAL

En la tecnología de la metrología óptica se pueden utilizar varios métodos, de los cuales los más representativos son: Interferometría Holográfica, Interferometría de Moiré e Interferometría Electrónica de Patrones de Moteado, ESPI (siglas en Inglés derivadas de Electronic Spekle Patern Interferometry), mismas que serán usadas en lo sucesivo. En este trabajo de tesis, se usará el método ESPI para el análisis de fracturas y grietas predeterminadas en placas de aluminio 6061 y sometidas a esfuerzo por carga térmica “puntual”. El esfuerzo térmico, produce una deformación y por supuesto microdesplazamientos en el campo completo de observación de la placa, en base a la variación de la temperatura  $\Delta T$  sobre la superficie. El presente trabajo es una continuación a la tesis de maestría del M. en C. Héctor José Puga Soberanes [18 ], en la que mostró y dio inicio en el CIO, la actividad de corroborar resultados experimentales con ESPI y FEM. El realiza un estudio sobre Búsqueda y seguimiento de modelaje, para determinar forma y deformación de una superficie. Establece que el método de los elementos finitos (FEM), es el más adecuado para modelar diferentes objetos bajo condiciones variadas. Realiza un análisis numérico y experimental de dos tipos de problemas mecánicos distintos usando ESPI-FEM. Cualitativamente obtiene resultados muy aproximados, existiendo factores que impiden la comparación numérica. Los resultados obtenidos en este trabajo, demuestran la utilidad que puede tener el contar con un método alternativo de comparación al utilizar métodos ópticos. Mediante el método numérico se obtienen mapas de contorno de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en plano. Con esto, se muestra la posibilidad de modelar superficies complejas en geometría con un paquete de elemento finito a través de interfases, así, como la implementación de un método híbrido ESPI-FEM que suma las ventajas de ambos. Por otro lado, un análisis de Esfuerzo Térmico, también se puede desarrollar, por medio de Simulación por Computadora. Esto se puede realizar usando un Software, que funciona a base del Método de Elemento Finito FEM (que deriva sus siglas del inglés Finite Element Method), que también se usará durante el desarrollo de este trabajo [ 15 ].

El objetivo general de este trabajo de Tesis, será el de realizar un estudio comparativo entre los Métodos ESPI-FEM para la detección de fracturas y grietas en placas de aluminio 6061, sometidas a la aplicación de carga térmica. Con dicho estudio, se realiza un análisis de manera cualitativa, más que cuantitativa, especificando en qué aspectos ambos Métodos coinciden o se correlacionan. Se ha localizado información de la aplicación de los métodos ESPI y FEM de forma separada. Pero la información respecto del uso del método ESPI-FEM, es escasa. Aún así, se han localizado algunos trabajos, como por ejemplo el de Lanza di Scalea [27], que hace uso de éste, en la determinación de la medida del campo de deformación en una placa epoxy en ella produce un esfuerzo de tensión a través del uso de un clavo de acero. Granados [9 ] en su trabajo de Tesis, realiza un Estudio de deformación y falla en elementos mecánicos bajo cargas térmicas, mediante un método numérico. En este trabajo se hace uso de manera definitiva del método ESPI-FEM y representa un intento en correlacionar ambos métodos. Como se observa en lo antes citado, los trabajos en los que se usa el método ESPI-FEM apenas inician y por lo tanto el estado del arte respecto del tema es muy actual. Con lo presentado aquí, se observa que poco se está haciendo respecto de un estudio comparativo entre ambos métodos, lo cual motiva aún más realización de este trabajo de Tesis. Además, se

presentan los aspectos más representativos del estudio comparativo así como objetivos específicos que se pretenden alcanzar. Entre algunos de éstos se puede enunciar por ejemplo: Implementación de un Interferómetro para analizar deformaciones fuera de plano de placas sometidas a variación de temperatura o a esfuerzo térmico. Generación de objetos geométricos con grieta y fractura, mediante el uso del Algor<sup>TM</sup>. Para una mejor comprensión de lo hecho en este trabajo de Tesis, ésta, se ha dividido en nueve capítulos, en los cuales se toca los temas que se describen a continuación. En el Capítulo 2, se proporcionan aspectos importantes de las propiedades elásticas de materiales sólidos, se estudian los conceptos básicos de la mecánica de fracturas y algunas de las teorías existentes.

El Capítulo 3, es dedicado a presentar de manera breve aspectos del Método FEM, con el cual se entiende como se construye un objeto mediante el Algor<sup>TM</sup>, ideas que resultan de importancia en el trabajo subsecuente. En el Capítulo 4, se usan las ideas de estos dos últimos Capítulos y se construye un análisis teórico del Esfuerzo Térmico en una dimensión. El Capítulo 5 se caracteriza por dar una introducción a los conceptos del Moteado (Speckle), de Interferometría de Moteado con sensibilidades, fuera de y en plano. Aquí se sientan las bases del presente trabajo que se realizará en lo que corresponda a la parte experimental. También se reúnen los aspectos teóricos de cómo se visualiza y lo que se espera obtener del Método ESPI. La parte correspondiente al desarrollo experimental, se presenta en el Capítulo 6. En este capítulo se describe los pormenores de la implementación de un interferómetro sensible fuera de plano, el uso de una fuente Térmica, así, como el registro y procesamiento digital de imágenes.

Finalmente en el Capítulo 7, se muestran los resultados obtenidos, del desarrollo realizado por simulación. En este mismo se realiza un análisis térmico y un análisis de Esfuerzo Térmico, de una placa de aluminio 6061 con grieta y con fractura, Así mismo, el capítulo 8 es dedicado a el análisis comparativo ESPI-FEM de Mecánica de Fracturas. Mientras que en el capítulo 9, se presentan las conclusiones generales.

## CAPÍTULO 2

### MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

#### INTRODUCCIÓN

El campo de la mecánica abarca fundamentalmente las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sólido de cierto tipo de material idealmente deformable. Mientras que la resistencia de materiales como parte de ésta, estudia y establece la relación entre fuerza o carga exterior aplicada a la superficie del objeto y el esfuerzo, así, como sus efectos en el interior del material, lo que lleva a la necesidad de estudiar los cambios de forma o deformación, que acompañan a un determinado estado de fuerzas. Pero la resistencia de un material, no debe ser el único criterio para el estudio de éste; frecuentemente la rigidez, la dureza, tenacidad y ductilidad suelen tener la misma o mayor importancia. El capítulo se ha dividido en secciones que permitan la comprensión del comportamiento de los materiales, bajo la acción de esfuerzos de diferentes tipos. En la sección 2.1 se tratan conceptos de elasticidad, plasticidad y deformación permanente; la sección 2.2 se dedica a la formulación de ecuaciones, que permitan cuantificar el esfuerzo. Las ecuaciones que auxilian en la determinación cuantitativa de la deformación que sufran los materiales bajo la acción del esfuerzo, es presentada en la sección 2.3. La ley de Hooke, es de suma importancia para la comprensión del comportamiento elástico de los materiales y es uno de los objetivos que se presentan en la sección 2.4. La sección 2.5 se dedica a proporcionar algunas reflexiones sobre los conceptos presentados. La relación de Poisson es otro aspecto fundamental para la formulación de la teoría de la elasticidad y deformación, la sección 2.6 es dedicada a la formulación de ésta. En la sección 2.7 se formulan y aportan los conceptos de deformación angular, mientras que en la sección 2.8 se presentan los aspectos de la mecánica de fracturas, continuando con las teorías de la falla en los materiales es competencia de la sección 2.9. Por último en la sección 2.10 se presentan algunas conclusiones al capítulo.

#### 2.1 ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES

El concepto de elasticidad, trata del comportamiento de los materiales, que tienen la propiedad de recuperar su tamaño y forma, cuando se suspenden las fuerzas o cargas que les producen deformaciones. Por ejemplo, un pedazo de cierto tipo de material, que se somete a esfuerzos por tensión o compresión, este se deforma, si la fuerza aplicada es lo suficientemente pequeña, el desplazamiento relativo de las diferentes partes en él, es proporcional y se dice que el comportamiento del material es elástico. Askeland [1], establece que: Si una pieza de aluminio de longitud  $L$  y espesor  $D$ , se sujeta entre dos mordazas de una

máquina de pruebas de tensión y si se registran simultáneamente los esfuerzos y la deformación se obtiene un diagrama como el esquematizado en la figura 2.1.

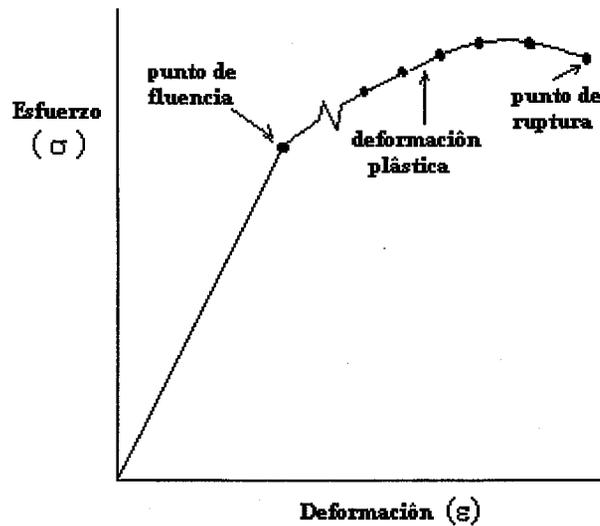


Figura 2.1. Curva esfuerzo-deformación para aleación de Aluminio

## 2.2 ESFUERZO UNIAXIAL

Para una fuerza o carga externa, que actúe sobre un cuerpo ejerciendo una tensión sobre éste, el esfuerzo uniaxial se define como:

$$\sigma = F / A \quad (2.1)$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo o magnitud de la fuerza por unidad de área que soporta el material. La expresión (2.1) requiere ser examinada cuidadosamente, esto es, dividiendo la magnitud de la fuerza o carga entre el área de la sección transversal a ésta, no se obtiene el valor del esfuerzo en todos los puntos de aquella, sino que solamente se obtiene el valor medio del esfuerzo. La expresión (2.2)

$$\sigma = dF / dA, \quad (2.2)$$

Proporciona una determinación más exacta del esfuerzo, exige dividir la fuerza diferencial  $dF$  en magnitud entre el elemento de área diferencial.

## 2.3 DEFORMACIÓN

El cambio en la longitud  $\delta$  de un cuerpo, cuando está sometido a un esfuerzo por tensión específico, es directamente proporcional a la longitud  $L$ . De manera que la deformación relativa  $\epsilon$  es:

$$\epsilon = \delta / L , \quad (2.3)$$

entonces, la deformación unitaria  $\epsilon$ , proporciona el valor medio. La expresión

$$\epsilon = d\delta / dL , \quad (2.4)$$

se considera como más correcta para estimar la deformación en cualquier punto.

## 2.4 LEY DE HOOKE

En el diagrama Esfuerzo-Deformación de la figura 2.1, la parte rectilínea, se tiene que la pendiente de ésta, es la razón entre el esfuerzo a la deformación, denominado módulo de elasticidad o de Young y se representa como:

$$Y = \sigma / \epsilon; \quad (2.5)$$

Relacionando las expresiones (2.1), (2.3) y (2.5), para obtener la siguiente expresión,

$$F = \delta (YA / L), \quad (2.6)$$

expresión conocida como la Ley de Hooke. De donde se tiene que  $k = (YA / L)$ , que se identifica como la constante elástica o de proporcionalidad.

## 2.5 OBSERVACIÓN

Volviendo nuevamente al diagrama Esfuerzo-Deformación, se tiene que el segmento rectilíneo que inicia en el origen  $O$ , llega hasta un punto llamado límite de proporcionalidad, es la región donde es válida la Ley de Hooke ecuación (2.6). Más allá de este límite, el esfuerzo deja de ser proporcional a la deformación. El límite de proporcionalidad, establece un límite superior al esfuerzo admisible, que un material dado puede soportar para comportarse elásticamente. También proporciona un primer indicio, de que, debe ser el límite de proporcionalidad y no el esfuerzo de ruptura, el máximo esfuerzo al que el material puede ser sometido.

## 2.6 RELACIÓN DE POISSON

Otro tipo de deformación elástica, es la variación de las dimensiones transversales, que acompañan a todo esfuerzo por tensión o compresión axial. Es decir, la deformación unitaria inducida en el plano normal al del esfuerzo aplicado, nunca es suficiente para compensar la deformación unitaria primaria, a lo largo del esfuerzo. En un material isótropico, la deformación relativa inducida, es la misma en todas las direcciones en el plano normal a la deformación primaria y la relación entre éstas, se denomina relación de Poisson.

En efecto, se comprueba que si una barra de cierto material, como la esquematizada en la figura 2.2, de longitud  $L$  y sometida a un esfuerzo de tensión uniaxial, como consecuencia de esto, cambia su longitud en  $\delta$ , mientras que el ancho y el espesor, cambian en  $\Delta b$  y  $\Delta d$  respectivamente, con valores de signos opuestos a  $\delta$ . La deformación relativa primaria está dada por  $\delta/L$ , entonces la deformación relativa inducida es dada por  $\Delta b/B$  y  $\Delta d / D$ , que tienen valores iguales. La relación de Poisson estará definida por:

$$\nu = - (\Delta b/B)/(\delta/L) = - (\Delta d/D) / (\delta/L), \quad (2.7)$$

$\nu$  será positiva debido al signo menos en la deformación, de la deformación de Poisson, la cual se puede escribir como:

$$\nu = - \varepsilon_i / \varepsilon, \quad (2.8)$$

donde  $\varepsilon$  es la deformación relativa primaria y  $\varepsilon_i$  es la deformación relativa inducida. En base a la ecuación (2.2), se tiene que

$$\nu = \sigma_i / \sigma, \quad (2.9)$$

o sea la relación de Poisson en términos de la razón del esfuerzo inducido  $\sigma_i$ , al esfuerzo aplicado  $\sigma$ . La relación de Poisson permite generalizar la aplicación de la ley de Hooke, al caso de esfuerzos triaxiales. Un análisis un poco más detallado a este respecto se presenta en el siguiente capítulo en la sección 3.5, se puede adelantar que: las expresiones que se obtienen, son igualmente válidas cuando uno o varios esfuerzos son de compresión, sin más que aplicar signos positivos a los alargamientos.

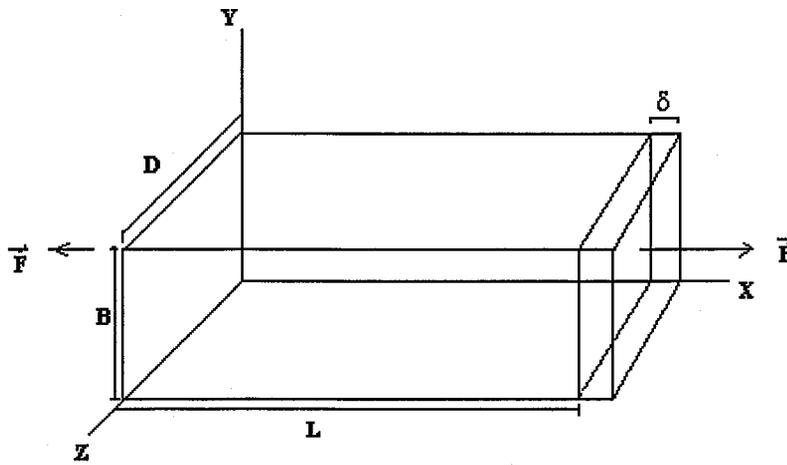


Figura 2.2. Deformación por esfuerzo de tensión

## 2.7 DEFORMACIÓN ANGULAR O CORTANTE

Las fuerzas cortantes producen una deformación angular o distorsión, de la misma manera que las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales, pero con una diferencia fundamental, un elemento sometido a tensión, experimenta un alargamiento, mientras que un elemento sometido a fuerza cortante no varía su longitud de sus lados, manifestándose por el contrario, un cambio de forma como se muestra en la figura 2.3.

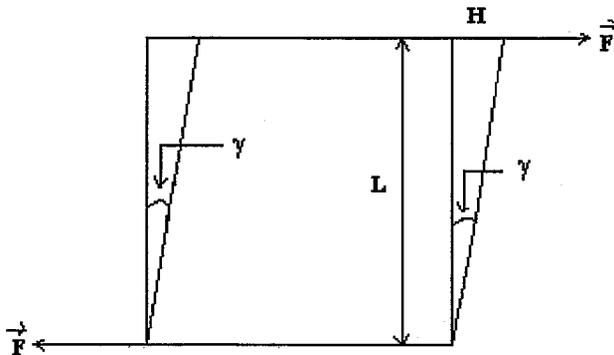


Figura 2.3. Deformación por fuerzas tangenciales

El proceso puede imaginarse como producido por el desplazamiento infinitesimal o resbalamiento de capas infinitamente delgadas del elemento, unas sobre otras, siendo la suma de estos la deformación transversal total  $\gamma$ , en una longitud  $L$ . Observando la figura 2.3, se tiene que  $\tan \gamma = H / L$  y como  $\gamma$  siempre es pequeño, implica que  $\tan \gamma \approx \gamma$ ; así, la deformación angular media o por cizalladura  $\gamma$  será:

$$\gamma = H / L, \quad (2.10)$$

para ser más preciso, la distorsión es la variación experimentada por el ángulo entre dos caras perpendiculares de un elemento infinitesimal. El esfuerzo cortante o de cizalladura se define como

$$\sigma_s = F / A. \quad (2.11)$$

Suponiendo válida la ley de Hooke en la deformación por cizalladura, la relación lineal entre el esfuerzo y la distorsión, está dada por

$$\sigma_s = G\gamma, \quad (2.12)$$

done  $G$  es el módulo de elasticidad cortante o también llamado módulo de rigidez. Una relación importante entre el módulo de rigidez  $G$  y el de elasticidad o de Young  $Y$ , para un material dado es:

$$G = Y / 2(1 + \nu), \quad (2.13)$$

la cual se puede usar para conocer el valor de la  $\nu$ , cuando se conoce el módulo de elasticidad  $Y$ , así, como  $G$ .

## 2.8 MECÁNICA DE FRACTURAS

La mecánica de fracturas, estudia el comportamiento de los materiales cuyas estructuras contienen grietas fracturas u otras defectos y están sujetos a esfuerzos variables, producidos por cargas y descargas sucesivas y repetidas, lo que lleva a que éstos se rompan o fallen. Frecuentemente la ruptura ocurre, para un valor del esfuerzo mucho menor que el de ruptura correspondiente, que puede ser determinado mediante un ensayo estático de tensión. Este tipo de falla se denomina ruptura por fatiga. Se pensó en principio que las aplicaciones repetidas de las cargas o fuerzas, cambiaban la estructura microcristalina del material, pero ahora se sabe que esto no es cierto. La falla o ruptura por fatiga, se explica mediante la teoría de los esfuerzos localizados, que se producen bien, en el interior del material, debido a discontinuidades en su estructura interna o bien, en la superficie debida a cambios bruscos de sección. Estas concentraciones de esfuerzo no son demasiado peligrosas, cuando un material dúctil se somete a esfuerzos estáticos; pero cuando la carga se aplica de forma alternada o repetida, se producen grietas o fracturas microscópicas que crecen a cada nueva aplicación, hasta que la pieza se rompe o falla bruscamente.

## 2.9 TEORÍA SOBRE LA RUPTURA O FALLA

Volviendo nuevamente a la gráfica Esfuerzo-Deformación, esquematizada en la figura 2.1, se pueden presentar los siguientes criterios. El esfuerzo más allá del límite elástico, el material no recupera totalmente su forma original al ser descargado sino que, queda con una deformación residual, conocida como permanente. Aquí, aparece otro aspecto que es el punto de fluencia y se identifica, como aquel, en el que aparece un alargamiento considerable o fluencia del material sin el correspondiente aumento de carga que, incluso puede disminuir mientras dura la fluencia. En el fenómeno de fluencia, también se empiezan a producirse dislocaciones, ocurriendo deslizamientos en el material y empieza a deformarse plásticamente. La deformación ocasionada por el deslizamiento es permanente, así, el esfuerzo en que se inicia el deslizamiento es el punto que delimita el comportamiento elástico y plástico. Por esto, al seleccionar un material por el proceso de deformación, que tenga un alto punto de fluencia, implica que, para que un esfuerzo aplicado produzca un cambio de forma del material, éste debe de exceder el punto de fluencia. El fenómeno de fluencia, es característico del acero al carbono y aluminio entre otros tipos de metales; mientras que existen ciertos tipos de materiales diversos, en los que no se manifiesta dicho fenómeno. En algunos materiales, el esfuerzo al cual cambian de comportamiento de elástico a plástico, no se detecta con facilidad.

En este caso se determina un esfuerzo de fluencia convencional (a partir de la gráfica Esfuerzo-Deformación). Se establece una deformación permanente, tal como 0.2% como permisible sin alterar el comportamiento del componente. De manera que el esfuerzo de fluencia para la deformación permanente de 0.2%, es aquel donde la recta de desplazamiento corta a la curva Esfuerzo-Deformación. Por lo tanto, se puede establecer que un material falla o se rompe, por fractura real, así, como por fluencia, según el efecto que ocurra antes. El comienzo de la deformación plástica, es decir, la fluencia puede quedar patente en un ensayo de tensión simple, por la desviación de la proporcionalidad Esfuerzo-Deformación. Prácticamente, la fluencia comienza cuando la deformación plástica empieza a ser apreciable.

Ahora bien, cuando no se trata de esfuerzo simple, sino de esfuerzos combinados en varias direcciones, la fluencia dependerá de alguna combinación de estas componentes de esfuerzo. Aunque, no se ha encontrado un método teórico que relacione el punto de fluencia en los ensayos de tensión simple, con la fluencia en casos de esfuerzos combinados. Se han propuesto diversas teorías que intentan resolver este problema. Algunas de estas son: la teoría del esfuerzo normal máximo, de la deformación normal máxima, teoría del esfuerzo cortante máximo, teoría de la energía de deformación, de fricción interna, el criterio de Tresca y el de la cedencia de von Mises. Los resultados experimentales, indican que de todas las teorías sobre la ruptura o falla de los materiales dúctiles, la teoría que da resultados más adaptados a la realidad, es el criterio de von Mises. El cual supone lo siguiente: la cedencia suele ocurrir en un estado general triaxial de esfuerzos, cuando la media cuadrática de las deferencias entre esfuerzos principales, es igual al mismo valor en un ensayo de tensión simple. También el esfuerzo de von Mises se usa como un criterio para determinar la aparición de una falla en materiales dúctiles. El criterio de falla Chandrupatla [3], establece que el esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  debe ser menor que el esfuerzo de fluencia  $\sigma_f$ . En forma de desigualdad el criterio puede escribirse como

$$\sigma_{VM} \leq \sigma_f \quad (2.14)$$

El esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  está dado por

$$\sigma_{VM} = [I_1 - 3I_2]^{1/2}, \quad (2.15)$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las primeras dos invariantes del tensor de esfuerzo. Para el estado general de esfuerzo, expresado por las ecuaciones (3.32), (3.33) y (3.31), además de que  $I_1$  e  $I_2$  están dados por

$$I_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z \quad (2.16)$$

$$I_2 = \sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z\sigma_X - \tau_{YZ} - \tau_{XZ} - \tau_{XY}. \quad (2.17)$$

En términos de los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , las dos invariantes se escriben como

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.18)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (2.19)$$

Si son los esfuerzos principales y es el esfuerzo de cedencia en tensión simple, se tiene:

$$\sigma_{VM} = [ 0.5 \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}]^{1/2}. \quad (2.20)$$

La cantidad de la derecha es el esfuerzo de von Mises y envuelve todo el esfuerzo principal. De esta manera de comparación directa del esfuerzo de von Mises como  $\sigma_{VM}$ , permite la identificación de las áreas que tienen flexibilidad. Recordar que  $\sigma_{VM}$  es el esfuerzo producido por la estructura del material bajo tensión uniaxial.

## 2.10 CONCLUSIÓN

En este capítulo, se han reunido aspectos básicos para el tratamiento de materiales con comportamiento elástico. Se hace énfasis en el fenómeno de fluencia y la forma de concebirlo, mismo que da la pauta para comprender cuándo se deforma permanentemente un material plásticamente. Aparece el concepto de falla o ruptura de un material y que existen diferentes teorías a este respecto, presentándose la teoría de von Mises no rigurosa y como la más representativa. No se presenta un estudio profundo y detallado, sobre la teoría de la falla o ruptura, ya que sale de las expectativas de este trabajo de tesis.

## CAPÍTULO 3

### EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO (FEM)

#### INTRODUCCIÓN

Aspectos históricos: las ideas básicas del Método de Elemento Finito o FEM, se originaron gracias a los avances en el análisis estructural de las ecuaciones. En 1941, Herenikoff [24] presentó una solución de problemas de la elasticidad usando el “método del trabajo del marco” un artículo publicado en 1943, Courant [21] usó interpolación polinomial por partes sobre regiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner [3] y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough [22] fue el primero en acuñar y emplear el término Elemento Finito en 1960. En los primeros años de la década de 1960, los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en problemas de análisis de esfuerzos., flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas. El libro de Argyris [6], publicado en 1955, sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimentó métodos adicionales en los estudios de elemento finito. El primer libro sobre elemento finito por Zienkiewicz y Cheung [17] fue publicado en 1967. A finales de la década de 1960 y principio de la siguiente; las bases matemáticas se fijaron en la década de 1970. El análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. El libro Oden [13] sobre continuos no lineales apareció en 1972.

Para calcular las deformaciones y los esfuerzos mecánicos o térmicos, con métodos de análisis clásicos, es probablemente, la mejor manera de analizar estructuras simples; sin embargo su uso es prohibitivo cuando el sistema físico es complejo. En tales casos, la mejor alternativa es esencialmente una solución obtenida con el Método de Elemento Finito FEM. La primera diferencia entre el método Clásico y el de Elemento Finito, es la forma en que ellos ven la estructura y el proceso a la solución resultante. El método Clásico considera a la estructura como un continuo, cuyo desarrollo es gobernado por ecuaciones parciales u ordinarias. El Método de Elemento Finito, considera que la estructura como un ensamble de pequeñas partículas de medida finita, llamadas elementos finitos. El método FEM, es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales, por primera discretización de éstas, en sus dimensiones espaciales. La discretización es localizada sobre las pequeñas regiones de forma simple pero arbitraria, esto es, sobre elementos finitos. Esto resulta en una ecuación matricial relacionando la entrada en puntos específicos en los elementos (nodos), a la salida de aquellos en esos mismos puntos. En orden a resolver ecuaciones sobre grandes regiones, las ecuaciones matriciales para pequeñas subregiones pueden ser sumadas nodo por nodo, resultando en una ecuación matricial global o elemento por elemento, lo que se puede realizar usando computadora. En este capítulo se tratan en las primeras secciones, algunos detalles del uso de elemento finito, como son : aproximación a la solución usando multiplicadores de Lagrange sección 3.1. En la sección 3.2 se obtiene el desplazamiento mediante el concepto de energía potencial. Para soluciones aproximadas se usa el método de Ryleigh- Ritz y el método

de Galerkin. En la sección 3.5 se presenta un análisis de esfuerzos tridimensional. Se presenta una formulación de elemento finito en la sección 3.6. Se obtiene una expresión para la rigidez de un elemento de un cuerpo sujeto a estudio en 3.7. Culminando el capítulo con su conclusión.

### 3.1 EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO FEM

El método de elemento finito es simplemente una técnica numérica para obtener la solución aproximada de un problema de campo. Convierte el manejo de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. En el método FEM, se hace uso del cálculo vectorial, el cual permite establecer los problemas de campo de manera compacta, sin la necesidad de introducir un sistema coordenado específico. Sin embargo, en las soluciones numéricas los vectores se expresan usualmente en forma de componentes. Otra parte del aparato matemático que se usa en este método, son los campos escalares y la representación matricial asociada a los nodos en la región de la solución. Frecuentemente, con el uso del método de elemento finito, se obtienen funciones como la siguiente:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1 \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) + u_2 \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) + \dots + u_M \mathbf{n}_M(\mathbf{x}) = u_i \mathbf{n}_i(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

que puede ser aproximada a encontrar su solución, usando polinomios de interpolación de Lagrange o también conocidas como funciones de forma  $\mathbf{n}_i(\mathbf{x})$ . En la ecuación (3.1) los coeficientes  $u_i$  son los valores de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en el conjunto  $M$  de puntos  $x_i$ , mientras que las funciones  $\mathbf{n}_i(\mathbf{x})$  son los polinomios de grado  $M-1$  que tienen la propiedad  $n_i(x_j) = \delta_{ij}$ , es decir,  $\mathbf{n}_i(x_i)$  es igual a 1, si  $i = j$  y será cero si,  $i$  es diferente de  $j$ . En esta, la función  $u(\mathbf{x})$  se representa como una combinación lineal de  $M$  funciones independientes  $\mathbf{n}_i(\mathbf{x})$ , es análoga a la ecuación  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{n}_i$ , en la cual el vector  $\mathbf{u}$  se representa como una combinación lineal de  $M$  vectores unitarios independientes  $\mathbf{n}_i$ , siendo  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{n}_i$  vectores en el espacio Euclidiano de dimensión  $P$  ( $P \geq M$ ). Los polinomios definidos en (3.1), pueden utilizarse de dos maneras diferentes. La primera es como una aproximación fácilmente calculable para funciones conocidas más complicadas y la segunda, es como una aproximación a funciones desconocidas.

### 3.2 LA ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

Otro aspecto que se considera importante, en la mecánica de sólidos, es el problema de determinar el desplazamiento  $\mathbf{u}$  de un cuerpo, que satisfaga las condiciones de equilibrio dadas por las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4); de las cuales se debe notar que, los esfuerzos están relacionados con deformaciones unitarias que a su vez, están relacionadas con los desplazamientos. Esto conduce a resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y, a la solución de este conjunto de ecuaciones se le llama generalmente una solución exacta. Tales soluciones, existen para geometrías y condiciones de carga simples. Para problemas de geometría compleja y condiciones de frontera y de carga general, la obtención de tales soluciones es una tarea casi imposible. Los métodos de solución aproximada usualmente emplean métodos de energía potencial o con variación, que imponen condiciones menos estrictas sobre las funciones, como se describe a continuación:

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z + f_x = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + f_y = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + f_z = 0. \quad (3.4)$$

La energía potencial total  $\Pi$  de un cuerpo elástico, se define como la suma de la energía de deformación unitaria total  $U$  y el potencial de trabajo  $PT$ , así:

$$\Pi = U + PT. \quad (3.5)$$

Para materiales elásticos lineales, la energía de deformación unitaria por unidad de volumen en el cuerpo es  $(1/2) \sigma^T \epsilon$ . Para el cuerpo mostrado en la figura 3.1. la energía de deformación unitaria total  $U$  está dada por[3 ]:

$$U = (1/2) \int \sigma^T \epsilon dV. \quad (3.6)$$

El potencial de trabajo  $PT$  se determina mediante la expresión

$$PT = -\int \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum \mathbf{u}^T \mathbf{P}_i. \quad (3.7)$$

El potencial total para el cuerpo es:

$$\Pi = (1/2) \int \sigma^T \epsilon dV - \int \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i. \quad (3.8)$$

Aquí, se considera sistemas conservativos, donde el potencial de trabajo es independiente de la trayectoria. En otras palabras, si el sistema se desplaza desde una configuración dada y se trae de regreso al estado inicial, las fuerzas efectúan un trabajo nulo, independientemente de la trayectoria. Entonces, el principio de energía potencial se enuncia como sigue[3]: Para sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamiento cinemáticamente admisibles, es decir, aquellos que satisfacen la naturaleza de valor único de los desplazamientos (compatibilidad) y las condiciones de frontera. Por lo tanto, aquellos que corresponden a condiciones de equilibrio, extremizan la energía potencial total. Si la condición extrema es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.

### 3.3 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

En medios continuos, puede usarse la energía potencial total  $\Pi$ , para encontrar una solución aproximada. El método de Rayleigh- Ritz implica la construcción de un campo de desplazamiento supuesto, por ejemplo

$$u = \sum a_i \phi_i(x,y,z), \text{ donde } i = 1 \text{ hasta } l \quad (3.9)$$

$$v = \sum a_j \phi_j(x,y,z), \text{ con } j = l + 1 \text{ a } m \quad (3.10)$$

$$w = \sum a_k \phi_k(x,y,z). \quad k = m + 1 \text{ a } n, \quad n > m > l \quad (3.11)$$

Las funciones  $\phi_i$  usualmente son polinomios. Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  deben ser cinemáticamente admisibles. Es decir,  $u$ ,  $v$  y  $w$  deben satisfacer condiciones de frontera específicas. Introduciendo relaciones esfuerzo-deformación unitaria y deformación unitaria – desplazamiento, sustituyendo la ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11) en (3.8), resulta

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r), \quad (3.12)$$

donde  $r$  es el número de incógnitas independientes. Ahora, el extremo con respecto a  $a_i$  ( $i = 1$  hasta  $r$ ) da el conjunto de  $r$  ecuaciones

$$(\partial \Pi / \partial a_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.13)$$

### 3.4 MÉTODO DE GALERKIN

El método de Galerkin usa el conjunto de ecuaciones gobernantes en el desarrollo de una forma integral. Usualmente se presenta como uno de los métodos de residuos pesados o ponderados. En este análisis se considera una representación general de una ecuación gobernante sobre una región  $V$ :

$$L u = P. \quad (3.14)$$

Para una barra unidimensional considérese que la ecuación gobernante, es la ecuación diferencial

$$(d/dx)(YAdu/dx) = 0. \quad (3.15)$$

Se puede considerar a  $L$  como el operador, es decir,  $L = (d/dx)(YA d/dx)$ , operando sobre  $u$ . La solución exacta necesita satisfacer (3.14) en cada punto de  $x$ . Si se busca una solución aproximada  $u_1$ , ella introduce un error  $e(x)$ , llamado residuo, dado por

$$e(x) = Lu_1 - P. \quad (3.18)$$

Los métodos aproximados consisten en hacer igual a cero el residuo relativo a una función pesada  $W_i$ ,

$$\int_V W_i(Lu_1 - P)dV = 0, \quad i = 1 \text{ hasta } n; \quad (3.19)$$

la selección de la función pesada  $W_i$  conduce a varios métodos de aproximación. En el método de Galerkin, las funciones pesadas  $W_i$  se escogen a partir de las funciones base usadas para reconstruir  $u_1$ . Si se representa  $u_1$  por

$$u_1 = \sum Q_i G_i \quad i = 1 \text{ hasta } n, \quad (3.20)$$

donde,  $G_i$  con  $i = 1$  hasta  $n$ , son funciones base (usualmente polinomios de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Escogiendo aquí, las funciones pesadas como una combinación lineal de las funciones base  $G_i$ . Específicamente, una función arbitraria  $\phi$  dada por

$$\varphi = \sum \phi_i G_i, \quad (3.21)$$

donde los coeficientes  $\phi_i$  son arbitrarios, excepto que se requiere que  $\varphi$  satisfaga condiciones de frontera homogéneas (cero) y  $u_i$  puede ser preescrita.

### 3.5 ANÁLISIS DE ESFUERZOS TRIDIMENSIONALES

Se tratará la formulación de problemas de análisis de esfuerzos tridimensionales. Se verá en detalle el elemento tetraédrico de cuatro nodos. Para materiales elásticos y lineales, las relaciones esfuerzo deformación unitaria, proviene de la ley de Hooke generalizada. Para materiales isotrópicos, las dos propiedades elásticas del material son el módulo de Young o de elasticidad  $Y$ , así, como la relación de Poisson  $\nu$ . Si se considera un cuerpo tridimensional, como el mostrado en la figura 3.1, que ocupa un volumen  $V$  y tiene una superficie  $S$ . Los puntos en el cuerpo se identifican por las coordenadas  $x, y, z$ . La frontera del cuerpo, se restringe a la región donde se especifica el desplazamiento. Sobre una parte de la frontera se aplica una fuerza distribuida por unidad de área  $T$ , llamada también tracción. El cuerpo se deforma debido a la acción de la fuerza. La deformación en un punto  $\mathbf{x} = [x,y,z]^T$ , está dada por las tres componentes de su desplazamiento:

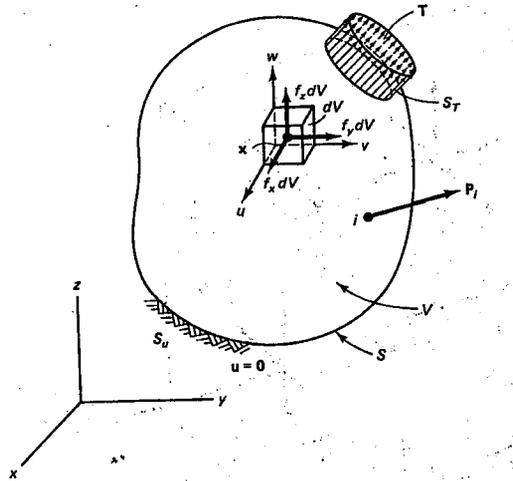


Figura 3.1 Cuerpo tridimensional

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T. \quad (3.22)$$

La fuerza distribuida por unidad de volumen, por ejemplo, el peso por unidad de volumen, es el vector  $\mathbf{f}$  dado por

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T. \quad (3.23)$$

Nuevamente en la figura 3.1 se muestra la fuerza del cuerpo actuando sobre el volumen elemental  $dV$ . La tracción superficial  $T$  puede darse por el valor de sus componentes en puntos sobre la superficie

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (3.24)$$

Ahora, para determinar las relaciones esfuerzo-deformación unitaria; considérese un cubo elemental dentro del cuerpo, como el mostrado en la figura 3.2, la ley de Hooke da:

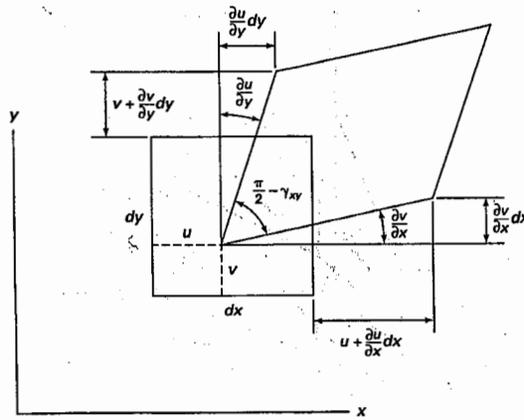


Figura 3.2 Superficie elemental deformada

$$\epsilon_x = \sigma_x / Y - \nu \sigma_y / Y - \nu \sigma_z / Y, \quad (3.25)$$

$$\epsilon_y = -\nu \sigma_x / Y + \sigma_y / Y - \nu \sigma_z / Y, \quad (3.26)$$

$$\epsilon_z = -\nu \sigma_x / Y - \nu \sigma_y / Y + \sigma_z / Y, \quad (3.27)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (3.28)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz} / G \quad (3.29)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (3.30)$$

El módulo de rigidez  $G$  está relacionado con el de elasticidad o de Young  $Y$  por medio de la expresión (2.13). También se nota que

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = [(1 - 2\nu) / Y] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.31)$$

Sustituyendo  $(\sigma_x + \sigma_y)$  y las otras relaciones en (3.31), se obtiene la relación inversa

$$\sigma = D \epsilon \quad (3.32)$$

donde  $D$  está dada por:

$$D = \left[ \frac{Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5-\nu \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

es decir, la matriz simétrica del material de (6 x 6).

### 3.6 FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO

Dividiendo el volumen en tetraedros de cuatro nodos. A cada nodo se le asigna un número y se leen las coordenadas x, y, z. En la figura 3.3 se muestra un elemento típico e; la conectividad puede ser definida como se muestra en la tabla 3.1. A cada nodo local i se le asignen los tres grados de libertad  $q_{3i-2}$ ,  $q_{3i-1}$ ,  $q_{3i}$  y al correspondiente nodo global l, se le asigna  $Q_{3l-2}$ ,  $Q_{3l-1}$ ,  $Q_{3l}$ . Los vectores de desplazamiento del elemento global son entonces:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{12}]^T, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N]^T, \quad (3.35)$$

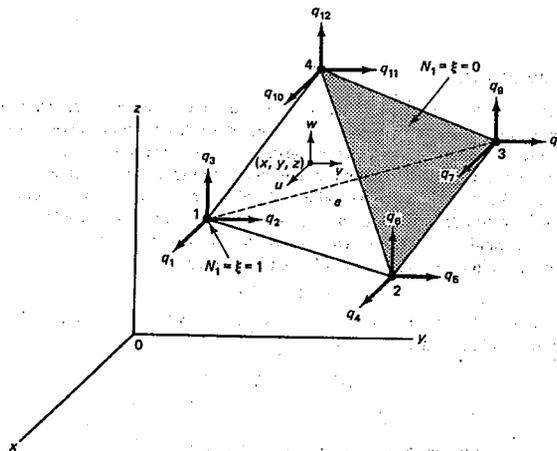


Figura 3.3 Elemento tetraédrico

	Nodos			
Elemento No.	1	2	3	4
E	I	J	K	L

Tabla 3.1 Conectividad

donde  $N$  es el número total de grados de libertad de la estructura, a razón de tres por nodo. Definiendo las cuatro funciones de forma de Lagrange  $N_1, N_2, N_3$  y  $N_4$ , donde la función de forma  $N_1$  tiene un valor de 1 en el nodo 1 y es cero en los otros tres nodos. Específicamente,  $N_1$  es 0 en los nodos 2, 3 y 4, crece linealmente hasta 1 en el nodo 1. Usando el elemento maestro mostrado en la figura 3.4, se pueden definir las funciones de forma como

$$N_1 = \xi; \quad N_2 = \eta; \quad N_3 = \zeta; \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta. \quad (3.36)$$

Los desplazamientos  $u, v, w$  en  $x$  pueden escribirse en términos de los valores nodales desconocidos como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (3.37)$$

donde  $N$  es una matriz de  $(3 \times 12)$ .

Las funciones de forma dadas por (3.36), pueden usarse para definir las coordenadas  $x, y, z$  del punto donde se interpolan los desplazamientos  $u, v, w$ . La transformación isoparamétrica está dada por

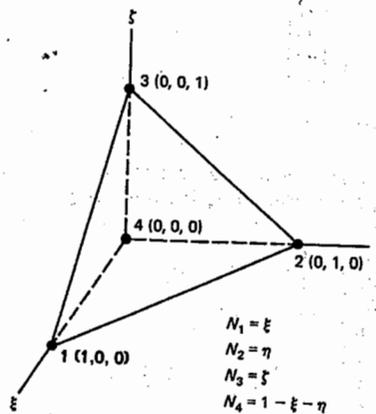


Figura 3.4 Elemento muestra para funciones de forma

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4, \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4, \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4, \end{aligned} \quad (3.38)$$

al sustituir los valores  $N_i$  dados por la ecuación 3.38 y usar las notaciones  $x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j, z_{ij} = z_i - z_j$ , conduce a

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14}\xi + x_{24}\eta + x_{34}\zeta, \\ y &= y_4 + y_{14}\xi + y_{24}\eta + y_{34}\zeta, \\ z &= z_4 + z_{14}\xi + z_{24}\eta + z_{34}\zeta. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando la regla de la cadena para derivadas parciales, para  $u$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

de manera que, las derivadas parciales con respecto a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  están relacionadas con las derivadas respecto de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , por medio de la relación anterior. El Jacobiano de transformación  $\mathbf{J}$  está dado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Aquí, se debe notar que

$$\det \mathbf{J} = x_{14}(y_{24} z_{34} - y_{34} z_{24}) + y_{14}(z_{24} x_{34} - z_{34} x_{24}) + z_{14}(x_{24} y_{34} - x_{34} y_{24}); \quad (3.42)$$

mientras que el volumen del elemento se obtiene usando la expresión

$$V_e = \left| \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \int_0^{1-\xi-\eta-\xi} \det J d\xi d\eta d\zeta \right|, \quad (3.43)$$

y como  $\det \mathbf{J}$  es constante se puede escribir como

$$V_e = |\det \mathbf{J}| \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \int_0^{1-\xi-\eta-\xi} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.44)$$

Haciendo uso de la fórmula polinomial integral, se obtiene

$$\int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \int_0^{1-\xi-\eta-\xi} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = (m! n! p!) / (m + n + p + 3)!, \quad (3.45)$$

de manera que  $V_e$  será

$$V_e = (1/6) |\det \mathbf{J}|. \quad (3.46)$$

La relación inversa correspondiente a la expresión (3.41) está dada por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad (3.47)$$

donde la  $\mathbf{A}$  es la inversa de la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  dada en (3.41), la cual se escribe como

$$\mathbf{A} = (1/\det \mathbf{J}) \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Usando las relaciones deformación unitaria-desplazamiento de la ecuación, la relación entre las derivadas en  $x, y, z$  y  $\xi, \eta, \zeta$  de la ecuación (3.47) y el campo supuesto de desplazamiento  $\mathbf{u}$  dada por la ecuación (3.37) se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (3.49)$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz (6 x 12), en ella se puede hacer  $A_1^* = A_{11} + A_{12} + A_{13}$ ,  $A_2^* = A_{21} + A_{22} + A_{23}$  y  $A_3^* = A_{31} + A_{32} + A_{33}$ . De manera que todos los términos de  $\mathbf{B}$  son constantes. Así, la ecuación (3.49) da entonces deformaciones unitarias constantes, después de que se calculan los desplazamientos nodales. Relacionando las ecuaciones (3.33) y (3.49), se obtiene una expresión para los esfuerzos del elemento, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.50)$$

### 3.7 RIGIDEZ DEL ELEMENTO

Otro de los aspectos importantes en método de elemento finito, es considerar la rigidez del elemento del cuerpo que se considere, a continuación se obtendrá una expresión que se considerará la matriz de rigidez. Para esto, haciendo uso de la energía de deformación unitaria del elemento, en el potencial total que está dada por la expresión:

$$U_e = (1/2) \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = (1/2) \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} dV = (1/2) \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}, \quad (3.51)$$

donde la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}_e$  es dada como

$$\mathbf{K}_e = V_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad (3.52)$$

Aquí,  $V_e$  es el volumen del elemento dado por  $(1/6) |\det \mathbf{J}|$ .

## CONCLUSIÓN

Se ha pretendido proporcionar algunos aspectos importantes, que se toman en cuenta en el método de elemento finito; existen aún más elementos pero no se consideran en este trabajo de Tesis, ya que no es el propósito de ésta. Lo presentado en este capítulo, se puede localizar en los textos dedicados al método de elemento finito, citados en la parte correspondiente a la bibliografía; por lo que se considera como una recopilación de temas, que propician una mejor comprensión del método FEM.

## CAPÍTULO 4

### ESFUERZO TÉRMICO

#### INTRODUCCIÓN

Los materiales se seleccionan para diversas aplicaciones y componentes, adecuando las propiedades del material a las combinaciones funcionales requeridas por el componente. Se analiza la aplicación del material para determinar características que debe poseer, como son resistencia, rigidez o ductilidad, cuando está sometido a la aplicación de carga térmica [3]. Las propiedades de los materiales sujetos a tensión o compresión, son afectadas de manera importante por la variación de la temperatura en ellos. El esfuerzo de fluencia, la resistencia a la tensión y el módulo de elasticidad, disminuyen a temperaturas elevadas, en tanto que la ductilidad como medida del grado de deformación en la fractura, comúnmente se incrementa. Para determinar el mecanismo de falla de metales, es de vital importancia la comprensión de los conceptos de termofluencia y ruptura del material por esfuerzo, para esto, considérese que, a temperaturas elevadas, un metal experimenta deformación plástica térmicamente inducida aún cuando el esfuerzo aplicado esté por debajo del punto de fluencia nominal. Las fallas por termofluencia se definen como la deformación o distorsión excesiva de las partes metálicas, incluso si no ha ocurrido la fractura. La falla de ruptura por esfuerzo son definidas como la fractura real de la parte metálica [1].

Normalmente, las fracturas de ruptura por esfuerzo del tipo dúctil incluyen las estriaciones del metal, durante la termofluencia terciaria y la presencia de muchas fisuras que no tuvieron la posibilidad la fractura final, incluso, los granos cercanos a la superficie de la fractura tienden a alargarse [1]. Las fallas de ruptura por esfuerzos dúctiles son generalmente transgranulares y ocurren a velocidades de termofluencia altas, tiempos cortos de la ruptura y temperaturas relativamente bajas de exposición. Las fallas de ruptura por esfuerzos del tipo frágil, son normalmente intergranulares, muestran poca estricción y ocurren más frecuentemente a velocidades bajas de termofluencia y temperaturas altas. Se observan granos equiaxiales cerca de la superficie de fractura. La falla frágil ocurre normalmente por la formación de huecos en la intersección de tres límites de grano y la precipitación de huecos adicionales a lo largo de los límites de grano, a través de los procesos de difusión.

Este capítulo se caracterizará por la descripción de las propiedades térmicas que poseen los metales, la atención se centrará en la forma de cómo se presenta el Esfuerzo Térmico, a causa de la variación de la temperatura  $\Delta T$  en éstos. Además se proporciona un ejemplo de Esfuerzo Térmico unidimensional, que será de importancia en el desarrollo posterior de este trabajo.

#### 4.1 TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO ESTABLE

Estudiaremos ahora la formulación del elemento finito, para la solución de problemas de transferencia de calor en estado estable. La transferencia de calor ocurre cuando hay una diferencia de temperatura dentro de un cuerpo y el medio que lo rodea. El calor es una forma

de energía, que es transferido por conducción, convección y radiación térmica. Aquí sólo se tratarán los modos de conducción y de convección, pero antes, se examinarán los conceptos de propiedades o efectos térmicos. En el estudio de la transferencia de calor, se tratan los mecanismos encargados del transporte de energía de un lugar a otro cuando se presente la condición de que exista diferencia de temperatura  $\Delta T$ . De manera que: la capacidad térmica o calórica, así como, la conductividad y la dilatación térmica, son las propiedades de los materiales, como los metales, que reciben la influencia de las vibraciones atómicas y la transferencia de energía a través de los electrones. Las propiedades térmicas de un material dependen de las interacciones entre la estructura y el ordenamiento atómico. Como consecuencia se pueden alterar algunas de estas propiedades modificando el arreglo atómico mediante cambios en la composición y procesamiento del material. Sin embargo, como la estructura atómica no se modifica fácilmente, algunas propiedades de material son fijas, como el coeficiente de dilatación térmica y la capacidad térmica o calórica.

## 4.2 CAPACIDAD TÉRMICA

La energía requerida, para hacer variar en un grado centígrado la temperatura de la unidad de masa de un cuerpo, de un cierto material, está expresada como la capacidad térmica o el calor específico. Por otro lado, la capacidad térmica molar es la energía requerida para hacer variar en un grado centígrado la temperatura de un mol de materia. A temperaturas elevadas, la capacidad térmica molar, para un material se aproxima a

$$C = 3R = 6 \text{ cal / mol-K} , \quad (4.1)$$

el calor específico se obtiene mediante la expresión siguiente:

$$C(\text{calor específico}) = (\text{capacidad térmica molar}) / (\text{masa molar o atómica}). \quad (4.2)$$

Que es la relación entre el calor específico y la capacidad térmica molar, cabe recordar que ésta no es constante, además  $R = 1.987 \text{ cal / mol- K}$ , es la constante de los gases.

## 4.3 CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

El matemático Francés Johan Batis Fourier (1822), propuso lo que hoy se conoce como la ley de conducción del calor o de Fourier; esta es una generalización de la información empírica. Dicha ley predice como se conduce el calor a través de un medio, partiendo de una región de alta temperatura, a una de más baja y está dada por la expresión:

$$(Q / A) = k( T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} ) / \Delta x, \quad (4.3)$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad llamada conductividad térmica y es una propiedad física del material en cuestión.  $Q$  es la razón de flujo de calor por unidad de tiempo  $t$ ;  $A$  es el área de la pared normal al flujo de calor;  $T_{\text{int}}$  es la temperatura interior de la pared, mientras

que  $T_{\text{ext}}$  será la temperatura exterior y  $\Delta x$  es el espesor. La expresión (4.3) se puede escribir en forma diferencial como:

$$Q = -kA(dT/dx), \quad (4.4)$$

$dT/dx$  se conoce como el gradiente de temperatura. El signo menos en la ecuación de Fourier de conducción de calor (4.4), refleja el hecho de que el calor está siendo transferido en la dirección decreciente de la temperatura, lo que se ratifica con la segunda ley de la termodinámica. Desde el punto de vista físico, la magnitud de la ecuación (4.4), no indica qué tan bien se transporta la energía mediante la conducción de un material dado. Tanto el mecanismo de conducción del calor, como el de transporte de corriente eléctrica, dependen en extremo del flujo de electrones libres y, como consecuencia, los materiales que son buenos conductores eléctricos, son también buenos conductores térmicos. Un mecanismo secundario para la conducción térmica en sólidos, está asociado con vibraciones en redes. Este efecto explica por qué, cuando aumenta la temperatura, en general decrece la conductividad térmica de los buenos conductores eléctricos. Las vibraciones en redes impiden el movimiento de electrones libres, provocando con esto que la componente de la conductividad térmica disminuya más rápido que la componente aumentada de la conductividad térmica, debido a vibraciones mayores de las redes. Por esta razón se encuentra que la conductividad térmica de metales puros, tiende a decrecer cuando aumenta la temperatura, mientras que en las aleaciones que contienen unos cuantos electrones libres y dependen principalmente de las vibraciones de las redes para conducir el calor, tiende a cambiar la conductividad térmica con el aumento de temperatura.

#### 4.4 TRANSFERENCIA DEL CALOR POR CONVECCIÓN

En la transferencia del calor por convección, se tiene una transferencia de energía entre un fluido y una superficie sólida como resultado de una diferencia de temperatura. Puede haber convección del calor de manera libre o natural, así como, forzada. La ecuación que describe el fenómeno convectivo, tiene la forma

$$q = h(T_s - T_\infty), \quad (4.5)$$

donde  $q$  se le conoce como el flujo convectivo de calor, con unidades de  $w/m^2$ ,  $h$  es la constante de transferencia de calor cuyas unidades son  $w/m^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ .  $T_s$  y  $T_\infty$  son las temperaturas de la superficie y del fluido, respectivamente;  $h$  depende del tipo de convección, libre o forzada, así como, si el flujo es laminar o turbulento, del tipo de fluido y de la geometría del cuerpo.

#### 4.5 DILATACIÓN TÉRMICA

Un átomo que gana energía térmica, comienza a vibrar y se comporta como si tuviera un mayor radio atómico. La distancia promedio entre átomos y las dimensiones generales del material se incrementan. El cambio en las dimensiones del material,  $\Delta x$  por unidad de longitud, está dado por el coeficiente de dilatación térmica  $\alpha$ , es decir,

$$\Delta x = \alpha L \Delta T, \quad (4.6)$$

donde  $\Delta T$  es el incremento de temperatura y  $L$  la longitud inicial. El coeficiente de dilatación térmica lineal decrece cuando se incrementa la resistencia de los enlaces atómicos. Deben tenerse muchas precauciones cuando se calculan los cambios de dimensiones en materiales; ya que las características de dilatación de algunos materiales, particularmente los cristalinos o los materiales simples que tienen una orientación espacial, pueden ser anisotrópicas. Los materiales alotrópicos experimentan cambios súbitos en sus dimensiones, cuando ocurre la transformación de fase. Estos cambios repentinos contribuyen a agrietar los refractarios al calentarlos o enfriarlos y ocasionan grietas al templar el acero. El coeficiente de dilatación real no es constante en todas las temperaturas. Normalmente,  $\alpha$  se menciona en los manuales como una función complicada dependiente de la temperatura, o como una constante para un intervalo especial de temperaturas [1].

#### 4.6 CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DEL CALOR

Ahora se dirigirá la atención al problema de conducción del calor en estado estable. El objetivo es determinar la expresión para la distribución de temperaturas. En problemas unidimensionales de estado estable, existe un gradiente de temperatura a lo largo de sólo un eje coordenado y la temperatura en cada punto es independiente del tiempo. Considérese el problema de la conducción de calor en una pared plana que genera calor de manera uniforme. Sea  $A$  el área normal a la dirección de el flujo de calor y sea  $Q$  el calor interno generado por volumen unitario. Como la razón de flujo de calor por área, que entra al volumen más la razón de calor generada, es igual a la razón de calor que sale del volumen de control, teniéndose

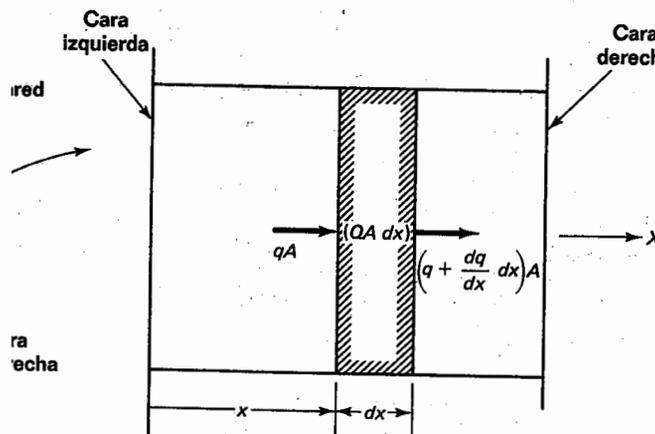


Figura 4.1. Conducción unidimensional del calor.

$$qA + QA dx = (q + (dq/dx)dx)A, \quad (4.7)$$

cancelando  $qA$  en ambos lados de esta ecuación da

$$Q = dq / dx, \quad (4.8)$$

sustituyendo la ley de Fourier, ecuación (4.4) se obtiene

$$(d/dx) (k dT / dx) + Q = 0. \quad (4.9)$$

Usualmente, a  $Q$  se le denomina fuente cuando es positiva, es decir, se genera calor y, se le considera sumidero cuando es negativa, o sea que se consume calor. En este caso se hará referencia a  $Q$ , como fuente, en general  $k$  es una función de  $x$ . La ecuación (4.9), tiene que resolverse con condiciones apropiadas de frontera. Las condiciones de frontera son principalmente de tres tipos: de temperatura especificada, de flujo de calor especificado o aislamiento y de convección. Por ejemplo, considérese una pared de un cierto dispositivo a temperatura  $T_0$ , que se encuentra en contacto con una corriente de aire a temperatura  $T_\infty$  circulando en el exterior, teniendo

$$T|_{x=0} = T_0, \quad (4.10)$$

$$T|_{x=L} = h(T_L - T_\infty). \quad (4.11)$$

En este caso la corriente de aire mantiene a la pared a una temperatura  $T_L$  en la frontera. Las expresiones (4.10) y (4.11) son las condiciones de frontera.

#### 4.7 ENFOQUE FUNCIONAL DE GALERKIN PARA LA CONDUCCIÓN DEL CALOR

Se soluciona ahora la ecuación de conducción del calor (4.9), con condiciones de frontera de convección, dadas por (4.10) y (4.11). Para una solución aproximada de  $T$ , el enfoque de Galerkin consiste en resolver una expresión como la siguiente:

$$\int_0^L \phi [(d/dx)(k dT/dx) + Q] = 0, \quad (4.12)$$

para todo  $\phi$  construida a partir de las mismas funciones base que para  $T$ , con  $\phi(0) = 0$ . Integrando el primer término por partes, se obtiene

$$\phi k(dT / dx) \Big|_0^L - \int_0^L k (d\phi / dx)(dT / dx) dx + \int_0^L \phi Q dx = 0. \quad (4.13)$$

Ahora

$$\phi k(dT / dx) \Big|_0^L = \phi(L)k(L)(dT(L) / dx) - \phi(0)k(0)(dT / dx)(0), \quad (4.14)$$

y como  $\phi(0) = 0$ ,  $q = -k(L)(dT(L) / dx) = h(T_L - T_\infty)$  la expresión anterior se reduce a

$$\phi k(dT / dx) \Big|_0^L = -\phi(L) h (T_L - T_\infty); \quad (4.15)$$

la ecuación (4.14) toma entonces la forma

$$-\phi(L) h (T_L - T_\infty) - \int_0^L k(d\phi / dx)(dT / dx) dx + \int_0^L \phi Q dx = 0. \quad (4.16)$$

Usando ahora las relaciones isoparamétricas definidas como  $T(\xi) = \mathbf{N}\mathbf{T}^e$  y  $\mathbf{B}_T = (1/x_2 - x_1)[-1, 1]$ . Un vector de temperatura virtual global se puede denotar por  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_L]^T$ , y la función de prueba dentro de cada elemento se interpola como

$$\phi = \mathbf{N}\Psi, \quad (4.17)$$

análogamente  $(dT / dx) = \mathbf{B}_T \mathbf{T}^e$  y de la ecuación (4.17), se obtiene

$$d\phi / dx = \mathbf{B}_T \Psi. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.16) toma la forma

$$\begin{aligned} -\Psi_L h (T_L - T_\infty) - \sum_e \Psi^T (k_e l_e / 2) \int_{-1}^1 \mathbf{B}_T^T \mathbf{B}_T d\xi \mathbf{T}^e \\ + \sum_e \Psi^T (Q_e l_e / 2) \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi = 0; \end{aligned} \quad (4.19)$$

después de simplificar se obtiene

$$-\Psi_L h T_L + \Psi_L h T_\infty - \Psi^T \mathbf{K}_T \mathbf{T} + \Psi^T \mathbf{R} = 0, \quad (4.20)$$

que debe satisfacerse para toda  $\Psi$  y  $\Psi_1 = 0$ . Las matrices globales  $\mathbf{K}_T$  y  $\mathbf{R}$  ensambladas a partir de las matrices de los elementos  $\mathbf{k}_e$  y  $\mathbf{r}_Q$  como se dan en las expresiones

$$\mathbf{k}_T = (k_e / l_e) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{r}_Q = (Q_e l_e / 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Cuando cada  $\Psi$  se escoge como  $[0, 1, 0, \dots, 0]^T, \dots, [0, 0, \dots, 1]^T$  y ya que  $T_1 = T_0$ , entonces de la ecuación (4,20) se obtiene

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2L} \\ K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{3L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{L2} & K_{L3} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{LL} + h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R + hT_\infty \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Se observa que la ecuación (4.23) puede resolverse para  $T_1, T_2, \dots, T_L$ . Nótese que el método de Galerkin conduce en forma natural a un enfoque de eliminación al tratar la temperatura especificada no cero  $T = T_0$  en el nodo uno.

#### 4.8 ESFUERZOS DE ORIGEN TÉRMICO

Los cambios de temperatura provocan en los cuerpos dilatación o contracción de éstos, de manera que la deformación lineal  $\Delta x$ , viene dada por la expresión (4.6). Así, si no se impide la deformación debida a la variación de la temperatura, como ocurre en los sistemas estáticamente determinados, no aparecerán esfuerzos en la estructura, pero en multitud de casos no es posible evitar que las deformaciones térmicas, estén total o parcialmente impedidas. Como resultado de ello aparecen fuerzas internas que contrarrestan, también total o parcialmente estas deformaciones. Los esfuerzos originados por estas fuerzas se llaman esfuerzos térmicos o esfuerzos de origen térmico. Ahora, si se conoce el aumento de temperatura  $\Delta T(x, y, z)$  con respecto al estado original, entonces se puede obtener fácilmente la deformación asociada. Para materiales elásticos lineales e isotrópicos, el aumento de temperatura  $\Delta T(x, y, z)$  en ellos, ocasiona una deformación uniforme que depende del coeficiente de dilatación lineal  $\alpha$  del material. Se supone que  $\alpha$  representa el cambio de longitud por elevación de temperatura unitaria, es constante dentro del intervalo de variación de la temperatura. Esta deformación unitaria tampoco genera ningún esfuerzo cuando el cuerpo tiene libertad para deformarse. La deformación unitaria por variación de temperatura se presenta como una deformación unitaria inicial  $\epsilon_0$ , cuya magnitud está dada como

$$\epsilon_0 = \alpha \Delta T, \quad (4.24)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica  $\Delta T$  y si es positiva implica una elevación de la temperatura. La ley de esfuerzo-deformación unitaria en presencia de  $\epsilon_0$  se muestra en la figura 4.2. De esta figura se observa que la relación esfuerzo-deformación unitaria está dada por:

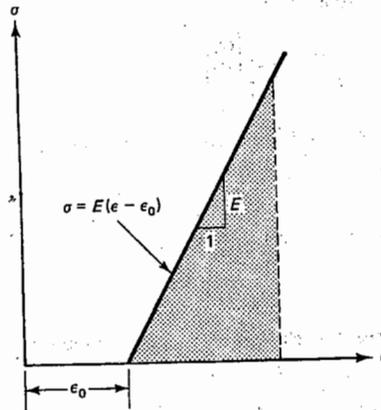


Figura 4.2. Ley de esfuerzo-deformación unitaria inicial.

$$\sigma = Y (\epsilon - \epsilon_0). \quad (4.25)$$

La energía de deformación unitaria por unidad de volumen,  $u_0$  es igual al área sombreada en la figura (4.2) de ésta se obtiene

$$u_0 = (1/2)\sigma (\epsilon - \epsilon_0), \quad (4.26)$$

y usando la ecuación (4.22), se encuentra que la ecuación (4.23) da

$$u_0 = (1/2) Y (\epsilon - \epsilon_0)^T (\epsilon - \epsilon_0). \quad (4.27)$$

La energía de deformación unitaria total  $U$  en la estructura, se obtiene integrando  $u_0$  sobre el volumen de la estructura:

$$U = \int_L (\epsilon - \epsilon_0)^T Y (\epsilon - \epsilon_0) A \, dx. \quad (4.28)$$

Para una estructura modelada usando elementos lineales unidimensionales, la ecuación anterior toma la forma

$$U = \sum_e (1/2) A_e (l_e / 2) \int_L (\epsilon - \epsilon_0)^T Y (\epsilon - \epsilon_0) A \, d\xi, \quad (4.29)$$

Se nota que  $\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{q}$  y por lo tanto se obtiene

$$U = \sum_e (1/2) \mathbf{q}^T (Y_e l (1/2) \int_{-L}^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\xi) \mathbf{q} - \sum_e (1/2) (Y A_e l_e) \epsilon_0 \int_{-L}^L \mathbf{B}^T \, d\xi + \sum_e (1/2) A_e (l_e / 2) \epsilon_0^2. \quad (4.30)$$

Examinando la expresión de la energía de deformación unitaria anterior, se ve que el primer término en el lado derecho de la ecuación da la matriz de rigidez de un elemento que se

obtuvo ya en el capítulo 3, sección 3.4; el último término es constante y no es de importancia, ya que se cancela en las ecuaciones de equilibrio, que se obtienen haciendo  $d\Pi/dQ = 0$ . El segundo término da el vector de carga  $\Theta$  deseado del elemento, ocasionado por el cambio de temperatura

$$\Theta = (1/2)(Y A_e l_e)(\epsilon_0 \int_{-L}^L B^T d\xi); \quad (4.31)$$

la ecuación anterior puede simplificarse sustituyendo  $B = [-1 \ 1](1/(x_2-x_1))$  y como  $\epsilon_0$  está dado por la expresión (4.24), entonces

$$\Theta = \{(Y A_e l_e \alpha \Delta T) / (x_2 - x_1)\} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

en esta expresión  $\Delta T$  es el cambio promedio en temperatura dentro del elemento. El vector de carga por temperatura en la ecuación (4.32), puede ensamblarse junto con la fuerza de cuerpo, la fuerza de tracción y los vectores de carga puntual para dar el vector de carga global  $F$  para la estructura. Este ensamble puede demostrarse por

$$F = \sum_e (f^e + T^e + \Theta^e) + P. \quad (4.33)$$

Después de resolver las ecuaciones del elemento finito  $k Q = F$  para los desplazamientos  $Q$ , el esfuerzo de cada elemento puede obtenerse sustituyendo la ecuación (3.52) y (4.25) en la (4.26), obteniéndose la expresión

$$\sigma = Y(B q - \alpha \Delta T) = (Y/(x_2 - x_1))[-1 \ 1] q - Y\alpha \Delta T, \quad (4.34)$$

en esta expresión se observa que el esfuerzo total, se compone de la diferencia entre un esfuerzo debido a carga global y el debido a carga térmica.

## CONCLUSIÓN

En el desarrollo de este capítulo se ha realizado lo más concretamente posible, la obtención de la expresión para el esfuerzo térmico. Se describen los métodos de transferencia de calor, por convección y conducción, excepto el de transferencia de calor por radiación, por ser un proceso no lineal. Se ha generado la ecuación que describe cualitativamente la conducción de ésta forma de energía, proporcionando una manera de resolverla, usando el método de Galerkin. Los resultados derivados de este proceso de solución, permiten establecer una expresión para el esfuerzo térmico unidimensional, desde el punto de vista del Método de Elemento Finito. La importancia del desarrollo radica en entender que un objeto se deforma a causa del esfuerzo de tipo térmico, aspecto que se verifica en la parte experimental en el capítulo 6.

recibe una distribución de intensidad  $I_{def}$  que puede ser representada por la ecuación (5.5), después de ser procesada electrónicamente, la señal de video viva, es substraida de la forma del frente de onda grabado inicialmente, es decir, el proceso de correlación por substracción, se realiza mediante un procesamiento digital de imágenes, con un Software apropiado compatible con una microcomputadora, aquí, la señal de salida es también filtrada con un filtro pasa altas, rectificadas y exhibida en el monitor de TV, donde pueden ser observadas las franjas de interferencia o de correlación por substracción. La grabación de éstas, se puede realizar mediante la PC o con video grabadora VHS.

El objetivo de este capítulo, consistirá en presentar las bases y aspectos teóricos más sobresalientes; por lo que se ha dividido en 9 secciones en las que se trata lo siguiente: la sección 5.2 estará dedicada a proporcionar los conceptos de moteado; mientras que la sección 5.3, es dedicada a presentar las condiciones generales para la implementación de un interferómetro de moteado. En las secciones 5.4 y 5.5 se establecen las bases de la interferometría de correlación por substracción y por suma respectivamente; la sección 5.6 se dedica a describir brevemente el método optoelectrónico ESPI. La obtención de expresiones para determinar variación de camino óptico y de la fase, se realiza en 5.7; las secciones 5.8 y 5.9 se dedican a describir los interferómetros sensibles fuera y en plano y algunas de sus características experimentales fundamentales.

## 5.2 INTERFEROMETRÍA DE MOTEADO

La interferometría de moteado, es una clase de técnica de la medida, la cual envuelve la adición coherente de un campo de moteado proveniente del objeto y una onda de referencia plana, esférica u otro campo de moteado tomado como de referencia. El principio de la interferometría de moteado, requiere que, para deformaciones del objeto sujeto a estudio, la distribución de irradiancia o intensidad de las ondas esparcidas, en el área de observación, permanezca constante; lo cual implica que la posición de cada mota permanece substancialmente en el mismo lugar, por consiguiente, la fase de cada una de estas en el plano imagen, contiene información acerca del desplazamiento o la deformación de la superficie del objeto. Ahora, si un segundo frente de onda mutuamente coherente, se suma a un patrón de moteado, éste actúa como una referencia de fase, lo que implica que la distribución de irradiancia de cada mota, sea una función de la relación de la fase entre los dos frentes de onda, que a su vez se relacionan con la deformación sufrida por la superficie. La deformación de la superficie, puede visualizarse como una diferencia de irradiancias de moteado, esto es, la diferencia entre dos patrones de moteado, uno registrado antes de la deformación y el segundo registrado después de la deformación. En regiones donde la superficie no se ha movido, las motas mantienen su irradiancia original; mientras que en regiones donde la superficie se ha movido, la irradiancia de la mota varía. Los patrones de moteado, normalmente se comparan o correlacionan mediante la suma o substracción de las irradiancias. La diferencia entre los dos patrones de moteado, son reveladas mediante franjas claras y oscuras que corresponden a los sitios de diferencia de fase igual entre los dos frentes de onda. Esta diferencia de fase se relaciona con la diferencia de camino óptico introducido por el movimiento o deformación de la superficie.

### 5.3 CONDICIONES GENERALES PARA INTERFEROMETRÍA DE MOTEADO

Un arreglo diagramático de una clase de interferómetro fuera de plano, es mostrado en la figura 5.1. El eje Y es perpendicular a el plano del documento, el objeto D está en un plano, ópticamente es una superficie rugosa alineada paralela al plano XY, con su superficie normal a lo largo del eje Z. Es iluminada por un frente de onda divergente I inclinado a un ángulo  $\theta$  respecto del eje Z, además de ser monocromático de longitud de onda  $\lambda$ , coherente y de estar polarizado. El objeto es visto en la dirección normal por la combinación de la abertura de la lente L, la cual está centrada en las coordenadas (0, 0, i). Una imagen de moteado dispersada por el objeto D, de distribución de amplitud compleja  $U_r$ , es formada en el plano imagen P, e interfiere con el frente de onda de referencia, con distribución de amplitud compleja  $U_o$ , el cual diverge desde R en (0, x, l), donde se asume que  $x \ll l$ , así, que el ángulo entre el haz de referencia y objeto está dado por  $x / l$ . La distribución amplitud compleja del haz objeto y referencia respectivamente, podrán ser escritas como:

$$U_o = u_o \exp(\phi_o), \quad (5.1)$$

$$U_r = u_r \exp(\phi_r). \quad (5.2)$$

También se tiene que:  $u_o$  y  $\phi_o$  varían al azar a través de la imagen,  $u_r$  y  $\phi_r$ , podrán variar al azar o ser constantes, dependiendo de la forma del frente de onda de referencia; la distribución de intensidad en el punto H(r) estará dada por la expresión

$$I_{in}(r) = u_o^2 + u_r^2 + 2u_o u_r \cos(\phi_o - \phi_r), \quad (5.3)$$

donde  $|u_o(r)| = u_o$ ,  $|u_r(r)| = u_r$  se tratarán de esta manera por conveniencia. Físicamente se obtiene un patrón de moteado inicial, cuya distribución de irradiancia puede ser como la mostrada en la figura 5.2. En ella se observan zonas de máxima y mínima irradiancia, es decir el fenómeno de interferencia el cual se produce cuando  $u_o$  y  $u_r$  sean paralelos, además de que  $\cos(\phi_o - \phi_r)$  sea igual a  $\pm 1$  dependiendo el caso. Otro aspecto importante es que la longitud de coherencia del frente de onda monocromático sea mayor que la diferencia de camino óptico implícito en el argumento de la función coseno.

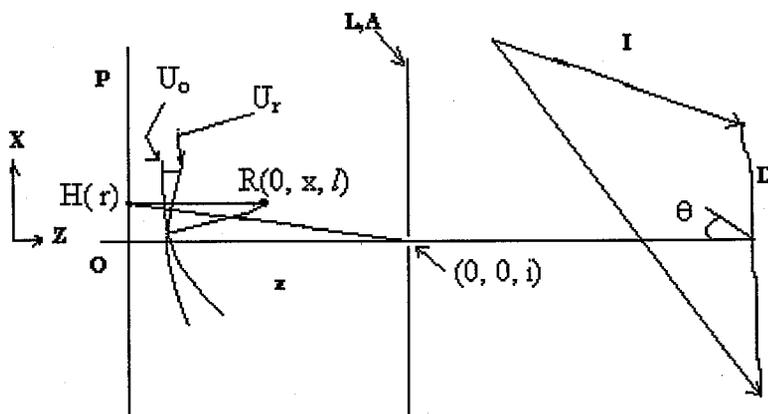


Figura 5.1 Diagrama interferométrico

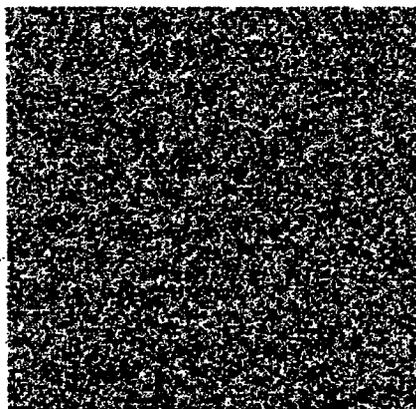


figura 5.2 patrón de moteado inicial.

Ahora, cuando la superficie es desplazada o sufre una deformación, la fase de todas las componentes dispersadas en  $H(r)$  cambia por la misma cantidad  $\Delta\phi_0(r)$ , así que la amplitud del haz objeto en  $H(r)$ , está ahora dada como

$$U_o(r) = u_o \exp[\phi_o + \Delta\phi_0(r)], \quad (5.4)$$

y la distribución de intensidad será

$$I_{def}(r) = u_o^2 + u_r^2 + 2u_o u_r \cos[\phi_o - \phi_r + \Delta\phi_0(r)]. \quad (5.5)$$

El patrón de moteado correspondiente a esta expresión, que se puede obtener físicamente tiene una apariencia en distribución de intensidad, como el que se muestra en la figura 5.3 siguiente:

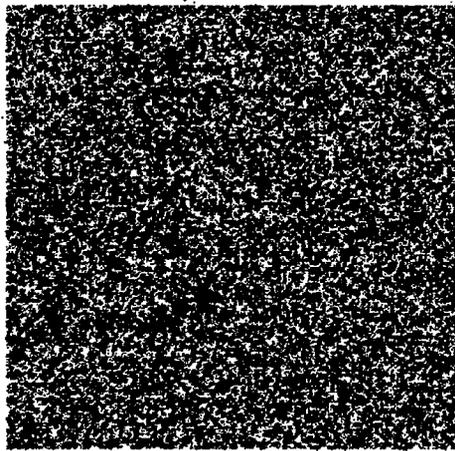


Figura 5.3 Patrón de moteado con deformación

En base a lo antes expuesto y a la ecuación (5.5), se puede comentar lo siguiente. El cambio de fase  $\Delta\phi_0(r)$  es una función del desplazamiento de la superficie del cuerpo sujeto a estudio o de la deformación de sufrida por ésta. Aquí, se supone que tanto  $(\phi_o - \phi_r)$  como  $\Delta\phi_0(r)$ , no varían con el tiempo, esto implica que el objeto está estático y sus partes sufren desplazamiento o deformación estática. Para interferometría de moteado,  $I(r)$  y  $(\phi_o - \phi_r)$  para uno o ambos haces varían al azar con la posición, así, las franjas de interferencia debido a los cambios en la fase  $\Delta\phi_0(r)$ , no aparecen directamente y las medidas deben ser hechas observando el cambio en la irradiancia o intensidad del moteado. La formación de franjas de interferencia o correlación de patrones de moteado, puede realizarse de dos maneras; una es la forma experimental mediante el uso del método ESPI, la cual se presenta en el capítulo 6 siguiente. La otra manera es la analítica, mediante la observación de los cambios en irradiancia o intensidad de los patrones de moteado y, ésta se puede realizar a la vez de dos formas. Una forma se conoce como correlación por sustracción y, la otra se le denomina correlación por suma, ambas se describen a continuación.

## 5.4 CORRELACIÓN POR SUBSTRACCIÓN

Realizando la substracción de las ecuaciones (5.3) y (5.5), se obtiene

$$I(r) = |I_{def} - I_{in}| = 2(\sqrt{I_o I_r}) |\cos([\phi_o - \phi_r] - \Delta\phi) - \cos(\phi_o - \phi_r)| \quad (5.6)$$

Proceso que se puede llevar a cabo de la manera siguiente: usando el método fotográfico o el de Interferometría de patrones de moteado (ESPI), la cual funciona con la señal del módulo en la ecuación (5.6), eliminando cualquier valor negativo en el signo de la señal de televisión y puede ser reescrita como:

$$I(r) = 4([I_o I_r]^{1/2}) |\sin(2[\phi_o - \phi_r] + \Delta\phi_o(r)) / 2| \sin\Delta\phi_o(r) | \quad (5.7)$$

Expresión que describe dos funciones moduladas. La función  $|\sin(2[\phi_o - \phi_r] + \Delta\phi_o(r)) / 2|$ , es la moduladora de frecuencia espacial alta, la cual proporciona el ruido de moteado desplazado. Tras que la función moduladora  $|\sin \Delta\phi_o(r)|$  es de frecuencia espacial más baja y es la que proporciona las franjas de correlación. Un mínimo de la franjas aparece siempre que  $\Delta\phi_o(r) = 2n\pi$ , donde  $n = 1,2,3,\dots$ , es decir, en algún punto, en el cual la distribución de intensidad del patrón de moteado ha regresado a su valor original. las intensidades de los dos patrones de moteado son los mismos, pero cuando no es satisfecha, los patrones de moteado son diferentes. Si los dos patrones de moteado son comparados, se observan líneas de interferencia a lo largo de los cuales los dos son idénticos. La información acerca del desplazamiento relativo de diferentes partes de la superficie, puede ser obtenida desde la posición de esas líneas. Como un ejemplo de tales franjas que se pueden obtener, se muestra en la figura 5.4

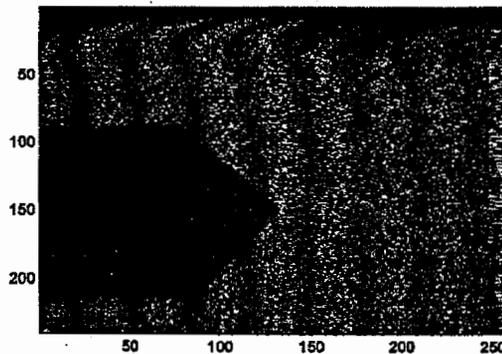


Figura 5.4 Franjas de interferencia o de correlación

## 5.5 CORRELACIÓN POR SUMA

Sumando ahora las ecuaciones (5.3) y (5.5), se obtiene después de operar la expresión siguiente:

$$I(r) = 2(I_0 + I_r) + 2(\sqrt{I_0 I_r})\{\cos([\phi_0 - \phi_r] + \Delta\phi) + \cos(\phi_0 - \phi_r)\} \quad (5.8)$$

o también

$$I(r) = 2(I_0 + I_r) + 2(\sqrt{I_0 I_r}) \cos [ (2\{\phi_0 - \phi_r\} + \Delta\phi_0(r)) / 2 ] \cos\Delta\phi_0(r) \quad (5.9)$$

Los mínimos de franjas ocurren cuando  $\Delta\phi_0(r) = (2n + 1)\pi / 2$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . También debe notarse que el término  $2(I_0 + I_r)$ , reduce la visibilidad de las franjas, las franjas de este tipo, pueden grabarse por doble exposición del medio de registro, antes y después de la deformación de la superficie del cuerpo sujeto a estudio. La observación de franjas de correlación, se puede realizar mediante el método de fotografía de moteado o el método fotoelectrónico. Franjas de mínima irradiancia se obtienen en este caso cuando  $\Delta\phi_0(r) = 2n\pi$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Aquí, nuevamente se puede comentar que la posición de las franjas, proporcionan la información de los desplazamientos o la deformación sufrida por el cuerpo sujeto a estudio.

## 5.6 EL MÉTODO DE SUSTRACCIÓN ELECTRÓNICA ESPI

Originalmente el proceso de correlación fue llevada a cabo exponiendo y revelando un negativo del patrón de moteado del objeto sin deformar y, reposicionándolo en el mismo lugar del interferómetro. El negativo se usó como una máscara a través de la cual el objeto deformado podía verse, produciéndose la correlación. Los avances actuales de la tecnología, han permitido el desarrollo de uno de los métodos importantes para realizar la correlación por sustracción, este es, el Método Electrónico de Interferometría de Patrones de Moteado ESPI. En este método, se comparan electrónicamente los patrones de moteado por ejemplo como los mostrados en las figuras 5.2, 5.3, usando un sistema de televisión. En el plano imagen del sistema coincide con la placa de fase de la cámara de TV, la imagen del objeto en ésta, en estado no desplazado o deformado, es grabada por ejemplo sobre una video-cinta, cuando el objeto es desplazado, la imagen es sustraída electrónicamente en tiempo real desde la imagen grabada. Más detalles del método ESPI, son presentados en el capítulo 6, donde además se describe la forma de implementarlo experimentalmente.

## 5.7 CAMBIOS DE FASE Y LA DIRECCIÓN DE SENSIBILIDAD

Analizando el cambio de fase introducido por un desplazamiento general  $\mathbf{d}$ . La figura 5.5 muestra un punto Q sobre la superficie del objeto la cual es iluminada con luz de láser, incidiendo a un ángulo  $\theta$  pequeño, respecto del al eje de visión o en la diección del eje Z. La luz dispersada desde Q hasta un punto en el plano imagen, será en la dirección anterior. El objeto es desplazado desde el punto Q(x, y, z) hasta el punto P(x + u, y + v, z + w) una magnitud  $\mathbf{d}$ . Para un desplazamiento general  $\mathbf{d}$ ; que a la vez es considerablemente más pequeño, que la distancia entre el objeto y el plano de divergencia del haz objeto de iluminación y, la distancia entre el objeto y la lente formadora de la imagen, entonces, la dirección de la iluminación para Q y P puede asumirse que es la misma. El camino óptico atravesado por la luz dispersada hasta el plano imagen desde Q, puede observarse de la figura 5.5, que tiene un cambio de longitud dado por la cantidad  $\Delta l$ , esto es:

$$\Delta l = w(1 + \cos \theta) + u \sin \theta, \quad (5.10)$$

$u$  y  $w$  pueden tomar valores positivos y negativos. El cambio de fase será:

$$\Delta \phi = (2\pi/\lambda)\Delta l, \quad (5.11)$$

la cual se puede escribir usando (5.10) como

$$\Delta \phi = (2\pi/\lambda)[ w(1 + \cos \theta) + u \sin \theta ]. \quad (5.12)$$

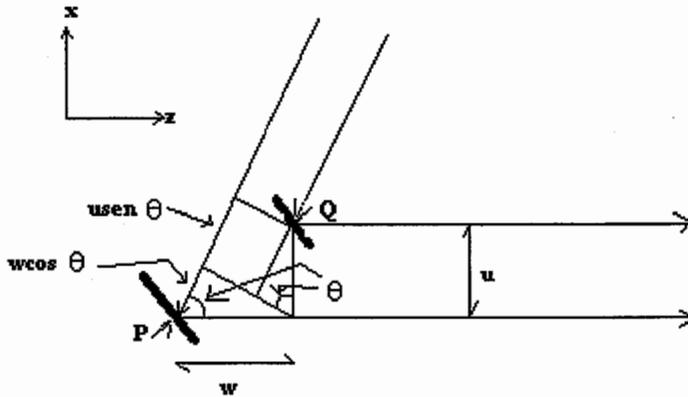


Figura 5.5 Diagrama para determinar la variación del camino óptico

Por otro lado, se considera que un interferómetro de patrones de moteado, es sensible a una componente espacial de desplazamiento en cualquier punto del espacio objeto. La dirección de sensibilidad, puede ser definida con un vector de sensibilidad unitario  $\mathbf{n}$ . Ahora, si el vector desplazamiento de cada punto del objeto es  $\mathbf{d}(x, y, z)$ , entonces el interferómetro será sensible a la componente de  $\mathbf{d}$  a lo largo del vector sensibilidad, es decir

$$d_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}. \quad (5.13)$$

El cambio en la longitud de camino óptico como función de la componente del vector sensibilidad es

$$\Delta l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = d_n, \quad (5.14)$$

siempre que  $\mathbf{n}$  sea un vector unitario. El cambio de fase  $\Delta\phi$  de la luz dispersada, desde Q hasta el plano imagen, se puede representar como:

$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda) \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}; \quad (5.15)$$

proviene desde un área alrededor de Q provee el cambio de fase dado por (5.15). Este cambio de fase es no uniforme para todos los puntos en el área de resolución, con estas condiciones, podrán ser observadas franjas de correlación. Otra forma de visualizar el cambio en la fase en el plano imagen, es determinado por el número de onda  $k = 2\pi / \lambda$  (donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz de iluminación), la variación de la longitud de camino óptico y un cambio de fase unitario en el espacio objeto, que puede definirse como un factor de sensibilidad de franja  $\Gamma$ , que determina cuántas franjas corresponden a un desplazamiento dado de la superficie.  $\Gamma$

también se considera una función del desplazamiento de la superficie y del tipo de iluminación; por lo tanto, el defazamiento estará dado por

$$\Delta\phi_o(\mathbf{r}) = k\Gamma d_n, \quad (5.16)$$

$\Gamma$  y  $\mathbf{n}$  pueden ser determinadas por la geometría del interferómetro. El análisis tridimensional de la deformación, requiere que la función de desplazamiento del objeto  $\mathbf{d}(x, y, z)$  sea determinada. El  $d_n$  es sólo una de las componente y, deben por consiguiente obtenerse tres medidas diferentes de ésta, para definir  $\mathbf{d}$  completamente en tres dimensiones. Un vector de sensibilidad diferente  $\mathbf{n}$ , se requiere para cada medida; idealmente deben usarse tres vectores de sensibilidad mutuamente perpendiculares, lo que reduce sólo a la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. En las siguientes dos secciones se describen dos configuraciones de interferómetros de patrones de moteado que satisfacen esta condición; además son controladas la geometría, iluminación y visión, así que, los cambios en la fase  $\Delta\phi$  será sensitiva a desplazamientos en una dirección particular.

## 5.8 INTERFERÓMETRO SENSIBLE FUERA DE PLANO

Para un sistema interferométrico de patrones de moteado sensible fuera de plano, el objeto bajo prueba, se ilumina y se ve a lo largo de la normal a su superficie. La luz esparcida por la superficie del objeto, constituye un patrón de moteado, que se combina con un frente de onda que se denomina de referencia, que puede ser plano, esférico u otro patrón de moteado, etc. Una configuración práctica de interferómetro sensible fuera de plano, puede ser implementado como se muestra esquematizado en la figura 5.6. El arreglo mostrado en ésta figura, se usa para obtener franjas de interferencia o de correlación, las cuales son predominantemente sensibles a desplazamientos fuera de plano.

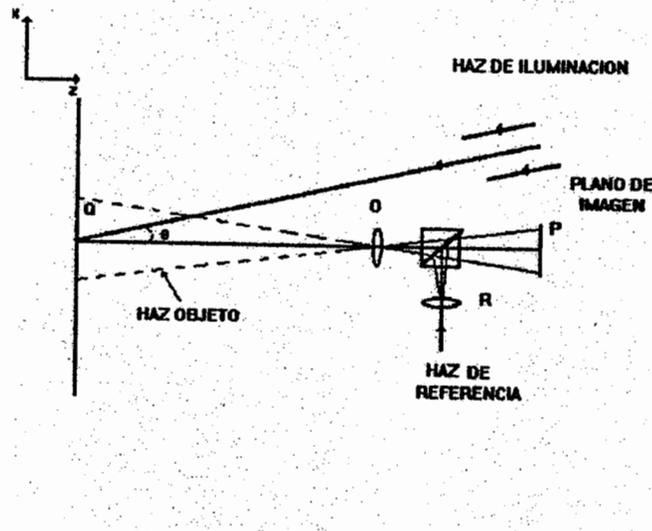


Figura 5.6 Esquema de interferómetro sensible fuera de plano

Volviendo a la figura 5.6, el objeto es iluminado por un haz colimado, polarizado linealmente, monocromático y coherente, que incide a un ángulo  $\theta$  pequeño sobre la superficie. Una imagen de éste, es formada sobre el plano imagen P y puede ser el de una cámara de TV, por la lente O. Un haz de referencia, el cual diverge desde una fuente puntual R, es sobrepuesto sobre la imagen del objeto por el divisor de haz. El punto R será aproximadamente el conjugado con el centro O de la lente, es decir, el haz parecerá diverger de O; esto se usará a causa de que la interferencia entre el haz objeto y referencia no podrá fluctuar en una frecuencia espacial, la cual es también alta para ser resuelta por ejemplo con una cámara de TV. Se puede observar de la ecuación (5.12) que cuando el objeto sufre un desplazamiento general de magnitud  $d$ , la fase de la luz, cambia en  $\Delta\phi$ , en un punto en el plano imagen, dicho cambio está dada por ésta expresión. Para la condición de ángulos  $\theta$  pequeños (típicamente  $< 5^\circ$ ), el término en  $u$  se puede ignorar con respecto al término en  $w$ , quedando

$$\Delta\phi = (4\pi/\lambda) w. \quad (5.17)$$

Haciendo uso de la condición para  $\Delta\phi_0(r) = 2n\pi$ , donde  $n = 1,2,3,\dots$ , obtenida en la correlación por substracción y de la ecuación (5.17), serán observadas franjas oscuras o de mínima irradiancia en la substracción de los patrones de moteado, cuando el desplazamiento en magnitud esté dado por la expresión

$$w = n\lambda / 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.18)$$

con esta expresión y la aproximación antes propuesta, justifican el hecho de que el interferómetro es sensible a desplazamientos fuera de plano. Las franjas de interferencia, representan contornos de desplazamiento de fase constante fuera de plano. Ahora, si la superficie del objeto es plana y, si es iluminada normalmente por un frente de onda plano, además de ser vista en dirección normal, las franjas representan exactamente contornos de desplazamiento fuera de plano. Comparando (5.16) y (5.17), se obtiene de estas ecuaciones un factor de sensibilidad de franja para esta configuración  $\Gamma = 2$ , mientras que el vector unitario de sensibilidad  $\mathbf{n}$ , tiene la dirección del eje Z o sea la de observación.

## 5.9 INTERFERÓMETRO SENSIBLE EN PLANO

Un arreglo de un interferómetro sensible en plano, se esquematiza en la figura 5.7. Aquí, el objeto es iluminado con frentes de onda plano o colimados, polarizados linealmente, monocromáticos, coherentes y simétricos respecto a la normal a la superficie, es decir, incidiendo a iguales ángulos  $\theta$  y opuestos, respecto de la normal a la superficie. La superficie es vista por la lente L en dirección normal. Un pequeño desplazamiento general  $\mathbf{d}$  como el esquematizado en la figura 5.5, causará cambios en la longitud de camino óptico dados por

$$\Delta l_A = w(1 + \cos \theta) + u \operatorname{sen} \theta, \quad (5.19)$$

$$\Delta l_B = w(1 + \cos \theta) - u \operatorname{sen} \theta. \quad (5.20)$$

Los cambios de fase  $\Delta\phi_1$  y  $\Delta\phi_2$  en los dos patrones de moteado debido al desplazamiento general de magnitud  $d$  y está dado por:

$$\Delta\phi_1 = (2 \pi / \lambda) [w(1 + \cos \theta) + u \operatorname{sen} \theta], \quad (5.21)$$

$$\Delta\phi_2 = (2 \pi / \lambda) [w(1 + \cos \theta) - u \operatorname{sen} \theta]. \quad (5.22)$$

por lo tanto el cambio de fase relativa entre los dos haces, esta dado por la expresión

$$\Delta\phi = (2 \pi / \lambda)(\Delta l_A - \Delta l_B) = (2\pi / \lambda) [2u \operatorname{sen} \theta], \quad (5.23)$$

y son observadas franjas oscuras en la substracción de los patrones de moteado, nuevamente cuando se cumpla la condición de que  $\Delta\phi_0(r) = 2n\pi$ , donde  $n = 1,2,3,\dots$  y además de que

$$u = n\lambda / 2 \operatorname{sen} \theta. \quad n = 1,2,3,\dots \quad (5.24)$$

Las franjas de interferencia, representan contornos de desplazamiento constante en plano y no tienen sensibilidad a desplazamientos en la dirección  $w$  y  $v$ . Este caso ocurre sólo cuando: la superficie del objeto sujeto a estudio es plana, los haces de iluminación están colimados

El factor de sensibilidad de franja será  $\Gamma = 2 \operatorname{sen} \theta$  y el vector de sensibilidad  $\mathbf{n}$ , estará en la dirección del eje X. Para haces de iluminación rotados al plano YZ, se puede hacer un análisis similar que da un factor de sensibilidad  $\Gamma$ , igual al mismo valor anterior, pero el vector de sensibilidad  $\mathbf{n}$  está ahora orientado en la dirección del eje Y.

Se nota que, si la superficie no es plana, entonces, esta configuración da alguna sensibilidad fuera de plano en los puntos donde la normal a la superficie no es paralela al eje Z [19].

Los valores de  $\Gamma$  y  $\mathbf{n}$  son constantes a través de todo el objeto para frentes de onda de iluminación planos. Los frentes de onda esféricos causarán que el vector de sensibilidad rote y den un poco de sensibilidad en la dirección del eje Z, que es considerada fuera de plano.

También la sensibilidad en plano decrece hacia el borde del campo de visión, así, si haces de iluminación se extienden desde un punto remoto, se minimizan éstas variaciones en el vector sensibilidad.

De acuerdo con la ecuación (2.23), la variación de la fase es independiente de la dirección de visión y por lo tanto el único efecto de visión oblicua es cambiar la perspectiva de la imagen.

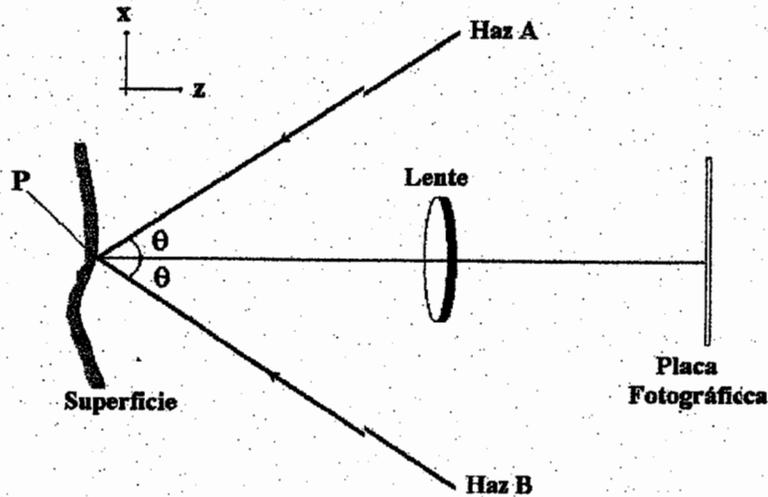


Figura 5.7 Esquema interferómetro sensible en plano

## CONCLUSIÓN

Se ha presentado un panorama general, que va desde definir el concepto de un patrón de moteado, las condiciones para la interferencia, plantear las expresiones que cuantifican la generación de franjas de correlación por substracción mediante el método ESPI. Concluyendo con la implementación teórica de las dos clases de interferómetros base de este Método, el sensible en plano y el de fuera de plano. Lo desarrollado en este capítulo, son aspectos muy importantes que apoyan el desarrollo posterior, lo que justifica la necesidad de ser incluido en este trabajo de Tesis.

## CAPÍTULO 6

### MÉTODO EXPERIMENTAL ESPI

#### INTRODUCCIÓN

El objetivo o propósito general de este capítulo es el de aplicar el método ESPI, descrito en el capítulo 5, además de mostrar algunos de los resultados obtenidos mediante el trabajo experimental, mismos que serán esenciales en el estudio comparativo. Se producirá y grabará mediante un sistema ESPI fuera de plano, un patrón de franjas interferométricas de fase. Para obtener información del esfuerzo y la deformación, de una placa de aluminio 6061, con grieta curva y lineal, así, como con fractura. La cual es sometida a carga térmica.

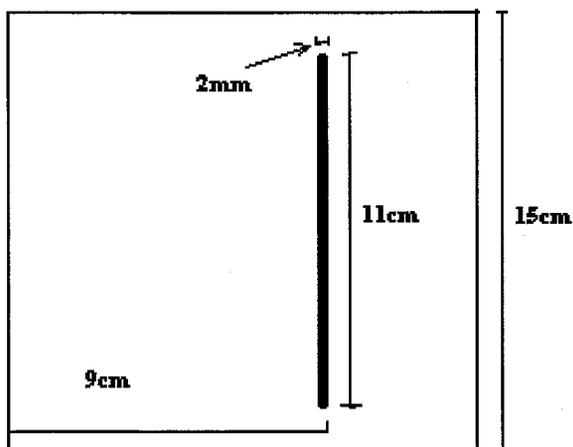
#### 6.1 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL ALUMINIO 6061

Se presentan características, propiedades elásticas y térmicas del material, con el que fueron fabricadas las placas usadas como objeto en el trabajo experimental de esta Tesis. El aluminio 6061 es un metal ligero, considerado como una aleación no ferrosa, que contiene 1% de Manganeso, 0.6% de Silicio [1]. Tiene propiedades a la tensión con una resistencia a ésta de 45,000psi, relativamente baja comparada con la del acero. El aluminio 6061 suele presentar un límite de resistencia a la fatiga bien definido es decir, un esfuerzo de fluencia de 40,000psi, pero la falla puede ocurrir aun a esfuerzos más bajos. La aleación de aluminio 6061 debido a su bajo punto de fusión, no se comporta bien a temperaturas elevadas, tiene escasa dureza, lo que origina poca resistencia al desgaste abrasivo en muchas condiciones. Las aleación de aluminio 6061, se clasifica en el grupo de aleaciones puras para forja, de acuerdo con el método de fabricación. Las aleaciones para forja que se conforman mediante deformación plástica, tienen composiciones y microestructuras significativamente diferentes de las aleaciones para fundición. Es una aleación tratable térmicamente y es endurecida por envejecimiento. Las propiedades elásticas y térmicas del aluminio 6061, son las presentadas en la Tabla 6.1 [12].

DENSIDAD $\rho$	MODULO DE ELASTICIDAD $Y$	RAZON DE POISSON $\epsilon$	DILATACIÓN TÉRMICA $\alpha$	CONDUCTIVIDAD $k$
13.18Kg/m <sup>3</sup>	68.89 N/m <sup>2</sup>	0.33	23.39(1/°C)	165.4W/m °C

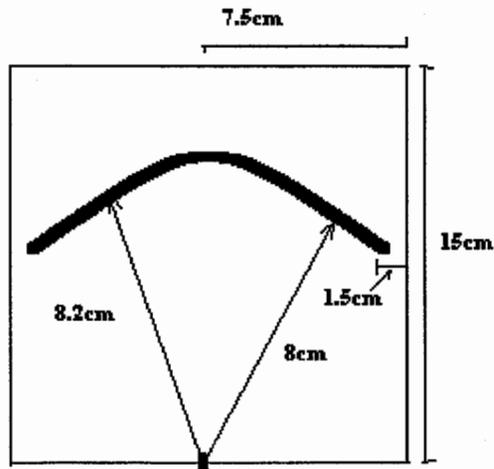
Tabla 6.1 Propiedades del aluminio 6061

A continuación se presentan los tres tipos de esquemas, de los modelos de placa de aluminio 6061 que fueron utilizadas para desarrollar la parte experimental de este trabajo. En ellas se detallan las dimensiones que equivalen a los modelos reales, las propiedades y características para las tres, son las descritas arriba. La figura 6.1, esquematiza la placa de aluminio 6061, con grieta rectangular, utilizada. Las dimensiones son las ahí representadas, aunque por la forma de la perspectiva del dibujo la profundidad de la grieta es de 4mm, mientras que el espesor de la placa es de 6mm. Dicha grieta le provoca discontinuidad sólo en una parte de una superficie de la placa real, ésta será considerada como la superficie posterior durante el desarrollo experimental. Mientras que la superficie donde no existe discontinuidad, será la anterior. Una imagen tridimensional de éste tipo de placa puede verse en la figura 7.5 del capítulo 7. A la placa real le fue aplicada una película de pintura blanco mate, en ambas caras, con el fin de que disperse de mejor manera la luz de láser incidente sobre ella, durante la etapa de experimentación.



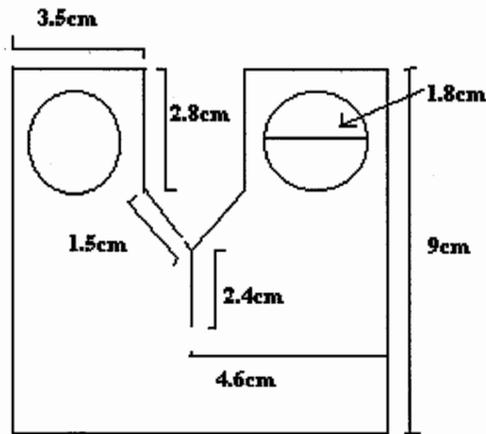
**Figura 6.1 Dimensiones placa con grieta rectangular.**

La segunda placa cuadrada de aluminio 6061 utilizada, se esquematiza en la figura 6.2. Las dimensiones son idénticas a las de la placa anterior de espesor 6mm, excepto que la grieta practicada en ella, es de geometría semicircular cuya profundidad de 4mm. Nuevamente la superficie donde se practicó la grieta será considerada como la posterior, teniéndose en esta una discontinuidad del material. La superficie anterior no posee discontinuidades y es la que se expone la incidencia de radiación de luz láser como se comenta en la etapa experimental. A esta placa también se le aplicó una película de pintura blanco mate, para propiciar una mejor dispersión de las ondas láser. La imagen tridimensional de ésta, se puede apreciar mejor en la figura 7.7 del capítulo siguiente, la cual se puede considerar como una representación más fiel de la placa real.



**Figura 6.2 Dimensiones placa con grieta semicircular.**

Se usó una tercera y cuarta placa cuadrada reales de aluminio 6061, cuya geometría es similar a la esquematizada en la figura 6.3, variando sólo en espesor de 1.9mm y 3.9mm respectivamente. En este caso se le practicó diferentes fracturas que provocan la discontinuidad del material; se eligió la fractura más delgada o sea la que se representa con un segmento de línea recta en parte inferior de la figura. A cada placa se le aplicó una película de pintura color blanco mate, pero sólo en una superficie y es la que se considerará como anterior o la que dispersa la luz de láser; mientras que la otra superficie será la posterior. En estas placas sólo hay variación de espesor y una representación tridimensional de ella, que permite visualizarla mejor se presenta en las figura 7.9 del siguiente capítulo.



**Figura 6.3 Dimensiones de placa con fractura**

## 6.2 IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL

Un sistema interferométrico de moteado es usado para evaluación no destructiva, en el cual no hay contacto con el objeto sujeto a estudio. Deformaciones, grietas y fracturas sufridas en el objeto que resultan de la aplicación de fuerzas o carga térmica se manifiestan en la superficie. La discontinuidad en la superficie, por ejemplo, provoca un disturbio o una variación en el patrón de franjas de interferencia o de correlación. De manera que el principio de medida basado en la interferometría de moteado, consiste en la observación de la evolución de un patrón interferométrico de moteado, obtenido por la superposición coherente de los dos campos independientes y en función de la diferencia de fase entre ambos. A continuación se presenta el desarrollo experimental, para lo cual se hace uso del esquema de la figura 6.4, donde se muestra la construcción de un arreglo opto-electrónico ESPI, para producir franjas de interferencia o de correlación por substracción en tiempo real. El interferómetro construido en este arreglo permite determinar desplazamientos o deformaciones fuera de plano. Los objetos bajo estudio que se someten deformación por esfuerzo térmico son placas de aluminio 6061, cuyas características y dimensiones, son presentadas en la sección anterior. Volviendo nuevamente al esquema de la figura 6.4, en él se observa que el haz de luz láser (Helio-Neón,  $\lambda = 632.8\text{nm}$  y  $38\text{mw}$ ) proveniente de la fuente (1), es reflejado por el espejo plano(2); su irradiancia o intensidad es disminuida al transmitirse en (3), para de aquí, ser reflejado nuevamente por el espejo plano (4). El haz es expandido en (5), usando una lente objetivo de microscopio 40X; parte del haz expandido ilumina al objeto (6) colocado en el plano XY en lo que se considera la superficie anterior, aquí cabe puntualizar que la grieta queda en la superficie posterior, de tal manera que queda oculta al sistema formador de imagen. Parte de este haz, será reflejado por el espejo plano (7) situado en el plano  $X_1Y_1$ . El haz objeto dispersado por éste y el de referencia reflejado por el espejo, llegan al sistema formador de

imagen (8) (lente zoom más CCD), de aquí las imágenes son procesadas electrónicamente mediante la PC (9) (que contiene el software para realizar procesamiento digital de imágenes) luego ser exhibidas en el monitor de TV (10) y ser capturadas o grabadas con la videogradora VHS (11). La carga térmica “puntual” es proporcionada al objeto que le produce a éste una variación de temperatura  $\Delta T$ , mediante la fuente un caufín eléctrico (12).

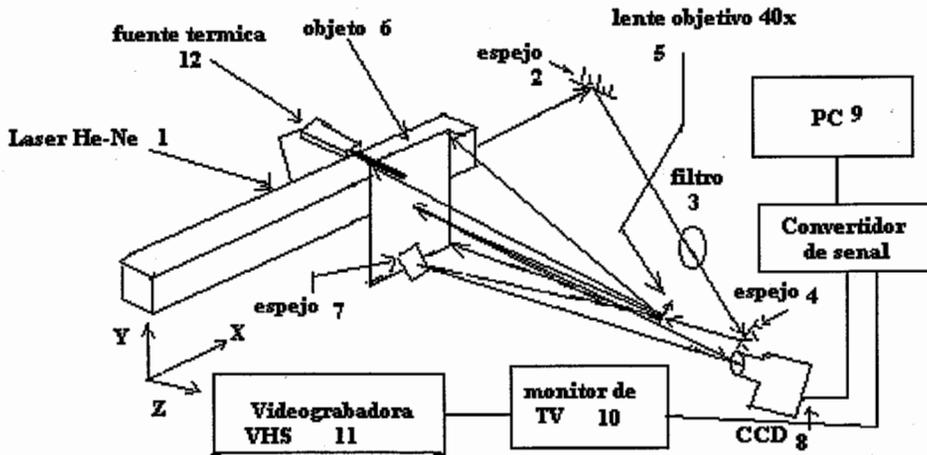


Figura 6.4 Esquema ESPI para el grabado de franjas de correlación por substracción en tiempo real.

### 6.3 CORRELACIÓN POR SUBSTRACCIÓN

La superficie anterior del objeto sujeto a estudio, que inicialmente se encuentra sin deformación, dispersa un patrón de moteado con fase al azar y, se conocerá como haz objeto. Las ondas reflejadas por el espejo (7), constituirán el haz de referencia, que se considera como “esférico” y de fase continua. El haz objeto y el de referencia interactúan en el espacio produciendo el fenómeno de interferencia que se manifiesta como un patrón de moteado de distribución de intensidad  $I_i$ ; la mayor parte de tal interacción es capturada por el sistema formador de imagen (8). Se exhibe como una imagen viva y fija, de un patrón de moteado con fase al azar, en el monitor de TV (10). Ahora, se produce un nuevo patrón de moteado con distribución de irradiancia  $I_{def}$  cuando al objeto se le aplica carga térmica en puntos predeterminados de la superficie posterior, lugar donde se localiza la grieta o fractura. El cuerpo en general se comienza a deformar conforme aumenta la variación de la temperatura en éste. Como la superficie anterior del cuerpo todo el tiempo se encuentra iluminada, nuevamente la superficie dispersa la luz incidente con fase al azar, más una fase adicional producto de la deformación sufrida por el esfuerzo térmica. La correlación por substracción en tiempo real se realiza al superponer la imagen viva con la imagen de éste último patrón de moteado, tal situación se observa de manera continua en el monitor de TV. Conforme varíe la temperatura en la placa debido a la transferencia de calor cedido por la fuente térmica, la deformación también varía, esto es, las partes del cuerpo se desplazan tridimensionalmente y

en el monitor de TV se observan las franjas de correlación en tiempo real. Tal producción de franjas se suspende cuando la fuente ha alcanzado una temperatura fija, en este caso la temperatura alcanzada fue de 285°C. Quedando un patrón de franjas fijo se graba o almacena la imagen con una videograbadora y cinta VHS, desde el inicio hasta que se estabiliza el patrón de interferencia. El mismo proceso fue realizado en los cuatro casos, como se describe en la siguiente sección.

## 6.4 RESULTADOS OBTENIDOS

La figura 6.5, muestra la imagen de un patrón de franjas de interferencia por substracción en tiempo real, obtenida al someter la placa de aluminio 6061 con grieta rectangular orientada en la dirección del eje Y o verticalmente, a la acción de la carga térmica puntual, producida por un cautín eléctrico con punta. En este caso, la carga térmica se aplicó en la grieta de la superficie posterior, es decir, quedaba oculta al sistema formador de imagen. En un punto cuyas coordenadas son descritas en la Tabla 7.1. En la imagen del patrón de interferencia, se observa que las franjas de mínima irradiancia parecen formar elipses concéntricas orientadas verticalmente, que se van deformando en la zona donde se localiza la grieta y donde forman puntas que producen la sensación de estar discontinuas, más no es así. Si el objeto se coloca en el proceso experimental de tal manera que la grieta quede orientada en el eje X u horizontalmente, se produce un fenómeno similar al anterior, es decir, franjas de interferencia con formas geométricas parecidas a elipses concéntricas como las mostradas en la figura 6.6; nuevamente lo relevante de éstas es que donde forman puntas, es precisamente hacia donde se encuentra orientada la grieta. En la parte superior de ambas imágenes aparece un defecto, en color oscuro, lo cual no es una grieta sino un defecto o ruido producido en el procesamiento digital de las imágenes.

La imagen de la figura 6.7 son franjas también de correlación producidas por el esfuerzo térmico al que fue sometida la placa de aluminio 6061. Nuevamente se observan las formas de elipses con puntas en la dirección de la grieta. Aquí cabe aclarar que la zona donde existía la grieta no quedó centrada al sistema formador de imágenes. Conviene recordar que en estos dos últimos casos la fuente térmica fue aplicada en diferentes posiciones de la superficie posterior, pero cerca de la grieta. Nuevamente en esta imagen aparece un defecto en la parte superior de ésta, el cual no es una grieta sino es ruido introducido por el sistema procesador de imágenes. En resumen, se asegura y reconoce la existencia de grietas en el material mediante el método ESPI y que puede usarse para la detección de éstas.

El proceso de cómo obtener la imágenes mostradas en las figuras (6.5), (6.6) y (6.7), fue realizado de la manera siguiente. Primeramente se almacena en cinta VHS con videograbadora, los patrones de franjas de interferencia producidos. Después de seleccionar las imágenes más representativas, fueron registradas en la PC, mediante la digitalización con una tarjeta Vision Plus-AT, Ifex en un formato de 260 por 240 pixeles y 8 bits. El mismo proceso fue empleado para el resto de las imágenes presentadas en este capítulo.

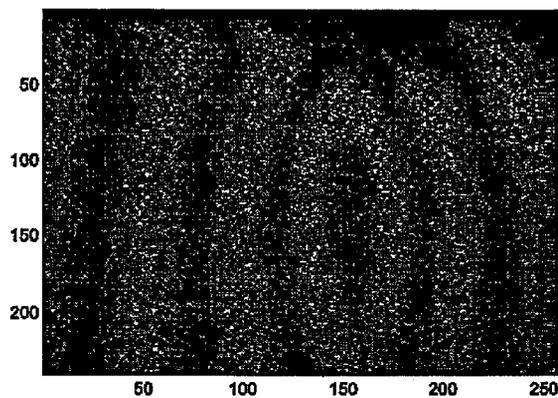


Figura 6.5 Franjas de correlación, grieta rectangular vertical

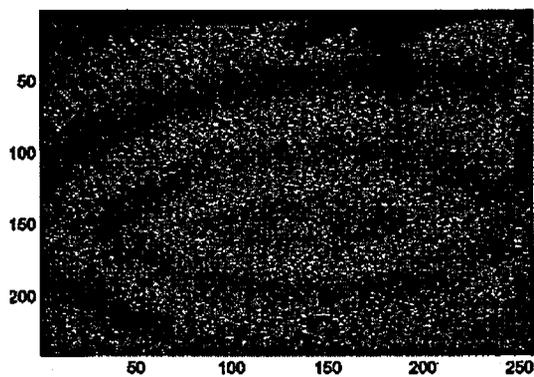


Figura 6.6 Franjas de correlación, grieta rectangular horizontal

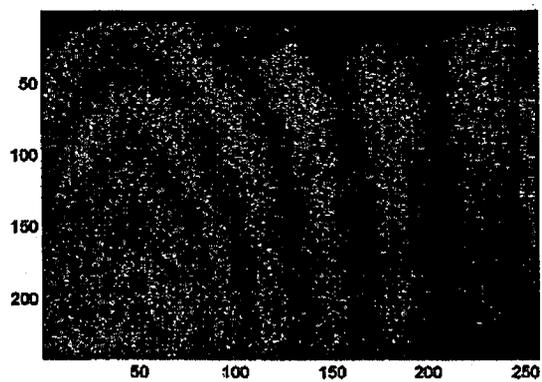


Figura 6.7 Franjas de correlación grieta vertical

La imágenes de las figuras 6.8 y 6.9 son nuevamente patrones de franjas producto de la deformación sufrida por la superficie del cuerpo, mediante la aplicación de carga térmica a la placa de aluminio 6061 con grieta semicircular, cuyo esquema se presenta en la figura 6.2. La cual fue usada como objeto en el mismo arreglo interferométrico ESPI de la figura 6.4. Nuevamente se observa que las franjas de correlación son continuas, pero deformadas formando elipses. La parte donde cada par de franjas forman una punta parecen proporcionar una discontinuidad de éstas y se orientan en la dirección en la que existe la grieta. Puesto que la grieta es semicircular, la orientación de los picos van dando la forma de ella, es decir una curva, indicando con esto, una forma de reconocer el defecto en el material.

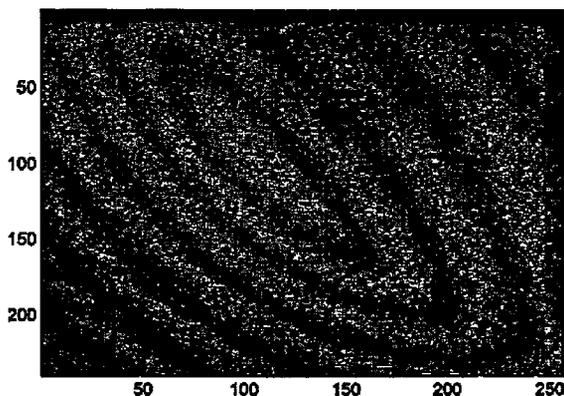


Figura 6.8 Franjas de correlación grieta semicircular

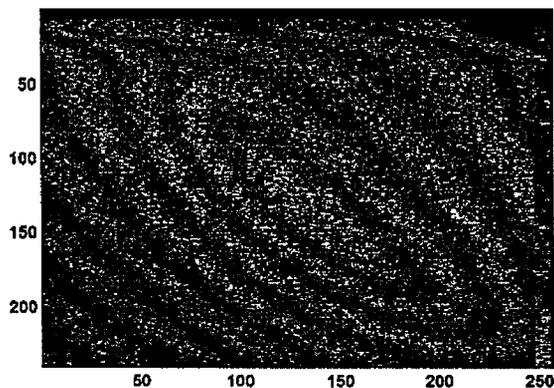


Figura 6.9 Franjas de correlación grieta semicircular

Hasta esta parte del trabajo experimental, se asegura que el sistema ESPI implementado funciona como un reconocedor de desplazamientos fuera de plano, en este caso es en la dirección del eje Z ( como si las partes del objeto se desplazaran saliendo de ésta página). Un aspecto importante es que las franjas de correlación no se interrumpen o cortan por la presencia de la grieta, esto se debe a que el material sólo es discontinuo en la parte posterior de su superficie, con esto se desecha la idea de que las franjas deben ser discontinuas. Cabe recordar que el sistema formador de imagen nunca ve la discontinuidad del material debida a la presencia de la grieta; sino que siempre ve la superficie anterior que es la iluminada sin discontinuidades. Este hecho da más credibilidad al sistema ESPI fuera de plano implementado para detectar grietas. A continuación se presenta la experiencia obtenida en el reconocimiento de fracturas, contenidas en el material.

A continuación se presenta la experiencia obtenida en el reconocimiento de fracturas, contenidas en el material placas de aluminio cuya geometría se esquematiza en la figura 6.3. En este caso, se seleccionó la fractura más delgada que produce una discontinuidad en el material tal que las partes separadas quedan tan juntas, que a simple vista no se percibe la falla. El calor cedido por la fuente térmica “puntual” le provocó una variación de la temperatura a la placa de aluminio, hasta un máximo de 285°C. La posición de la fuente es proporcionada en la Tabla 7.1 del capítulo siguiente. Los patrones de franjas son mostrados en las figuras 6.10 que corresponde a la placa de 3.9mm de espesor y, la imagen 6.11 corresponde a la placa de 1.9mm de espesor en ambos casos la fuente térmica se sitúa en la parte inferior de la fractura. En estas se observan que las franjas de mínima irradiancia, se cortan o interrumpen o defasan en la zona donde existe la fractura; después de ésta, las franjas son continuas. El defasamiento del patrón de franjas de correlación permite inferir que el defecto en el material es una fractura. La figura 6.12 corresponde a un patrón de franjas de interferencia de desplazamientos fuera de plano. En este caso la fuente se coloca en la parte superior de la fractura, observándose una mayor densidad de franjas, produciéndose el mismo fenómeno cuando la fuente térmica se localiza en la parte inferior.

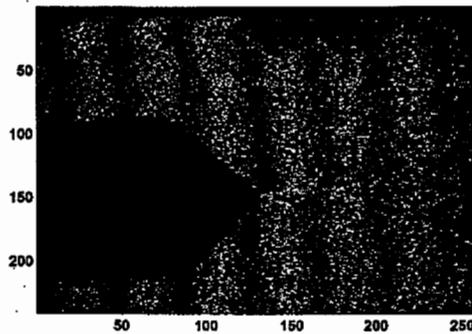


Figura 6.10 Patrón de franjas con fractura en placa de 3.9mm de espesor

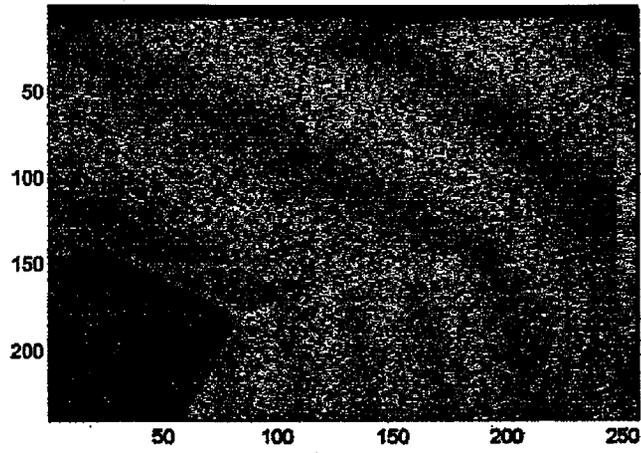


Figura 6.11 Patrón de franjas placa de 1.9mm de espesor con fractura y fuente abajo

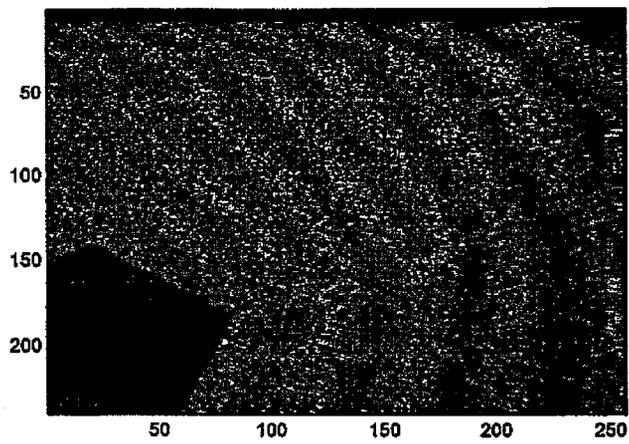


Figura 6.12 Patrón de franjas en placa de 1.9mm de espesor fuente arriba de la fractura

## 6.5 CONCLUSIÓN

El desarrollo experimental arrojó información muy importante que permite detectar fracturas en el material aluminio 6061. Pero también este mismo método, detectó grietas en el material, los tres resultados obtenidos y comentados en la sección anterior 6.4, presentan patrones de franjas de correlación muy característicos, propios del defecto existente. Los patrones fueron grabados en cinta VHS, es decir en imagen de video; la ventaja consiste que esta manera de almacenar la información, se tiene conocimiento desde que se inicia la deformación, hasta que se ha logrado alcanzar un máximo de temperatura y se estabiliza. Mientras que, al suspender la transferencia de calor hacia el objeto sujeto a estudio, retirando la fuente térmica, se observa el fenómeno inverso, es decir, parece que se destruyen franjas de interferencia conforme la placa pierde calor lo que implica disminución de la temperatura. Cabe puntualizar que la geometría de las placas de aluminio 6061 fueron propuestas y diseñadas por el autor de este trabajo de Tesis.

## CAPÍTULO 7

### SIMULACIÓN NUMÉRICA

#### INTRODUCCIÓN

El método de Elemento Finito FEM (siglas en inglés derivadas de Finite Element Method), ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería y otras ramas de la ciencia. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios, estructuras de puentes, análisis del flujo de calor, de fluidos, magnético y filtraciones, entre otros. Con los avances de la tecnología de las computadoras y de los sistemas CAD, pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. Uno de los paquetes comerciales con el que pueden construirse configuraciones alternas antes de construir el primer prototipo, es el software Algor™, que usa el método FEM. Algor™ es compatible con computadoras que tengan una capacidad de memoria grande, este software se usa para modelar y desarrollar análisis de una región compleja que define un continuo, la cual se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre estos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento. Un proceso de ensamble, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de éstas indican el comportamiento aproximado del continuo. En este capítulo se desarrollará mediante el uso del Algor™, un proceso de simulación de análisis de esfuerzo térmico, para detectar grietas o fracturas y que son simuladas en modelos de placas de Aluminio 6061. Los modelos de placa simuladas, deben poseer características muy similares a las placas reales usadas en el desarrollo experimental. Así, son sometidas a un análisis de deformación por esfuerzo térmico, producido por la aplicación de carga térmica sobre ellas.

#### 7.1 SIMULACIÓN DEL MODELO Y OBTENCIÓN DEL ANÁLISIS DE ESFUERZO TÉRMICO

El software Algor™ define al esfuerzo Térmico como aquel esfuerzo resultante de la diferencia de expansión debida a la diferencia entre la temperatura de esfuerzo libre y la temperatura en el nodo. De manera que para realizar un análisis de esfuerzo térmico con el uso del Algor™ se tendrán que realizar dos modelos, sobre uno de los cuales se realiza un análisis de transferencia de calor y que permite obtener un mapa de distribución de temperaturas. El otro modelo debe ser una copia exacta la cual se somete a un análisis estructural o de esfuerzo lineal. La característica importante de éste modelo es la de contener exactamente los mismos nodos que el modelo térmico, excepto que para este caso se debe remover la carga térmica y adicionar cualquier carga externa que lo sujete como condiciones límites. A continuación se presentan los aspectos importantes del análisis del esfuerzo térmico.

Los objetos simulados, fueron cuatro modelos de placa cuadrada de aluminio 6061, con grieta rectangular, semicircular y fractura, como los esquematizados en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 del capítulo anterior. Algor<sup>TM</sup> se usa con una microcomputadora PC con 500Mhz, disco duro de 4GB, tarjeta de video de 8MB y monitor a color Super VGA. El proceso de modelamiento se lleva a cabo por etapas. La primera de ellas se denomina etapa de preproceso; la segunda será la de proceso y la tercera es la de posproceso en al cual se obtiene los resultados.

## 7.2 ETAPA DE PREPROCESO

En esta etapa se construye el modelo geométrico bidimensional usando el procesador SUPERDRAW III de Algor<sup>TM</sup>, que consta de comandos similares a los de un paquete CAD, a éste se accesa mediante el comando Start Algor with Roadmaps. La creación del modelo de placa se inicia construyendo primeramente un rectángulo con la opción ADD: RECTANGULE, de dimensiones de ancho y largo similares a las de la placa de Aluminio real, que fue utilizada en la parte experimental. Para el modelo de placa con grieta rectangular, se continúa construyendo mediante el comando SELECT: ALL: FEA MESH: MESH AUTOMATIC: BETWEEN 2 OBJETS. Se adiciona un mallado de Elemento Finito bidimensional donde se crean los nodos. La grieta se construye marcando con color las partes seleccionadas, diferente al del resto del modelo usando SELECT: POINT: TOGGLE MODE. Después de marcar las líneas con mouse, se les cambia color con MODIFY: UPDATE COLOR: SEIS. Ahora, se selecciona el lugar que ocupará la fuente térmica "puntual" que será simulada con un cuadrado de 1mm de lado. Aquí cabe enfatizar que la posición de ésta debe ser la misma que ocupó la fuente en la parte experimental. Para este caso, el cuadrado se construye justamente en la grieta como se muestra en la Tabla No 7. 1, donde se detalla tal posición. A continuación se realiza un refinamiento en el mallado, principalmente en los alrededores de la grieta, el cual se construye con rectángulos de menores dimensiones que los del resto del modelo. Tal refinamiento permitirá comprender como se deforma el material en esta zona. La figura 7.1 esquematiza este tipo de modelo. El refinamiento del mallado y la colocación del cuadrado que actuará como fuente, debe realizarse de la manera como se ha comentado, para que al producirse el modelo tridimensional exista conexión a través de todo el volumen entre los elementos, teniéndose que cuidar que estén bien conectados.

La construcción del objeto bidimensional con grieta semicircular, se realiza con una rutina que es como la siguiente: estando en SUPERDRAW III, construir un rectángulo con ADD: RECTANGULE, de dimensiones similares a las presentadas en el modelo de la figura 6.2. La construcción de los radios se realiza mediante ADD: CIRCLE: RADIO, dando punto inicial y final en la zona del punto medio de uno de los lados de la placa. Posteriormente se divide la zona entre ambos semicírculos en un número de partes seleccionadas. Para este caso se usa CONSTRUCT: DIVIDE proporcionando 42 divisiones; se selecciona cada línea entre los semicírculos, se le cambia color y se realiza lo siguiente, SELECT: POINT: TOGGLE MODE: MODIFY: UPDATE COLOR SEIS. El proceso continúa con la generación del mallado, usando FEA MESH: MESH AUTOMATIC: BETWEEN 2 OBJETS. Ambas rutinas van creando los nodos. Nuevamente se realiza un mallado pero ahora más refinado y en las proximidades de la grieta. Para este caso, se construye el cuadrado que simulará a la fuente térmica y en la posición especificada en la Tabla 7.1, que fue la posición que ocupó la fuente

térmica real en la etapa experimental. El modelo bidimensional obtenido es presentado en la figura 7.2.

Para la construcción del modelo tridimensional de la placa de aluminio 6061 con fractura, se procede de la manera siguiente. Con SUPERDRAW III y ADD: RECTANGLE, se construye un rectángulo con las dimensiones estipuladas en la figura 6.3 del capítulo anterior. Se crea un primer mallado con FEA MESH: MESH AUTOMATIC: BETWEEN 2 OBJETS. Dentro de éste, se van fabricando los círculos mediante la opción ADD: CIRCLE: RADIO AND CENTER, e ir borrando líneas que queden dentro de éstos, además de conectarlas a la circunferencia. Se continúa seleccionando y marcando las líneas que daran forma a la fractura central, usando SELECT: POINT: TOGGLE MODE: MODIFY:DELETE, además de ADD: LINE:SINGLE. La fractura final y que a la vez se usará para el análisis, se construye seleccionando y marcando las líneas en el lugar que ésta se sitúa, usando la última rutina. La forma de la fractura se da usando MODIFY: POINT MOVE; a continuación se realiza el refinamiento del mallado en los alrededores de la fractura. El resultado de esta rutina y la obtención del modelo bidimensional es mostrado en el esquema de la figura 7.3. Este modelo bidimensional, es la base para generar modelos de diferente espesor, como se describe en el desarrollo subsecuente.

Posición respecto de la parte izquierda y superior.	Placa de Aluminio 6061 con grieta rectangular	Placa de Aluminio 6061 con grieta semicircular	Placa de Aluminio 6061 y 1.9mm de espesor con fractura	Placa de Aluminio 6061 y 3.9mm de espesor con fractura
Horizontal	8.9 cm	7.5 cm	3.9 cm	5.1 cm
Vertical	7.5 cm	7.5 cm	4.3 cm	4.3 cm
Horizontal	8.5 cm			
Vertical	6,5 cm			

TABLA 7.1 Posiciones de la fuente en cada una de las placas

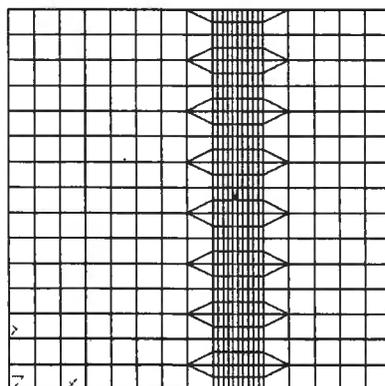
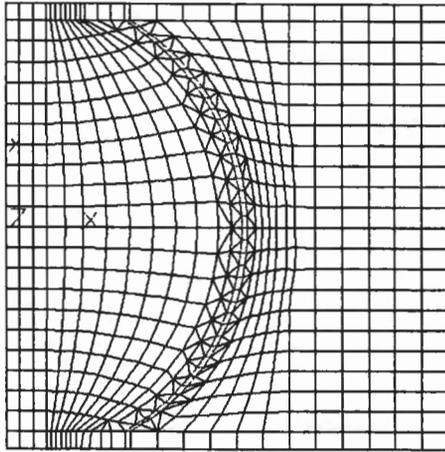
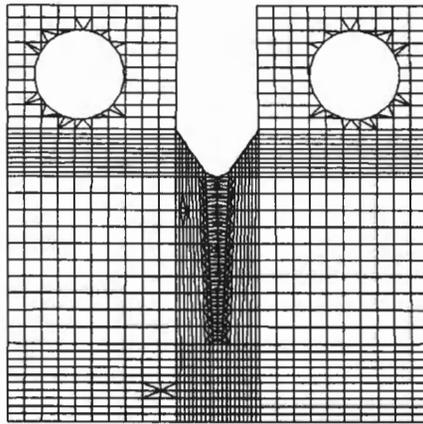


Figura 7.1. Mallado bidimensional, placa de aluminio con grieta



**Figura 7.2** Mallado bidimensional grieta semicircular



**Figura 7.3.** Mallado bidimensional, placa con fractura

### 7.3 ETAPA DE PROCESO

En esta etapa se construye el modelo tridimensional de cada una de las placas, tomando como base los modelos bidimensionales descritos en la sección 7.2; además de agregar las condiciones térmicas, mecánicas, propiedades del material que constituye la placa simulada y un análisis térmico usando el procesador SAPO también de Algor<sup>TM</sup>. Otro proceso que se realiza en esta etapa, consiste en la creación de un modelo similar al térmico y lograr los objetivos de decodificar el modelo, proporcionando las propiedades elásticas y térmicas del material, además de un análisis de esfuerzo lineal. Se describe primeramente la rutina a seguir para la creación del modelo tridimensional con grieta rectangular como sigue: Mediante el

comando SELECT: ALL, se seleccionan todos los puntos o nodos a replicar en el mallado bidimensional de la figura 7.1 y con MODIFY: COPY, se indica la construcción y juntar dos copias de éste. Justamente en esta parte de la rutina, se le ingresan al modelo los datos térmicos, como son los de temperatura y condiciones límites, mediante el comando FEA ADD: STATE AND TRASCIENT TERMAL: APPLIED TEMPERATURE, los cuales se presentan en la Tabla 7.2. Antes de adicionar el valor de la temperatura, se cambia de color los lados del cuadrado, previsto para actuar como fuente térmica, mediante SELECT:POINT:TOGGLE , se selecciona y marcan los lados, y con MODYFI:UPDATE se le proporciona COLOR: UNO, de inmediato ingresar los datos usando el comando FEA ADD. La grieta rectangular en el modelo, es simulada siguiendo la secuencia siguiente: SELECT: BOX : FILTER: COLOR. Se selecciona la superficie a partir de la cual se realizan las copias restantes y MODIFY: UPDATE COLOR: CERO, hace que todos los puntos de la superficie tengan el mismo color, dando MODIFY: COPY, se construyen y juntan las cuatro copias que restan. Mediante SELECT: BOX se seleccionan las superficies convectivas, marcándolas con COLOR: DOS(2). El modelo de mallado tridimensional obtenido en esta secuencia, es mostrado en la figura 7.4; mientras que la figura 7.5 exhibe el modelo tridimensional sólido, en el cual se observa detalles importantes como lo es la grieta además de ser un modelo muy similar al de la placa real. Se guarda el modelo con nombre específico y se sale de SUPERDRAW III.

Para el caso de la construcción del modelo de placa tridimensional con grieta semicircular, se realiza como se describe a continuación: primeramente se construyen dos copias y a la vez se juntan usando la secuencia SELECT: ALL, es decir, seleccionar todos los puntos y, con MODIFY: COPY construir dos copias. Para simular la grieta semicircular se usa la secuencia SELECT: BOX: FILTER, así como MODIFY: UPDATE COLOR: CERO y MODIFY: COPY, para construir las cuatro copias restantes. Marcar las superficies que son convectivas se realiza con SELECT: BOX se selecciona las superficies y con MODYFI: UPDATE se marcan de COLOR DOS. Un paso esencial en este proceso, consiste en cambiar de color las líneas del interior del modelo, excepto las de COLOR UNO. Con esto se evita que la información final se altere, para esto se proporciona SELECT: BOX:FILTER y dar para este caso COLOR SEIS además de seleccionar, inmediatamente dar con el comando MODIFY: UPDATE COLOR CERO. La imagen del mallado tridimensional que se obtiene de este proceso es la mostrada en la figura 7.6; Una representación del modelo tridimensional más representativo es el de placa sólida, mostrada en la figura 7.7, en ella se observa en detalle la grieta semicircular. La imagen representa lo más fiel al modelo de placa real usada durante la etapa experimental. A continuación se adiciona propiedades térmicas mediante el uso FEA ADD: STEADY-STATE AND TRASCIENT TERMAL: APPLIED TEMPERATURE, los datos que se ingresan son la temperatura y las condiciones límites presentadas en la Tabla 7.2. Este modelo fue guardado con nombre específico, antes de salir de SUPERDRAW III.

La generación tridimensional de los modelos de placa de Aluminio 6061 con fractura son de espesor 1.9mm otro de 3.9mm. Siguen un proceso similar para ambos, variando sólo en el espesor, por lo que bastará presentarlo una vez. Haciendo uso del mallado de la figura 7.6, en el cual, se previó el lugar donde se aplica la carga térmica puntual. De manera que para realizar dos copias de éste, que darán como consecuencia una placa de 1.9mm de espesor, se procede usando la secuencia siguiente: SELECT: ALL, permite seleccionar todos los nodos a

replicar, con MODIFY: COPY se producen las dos copias. Cambiar de color los lados del cuadrado donde se aplica la temperatura, se procede con SELECT: POINT: TOGGLE MODE, para seleccionar los lados del cuadrado y usando el comando MODIFY: UPDATE : COLOR, se les cambia color, aplicándoseles UNO. Ahora, mediante el comando FEA ADD: STEADY-STATE AND TRASCIENT TERMAL: APPLIED TEMPERATURE, se especifican temperatura y condiciones límites las cuales son presentadas en la Tabla 7.2, además de dar DONE y POLYLINE APPLY, esta información sirve para que se realice un análisis de transferencia de calor en el modelo. Con SELECT: BOX, se seleccionan las superficies exteriores que serán convectivas, cambiando a COLOR DOS, usando MODIFY: UPDATE COLOR. La imagen de esta etapa es mostrada en figura 7.8 como un mallado tridimensional, pero la imagen más representativa es el modelo de placa sólida, mostrada en la figura 7.9. El modelo para la placa de espesor de 3.9mm, se construye con una rutina muy similar a la presentada aquí, lo único que varía es el número de copias a realizar que para ésta fueron cuatro. La figura 7.10 es el modelo de placa sólida obtenido. Cada uno de los modelo se guarda con un nombre específico y después se sale de SUPERDRAW III.

Valor de la temperatura	Rigidez	Atributos
285° C	1e+7	0.1 / 40

Tabla 7.2 Especificación de temperatura

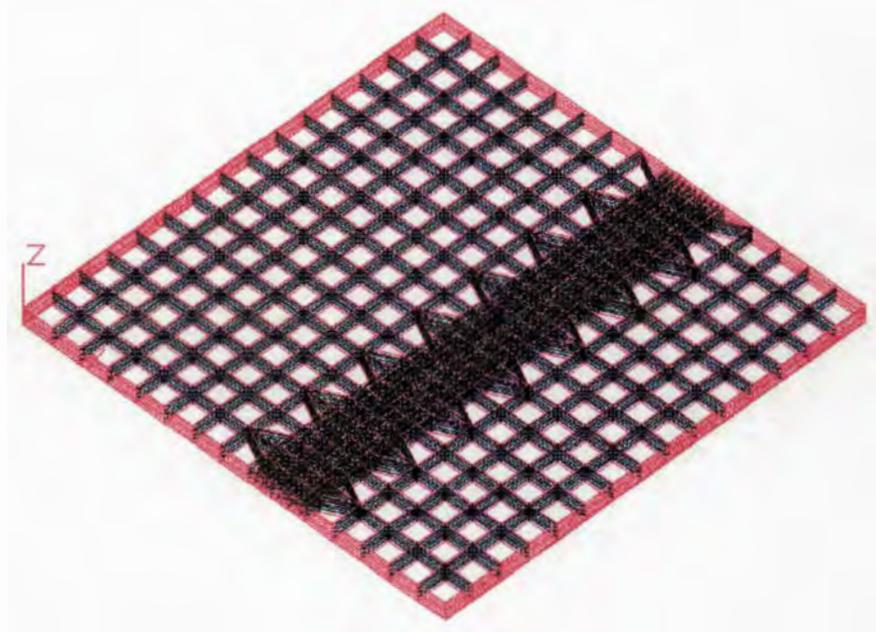


Figura 7.4. Mallado de placa tridimensional con grieta rectangular

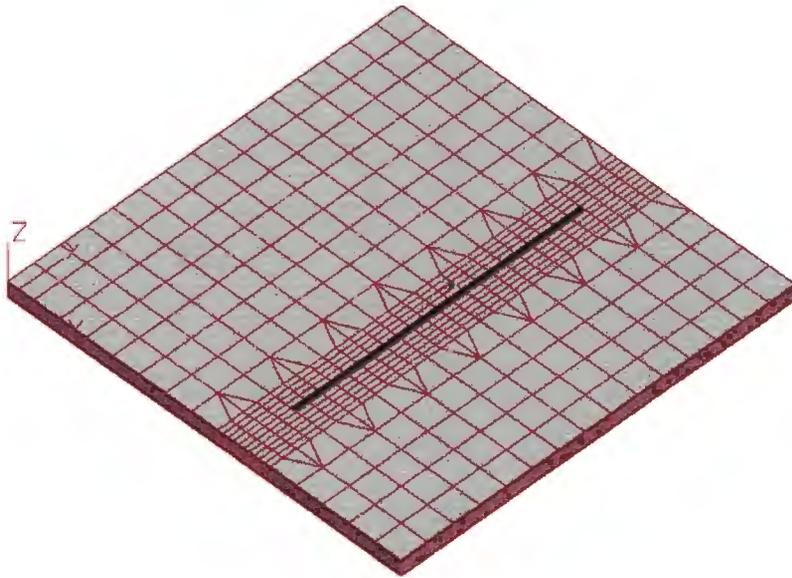


Figura 7.5. Placa tridimensional sólida con grieta rectangular

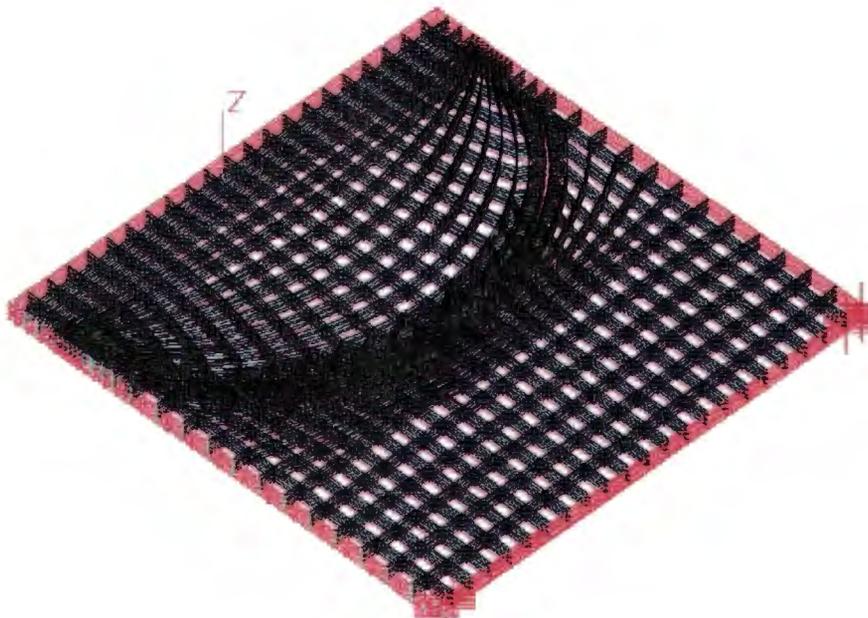
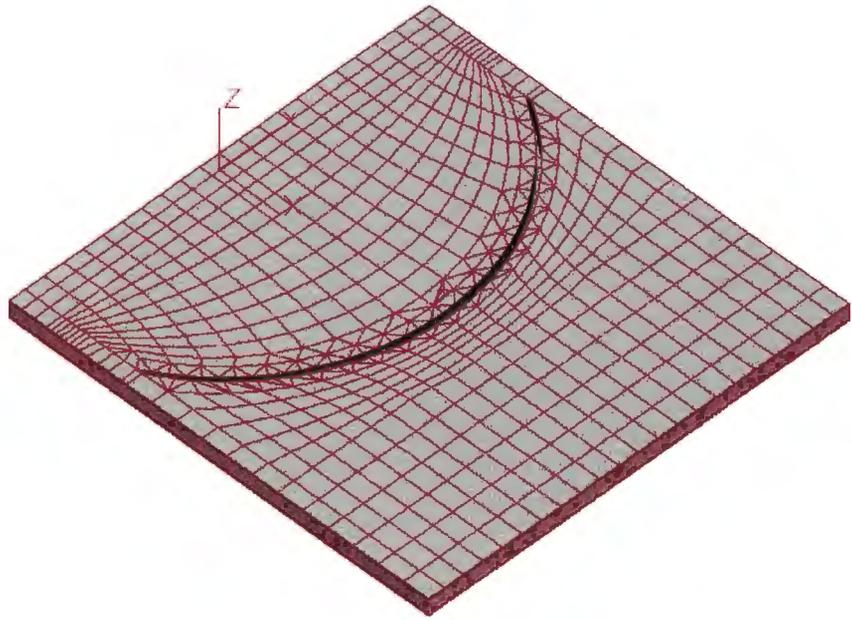
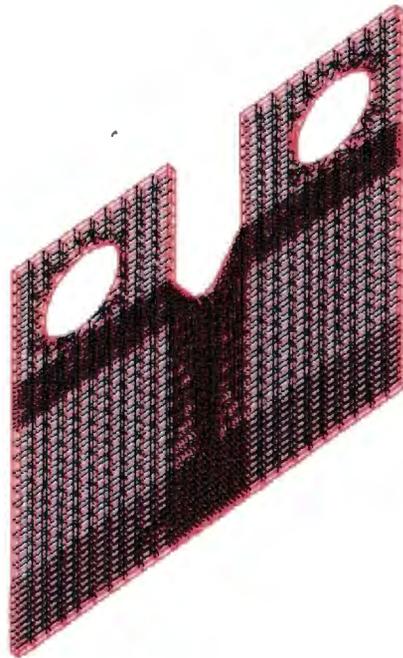


Figura 7.6 Mallado tridimensional de placa, con grieta semicircular



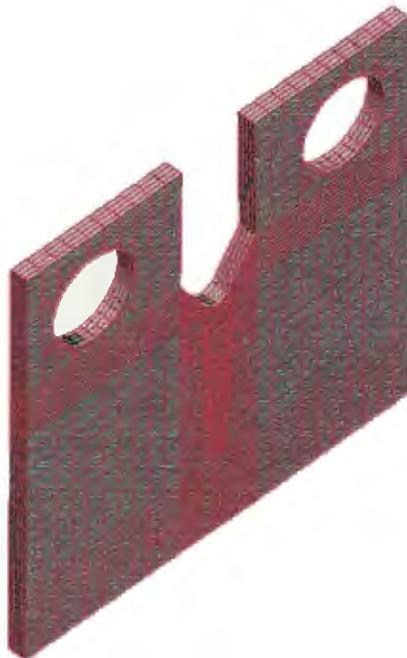
**Figura 7.7** Modelo sólido tridimensional con grieta semicircular



**Figura 7.8** Mallado tridimensional con fractura



**Figura 7.9** Modelo sólido de placa de 1.9mm de espesor con fractura



**Figura 7.10** Modelo de placa sólida 3.9mm de espesor con fractura.

## 7.4 ANÁLISIS Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS TÉRMICOS

En esta parte del proceso, cada uno de los cuatro modelos tridimensionales desarrollados anteriormente, se someten a un análisis de transferencia de calor en estado fijo. En estos casos se utiliza el Procesador SSAP10 del Algor<sup>TM</sup>, el cual usa el archivo de entrada producido por el decodificador térmico y analiza el modelo decodificado. Es usado el análisis de flujo de calor en estado fijo para determinar la distribución de éste y la de temperaturas, lo cual ocurre cuando la temperatura en cada punto, dentro del modelo incluyendo las superficies, es independiente del tiempo. Para que el programa realice lo antes expuesto, se debe proporcionar las propiedades térmicas, como la conductividad del material, que para los cuatro casos fue Aluminio 6061. A continuación se describe la secuencia, puntualizando algunas situaciones. Después de salir de SUPERDRAW III, se conecta al comando DATA ENT: ANALYSIS TYPE: STEADY AND TRASCIENT TERMAL, el cual permite ingresar al decodificador DECOD y en él, usando TYPE, luego dar ENTER en 3-DIM (39), con lo cual se asegura que el modelo a analizar será tridimensional e isotrópico. Mediante la opción GROUP se da el nombre del material, así, como la constante de conductividad térmica, que en este caso es de 165 W/m ° C. Mediante la opción COLOR, se proporciona CERO para las partes internas del modelo no convectivas. También se da CERO para la zona de color UNO, que es no convectiva. Las partes convectivas de la superficie exterior de color DOS se les proporciona los valores de 25° C para la temperatura ambiente y 130 W /m<sup>2</sup> ° C para la convectividad de la atmósfera que rodea al objeto. Con LOAD CASE, se ingresa el valor de uno, ya que es un sólo caso de carga térmica el que se analiza. El modelo se corre mediante el comando RUN, donde se forman y solucionan las ecuaciones derivadas del análisis usando el Método de Elemento Finito. La misma rutina se realiza para los cuatro modelos de placa.

Los resultados del análisis térmico, pueden observarse usando el programa SUPER VIEW. Para esto, basta con realizar la siguiente rutina: Mediante los comando VIEW : TEMPERATURE : SHOW TEMP, se exhibe el modelo de placa tridimensional, con un mapeo de la distribución de temperaturas como los mostrados en las figuras 7.11, 7.12, 7.13 y 7.14, para cada una de las placas respectivamente. En ellas, se observa un recuadro en la parte superior derecha, en él cada color indica la magnitud de la temperatura que se encuentra esa parte del volumen y la superficie que encierra a éste. Con esto, se asegura que se ha logrado realizar un análisis térmico en estado fijo, mediante simulación por computadora con Algor<sup>TM</sup>, resultado que será importante en el desarrollo subsecuente.

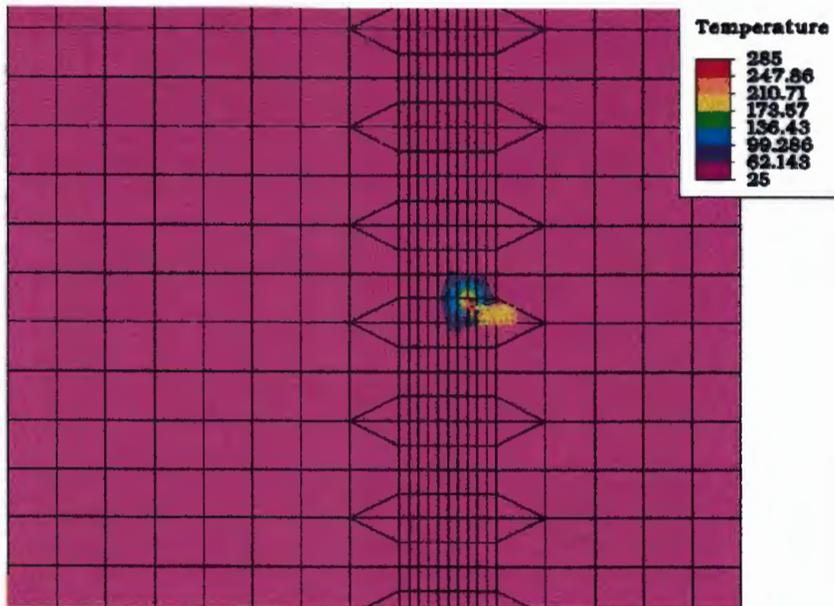
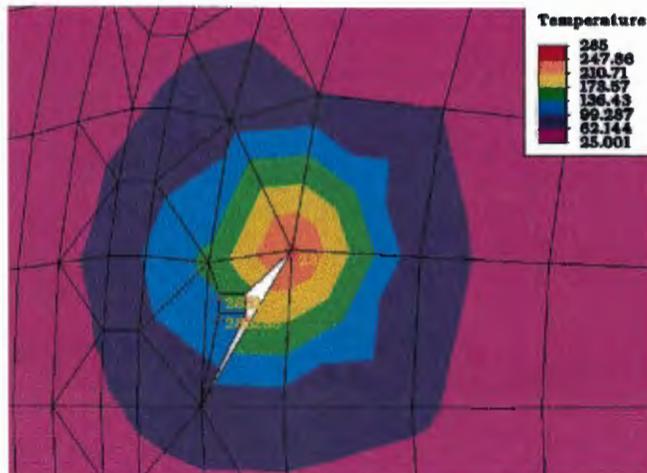


Figura 7.11 Distribución de temperaturas parte posterior Placa con grieta rectangular.



Figur 7.12 Distribució de temparatures, placa con grieta semiciruclar



Figura 7.13 Distribución de temperaturas placa 1.9mm de espesor con fractura.

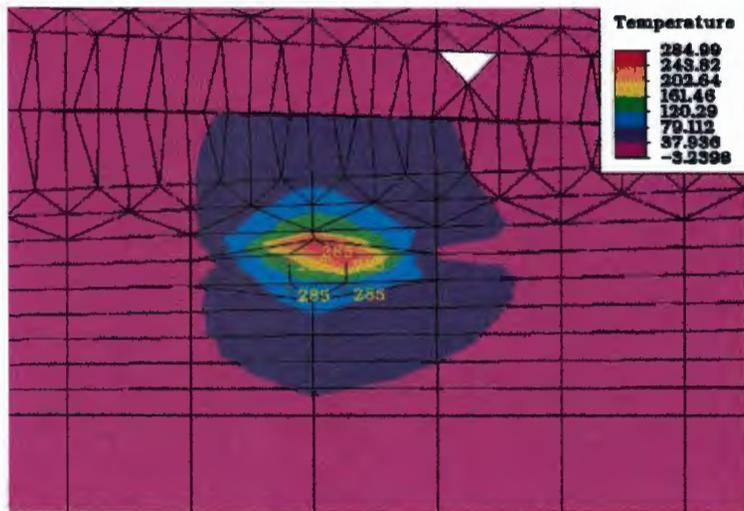


Figura 7.14 Distribución de temperaturas en placa de 3.9mm De espesor con fractura.

## 7.5 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PARA ESFUERZO LINEAL

Otro de los aspectos importantes que permitirán realizar el análisis de esfuerzo térmico, consiste en construir el modelo estructural para esfuerzo lineal. Se requiere que este modelo sea idéntico al usado para análisis térmico, en lo que se refiere a sus nodos, del cual deben ser removidas las cargas térmicas. Existen formas diferentes de fabricarlos, una manera consiste de realizar una copia del modelo inicial, antes de ingresar en él las condiciones térmicas, esto fue lo que se realizó con el modelo de grieta semicircular y el de fractura. El modelo de grieta rectangular se realizó de dos formas. La primera consiste en producir el modelo tridimensional a partir del modelo bidimensional y se sigue la secuencia ya descrita en la sección 7.3. La segunda forma, consiste en generar una copia del modelo tridimensional que se haya realizado previamente. Ambos modelos, tanto el térmico como el estructural debe recalcar que deben poseer lo siguiente: el mismo número de nodos, dimensiones y la misma posición de la grieta, en otras palabras se debe de tener dos modelos tridimensionales iguales, excepto que para el esfuerzo lineal, se tiene que remover la carga térmica, de manera que para hacer el modelo tridimensional de grieta rectangular, se inicia usando el mallado de la figura 7.1. Volviendo de nuevo a SUPERDRAW III y usando los comandos SELECT:ALL y MODIFY, se realizan y juntan dos copias. Las cuatro copias restantes se construyen usando la secuencia siguiente: SELECT: BOX: FILTER y MODIFY. Para adicionar propiedades límites y cargas mecánicas externas, se realiza mediante el comando FEA ADD: STRESS LINEAR AND DINAMIC; con BOUNDARY CONDITIONS, se le adicionan las cargas mecánicas, que en este caso, serán las que sujeten al objeto. Antes de salir de SUPERDRAW III, se salva el modelo con nombre específico.

Mediante el comando DATA ENT, se ingresa al programa DECOD, donde existe un menú que auxilia a decodificar el modelo, adicionándole propiedades elásticas y térmicas. Esto se realiza de la manera siguiente: con el comando TYPE se le proporciona al material aluminio la característica de ser isotrópico, además de dividirlo en BRISKS(LADRILLOS), que es una forma de como lo analiza el Algor<sup>TM</sup>. El comando GROUP, permite adicionar nombre del material que este caso fue Aluminio 6061, así como sus propiedades elásticas y térmicas, las cuales se estipulan en la Tabla 7.3. Un análisis lineal se realiza dando TIPE ANÁLISIS y STATIC LINEAR, en todas las direcciones, es decir, en la dirección X, Y, Z. El número de casos a analizar se ejecuta con LOAD CASE y se proporciona el número UNO en el apartado Heat. El programa se corre con el comando RUN, donde el procesador produce y soluciona el sistema de ecuaciones.

Densidad $\rho$	Módulo de Young Y	Razón de Poisson $\epsilon$	Dilatación térmica cte. $\alpha$	Constante gravitacional g
13,18e3 Kg/m <sup>3</sup>	68.69e9N/ m <sup>2</sup>	0.33	23.39e-6 (1/° C)	9.81m/ s <sup>2</sup>

Tabla 7.3 Valores de propiedades elásticas y térmicas.

## 7.6 ETAPA DE POSPROCESO

El análisis de esfuerzo térmico se realizará con la subrutina ADVANCE, la cual requiere se le proporcionen el nombre de los dos archivos, térmico y estructural. Después de situarse en el programa ADVANCE, se realiza la rutina siguiente: ADVANCE requiere se proporcione el nombre del archivo térmico que fue procesado, dando ENTER para continuar. Los datos sobre coordenadas nodales del archivo anterior, son asignadas con el programa SUPERSAP asignando CERO automáticamente. SUPERSAP revisa también el archivo de temperaturas nodales y automáticamente asigna UNO, además realizará una gráfica binaria (.DO) y nuevamente de manera automática asigna DOS. En este caso sólo se le tiene que proporcionar el número UNO. En el paso siguiente se le proporciona el nombre del archivo del modelo estructural o de esfuerzo lineal, el cual debe ser decodificado con el decodificador estructural antes de ingresar a ADVANCE. En el paso siguiente, se proporciona el nombre seleccionado del archivo de salida. Este será el nuevo nombre para el archivo solución estructural. Este modelo se usará para ser resuelto usando SAPO, es decir, en el que se presentará el análisis final del esfuerzo térmico. La rutina termina dando ENTER, cuando ADVANCE exhibe LOAD CASE (1-1; <R> TO CONTINUE), a la vez se sale del programa. En ADVANCE sólo se puede obtener un perfil de temperaturas en el archivo estructural. Si se desea obtener una solución estructural estática con más de un perfil de temperaturas, es necesario correr diferentes modelos para cada perfil, o el mismo modelo, haciendo los cambios apropiados en éste, para cada perfil.

## 7.7 CORRER EL ARCHIVO GENERADO CON ADVANCE

Para correr el archivo estructural solución generado por ADVANCE, se activa el icono con imagen de rombo, donde aparece la leyenda LINEAR STRESS ANÁLISIS PROCESSOR (SSAPO), además se le da RUN. Aquí, se generan y solucionan las ecuaciones propias del sistema, donde nuevamente se hace uso del Método de Elemento Finito. Terminando lo anterior se esta fuera del programa, por lo que se procede a revisar el análisis de resultados como se describe a continuación. Es importante comentar que, se realizó la misma rutina para los cuatro modelos de placa simulados, en lo que se refiere al procesado con ADVANCE y el corrido RUN del archivo solución, en esta última parte el programa crea y soluciona el sistema de ecuaciones generadas en el análisis de stress térmico.

## 7.8 RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados del análisis de esfuerzo térmico ejecutado por ADVANCE y el procesador SSAPO, se pueden obtener usando el programa SUPER VIW. Para entrar a él, se activa el icono con imagen de TV. Estando en este programa, se exhibe inicialmente en la pantalla la imagen del objeto tridimensional en color blanco con condiciones de frontera; para observar la imagen del modelo simulado, con el perfil de desplazamiento, se usa el comando STRESS DI y POST. La imagen del modelo exhibida es como la mostrada en la figura 7.15,

7.16, 7.17 y 7.18, para las cuatro placas, respectivamente. En ellas se observa una distribución de franjas de color, cada una de éstas indica la magnitud del desplazamiento tridimensional sufrido por las partes del cuerpo sujeto a estudio, que como se ha descrito anteriormente es decir, la información para los desplazamientos en plano y fuera de plano se encuentra de manera conjunta en estas imágenes.

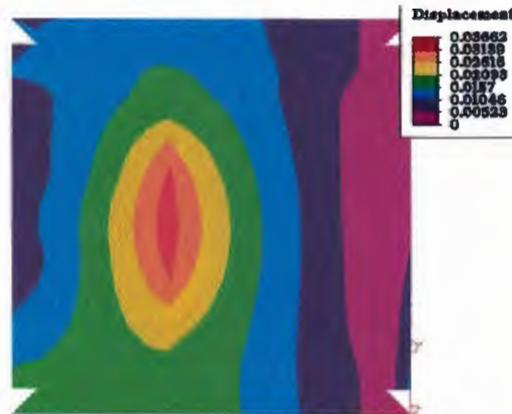


Figura 7.15 Magnitud desplazamiento tridimensional grieta lineal

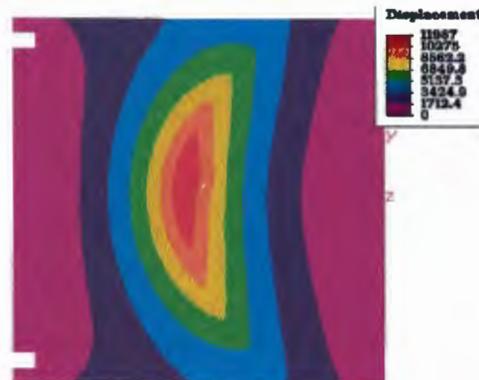


Figura 7.16 Magnitud del desplazamiento tridimensional grieta semicircular

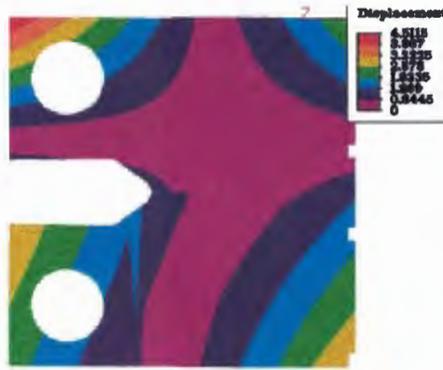


Figura 7.17 Magnitud del desplazamiento  
Tridimensional placa de espesor 3.9mm.

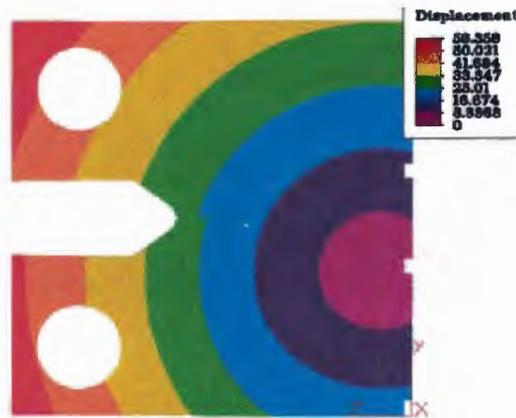


Figura 7.18 Magnitud del desplazamiento  
Tridimensional placa de espesor 1.9mm.

El resultado más importante y que será usado en el estudio comparativo, se obtiene usando el comando VECTOR DES, con esta opción se exhiben los desplazamientos individuales hacia cada uno de los ejes X, Y, Z. Interesa sólo el desplazamiento fuera de plano, que será hacia la dirección Z para el caso del modelo con grieta rectangular y semicircular, así como, para los modelos de fractura. La imagen de la figura 7.19 muestra la distribución del desplazamiento fuera de plano, es decir, hacia el eje Z. En ella se observan franjas deformadas a forma de elipses, formando puntas en la dirección que existe la grieta. Resultado importante y que será usado para el estudio comparativo. La imagen de la figura 7.20, también representan la distribución del desplazamiento en la misma dirección fuera de plano. En este caso, el modelo de placa es el mismo que el del caso anterior, sólo que la posición de la fuente es diferente ver Tabla 7.1. En los dos casos, las puntas de las elipses deformadas forman picos en la dirección de la grieta. Con estas características se llega a conclusiones interesantes, además de inferir que se ha logrado un análisis de esfuerzo térmico.

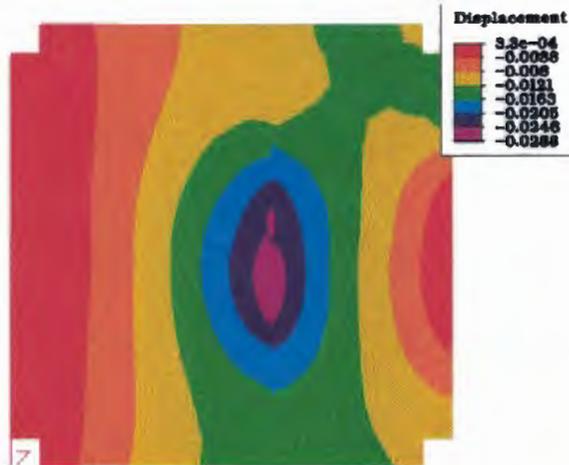


Figura 7.19 Magnitud del desplazamiento fuera de plano, dirección Z fuente en la grieta

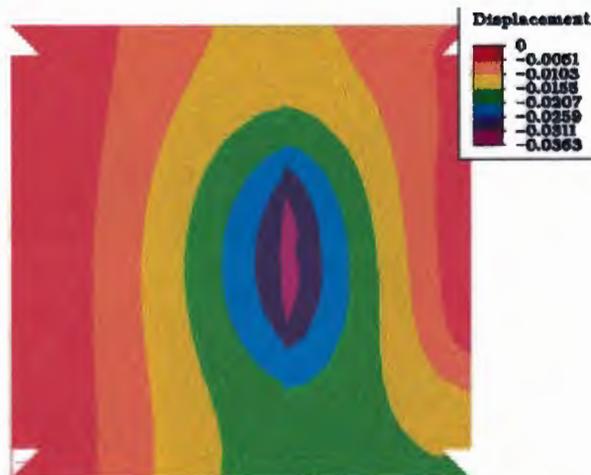


Figura 7.20 Magnitud del desplazamiento fuera de plano grieta rectangular fuente no en la grieta

Otra imagen como la mostrada en la figura 7.21, muestra una distribución de franjas de color, que esquematiza la distribución del desplazamiento fuera de plano. La forma de las franjas es elípsoidal. Por la presencia de la grieta, tales franjas parecen ser discontinuas y forman puntas que se orientan justamente a lo largo de ésta. Lo importante de esta situación es que proporcionan información acerca de la forma de la grieta, que en este caso es semicircular. Resultado que es importante para el estudio comparativo del próximo capítulo.

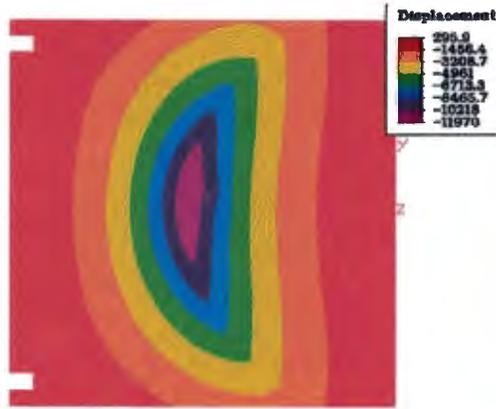


Figura 7.21 Magnitud del desplazamiento fuera de plano grieta semicircular

La tercer y cuarta imagen, muestra la distribución del desplazamiento fuera de plano, que estos en estos casos fue también en la dirección del eje Z. Son mostradas en la figuras 7.22 y 7.23 respectivamente, las cuales fueron derivadas del análisis de esfuerzo térmico, realizado sobre modelos simulados con fractura y de espesores 1.9mm y 3.9mm. En ellas, se observa que la distribución de franjas de color, representan la forma en que se desplazan las partes del material en la dirección fuera de plano, además de que no existe continuidad de estas en ambos lados de la zona de la fractura, es decir, se cortan o se defasan por la presencia de ésta. En el modelo de placa de 3.9mm de espesor, la fuente térmica fue colocada en la parte superior de la fractura. Lo anterior permite obtener conclusiones importantes. Se observa una mayor número de franjas de desplazamiento en el lado en que se encuentra la fuente, mientras que el otro lado la densidad es menor, lo que se confirma con las imágenes antes comentadas.



Figura 7.22 Magnitud del desplazamiento fuera de plano placa 3.9mm de espesor

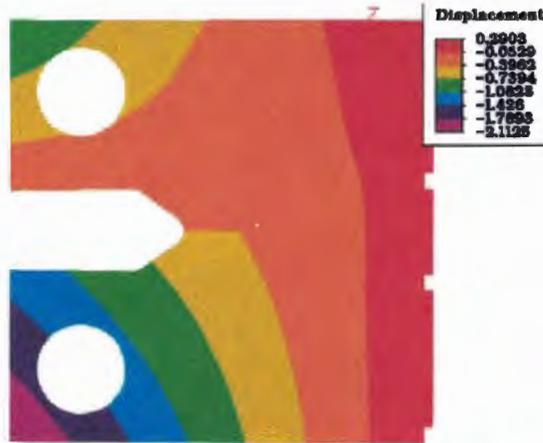


Figura 7.23 Magnitud del desplazamiento fuera del plano placa de 1.9mm de espesor

## 7.9 CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos y mostrados a través de éste capítulo, permiten asegurar que se ha logrado un análisis de esfuerzo térmico. El trabajo total de simulación aporta más información sobre los desplazamientos o deformaciones que ha sufrido el modelo de placa en plano, pero sólo se seleccionó los resultados más apropiados que permitan lograr el objetivo de este trabajo de Tesis. Se muestran imágenes del desplazamiento tridimensional, que es un resultado a esperar, en caso de implementar un interferómetro sensible a los tres desplazamientos en X, Y, Z, en un arreglo experimental ESPI.

## CAPÍTULO 8

### ESTUDIO COMPARATIVO ESPI-FEM

#### INTRODUCCIÓN

Como se manifestó desde la introducción general, el objetivo principal de este trabajo de Tesis, consiste en el estudio comparativo ESPI-FEM de mecánica de fracturas, es decir, proporcionar la información en los aspectos que son similares o en los cuales, ambos métodos se correlacionan. La comparación se realiza en forma cualitativa, presentándose las imágenes más representativas de cada caso.

#### 8.1 COMPARACIÓN ESPI-FEM

La imagen mostrada en la figura 8.1, es obtenida de manera experimental y es un patrón de franjas de correlación por substracción, de la deformación sufrida por la placa de aluminio 6061 con grieta rectangular debida a esfuerzo térmico. Esta se compara con la imagen de la figura 8.2, la cual es obtenida por simulación usando el Algor<sup>TM</sup> y después de haber realizado un análisis también de esfuerzo térmico. Se puede establecer lo siguiente: ambos resultados son semejantes y se correlacionan, en el sentido de que proporcionan la distribución del desplazamiento sufridas por las partes del cuerpo fuera de plano. Para ambos casos fue hacia el eje Z. Lo relevante aquí, es que las franjas de correlación por substracción tienen forma geométrica parecida a elipses, formando picos que se orientan en la dirección de la grieta. De manera similar se puede observar en la imagen obtenida por simulación, en ésta, cada color representa una distribución del desplazamiento, se observa que también presentan una distribución geométrica parecida a elipses, con las partes que forman picos, orientándose en la dirección de la grieta. Las franjas no sufren un defasamiento por la presencia de la grieta en el material, ya que ésta no provoca discontinuidad en éste de manera total. Con lo antes expuesto, se asegura que ambos métodos pueden ser usados para el análisis de grietas, que son un paso inicial para la fractura.

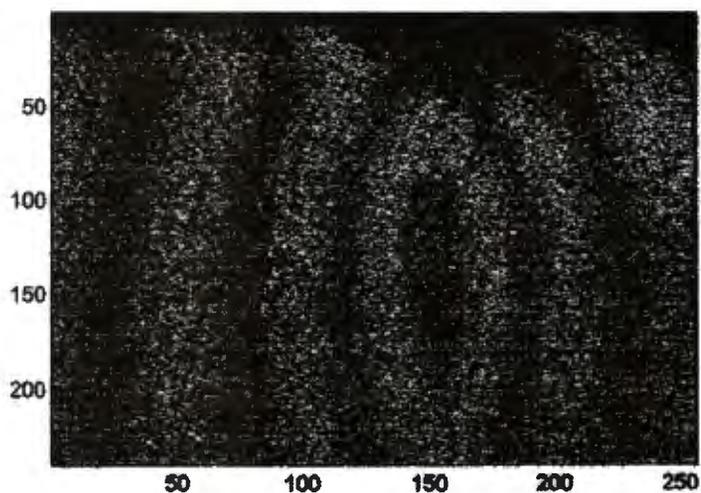


Figura 8.1. Franjas de correlación por substracción obtenidas con ESPI

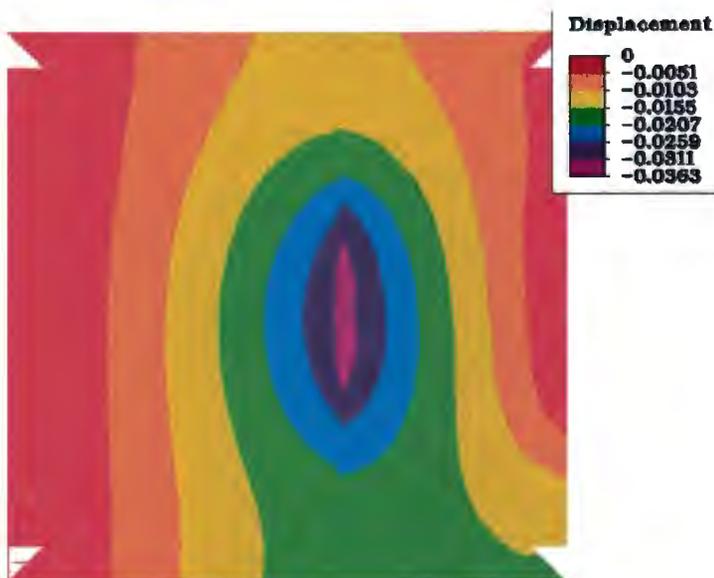


Figura 8.2. Distribución de desplazamientos obtenidos con FEM Placa con grieta rectangular.

Un segundo caso, en el cual se realiza también una comparación ESPI-FEM, de una placa de aluminio 6061 con grieta semicircular. La figura 8.3 es el patrón de franjas de correlación por substracción, obtenidas de manera experimental usando el método ESPI fuera de plano. Nuevamente se observa que éstas, tienen la forma geométrica parecida a elipses que forman picos justamente en el lugar donde se encuentra la grieta, dada la forma de éstas se deduce de aquí, que se reconoce la forma de cómo está dañado el material. La figura 8.4 muestra la distribución de desplazamientos, obtenida de un análisis de esfuerzo térmico mediante el método de simulación numérica con el Algor<sup>TM</sup>, aquí nuevamente se observan formas geométricas de elipses, formado picos en donde parecen separarse y justamente en donde se encuentra la grieta. El conjunto va dando la forma de la curva, bastando esto para identificar el tipo de defecto que tiene el material, lo que implicará que a la postre éste se fracture. Nuevamente se asevera que el método ESPI-FEM es apropiado para la identificación de grietas.

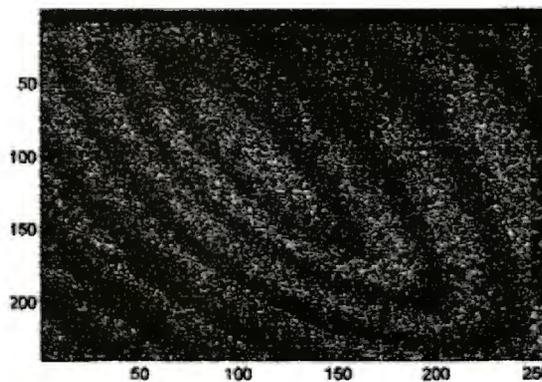


Figura 8.3 Franjas de correlación de desplazamiento Fuera de plano, obtenidas con ESPI.

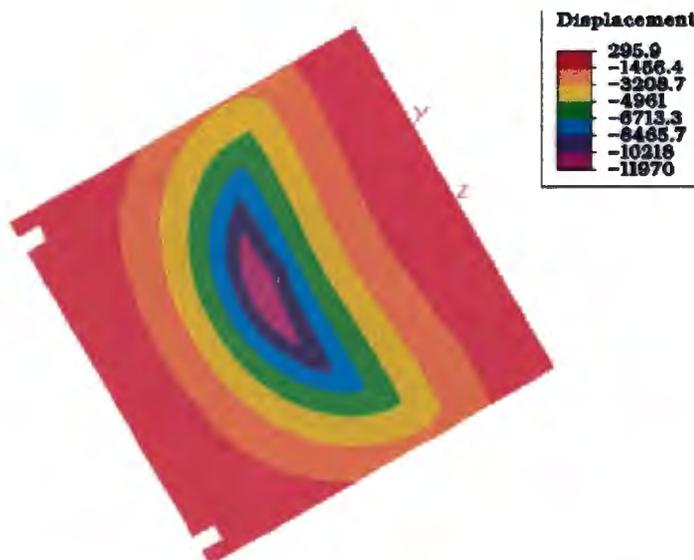


Figura 8.4. Desplazamiento fuera de plano grieta semicircular 30° de rotación, obtenidas con FEM.

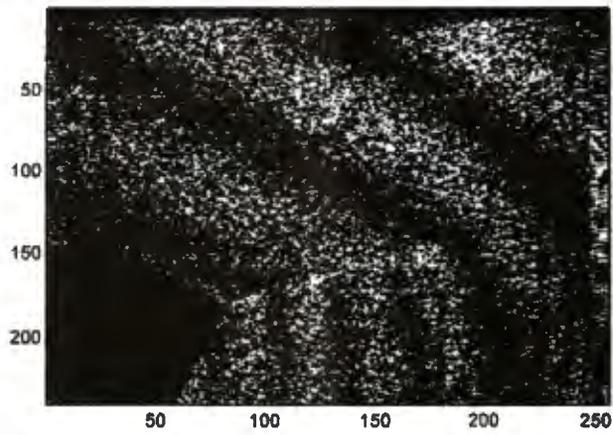


Figura 8.5. Franjas de correlación obtenidas con ESPI, en placa con fractura, desplazamiento fuera de plano.

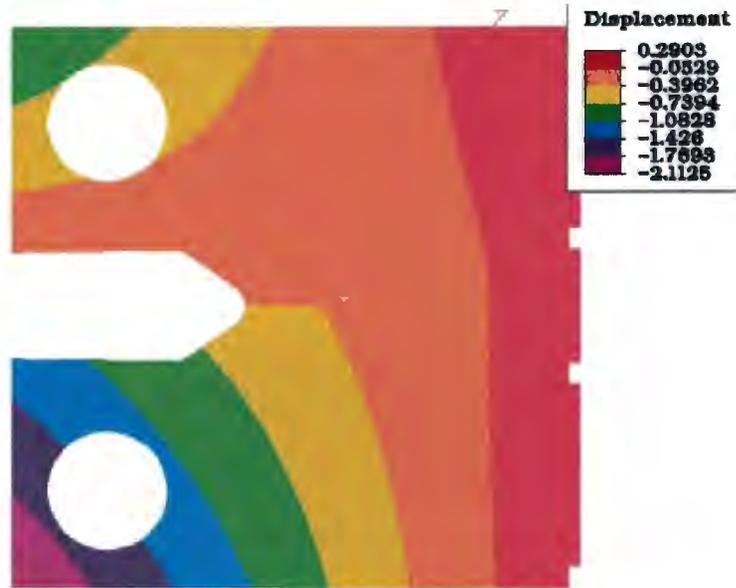


Figura 8.6 Desplazamiento fuera de plano, placa de 1.9mm de espesor.

Como tercer caso de comparación de los métodos ESPI-FEM, se presenta el trabajo realizado sobre una placa, a la cual se le practicó una fractura. El resultado experimental es mostrado en la figura 8.5; se observa que las franjas de correlación por substracción se cortan o sufren un defasamiento, precisamente en la zona donde se encuentra la fractura, presentándose un número mayor de éstas, en la zona donde se aplica la carga térmica y un número menor en el otro lado de la fractura, como se hace evidente en la figura. En referencia a lo realizado por simulación con el Algor<sup>TM</sup>, el resultado obtenido se resalta mediante lo mostrado en la figura 8.6. En ésta, la distribución del desplazamiento en la dirección Z, es remarcada con colores diferentes, mientras que en recuadro de la parte superior derecha se establece la cantidad de estos, además se observa que no existe continuidad de un lado de la fractura a el otro, indicando esto que existe un defasamiento en el movimiento de las partes de la placa en esta zona o también se puede interpretar de la manera siguiente: antes de que las partes del material estén desunidas, bajo la acción de la carga térmica, se desplazarían la misma cantidad o de igual manera, ya que el material se considera isotrópico. Con la fractura, las partes del material en esta región se desunen y bajo la acción de la carga térmica cada parte en uno y del otro lado de la fractura, se desplazan en cantidades diferentes. En este caso aparece un aspecto diferente a los dos casos anteriores, que será característico cuando el material esté fracturado e indicando el daño que existe en él.

## CONCLUSIÒN

Los resultados presentados en este estudio comparativo de los métodos ESPI y FEM, para el análisis de fracturas, pueden considerarse aceptables; aunque el método FEM se considera como un método de aproximación, la imagen generada por este, por ejemplo como la 8.6, presenta la distribución del desplazamiento fuera de plano, en una parte de la fractura muy similar que al obtenido de manera experimental figura 8.5. En la otra parte de la fractura se observa la distribución de desplazamiento fuera de plano, aquí el aspecto más importante es observar el quiebre o defazamiento de las franjas justamente en la grieta. Después de ésta las franjas son continuas, misma situación que se presenta en la imagen experimental. Otro aspecto importante, consiste en que ambos métodos ESPI y FEM pueden ser usados también para el análisis de grietas, como lo demuestran las imágenes de la figura 8.1 a la 8.4, donde se observan resultados obtenidos muy parecidos por ambos métodos.

## CAPÍTULO 9

### CONCLUSIÓN GENERAL

Al finalizar este trabajo de Tesis se cumplió con el objetivo principal, que consistió en establecer una comparación cualitativa entre el método optoelectrónico ESPI y el numérico FEM. Estos fueron usados en la detección de fracturas y grietas en placas de metal aluminio 6061. Se determinó la deformación causada por esfuerzo de origen térmico aplicado sobre ellas, mediante imágenes de franjas de correlación en tiempo real ESPI sensible fuera de plano, siendo confirmadas con imágenes de desplazamiento fuera de plano obtenidas con el método numérico FEM.

Como se observó en la comparación de los resultados, aunque el método numérico FEM es importante ya que ahorra tiempo, a diferencia del método experimental, bien sea óptico o cualquier otro método mecánico, como el uso de las galgas extensiométricas, se debe tener cuidado con el uso de éste, ya que aunque si el modelo a desarrollar es de geometría sencilla, se presentan dificultades. Si el ingreso de la información no es adecuada así como las condiciones límites, que deben ser lo más similares a las aportadas en parte experimental. El método FEM, exige más cuidado en todos los aspectos, si la geometría del objeto a modelar es compleja, el tiempo ya no se puede decir que se ahorra. En este caso se considera que el método ESPI puede ser el que ahorra el tiempo. Se puede considerar que ambos métodos se complementan, por lo que se asegura que ESPI-FEM es un método más poderoso en la mecánica de fracturas.

La comparación cualitativa que se llevó a cabo en este trabajo de Tesis, le sigue aún un proceso de investigación, para establecer una comparación cuantitativa de resultados. Este trabajo proporciona las bases para continuar con la investigación en esta dirección y de esta manera establecer una relación real entre ambos métodos.

## BIBLIOGRAFÍA

### Textos

1. Askeland, Donald R., La ciencia de los materiales e ingeniería de los materiales, Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
2. Becker B. Eric, Graham F. Carey and J. Tinsley Oden, Finite Elements, John Wiley & Sons, 1981.
3. Chandrupatla Tirupathi R., Ashok B. Belegundu, Elemento Finito en Ingeniería, Prentice Hall, 1999.
4. Cook D. Robert, Finite Element Modeling for Stress Analysis, John Wiley & Sons Inc. 1995.
5. Constantine C. Spyarakos, Finite Element Modeling in Engineering Practice, distributed by Algor Publishing Division Pittsburg, PA, 1996.
6. Dailly W. James, William F. Riley, Experimental Stress analysis, McGraw Hill, 1985.
7. Feynman Richard y Robert B. Leighton, Física volumen II: Electromagnetismo y materia, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
8. Goodman Joseph W., Optics Statistical, John Wiley & Sons, 1985.
9. Granados Rodríguez J. de Jesús, Estudio de la deformación y falla en elementos mecánicos bajo cargas térmicas mediante un método numérico. Instituto Tecnológico de León-SEP, 1998.
10. Jones Robert, Catherine Wykes, Holographic and Speckle Interferometry, Cambridge University Press, 1983.
11. Livesley R. K., Elementos finitos, Limusa, 1988.
12. Lynch Charles T., Robert Summitt y Alan Slesker, Handbook of Materials Science, Vol. 1, CRC Press inc. 1974.
13. Oden, J. T., Finite Element of Nonlinear Continua, MacGraw-Hill, 1972.
14. Pytel Andrew, Ferdinand L. Singer, Resistencia de materiales, Harla, 1994.
15. Smith M. I., Griffiths V. D., Programming the Finite Element Method, John Wiley & Sons. 1998.
16. Sirohi Rajpal S., Speckle metrology, Marcel Dekker, Inc., 1993.
17. Zienkiewicz, O. C., and Y. K. Cheung, The finite element method in structural and continuum Mechanics, McGraw Hill, 1967.
18. Puga Soberanes Héctor José, Búsqueda y seguimiento de modelaje para determinar la forma y deformación de una superficie, Centro de Investigaciones en Óptica, 1995.
19. Vera R. Rodríguez, N. Alcalá Ochoa y B. Barrientos, Desarrollo de técnicas ópticas para medición de avance de grietas, CIO, 2000.

### Artículos

20. Barsoum Roshdy S., On the use of isoparametric finite elements in linear fracture Mechanics, pp. 361, 1976.
21. Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and Bulletin of the American Mathematical Society 49: 1-23, 1943.
22. Clough, R. W., The finite element method in plane stress analysis. Proceedings American Society of Civil Engineers, 2d Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pennsylvania, 23: 345-378, 1960.

23. Hogmoen Kare and Ole J. Lokberg, Detection and measurement of small vibrations using ESPI, *APPLIED OPTICS* Vol. 16, No 7, July 1977.
24. Herenikoff A., Solution of problems in elasticity by frame work method. *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME 8: 169-175, 1941.
25. Jia Z. And S. P. Shah, Two-dimensional ESPI and Concrete-fracture Processes, *Experimental Mechanics*, 1994.
26. Kerr David, Ramón Rodríguez Vera & Fernando Mendoza Santoyo, Surface Contouring using ESPI, *SPIE* Vol. 1554 A, 1991.
27. Lanza di Scalea F., S.S. Hong and G. L. Cloud, Whole-field Strain Measurement in a Pin-loaded Plate by ESPI in the Finite Element Method, *Experimental Mechanics*, 1997.
28. Jones R. And C. Wykes, General parameters for the design and optimization of ESPI, *Optica Acta*, Vol. 28, No. 7, 949-972, 1981.
29. Jones R. And C. Wykes, De-correlation effects in speckle-pattern interferometry 2. Displacement dependent de-correlation and applications to observation of machine-induced strain, *Optica Acta*, Vol. 24 No. 5, 533-550, 1977.
30. Moore A..J. and J. R. Tyrer, Phase- Stepped ESPI and Moire Interferometry for Measuring Stress-intensity Factor and J integral, *Experimental Mechanics*, 1995.
31. Peng, S., C. Joenathan and B. M. Khorana, Quasi-equal-path electronic speckle pattern interferometric system, *Optics Letters*, Vol. 17, No. 15, 1040, 1992.
32. Preater W. T. Richard, Robin C. Swain, In-Plane ESPI Measurements in Hostile environments, *SPIE* Vol 1554A, 1991.
33. Ratman M. M. And W.T. Evans, Comparison of Piston Deformation Using Holographic Interferometry and Finite Elements, *experimental Mechanics*, 1993.
34. Roy G. Orientation of principal stress components, *Experimentals techniques* 37, 1994.
35. Tuba I. S., S. K. Chan y W. K. Wilson, On the finite element method in linear fracture mechanics, *Selected Papers on Crack Tip Stress Field*, SPIE Optical Engineering Press pp. 316, 1997.
36. Tracey Dennis M., Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors, *Selected Papers on Crack Tip Stress Field*, SPIE Optical Engineering Press pp. 337, 1997.
37. Wykes C., De-correlation effects in speckle-pattern interferometry 1. Wavelength change dependent de-correlation with application to contouring and surface roughness measurement, *Optica Acta*, vol.24, pp. 517-532, 1977.
38. Wykes C., Use of ESPI in the measurement of static and dynamic surface displacements *Optical Engineering*, Vol. 21 pp. 400, 1982.